SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

DOTTORATO DI RICERCA IN

MATEMATICA

XXXV CICLO

TESI DI DOTTORATO:

GENDER GAP, ANSIA MATEMATICA E DIFFICOLTÀ IN GEOMETRIA DEI GIFTED STUDENTS IN ITALIA: UN'ANALISI SU LARGA SCALA

DOTTORANDO:

LORENZO MAZZA

ADVISOR:

Chiar.mo Prof. ALESSANDRO GAMBINI

TUTOR:

Chiar.mo Prof. ENRICO ROGORA

Versione: 12 febbraio 2023

Difesa in data 04 aprile 2023

Indice

A mia moglie Valentina

e ai miei figli Nicolò e Cecilia,

i quali hanno riempito la mia vita

trasformandola in una splendida

avventura…

1 Introduzione

L'analisi dei risultati delle principali competizioni studentesche e delle indagini nazionali e internazionali mostrano che, in molti Paesi (soprattutto in Italia), il divario di genere (*gender gap*) nelle prestazioni in matematica è particolarmente marcato. Molti ricercatori hanno stabilito come tale divario nelle materie scientifiche, tecnologiche, ingegneristiche e matematiche (STEM), sia in termini di performance che di partecipazione, sia dovuto a molteplici fattori di natura psicologica e socioculturale, come la scarsa fiducia che le studentesse ripongono in sé stesse, la diversa percezione delle proprie capacità nonché l'atteggiamento, le convinzioni e l'influenza di insegnanti e genitori (Fox, 1982; Ceci & Williams, 2007; Andreescu et al., 2008; Guiso et al., 2008; Stoet et al., 2016; Bahar, 2021; Morán-Soto & González-Peña, 2022). Queste differenze persistono anche dopo gli anni trascorsi a scuola. Un recente studio americano ha mostrato come le donne siano occupate maggiormente in ambiti lavorativi diversi da quelli degli uomini, come ad esempio in quello sociale (60%), e solo una piccola percentuale di esse è impiegata in ambiti scientifici (26%) ed ingegneristici (15%) (National Science Board, 2018).

Il divario di rendimento e partecipazione tra maschi e femmine appare particolarmente pronunciato se ci si limita ad analizzare quella fascia di studenti[1] con prestazioni matematiche di alto livello, vale a dire i cosiddetti *gifted students* (Niederle & Vesterlund, 2007; Niederle & Vesterlund, 2010; Ellison & Swanson, 2010; Wai et al., 2010; Makel et al., 2016).

In letteratura non esiste una definizione univoca ed universale di gifted students (French, 2016). Secondo Witty (1940) il talento (*giftedness*) può essere descritto come quella qualità posseduta da coloro le cui prestazioni sono particolarmente notevoli in qualsiasi ambito. Renzulli (1978) definisce il talento come il comportamento di chi possiede abilità, creatività o impegno superiori alla media. Più recentemente, Clark (2008) definisce "dotati" coloro che, grazie all'interazione tra il proprio patrimonio genetico e gli stimoli ambientali, hanno potenziato lo sviluppo della loro intelligenza più di altri, e tale potenziamento si è tradotto in una funzione cerebrale avanzata.

Un'ulteriore descrizione ed interpretazione del talento è stata fornita agli inizi degli anni Ottanta da Tannenbaum (1983), il quale sviluppa il cosiddetto "modello a stella marina", mostrato in figura 1.1.

[1] Nel corso della trattazione, tranne quando diversamente specificato, con la parola studenti si indicheranno indifferentemente studenti di genere maschile o femminile.

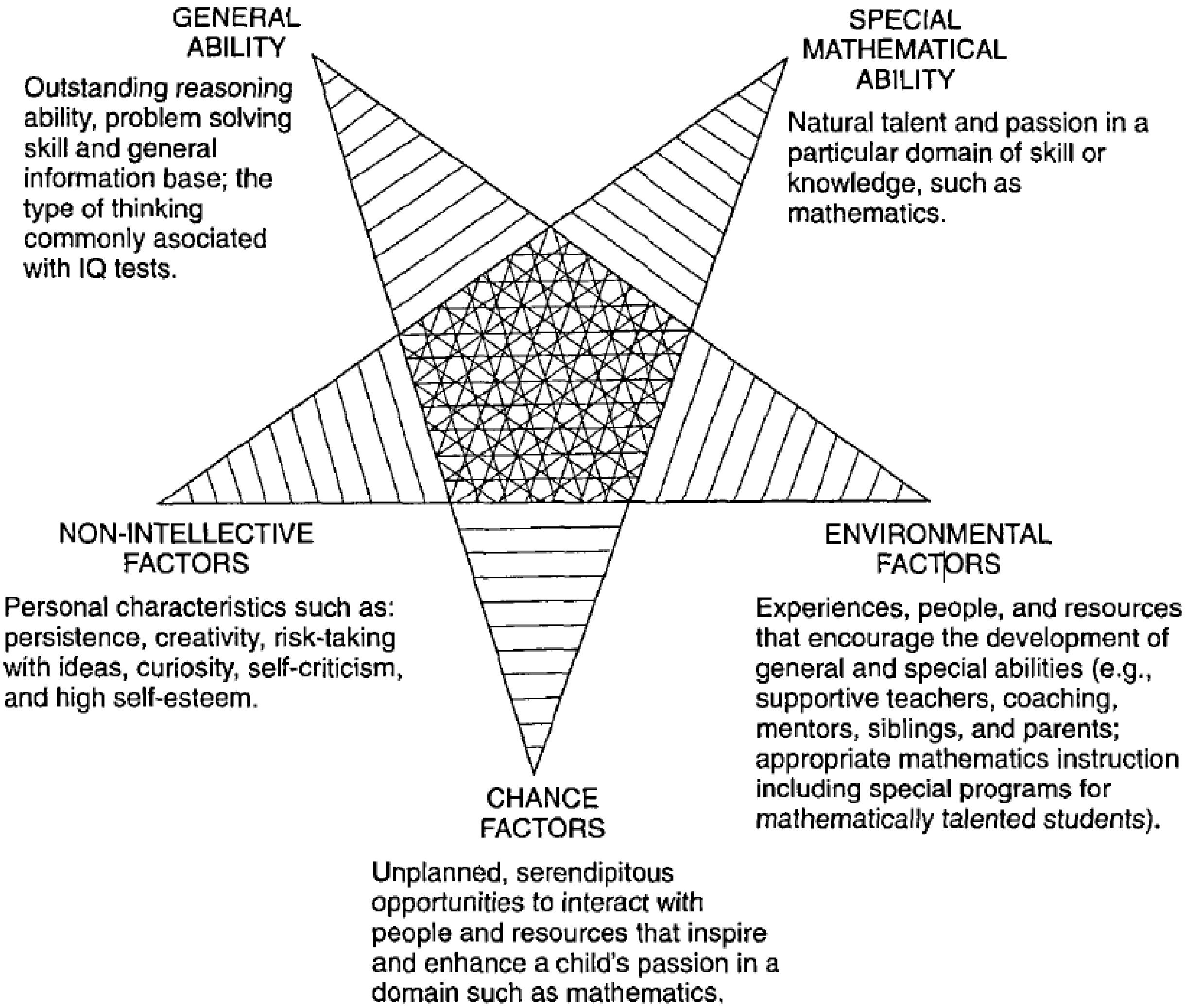


Figura 1.1: modello a stella marina di Tannenbaum (1983)

In accordo con tale modello, il talento nasce dalla sovrapposizione dei cinque fattori mostrati sulle punte della stella, vale a dire:

- abilità generali, cioè le capacità di ragionamento e di problem solving;
- abilità speciali, quali il talento naturale e la passione in un particolare ambito, come ad esempio la matematica;
- fattori ambientali, vale a dire esperienze, persone e risorse (e.g. la famiglia, la scuola, il lavoro, le istituzioni economiche, culturali e sociali) che incoraggiano lo sviluppo di abilità generali e speciali;
- fattori non intellettivi, cioè tutte quelle caratteristiche personali quali ad esempio la creatività, la dedizione, la curiosità, la motivazione, l’autostima;

- fattori casuali, rappresentati da opportunità non pianificate e non prevedibili a priori come, ad esempio, l'interazione con persone in grado di accrescere una certa passione o propensione.

Il talento è dunque una condizione multifattoriale, ottenuta a partire da una diversa combinazione dei cinque elementi che caratterizzano i vertici della stella. Tale modello può ben spiegare il talento in diversi ambiti, tra cui la matematica, la cui manifestazione dipenderà strettamente da una serie di attributi individuali (abilità generali, abilità speciali e fattori non intellettivi) e di risorse esterne (fattori ambientali e casuali) (Le Maistre & Kanevsky, 1997). Proprio per la sua adattabilità a contesti diversi e per il riferimento ad abilità e fattori non intellettivi, si ritiene che il modello a stella marina di Tannenbaum possa rappresentare un buon quadro teorico per interpretare i risultati emersi dalla presente ricerca.

Va specificato, innanzitutto, che i protagonisti della trattazione sono non tanto i gifted students in generale, ma gli studenti che partecipano alle competizioni matematiche. Appare evidente che i due insiemi non sono perfettamente sovrapponibili. La figura 1.2 si ritiene possa spiegare, in un qualche modo, il legame tra l'insieme dei gifted (G) e l'insieme di coloro che partecipano alle gare matematiche. Questi ultimi sono stati divisi in diversi livelli, a seconda del tipo di gara alla quale prendono parte. Ad esempio, con riferimento alle Olimpiadi della Matematica organizzate dall'UMI - Unione Matematica Italiana (cfr. cap. 2), il diagramma O_1 rappresenta l'insieme dei partecipanti ai Giochi di Archimede (gara di istituto), O_2 l'insieme di coloro che accedono alla successiva fase distrettuale ed infine O_3 coloro che si classificano per la finale nazionale.

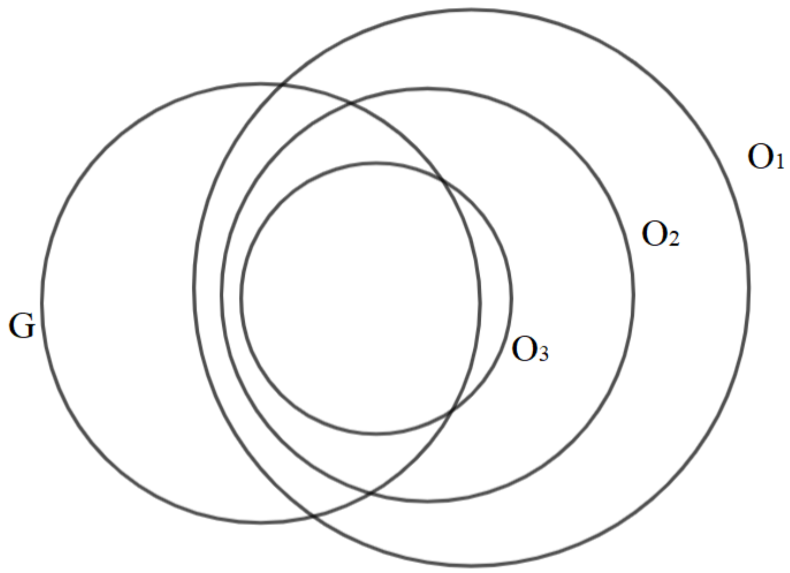


Figura 1.2: possibile relazione fra gifted students e partecipanti alle gare matematiche

La precedente immagine ci suggerisce come man mano che gli studenti vengono selezionati per una gara di livello superiore, l'identificazione di coloro che partecipano alle gare come studenti di talento risulta essere sempre più precisa e accurata[2], fermo restando che non tutti i gifted students prendono parte alle competizioni matematiche (ad esempio, per scelta o per mancata adesione della scuola al progetto). Anche in altri studi alcuni ricercatori hanno mostrato lo stretto legame esistente tra le due tipologie di studenti – di talento e partecipanti alle competizioni matematiche (Wertheimer, 1999; Mattsson, 2013).

Nel caso della presente trattazione e facendo riferimento nuovamente alle diverse fasi delle Olimpiadi della Matematica dell'UMI, non tutti quelli che accedono alla competizione distrettuale rispecchiano le caratteristiche identificative del talento definite da Renzulli (1978), Tannenbaum (1983) o Clark (2008), ma si è osservato che la quasi totalità di questi studenti risulta essere ben propensa a studiare la matematica, mostrando quanto meno un interesse sopra la media nei confronti di tale disciplina. A conferma di ciò, si riportano di seguito le risposte fornite dai 486 studenti che hanno preso parte alla gara distrettuale a Roma nel febbraio 2020, ai quali si chiedeva di indicare il voto[3] ottenuto al termine del trimestre/quadrimestre da poco concluso (cfr. domanda 5 dell'allegato A):

Voto	N. di studenti	Percentuale
10	74	15 %
9	205	42 %
8	113	23 %
7	39	8 %
6	14	3 %
≤ 5	3	1 %
Non risponde	38	8 %

Tabella 1.1: voti degli studenti romani in matematica, partecipanti alla gara del 20 febbraio, al termine del trimestre/quadrimestre

[2] L'immagine ha uno scopo puramente indicativo della relazione esistente fra gifted students e partecipanti alle gare. Infatti, da un punto di vista matematico, la rappresentazione in diagrammi di Venn non si preoccupa della superficie (della misura); quindi, anche se apparentemente $O_3 \setminus G$ è piccolo graficamente, questo non dice nulla sulla cardinalità del sottoinsieme.

[3] Si tenga presente che il voto indica una variabile proxy per l'interesse/propensione in matematica e come tale le informazioni che si deducono non possono essere perfettamente accurate.

Dunque, il focus della ricerca è incentrato sui ragazzi di talento, secondo l'accezione poc'anzi fornita, e sulle competizioni matematiche, con specifico riferimento alle manifestazioni organizzate dall'UMI. Lo studio delle gare matematiche rappresenta un campo di ricerca relativamente recente e, pertanto, anche la letteratura al riguardo non è particolarmente sviluppata (Marushina, 2021; Nieto-Said & Sánchez-Lamoneda, 2022). Nella sua prefazione alla monografia ICME-13, *Competitions for Young Mathematicians: Perspective from Five Continents* (Soifer, 2017), Kaiser scrive che "Despite this high importance of mathematical competitions, either as mathematical Olympiads or as mathematical tournaments of towns or other kind of mathematical competitions, there exists hardly any scientific research about mathematical competitions" [4] (pag. vii). Esistono tuttavia interessanti studi sull'influenza delle competizioni matematiche sull'insegnamento (Surányi, 2001), sul livello di capacità di pensiero creativo degli studenti nel risolvere i problemi delle Olimpiadi della Matematica (Nagy, 2016; Tohir et al., 2018) nonché sulle motivazioni, sulle emozioni e sulle difficoltà che incontrano coloro che pensano e propongono quesiti per le gare (Kontorovich, 2015; Kontorovich, 2020; Poulos, 2020). Nel corso della presente trattazione, per sopperire anche alla scarsa reperibilità di riferimenti bibliografici e di specifiche ricerche sul tema, ampio spazio verrà dato alla letteratura presente sui gifted la quale può in qualche modo fornire indicazioni utili e lenti teoriche valide per contestualizzare e interpretare i risultati osservati [5].

Dopo una prima presentazione del mondo delle Olimpiadi della Matematica in Italia, la ricerca svolta vuole analizzare ulteriori aspetti inerenti al mondo delle gare. Primo fra tutti, il fenomeno del gender gap il quale, come già evidenziato, sembra essere particolarmente marcato fra gli studenti con prestazioni di alto livello. Il tema del divario fra ragazze e ragazzi nelle discipline STEM ha attirato un'attenzione crescente, negli ultimi anni, da parte di studiosi e ricercatori interessati a comprendere la portata del fenomeno in modo da poter valutare e adottare strategie e procedure che possano annullare, o quanto meno ridurre, tale divario, peraltro presente in modo diverso tra i vari paesi partecipanti alle principali rilevazioni standardizzate internazionali. Obiettivo della ricerca è quello di comprendere l'ampiezza del divario fra studentesse e studenti, all'interno del contesto considerato, sia in termini di partecipazione che di performance. Per far ciò, verranno dapprima analizzati i risultati delle gare distrettuali degli anni che vanno dal 2017 al 2020, elaborando semplici statistiche

[4] "Nonostante la grande importanza delle competizioni matematiche, sia come Olimpiadi della Matematica che come tornei matematici cittadini o altri tipi di competizioni matematiche, non esiste quasi nessuna ricerca scientifica sulle competizioni matematiche" (traduzione a cura dell'autore).

[5] Nonostante il riferimento alla letteratura sugli studenti di talento, la terminologia "gifted students", al di là del titolo e dell'introduzione, non viene usata all'interno del presente lavoro. Questo perché, come già dichiarato, studenti che partecipano alle gare e gifted students sono due categorie che, sebbene abbiano diversi punti in comune, non coincidono perfettamente. Se dunque è comprensibile il riferimento alle ricerche già presenti sui gifted students, l'uso sistematico di tale termine risulterebbe impreciso e poco utile.

descrittive (e.g.: numero di partecipanti divisi per genere, punteggi medi in gara …). La scelta dell'intervallo temporale è risultata obbligata in quanto prima del 2017 non avveniva una raccolta sistematica e organica dei risultati delle gare distrettuali da parte dell'ente organizzatore della manifestazione (l'UMI), mentre negli anni 2021 e 2022 la situazione legata all'emergenza da Covid-19 ha comportato una rimodulazione della gara distrettuale, divisa in due fasi distinte e svolte da remoto, che ha determinato, quindi, risultati non facilmente paragonabili a quelli del quadriennio precedente.

Si cercherà in particolare di capire se le ragazze possiedono una percezione diversa, rispetto ai loro compagni maschi, del possibile piazzamento finale, aspetto questo legato ad una maggiore o minore fiducia in sé stessi e ad altri aspetti psicologici, come ad esempio ad un differente livello di "ansia da prestazione". È proprio il tema dell'ansia, così strettamente legato a quello del gender gap, che è stato oggetto di ricerca e di trattazione. Più precisamente, si è cercato di quantificare il livello di ansia percepita da studentesse e studenti sia nel momento in cui sono chiamate/chiamati a svolgere delle verifiche in classe, sia durante le gare, queste ultime impostate per loro natura in modo da accentuare alcuni aspetti competitivi senza però perdere, nelle intenzioni degli organizzatori, dei risvolti ludici, ricreativi e divulgativi. Per studiare tale aspetto, è stato costruito un questionario somministrato ai concorrenti del distretto romano che hanno preso parte alla gara distrettuale del 2020 (si veda l'allegato A). All'interno del questionario erano presenti due specifiche domande sull'ansia matematica, oltre ad altre domande riguardanti le preferenze e le difficoltà riscontrate in gara. Un questionario di approfondimento sul tema dell'ansia è stato proposto a distanza di tempo ad una ristretta selezione dei suddetti studenti romani, ottenendo delle informazioni circa l'ampiezza del fenomeno dell'ansia matematica posseduta dagli studenti in relazione al genere.

Analizzare il fenomeno del gender gap, e quello dell'ansia matematica ad esso collegato, può rappresentare un passo importante per sviluppare processi e metodi di insegnamento più efficaci, migliorare i risultati nelle diverse competizioni studentesche, incoraggiare l'interesse e lo studio della matematica anche fra le ragazze.

Utilizzando ancora una volta i dati forniti dall'UMI, ma sfruttando anche le risposte date al questionario sopra menzionato e somministrato ai soli studenti romani al termine della gara distrettuale del 2020, si è cercato di comprendere quale ambito, tra quelli che contraddistinguono gli esercizi delle gare, crea maggiore difficoltà ai partecipanti. È emerso che la geometria risulta essere la materia più complicata, anche se non necessariamente la meno studiata o conosciuta dagli studenti. L'analisi svolta è stata di tipo puramente quantitativo e i risultati ottenuti rappresentano una tendenza che necessita di ulteriori ricerche e approfondimenti, ma comunque sufficientemente indicativa di un fenomeno che, almeno nei suoi caratteri generali, sembra chiaro e ben delineato. Va detto fin da subito che sulle difficoltà in geometria da parte degli studenti di talento e/o di coloro che prendono parte alle gare si trova ben poco in letteratura, a differenza di quanto è stato scritto per ciò che riguarda le difficoltà degli studenti, in generale e senza distinzione di abilità, in tale ambito (ad esempio Gal & Linchevski, 2010; Kuzniak & Rauscher, 2011; Retnawati et al., 2017; Sulistiowati, 2019). Ci auguriamo che all'analisi svolta, dallo spirito puramente esplorativo, possano seguire in futuro nuove ricerche ed approfondimenti sul tema, non solo mediante indagini di tipo descrittivo, volte a comprendere la portata del fenomeno, ma anche di tipo qualitativo, per meglio capire le ragioni che stanno alla base di tali difficoltà.

2 Le competizioni di matematica in Italia

2.1 Le competizioni studentesche quale mezzo per la valorizzazione delle eccellenze

Quando si parla di competizioni studentesche in Italia, si fa riferimento ad un gran numero di attività volte a riconoscere le eccellenze presenti in ambito scolastico. Tali attività sono generalmente promosse dal Ministero dell'Istruzione e, tra queste, troviamo le Olimpiadi della Matematica, curate dall'Unione Matematica Italiana (UMI).

Sebbene diverse competizioni fossero già presenti nel panorama italiano da diversi anni, è solo con la legge n. 1 dell'11 gennaio 2007 introdotta dall'allora Ministro della Pubblica Istruzione Fioroni, e il successivo D.Lgs 262 del 29 dicembre 2007 recante disposizioni per incentivare l'eccellenza degli studenti nei percorsi di istruzione, che si è cominciato a parlare di valorizzazione delle eccellenze[6]. Nel 2007 il progetto olimpico è rientrato, pertanto, nel programma nazionale finalizzato a promuovere l'innalzamento degli apprendimenti, da parte degli studenti delle scuole secondarie di II grado, in diverse discipline, tra cui la matematica.

Anche il DM dell'8 settembre 2011, firmato dal Ministro Mariastella Gelmini, ha riguardato il tema della valorizzazioni delle eccellenze andando a disciplinare "le modalità con le quali i diversi soggetti, interni o esterni all'Amministrazione scolastica, possono operare in collaborazione con l'Amministrazione scolastica al fine di promuovere e realizzare iniziative di valorizzazione delle eccellenze, a partire dall'anno scolastico 2012-2013, per gli studenti frequentanti i corsi di istruzione secondaria superiore delle scuole statali e paritarie, mediante procedure di confronto e competizione, nei diversi ambiti disciplinari e culturali, organizzate di norma per successive fasi, dal livello della singola istituzione scolastica a quello provinciale o regionale, fino al livello nazionale" (art. 1 del DM 8 settembre 2011).

Attualmente, il DM 207 del 2 agosto 2022 stabilisce quali siano le competizioni che, per l'a.s. 2022-2023, danno diritto a riconoscimenti e premi a coloro che si contraddistinguono raggiungendo risultati di livello particolarmente elevato. I nominativi di questi studenti, unitamente a quelli che hanno conseguito all'Esame di Stato il punteggio di cento e lode, vengono inseriti nell'Albo nazionale delle Eccellenze gestito dall'Istituto Nazionale di Documentazione per l'Innovazione e la Ricerca Educativa (INDIRE)[7]. Nella tabella A del DM 207/2022 si contano 54 diverse

---

[6] https://www.miur.gov.it/web/guest/tematiche-e-servizi/scuola/eccellenze/valorizzazione-delle-eccellenze/normativa

[7] https://www.indire.it/eccellenze/

manifestazioni accreditate (nel 2021-2022 erano 49), divise fra quelle di ambito artistico (tot. 2), economico-sociale (tot. 2), linguistico-letterario (tot. 9), logico-matematico (tot. 11), musicale-coreutico (tot. 1), scientifico- tecnologico (tot. 16), storico-filosofico (tot. 2), tecnico-professionale (tot. 9) e pluridisciplinare (tot. 2). I soggetti promotori delle diverse competizioni sono associazioni, fondazioni, società, università, singole scuole, uffici scolastici regionali o il Ministero stesso. Si tratta, ad ogni modo, di una lista che da sola non va ad esaurire l'intero universo di attività, gare, e percorsi formativi presenti in Italia.

Nel caso specifico della matematica, rientrano nel programma di valorizzazione delle eccellenze le seguenti competizioni[8]:

	competizioni a.s.2022/2023		**soggetti promotori**	**sito web**
1	Campionato dei giochi logici linguistici matematici		Associazione Gioiamathesis	www.gioiamathesis.it
2	Campionati della matematica - Gara a squadre -		Unione Matematica Italiana (UMI)	http://olimpiadi.dm.unibo.it
3	Campionati della matematica - Gara individuale -	*	Unione Matematica Italiana (UMI)	http://olimpiadi.dm.unibo.it
4	Campionati di Informatica	*	Associazione Italiana per l'Informatica e il Calcolo Automatico (AICA)	www.olimpiadi-informatica.it
5	Campionati di Informatica a squadre	*	I.I.S.S. "Aldini Valeriani" Bologna	www.oisquadre.it www.iio.team
6	Campionati di Problem Solving		Direzione generale per gli ordinamenti scolastici, la valutazione e l'internazionalizzazione del sistema nazionale di istruzione	www.olimpiadiproblemsolving.it
7	Campionati Internazionali di Giochi Matematici	*	Centro PRISTEM dell'Università Bocconi	https://giochimatematici.unibocconi.it
8	Giochi Matematici del Mediterraneo		Accademia Italiana per la Promozione della Matematica Alfredo Guidi (AIPM)	www.accademiamatematica.it
9	Kangourou della matematica		Associazione Culturale Kangourou Italia	www.kangourou.it
10	Matematica & Realtà Gara di modellizzazione matematica		Università degli Studi di Perugia	www.matematicaerealta.cloud
11	Matematica senza frontiere		Ufficio Scolastico Regionale per la Lombardia	www.matematicasenzafrontiere.it

Tabella 2.1: competizioni di ambito logico-matematico riconosciute dal Ministero dell'Istruzione per la valorizzazione delle eccellenze, a.s. 2022-2023

* Competizione con fase internazionale

[8] La tabella 2.1 è tratta dal DM 207/2022.

Alcune delle precedenti attività hanno una buona visibilità e un'ampia diffusione sul territorio nazionale. Tra queste, oltre alle Olimpiadi della Matematica organizzate dall'UMI, troviamo i Campionati Internazionali di Giochi Matematici e i Kangourou della matematica.

2.2 I Giochi Matematici della Bocconi e i Kangourou della matematica

I Campionati Internazionali di Giochi Matematici sono organizzati del centro PRISTEM (Progetto Ricerche Storiche E Metodologiche) dell'Università Bocconi di Milano in collaborazione con la *Fédération Française des Jeux Mathématiques*. Nati in Francia nel 1987, si sono svolti in Italia per la prima volta nel 1994 quando vi presero parte poco più di 400 studenti. Nel corso degli anni il numero di partecipanti è fortemente aumentato, fino a raggiungere quota 60.000 studenti nel 2020.

La competizione, composta da tre fasi fino all'a.s. 2020-2021 (semifinali, finale nazionale presso la Bocconi e finalissima internazionale a Parigi o a Losanna), a partire dall'a.s. 2021-2022 si è arricchita di un'ulteriore fase, vale a dire i quarti di finale, che permette ai primi classificati (circa il 40% di coloro che hanno gareggiato) di accedere alle semifinali. Il numero di quesiti e il tempo a disposizione varia a seconda della categoria di riferimento. Esistono infatti cinque categorie di partecipanti: C1 (per gli studenti delle classi prima e seconda della scuola secondaria di I grado), C2 (per gli studenti delle classi terza della scuola secondaria di I grado e di prima della scuola secondaria di II grado), L1 (per gli studenti delle classi seconda, terza e quarta della scuola secondaria di II grado), L2 (per gli studenti della classe quinta della scuola secondaria di II grado e del primo biennio universitario) ed infine GP ("grande pubblico", gara riservata agli adulti, dal terzo anno di università in su). La squadra italiana che gareggia nella finalissima internazionale è formata dai primi tre classificati nella finale nazionale delle categorie L1, L2, GP e dai primi cinque classificati per ciascuna delle categorie C1 e C2. L'Italia si è sempre distinta per gli ottimi piazzamenti ottenuti nel corso degli anni.

La manifestazione ha uno scopo prettamente ludico e divulgativo. Non è richiesta la conoscenza di teoremi particolarmente difficili o di formule complicate, ma solo la capacità di padroneggiare il calcolo di base, oltre ad una buona dose di fantasia, intuizione e voglia di mettersi in gioco.

L'Associazione Culturale Kangourou Italia, in collaborazione con il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano, rappresenta nel nostro paese l'associazione senza scopo di lucro "Kangourou senza Frontiere" ed organizza annualmente, a partire dal 1999, il gioco-concorso denominato "Kangourou della matematica". Si tratta di una gara nata in Australia nel 1981 e svolta in Europa per la prima volta 10 anni dopo. Nell’anno 2021 hanno aderito a tale manifestazione 82 paesi (appena dieci anni fa, nel 2011, erano solo 48 le nazioni partecipanti), per un totale di studenti che negli anni 2010 – 2019 è stato pari a circa 6 milioni di unità per anno, sceso a poco meno di 4 milioni di unità in ciascuno degli anni 2020 e 2021 a causa della pandemia da Covid-19.

Obiettivo della manifestazione è quello di diffondere una cultura matematica di base e di costruire uno strumento di confronto su scala mondiale. I testi dei quesiti, con risposte a scelta multipla o numeriche, vengono elaborati da una commissione internazionale ed opportunamente adeguati, se necessario, ai curricula delle singole nazioni partecipanti.

Così come per i giochi organizzati dalla Bocconi, anche in questo caso esistono diverse categorie in corrispondenza delle quali si hanno diverse tipologie di prove: *Pre-Ecolier* per le classi seconda e terza della scuola primaria, *Ecolier* per le classi quarta e quinta della scuola primaria, *Benjamin* per le classi prima e seconda della scuola secondaria di I grado, *Cadet* per la classe terza della scuola secondaria di I grado, *Junior* per le classi prima e seconda della scuola secondaria di II grado ed infine *Student* per le classi terza, quarta e quinta della scuola secondaria di II grado.

2.3 I Giochi di Archimede

Nell’ambito del progetto “Olimpiadi della Matematica – Gara individuale” affidato all’Unione Matematica Italiana, la prima fase è costituita dai cosiddetti “Giochi di Archimede”. Chiamata anche “gara d’istituto”, si tratta di una competizione rivolta agli studenti delle scuole secondarie di II grado e regolarmente svolta nel nostro paese a partire dal 1983.

Scopo primario della manifestazione è la diffusione di un modo diverso di vedere la matematica attraverso la somministrazione di problemi nuovi e stimolanti, senza limitarsi alla mera applicazione meccanica di formule. Ai partecipanti è richiesto di trovare idee e tecniche creative per poter risolvere tali quesiti, con l’idea di avvicinarli quanto più possibile al tipo di *problem solving* che i matematici di professione incontrano nel loro lavoro.

Il numero degli studenti partecipanti è andato calando negli ultimi anni. Nell’a.s. 2010-2011 le scuole che avevano aderito al progetto sono state 1.759 per un totale di poco più di 260.000 studenti. Nel 2017-2018 il numero di istituti è sceso a quota 1.440 scuole per un totale di circa 200.000 studenti. Anche in altre realtà diverse da quella italiana si è riscontrato un calo di partecipazione alle competizioni matematiche. Citiamo, a titolo di esempio, le AMC (*American Mathematics Competitions*): come osservato da Bahar (2021), dal 2009 al 2019 il numero di studenti per le classi di grado 9 e 10 (equivalenti al biennio della scuola secondaria di II grado) è passato da 61.723 a 40.703, mentre per le classi di grado 11 e 12 (equivalenti al secondo biennio della scuola secondaria di II grado) si è passati da 71.305 partecipanti a 33.461.

Tornando alla realtà italiana, il presidente della Commissione Olimpiadi[9] dell'UMI ha recentemente affermato, in un'intervista rilasciata sul blog di divulgazione matematica "*Math is in the air*"[10], che la diminuzione di studenti potrebbe essere dovuta, più che ad un calo effettivo di interesse e partecipazione, ad una maggiore capacità di rilevare con esattezza il numero di coloro che aderiscono, passando da conti prettamente campionari ad analisi più capillari ed esatte.

Discorso a parte va fatto per quanto riguarda la partecipazione negli ultimi due anni, la quale è stata notevolmente condizionata dalla situazione legata all'emergenza da Covid-19; nel 2020-2021 hanno aderito circa 1.000 istituti e il totale di studenti che hanno gareggiato si è attestato a circa 100.000 concorrenti.

Il numero di quesiti assegnati e il tempo a disposizione è variato nel corso degli anni. A partire dagli anni Novanta fino al 2008, il tempo a disposizione dei partecipanti è stato pari a un'ora e mezza, per poi salire a due ore a partire dal 2009 ed attestarsi a 110 minuti nel 2016 per venire incontro alle necessità delle scuole in cui, non sempre, le ore scolastiche sono da 60 minuti. Il numero di quesiti è stato pari a 20 per il biennio e 25 per il triennio fino all'anno 2011; dall'anno successivo è sceso a 16 per il biennio e 20 per il triennio. Inoltre, a partire dal 2014, l'UMI ha fornito, sia per il biennio che per il triennio, quattro versioni di ciascun testo con gli esercizi e le risposte permutate in modo da ridurre la possibilità di copiatura fra i ragazzi, dando comunque la possibilità ai singoli docenti di istituto di decidere se utilizzarle tutte o in numero minore.

I giochi di Archimede per gli anni scolastici 2020-2021 e 2021-2022 si sono svolti online a causa dell'emergenza da Covid-19. Entrambi gli anni ai partecipanti sono state somministrate delle prove da 12 quesiti da risolvere nel tempo massimo di un'ora.

Ogni anno l'UMI ricorda che la risoluzione di tutti i problemi è da considerarsi un qualcosa di eccezionale; l'ampio numero di esercizi proposti permette agli studenti di poter scegliere quelli a loro più congeniali e la risoluzione anche solo di alcuni problemi, comunque diversi da quelli scolastici e meno banali, è da considerarsi un successo in ogni caso.

---

[9] La Commissione per le Olimpiadi della Matematica è una commissione permanente dell'UMI il cui compito è quello di organizzare il progetto olimpico su incarico del Ministero dell'Istruzione.

[10] http://www.mathisintheair.org/wp/2021/05/olimpiadi-della-matematica-intervista-a-ludovico-pernazza-presidente-della-commissione-olimpiadi-dellumi/

2.4 Gara per ragazzi di classe prima

Un paio di settimane prima della gara di II livello, viene svolta nei singoli distretti una gara di ripescaggio per studenti di classe prima, alla quale prende parte una selezione di ragazzi di primo anno che hanno ottenuto un buon piazzamento nei Giochi di Archimede senza però riuscire a classificarsi direttamente alla gara successiva.

L'obiettivo di questa competizione è quello di avvicinare al mondo delle Olimpiadi della Matematica un maggior numero di studenti, fin dal primo anno della scuola secondaria di II grado, gratificandoli con una gara più adatta alla loro età di quanto non sia quella distrettuale. Nelle intenzioni della Commissione Olimpiadi dell'UMI (ed in particolare del prof. Emanuele Callegari dell'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", il quale ha ideato e fortemente voluto tale gara), si dovrebbe arrivare nel medio/lungo termine ad un ampliamento del numero di concorrenti, ad una individuazione precoce di eventuali eccellenze e quindi anche ad un miglioramento delle prestazioni della squadra italiana nelle competizioni internazionali.

La gara si è tenuta per la prima volta nel febbraio 2013. Il testo, con 20 domande, è stato snellito e portato a 18 domande già dall'anno successivo, senza modificare il tempo a disposizione dei concorrenti (2 ore e mezza). L'organizzazione della gara è affidata al Coordinatore Distrettuale, eventualmente coadiuvato dagli altri Responsabili Distrettuali per quei distretti particolarmente ampi e in cui sono presenti più figure che coordinano le olimpiadi a livello locale. Pur trattandosi di una competizione non strettamente obbligatoria (Coordinatore e Responsabili Distrettuali non sono tenuti ad organizzarla), l'interesse verso questa manifestazione è notevole e ogni anno sono circa 2.000 gli studenti che, in tutta Italia, cercano di guadagnarsi un posto nella gara successiva.

2.5 Gara distrettuale

Chiamata anche "gara provinciale"[11], rappresenta il livello successivo ai Giochi di Archimede e vi accedono coloro che meglio si sono classificati in quest'ultima competizione o che hanno ottenuto un buon piazzamento nella gara per ragazzi di classe prima. Il numero di partecipanti da convocare dipende da una decisione presa autonomamente dai Coordinatori Distrettuali (eventualmente in

[11] Fino al 2011 i distretti erano 102, cioè approssimativamente tanti quante le province ad esclusione di alcune di recente istituzione, motivo per il quale la dicitura "gara provinciale" appariva corretta. A partire dall'anno 2012 si è proceduto ad una successiva fusione di alcuni distretti (nel caso in cui avessero un esiguo numero di scuole o non si fosse riusciti a trovare un docente disponibile a rivestire l'incarico di Responsabile Distrettuale). Ad oggi sono presenti 92 distretti, alcuni corrispondenti a due o tre province, a fronte di un totale di 107 province, a cui si aggiunge il distretto "estero". Appare pertanto più corretto usare la dicitura "gara distrettuale".

concerto con i Responsabili Distrettuali), i quali si occupano anche di correggere le prove, di raccogliere i dati statistici e di comunicarli alla Commissione Olimpiadi dell'UMI, oltre a segnalare i nominativi dei selezionati per la gara nazionale. La gara distrettuale è denominata anche "gara di febbraio" in quanto, ad esclusione dell'anno 2021 in cui si è tenuta in due momenti diversi fra fine marzo e i primi di aprile, in passato si è sempre tenuta nel mese di febbraio.

Il numero di studenti che vi prendono parte in tutti i distretti italiani è pari a circa 10.000 unità, variando leggermente di anno in anno (anche in questo caso i valori sono in flessione; ad esempio, nel 2011 la partecipazione era risultata più ampia, con circa 13.000 studenti partecipanti).

La struttura della prova è variata nel corso del tempo; la versione attuale è in vigore dal 2008 e consta di 17 esercizi di cui i primi 12 a risposta multipla, 2 a risposta numerica e 3 dimostrativi da risolvere in massimo 3 ore di tempo.

Negli esercizi a risposta multipla vengono fornite cinque risposte, di cui una ed una sola è quella corretta. In caso di risposta esatta vengono assegnati 5 punti, ad ogni risposta lasciata in bianco viene assegnato 1 punto mentre nessun punto viene dato per una risposta errata. Stesso punteggio viene assegnato per gli esercizi 13 e 14, il cui risultato è un numero intero. I problemi 15, 16 e 17 richiedono invece una dimostrazione e il punteggio varia da un minimo di 0 (esercizio lasciato in bianco) ad un massimo di 15 punti, secondo una griglia di valutazione che viene di volta in volta rilasciata da parte dell'UMI.

Il testo della gara, negli ultimi anni, è lo stesso per studenti del biennio e del triennio. Per venire incontro ai ragazzi più giovani, che potrebbero risultare svantaggiati da una simile situazione, ciascun distretto è libero di adottare dei criteri che possano prevedere delle leggere rivalutazioni dei punteggi in base alla classe frequentata (e.g. maggiorazione del 20% del punteggio finale per gli studenti del biennio).

L'ammissione alla fase successiva avviene mediante un meccanismo di quote che tiene conto del numero di scuole iscritte al progetto olimpiadi in ciascun distretto ma soprattutto (per i 5/6 del totale) sulla base dei risultati conseguiti dagli studenti alla fase nazionale (ai cui punteggi è assegnato un peso a seconda dell'età dei concorrenti, assegnato in modo decrescente al crescere dell'età)[12], negli ultimi tre anni.

[12] http://olimpiadi.dm.unibo.it/2012/02/16/sulla-recente-modifica-allalgoritmo-delle-quote/

2.6 Gara nazionale individuale di Cesenatico

La gara distrettuale è valida per l'ammissione alla finale nazionale che si svolge, ormai dal 1989, nel mese di maggio a Cesenatico (FC). Solo negli anni 2020 e 2021, a causa della pandemia da Covid-19, la gara si è tenuta in presenza rispettivamente a settembre e a maggio in ciascun distretto, evitando così di dover far stare insieme studenti provenienti da regioni diverse e delegando ai singoli Coordinatori Distrettuali la gestione della competizione, chiaramente con numeri più esigui (nella maggior parte dei distretti italiani si è trattato di far gareggiare 1-3 studenti).

Alla gara nazionale vengono convocati 300 studenti. La tabella 2.2 di pagina seguente mostra la distribuzione assoluta e percentuale degli studenti suddivisi per regione di provenienza per la gara di Cesenatico 2020 e il numero di studenti (assoluto e percentuale) iscritti in tutte le scuole secondarie di II grado per lo stesso anno (fonte: rielaborazione dati UMI e statistiche ISTAT). Come si evince dalla tabella, la maggior parte dei partecipanti proviene dalle regioni del Nord Italia (52%), a fronte di una popolazione studentesca nelle scuole secondarie di II grado pari al 38,5% sul totale nazionale. Le sei regioni del Centro Italia (Toscana, Umbria, Marche, Lazio, Abruzzo e Molise) rappresentano il 23% del totale degli studenti convocati, a fronte di una popolazione studentesca del 22%. Le regioni del Mezzogiorno risultano essere le meno rappresentate: solo il 25% degli studenti che gareggiano a Cesenatico provengono dal Sud Italia, sebbene la popolazione studentesca rappresenti il 39,5% del totale. Il problema del divario fra regioni del Nord e Sud Italia, nelle gare, come in altre valutazioni (prove INdAM, INVALSI …), è ampiamente discusso in letteratura (si veda, ad esempio, Anzellotti e Mazzini, 2009).

Il testo della gara nazionale consta di sei esercizi dimostrativi da risolvere in un massimo di quattro ore e mezza. A ciascun esercizio viene assegnato un punteggio che va da 0 a 7 punti, per un massimo ottenibile pari a 42 punti. In fase di premiazione vengono assegnate le medaglie al 50% dei partecipanti secondo la seguente ripartizione[13]:

- I primi classificati (circa 1/12 dei concorrenti, approssimativamente dalla posizione 1 alla 25) ricevono la medaglia d'oro;
- I successivi 1/6 della classifica (approssimativamente dalla posizione 26 alla 75) ricevono la medaglia d'argento;

[13] Una simile assegnazione delle medaglie è comune con le IMO (cfr. 2.8) e serve per gratificare un numero ben maggiore di 3 persone.

- I successivi 1/4 della classifica (approssimativamente dalla posizione 76 alla 150) ricevono la medaglia di bronzo;
- Tutti coloro che non hanno ottenuto una medaglia, ma hanno risposto esattamente ad un esercizio (prendendo 7 punti), ricevono la menzione d'onore.

Regione	**N. studenti**	**% studenti sul totale**	**N. tot. studenti della regione**	**% tot. studenti**
Valle d'Aosta	2	0,7	4.814	0,18
Piemonte	21	7,0	163.666	6,01
Lombardia	46	15,3	365.657	13,43
Trentino A. Adige	8	2,7	47.307	1,74
Veneto	33	11,0	195.145	7,17
Friuli Venezia G.	13	4,3	46.170	1,70
Emilia Romagna	24	8,0	165.419	6,07
Liguria	11	3,7	58.777	2,16
Toscana	23	7,7	147.312	5,41
Umbria	5	1,7	37.566	1,38
Marche	6	2,0	71.589	2,63
Lazio	26	8,7	255.557	9,38
Abruzzo	7	2,3	63.636	2,34
Molise	2	0,7	16.529	0,61
Campania	19	6,3	348.797	12,81
Calabria	4	1,3	113.827	4,18
Basilicata	2	0,7	34.815	1,28
Puglia	21	7,0	225.520	8,28
Sicilia	20	6,7	279.575	10,27
Sardegna	7	2,3	81.884	3,01
Italia	**300**	**100,0**	**2.723.562**	**100,00**

Tabella 2.2: distribuzione assoluta e percentuale degli studenti, divisi per regione, partecipanti alla finale nazionale del 2020 e di quelli frequentanti le scuole secondarie di II grado

2.7 Gli stage di preparazione alle IMO

Gli stage di preparazione organizzati dall'UMI rappresentano un momento fondamentale ai fini della selezione dei sei individualisti che andranno a gareggiare alle IMO (*International Mathematical Olympiad*). Tale selezione, infatti, si basa non solo (e non tanto) sui risultati della gara nazionale ma anche (soprattutto) sul rendimento durante tali stage, alcuni dei quali iniziano e si concludono con un apposito test[14].

Si dividono in tre tipologie, secondo il livello di difficoltà e secondo gli obiettivi proposti.

Lo stage *Senior* si tiene nei primi giorni di settembre e ha lo scopo di fornire quegli strumenti necessari per affrontare i problemi oggetto delle competizioni internazionali. Per ciascuna sessione di lavoro sono proposti tre diversi laboratori in contemporanea (*basic*, *medium* e *advanced*) ai quali i partecipanti aderiscono scegliendoli liberamente in base alle proprie conoscenze e competenze. Dal 2019 si accede allo stage a seguito di un test di ammissione svolto, nel mese di giugno, in diverse sedi sparse in Italia. I partecipanti sono divisi in "spesati" e in "volontari". I primi sono coloro che si sono particolarmente distinti nella gara di Cesenatico e/o durante precedenti stage; l'organizzazione provvede a pagare loro gli spostamenti per e da Pisa, dove ha luogo lo stage, nonché il vitto e l'alloggio. I secondi, invece, devono provvedere autonomamente alle diverse spese. Nel 2021 lo stage si è svolto online[15] ed è stato aperto a tutti gli interessati, senza necessità di alcun test preliminare.

Il *Winter Camp* si svolge tra fine dicembre e gennaio e sono invitati a partecipare coloro che possiedono già una buona conoscenza del programma olimpico. Ai fini dell'ammissione si tiene conto anche dei risultati ottenuti durante lo stage *Senior*.

Il *pre-IMO* si tiene la seconda metà di maggio e vi partecipano su invito i vincitori della gara nazionale e alcuni di coloro che hanno preso parte in passato ad altri stage. Durante gli ultimi due giorni si svolge il cosiddetto *TST – Team Selection Test*, con modalità del tutto simili a quelle delle IMO. I risultati di tale test, unitamente al rendimento nei precedenti stage e nell'ultima gara nazionale, permettono alla Commissione Olimpiadi dell'UMI di stilare una classifica generale fra tutti i vari partecipanti alle precedenti attività di training olimpico; i migliori sei studenti rappresenteranno l'Italia alle IMO.

---

[14] Il motivo per il quale si preferisce selezionare gli studenti basandosi anche sui risultati degli stage risiede nel fatto che un ottimo piazzamento nella gara nazionale da solo non garantisce che i primi sei studenti rappresentino la miglior squadra possibile. Il monitoraggio delle prestazioni dei ragazzi anche durante gli stage permette di avere un quadro più completo ed affidabile della situazione.

[15] I video sono disponibili alla pagina http://olimpiadi.dm.unibo.it/il-senior-in-pillole/ .

Le lezioni nei diversi stage sono tenute dai membri della Commissione Olimpiadi e da ex concorrenti delle gare, alcuni dei quali studenti della Scuola Normale Superiore di Pisa. Molti dei problemi analizzati provengono dalla *short list*[16] degli anni precedenti.

2.8 Le IMO

Le *International Mathematical Olympiad*, o più brevemente IMO, si svolgono solitamente nel mese di luglio, ogni anno, in un diverso paese ospitante. Ciascuna nazione può portare fino ad un massimo di sei partecipanti. Il numero di nazioni che hanno preso parte all'ultima edizione del 2022 è stato pari a 104 per un totale di 583 concorrenti, di cui 516 maschi e 67 femmine.

Le IMO rappresentano la fase finale di un percorso iniziato, nel nostro paese, con i Giochi di Archimede, come si evince dal seguente grafico:

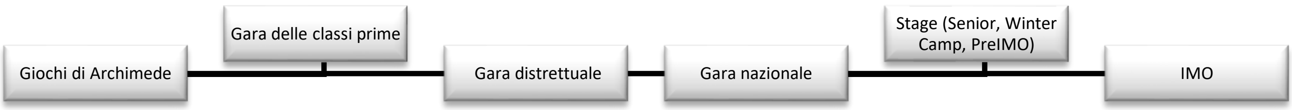


Figura 2.1: le diverse fasi delle competizioni individuali, dalla gara di istituto (Giochi di Archimede) alla finale internazionale (IMO)

La gara è divisa in due giornate, durante ciascuna delle quali i concorrenti sono chiamati a risolvere tre esercizi in quattro ore e mezza; ognuno di essi viene valutato con un punteggio che va da 0 a 7 punti. L'assegnazione delle medaglie segue le medesime fasce di punteggi della gara nazionale individuale di Cesenatico.

La prima edizione delle IMO si è tenuta nel 1959, anno in cui vi presero parte solo sette nazioni (Bulgaria, Cecoslovacchia, Germania dell'Est, Polonia, Romania, Ungheria e Unione Sovietica). L'Italia fu invitata a partecipare per la prima volta all'edizione 1967 in Jugoslavia e la scelta del *team* avvenne per opera della Mathesis che organizzò poco prima, a Perugia, una selezione fra 150 studenti. L'anno successivo, nel 1968, l'Italia partecipò all'edizione di Mosca classificandosi penultima

[16] Ciascuna nazione partecipante alle IMO è invitata a proporre una serie di problemi (*long list*). Successivamente la *Problem Selection Committee* effettuerà una selezione stilando un'apposita *short list*, dalla quale successivamente estrapolare i sei quesiti che andranno a costituire la prova delle IMO.

(davanti solo alla Mongolia) e conquistando un bronzo per opera di colui che, qualche tempo dopo, sarebbe diventato il Presidente della Commissione Olimpiadi (Roberto Dvornicich). La partecipazione italiana si interruppe e, tranne una singola partecipazione nel 1977 (Italia penultima davanti solo all'Algeria), riprese regolarmente solo nel 1983. La performance in quegli anni fu estremamente negativa; basti ricordare l'ultimo posto del 1984 in cui tutti i sei partecipanti, selezionati da un'unica classe di una scuola di Parma e senza venir preventivamente preparati, conseguirono ciascuno zero punti. È solo nella seconda metà degli anni Ottanta che, per opera di Dvornicich e di un gruppo di attori afferenti principalmente all'Università di Pisa, si iniziò a pensare ad una nuova organizzazione e ad un'adeguata preparazione dei concorrenti. Tale organizzazione, opportunamente riadattata nel corso degli anni, ha portato col tempo l'Italia ad ottenere risultati particolarmente ragguardevoli, come la sesta posizione nelle IMO del 2020.

2.9 Le gare a squadre

Discorso a parte meritano le gare a squadre. In alcune realtà, come ad esempio a Roma, una competizione di matematica che prevedesse la collaborazione fra membri della stessa scuola era già stata pensata e organizzata a partire dagli anni '90; a livello nazionale vengono svolte, però, solo a partire dal 2004.

Le gare a squadre rappresentano una competizione più ludica rispetto alle gare individuali, dove, più che puntare sull'aspetto competitivo, si cerca di accentuare lo spirito collaborativo fra i diversi componenti della squadra. Gli esercizi non sono per questo meno difficili rispetto a quelli delle gare individuali, sebbene i componenti della squadra possano lavorare insieme dividendosi generalmente la risoluzione dei quesiti in base alle attitudini e alle diverse predisposizioni dei singoli membri del *team*.

Attualmente le gare a squadre, ad esclusione di alcune specifiche realtà (come ad esempio Roma, dove è rimasta la tradizione di una gara a risposta multipla svolta presso Sapienza Università di Roma e una successiva selezione presso l'Università Tor Vergata) vengono svolte in due distinti momenti: una prima gara locale e una successiva fase nazionale.

Le selezioni locali avvengono in presenza in diverse città italiane; solo negli anni 2020-2022 sono state svolte da remoto. Ogni scuola può partecipare con una o più squadre purché su campi di gara differenti. Negli ultimi anni hanno gareggiato oltre 600 squadre, ciascuna composta da 7 membri (di cui un capitano e un "consegnatore"), e le migliori 120, secondo un meccanismo di quote assegnato a ciascun campo di gara, sono ammesse alle semifinali nazionali di Cesenatico. Nelle semifinali vengono selezionate circa 30 squadre che competono fra loro per guadagnarsi il primo posto nella finale nazionale. Anche le semifinali e la finale, nel 2020 e nel 2021, si sono tenute a distanza.

Dal 2017 è stata introdotta una nuova gara, riservata alle ragazze, con una fase locale che si tiene nel mese di gennaio (alla quale partecipano mediamente 200 squadre) e, dal 2018, anche con una finale dedicata, a Cesenatico. Le due competizioni a squadre femminili (locale e finale) hanno come obiettivo quello di far gareggiare fra loro le ragazze in un ambiente riservato, appunto, ma non per questo semplificato (il livello di difficoltà dei testi è del tutto analogo a quello delle gare miste), nella speranza che possano avvicinarsi al mondo della matematica olimpica senza particolare ansia da prestazione o senza sentirsi minoritarie in un contesto che, numeri alla mano, si è visto essere prevalentemente maschile e, come tale, potrebbe scoraggiare a priori la partecipazione delle ragazze.

Nelle intenzioni dell'UMI, la gara deve essere il più possibile inclusiva e promozionale, tanto che è rimasta gratuita anche quando, dal 2019, è stato introdotto un pagamento per la partecipazione alle gare a squadre miste per far fronte ai recenti tagli ministeriali ai fondi dedicati al progetto olimpiadi.

L'idea di una gara riservata alle ragazze è stata anticipata, a livello internazionale, dall'introduzione delle EGMO (*European Girls' Mathematical Olympiad*): si tratta di una gara individuale tenutasi per la prima volta nel 2012 nel Regno Unito, alla quale sono invitate a partecipare 4 ragazze per ciascun paese europeo, cui si aggiungono alcune rappresentanze di paesi extraeuropei. Anche in questo caso l'obiettivo è quello di diffondere la passione per la matematica e di stimolare la partecipazione femminile alle Olimpiadi della Matematica, nella convinzione che tale passione non sia minoritaria - rispetto ai ragazzi - specie se messe nelle condizioni di gareggiare in un clima confortevole e amichevole (Massotti & Mazza, 2019).

3 Il fenomeno del gender gap fra studentesse e studenti durante le gare di matematica

3.1 Il gender gap nelle prove standardizzate

Il gender gap rappresenta uno dei molti fenomeni oggetto di studio nell'ambito della didattica della matematica.

Come sottolineato da Leder & Forgasz (2008), l'introduzione a livello internazionale, negli ultimi 20 anni, di prove standardizzate volte a misurare le abilità e le competenze degli studenti ha attirato l'attenzione della comunità internazionale sulla disparità di prestazioni tra maschi e femmine, permettendo a sua volta di analizzare tale fenomeno con particolare riferimento alla distribuzione geografica, ai sistemi di istruzione specifici di ciascun paese e ai contesti socio-economici e culturali.

Le misurazioni internazionali più diffuse, in termini di valutazione, sono rappresentate dalle prove PISA (*Programme for International Student Assessment*) dell'OECD (*Organisation for Economic Co-operation and Development*) e dalle prove TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) dell'IEA (*International Association for Evaluation of Educational Achievement*).

Le prove PISA hanno lo scopo di valutare l'acquisizione di competenze chiave necessarie per una partecipazione piena e attiva dei cittadini alla società. I test si svolgono ogni tre anni: la prima edizione si è tenuta nel 2000 e il campione di riferimento è composto da un certo numero di studenti quindicenni di oltre 70 Paesi, tra cui l'Italia. Le prove si concentrano sulla valutazione delle prestazioni degli studenti in Lettura, Matematica e Scienze (*Reading Literacy, Mathematical Literacy, Scientific Literacy*), sebbene ogni edizione abbia un focus specifico su un determinato ambito. A questi, si aggiunge un'indagine facoltativa su un ulteriore ambito, di volta in volta diverso, come ad esempio l'abilità di risoluzione collaborativa di problemi o la creatività.

Le prove TIMSS sono state progettate per valutare l'acquisizione di contenuti e competenze in matematica e scienze da parte degli studenti frequentanti la classe quarta della scuola primaria (grado 4) e la classe terza della scuola secondaria di I grado (grado 8). La prima edizione risale al 1995 e successivamente sono state svolte ogni 4 anni. I paesi partecipanti sono circa 60.

Un'ulteriore indagine dell'IEA, denominata TIMSS Advanced, si concentra sull'apprendimento degli studenti in matematica e fisica nell'ultimo anno della scuola secondaria di

II grado (grado 13). L’ultima edizione si è svolta nel 2015 e ha coinvolto diversi tipi di scuole secondarie, in particolare i licei scientifici e gli istituti tecnici.

A livello nazionale, possono esistere altre prove standardizzate volte a verificare l’acquisizione di determinate competenze in particolari ambiti; è quanto accade, ad esempio, con le prove INVALSI in Italia, che si svolgono annualmente in tutte le classi del secondo e quinto anno di scuola primaria (grado 2 e 5), di terzo anno di scuola secondaria di I grado (grado 8) e di secondo e quinto anno di scuola secondaria di II grado (grado 10 e 13) e riguardano l’italiano e la matematica. Per le classi conclusive di ciascun ciclo scolastico (grado 5, 8 e 13) è prevista anche una prova di inglese.

L’analisi dei risultati di matematica nei diversi test standardizzati sopra menzionati mostra che il fenomeno del gender gap, in termini di performance, non si verifica in egual misura in tutti i paesi partecipanti. Al contrario, a volte accade che in alcune nazioni le femmine ottengano risultati migliori dei maschi, mentre altre volte la differenza di rendimento è minima e quindi statisticamente insignificante (OECD, 2012; 2013; 2015; 2016 a, b, c, d; 2019 a, b). Tuttavia, in circa la metà dei paesi considerati si osserva un divario significativo a favore dei ragazzi, e questo accade sia per quelli con risultati complessivi superiori alla media, sia per quelli con risultati inferiori alla media. Va detto, d’altra parte, che la difficoltà di raggiungere alcune regioni per somministrare la prova, o la difficoltà che incontrano le ragazze a proseguire gli studi fino all’età di 15 anni (l’età in cui vengono somministrati i test PISA) possono influenzare in modo significativo i risultati delle misurazioni (Giberti, 2019).

Con riferimento alla situazione italiana e all’ambito della matematica, analizzando sia i risultati del PISA 2015 e 2018 e quelli dei test TIMSS, si può notare come l’Italia sia uno dei Paesi in cui la differenza di prestazioni tra ragazze e ragazzi è tra le più marcate. Questo è particolarmente evidente (nel caso dei test TIMSS) per gli studenti dell’ottavo grado rispetto a quelli di grado quarto (Giberti, 2019; Giberti & Ferretti, 2019). La situazione, alquanto preoccupante, è confermata anche dalle misurazioni INVALSI effettuate a livello nazionale (INVALSI, 2016; Contini et al., 2017; INVALSI, 2017), dove il fenomeno del gender gap viene riscontrato in modo significativo in tutti i livelli scolastici interessati dalla misurazione.

3.2 Il gender gap e i diversi livelli di abilità

Recenti ricerche (Andreescu et al., 2008; Ellison & Swanson, 2010; Niederle & Vesterlund, 2010; Olszewski-Kubilius & Lee, 2011; Makel et al., 2016) hanno mostrato come il divario di prestazioni tra maschi e femmine sia più accentuato tra gli studenti con alti livelli di abilità in matematica (al di sopra del 95° percentile). Già nei primi anni Ottanta, Benbow e Stanley pubblicavano alcuni articoli riguardanti lo *Scholastic Assessment Test-Mathematics* (SAT-M) di oltre 40.000 studenti fino a 13 anni, che mostravano come il rapporto tra maschi e femmine (indicato con MFR) per la fascia più alta dello 0,5% (99,5° percentile e punteggio ≥ 500) fosse di 2 a 1, per salire a un rapporto di circa 13 a 1 per lo 0,01% più alto (punteggio 700-800). Ricerche successive (Wai et al., 2010; Olszewski-Kubilius & Lee, 2011; Makel et al., 2016) hanno mostrato che negli anni successivi alle ricerche di Benbow e Stanley, in particolare dal 1980 al 2015, il rapporto maschi/femmine è gradualmente sceso a 2,5 per la fascia alta dello 0,01%, denotando un'attenuazione del fenomeno del gender gap, sebbene risulti ancora significativo.

Il divario tra maschi e femmine tende ad aumentare non solo in funzione del livello di abilità, ma anche con l'età (Hyde & Mertz, 2009; Fryer Jr. & Levitt, 2010; Contini et al., 2017). Ad esempio, Contini et al. (2017) hanno preso in considerazione i risultati dei test INVALSI somministrati all'intera popolazione studentesca italiana nelle classi di grado 2, 5, 8 e 10, negli anni compresi tra il 2010 e il 2015. Gli autori hanno analizzato il gender gap in diversi punti della distribuzione dei punteggi dei test; ciò che emerge dai loro studi è che il gender gap aumenta con l'età delle bambine e dei bambini ed è maggiore tra coloro che ottengono risultati migliori. Hyde e Mertz (2009), citando studi pubblicati tra il 1966 e il 1974 dalla psicologa dello sviluppo Eleanor Maccoby e confermati nel 2005 dalla ricerca di Elizabeth Spelke negli Stati Uniti, sottolineano che il rendimento tra bambine e bambini negli anni della scuola primaria è simile. Solo a partire dai 12 o 13 anni di età inizia a mostrarsi un certo divario in termini di prestazioni fra ragazze e ragazzi; tale divario diventa particolarmente significativo negli anni della scuola superiore. Fryer Jr. & Levitt (2010) analizzano il fenomeno del divario di rendimento tra i due sessi nei primi sei anni di scuola, utilizzando un campione particolarmente ampio di oltre 20.000 bambini statunitensi. Il test di matematica impiegato riguarda alcuni aspetti specifici della matematica, vale a dire il riconoscimento dei numeri, il conteggio, il confronto e l'ordinamento dei numeri, la risoluzione di problemi verbali e l'interpretazione di grafici. I due autori hanno osservato che non c'è una differenza significativa tra bambine e bambini all'inizio del percorso scolastico, ma il divario aumenta nel corso degli anni. Accade così che, mentre alla scuola primaria le femmine occupano il 45% dei primi 5 percentili, dopo 5 anni la percentuale di femmine che occupano quella stessa fascia scende drasticamente al 28%. Qualche anno prima, anche Winner (1996) aveva osservato che le ragazze e i ragazzi che sono particolarmente dotati in matematica emergono in proporzioni uguali nei primi anni di scuola, ma alle superiori la percentuale di ragazze che mostrano talento in matematica scende al 30%.

Un'analisi di alcune prove standardizzate (PISA 2009, 2012, 2015) mostra, per la maggior parte dei paesi partecipanti, un divario di prestazioni particolarmente marcato tra ragazze e ragazzi con alti livelli di abilità. L'effetto è tale che (con riferimento a PISA 2015) il divario medio nei paesi OCSE, pari a otto punti, raddoppia se si considera solo il 10% degli studenti appartenenti alla fascia alta, vale a dire quelli con le performance migliori. Ancora una volta, l'Italia risulta essere uno dei paesi in cui questo divario è più pronunciato, come confermato anche dalle prove INVALSI, con solo l'8% delle ragazze che raggiunge il livello più alto della scala PISA rispetto al 13% dei ragazzi (Giberti, 2019). In un articolo apparso sulla rivista *Science* nel 2008, Hyde, Lindberg, Linn, Ellis e Williams affermano di non aver riscontrato differenze di rendimento tra ragazze e ragazzi nell'analisi dei dati di test standardizzati negli Stati Uniti. Poco dopo, Leder e Forgasz (2008) sottolineano che il fenomeno del gender gap nelle prestazioni è più marcato tra i livelli di abilità elevati; a loro avviso l'assenza di un divario statisticamente significativo riscontrato da Hyde e colleghi è dovuto al fatto che gli stessi hanno utilizzato test composti da item di livello cognitivo medio o basso e quindi facilmente fattibili da tutti.

Di particolare interesse è l'analisi condotta da Niederle & Vesterlund (2008, 2010), i quali interpretano il gender gap nelle prestazioni matematiche tra studentesse e studenti di alto livello in termini di differente approccio alla competizione. In particolare, è stato osservato che in contesti competitivi misti, vale a dire in cui sono chiamati a gareggiare sia le ragazze che i ragazzi, non solo le femmine ottengono risultati meno soddisfacenti dei maschi (Gneezy et al., 2003), ma spesso preferiscono non partecipare (Niederle & Vesterlund, 2007). Gli stessi autori (2007) mostrano che il numero di maschi appartenenti al quartile più basso ed interessati a partecipare a una gara di matematica è proporzionalmente maggiore al numero di femmine appartenenti al primo quartile disposte a partecipare ad una simile gara. In contesti di sole ragazze (o prevalentemente femminili), le ragazze mostrano una minore riluttanza a gareggiare e una maggiore convinzione di poter raggiungere posizioni elevate nella classifica finale.

Attualmente i ricercatori sono orientati a considerare il punteggio di un test non come una semplice misura delle capacità cognitive di uno studente, ma come un indicatore delle sue capacità cognitive e non cognitive. Cunha & Heckman (2007) e Segal (2008), per esempio, riconoscono che i fattori non cognitivi (e.g. la motivazione e il senso di responsabilità) hanno un ruolo importante nelle competizioni e possono influenzare in modo decisivo il punteggio finale di un test. Gneezy & Rustichini (2000) hanno dimostrato quanto l'aspetto motivazionale possa influenzare i risultati di una certa prestazione: somministrando un test del QI di 20 minuti a un campione omogeneo, hanno osservato che ad ottenere punteggi più bassi sono coloro ai quali viene corrisposta una "ricompensa" di valore inferiore. Da questo punto di vista, la risposta che ogni individuo mostra di fronte a un contesto competitivo rappresenta un'abilità non cognitiva che può influenzare la performance.

Accade così che i punteggi ottenuti in test svolti in un contesto competitivo (come, ad esempio, le gare di matematica) possono rivelare un gender gap che non sarebbe emerso in modo significativo in un contesto meno competitivo.

3.3 Possibili fattori alla base del gender gap

Per quanto riguarda i possibili fattori alla base del gender gap, si possono trovare varie e diverse interpretazioni in letteratura e il dibattito è piuttosto ampio. Si parla di fattori biologici, sociali, culturali e psicologici. È possibile distinguere tra fattori interni (cioè dipendenti dall'individuo) e fattori esterni (cioè dipendenti dal contesto socioculturale in cui l'individuo vive).

Con riferimento ai fattori interni, l'idea che possano esistere differenze di natura biologica o fisiologica si è rivelata essere una strada limitata e poco percorribile e, in ogni caso, non avrebbe potuto rappresentare l'unico fattore in grado di spiegare le diverse prestazioni tra i due sessi (Contini et al., 2017), soprattutto se si considera anche il divario di prestazioni nei test standardizzati tra ragazze e ragazzi, a volte a favore delle prime, in diversi paesi partecipanti alle misurazioni. Va ricordato che verso la fine del XIX secolo si riteneva che le donne avessero un cervello di dimensioni inferiori rispetto agli uomini, spiegando così un millantato gender gap che probabilmente era legato, ancor più di oggi, a fattori sociali e culturali (Hyde & Mertz, 2009).

Esistono diversi studi che hanno analizzato il gender gap in termini di prestazioni, partecipazione e affettività; ne citiamo alcuni sapendo che, come già discusso in precedenza, ci sono diversi fattori che possono influenzare il gender gap e che molto dipende dalla giurisdizione e dal contesto in cui lo studio viene condotto. Siamo quindi ben lontani dal poter affermare che le ricerche presenti in letteratura abbiano un valore universale. Ad esempio, alcune di esse (Gallagher & De Lisi, 1994; Gallagher et al., 2000) hanno dimostrato che alla base del gender gap, in particolare tra gli studenti che raggiungono alti livelli in termini di performance, risieda il differente approccio e le diverse strategie di risoluzione adottate dalle ragazze rispetto ai ragazzi, con le prime che preferiscono applicare un ragionamento più algoritmico a problemi più convenzionali, mentre i secondi riescono meglio nella risoluzione di problemi meno convenzionali, sfruttando anche un ragionamento basato sull'intuizione. Lawton & Hatcher (2005) hanno osservato una migliore performance degli studenti maschi nelle abilità visuo-spaziali. Una possibile spiegazione di quanto osservato potrebbe risiedere nel fatto che le ragazze sono più conformi alle aspettative degli insegnanti, mentre i ragazzi sono meno soggetti al “contratto didattico” e meno disposti a lavorare secondo le routine, pertanto potrebbero trovare più familiari le attività di problem solving (Bolondi et al., 2018). Tuttavia, queste considerazioni da sole non sono sufficienti a spiegare il gender gap, in quanto certe competenze possono essere acquisite da chiunque, se si riceve una formazione adeguata.

Una questione più delicata riguarda l’analisi dei fattori psicosociali alla base delle motivazioni, delle convinzioni e del grado di autostima e di fiducia in sé stessi. A seguito dell’indagine PISA 2012, il cui focus era rappresentato dalla matematica, nei questionari di contesto l’OECD ha analizzato principalmente tre costrutti relativi ai fattori psicosociali, vale a dire: *math self-concept* (competenza percepita in matematica), *math self-efficacy* (abilità percepita nel risolvere una serie di problemi di matematica pura e applicata) e *math anxiety* (sensazione di stress e bisogno di supporto nell’affrontare la matematica). Si tratta di aspetti chiave dell’apprendimento e dello svolgimento di compiti matematici; ad esempio, chi ha meno fiducia in sé, tenderà ad affrontare il compito assegnato con meno entusiasmo e propensione.

I questionari hanno rivelato che le studentesse hanno meno fiducia nelle loro capacità matematiche e si considerano meno brave rispetto ai loro compagni di sesso opposto, e questo emerge anche a parità di competenze matematiche misurate o a parità di risultati ottenuti (OECD, 2015). Le ragazze possiedono un livello di *math self-efficacy* del tutto simile, o di poco superiore, a quello dei ragazzi solo di fronte a compiti che richiedono l’applicazione di procedure algoritmiche come la risoluzione di equazioni, il che è in accordo con le osservazioni precedentemente riportate da Gallagher et al. (2000). Infine, come sostenuto da altre ricerche (Devine et al., 2012; Primi et al., 2014), il livello di ansia matematica delle ragazze è globalmente superiore a quello dei ragazzi (si veda il cap. 4). Il gap nelle performance di matematica scompare solo quando si considerano studenti di sesso femminile e maschile con livelli uguali nei tre costrutti sopra menzionati (OECD, 2015).

Il fenomeno del gender gap, d’altra parte, non può essere attribuito solo a fattori interni. Vanno considerati anche fattori sociali e culturali (fattori esterni), come ad esempio il livello di emancipazione delle donne, gli stereotipi di genere, le abitudini del contesto classe e le diverse pratiche didattiche (Guiso et al., 2008; Leder & Forgasz, 2008; Fryer Jr. & Levitt, 2010; Tomasetto, 2013). Ad esempio, Fryer Jr. & Levitt (2010) osservano come un certo divario di prestazione tra femmine e maschi sia presente in ogni strato della società statunitense. Guiso et al. (2008) analizzano principalmente la situazione in Turchia, Svezia e Islanda, con la prima che presenta un livello di emancipazione particolarmente basso e un divario di rendimento particolarmente elevato tra ragazze e ragazzi a vantaggio dei secondi; al contrario, nei due paesi del nord Europa, il livello di emancipazione è più alto mentre il gender gap è più basso (o, come nel caso dell’Islanda, è a favore delle ragazze). Tomasetto (2013) riprende e analizza una serie di studi condotti in precedenza, tra cui quello di Jacobs & Eccles (1992) effettuato su un campione di circa 1.500 studenti americani di 11-12 anni e sulle loro madri, il quale mostra come molti genitori possiedano una diversa percezione di quelle che sono le competenze matematiche delle figlie e dei figli. Gli autori sottolineano che tra i genitori è ancora diffusa l'idea che il successo in matematica dei ragazzi sia dovuto ad una predisposizione naturale, mentre per le ragazze è il risultato di un certo sforzo ed impegno profuso. Inoltre, anche gli insegnanti attribuiscono ai maschi maggiori capacità in matematica rispetto alle femmine (Le Maistre & Kanevsky 1997; Helwig et al., 2001).

Partendo dai dati di PISA 2003, Guiso et al. (2008) mettono in relazione il divario di rendimento in matematica e in italiano (il primo a favore dei maschi, il secondo a favore delle femmine) con il GGI - *Gender Gap Index* del World Economic Forum. Si tratta di un indice che esprime (per ciascuna nazione) la parità di genere in base alle condizioni economiche, politiche, educative e sanitarie. Nei Paesi con un alto livello di emancipazione femminile (e quindi con un valore elevato del GGI), il gender gap in matematica tende a scomparire. Emblematica è la situazione dell'Italia, che nel 2017 occupava l'ottantaduesima posizione su 144 paesi analizzati in termini di parità di genere. Hyde & Mertz (2009) hanno analizzato la composizione delle prime 30 squadre nella classifica generale, tra quelle che hanno partecipato alle Olimpiadi Internazionali della Matematica (IMO) dal 1989 al 2008, e hanno osservato come la percentuale di ragazze sia statisticamente correlata al valore del GGI dei rispettivi paesi considerati. Uno studio simile è stato condotto in modo indipendente da Ellison & Swanson (2010), che però non hanno trovato alcuna correlazione statisticamente significativa. Gli stessi autori attribuiscono la differenza di risultati al fatto che la loro ricerca ha riguardato un numero maggiore di paesi partecipanti alle IMO (91 nazioni) e per un periodo più ristretto (2006 - 2008). Con riferimento ancora una volta al contesto italiano, il basso valore del GGI è in linea con il fatto che nelle 41 competizioni a cui il l'Italia ha preso parte dal 1967 al 2020, le ragazze che hanno gareggiato sono state solamente 5, anche se una di queste (Maria Colombo) ha partecipato a tre edizioni. Ellison & Swanson (2010) hanno anche analizzato le prestazioni di circa 120.000 studenti che hanno partecipato all'American Mathematics Competition (AMC) del 2007, rilevando che il rapporto tra maschi e femmine, per coloro che hanno ottenuto un punteggio superiore a 100 (top 6%), è pari a 4, e tale rapporto sale a 10 quando si analizza il primo percentile.

Alcune ricerche recenti sembrano mostrare che il fenomeno del gender gap si sia ridotto negli ultimi decenni, complice anche il maggior numero di donne impiegate in discipline STEM, la disponibilità di corsi avanzati per le ragazze, una maggiore enfasi verso il perseguimento della parità di genere e una generale attenzione verso questo tema (Le Maistre & Kanevsky, 1997; Freeman, 2004; Hyde & Mertz, 2009; Makel et al., 2016).

3.4 Il gender gap e la ricerca effettuata

3.4.1 La diversa partecipazione fra studentesse e studenti nelle gare distrettuali

Per studiare il fenomeno del gender gap fra gli studenti delle gare, si è proceduto dapprima ad analizzare il numero di studenti italiani, divisi per sesso, che hanno gareggiato nelle competizioni distrettuali svolte dall'anno 2017 al 2020, nonché i risultati da loro ottenuti. Successivamente, e con riferimento al campione ristretto dei soli studenti romani partecipanti alla gara di febbraio 2020, si è presa visione delle risposte fornite al primo questionario loro somministrato. L'analisi qui di seguito riportata, è presente anche in un articolo recentemente pubblicato (Mazza & Gambini, 2022).

Un indice particolarmente utile nell'analisi è rappresentato dal rapporto tra numero di maschi e numero di femmine (MFR, che indicheremo con γ). Si deduce che se $\gamma = 1$, il numero di ragazzi e ragazze è lo stesso, se $\gamma > 1$ c'è una predominanza di maschi mentre se $\gamma < 1$ c'è un maggior numero di femmine nel campione considerato[17]. L'analisi dei partecipanti, divisi per genere, ha mostrato come il valore del MFR, sul totale dei partecipanti (TMFR) è circa 3 per ciascuno degli anni considerati, il che significa che il 75% dei concorrenti sono maschi e solo il 25% femmine. Tale rapporto, di poco inferiore a 3 nel primo biennio della scuola secondaria di II grado (gradi 9 e 10), tende ad aumentare con il crescere dell'età dei partecipanti, come mostrato nella tabella sottostante.

	2017	**2018**	**2019**	**2020**
MFR I anno	2,9	2,5	2,9	2,7
MFR II anno	3,0	2,8	2,9	2,5
MFR III anno	3,2	2,8	2,8	3,2
MFR IV anno	3,7	3,4	3,1	3,4
MFR V anno	4,0	4,1	4,3	3,6
TMFR (totale)	3,3	3,1	3,1	3,0
Tot. studenti	**10.544**	**9.687**	**9.905**	**10.000**

Tabella 3.1 MFR diviso per anno

[17] Va specificato che l'indice γ presenta alcuni svantaggi, come ad esempio il fatto di essere sensibile a piccole fluttuazioni dei dati in corrispondenza di un denominatore piccolo, come nei casi considerati nella ricerca.

Una simile analisi è in accordo con quanto osservato da Ellison & Swanson (2010) e Bahar (2021) per le AMC.

Con riferimento al totale degli studenti, va specificato che il numero effettivo di coloro che hanno gareggiato è stato mediamente superiore di circa il 10% rispetto a quanto dichiarato in tabella. Il valore indicato è frutto di una selezione dei dati, caricati dai responsabili locali sul portale dell'Unione Matematica Italiana (ente organizzatore della gara), eliminando le stringhe che presentavano incongruenze, errori o mancanze (ad esempio prive del sesso o del punteggio) e come tali non utilizzabili. Nonostante ciò, i numeri di cui siamo in possesso risultano essere particolarmente ampi e quindi la popolazione oggetto di indagine ci fornisce informazioni particolarmente significative.

Il calcolo del MFR può essere fatto anche in funzione di uno specifico percentile θ, relativo al posizionamento nella graduatoria della gara, mediante la relazione $\gamma(\theta) = \frac{m(\theta)}{f(\theta)}$, ove $m(\theta)$ e $f(\theta)$ indicano rispettivamente il numero di maschi e il numero di femmine nella distribuzione considerata (Bahar, 2021). Nella tabella seguente sono mostrati i valori di γ per il 99° e 95° percentile.

	2017	**2018**	**2019**	**2020**
Top 1%	12,5	24,0	18,2	15,0
Top 5%	6,0	12,2	8,9	7,7

Tabella 3.2: MFR per il primo e il quinto percentile

Si evince come il divario nel rapporto fra i due sessi si faccia ancor più evidente se si considera la parte più alta della classifica, ove il numero di maschi è nettamente superiore al numero di ragazze, raggiungendo situazioni particolarmente emblematiche come nella gara del 2018, dove, fra i primi 100 classificati (top 1%), ben 96 erano maschi e solo 4 femmine. In particolare, non è stato possibile calcolare $\gamma(99{,}9)$, vale a dire il rapporto fra maschi e femmine per lo 0,1% della fascia più alta (che, per campioni di circa 10.000 studenti, equivale ad analizzare la distribuzione per sesso dei primi 10 studenti in graduatoria), in quanto tutti coloro che facevano parte di questa fascia, per tutti e quattro gli anni considerati, erano maschi.

3.4.2 Analisi dei risultati degli studenti nelle gare distrettuali

Nella tabella seguente sono riportati i punteggi medi e la relativa deviazione standard (SD) ottenuti dagli studenti italiani nelle quattro gare considerate, distinguendo tra punteggio medio delle sole femmine, dei soli maschi e dell'intera popolazione studentesca partecipante alle gare.

	2017	2018	2019	2020
Punteggio medio femmine	24,8	22,2	22,3	24,7
SD punteggio femmine	11,4	11,0	11,3	11,6
Punteggio medio maschi	27,6	28,0	27,0	28,6
SD punteggio maschi	13,8	14,0	14,3	14,4
Punteggio medio totale	27,0	26,6	25,9	27,6
SD totale	13,3	13,6	13,8	13,9

Tabella 3.3: punteggio medio e deviazione standard per maschi e femmine

Una prima analisi dei suddetti valori sembrerebbe suggerire una maggior predisposizione da parte dei maschi nella risoluzione di quesiti delle gare matematiche. In particolare, l'analisi della deviazione standard ci suggerisce che le ragazze tendono ad attestarsi molto più dei ragazzi intorno al loro punteggio medio. Questi ultimi, invece, presentano una deviazione standard maggiore, ad indicare una maggior volatilità e differenza di prestazione da studente a studente. La tabella 3.4 di pagina seguente sembrerebbe confermare quanto appena detto, nonché offrire interessanti spunti di riflessione.

Limitatamente ai primi 12 esercizi (a risposta multipla), la percentuale di risposte sbagliate delle femmine è paragonabile (tranne il caso del 2018) a quella dei maschi. Varia, invece, la percentuale di risposte corrette, con le femmine che si attestato a circa 5 punti percentuali sotto a quella dei ragazzi. Di conseguenza, varia anche la percentuale di risposte lasciate in bianco, con le ragazze che mediamente tendono a tralasciare un numero maggiore di quesiti rispetto ai compagni maschi. Se poi si analizzano le risposte date agli esercizi 13 e 14 (a risposta numerica, quindi aperta ma senza alcuna arbitrarietà di valutazione da parte dei correttori), troviamo nuovamente un divario fra risposte corrette delle femmine e quelle dei maschi, a vantaggio di questi ultimi, ma è interessante notare che in tutti e quattro gli anni la percentuale di risposte sbagliate dei maschi è maggiore (talvolta anche in modo marcato, come nel 2020) rispetto a quella delle femmine, così come è fortemente marcata la differenza di percentuale di risposte lasciate in bianco fra ragazze e ragazzi. Infine, anche negli ultimi tre esercizi a risposta aperta, (quesiti 15-17), la percentuale di ragazze che totalizzano zero punti è mediamente superiore a quella dei maschi. Giova ricordare che zero punti vengono assegnati generalmente a chi lascia l'esercizio in bianco, in quanto le griglie di correzione prodotte dagli organizzatori della gara prevedono che vengano assegnati 1-2 punti a chi svolge anche semplici e basilari (purché corrette) considerazioni sull'esercizio. Quanto osservato è in accordo con Gallagher et al. (2000), i quali nei loro studi hanno evidenziato come, nello svolgimento di alcuni test SAT-M, svolti secondo tempi e modalità diverse (quesiti convenzionali o non convenzionali, a risposta aperta o chiusa, 10' o 50' di tempo), le ragazze tendano a lasciare in bianco un numero maggiore di esercizi rispetto ai ragazzi. Anche lo studio di Cascella et al. (2020), portato avanti mediante un approccio quantitativo basato sull'analisi del DIF (*Differential Item Functioning*) e riguardante lo svolgimento delle prove INVALSI da parte di un ampio campione di studenti italiani a partire dal 2008, ha mostrato una maggior predisposizione, da parte delle ragazze, a lasciare in bianco alcuni quesiti.

	2017	**2018**	**2019**	**2020**
Risposte corrette femmine es. 1-12	27%	25%	23%	26%
Risposte corrette maschi es. 1-12	30%	32%	28%	31%
Risposte sbagliate femmine es. 1-12	44%	45%	45%	38%
Risposte sbagliate maschi es. 1-12	43%	40%	43%	37%
Risposte non date femmine es. 1-12	29%	30%	31%	35%
Risposte non date maschi es. 1-12	27%	28%	29%	32%
Risposte corrette femmine es. 13-14	16%	04%	17%	02%
Risposte corrette maschi es. 13-14	20%	11%	21%	04%
Risposte sbagliate femmine es. 13-14	13%	35%	39%	24%
Risposte sbagliate maschi es. 13-14	14%	37%	42%	29%
Risposte non date femmine es. 13-14	71%	61%	44%	74%
Risposte non date maschi es. 13-14	65%	52%	37%	67%
Risposte non date femmine es. 15-17	88%	83%	87%	82%
Risposte non date maschi es. 15-17	84%	75%	79%	76%

Tabella 3.4: percentuali di risposte corrette, sbagliate e lasciate in bianco divise per genere

Tali risultati sembrano inoltre suggerire che alla base del gender gap non ci siano differenze di competenze effettivamente possedute o di abilità, ma piuttosto una differente percezione delle proprie capacità o un differente stato emotivo che porta le ragazze ad un livello maggiore di insicurezza e quindi a preferire di "non rischiare", lasciando le domande in bianco. Particolarmente indicativo quanto osservato per gli esercizi 13 e 14, dove i ragazzi rispondono meglio ma sbagliano anche di più delle ragazze, come se i primi fossero più portati a dare comunque una risposta o quanto meno a provarci, mentre le seconde mantengono un profilo più prudente e preferiscono lasciare in bianco laddove non sanno come procedere o non ne sono sicure.

Future indagini potranno essere svolte a partire dall'uso di tecniche e strumenti psicometrici più raffinati, in modo da ottenere una visuale del fenomeno più precisa e indicativa.

3.4.3 Analisi del questionario di febbraio 2020 e gender gap

Per cercare di comprendere meglio le motivazioni alla base delle diversità di genere sopra menzionate, è stato somministrato un breve questionario, il giorno stesso della gara, ai soli 486 partecipanti alla competizione distrettuale di Roma di febbraio 2020. Chiaramente si tratta di un campione piuttosto ristretto (pari al 5% del totale dei partecipanti, in tutta Italia, alla medesima gara) e relativo ad un solo distretto italiano; pertanto le informazioni che se ne deducono non possono essere completamente rappresentative della situazione nazionale.

Tale questionario era formato da otto domande ed era volto a determinare:

- Il livello di difficoltà percepito, durante la gara, nei diversi ambiti che caratterizzano la Matematica delle Olimpiadi (Algebra, Combinatoria, Geometria, Teoria dei Numeri);
- Il ritenersi portati o meno in ciascuno dei suddetti ambiti;
- L'aver visto o meno, a scuola, esercizi simili a quelli delle gare;
- Il rendimento scolastico;
- Il possibile piazzamento in graduatoria;
- Il livello di ansia posseduto durante le verifiche in classe e durante le gare matematiche.

Il foglio contenente le domande è stato allegato insieme al resto della prova in modo da poter conoscere nome e cognome di chi rispondeva. Scegliere di non avere dei risultati anonimi si è reso necessario per poter collegare le risposte di tutti i partecipanti con i risultati da loro ottenuti in gara, in modo da poter cercare eventuali correlazioni. I dati sono stati successivamente riportati all'interno di un foglio di calcolo e trattati mediante l'uso di software statistici. Nella tabella sottostante è mostrata la divisione del campione in base alla classe frequentata e al genere. Nell'ultima riga è mostrato il valore di γ per ciascun anno di corso.

	I	**II**	**III**	**IV**	**V**	**Tot.**
Femmine	24	36	14	10	21	105
Maschi	72	101	60	77	71	381
MFR (γ)	3,0	2,8	4,3	7,7	3,4	3,6

Tabella 3.5: numero di studenti del distretto romano divisi per anno e genere

La percentuale di ragazze partecipanti si attesta sul 21,6% a fronte di un 78,4% di ragazzi ($\gamma = 3{,}6$, di poco superiore al valore nazionale). Alla gara era stato convocato un totale di 541 studenti; di questi, 55 non si sono presentati, di cui 21 ragazze (38%) e 34 ragazzi (62%). Tali valori mostrano come la percentuale di rinuncia alla partecipazione alla gara da parte delle ragazze sia nettamente superiore in proporzione alla loro presenza. Anche Niederle e Vesterlund (2007) hanno osservato come molte ragazze rinuncino a priori a partecipare alle gare, sebbene ne abbiano la possibilità. La difficoltà a contattare gli studenti assenti non ha permesso di capire le reali motivazioni della rinuncia; si è osservato, però, che la divisione per tipologia di scuola e classe frequentata nel gruppo dei 55 assenti non ha mostrato, con le opportune proporzioni, significative differenze rispetto al campione totale degli studenti convocati. Infatti, gli assenti risultavano uniformemente distribuiti per tipo di scuola e grado scolastico, escludendo così la possibilità che ad essere meno interessati alla manifestazione fossero studenti più o meno giovani o di scuole non ad indirizzo scientifico.

Un'attenta analisi delle risposte riportate nei questionari ha permesso di identificare una possibile giustificazione del fenomeno del gender gap.

Va innanzitutto detto che il livello medio di difficoltà attribuito ai quesiti della prova di febbraio 2020 è del tutto analogo fra ragazze e ragazzi, con le prime che hanno stimato la difficoltà media (in decimi) pari a 7,30 e i secondi a 7,17. È altrettanto interessante osservare che, alla richiesta di indicare quanto ci si ritiene portati nei singoli ambiti della matematica olimpica, globalmente i ragazzi si attribuiscono un punteggio pari a 6,56, contro il 6,42 delle ragazze, il che lascia intendere che anche queste ultime ritengono di possedere competenze ed abilità in grado di poter risolvere gli esercizi delle gare. Giova, al riguardo, ricordare che il questionario è stato somministrato al termine della competizione, dunque dopo che gli studenti avevano visto la prova e ragionato sui quesiti, e non prima della gara, quando molti di loro avrebbero potuto rispondere sottostimando o sovrastimando le proprie capacità, specie nel caso di partecipanti alla loro prima esperienza.

Degna di nota è la differenza fra posizione in graduatoria effettiva e stimata.

Va ricordato che, in fase di somministrazione del test finale, ai partecipanti non veniva chiesto di attribuirsi una possibile posizione ben precisa, ma solo un range all'interno del quale si riteneva di poter rientrare (cfr. domanda 6 dell'allegato A). In fase di elaborazione e trascrizione dei dati, al range 1-50 è stato attribuito il valore 1, al range 51-100 il valore 2 e così via fino alla fascia 451-500 alla quale è stato assegnato il valore 10. Dall'analisi della graduatoria finale, emerge che la media dei piazzamenti effettivi dei maschi è intorno alla 225sima posizione, mentre quello delle femmine è intorno alla 275sima posizione. Gli stessi piazzamenti effettivi, riportati in valori da 1 a 10 a seconda del range di appartenenza, corrispondono ad una media pari a 5 per i ragazzi (intervallo 201-250) e pari a 6 per le ragazze (intervallo 251-300).

Per quanto concerne il valore stimato in graduatoria, la media di tutti i valori associati ai diversi range per i ragazzi è pari a 5,97 (fascia 251-300, vale a dire, si stimano intorno alla 295sima posizione, 70 posti di differenza dal valore reale), mentre tale media per le ragazze è pari a 7,49 (fascia 301-350 che corrisponde circa alla 375sima posizione, quindi 100 posti di differenza dal valore reale). Anche in questo caso il risultato ottenuto è in accordo con Gallagher et al. (2000) i quali, dall'analisi delle risposte al questionario informativo somministrato ai partecipanti delle loro sperimentazioni, hanno rilevato come le ragazze tendano molto più a sottostimare le proprie capacità in matematica e scienze rispetto ai ragazzi e ad attribuirsi un possibile posizionamento nella fascia più bassa delle abilità (*below average*).

Nella tabella seguente sono riportati alcuni valori percentuali relativi alla sovrastima o sottostima dei maschi e, nella tabella successiva, delle femmine. Per comprendere il significato delle voci riportate in tabella, la dicitura "sovrastimati di 1" (risp. di 2, di ≥ 3, o sottostimati di 1, di 2, di ≤ 3) sta ad indicare che uno studente ha ipotizzato di rientrare nel range X (con $1 \leq X \leq 10$), ma nella realtà la sua posizione effettiva rientra nel range $X+1$ (risp. nel range $X+2$, $X+k$ con $k \geq 3$ e $k \in N$ o nel range $X-1$, $X-2$, $X-h$ con $h \geq 3$ e $h \in N$).

Maschi stimati correttamente	15,5 %
Maschi sovrastimati di 1	8,3 %
Maschi sovrastimati di 2	6,3 %
Maschi sovrastimati di ≥ 3	10,3 %
Maschi sovrastimati (totale)	25,0 %
Maschi sottostimati di 1	20,4 %
Maschi sottostimati di 2	16,1 %
Maschi sottostimati di ≥ 3	23,0 %
Maschi sottostimati (totale)	59,5 %

Tabella 3.6: percentuale di maschi correttamente stimati, sottostimati e sovrastimati

Femmine stimate correttamente	10,6 %
Femmine sovrastimate di 1	5,3 %
Femmine sovrastimate di 2	5,3 %
Femmine sovrastimate di ≥ 3	11,7 %
Femmine sovrastimate (totale)	22,3 %
Femmine sottostimate di 1	16,0 %
Femmine sottostimate di 2	13,8 %
Femmine sottostimate di ≥ 3	37,2 %
Femmine sottostimate (totale)	67,0 %

Tabella 3.7: percentuale di femmine correttamente stimate, sottostimate e sovrastimate

Ciò che emerge dall'analisi delle precedenti tabelle è che la percentuale di ragazze e di ragazzi che si sovrastimano è globalmente lo stesso (22,3 vs 25,0), mentre le percentuali di ragazze e ragazzi che si sottostimano sono pari rispettivamente a 67,0 e 59,5; dunque con una leggera predominanza delle ragazze a sottostimarsi rispetto ai ragazzi.

Ma il dato più macroscopico, e probabilmente più significativo, è che cambia di molto fra ragazze e ragazzi il range al quale si ritiene di appartenere. Se, ad esempio, accade che all'incirca solo uno studente su 5 si sottostimi di molto (cioè di una differenza di range fra posizione effettiva e posizione stimata, in valore assoluto, maggiore o uguale a 3), tale valore fra le studentesse raggiunge una percentuale pari a 37,2, vale a dire più di una ragazza su 3. In altre parole, non solo le ragazze tendono a sottostimarsi più dei ragazzi, ma quando si sottostimano lo fanno in modo decisamente più marcato rispetto ai compagni maschi.

In ogni caso va specificato che la domanda posta nel questionario, sebbene abbia fornito delle tendenze chiare, probabilmente ha creato difficoltà ed errori di valutazione in quanto difficilmente uno studente è in grado di dare una stima più o meno esatta senza termini di paragone o elementi utili a comprendere la situazione del contesto (i ragazzi, di scuole diverse, non si conoscono fra di loro). Inoltre, molti di loro prendevano parte alla gara distrettuale del 2020 per la prima volta, quindi senza alcuna esperienza pregressa. Diversamente, si sarebbe potuto chiedere, come già avviene nella finale nazionale, una stima del punteggio che si ritiene aver conseguito alla luce dello svolgimento dei quesiti e in considerazione del fatto che i punteggi massimi per ciascun quesito erano dichiarati sul frontespizio della prova.

La ricerca svolta ha cercato di comprendere quali possano essere alcuni fattori alla base del divario riscontrato, ed in particolare alla base dell’insicurezza dimostrata dalle ragazze sia in fase di svolgimento delle prove (con la rinuncia a prendervi parte o la scelta di lasciare in bianco un certo numero di quesiti) che in fase di valutazione delle proprie competenze possedute e della possibilità di successo in gara. Nello specifico, ci si è soffermati sul tema dell’ansia matematica, come mostrato nel capitolo successivo.

4 L’ansia matematica durante le competizioni studentesche

4.1 Ansia matematica e performance

Generalmente la matematica viene percepita dalla maggior parte delle persone come una materia difficile e ostile, fatto questo ormai noto alla comunità dei ricercatori in didattica della matematica, i quali orientano gran parte dei loro studi e delle loro sperimentazioni alla piena comprensione dei meccanismi e dei processi di apprendimento di tale disciplina, ma anche alla ricerca di strategie didattiche vincenti. Nella prefazione alla nuova edizione del libro *Overcoming math anxiety*[18] di Sheila Tobias (1993), l’autrice definisce la matematica “ostica e riservata solo a una élite di potenti” (pag. 7). Sebbene molti attribuiscano le difficoltà a fattori cognitivi come, ad esempio, alla mancanza di abilità, o alla scarsa applicazione, Tobias si concentra in particolare sull’analisi degli aspetti emotivi e, soprattutto, sul tema dell’ansia che la matematica genera a chi è poco avvezzo alle sue regole e alle sue procedure. Il testo di Tobias si inserisce in un più ampio filone di studi sulle emozioni (*affect*) nell’ambito dell’educazione matematica; tali studi si sono inizialmente focalizzati sull’ansia a partire da metodi e teorie mutuate dalla psicologia (Reyes, 1984), per poi allargarsi ad altri ambiti (e.g. le tematiche inerenti al problem solving) e successivamente spostarsi su aspetti più generali dell’apprendimento della matematica (Di Martino e Zan, 2011).

Una delle prime definizioni di ansia matematica è quella fornita da Richardson e Suinn (1972), i quali affermano che la “*mathematics anxiety involves feelings of tension and anxiety that interfere with the manipulation of numbers and the solving of mathematical problems in a wide variety of ordinary life and academic situations*”[19] (pag. 551). L’ansia matematica è stata analizzata e discussa da molti ricercatori, convinti che nella società moderna sia particolarmente necessario avere persone competenti nelle cosiddette discipline STEM e pertanto diventa argomento di crescente interesse fra gli studiosi comprendere come alcuni aspetti psicologici e alcuni stati d’animo, primo fra tutti l’ansia, influenzino i processi cognitivi e di apprendimento (Ashcraft & Ridley, 2005; Ashcraft et al., 2007; Primi et al., 2014). Hembree (1990), ad esempio, ha osservato che esiste una correlazione negativa, pari a $-0{,}75$, tra l’ansia matematica e il piacere di fare matematica, nonché una correlazione pari a $-0{,}71$ tra l’ansia matematica e la fiducia nelle proprie capacità matematiche. Ashcraft & Kirk (2001) hanno indagato il legame fra ansia matematica, processi mnemonici e prestazioni, osservando in

[18] Il titolo della versione italiana risulta essere “Come vincere la paura della matematica”.

[19] “L’ansia matematica porta ad uno stato di tensione e di apprensione che interferiscono con la capacità di manipolare numeri e risolvere problemi matematici in un’ampia varietà di situazione nella vita di tutti i giorni e in ambito scolastico” (traduzione a cura dell’autore).

particolare che, chi possiede un elevato stato di ansia matematica, risulta avere performance meno soddisfacenti ed un coinvolgimento meno attivo dei processi mentali. In generale, la relazione fra ansia matematica e prestazioni è stata oggetto di studio da parte di moltissimi autori nel corso degli ultimi 50 anni; tra questi, ricordiamo Legg & Locker (2009), Maloney et al., (2011), Chang & Beilock (2016), Foley et al. (2017), Morán-Soto & González-Peña (2022), i quali hanno confermato la stretta correlazione fra ansia e performance, pur effettuando analisi ed approfondimenti di volta in volta diversi. A titolo di esempio, Legg & Locker (2009), dopo aver definito la metacognizione come il "thinking about thinking"[20], hanno osservato come individui con elevate capacità metacognitive siano in grado di moderare maggiormente i propri livelli di ansia matematica moderando, di conseguenza, gli effetti negativi che essa produce sulle prestazioni.

4.2 Gli strumenti di assessment dell'ansia matematica. Il test AMAS

Per poter quantificare il livello di ansia posseduta dagli individui, in particolar modo dalla popolazione studentesca durante lo svolgimento di task matematici, diversi ricercatori hanno cercato di sviluppare degli strumenti psicometrici idonei. I primi che hanno cercato di misurare l'ansia matematica sono stati Dreger e Aiken (1957) i quali, partendo da uno strumento ideato da Taylor (1953) per misurare l'ansia in generale (*Taylor Manifest Anxiety Scale*), hanno aggiunto tre specifici item sulla matematica, denominando il nuovo questionario così ottenuto "*Numerical Anxiety Scale*". Uno strumento più completo ed organico è stato presentato da Richardson e Suinn nel 1972, i quali hanno ideato un questionario di 98 item su scala Likert da 1 a 5 denominato MARS (*Mathematics Anxiety Rating Scale*). Lo strumento intende misurare il livello di ansia matematica sia in situazioni formali (ad esempio, quando si è chiamati a svolgere un quiz di matematica in classe) che in situazioni informali e di vita quotidiana (ad esempio, quando si deve calcolare il totale del conto di un ristorante in cui si ritiene sia stato addebitato un importo non dovuto). Il punteggio del MARS è semplicemente la somma di tutti i valori attribuiti ai singoli item e, dunque, varia da un minimo di 98 ad un massimo di 490. Nelle intenzioni degli autori, l'utilizzo del test MARS dovrebbe servire non solo per fare ricerca sul tema dell'ansia, ma anche per valutare il livello di ansia matematica di singoli o gruppi di persone interessate a svolgere, successivamente, specifici trattamenti volti ad acquisire una maggiore confidenza con la matematica ed una maggiore consapevolezza delle proprie capacità. La validità e

[20] Volendo tradurre letteralmente la definizione fornita da Legg & Locker, potremmo dire che la metacognizione consiste nel "pensare sul pensiero". In modo meno sintetico ma più esplicativo, possiamo affermare che la metacognizione è quella consapevolezza, da parte di un individuo, di conoscere e riflettere su quelle che sono le proprie capacità e i propri processi cognitivi.

l'affidabilità del test MARS è stata dimostrata da altre ricerche successive (Plake & Parker, 1982; Alexander & Cobb, 1989; Capraro et al., 2001).

Poiché la versione originale del test è piuttosto lunga, sono state costruite versioni più brevi dello stesso test in modo da poterlo adattare ad eventuali situazioni che richiedono tempi di somministrazione più corti. Tra questi, ricordiamo il test MAS (*Mathematics Anxiety Scale*), di Fennema & Sherman (1976) costituito da soli 12 item; il test MARS-R (*Math Anxiety Rating Scale — Revised*) di Plake & Parker (1982) con 24 item (e correlazione pari a 0,97 con il test MARS) ed il test sMARS, una versione più snella del test MARS composta da soli 25 item (Alexander & Martray, 1989; Núñez-Peña et al., 2014), la quale mostra una correlazione molto elevata con la forma completa del test ($r = 0{,}93$).

Una versione ancora più snella è il test AMAS (*Abbreviated Math Anxiety Scale*) di Hopko et al. (2003), formato da 9 item riguardanti alcune situazioni specifiche e valutate con un punteggio secondo la scala Likert da 1 (poca ansia) a 5 (molta ansia). In particolare, viene richiesto di indicare il livello di ansia, alla luce della propria esperienza con la matematica, nelle seguenti situazioni:

1. Dover consultare le tavole in un manuale di matematica
2. Pensare al compito di matematica del giorno dopo
3. Guardare la risoluzione di un'equazione svolta dall'insegnante alla lavagna
4. Fare il compito di matematica
5. Avere da fare molti problemi difficili di matematica per la lezione successiva
6. Ascoltare una spiegazione durante l'ora di matematica
7. Ascoltare un altro studente che spiega una formula di matematica
8. Dover fare una verifica a sorpresa durante l'ora di matematica
9. Iniziare un nuovo capitolo del manuale di matematica

Il test AMAS ben si presta per essere utilizzato con studenti di una scuola secondaria di II grado, a differenza di altri test sopra menzionati che presentano alcuni argomenti cui le persone più giovani potrebbero non saper rispondere (ad esempio, nel test sMARS troviamo alcune domande rivolte più a studenti universitari che di scuola superiore). La versione italiana di questo test è dovuta a Primi et al. (2014); il test originale in lingua inglese è stato assegnato a due diversi traduttori, i quali hanno lavorato autonomamente e si sono confrontati solo successivamente in modo da ottenere un'unica traduzione. Quest'ultima versione è stata analizzata e rivista da un gruppo di cinque esperti per poi arrivare alla versione italiana definitiva. Successivamente, Primi e colleghi hanno somministrato il test ad un campione di 215 studenti italiani residenti in Toscana di età compresa fra i 14 e i 19 anni, nonché a 249 studenti delle università di Firenze e Bologna frequentanti il primo e secondo anno del corso di laurea in Psicologia, ottenendo alcune conferme rispetto a precedenti studi svolti a livello internazionale, come ad esempio il fatto che chi possiede un elevato livello di ansia matematica assume atteggiamenti negativi nei confronti di tale disciplina e tende ad evitare corsi universitari e carriere che richiedono una certa preparazione in matematica. Inoltre, gli autori hanno osservato come il questionario risulti essere invariante per genere, ossia in grado di misurare efficacemente il livello di ansia sia nelle ragazze che nei ragazzi mentre eventuali differenze nei livelli misurati fra i due generi vanno spiegate alla luce di motivazioni indipendenti dallo strumento utilizzato.

4.3 L'ansia matematica fra gli studenti che partecipano alle gare: la ricerca svolta

4.3.1 Analisi del questionario di febbraio 2020 e ansia matematica

Come già precedentemente menzionato, al termine della gara distrettuale di febbraio 2020 è stato somministrato, ai soli 486 studenti del distretto di Roma, un breve questionario le cui domande sono riportate in appendice (si veda l'allegato A). In particolare, nelle domande 7 e 8 si chiedeva di indicare, su una scala da 1 a 10, il livello di ansia posseduto durante lo svolgimento di un compito in classe di matematica e durante lo svolgimento delle gare matematiche. Unitamente a tali domande, veniva chiesto di scrivere una o più parole che potessero ben descrivere lo stato d'animo posseduto durante l'esecuzione delle prove indicate.

Va innanzitutto detto che la scelta di utilizzare una singola domanda per misurare il livello di ansia matematica è in accordo con quanto già effettuato da altri ricercatori. Ad esempio, nel 2002 Ashcraft ha utilizzato una singola domanda, denominata SIMA (*Single-Item Math Anxiety Scale*) e ha scoperto che le risposte fornite dai partecipanti al suo laboratorio erano correlate con i punteggi del test sMARS con valori compresi fra 0,48 e 0,85. La domanda utilizzata risultava essere la seguente: "Su una scala da 1 a 10, quanto sei ansioso di matematica?". Ancor prima di Ashcraft, troviamo Gorsuch & McFarland (1972) e Gorsuch & McPherson (1989) i quali sono stati tra i primi a sostenere l'uso di scale a singolo item per ottenere misure valide e affidabili. Da allora, sono state sviluppate diverse scale a singolo item per misurare costrutti come, ad esempio, la qualità della vita (de Boher et al., 2004), la soddisfazione lavorativa (Nagy, 2002), il burnout (Rohland, Kruse, & Rohrer, 2004). Il vantaggio principale delle scale a singolo item rispetto alle scale a più item è che sono più veloci e più facili da somministrare, specie se si devono valutare campioni di grandi dimensioni (Gogol et al., 2014). Va detto, però, che esse presentano il grosso svantaggio dovuto al fatto che è più difficile verificare la coerenza delle risposte e, quindi, la convinzione su tale valore.

I risultati ottenuti da Ashcraft del 2002 sono stati confermati da Núñez-Peña et al. (2014) i quali, somministrando sia il test SIMA che il test sMARS ad un campione di 279 studenti del primo e secondo anno del corso di laurea in Psicologia dell'Università di Barcellona, hanno ottenuto una correlazione pari a 0,77 tra i punteggi delle due scale. Il lavoro di Núñez-Peña e colleghi ha anche mostrato altri risultati interessanti, come ad esempio il fatto che il punteggio dal test SIMA è correlato negativamente con la capacità di svolgere operazioni aritmetiche a più cifre, così come esiste una correlazione negativa tra il livello di ansia matematica misurata con il test SIMA ed il livello di divertimento, di motivazione e di fiducia in sé stessi che i partecipanti al test possiedono quando svolgono compiti matematici. In ogni caso, sebbene una singola domanda sul livello di ansia posseduta non possa mai essere il sostituto di strumenti validati come l'sMARS e l'AMAS, essa può essere utilizzata come domanda di pre-screening, consentendo, così, di ottenere risultati di una discreta validità.

Con riferimento al questionario menzionato, i dati della sperimentazione sono stati analizzati per valutare il livello di ansia degli studenti, concentrandosi in particolare sulle differenze tra ragazze e ragazzi (Mazza & Viola, 2022).

La prima osservazione riguarda i diversi livelli di ansia posseduti dai partecipanti al questionario durante la valutazione in classe e durante le gare matematiche. Le risposte degli studenti hanno evidenziato un livello di ansia maggiore durante le gare matematiche (*mean* = 4,8, SD = 2,6) rispetto a quello provato durante le verifiche a scuola (*mean* = 3,8, SD = 2,4). Gli studenti con ottimi voti in matematica dichiarano di sentirsi più sicuri durante una normale prova di valutazione che durante una gara, perché nei test in classe devono affrontare esercizi standard mentre in una gara matematica si incontrano compiti non standard. Inoltre, le ragazze hanno espresso un grado di ansia maggiore rispetto ai ragazzi sia nelle verifiche in classe, con un livello medio di ansia pari a 4,3 (SD = 2,7) rispetto a valore di 3,7 (SD = 2,3) dei maschi, sia durante le gare matematiche (*mean* = 4,9 e SD = 2,6 per le ragazze; *mean* = 4,8 e SD = 2,6 per i ragazzi), sebbene in questo caso la differenza tenda ad assottigliarsi notevolmente. Questi primi risultati confermano la presenza del fenomeno del gender gap.

Le parole usate dagli studenti per descrivere le loro emozioni durante le prove in classe sembrano confermare questa interpretazione. Più del 50% degli studenti ha usato parole positive come: “tranquillo”, “calmo”, “sicuro”, “sereno”, “rilassato” ma anche “concentrato”, mentre meno della metà ha usato le stesse parole per descrivere le proprie emozioni durante le gare di matematica. Le emozioni negative, come “frustrazione”, “ansia”, “paura” e “stress”, erano più evidenti nelle risposte sulle gare matematiche, ma anche “impotente”, “sfiduciato”, “umiliato”, “scoraggiato”.

In particolare, riportiamo alcune affermazioni significative degli studenti riguardo al loro stato d’animo durante le gare matematiche:

Studentessa 1: “Non capisco e mi chiedo che faccio qui”

Studentessa 2: “Frustrata, scoraggiata, avvilita, calo di stima”

Studente 3: “È sconfortante leggere un problema e non capire”

Studente 4: “Mi trovo in difficoltà e mi viene da vomitare e sono in ansia”

Nonostante tutti gli studenti che gareggiavano fossero di alto livello (più dell’80% dei presenti ha avuto un voto maggiore o uguale a 8 in matematica al termine del primo quadrimestre o trimestre), una buona percentuale ha espresso un senso di frustrazione e paura di deludere sé stessi e gli altri. Queste affermazioni sono più frequenti nelle ragazze che nei ragazzi, come riportato nella seguente tabella[21]:

	Stati d’animo positivi	**Stati d’animo negativi**	**Non risponde**
Femmine	29,6%	43,8%	26,6%
Maschi	37,6%	39,9%	22,5%

Tabella 4.1: percentuale, divise per genere, di parole che descrivono stati d’animo positivi o negativi

4.3.2 Analisi del questionario sull’ansia matematica in funzione della posizione in classifica

A partire dai risultati osservati alla luce delle risposte fornite, al primo questionario, dagli studenti del distretto romano, si è deciso di crearne un altro per analizzare tale costrutto in modo più approfondito.

[21] Sono stati considerati stati d’animo positivi tutte le espressioni riguardanti la volontà di fare bene, la determinazione, l’entusiasmo, il divertimento, la tranquillità. Diversamente, sono stati considerati stati d’animo negativi le espressioni riguardanti l’ansia, l’agitazione, la paura, lo stress, l’insoddisfazione, la sfiducia, l’insicurezza.

Il secondo questionario (si veda l'allegato B) è stato pensato in modo da analizzare il tema dell'ansia matematica in generale, facendo uso del test AMAS nella sua traduzione italiana di Primi et al. (2014), ma anche aggiungendo delle domande specifiche sul tema dell'ansia durante le gare di matematica. In quest'ultimo caso, non avendo rilevato uno specifico strumento psicometrico in letteratura, gli item sono stati pensati specificamente per l'occasione. La scala utilizzata, come già precedentemente precisato, è la scala Likert con i punteggi espressi in numeri interi che possono andare da 1 (poca ansia) a 5 (molta ansia)[22].

Il questionario è stato sottoposto ai primi 43 studenti (37 maschi e 6 femmine) e agli ultimi 31 studenti (17 maschi e 14 femmine) della classifica della gara distrettuale di Roma del 2020. Tale scelta è stata fatta con l'obiettivo di studiare eventuali differenze nelle due fasce "estreme" della classifica, ma anche in considerazione della grossa difficoltà di poter raggiungere nuovamente tutti i partecipanti della gara di febbraio 2020, in quanto già nel periodo di sospensione della didattica in presenza a causa della pandemia da Covid-19. Ciò ha portato alla decisione di somministrare il test ad un campione ristretto di studenti; la sola raccolta delle risposte dei 74 studenti coinvolti, avvenuta mediante l'utilizzo di un modulo online costruito con la piattaforma Google ed effettuato in forma anonima, ha richiesto un mese di tempo e numerosi solleciti indirizzati agli studenti e ai loro docenti referenti. Nella fattispecie, sono stati creati due questionari identici ma con link di partecipazione diverso, in modo da mantenere distinta la raccolta delle risposte fra gli studenti della parte alta e quelli della parte bassa della classifica. Il numero di coloro che hanno preso parte al questionario non può certo definirsi ottimale ma è comunque sufficiente per rispondere ad un'analisi esplorativa prettamente descrittiva.

Tra gli studenti della fascia alta della classifica (voto medio al termine del precedente anno scolastico: 9,6; moda e mediana: 10), possiamo notare che la somma dei punteggi medi alle nove domande dell'AMAS è pari a 12,6 (SD = 3,3), con i punteggi che variano da un minimo di 9 (si tratta di studenti che hanno assegnato a tutte le domande valore 1) ad un massimo di 27; la moda dei singoli punteggi è pari a 9, la mediana è pari a 13. In particolare, emerge che il dover consultare le tavole in un manuale di matematica e il dover ascoltare una lezione di matematica sono stati gli aspetti che hanno creato meno ansia, mentre ciò che ha creato più ansia è il fatto di dover fare una verifica a sorpresa.

[22] Poiché la scala Likert è una scala ordinale, media e deviazione standard non sono misure di centralità e dispersione veramente rilevanti, sebbene siano state riportate all'interno della trattazione. Per le ordinali una buona misura di centralità sono la mediana e la moda mentre, come misura di dispersione, si può considerare il range. Si è ritenuto comunque utile riportarle in quanto forniscono delle tendenze di massima del livello di ansia misurato, anche in accordo con la procedura adottata da altri autori (Hopko et al., 2003; Primi et al, 2014).

Per quanto riguarda gli studenti della parte bassa della classifica (voto medio al termine del precedente anno scolastico: 9,19; moda e mediana: 9), la somma dei punteggi medi alle nove domande dell'AMAS è pari a 15,4 (SD = 4,9), con i punteggi che variano da un minimo di 9 ad un massimo di 31; la moda dei singoli punteggi è pari a 13, la mediana è pari a 13,5. Ciò che crea meno ansia è il dover ascoltare una lezione di matematica, mentre il dover fare una verifica a sorpresa resta la situazione che crea maggior ansia. In tabella 4.2 sono riportati i punteggi medi di ciascun item del test AMAS e relativi alla sola parte alta della classifica, alla parte bassa e per tutti i 74 studenti che hanno risposto al test.

Item (test AMAS)	**Punteggi medi parte alta classifica (scala da 1 a 5)**	**Punteggi medi parte alta classifica (scala da 1 a 5)**	**Punteggi medi totali (scala da 1 a 5)**
1. Dover consultare le tavole in un manuale di matematica	1,0	1,3	1,1
2. Pensare al compito di matematica del giorno dopo	1,8	2,2	2,0
3. Guardare la risoluzione di un'equazione svolta dall'insegnante alla lavagna	1,1	1,3	1,2
4. Fare il compito di matematica	1,7	2,4	2,0
5. Avere da fare molti problemi difficili di matematica per la lezione successiva	1,5	1,7	1,6
6. Ascoltare una spiegazione durante l'ora di matematica	1,1	1,1	1,1
7. Ascoltare un altro studente che spiega una formula di matematica	1,1	1,2	1,2
8. Dover fare una verifica a sorpresa durante l'ora di matematica	2,1	2,9	2,4
9. Iniziare un nuovo capitolo del manuale di matematica	1,1	1,2	1,2

Tabella 4.2: punteggi medi test AMAS divisi per posizione in classifica

Per ciò che riguarda la valutazione del grado di ansia durante le gare di matematica, anche in questo caso esiste una certa differenza fra coloro che occupano la parte alta e la parte bassa della classifica. Per i primi la somma dei punteggi medi alle sette domande è pari a 15,9 (SD = 5,6), con i punteggi che variano da un minimo di 7 ad un massimo di 29 (moda pari a 16, mediana pari a 15,5). Per quanto riguarda coloro che occupano la parte bassa della classifica, la somma dei punteggi medi alle sette domande è pari a 17,7 (SD = 5,6), con i punteggi che variano da un minimo di 7 ad un massimo di 28 (moda pari a 15, mediana pari a 18). In tabella 4.3 sono riportati i punteggi medi per ciascun item.

Item (test ansia gare matematiche)	**Punteggi medi parte alta classifica (scala da 1 a 5)**	**Punteggi medi parte bassa classifica (scala da 1 a 5)**	**Punteggi medi totali (scala da 1 a 5)**
1. Incontrare problemi e argomenti nuovi	1,9	2,7	2,2
2. Incontrare problemi e argomenti difficili	2,2	2,9	2,5
3. Riuscire a capire cosa sia richiesto dal testo del problema	1,7	2,2	1,9
4. Il confronto con altri studenti di pari livello	2,2	2,2	2,2
5. Il clima competitivo della gara	2,5	2,3	2,4
6. La voglia di non deludere sé stessi	3,2	3,1	3,2
7. La voglia di non deludere altri (genitori, insegnanti, ...)	2,3	2,3	2,3

Tabella 4.3: punteggi medi test sull'ansia nelle gare di matematica divisi per posizione in classifica

L'analisi dei punteggi medi riportati nelle precedenti tabelle mostra come, tra i due livelli della classifica, esista una differente percezione dell'ansia, sebbene non eccessivamente marcata. In particolare, il test AMAS suggerisce che gli studenti della parte bassa della classifica tendono a provare un livello di ansia maggiore rispetto ai loro compagni della parte alta, specie in relazione allo svolgimento di una verifica in classe. Questo può essere dovuto al fatto che i primi in classifica sono effettivamente studenti molto "dotati e portati" e, stando a quanto dichiarato in diverse occasioni dai loro docenti di matematica[23], capita che alcuni di loro in classe si annoino, in quanto trovano gli argomenti affrontati eccessivamente facili o hanno già provveduto a studiarli autonomamente. Lo stesso non può dirsi per gli ultimi della classifica, senza dubbio preparati ma con un livello di confidenza minore nei confronti della matematica.

Per quanto riguarda le risposte relative agli item sull'ansia nelle gare matematiche, il livello di ansia manifestato è superiore nei ragazzi della parte bassa della classifica solo per ciò che riguarda il dover affrontare problemi su argomenti nuovi e difficili, oltre al dover riuscire a comprendere cosa viene richiesto dal testo del problema. Gli studenti della parte alta della classifica sono meno spaventati dal dover mettere mano ad esercizi non convenzionali o di un certo livello di difficoltà; ciò che crea maggior ansia in loro è il clima competitivo della gara, con l'inevitabile confronto fra pari, ma anche la voglia di non deludere sé stessi e, in misura minore, gli altri (genitori, insegnanti, …). Ciò emerge anche dall'analisi delle risposte date nella domanda 8 del primo questionario (si veda l'allegato A), in cui gli studenti erano tenuti a scrivere una o più parole atte a descrivere il loro stato d'animo durante le gare (cfr. 4.3.1). Coloro che occupavano le prime posizioni in classifica hanno usato parole del tipo "convinta/o", "adrenalina", "carica/o", "concentrata/o", "determinata/o", "eccitata/o", ma alcuni di loro hanno usato anche la parola "ansiosa/o"; coloro che si sono classificati nella parte bassa della classifica hanno usato maggiormente parole del tipo "rassegnata/o", "insicura/o", "incerta/o" ma anche "tranquilla/o", come a voler denotare una certa consapevolezza delle difficoltà da loro incontrate e dunque una rinuncia a priori ad un successo in gara. Nonostante questa diffusa sensazione di insicurezza, chi occupa la parte bassa della classifica possiede globalmente un livello di ansia leggermente maggiore rispetto ai primi.

Dal momento che il numero di domande del test AMAS è pari a nove (e pertanto la somma dei punteggi oscilla in un range che va da 9 a 45), mentre il numero di domande relative all'ansia in gara è pari a sette (e quindi la somma dei punteggi oscilla in un range che va da 7 a 35), per poter meglio confrontare i risultati ottenuti tra le due parti del test, si è proceduto ad una normalizzazione moltiplicando i punteggi della seconda parte per 9/7, facendoli, in tal modo, anch'essi oscillare in un

[23] Nel 2017 è stato creato un gruppo WhatsApp formato da oltre un centinaio di docenti che, a Roma e nel Lazio, si occupano di coordinare le gare a livello di istituto. Il gruppo, denominato "Eccellenze al centro", è utilizzato anche per scambiarsi informazioni ed osservazioni riguardanti le ragazze e i ragazzi che prendono parte alle gare matematiche. È su questo gruppo, ma anche in occasione di alcune attività in presenza come le gare a squadre della Sapienza, che diversi docenti in questi anni hanno affermato quanto riportato nel testo circa le abitudini dei loro ragazzi più talentuosi.

range che va da un minimo di 9 a un massimo di 45. Così facendo, è stato possibile effettuare un confronto fra i risultati relativi al test AMAS e quelli relativi alle competizioni matematiche. Dalla lettura dei valori medi calcolati e precedentemente riportati, emerge che entrambe le fasce di studenti, infatti, hanno dichiarato di possedere un livello di ansia in classe piuttosto basso (risulta pari a 12,6 e 15,4 rispettivamente per la parte alta e bassa della classifica), mentre tali valori in gara, debitamente normalizzati, salgono a 20,5 e 22,8 rispettivamente per la parte alta e bassa della classifica.

4.3.3 Analisi del questionario sull'ansia matematica in funzione del genere

Le risposte del secondo questionario sono state analizzate anche in relazione al genere. Dei 74 studenti che hanno partecipato alla rilevazione, 20 sono state ragazze e 54 ragazzi.

Per quanto riguarda le ragazze, la somma dei punteggi medi alle nove domande del test AMAS è pari a 15,5 (SD = 5,0), con i punteggi che variano da un minimo di 9 ad un massimo di 31, moda pari a 13 e mediana pari a 14. Per quanto riguarda i ragazzi, la somma dei punteggi alle domande del test AMAS è pari a 13,1 (SD = 3,8), con i punteggi che variano da un minimo di 9 ad un massimo di 27, moda pari a 9 e mediana pari a 13. In particolare, il punteggio pari a 9 (che è il livello di ansia minimo ottenibile) è ottenuto da 11 ragazzi sui 54 totali, vale a dire il 20% contro il 5% dele ragazze (una sola sulle 20 totali). Nonostante le ragazze abbiano conseguito, al termine del precedente anno scolastico, un voto medio leggermente superiore a quello dei ragazzi (9,50 contro 9,41, su una scala da 1 a 10), hanno espresso livelli di ansia globalmente più elevati, specie quando si tratta di dover svolgere una verifica in classe. Nella tabella 4.4 sono riportati i punteggi medi di ciascun item del test AMAS in relazione al genere.

Il fatto che le ragazze possano avere un livello di ansia matematica maggiore rispetto ai ragazzi viene affermato anche da Stoet et al. (2016) i quali, a partire dai dati PISA di 68 nazioni (anni 2003 e 2012), hanno osservato come nei paesi più sviluppati e nei quali l'uguaglianza di genere è più diffusa, la differenza del livello di ansia matematica fra maschi e femmine resta comunque particolarmente marcata.

Item (test AMAS)	Punteggi medi femmine (scala da 1 a 5)	Punteggi medi maschi (scala da 1 a 5)
1. Dover consultare le tavole in un manuale di matematica	1,2	1,1
2. Pensare al compito di matematica del giorno dopo	2,2	1,9
3. Guardare la risoluzione di un’equazione svolta dall’insegnante alla lavagna	1,3	1,2
4. Fare il compito di matematica	2,6	1,8
5. Avere da fare molti problemi difficili di matematica per la lezione successiva	2,0	1,5
6. Ascoltare una spiegazione durante l’ora di matematica	1,1	1,1
7. Ascoltare un altro studente che spiega una formula di matematica	1,2	1,2
8. Dover fare una verifica a sorpresa durante l’ora di matematica	2,9	2,2
9. Iniziare un nuovo capitolo del manuale di matematica	1,2	1,2

Tabella 4.4: punteggi medi test AMAS divisi per genere

Dalle risposte alle domande sulle gare matematiche, si riscontra analogamente, seppure in misura minore ed in modo diverso a seconda del tipo di domanda, una certa differenza nel livello di ansia fra ragazze e ragazzi, con le prime tendenzialmente più ansiose dei secondi.

In questo caso, la somma dei punteggi medi alle sette domande del test, per le ragazze, è pari a 17,5 (SD = 6,0), con punteggi che variano da un minimo di 7 ad un massimo di 28 e mediana pari a 17. La distribuzione risulta essere plurimodale (esistono ben cinque punteggi che presentano la frequenza massima, quest’ultima pari a due). Per i ragazzi la somma dei punteggi medi alle domande del test è pari a 16,4 (SD = 5,5), con punteggi che variano da un minimo di 7 ad un massimo di 29, moda e mediana entrambe pari a 16. Nella tabella 4.5 sono riportati i punteggi medi per ciascun item.

Item (test ansia gare matematiche)	**Punteggi medi femmine (scala da 1 a 5)**	**Punteggi medi maschi (scala da 1 a 5)**
1. Incontrare problemi e argomenti nuovi	2,4	2,2
2. Incontrare problemi e argomenti difficili	2,8	2,5
3. Riuscire a capire cosa sia richiesto dal testo del problema	2,2	1,8
4. Il confronto con altri studenti di pari livello	2,1	2,2
5. Il clima competitivo della gara	2,4	2,4
6. La voglia di non deludere sé stessi	3,0	3,2
7. La voglia di non deludere altri (genitori, insegnanti, ...)	2,8	2,1

Tabella 4.5: punteggi medi test sull'ansia nelle gare di matematica divisi per genere

Ciò che crea maggiormente ansia non sono solo l'analisi di problemi e gli argomenti difficili e non noti (il cui risultato è in accordo con quanto emerso da PISA 2012; si veda Giberti, 2019), ma anche (e in valore assoluto è la voce in cui la differenza fra maschi e femmine è maggiormente marcata) la voglia di non deludere altre persone, come ad esempio i propri genitori o i propri insegnanti, aspetto che meno coinvolge i ragazzi, i quali tengono soprattutto a non deludere sé stessi ancor più che gli altri. Si tratta di un aspetto già emerso in occasione di altre ricerche (Fox, 1982; Callahan et al., 1996; Lengfelder & Heller, 2002), che mostrano come le ragazze attribuiscano una notevole importanza al pensiero degli adulti, dai quali risultano influenzate e condizionate nelle loro scelte, a differenza dei ragazzi, i quali attribuiscono il merito delle proprie capacità a caratteristiche di natura intrinseca (sforzo ed impegno personale, curiosità propria). Stoet et al. (2016) osservano come le famiglie, anche in quei paesi in cui il livello di uguaglianza di genere è maggiore, ritengano che i figli maschi abbiano più probabilità di successo in matematica rispetto alle figlie femmine. Le opinioni di genitori e insegnanti possono, dunque, generare un senso di inadeguatezza nelle ragazze, soprattutto di fronte alla risoluzione di problemi di un livello di difficoltà superiore (e per i quali il semplice impegno potrebbe non bastare), il che può portare ad una vera e propria "ansia da prestazione” dovuta al desiderio di non deludere gli adulti durante le prestazioni nelle gare matematiche.

Le risposte al questionario ci suggeriscono, poi, che i ragazzi sono più competitivi delle ragazze; infatti, sono state registrate medie più alte per i maschi per quanto riguarda il confronto con altri studenti dello stesso livello e il clima competitiva della gara.

Si è successivamente proceduto a normalizzare i punteggi relativi alla parte di test sull’ansia durante le gare, facendo così oscillare anch’essi in un range che va da 9 a 45. Un confronto di tali punteggi medi con quelli del test AMAS permette di osservare come l’ansia posseduta in classe nelle ore di matematica, da parte di ragazze e ragazzi, sia rispettivamente pari a 15,5 e 13,1, mentre in gara i valori si attestano, rispettivamente, a 22,4 e 21,1. Questa ricerca, pertanto, conferma il fatto che le ragazze possiedano, sia in classe che in gara, un livello di ansia maggiore dei ragazzi. Inoltre, poiché la deviazione standard è risultata maggiore nel caso delle risposte inerenti all’ansia in gara, indipendentemente che si considerino le femmine o i maschi, si osserva come la situazione sia estremamente variabile e possa cambiare, in modo anche netto, da persona a persona. In tal senso, le medie riportate forniscono solo delle tendenze ma da sole non sono sufficienti a fornire una piena comprensione del fenomeno, che necessita di ulteriori approfondimenti anche mediante futuri studi di carattere qualitativo.

Segnaliamo come la presenza di un questionario specifico sul tema dell’ansia matematica nelle competizioni studentesche, sebbene limitato ad un numero molto ristretto di item (pari a sette), abbia permesso di ottenere delle indicazioni più precise rispetto all’utilizzo di una singola domanda, come avvenuto durante il primo questionario del febbraio 2020. A conferma di ciò, nella parte finale del secondo questionario venivano ripetute le due singole domande sull’ansia nelle verifiche in classe e in gara, da valutare con un punteggio da 1 a 10, così come formulate nel primo questionario (cfr. domande 6 e 7 dell’allegato B). Analogamente a quanto già osservato in 4.3.1, anche in questo caso emerge che le ragazze possiedono un livello globale di ansia maggiore sia nelle verifiche in classe (3,7 contro la media di 3,2 dei ragazzi), che nelle gare (6,3 contro la media di 5,8 dei ragazzi), sebbene quanto osservato nel presente paragrafo ci suggerisca come a contribuire all’ansia siano aspetti diversi, diversamente percepiti da maschi e femmine.

Si ritiene necessario specificare che il test AMAS e le domande relative all’ansia in gara, pur valutando lo stesso stato d’animo, vanno a misurare aspetti diversi in contesti diversi. Infatti, le domande del test AMAS si prestano bene a valutare il livello di ansia matematica secondo la definizione data nel 1972 da Richardson e Suinn (cfr. 4.1), mentre la parte di questionario relativa all'ansia nelle competizioni misura, ancor più che la semplice "ansia matematica", la cosiddetta "ansia da gara" o "ansia da prestazione" la quale, come si è osservato, risulta essere particolarmente marcata in tutti i partecipanti alle gare coinvolti nella rilevazione, ma in particolar modo nelle ragazze. Dunque, appare corretto parlare di ansia matematica anche tra gli studenti che prendono parte alle gare, purché si tenga a mente che tale ansia possiede un'accezione leggermente diversa da quella presente in letteratura.

Infine, l'ultima domanda del questionario chiedeva di valutare, con un punteggio che va da 1 (per nulla) a 5 (tantissimo), quanto ci si era allenati in vista delle gare matematiche alle quali si aveva preso parte. La domanda aveva uno scopo puramente esplorativo per capire se l'aspetto della preparazione potesse in qualche modo influenzare il grado di ansia di ciascuno, nell'ottica che una maggiore preparazione possa ridurre eventuali stati d'animo come la paura, il senso di inadeguatezza e l'ansia stessa. I punteggi medi ottenuti sono stati di 2,7 ($SD = 0{,}8$) per le ragazze e di 2,7 ($SD = 1{,}1$) per i ragazzi, dunque sostanzialmente identici, motivo per il quale si è deciso di non continuare ad indagare su tale aspetto con questionari più mirati e puntuali (volti, ad esempio, a quantificare in maniera più esatta e precisa il tempo impiegato nella preparazione, l'eventuale frequentazione di forum e/o social nei quali ci si confronta su tematiche inerenti alle gare, ecc.). Desta comunque un certo interesse il dato relativo alla deviazione standard, dove la maggiore variabilità riscontrata nel punteggio dei ragazzi trova conferma nell'osservazione delle frequenze assolute dei punteggi. Se solo due ragazze su 20 hanno dato punteggio 4 (si sono molto preparate) e le rimanenti hanno dato punteggi strettamente minori di 4 (pari al 90% delle partecipanti al questionario), tra i 54 ragazzi hanno dato punteggio 4 ben sei ragazzi e altri quattro di loro hanno dato punteggio 5, mentre i rimanenti hanno dato punteggi strettamente minori di 4 (pari all'81% dei partecipanti al questionario). Il tema della preparazione ed il fatto di possedere opportune conoscenze e competenze sui singoli ambiti che caratterizzano la matematica delle olimpiadi è stato anch'esso oggetto di ricerca. In particolare, come mostrato nel capitolo successivo, ci si è interrogati sul fatto che ad una buona conoscenza di taluni argomenti, come ad esempio le proprietà degli enti geometrici e dei principali teoremi della geometria, non sempre corrisponde un'adeguata prestazione in gara (Facciaroni, Mazza & Gambini, 2022).

4.3.4 Ansia matematica o ansia da prestazione?

La ricerca svolta ha voluto analizzare il tema dell'ansia fra gli studenti che partecipano alle gare in funzione della posizione in classifica e in funzione del genere.

Va specificato che l’uso del termine “ansia matematica”, anche in accordo con la definizione fornita (cfr. 4.1), viene usualmente riferito a popolazioni nelle quali si manifestano fenomeni psicologici di repulsione più o meno profonda verso la matematica. Tale accezione appare poco indicata per descrivere lo stato emotivo degli studenti nelle gare distrettuali, i quali partecipano in maniera del tutto volontaria e risultano essere il più delle volte motivati e interessati alla materia.

In questo caso sarebbe quindi più opportuno parlare di “ansia da competizione” o “ansia da prestazione”, ma in letteratura il legame tra tale tipo di ansia e le competizioni matematiche appare poco discusso e analizzato. D’altro canto, va specificato che la ricerca svolta ha previsto anche la somministrazione del test AMAS, il quale rappresenta uno strumento di indagine per l’ansia matematica e non per l’ansia da prestazione, giustificando la scelta di alcuni riferimenti bibliografici citati. I punteggi bassi ottenuti dagli studenti che hanno risposto al test AMAS, e di contro i punteggi tendenzialmente più alti ottenuti nelle domande relative all’ansia in gara confermano l’ipotesi che, per coloro che partecipano alle competizioni studentesche, l’ansia posseduta è legata maggiormente al contesto competitivo e alla volontà di effettuare una prestazione soddisfacente.

La parte di domande relative all’ansia in gara ha permesso di ottenere conferme rispetto a quanto già noto in letteratura: ragazze e ragazzi possiedono livelli di ansia matematica (misurata con il test AMAS) diversi, con le prime più ansiose dei secondi, e livelli di ansia da prestazione (misurata con le domande relative alle gare matematiche) simili, con precise differenze riguardanti la voglia di non deludere altri o se stessi.

5 Le difficoltà in geometria dei partecipanti alle gare

5.1 L'insegnamento della geometria: sviluppo storico e culturale

L'insegnamento della geometria contempla molteplici motivazioni e si prefigge molteplici obiettivi. È mediante lo studio della geometria che si vuole presentare una modellizzazione dello spazio fisico a noi circostante, si cerca di far sviluppare nello studente delle capacità intuitive spaziali ma anche delle capacità grafiche e linguistiche, si vuole stimolare la necessità della dimostrazione, abituare al ragionamento nonché fornire un esempio significativo di sistema assiomatico – deduttivo.

Per secoli la geometria ha ispirato studi di carattere epistemologico. Già Platone, nel libro VII della sua *Repubblica*, definiva la geometria come "la conoscenza di ciò che eternamente è", sottolineando come "per un migliore apprendimento di ogni disciplina ci sarà una differenza totale tra chi è esperto in geometria e chi non lo è". La geometria rappresenta la seconda disciplina per l'educazione dei filosofi, dopo l'aritmetica ma prima dell'astronomia e dell'armonia. Nella "Critica della ragion pura" (1871), il filosofo tedesco Immanuel Kant classifica le regole formali del pensiero distinguendo tra giudizi a priori e posteriori (o empirici), con un'ulteriore suddivisione in giudizi analitici e sintetici. I giudizi sintetici, a differenza di quelli analitici, aggiungono qualcosa di nuovo alla nostra conoscenza. I giudizi a priori sono indipendenti dall'esperienza, e le proposizioni matematiche sono giudizi a priori in quanto "portano con sé una necessità che non può essere presa dall'esperienza". La geometria euclidea, in particolare, ed i suoi teoremi rappresentano un esempio di giudizi sintetici a priori; la geometria euclidea è vera e i suoi principi sono infallibili. Con la scoperta delle geometrie non euclidee, l'idea che potesse esistere una conoscenza perfetta e sicura dovette essere rivista. Accade così che la geometria euclidea risulta essere la più indicata nella descrizione dello spazio che ci circonda fintanto che non entrano in gioco distanze di ordine astronomico, per le quali risulta più conveniente l'utilizzo della geometria di Riemann.

Per quanto riguarda l'insegnamento della geometria, limitandosi a quanto accadeva in Italia all'indomani dell'unità nazionale, va senza dubbio citato il lavoro svolto nel 1867 da una specifica commissione istituita dal Governo sullo stato dell'insegnamento della matematica e, in particolare, della geometria. La commissione, formata peraltro da illustri matematici come Giuseppe Battaglini e Luigi Cremona, suggerì che nelle scuole italiane venisse insegnata la geometria di Euclide. Nelle raccomandazioni della commissione si legge che "La matematica non deve considerarsi come un complesso di cognizioni utili in sé perché applicabili ai bisogni della vita, ma principalmente come un mezzo di cultura intellettuale". La commissione suggeriva altresì di abbandonare i testi che si ispiravano al metodo di Clairaut e a quello di Legendre, autore del famoso libro "*Eléments de géométrie*" particolarmente diffuso nel XIX secolo, accusato di aver contaminato l'opera di Euclide con metodi algebrici e aritmetici. Tale indicazione ebbe senza dubbio una certa influenza nei nuovi programmi ministeriali emanati, nello stesso anno, con la riforma Coppino, sebbene la geometria trovasse spazio solo nelle classi del ginnasio superiore e del liceo (recentemente istituiti con la legge Casati del 1859), ma non nelle scuole tecniche e negli istituti tecnici.

Nel XX secolo l'insegnamento della matematica, e quindi della geometria, ha attraversato fasi altalenanti. Basta pensare, a titolo di esempio, alla riforma Gentile del 1923 che riduce le ore dedicate alla matematica a scuola, mentre valorizza le discipline umanistiche quali strumenti per la formazione culturale degli studenti. Al di là delle scelte politiche portate avanti dai diversi governi nel corso degli anni in termini di programmi e numero di ore dedicate alla matematica, il modo di insegnare tale disciplina oggi in Italia risente anche dell'influenza di alcuni grandi studiosi come, ad esempio, Bruno De Finetti, Lucio Lombardo Radice ed Emma Castelnuovo. Quest'ultima nel 1948 pubblica la prima edizione del libro "Geometria intuitiva", un testo rivolto agli studenti della scuola secondaria di I grado (scuola media inferiore) caratterizzato da un approccio costruttivo e dinamico. La stessa Castelnuovo va ricordata per l'ampio utilizzo di materiale e artefatti che permettono allo studente di manipolare figure geometriche, nonché di vedere e scoprire proprietà delle stesse (Degli Esposti & Lanciano, 2016). Oggi la geometria occupa un posto importante nell'ambito dell'insegnamento, dove l'ampio spazio dedicato agli aspetti analitici non ha comportato un'eccessiva riduzione dello studio, mediante un approccio sintetico, di figure piane e solide. Sebbene l'approccio classico (euclideo), portato avanti da moltissimi docenti e da moltissimi libri di testo, sia quello di iniziare dalla geometria in due dimensioni per poi passare a quella a tre dimensioni, resta ancora aperto il dibattito all'interno della comunità dei ricercatori in didattica della matematica circa la necessità di invertire tale trattazione, almeno a livello di scuola primaria, ritenendo che la geometria tridimensionale rappresenti una realtà più vicina all'esperienza del bambino rispetto ad uno studio che inizi da concetti quali "punto", "retta" e "piano", i quali "non esistono, non possono esistere nella realtà" (cit. Fischbein, 1993 pag. 141) e come tali sono meno intuitivi (Arrigo & Sbaragli, 2004; Cottino & Sbaragli, 2004; Sbaragli & Mammarella, 2010). Nel mondo dell'insegnamento permangono, inoltre, degli elementi di disomogeneità, sia da paese a paese, che all'interno dello stesso paese o, a volte, anche all'interno della stessa scuola, dove docenti diversi possiedono sensibilità ed attenzioni diverse nei confronti della geometria, la quale talvolta è relegata allo studio di poche e limitate nozioni teoriche senza un vero e proprio esercizio alla dimostrazione. Ed è proprio il tema della dimostrazione a trovare ampio spazio in letteratura (Herbst & Brach, 2006), con diversi studi volti a comprendere i meccanismi cognitivi che gli individui mettono in atto quando svolgono (o provano a svolgere) una dimostrazione (Knuth, 2002; Selden & Selden, 2003), o per indagare sui processi logici che permettono di diventare abili nello svolgere particolari tipi di dimostrazioni (Anderson, 1982 e 1983). Alcuni studi analizzano i differenti stadi di sviluppo cognitivo in cui gli studenti possono produrre delle dimostrazioni in modo significativo. Tra tutte, ricordiamo la teoria dello sviluppo del pensiero geometrico dei coniugi e docenti olandesi Pierre van Hiele and Dina van Hiele-Geldof (van Hiele-Geldof, 1984; van Hiele 1986). Essi, notando le difficoltà manifestate dai loro studenti in geometria, svilupparono una teoria che introduce diversi livelli di pensiero attraversati dagli studenti man mano che passano dal semplice riconoscere una figura all'essere in grado di descrivere una dimostrazione formale (Usiskin, 1982; Crowley, 1987; Clements & Battista, 1992; Mason & Moore, 1997; Mason, 2009; Sbaragli & Mammarella, 2010). I livelli indicati dai van Hiele sono cinque, fra loro sequenziali e gerarchici: livello 1 (visualizzazione), in cui si riconoscono le figure solo dall'aspetto senza percepirne le proprietà; livello 2 (analisi), in cui si riconoscono le proprietà delle figure senza però la relazione fra di esse; livello 3 (astrazione), in cui vengono percepite le relazioni fra proprietà e figure, senza però comprendere ancora il ruolo e il significato della deduzione formale; livello 4 (deduzione), in cui si è in grado di costruire delle dimostrazioni, comprendere il ruolo di definizioni e assiomi e conoscere il significato di condizione necessaria e sufficiente; infine il livello 5 (rigore), in cui si comprendono gli aspetti formali di una dimostrazione. Secondo i van Hiele, dunque, scrivere una dimostrazione richiede un alto livello di pensiero, ma molti studenti non ne sono in grado in quanto necessitano di svolgere un lavoro maggiore con dei task specifici di livello più basso. Con specifico riferimento agli studenti di talento, se questi ultimi sembrano talvolta "saltare" dei livelli, probabilmente è solo perché hanno sviluppato delle abilità di ragionamento logico in altri contesti diversi dalla geometria (Krutetskii, 1976; Mason, 2009; Mainali, 2019).

5.2 Geometria e gare di matematica: la ricerca svolta

5.2.1 Studenti delle gare e performance in geometria

Come già osservato in precedenza, la ricerca si è limitata ad analizzare i risultati degli studenti italiani nella gara distrettuale limitatamente agli anni 2017-2020. Il totale di coloro che negli anni considerati hanno preso parte alla gara distrettuale si attesta all'incirca sulle 10.000 unità per anno. Nella tabella seguente riportiamo l'esatto valore:

	Tot. studenti
2017	10.544
2018	9.687
2019	9.905
2020	10.000

Tabella 5.1: numero di studenti partecipanti alle gare distrettuali per gli anni 2017-2020

Le osservazioni di seguito riportate riguardano gli ultimi tre esercizi delle gare distrettuali, vale a dire quelli a risposta aperta, negli anni presi in considerazione. Per ciascuno di questi anni, tali quesiti hanno riguardato l'ambito della teoria dei numeri, della combinatoria e della geometria, mentre non ci sono stati esercizi dimostrativi di algebra. Il testo di tali quesiti è riportato in appendice (si veda l'allegato C).

La prima osservazione svolta riguarda la percentuale di risposte lasciate in bianco, mostrate nella tabella sottostante:

	Teoria dei numeri	Combinatoria	Geometria
2017	85%	93%	77%
2018	60%	77%	93%
2019	77%	78%	88%
2020	67%	78%	88%

Tabella 5.2: percentuali di risposte lasciate in bianco nei tre esercizi dimostrativi

Quello che si evince è come il quesito di geometria, ad esclusione dell'anno 2017, sia quello che maggiormente viene lasciato in bianco dagli studenti che hanno preso parte alla gara. Non è stato possibile verificare se gli studenti abbiano rinunciato a priori a svolgere tale tipologia di quesito (ad esempio, senza neanche leggerne il testo) o se abbiano provato a svolgerlo, magari su fogli di brutta copia (che però non dovevano riconsegnare al termine della gara), sebbene senza successo.

Comprendere quali sono le dinamiche in gara potrà essere oggetto di futuri approfondimenti mediante interviste o questionari mirati.

Un secondo aspetto oggetto di analisi riguarda i punteggi assegnati a tali esercizi. La griglia di valutazione prevedeva di valutare ciascun quesito dimostrativo con un intero compreso tra 0 (esercizio lasciato in bianco) a 15 punti (esercizio completamente corretto). Nelle intenzioni degli estensori della prova, l'idea è stata di assegnare 0 punti solo nel caso effettivo di prova lasciata in bianco, in quanto la griglia di valutazione prevede che possa essere assegnato anche un solo punto nel caso di semplici considerazioni di carattere generale o nel caso in cui venga fornito un esempio di quanto richiesto (e.g. una soluzione particolare di un'equazione che ammette infinite soluzioni); nel caso specifico della geometria, poi, negli ultimi anni è stata data indicazione di assegnare un punto anche solo per aver disegnato correttamente la figura senza nessun'altra considerazione.

2017

Argomento	**Media**	**SD**	**95° pctl**	**99° pctl**
Combinatoria	0,3	1,5	2	7
Geometria	1,6	3,4	8	15
Teoria dei numeri	0,9	2,5	6	15

2018

Argomento	**Media**	**SD**	**95° pctl**	**99° pctl**
Combinatoria	1,1	2,6	7	13
Geometria	0,2	1,3	1	5
Teoria dei numeri	1,6	2,9	7	15

2019

Argomento	**Media**	**SD**	**95° pctl**	**99° pctl**
Combinatoria	1,8	4,1	14	15
Geometria	0,4	1,7	2	13
Teoria dei numeri	1,3	3,0	9	15

2020

Argomento	Media	SD	95° pctl	99° pctl
Combinatoria	1,6	3,6	10	15
Geometria	0,7	2,3	5	10
Teoria dei numeri	1,9	3,6	11	15

Tabella 5.3: media, deviazione standard e percentili dei tre esercizi dimostrativi

Come si evince dalla tabella 5.3, il problema di geometria è quello che, tendenzialmente, presenta un punteggio medio minore rispetto agli altri quesiti. La situazione cambia solo per l'anno 2017, in cui il punteggio medio di geometria è risultato essere maggiore rispetto agli altri due ambiti, sebbene con una deviazione standard abbastanza alta ad indicare una certa variabilità. Difatti, ad ottenere zero punti in tale quesito sono stati 8.140 studenti (il 77% del totale); negli anni successivi, invece, il quesito con un punteggio medio maggiore ha ottenuto percentuali di risposte lasciate in bianco più basse, pari al 60% e al 67% rispettivamente nel 2018 e nel 2020 (quesito di teoria dei numeri). Solo nel 2019 la situazione relativa al quesito di combinatoria è paragonabile a quella della geometria nel 2017 (quesito con punteggio medio totale più alto ma alta deviazione standard e alto numero di risposte lasciate in bianco). Una possibile interpretazione della controtendenza dell'andamento nel quesito di geometria nel 2017 rispetto agli anni successivi può essere data analizzando il testo degli esercizi. Stando a quella che è la soluzione ufficiale proposta dall'UMI, ciascuna delle due richieste inserite all'interno del quesito si risolve applicando semplici e dirette considerazioni sulla circonferenza (e.g.: angoli al centro e corrispondenti angoli alla circonferenza), il teorema di Talete e le proprietà dei parallelogrammi, tutte nozioni basilari che possono aver reso l'esercizio "scolastico" agli occhi di molti studenti. Gli esercizi dimostrativi di geometria degli anni successivi, pur senza scomodare conoscenze di difficoltà superiori al 2017, sembrerebbero richiedere l'applicazione di procedure leggermente più complesse (come, ad esempio, l'*angle chasing*, vale a dire lo studio delle ampiezze degli angoli presenti in figura) o comunque la ricerca di uguaglianze e proprietà, nella ricerca di possibili relazioni fra gli enti geometrici considerati, mediante lo svolgimento di più passaggi logici. È chiaro che la capacità di saper osservare (o comunque trovare) eventuali relazioni all'interno di un problema geometrico è una competenza che si acquisisce mediante una pratica costante, aspetto questo che sarà ripreso nel paragrafo 5.2.2. Considerando dunque il 2017 come un anno per certi aspetti “anomalo”, nelle prossime considerazioni ci limiteremo a studiare quanto accaduto nel triennio 2018 - 2020, per cercare di comprendere, quanto meno da un punto di vista quantitativo, l’effettiva ampiezza del problema oggetto di studio, vale a dire la difficoltà che rappresentano i quesiti di geometria in gara.

Con riferimento nuovamente alla tabella 5.3, la deviazione standard dei punteggi di geometria è piuttosto bassa, ad indicare che gli studenti sono concentrati intorno al punteggio medio e dunque presentano punteggi simili. Ciò sta a significare che la maggior parte dei partecipanti ha raccolto zero o pochissimi punti nei tre diversi quesiti; in particolare, riguardo al quesito di geometria, si osserva che, data la bassa variabilità, gli studenti sono particolarmente omogenei rispetto a questa caratteristica e i punteggi sono schiacciati intorno al punteggio medio, pari a 0,2 punti nel 2018, 0,4 punti nel 2019 e 0,7 punti nel 2020.

Negli ultimi tre anni si osserva, inoltre, che il primo 95% degli studenti, ordinati in modo crescente rispetto al punteggio ottenuto nel quesito dimostrativo di geometria, ha ottenuto 0 o 1 punto nel 2018, al più 2 punti nel 2019 e al più 5 punti nel 2020. Per gli altri due ambiti si osserva quanto segue: il primo 95% degli studenti, ordinati in maniera crescente rispetto al punteggio ottenuto nel quesito di teoria dei numeri, ha ottenuto al più 7 punti nel 2018, al più 9 punti nel 2019 e al più 11 punti nel 2020. Si ottengono analoghi risultati per il quesito di combinatoria: il primo 95% dei partecipanti, ordinati in maniera crescente rispetto al punteggio ottenuto nel quesito di combinatoria, ha ottenuto al più 7 punti nel 2018, al più 14 punti nel 2019 e al più 10 punti nel 2020.

Il 99° percentile conferma che il quesito dimostrativo di geometria negli ultimi tre anni ha messo in difficoltà i partecipanti al punto tale che in pochi, rispetto a combinatoria e teoria dei numeri, hanno ottenuto punteggi elevati: il 99% dei partecipanti nel 2018 ha ottenuto un punteggio non superiore a 5 punti (non superiore a 13 punti per combinatoria); nel 2019 e nel 2020 almeno l’1% dei partecipanti ha ottenuto un punteggio di 15 punti nei quesiti dimostrativi di combinatoria e teoria dei numeri mentre neanche l’1% ha ottenuto il punteggio massimo nel quesito di geometria.

Si vuole ricordare, a questo punto, quanto dichiarato dal Presidente della Commissione Olimpiadi dell’Unione Matematica Italiana, Prof. Ludovico Pernazza, nella sua recente intervista rilasciata sul blog di divulgazione matematica “Math is in the air” (cfr. 2.3). Egli ha affermato che è proprio nella risoluzione dei quesiti di geometria, sia nelle gare svolte a livello distrettuale che a livello nazionale ed internazionale, che gli studenti rischiano maggiormente di arenarsi.

In quella stessa intervista il Prof. Pernazza ha anche affermato che nelle IMO c'è l'usanza di inserire almeno due esercizi di geometria su sei, in modo che, per ottenere un buon piazzamento in classifica, bisogna comunque mettere mano a tale tipologia di esercizi, lasciando intendere come la buona riuscita nei quesiti di geometria possa rappresentare un fattore discriminante ai fini del successo nelle competizioni matematiche.

È lecito chiedersi se tale ipotesi sia valida anche in gare più semplici come quelle che stiamo analizzando, sebbene i quesiti di geometria in tali gare abbiano un peso inferiore (intorno al 25%) sul punteggio totale. Al riguardo, sempre con riferimento ai tre esercizi dimostrativi delle competizioni distrettuali del triennio 2018 - 2020, si riporta nella tabella 5.4 il punteggio medio totale ottenuto in gara dai soli studenti che, nei singoli esercizi dimostrativi, hanno ottenuto un punteggio maggiore o uguale a 10 (su un massimo che, ricordiamo, è fissato a 15 punti):

	Teoria dei numeri	**Combinatoria**	**Geometria**
2018	55,5	49,2	69,9
2019	49,8	46,1	57,1
2020	50,3	50,4	51,2

Tabella 5.4: punteggi medi totali degli studenti che hanno ottenuto in ciascuno dei tre esercizi dimostrativi una valutazione compresa fra 10 e 15 punti

Si consideri, a titolo di esempio, l'anno 2018. Dalla tabella si evince che gli studenti ai quali l'esercizio dimostrativo di teoria dei numeri è stato valutato tra 10 e 15 punti hanno ottenuto, mediamente, un punteggio globale (sulla totalità dei 17 esercizi) pari a 55,5. Tale valore è pari a 49,2 se si considerano i soli studenti il cui quesito dimostrativo di combinatoria è stato valutato fra 10 e 15 punti e pari a 69,9 per gli studenti che hanno ottenuto tra 10 e 15 punti nel quesito dimostrativo di geometria. Solo nel 2020 le differenze dei punteggi medi globali sono meno rilevanti. Ad ogni modo, la tabella 5.4 ci suggerisce che una buona prestazione nei quesiti dimostrativi di geometria sia discriminante per poter identificare coloro che, al termine della gara, otterranno un punteggio finale elevato. Semplificando il discorso, gli studenti che vanno bene nel quesito dimostrativo di geometria sono anche quelli che vanno meglio in tutti gli altri quesiti della gara ed ottengono un punteggio globale più elevato.

A supporto di quanto osservato, riferendoci inizialmente all’anno 2018 e ai punteggi nei tre quesiti dimostrativi e al punteggio totale ottenuto, si è proceduto con una *cluster analysis* gerarchica utilizzando il metodo del legame completo, con l’obiettivo di ottenere categorie di studenti in modo tale che studenti appartenenti allo stesso gruppo abbiano caratteristiche simili e studenti appartenenti a gruppi differenti si distinguano per risultati ottenuti (si veda l’allegato D).

La scelta di 6 gruppi è giustificata dal fatto che spiega l’83% della variabilità degli studenti; inoltre, in corrispondenza della partizione in 6 gruppi l’indice pseudo-f assume un massimo locale (come si evince dal grafico) e la pseudo-t^2 assume un valore molto minore del valore assunto in corrispondenza della partizione in 5 gruppi.

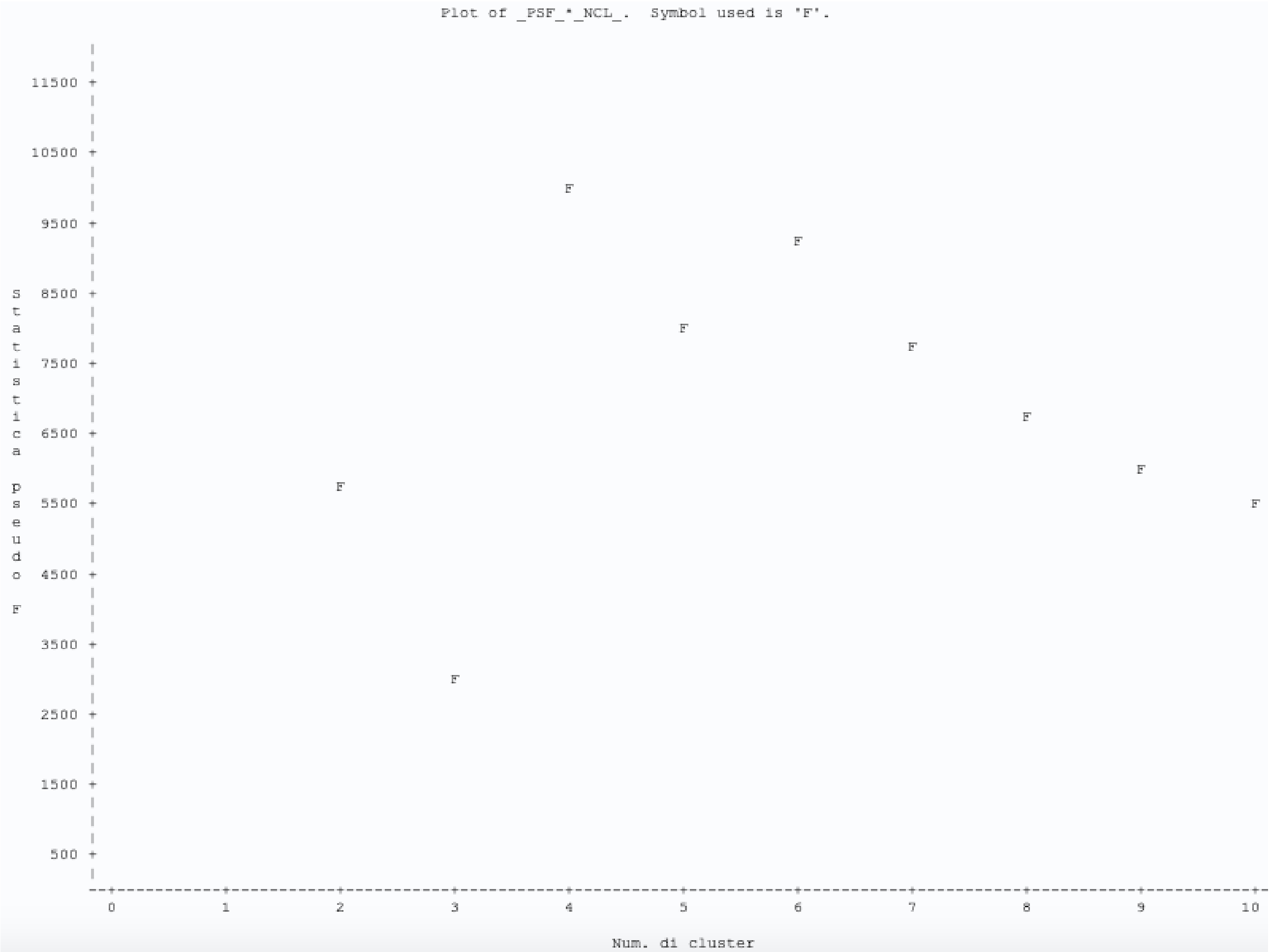


Figura 5.1: Statistica pseudo-f calcolata nelle ultime 10 partizioni della gerarchia

Coordinando l’informazione di questi indici, si prosegue ad analizzare la soluzione ottenuta:

Cluster = 1

Variabile	N	Media
Totale	5.512	12,7
Dim_g	5.512	0,1
Dim_c	5.512	0,3
Dim_n	5.512	0,5

Cluster = 2

Variabile	N	Media
Totale	2.432	27,1
Dim_g	2.432	0,2
Dim_c	2.432	1,2
Dim_n	2.432	1,7

Cluster = 3

Variabile	N	Media
Totale	1.233	39,4
Dim_g	1.233	0,3
Dim_c	1.233	2,3
Dim_n	1.233	3,3

Cluster = 4

Variabili	N	Media
Totale	396	54,2
Dim_g	396	0,9
Dim_c	396	6,3
Dim_n	396	7,3

Cluster = 5

Variabile	N	Media
Totale	87	70,5
Dim_g	87	3,9
Dim_c	87	5,3
Dim_n	87	11,7

Cluster = 6

Variabile	N	Media
Totale	27	94,7
Dim_g	27	11,6
Dim_c	27	10,9
Dim_n	27	14,4

Tabella 5.5: Numerosità e punteggi medi dei 6 gruppi della partizione scelta per l'anno 2018

I primi tre gruppi sono i più numerosi: vi sono rispettivamente 5.512, 2.432 e 1.233 studenti i quali hanno ottenuto un punteggio medio nel quesito di geometria pari a 0,1 punti, 0,2 punti e 0,3 punti; in ciascuno dei tre gruppi il punteggio medio ottenuto nei quesiti di combinatoria e teoria dei numeri è leggermente maggiore rispetto al punteggio medio dei quesiti di geometria. Il punteggio medio totale degli studenti del primo gruppo è inferiore al punteggio medio globale di tutti gli studenti (pari a circa 22 punti), pertanto, nel primo cluster si collocano studenti che sono andati male nel complesso (e nello specifico, in geometria peggio che nelle altre due discipline); nel secondo e nel terzo gruppo il punteggio totale ottenuto è leggermente superiore al punteggio medio globale, ma in entrambi i casi non elevato (pari a 27,1 punti per gli studenti del cluster 2 e 39,4 per il cluster 3), seppure i partecipanti, in media, hanno quantomeno provato a risolvere gli esercizi dimostrativi di teoria dei numeri e combinatoria dato che i punteggi medi ottenuti nei due quesiti sono 1,2 e 1,7 punti per gli studenti del cluster 2 e 2,3 e 3,3 punti per gli studenti del cluster 3. Nel quarto gruppo si collocano 396 studenti, i quali hanno ottenuto un punteggio medio nel quesito di geometria pari a 0,9 mentre un punteggio medio nei quesiti di combinatoria e teoria dei numeri rispettivamente pari a 6,3 e 7,3: questi studenti, con un punteggio medio molto basso nel quesito di geometria e invece un punteggio medio nella fascia 6-10 punti (quindi un punteggio buono) nei quesiti delle altre due discipline, hanno ottenuto un punteggio medio totale di 54,21 punti. Nel quinto gruppo, che comprende 87 studenti, il punteggio medio del quesito di geometria è maggiore rispetto ai casi precedenti e pari a 3,9; si osserva che il punteggio medio totale è anch'esso superiore a quello del quarto gruppo, nonostante nel quinto gruppo ci siano studenti che hanno ottenuto un punteggio medio inferiore nel quesito di combinatoria, pari a 5,3, rispetto al cluster 4. L'ultimo gruppo, di numerosità pari a 27 studenti, è caratterizzato da studenti particolarmente bravi, dato che ottengono un punteggio medio totale di 94,7 punti: questo gruppo racchiude studenti con punteggi elevati, ed è l'unico gruppo in cui il punteggio medio del quesito di geometria è elevato (appartenente alla fascia 10-15), pari a 11,6 punti. L'andamento generale dei punteggi all'interno di ciascun cluster è descritto nella figura seguente:

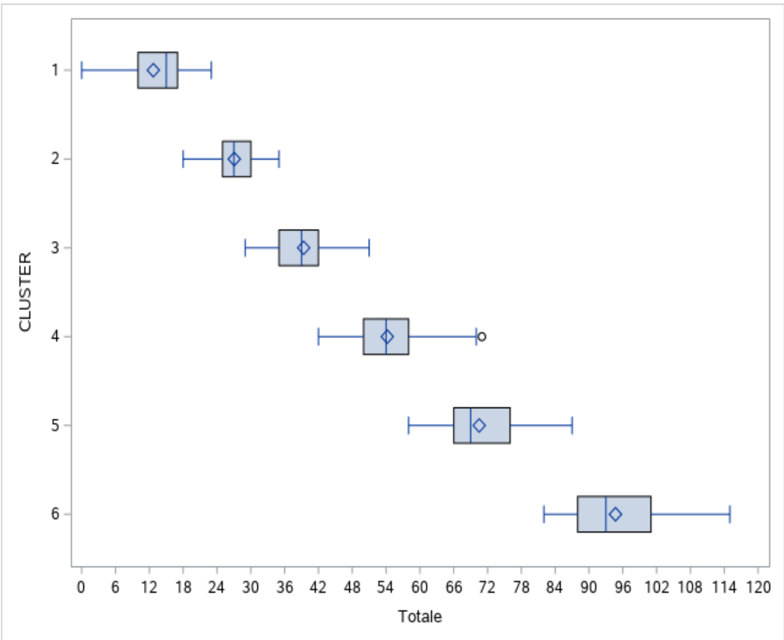


Figura 5.2: box plot del punteggio totale per ciascun cluster

Ogni rettangolo in figura indica il 25°, il 50° (linea centrale) e il 75° percentile riferiti al gruppo di studenti appartenenti a un singolo cluster (mostrato sull'asse verticale). Il piccolo quadrato posto nei rettangoli indica il punteggio medio degli studenti all'interno di ciascun cluster (i valori dei punteggi si possono leggere sull'asse orizzontale). Le linee che si estendono dal riquadro rappresentano i punteggi minimi e massimi ottenuti dagli studenti appartenenti a ciascun cluster. I gruppi si distinguono per punteggio totale; inoltre, i gruppi in cui gli studenti hanno ottenuto un punteggio medio nel quesito di geometria piuttosto basso, presentano anche un punteggio medio totale altrettanto basso. In conclusione, il quesito di geometria sembra essere il più difficile, ma quando gli studenti riescono a prendere un voto medio alto allora, mediamente, prendono un voto alto anche alla prova nel complesso.

Sempre prendendo come riferimento l'anno 2018, mediante l'osservazione delle medie condizionate si osserva, inoltre, che il 20% del punteggio ottenuto nel quesito dimostrativo di geometria è stato cumulato da studenti che hanno risposto correttamente a tutti i tre i quesiti a risposta multipla del medesimo ambito (vale a dire, chi ha risposto bene al quesito dimostrativo di geometria, ha risposto correttamente anche agli esercizi a risposta multipla della stessa materia), mentre solo il 4% del punteggio ottenuto nel quesito dimostrativo di teoria dei numeri è stato cumulato da coloro che hanno risposto esattamente a tutti e tre i quesiti a risposta multipla dello stesso ambito. Tale osservazione sembrerebbe suggerire che ad accumulare punti nei quesiti dimostrativi di geometria sono coloro che possiedono una buona preparazione e delle adeguate competenze e conoscenze in tale ambito e pertanto riescono con successo anche negli altri esercizi, eventualmente di tipologia diversa (e.g. a risposta multipla), ma sui medesimi argomenti. Invece, una buona riuscita nei quesiti dimostrativi di teoria dei numeri non implica necessariamente il fatto di riuscire a rispondere correttamente a tutti gli altri quesiti dello stesso ambito.

Per il 2019 possono essere fatte considerazioni simili: la scelta dei 5 gruppi è giustificata dal fatto che riproduce il 79% della variabilità degli studenti. In corrispondenza della partizione in 5 gruppi, l'indice pseudo-f assume un massimo locale e l'indice pseudo t^2 assume un valore molto minore rispetto al valore assunto in corrispondenza della partizione in 4 gruppi. Nonostante nei clusters 3 e 4 si collochino studenti che hanno ottenuto punteggi medi elevati nei quesiti dimostrativi di teoria dei numeri e combinatoria, solo nel cluster 5, ove si registra un punteggio medio elevato nel quesito dimostrativo di geometria, vengono registrati punteggi totali medi elevati.

Cluster = 1

Variabile	N	Media
Totale	6.237	13,1
Dim_g	6.237	0,1
Dim_c	6.237	0,4
Dim_n	6.237	0,3

Cluster = 2

Variabile	N	Media
Totale	2.434	29,1
Dim_g	2.434	0,4
Dim_c	2.434	1,9
Dim_n	2.434	1,4

Cluster = 3

Variabile	N	Media
Totale	948	44,0
Dim_g	948	1,1
Dim_c	948	7,2
Dim_n	948	5,1

Cluster = 4

Variabili	N	Media
Totale	258	63,4
Dim_g	258	3,1
Dim_c	258	13,2
Dim_n	258	8,3

Cluster = 5

Variabile	N	Media
Totale	28	87,7
Dim_g	28	9,7
Dim_c	28	14,1
Dim_n	28	12,9

Tabella 5.6: Numerosità e punteggi medi dei 5 gruppi della partizione scelta per l'anno 2019

Nuovamente si ritrovano risultati analoghi per il 2020. In particolare, si osserva che anche nei gruppi in cui il punteggio dei quesiti di teoria dei numeri e combinatoria è nella fascia medio-alta (ma dove il quesito di geometria è andata male), il punteggio medio totale non è elevatissimo, mentre nell'ultimo gruppo, quando si alza molto il punteggio medio del quesito di geometria, allora si alza molto anche il punteggio medio totale. La scelta della partizione in 6 gruppi è giustificata dal fatto che questa riproduce l'84% della variabilità degli studenti. Inoltre, in corrispondenza della partizione in 6 gruppi, l'indice pseudo-f assume un massimo locale e l'indice pseudo-t^2 assume un valore molto minore rispetto a quello assunto in corrispondenza della partizione in 5 gruppi; l'indice semipartial-R^2 indica anch'esso questa scelta, dato che nel passaggio dalla partizione in 6 gruppi alla partizione in 5 gruppi si sono uniti due cluster troppo eterogenei.

Cluster = 1

Variabile	N	Media
Totale	2.712	8,4
Dim_g	2.712	0,1
Dim_c	2.712	0,2
Dim_n	2.712	0,4

Cluster = 2

Variabile	N	Media
Totale	3.592	18,1
Dim_g	3.592	0,3
Dim_c	3.592	0,6
Dim_n	3.592	0,7

Cluster = 3

Variabile	N	Media
Totale	2.855	31,1
Dim_g	2.855	0,7
Dim_c	2.855	2,3
Dim_n	2.855	2,3

Cluster = 4

Variabili	N	Media
Totale	625	49,6
Dim_g	625	3,1
Dim_c	625	6,5
Dim_n	625	9,1

Cluster = 5

Variabile	N	Media
Totale	186	69,2
Dim_g	186	6,2
Dim_c	186	11,0
Dim_n	186	12,2

Cluster = 6

Variabile	N	Media
Totale	30	97,0
Dim_g	30	13,3
Dim_c	30	13,9
Dim_n	30	14,2

Tabella 5.7: Numerosità e punteggi medi dei 6 gruppi della partizione scelta per l'anno 2020

Come si è detto precedentemente, nei cluster 4 e 5 si collocano studenti che hanno ottenuto un punteggio medio dei quesiti di combinatoria e teoria dei numeri nella fascia medio alta ma solo nel cluster 6, ove il punteggio medio ottenuto nel quesito di geometria è decisamente elevato, il punteggio medio totale è notevolmente alto, pari a 97 punti.

5.2.2 Analisi del questionario di febbraio 2020 e difficoltà in geometria

Si è cercato di analizzare le cause e le motivazioni che risiedono alla base di una simile prestazione non brillante in geometria da parte dei partecipanti alle gare, provando a dare una possibile interpretazione al fenomeno, da confermare ed approfondire mediante future ricerche sul tema.

Per far ciò, punto di partenza è l'analisi del questionario somministrato ai soli 486 studenti del distretto romano che hanno preso parte alla gara distrettuale del 2020. Tale questionario è stato svolto dai ragazzi al termine della competizione, quindi in un momento in cui avevano ben chiare le difficoltà incontrate.

Va detto, innanzitutto, che gli studenti hanno dichiarato di sentirsi portati per la geometria, mediamente, quanto lo sono per le altre discipline, come si evince dalle risposte fornite alla domanda n. 2, in cui si chiedeva quanto si ritenessero portati in uno dei 4 ambiti della matematica olimpica, a prescindere dalla prestazione appena avuta in gara. Gli studenti potevano dare un voto da 1 (per nulla portato) a 10 (moltissimo portato). Di seguito le risposte medie con la relativa deviazione standard:

	Teoria dei Numeri	**Combinatoria**	**Geometria**	**Algebra**
Punteggio medio	7,0	6,3	6,3	6,6
SD	1,7	1,9	1,9	1,9

Tabella 5.8: punteggi medi relativi alla domanda n. 2 del questionario

Le differenze fra i punteggi medi nei singoli ambiti appaiono poco rilevanti, sebbene la geometria resti la disciplina ritenuta più difficile e la teoria dei numeri la più semplice. In ciascun caso la variabilità è bassa e pertanto il punteggio medio è adeguato a descrivere i singoli ambiti.

Allo stesso tempo, però, ciò che emerge è che i quesiti di geometria sono risultati essere i più simili a quelli visti in classe, come si evince dalle risposte fornite alla domanda n. 4 del questionario in cui si chiedeva di stimare quante volte gli studenti avessero incontrato a scuola degli esercizi simili a quelli svolti in gara:

	Teoria dei Numeri	Combinatoria	Geometria	Algebra
Mai	178	184	94	182
Quasi mai	202	184	214	182
Spesso	86	98	147	99
Sempre	5	4	19	10
Non risp.	15	16	12	13

Tabella 5.9: frequenze assolute relative alla domanda n. 4 del questionario

La precedente tabella ci indica come uno studente su tre abbia incontrato spesso o sempre, nella normale attività didattica in classe, esercizi simili (se non come difficoltà, quanto meno come contenuti e/o struttura) a quelli delle gare. Nel caso dei rimanenti ambiti, mediamente solo uno studente su cinque ha incontrato a scuola esercizi simili a quelli delle gare.

Si intuisce pertanto che gli studenti, anche quelli che partecipano alle gare, pur conoscendo le principali regole della geometria e pur svolgendone regolarmente gli esercizi in classe, hanno comunque delle difficoltà quando si trovano a dover svolgere degli esercizi in gara.

Nell'intervista sopra citata, il Prof. Pernazza ha dichiarato che, per poter risolvere quesiti di geometria, è necessario vedere o immaginare nella configurazione assegnata nuovi elementi o informazioni che non sono esplicitamente scritti nel testo del problema, e tale abilità si può acquisire con un opportuno allenamento e quindi svolgendo un gran numero di esercizi. Inoltre, egli ha affermato che leggere e comprendere una dimostrazione è un processo abbastanza diverso dal saperla produrre, sebbene lo studio delle dimostrazioni possa rivelarsi un buon modo per acquisire una discreta tecnica e capacità di produrne. A suo avviso, la sola conoscenza dei teoremi non basta per saper dimostrare in geometria, ma diventa ancor più importante conoscere le dimostrazioni stesse, in quanto i ragionamenti svolti all'interno della dimostrazione di un teorema possono fornire spunti, idee e suggerimenti circa la metodologia e le procedure da adottare nella risoluzione dei quesiti geometrici.

Tutto ciò trova conferma se si vanno a leggere le risposte fornite dagli studenti alla domanda n. 3 del questionario, in cui si chiedeva di indicare quale momento avessero trovato più difficile, fra i due indicati, nella risoluzione dei problemi della gara da loro appena svolta:

	Teoria dei numeri	**Combinatoria**	**Geometria**	**Algebra**
Formulare ipotesi ed elaborare strategie di lavoro	232	218	194	238
Utilizzare le conoscenze possedute nella risoluzione dei quesiti	173	194	243	183
Entrambe	2	11	8	10
Non risponde	83	85	57	75

Tabella 5.10: risposte alla domanda n. 3 del questionario

Sulla geometria gli studenti hanno dimostrato di avere, tendenzialmente, le idee più chiare (è la voce che meno hanno lasciato in bianco). In particolare, il grosso scoglio da loro incontrato consiste nella capacità di utilizzare le conoscenze che si possiedono, ai fini della risoluzione dei quesiti, il che avvalora quanto affermato dal Prof. Pernazza circa la reale utilità di conoscere le tecniche dimostrative ancor più che il semplice enunciato di un teorema. Inoltre, le considerazioni appena proposte costituiscono una possibile interpretazione della discrepanza rappresentata dall'anno 2017 per ciò che riguarda il quesito dimostrativo di geometria (cfr. 5.2.1): più un esercizio è scolastico (inteso quest'ultimo non come banale ma come somigliante – in termini di procedure ed algoritmi - ad esercizi standard e/o già visti in classe), maggiore è la probabilità che possa essere affrontato e risolto (tutto o in parte) dagli studenti in gara.

Quanto emerso delinea delle tendenze che però, considerando l'intervallo temporale ristretto e il campione di studenti al quale è stato somministrato il questionario piuttosto limitato, dovranno essere confermate da ulteriori ricerche ed approfondimenti sul tema.

5.2.3 Differenze di genere in geometria

Alla luce di quanto osservato nel capitolo 3, è interessante chiedersi se esistono delle differenze di prestazione, nella risoluzione di quesiti di geometria, fra ragazze e ragazzi. In letteratura esistono ricerche diverse che portano a conclusioni diverse. Alcune di esse (Fennema & Carpenter, 1981; Battista, 1990; Hyde, Fennema & Lamon, 1990; Lindberg et al, 2010) mostrano come i ragazzi ottengano punteggi più elevati e prestazioni migliori nella risoluzione di quesiti di geometria, mentre la situazione è completamente opposta in altre ricerche (Lawton, 1997; Calvin et al, 2010; Mainali, 2019). Secondo Mainali (2019), alla base di tali disomogeneità potrebbero risiedere diversi fattori, come la sostanziale differenza nei processi risolutivi fra quesiti di geometria e quelli di aritmetica ed algebra, con i primi che implicano aspetti cognitivi diversi dai secondi, come ad esempio la capacità di visualizzazione, molto più richiesta in task di carattere geometrico rispetto ad altri ambiti (Lawton & Hatcher, 2005), ma anche la diversa natura della valutazione usata per misurare le performance degli studenti, nonché la differente predisposizione ed atteggiamento che ragazze e ragazzi possiedono durante le lezioni scolastiche.

Per comprendere quanto sia marcato il fenomeno del gender gap, in relazione al rendimento degli studenti nei quesiti di geometria, è lecito partire dall'analisi dei punteggi medi ottenuti dalle ragazze e dai ragazzi nei soli quesiti di geometria (a risposta multipla e a risposta aperta) nelle gare distrettuali degli anni 2018-2020. Giova ricordare che il punteggio massimo ottenibile, in tutti e tre gli anni, era pari a 30 punti.

	2018	**2019**	**2020**
Punteggio medio femmine	4,2	4,6	3,4
Punteggio medio maschi	4,8	5,4	4,0
Punteggio medio totale	4,7	5,2	3,8

Tabella 5.11: punteggio medio nei quesiti di geometria delle gare distrettuali italiane dal 2018 al 2020

Per gli anni 2018 e 2019 il punteggio medio è pari a circa 5 punti, scendendo a circa 4 punti per il 2020, dunque con piccole differenze di anno in anno e con i maschi che ottengono punteggi di poco migliori delle ragazze (di circa 0,5/0,6 punti in più).

Nella tabella successiva vengono riportate le percentuali di risposte corrette, sbagliate e lasciate in bianco distinguendo fra quelli che sono i quesiti di geometria a risposta multipla (si è trattato di tre esercizi sul totale dei primi 12) e il quesito dimostrativo a risposta aperta. Per quest'ultimo la percentuale si riferisce a coloro che hanno ottenuto zero punti e che, in accordo con quanto detto in precedenza, corrisponde con buona approssimazione a coloro che hanno lasciato l'esercizio in bianco.

	2018	**2019**	**2020**
Risposte corrette femmine es. risposta multipla geom.	26,5%	28,4%	18,2%
Risposte corrette maschi es. risposta multipla geom.	30,5%	33,1%	21,9%
Risposte sbagliate femmine es. risposta multipla geom.	35,0%	40,2%	32,6%
Risposte sbagliate maschi es. risposta multipla geom.	33,2%	38,7%	31,1%
Risposte non date femmine es. risposta multipla geom.	38,6%	31,5%	49,2%
Risposte non date maschi es. risposta multipla geom.	36,3%	28,3%	47,0%
Risposte non date (0 punti) femmine es. dim. geom.	92,3%	88,0%	87,8%
Risposte non date (0 punti) maschi es. dim. geom.	93,9%	88,2%	88,8%

Tabella 5.12: percentuali di risposte corrette, sbagliate e non date nelle diverse tipologie di esercizi delle gare distrettuali italiane dal 2018 al 2020

Dalla tabella precedente si osserva che, in riferimento a ciascuno dei tre anni e ai quesiti a risposta multipla, le ragazze lasciano in bianco un maggior numero di risposte (come già osservato in 3.4.2) e, tra i quesiti cui hanno risposto, ne sbagliano in percentuale maggiore. Tuttavia, nel quesito dimostrativo di geometria, in ciascuno dei tre anni la percentuale di risposte lasciate in bianco dalle ragazze è leggermente minore rispetto alla percentuale di risposte lasciate in bianco dai ragazzi, nonostante si sia notato che i ragazzi ottengono un punteggio medio maggiore. Queste differenze nelle percentuali e nei punteggi medi ottenuti, seppur sistematiche, sono poco rilevanti e dunque meritevoli di ulteriori approfondimenti.

6 Conclusioni

La ricerca svolta ha voluto porre l'attenzione su diversi fenomeni, in parte collegati fra loro (come il gender gap e l'ansia matematica), in parte distinti (come la difficoltà degli studenti che partecipano alle gare nei quesiti di geometria, che nessun legame sembra presentare con il fenomeno del gender gap), ma tutti hanno condiviso lo stesso contesto (le gare di matematica) e gli stessi protagonisti (gli studenti partecipanti a tali competizioni). Per fare ciò, sono state analizzate in prima analisi le risposte fornite e i punteggi ottenuti dagli studenti italiani partecipanti, dal 2017 al 2020, alle gare di secondo livello svolte, una volta l'anno nel mese di febbraio, in ogni singolo distretto d'Italia, per un totale di circa 10.000 partecipanti l'anno. L'intervallo temporale scelto non risulta essere particolarmente ampio, ma la situazione legata alla pandemia da Covid-19 non ha permesso l'acquisizione di dati, nel biennio 2021-2022, paragonabili a quelli del periodo precedentemente considerato. Da tale situazione si possono però cercare di ottenere delle informazioni altrettanto utili. Se infatti, nel quadriennio 2017-2020 la ricerca effettuata ha confermato quanto già noto in letteratura, e cioè che esiste un certo gender gap in termini sia di partecipazione che di performance, risulta interessante cercare di comprendere se nel biennio 2021-2022 le modalità di gestione delle gare, svolte da casa in modalità online, possono in qualche modo aver agevolato la partecipazione delle ragazze, meno condizionate dal contesto spiccatamente competitivo che caratterizza le aule in cui gli studenti hanno sempre svolto le prove individuali. È dunque auspicabile dare seguito alla ricerca effettuata, analizzando i tre costrutti qui presentati (gender gap, ansia matematica e difficoltà in geometria) sia alla luce dei dati raccolti nel periodo della pandemia, che a distanza di tempo, quindi negli anni a venire, in modo da valutare eventuali cambiamenti o eventualmente confermare le tendenze fin qui rilevate.

La lettura dei dati a disposizione, come sopra riportato, permette di affermare che il fenomeno del gender gap si riscontra anche tra gli studenti che prendono parte alle competizioni studentesche ed è particolarmente marcato quando si analizzano i livelli più alti (top 1% o 5%). Inoltre, la tendenza delle ragazze a partecipare in misura minore rispetto ai ragazzi a una gara di matematica diventa sempre più evidente con il crescere dell'età dei partecipanti, il tutto in accordo con altri studi internazionali condotti in altri Paesi (Benbow & Stanley, 1980 e 1983; Andreescu et al., 2008; Ellison & Swanson, 2010; Niederle & Vesterlund, 2010; Olszewski-Kubilius & Lee, 2011; Makel et al., 2016; Bahar, 2021).

Unitamente all'analisi dei risultati dei partecipanti alle gare distrettuali nel quadriennio 2017-2020, è stato somministrato un breve questionario ad un campione di studenti, e nella fattispecie, a tutti quelli del distretto di Roma che hanno gareggiato a febbraio 2020. Ciò che è emerso è che le ragazze tendono non solo (e non tanto) a sottovalutare le proprie capacità, ma anche a sottovalutare la possibilità di raggiungere buone posizioni in gara, con una discreta percentuale di loro che arriva a sottostimarsi anche fino a 150 posizioni (su un totale di circa 500 studenti partecipanti alla gara) e talvolta rinuncia a gareggiare. Anche su questo aspetto potranno essere condotte ulteriori ricerche per confermare la tendenza osservata, eventualmente utilizzando criteri diversi (ad esempio, anziché chiedere quale posizione si attribuiscono in classifica, si potrebbe chiedere che punteggio ritengono di aver ottenuto in gara). Quanto fin qui detto sembrerebbe suggerire che il divario di rendimento non si basa su differenze nelle competenze possedute o nelle abilità fra i due sessi, ma piuttosto su una diversa percezione delle proprie capacità e su un diverso stato emotivo. Il divario fra i due generi, percepito dalle ragazze come più grande di quanto non sia, le porta a un livello più alto di insicurezza e quindi a preferire "non correre i rischi", lasciando più spesso le domande in bianco rispetto ai loro compagni. Gli esercizi 13 e 14 delle gare distrettuali sono particolarmente indicativi: i ragazzi rispondono meglio e più frequentemente a queste domande, ma fanno anche più errori delle ragazze, come se i primi fossero più inclini a dare una risposta in tutti i casi o comunque a provarci, mentre le seconde mantengono un profilo più prudente. Tale tendenza viene confermata anche da una lettura dei punteggi degli ultimi tre esercizi della stessa gara. Ulteriori ricerche potrebbero essere condotte per capire meglio se la decisione delle ragazze sia una rinuncia a priori (senza nemmeno leggere il testo dell'esercizio, ma concentrandosi eventualmente su un numero minore di domande) o se alcune di quelle che non rispondono hanno comunque cercato di leggere e risolvere i quesiti. Sarebbe anche interessante vedere se, di fronte a test con un diverso tipo di punteggio (ad esempio, valori negativi per le risposte sbagliate e punteggi pari a zero per le risposte lasciate in bianco, come avviene per i Kangourou della matematica), i ragazzi assumono un atteggiamento più cauto, riducendo così le differenze riscontrate tra i due generi. Una possibile interpretazione del divario di performance potrebbe essere legata alle aspettative e alle convinzioni della società e quindi il fattore gap potrebbe essere collegato al contratto didattico nel senso di Brousseau. Questo spiegherebbe la tendenza delle ragazze a lasciare in bianco le risposte quando non sono sicure.

Un'altra possibile causa potrebbe essere il diverso stato emotivo con cui ragazze e ragazzi affrontano lo studio della matematica (e, nel caso specifico di questa ricerca, il diverso approccio alle gare matematiche), con le ragazze che sperimentano più ansia da prestazione rispetto ai ragazzi.

Ciò è stato osservato a partire dall'analisi delle risposte fornite a due domande specifiche sul tema dell'ansia matematica inserite nel questionario sopra menzionato, ma anche alla luce delle risposte date da una selezione di 74 studenti romani, che avevano preso parte alla gara distrettuale di febbraio 2020, ad un secondo questionario somministrato loro a distanza di qualche mese dal primo. Va innanzitutto detto che la situazione legata alla pandemia non ha permesso di poter riproporre, nel 2021 e nel 2022, il questionario somministrato a febbraio 2020, il quale pertanto non è stato successivamente raffinato e aggiornato. Anche il secondo questionario è stato solo in parte validato da precedenti studi, in quanto contenente domande sull'ansia matematica in classe tratte dal questionario AMAS di Hopko et al. (2003), mentre un'altra serie di domande relative all'ansia in gara è stata pensata per l'occasione. Ciò che è emerso è che le ragazze possiedono un livello più alto di ansia matematica rispetto ai ragazzi, in accordo con altri studi svolti al riguardo (Callahan et al., 1996; Lengfelder & Heller, 2002; Morán-Soto & González-Peña, 2022); inoltre, attribuiscono grande importanza alle opinioni degli adulti, a differenza dei ragazzi, che preferiscono prima di tutto non deludere sé stessi ancor più che deludere parenti o insegnanti. Non sono stati somministrai questionari sul tema dell'ansia a coloro che, negli anni 2021-2022, hanno gareggiato online. Resta interessante capire se la distanza mitiga un simile stato d'animo o se la necessità di essere inquadrati da una telecamera durante lo svolgimento della competizione può, paradossalmente, creare maggior disturbo, nonostante la gara venga svolta da casa e senza altri compagni seduti nelle vicinanze. Future ricerche potranno essere condotte anche sul collegamento fra ansia matematica e preparazione alle gare, cercando di comprendere quanto un adeguato allenamento, effettuato a livello individuale o partecipando ai diversi stage e corsi di formazioni organizzati, ad esempio, dalle università o dall'UMI, possano mitigare quel senso di inadeguatezza e quella tensione che accompagnano molti studenti in occasione delle competizioni studentesche.

Si ritiene inoltre necessario riportare alcune riflessioni circa l'utilizzo di un'unica tipologia di test (la gara distrettuale) per l'identificazione e lo studio del fenomeno del gender gap tra coloro che partecipano alle gare matematiche. L'impiego di un solo strumento di valutazione, infatti, può essere una pratica non del tutto corretta, specie tra gli studenti che occupano le fasce più alte nelle classifiche dei test (Subotnik e Strauss, 1995), in quanto lo strumento, per come è costruito, può favorire maggiormente alcune tipologie di studenti. A titolo di esempio, riprendendo la ricerca di Benbow e Stanley (1980; 1983) relativa ai risultati di circa 40.000 studenti di 12-13 anni nello *Scholastic Assessment Test-Mathematics* (SAT-M), è emerso che i ragazzi ottengono punteggi più alti delle ragazze, ma pochi anni dopo Weiner e Robinson (1986) hanno osservato che il miglior predittore delle capacità matematiche delle ragazze è il loro punteggio nella parte verbale dello *Scholastic*

Assessment Test (SAT-V). Questo suggerisce che le ragazze e i ragazzi di talento potrebbero attingere a diversi tipi di risorse intellettuali nello svolgimento dei compiti matematici e, in particolare, le prime sarebbero più portate verso ragionamenti di tipo verbale e algoritmici mentre i secondi sarebbero più propensi a seguire l'intuizione o ragionamenti di tipo visuo-spaziale (Linn & Hyde, 1989; Gallagher & De Lisi, 1994; Gallagher et al., 2000; Lawton & Hatcher, 2005). In quest'ottica, il test SAT-M, così come molti altri test, potrebbero non riflettere accuratamente la natura e la portata delle abilità delle ragazze in matematica. Con riferimento al modello a stella marina di Tannenbaum, ragazze e ragazzi di talento possono essere parimenti dotati in termini di abilità generali, ma le ragazze si differenziano in quelle che sono le abilità specifiche, in particolare si differenziano per il modo con cui affrontano eventuali quesiti e problemi nei test (Le Maistre & Kanevsky, 1997). Facendo nuovamente riferimento alla stella di Tannenbaum, lo studio dei fattori intellettivi può anch'esso fornire una valida spiegazione al divario rilevato tra maschi e femmine. Come già osservato, il diverso stato emotivo posseduto da ragazze e ragazzi nello studio della matematica e, nello specifico, durante le gare di matematica, può rappresentare una variabile che influenza notevolmente i risultati nei test. Ad influenzare i risultati nelle prove possono contribuire la scarsa fiducia che le studentesse ripongono in sé stesse, la diversa percezione delle proprie capacità e il diverso livello di "ansia da prestazione", dovuto anche al diverso atteggiamento posseduto da insegnanti e genitori, ma molto spesso anche dai coetanei, nei confronti dei maschi e delle femmine (Fox, 1982; Ceci & Williams, 2007; Andreescu et al., 2008; Guiso et al., 2008; Stoet et al., 2016; Bahar, 2021; Morán-Soto & González-Peña, 2022). In letteratura si trovano possibili strategie per cercare di superare il problema, come ad esempio favorire la presenza di insegnanti donne in classe che possano rappresentare un modello positivo per le ragazze (Siegel & Shaughnessy, 1991), favorire i lavori in piccoli gruppi per aumentare la partecipazione delle studentesse alle attività proposte (Subotnik and Strauss, 1995) fino ad arrivare a pensare all'istituzione di scuole frequentate da sole ragazze (Olshen & Matthews, 1987). In particolare, la percentuale di insegnanti consapevole del gender gap tra coloro che prendono parte alle competizioni studentesche potrebbe essere relativamente limitata, in quanto solo una piccola percentuale di docenti coordina e gestisce le gare, che siano a livello di istituto o di distretto. Il problema appare chiaro, invece, tra coloro che organizzano tale manifestazione a livello nazionale e internazionale, motivo per il quale, in accordo con le indicazioni di Olshen e Matthews, sono state istituite delle competizioni rivolte esclusivamente alle ragazze (gara a squadre femminile, EGMO), facilitando così la condivisione fra pari e ridimensionando il confronto e, talvolta, il senso di inferiorità posseduto dalle ragazze stesse nei confronti dei ragazzi.

Va ricordato, infine, che la stella di Tannenbaum richiede che tutti e cinque i fattori debbano essere presenti e debbano interagire fra di loro se si vuole che il talento emerga e venga potenziato. È compito di insegnanti e genitori facilitare interventi mirati quali la ricerca di abilità matematiche generali e speciali tra le ragazze, quando sono giovani; l'offerta di modelli femminili virtuosi, gruppi di lavoro e di supporto tra pari, senza che essi possano portare a meccanismi discriminatori; l'invitare le ragazze ad una partecipazione attiva in classe (Le Maistre & Kanevsky, 1997).

L'ultimo aspetto che è stato analizzato, non collegato con i precedenti ma emerso a seguito della lettura dei dati a disposizione, ha riguardato la presunta difficoltà che gli studenti incontrano in gara nello svolgere i quesiti di geometria. Cercare di comprendere le motivazioni alla base di tali presunte difficoltà possedute anche da coloro che, per attitudine o impegno, dovrebbero ottenere buoni risultati in tutti gli ambiti olimpici, resta un problema aperto. I dati analizzati delle gare distrettuali dal 2018 al 2020 forniscono delle tendenze di massima chiare, ma non completamente esaustive. Si tratta di un intervallo temporale eccessivamente ristretto, senza contare che esistono alcune variabili in gioco che non sono state prese in considerazione, come ad esempio riuscire a valutare il livello di difficoltà dei quesiti, fattore che potrebbe in qualche modo influenzare i risultati ottenuti. Nelle intenzioni degli organizzatori delle gare distrettuali, l'ordine dei quesiti dimostrativi rispecchia un probabile (ma altamente soggettivo) ordine di difficoltà degli stessi, con il n. 15 che dovrebbe essere il più semplice, il n. 16 di livello intermedio e il n. 17 il più complicato. I tre quesiti di geometria in tutti e tre gli anni occupano la posizione n. 17, il che potrebbe aver influenzato in qualche modo gli esiti della ricerca. Quanto emerso dalla lettura delle risposte al questionario di febbraio 2020 fornisce delle indicazioni interessanti, confermate anche dalla mia esperienza personale di docente. Gli argomenti che compaiono nei quesiti di geometria delle gare sono teoremi e proprietà che vengono studiati a scuola più di altri argomenti come, a titolo di esempio, le medie e le disuguaglianze in algebra o le equazioni diofantee in teoria dei numeri, aspetti del tutto sconosciuti a chi non ha mai seguito uno stage di preparazione alle gare o non ha mai preso in mano un libro dedicato alle competizioni studentesche. Dunque, gli esercizi di geometria che gli studenti incontrano durante le competizioni studentesche sono i più simili a quelli svolti in classe, ma sono anche quelli in cui gli stessi studenti dichiarano di avere difficoltà, più che in altri ambiti, ad utilizzare le conoscenze possedute. La tendenza osservata sembra comunque suggerire che i quesiti di geometria sono quelli meno svolti dagli studenti e, in termini di rendimento, presentano punteggi più bassi. Coloro che riescono ad ottenere un buon punteggio sono anche coloro che, al termine della gara, tenderanno a posizionarsi nella fascia più alta della classifica, il che rende la geometria una materia particolarmente discriminante e predittiva ai fini del successo in gara. Inoltre, il fatto che le differenze nelle prestazioni in geometria tra maschi e femmine risultino essere poco rilevanti, a differenza di quanto emerso in altre ricerche (Battista, 1990; Matteucci & Mignani, 2011; Mazza & Gambini, 2022), suggerisce che la geometria rappresenta un problema per tutti gli studenti, indipendentemente dal genere e, in particolare, indipendentemente da qualsiasi fattore emotivo o psicosociologico che possono influenzare, in una qualche misura, il rendimento in gara.

Anche in questo caso l'essersi limitati a studiare il fenomeno in un range temporale piuttosto ristretto, e senza una chiara consapevolezza dell'effettivo livello di difficoltà dei quesiti, suggerisce di prendere i risultati ottenuti più come tendenze di massima che come veri e propri dati di fatto, in attesa di poter svolgere ulteriori approfondimenti sul tema, supportati non solo da analisi di carattere descrittivo e quantitativo, ma anche qualitativo.

Appendice

Allegato A

Questionario somministrato agli studenti romani al termine della gara del 20 febbraio 2020

1.Indica, in una scala da 1 (facilissimi) a 10 (difficilissimi), la difficoltà media dei problemi della gara Matematica odierna:

Problemi di Algebra (es. n. 9,12,14) - Problemi di Geometria (es. n. 4,7,11,17)

Problemi di teoria dei numeri (es. n. 1,2,3,6,8,15) - Problemi di combinatoria (es. n. 5,10,13,16)

2. Al di là della prova odierna, indica, in una scala da 1 (per nulla) a 10 (moltissimo), quanto ti ritieni portato in questi argomenti:

Algebra - Geometria - Teoria dei numeri - Combinatoria/Probabilità

3. Indica, con una crocetta, quale momento hai trovato più difficile nella risoluzione dei problemi della Gara matematica odierna.

	Formulare ipotesi ed elaborare strategie di lavoro	**Utilizzare le conoscenze possedute nella risoluzione dei quesiti**
Problemi algebra		
Problemi di geometria		
Problemi di teoria dei numeri		
Problemi di combinatoria/probabilità		

4. Quante volte hai incontrato nella tua esperienza scolastica (non in collegamento alle Gare Matematiche), problemi simili a quelli affrontati oggi.

	Mai	**Quasi mai**	**Spesso**	**Sempre**
Problemi di algebra				
Problemi di geometria				
Problemi di teoria dei numeri				
Problemi di combinatoria/probabilità				

5. Qual è stato il tuo voto in matematica al termine del trimestre /quadrimestre di quest'anno (se avevi due voti distinti fra scritto e orale, riporta la media dei due)?

6. Sapendo che a questa competizione gareggiano circa 500 studenti, secondo te in quale posizione ritieni ti possa piazzare?

1-50 51-100 101-150 151-200 201-250 251-300 301-350 351-400 401-450 451-500

7. Assegna un punteggio da 1 (per nulla) a 10 (moltissimo) al grado di ansia che hai durante lo svolgimento di un compito in classe di matematica.

In particolare, scrivi una o più parole che descriva il tuo stato d'animo durante i compiti in classe di matematica

8. Assegna un punteggio da 1 (per nulla) a 10 (moltissimo) al grado di ansia che hai durante lo svolgimento delle gare di matematica.

In particolare, scrivi una o più parole che descriva il tuo stato d'animo durante le gare di matematica.

Allegato B

Questionario somministrato agli studenti romani nella posizione alta e in quella bassa della classifica della gara del 20 febbraio 2020

1. Sesso

Maschio Femmina

2. Quale classe stai attualmente frequentando?

I anno II anno III anno IV anno V anno

3. Qual è stato il tuo voto in Matematica (da 1 a 10) al termine dello scorso anno scolastico?

4. Leggi attentamente le seguenti affermazioni e ripensa alla tua esperienza con la matematica. Per ciascuna situazione indica il livello di ansia da 1 (poca ansia) a 5 (molta ansia) che hai provato a:

- Dover consultare le tavole in un manuale di matematica
- Pensare al compito di matematica del giorno dopo
- Guardare la risoluzione di un'equazione svolta dall'insegnante alla lavagna
- Fare il compito di matematica
- Avere da fare molti problemi difficili di matematica per la lezione successiva
- Ascoltare una spiegazione durante l'ora di matematica
- Ascoltare un altro studente che spiega una formula di matematica
- Dover fare una verifica a sorpresa durante l'ora di matematica
- Iniziare un nuovo capitolo del manuale di matematica

5. Leggi attentamente le seguenti affermazioni e ripensa alla tua esperienza durante le gare di Matematica alle quali hai preso parte. Per ciascuna situazione indica il livello di ansia da 1 (poca ansia) a 5 (molta ansia) che hai provato:

- Incontrare problemi e argomenti nuovi
- Incontrare problemi e argomenti difficili
- Riuscire a capire cosa sia richiesto dal testo del problema
- Il confronto con altri studenti di pari livello
- Il clima competitivo della gara
- La voglia di non deludere sé stessi
- La voglia di non deludere altri (genitori, insegnanti, ...)

6. Assegna un punteggio da 1 (per nulla) a 10 (moltissimo) al grado di ansia che hai durante lo svolgimento di una verifica in classe di matematica

7. Assegna un punteggio da 1 (per nulla) a 10 (moltissimo) al grado di ansia che hai durante lo svolgimento delle gare di matematica

8. Quanto ti sei allenato in vista delle gare matematiche alle quali ai preso parte?

Per nulla Poco Abbastanza Molto Tantissimo

Allegato C

Quesiti dimostrativi delle gare distrettuali degli anni 2017-2020

Quesiti dimostrativi gara distrettuale del 2017

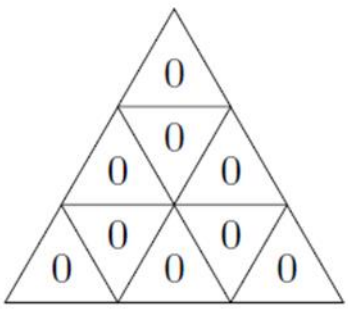
Teoria dei numeri

(a) Dimostrare che esistono infinite terne (x, y, z) di interi positivi tali che $x^2 + y^2 + z^2$ sia un quadrato perfetto.

(b) Dimostrare che esistono infinite terne (x, y, z) di interi positivi tali che $x^2 + y^2 + z^2$ sia un quadrato perfetto e con la proprietà che il massimo comune divisore dei tre numeri (x, y, z) sia 1.

Combinatoria

Un triangolo equilatero è diviso in 9 triangolini come in figura, e su ogni triangolino è inizialmente scritto il numero 0. Marco, per passare il tempo, fa il seguente gioco: ad ogni mossa sceglie 2 triangolini con un lato in comune e somma o sottrae 1 ad entrambi i numeri scritti su questi triangolini (si intende che l'operazione effettuata sui due triangolini è la stessa). Dopo qualche tempo si accorge che i numeri scritti sui 9 triangolini sono, in un qualche ordine, $n, n+1, \dots, n+8$ dove n è un intero non negativo. Dimostrare che n può essere soltanto 0 o 2.



Geometria

Data una circonferenza ω di diametro *AB* e *P* un punto interno al segmento *AB*, sia *M* il punto medio di *PB*. Siano *r*, s due rette parallele passanti rispettivamente per *M*, *P*, non coincidenti con la retta *AB* né ad essa ortogonali. Sia poi *H* la proiezione ortogonale di *A* su *s* e sia *K* il punto d'intersezione (distinto da *A*) tra ω e la retta *AH*. Siano infine *X*, *Y* le intersezioni di *r* con ω, dove *X* è dalla parte opposta di *H* rispetto ad *AB*.

(a) Dimostrare che il triangolo *HYK* è isoscele.

(b) Dimostrare che *BXHY* è un parallelogramma.

Quesiti dimostrativi gara distrettuale del 2018

Teoria dei numeri

(a) Trovare tutti gli interi positivi n di due cifre che godano della seguente proprietà: entrambi gli interi che si ottengono cancellando una delle due cifre della rappresentazione decimale di n sono divisori (interi positivi) di n.

(b) Sia $n > 10$ un intero che si scrive con k cifre decimali, tutte diverse da zero. Supponiamo che ciascuno degli interi ottenuti cancellando una delle k cifre della rappresentazione decimale di n sia un divisore (intero positivo) di n. Mostrare che necessariamente $k = 2$.

Esempio. Per $n = 123$ si ha $k = 3$, e gli interi ottenuti cancellando cifre di n sono 23, 13, 12.

Combinatoria

Alice e Barbara hanno inventato il seguente gioco. Hanno una griglia 1×2018, con le caselle numerate da 1 a 2018 da sinistra verso destra, e 2018 tessere numerate anch'esse da 1 a 2018. La partita inizia con la griglia vuota, e le due giocatrici si alternano nel fare mosse; la giocatrice di turno può scegliere fra:

- selezionare una tessera non ancora collocata sulla griglia e porla su una casella libera, a patto che i numeri sulle tessere collocate, se letti da sinistra verso destra, siano in ordine crescente;
- selezionare una tessera già collocata sulla griglia e spostarla in una casella adiacente in modo che la tessera si avvicini alla casella che reca lo stesso numero della tessera, a patto che la casella di arrivo sia libera (esempio: se la tessera col numero 7 si trova sulla casella numero 12, la si può spostare a sinistra, ma non a destra; se invece una tessera si trova già nella casella col suo stesso numero, non potrà più essere spostata).

(a) Dimostrare che a ogni turno, se le tessere non sono tutte sulla griglia, esiste una mossa lecita.

(b) Se inizia Alice e vince chi colloca l'ultima tessera, chi ha una strategia vincente?

Geometria

Siano *ABC* un triangolo e P un suo punto interno. Sia H il punto sul lato *BC* tale che la bisettrice dell'angolo $A\widehat{H}P$ è perpendicolare alla retta *BC*. Sapendo che $A\hat{B}C = H\hat{P}C$ e $B\hat{P}C = 130°$, determinare la misura dell'angolo $B\hat{A}C$.

Quesiti dimostrativi gara distrettuale del 2019

Teoria dei numeri

Diciamo che un numero intero positivo con un numero pari di cifre è "corretto" se, leggendo ad alta voce le singole cifre, otteniamo una corretta descrizione del numero stesso. O meglio, se ogni cifra in posizione dispari indica quante volte compare la cifra successiva in tutto il numero. Ad esempio, 1210 è corretto, perché ha "un 2, uno 0", così come 2121, perché ha "due 1, due 1", mentre 1031 non lo è, perché dichiara di avere "uno 0, tre 1", quando ha in realtà due 1.

(*a*) Dimostrare che ci sono più di 2019 numeri corretti.

(*b*) Dimostrare che gli interi corretti sono in numero finito.

(*c*) Trovare il numero di cifre del più grande numero corretto.

Combinatoria

Ci sono 4037 lampadine disposte in fila e numerate da 1 a 4037. Inizialmente ogni lampadina può essere accesa o spenta. Una mossa consiste nello scegliere due lampadine numerate a, b tali che a/b o b/a sia un numero primo e cambiare lo stato di entrambe. Dimostrare che in un numero finito di mosse si possono rendere le lampadine da 1 a 2019 tutte accese qualunque sia la configurazione iniziale.

Geometria

Sia *ABC* un triangolo isoscele su base *BC* e siano *D*, *E* punti sui lati *AB*, *BC* rispettivamente, tali che le rette *DE* e *AC* risultino parallele. Si consideri inoltre il punto *F* sulla retta *DE* che si trova dalla parte opposta di *D* rispetto ad *E* ed è tale che *FE* sia congruente ad *AD*. Detto *O* il circocentro del triangolo *BDE*, dimostrare che i punti *O*, *F*, *A*, *D* giacciono su una circonferenza.

Quesiti dimostrativi gara distrettuale del 2020

Teoria dei numeri

(a) Supponiamo che $n = k^2$ sia un quadrato perfetto. Dimostrare che il numero di divisori positivi di n strettamente minori di k è uguale al numero di divisori di n strettamente maggiori di k.

(b) Supponiamo che $n = k^2$ sia un quadrato perfetto. Dimostrare che n ha al massimo $2k - 1$ divisori positivi.

(c) Trovare tutti gli interi positivi k tali che k^2 abbia esattamente $2k - 1$ divisori positivi.

Combinatoria

Su un enorme foglio a quadretti, Marco considera un rettangolo lungo 2020 quadretti e alto 2. A questo punto vuole unire con 2020^2 segmenti ciascuno dei 2020 centri dei quadretti nella fila inferiore del rettangolo a ciascuno dei centri dei quadretti della fila superiore. Inoltre, vuole che se due di questi segmenti si intersecano (eventualmente anche solo in un estremo) siano tracciati con penne di colore diverso.

(a) Dimostrare che è impossibile soddisfare le richieste di Marco se si hanno solo penne di 4038 colori diversi.

(b) Dimostrare che è invece possibile tracciare i segmenti secondo le richieste di Marco utilizzando 4039 colori.

Geometria

Sia ABC un triangolo scaleno con $BC > CA > AB$. Siano ω e γ le circonferenze passanti per A di centro, rispettivamente, B e C. Esse intersecano il segmento BC in M e N, rispettivamente. Costruiamo Z come il simmetrico di A rispetto al punto medio di MN.

(a) Chiamata P l'intersezione di ZM con AC, mostrare che CPM è isoscele.

(b) Detta X l'intersezione di ZM con ω distinta da M, mostrare che BX e AC sono parallele.

(c) Detta Y l'intersezione di ZN con γ distinta da N, mostrare che A, X e Y sono allineati.

Allegato D

Cluster analysis, indice pseudo-f e indice pseudo t^2 (Zani & Cerioli, 2007)

L’analisi dei gruppi, o cluster analysis, è un metodo statistico per la classificazione delle unità statistiche in gruppi omogenei. In particolare, la cluster analysis è un metodo di tipo esplorativo: si propone di individuare dei gruppi di unità statistiche che siano tra loro *simili*, senza sapere a priori se effettivamente questi gruppi esistano nel data set che si sta analizzando (le unità statistiche potrebbero essere tutte diverse tra loro rispetto alle variabili che si stanno considerando: in quel caso non esistono dei gruppi naturali di unità tra loro simili e dunque la procedura di cluster analysis fornirebbe risultati poco soddisfacenti).

Nel caso invece in cui esistono dei gruppi naturali di unità che hanno caratteristiche simili, la metodologia statistica permette di individuarli: l’obiettivo è dunque riconoscere una classificazione naturale e limitarsi a descrivere g gruppi invece che n unità statistiche, ove $g \ll n$ (l'interpretazione diventa tanto più agevole quanto g è piccolo, tuttavia minore è il numero di gruppi da analizzare e maggiore è la perdita di informazione sulle singole unità statistiche, che vengono compattate nei gruppi). Questa metodologia statistica è efficace quando permette di facilitare l'interpretazione del data set ma non determina un’eccessiva perdita di informazione.

La logica della cluster analysis, come già detto, prevede che i gruppi che si formano siano caratterizzati da coesione interna (cioè racchiudano unità statistiche con caratteristiche simili) e separazione esterna (cioè unità statistiche appartenenti a gruppi distinti devono avere caratteristiche dissimili).

Si consideri, a titolo di esempio, di aver rilevato su 10.000 persone il peso, l’altezza e l’età. Analizzare singolarmente il comportamento di 10.000 persone è ovviamente pressocché impossibile. Tuttavia, si può applicare una metodologia statistica che consente di individuare (se ci sono) dei gruppi all’interno dei quali si collocano persone che hanno tra loro caratteristiche simili e hanno caratteristiche diverse rispetto a persone appartenenti a gruppi diversi. In questo modo, se questi gruppi esistono naturalmente (cioè esistono naturalmente gruppi omogenei, che nei casi reali sono 4, 5, 6 o comunque un numero molto minore rispetto alle unità statistiche del data set), possono essere analizzati senza che si sia persa molta informazione dettagliata che deriva dalla conoscenza del comportamento del singolo individuo. Rimanendo sull’esempio proposto, non si è più a conoscenza del fatto che l’unità statistica 748/10000 ha età x, peso y e altezza z, ma solo che questa appartiene al cluster 5, nel quale le persone hanno mediamente età x_5, peso y_5 e altezza z_5.

In particolare, i metodi di cluster di tipo gerarchico permettono di ottenere una famiglia di partizioni $\prod = \{\pi_n, \pi_{n-1}, \pi_{n-2}, \dots, \pi_2, \pi_1\}$. In corrispondenza di *n* gruppi si ottiene una partizione banale: la partizione π_n prevede che ogni unità statistica formi un singoletto: in questo caso si preserva tutta l'informazione ma non si facilita in alcun modo l'interpretazione. Anche la partizione π_1 è banale: questa prevede che tutte le unità statistiche siano raggruppate in un unico cluster che, in casi reali, è molto eterogeneo poiché racchiude unità statistiche anche molto dissimili tra loro.

Questo metodo prevede che a ciascuno step si uniscano due unità statistiche (le più simili) oppure due gruppi oppure che un'unità statistica si unisca ad un cluster formato in uno step precedente. In questo modo, se due unità statistiche finiscono in uno stesso cluster, nei passi successivi della procedura non potranno essere separate (se la partizione π_g ha un gruppo che comprende le unità statistiche *x* e *y*, sicuramente queste rimarranno nello stesso cluster anche al passo successivo, cioè nella partizione π_{g-1}).

Ottenuta la famiglia di partizioni, vengono utilizzati degli indici appositi che misurano il livello di coesione interna e di separazione esterna per scegliere quale partizione è adatta a riprodurre l'informazione in maniera efficiente. Le differenze tra i vari metodi gerarchici consistono nel criterio utilizzato per calcolare la distanza tra due gruppi di unità. Come abbiamo detto, la procedura prevede che a ciascuno step vengano uniti i due gruppi (eventualmente singoletti) più simili, cioè meno distanti (se si considerano variabili quantitative come nel caso della nostra trattazione). Il calcolo della distanza tra gruppi differenzia i vari metodi che, in generale, possono produrre risultati diversi.

In particolare, il metodo del legame completo prevede che la distanza tra due gruppi sia definita come il massimo delle distanze tra ciascuna delle unità d'un gruppo e ciascuna delle unità dell'altro gruppo, cioè dati due cluster C_1 e C_2, la distanza[24] tra i due cluster è misurata come $d(C_1, C_2) = max\{d_{rs}\}$, con $r \in C_1$, $s \in C_2$.

Per come è stato definito, il metodo del legame completo individua adeguatamente gruppi naturali con forme circolari (qualora esistano). Inoltre, dà particolare risalto alla coesione interna e dunque fornisce in output partizioni in cui i cluster sono molto omogenei, mentre non è garantita necessariamente la proprietà di separazione esterna. Infine, il metodo del legame completo tende a formare gruppi numerosi ed è invariante rispetto a trasformazioni monotone.

[24] La distanza considerata tra due unità statistiche, che in termini geometrici sono punti nello spazio $\mathbb{R}^d$, ove d è il numero di variabili che sono state rilevate, è la distanza euclidea.

Nell'utilizzo dei metodi di cluster gerarchici è necessario valutare la bontà della partizione ad ogni passo della procedura. Questo può essere fatto mediante l'utilizzo di indici detti globali[25], come ad esempio la pseudo-f, che ad ogni step misura il rapporto tra l'informazione che viene conservata a seguito dell'unione di due cluster (eventualmente singoletti) e l'informazione persa: analizzando l'andamento dell'indice al variare di g viene scelta la partizione π_g che corrisponde ad un valore massimo (assoluto o relativo) della pseudo-f, che indica una *buona* partizione in termini di alta separazione dei gruppi e bassa variabilità interna, dato che un valore massimo della pseudo-f, per come è stata definita, è associato ad una partizione in cui i gruppi sono coesi internamente (e dunque l'informazione conservata è alta) e/o i cluster sono distanti tra loro (e dunque l'informazione persa è bassa).

Complementarmente agli indici di valutazione globali, è possibile utilizzare un indice di valutazione locale[26] per valutare la bontà del gruppo appena formatosi in un algoritmo gerarchico. In particolare, ad un certo livello dell'aggregazione si forma il gruppo $C_n = C_l \cup C_m$. L'indice pseudo-t^2 indica il peggioramento della variabilità interna ai gruppi dovuto alla fusione dei gruppi C_l e C_m. Analizzando l'andamento della pseudo-t^2 al diminuire del numero di gruppi, si sceglie la partizione π_g precedente a quella π_{g-1} la quale determina un brusco aumento del valore dell'indice poiché questo indica la formazione di un gruppo con una variabilità interna molto elevata.

[25] Gli indici globali per la valutazione di una partizione π_g sono tali per cui tutti i g gruppi sono coinvolti nel calcolo dell'indice.

[26] Nel calcolo degli indici locali per la valutazione della partizione viene considerato solo il cluster che si è formato nell'ultimo passo della procedura.

Ringraziamenti

A conclusione della mia tesi desidero ringraziare alcune persone che, a vario titolo, hanno contribuito alla buona riuscita del mio percorso triennale di dottorato.

Primo fra tutti, il mio advisor, Prof. Alessandro Gambini, che ha saputo accompagnarmi con disponibilità, competenza e pazienza nella ricerca da me effettuata e nell'elaborazione ed interpretazione dei risultati ottenuti, oltre a fornirmi preziose indicazioni metodologiche e a darmi utili suggerimenti e consigli sulle migliori procedure da adottare in fase di ricerca. Un ringraziamento particolare al Prof. Enrico Rogora il quale, in qualità di tutor, mi ha seguito nella gestione di tutti gli aspetti burocratici, dimostrandosi sempre presente per qualunque necessità.

Un grazie a tutti i docenti del SSD Mat/04 del dipartimento di Matematica della Sapienza, con i quali ho avuto modo di svolgere interessanti attività formative (seminari, laboratori, …) che mi hanno permesso di crescere come insegnante e ricercatore. Un grazie particolare al Prof. Claudio Bernardi, con il quale nella primavera del 2019 mi sono confrontato circa la possibilità di intraprendere un dottorato di ricerca, e in quella occasione mi ha saputo ben consigliare mettendomi nella condizione di valutare con maggiore serenità le scelte che sarei poi andato a fare.

Desidero ringraziare tutti i dottorandi con i quali ho condiviso questo percorso triennale, in particolare quelli impegnati a svolgere una ricerca in didattica della matematica. Fra tutti, mi piace citare Antonio Veredice e Davide Passaro (quest'ultimo dottorando a Statistica), amici ancor prima che colleghi, insieme ai quali ho portato avanti numerose iniziative in questi tre anni (scrittura di articoli, sperimentazioni in classe, partecipazione a convegni, …).

Un grazie a tutti i nuovi amici e colleghi conosciuti in seno all'AIRDM (Associazione Italiana di Ricerca in Didattica della Matematica), con i quali ho avuto modo di collaborare a vario titolo e di potermi anche confrontare sul percorso di ricerca da me effettuato. Un sentito ringraziamento anche agli amici della Commissione Olimpiadi dell'UMI, primi fra tutti il Presidente, Ludovico Pernazza, e Luigi Amedeo Bianchi, che hanno visto con simpatia il mio lavoro di ricerca su tematiche inerenti alle Olimpiadi della Matematica, collaborando fattivamente al progetto e condividendo i dati delle gare distrettuali dal 2017 al 2020, in loro possesso.

Un grazie particolare anche a Luisa Fusillo, collega di lettere sempre disponibile a darmi chiarimenti sugli aspetti formali e linguistici da adottare in fase di stesura della tesi, e a Lorenzo Facciaroni, che ha saputo fornirmi preziose indicazioni riguardanti alcune procedure statistiche.

Infine, desidero ringraziare la mia famiglia, in particolare mia moglie Valentina, che in questi tre anni mi ha sempre incoraggiato ad andare avanti, anche nei momenti di maggiore stanchezza, e ha saputo pazientare anche quando, preso da scadenze o impegni imminenti, ho dedicato giornate, sere, fine settimana e periodi estivi al lavoro. A lei, e ai miei figli, dedico questa tesi!

Bibliografia

Alexander, L., & Cobb, R. (1989). Identification of the dimensions and predictors of math anxiety among college students. Journal of Human Behavior and Learning, 4, 25–32.

Alexander, L., & Martray, C. (1989). The development of an abbreviated version of the Mathematics Anxiety Rating Scale. *Measurement and Evaluation in counseling and development*, *22*(3), 143-150.

Anderson, J. R. (1982). Acquisition of cognitive skill. *Psychological review*, *89*(4), 369-406.

Anderson, J. R. (1983). Acquisition of proof skills in geometry. In *Machine learning* (pp. 191-219). Springer, Berlin, Heidelberg.

Andreescu, T., Gallian, J. A., Kane, J. M., & Mertz, J. E. (2008). Cross-cultural analysis of students with exceptional talent in mathematical problem solving. Notices of the AMS, *55*(10), 1248-1260.

Anzellotti, G., & Mazzini, F. (2009). Differenze territoriali nei risultati di eccellenza in matematica nella scuola secondaria superiore e all'ingresso dell'università. *La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, *2*(1), 157-179.

Arrigo, G., & Sbaragli, S. (2004). *I solidi. Riscopriamo la geometria* (Vol. 14, pp. 1-107). Carocci.

Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science*, *11*, 181-185.

Ashcraft, M. H., & Kirk, E. P. (2001). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. *Journal of experimental psychology: General*, *130*(2), 224.

Ashcraft, M. H., Krause, J. A., & Hopko, D. R. (2007). Is math anxiety a mathematical learning disability? In D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (Eds.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities* (pp. 329–348). Paul H. Brookes Publishing Co.

Ashcraft, M. H., & Ridley, K. S. (2005). Math anxiety and its cognitive consequences: A tutorial review. In J. I. D. Campbell (Ed.), Handbook of mathematical cognition (pp. 315–327). New York: Psychology Press.

Bahar, A. K. (2021). Trends in Gender Disparities Among High-Achieving Students in Mathematics: An Analysis of the American Mathematics Competition (AMC). Gifted Child Quarterly, *65*(2), 167-184.

Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for research in mathematics education*, *21*(1), 47-60.

Benbow, C. P., & Stanley, J. C. (1980). Sex differences in mathematical ability: Fact or artifact? Science, *210*(4475), 1262-1264.

Benbow, C. P., & Stanley, J. C. (1983). Sex differences in mathematical reasoning ability: More facts. *Science*, *222*(4627), 1029-1031.

Bolondi, G., Ferretti, F., & Giberti, C. (2018). Didactic contract as a key to interpreting gender differences in maths. *Journal of Educational, Cultural and Psychological Studies (ECPS Journal)*, (18), 415-435.

Callahan, C., Adams, C., Bland, L., Moon, T., Moore, S., Perie, M., A. R. I. A. N. N. E., & M., McIntire, J. (1996). Factors influencing recruitment, enrollment, and retention of young women in special secondary schools of mathematics, science, and technology. *Remarkable Women*, 243-261.

Calvin, C. M., Fernandes, C., Smith, P., Visscher, P. M., & Deary, I. J. (2010). Sex, intelligence and educational achievement in a national cohort of over 175,000 11-year-old schoolchildren in England. *Intelligence*, *38*(4), 424-432.

Capraro, M. M., Capraro, R. M., & Henson, R. K. (2001). Measurement error of scores on the Mathematics Anxiety Rating Scale across studies. Educational and Psychological Measurement, *61*(3), 373–386.

Cascella, C., Giberti, C., & Bolondi, G. (2020). An analysis of Differential Item Functioning on INVALSI tests, designed to explore gender gap in mathematical tasks. *Studies in Educational Evaluation*, *64*, 100819.

Ceci, S. J., & Williams, W. M. (2007). *Are we moving closer and closer apart? Shared evidence leads to conflicting views*. na.

Chang, H., & Beilock, S. L. (2016). The math anxiety-math performance link and its relation to individual and environmental factors: A review of current behavioral and psychophysiological research. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, *10*, 33-38.

Clark, B. (2007). *Growing up gifted: Developing the potential of children at home and at school* (7th ed.) Columbus OH: Merrill.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, *420*, 464.

Cunha, F., & Heckman, J. (2007). The technology of skill formation. American Economic Review, *97*(2), 31-47.

Contini, D., Di Tommaso, M. L., & Mendolia, S. (2017). The gender gap in mathematics achievement: Evidence from Italian data. Economics of Education Review, *58*, 32-42.

Cottino L., Sbaragli S. (2004). *Le diverse "facce" del cubo,* Carrocci, Roma.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. *Learning and teaching geometry, K-12*, 1-16.

de Boher, A. G. E. M., van Lanschot, J. J. B., Stalmeier, P. F. M., van Sandick, J. W., Hulscher, J. B. F., de Haes, J. C. J. M., & Sprangers, M. A. G. (2004). Is a single-item visual analogue scale as valid, reliable and responsive as multi-item scales in measuring quality of life? *Quality of Life Research*, *13*, 311-320.

Degli Esposti, C., & Lanciano, N. (2016). Emma Castelnuovo. L'asino d'oro edizioni.

Devine, A., Fawcett, K., Szűcs, D. & Dowker, A. (2012). Gender differences in mathematics anxiety and the relation to mathematics performance while controlling for test anxiety. Behav Brain Funct. *8*, 33.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *Zdm*, *43*(4), 471-482.

Dreger, R. M., & Aiken, L. R. (1957). The identification of number anxiety in a college population. *Journal of Educational Psychology*, *48,* 344-351.

Ellison, G., & Swanson, A. (2010). The gender gap in secondary school mathematics at high achievement levels: Evidence from the American Mathematics Competitions. Journal of Economic Perspectives, *24*(2), 109-28.

Facciaroni, L., Mazza, L., Gambini, A. (2022). The difficulties in geometry: a quantitative analysis based on results of mathematics competitions in Italy. Accettato per la pubblicazione su *European Journal of Science and Mathematics Education*.

Fennema, E. H., & Carpenter, T. P. (1981). Sex-difference in mathematics: results from national assessment. *Mathematics Teacher*, *74* (7), 554-569.

Fennema, E., & Sherman, J. (1976). Fennema–Sherman Mathematics Attitudes Scales. JSAS Catalog of Selected Documents in Psychology, 6, (Ms. No. 1225).

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*(2), 139-162.

Freeman, J. (2004). Cultural influences on gifted gender achievement. High Ability Studies, *15*(1), 7-23.

French, B. H. (2016). Technology in a gifted and talented math classroom: how it impacts students' problem solving and mathematical learning. *Theses and Dissertations--Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) Education. 7.*

Foley, A. E., Herts, J. B., Borgonovi, F., Guerriero, S., Levine, S. C., & Beilock, S. L. (2017). The math anxiety-performance link: A global phenomenon. Current Directions in Psychological Science, *26*(1), 52-58.

Fox, L.H. (1982). *The study of social processes that inhibit or enhance the development of competence and interest in mathematics among highly able young women.* Washington, DC: National Institute of Education. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 222 037).

Fryer Jr, R. G., & Levitt, S. D. (2010). An empirical analysis of the gender gap in mathematics. American Economic Journal: Applied Economics, *2*(2), 210-40.

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational studies in mathematics*, *74*(2), 163-183.

Gallagher, A. M., De Lisi, R., Holst, P. C., McGillicuddy-De Lisi, A. V., Morely, M., & Cahalan, C. (2000). Gender differences in advanced mathematical problem solving. Journal of experimental child psychology, *75*(3), 165-190.

Gallagher, A. M., & De Lisi, R. (1994). Gender differences in Scholastic Aptitude Test: Mathematics problem solving among high-ability students. Journal of Educational Psychology, *86*(2), 204.

Giberti, C. (2019). Differenze di genere in matematica: dagli studi internazionali alla situazione italiana. Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula, (5), 44-69.

Giberti, C., & Ferretti, F. (2019). “Ci deve essere qualche proprietà!” Proprietà delle potenze: contratto didattico e gender gap. L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, *42*(A-B, 3): 346-367.

Gneezy, U., Niederle, M., & Rustichini, A. (2003). Performance in competitive environments: Gender differences. The quarterly journal of economics, *118*(3), 1049-1074.

Gneezy, U. & Rustichini, A. (2000). Pay enough or don’t pay at all. The quarterly journal of economics, *115*(3), 791-810.

Gogol, K., Brunner, M., Goetz, T., Martin, R., Ugen, S., Keller, U., Fischbach, A. & Preckel, F. (2014). “My questionnaire is too long!” The assessments of motivational-affective constructs with three-item and single-item measures. Contemporary Educational Psychology, *39*(3), 188-205.

Gorsuch, R. L., & McFarland, S. G. (1972). Single vs. multiple-item scales for measuring religious values. *Journal for the Scientific Study of Religion*, *11*, 53-64.

Gorsuch, R. L., & McPherson, S. E. (1989). Intrinsic/extrinsic measurement: I7E-revised and single-item scales. *Journal for the Scientific Study of Religion*, *28*, 348-354.

Guiso, L., Monte, F., Sapienza, P., & Zingales, L. (2008). Culture, gender, and math. SCIENCE-NEW YORK THEN WASHINGTON-, *320*(5880), 1164.

Helwig, R., Anderson, L., & Tindal, G. (2001). Influence of elementary student gender on teachers’ perceptions of mathematics achievement. The Journal of Educational Research, *95*(2), 93-102.

Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*, 33–46.

Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students?. *Cognition and Instruction*, *24*(1), 73-122.

Hyde, J. S., Fennema, E., & Lamon, S. J. (1990). Gender difference in mathematics performance: A meta-analysis. *Psychological Bulletin, 107*, 139-155.

Hopko, D. R., Mahadevan, R., Bare, R. L., & Hunt, M. K. (2003). The abbreviated math anxiety scale (AMAS) construction, validity, and reliability. *Assessment*, *10*(2), 178-182.

Hyde, J. S., Lindberg, S. M., Linn, M. C., Ellis, A. B., & Williams, C. C. (2008). Gender similarities characterize math performance. Science, *321*(5888), 494-495.

Hyde, J. S., & Mertz, J. E. (2009). Gender, culture, and mathematics performance. Proceedings of the National Academy of Sciences, *106*(22), 8801-8807.

INVALSI (2016). Rilevazione nazionale degli apprendimenti 2015-2016. Rapporto risultati. Frascati, IT: INVALSI. Disponibile in http://www.invalsi.it/invalsi/doc_evidenza/2016/07_Rapporto_Prove_INVALSI_2016.pdf

INVALSI (2017). Rilevazione nazionale degli apprendimenti 2016-2017. Rapporto risultati.

Frascati, IT: INVALSI. Disponibile in https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/Rapporto_Prove_INVALSI_2017.pdf

Jacobs, J. E., & Eccles, J. S. (1992). The impact of mothers’ gender-role stereotypic beliefs on mothers’ and children’s ability perceptions. Journal of personality and social psychology, *63*(6), 932.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, *33*(5), 379-405.

Kontorovich, I. (2015). Why do experts pose problems for mathematics competitions? In C. Bernack-Schüler, R. Erens, E. Eichler & T. Leuders (Eds.), Views and Beliefs in Mathematics Education: Results of the 19th MAVI Conference (pp. 171–182). Freiburg, Germany: Springer-Spektrum.

Kontorovich, I. (2020). Problem-posing triggers or where do mathematics competition problems come from?. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(3), 389-406.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: The University of Chicago Press.

Kuzniak, A., & Rauscher, J. C. (2011). How do teachers’ approaches to geometric work relate to geometry students’ learning difficulties?. *Educational studies in Mathematics*, *77*(1), 129-147.

Lawton, C. A., & Hatcher, D. W. (2005). Gender differences in integration of images in visuospatial memory. Sex roles, *53*(9-10), 717-725.

Lawton, M. (1997). ETS disputes charges of gender bias. *Education week*, *1*, 21.

Le Maistre, C., & Kanevsky, L. (1997). Factors influencing the realization of exceptional mathematical ability in girls: An analysis of the research. *High ability studies*, *8*(1), 31-46.

Leder, G., & Forgasz, H. (2008). Mathematics education: new perspectives on gender. Zdm, *40*(4), 513-518.

Legg, A. M., & Locker, L. (2009). Math performance and its relationship to math anxiety and metacognition. *North American Journal of Psychology, 11*(3), 471-486.

Lengfelder, A., & Heller, K. A. (2002). German Olympiad studies: Findings from a retrospective evaluation and from in-depth interviews: Where have all the gifted females gone. Journal of Research in Education, *12*(1), 86-92.

Lindberg, S. M., Hyde, J. S., Linn, M. C., & Petersen, J. L. (2010). New Trends in Gender and Mathematics Performance: A Meta-Analysis. *Psychological Bulletin, 136*(6) 1123-1135.

Linn, M. C., & Hyde, J. S. (1989). Gender, mathematics, and science. *Educational researcher, 18*(8), 17-27.

Mainali, B. (2019). Investigating the Relationships between Preferences, Gender, Task Difficulty, and High School Students' Geometry Performance. *International Journal of Research in Education and Science*, *5*(1), 224-236.

Makel, M. C., Wai, J., Peairs, K., & Putallaz, M. (2016). Sex differences in the right tail of cognitive abilities: An update and cross-cultural extension. Intelligence, *59*, 8-15.

Maloney, E. A., Ansari, D., & Fugelsang, J. A. (2011). The effect of mathematics anxiety on the processing of numerical magnitude. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *64*, 10-16.

Marushina, A. (2021). Mathematics competitions: what has changed in recent decades. *ZDM–Mathematics Education*, *53*(7), 1591-1603.

Mason, M. (2009). The van Hiele levels of geometric understanding. *Colección Digital Eudoxus*, *1*(2).

Mason, M. M., & Moore, S. D. (1997). Assessing readiness for geometry in mathematically talented middle school students. *Journal of Secondary gifted education*, *8*(3), 105-110.

Massotti, G. & Mazza, L (2019). Olimat: che passione! *Archimede, 1*, 40-43.

Matteucci, M., & Mignani, S. (2011). Gender difference in performance in mathematics at the end of lower secondary school in Italy. *Learning and Individual differences*, *21*, 543-548.

Mattsson, L. (2013). *Tracking mathematical giftedness in an egalitarian context*.

Mazza, L., & Gambini, A. (2022). The phenomenon of the gender gap among gifted students: the situation in Italy based on analysis of results in mathematics competitions. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*.

Mazza, L., & Viola, G. (2022). The anxiety of participants in mathematical competitions: an analysis from the perspective of the gender gap. In pubblicazione sui *Proceedings of Mathematical Views 28*.

Morán-Soto, G., & González-Peña, O. I. (2022). Mathematics Anxiety and Self-Efficacy of Mexican Engineering Students: Is There Gender Gap? *Education Sciences*, *12*(6), 391.

Nagy, G. (2016). Developing problem-solving skills. *Mathematics Competitions, 29*(2), 26–41.

Nagy, M. S. (2002). Using a single-item approach to measure facet job satisfaction. *Journal of Occupational and Organizational Psychology*, *75*, 77-86.

National Science Board. (2018). Science and Engineering Indicators 2018 (NSB-2018-1).

Niederle, M., & Vesterlund, L. (2007). Do women shy away from competition? Do men compete too much? The quarterly journal of economics, *122*(3), 1067-1101.

Niederle, M., & Vesterlund, L. (2008). Gender differences in competition. Negotiation Journal, *24*(4), 447-463.

Niederle, M., & Vesterlund, L. (2010). Explaining the gender gap in math test scores: The role of competition. Journal of Economic Perspectives, *24*(2), 129-44.

Nieto-Said, J. H., & Sánchez-Lamoneda, R. (2022). A curriculum for mathematical competitions. *ZDM–Mathematics Education*, *54*(5), 1043-1057.

Núñez-Peña, M. I., Guilera, G., & Suárez-Pellicioni, M. (2014). The single-item math anxiety scale: An alternative way of measuring mathematical anxiety. Journal of Psychoeducational Assessment, *32*(4), 306-317.

Núñez-Peña, M. I., Suárez-Pellicioni, M., Guilera, G., & Mercadé-Carranza, C. (2013). A Spanish version of the short mathematics anxiety rating scale (sMARS). *Learning and Individual Differences*, *24*, 204-210.

OECD. (2012). Results in Focus: What 15-year-olds know and what they can do with what they know. Paris, FR: OECD Publishing.

OECD. (2013). PISA 2012 Results: Ready to Learn: Students' Engagement, Drive and Self-Beliefs. Paris, FR: OECD Publishing.

OECD. (2015). The ABC of Gender Equality in Education: Aptitude, Behaviour, Confidence. Paris, FR: OECD Publishing.

OECD. (2016a). PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education. Paris, FR: OECD Publishing.

OECD. (2016b). ITALY – Country Note – Results from PISA 2015. Paris, FR: OECD Publishing.

OECD. (2016c). PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy. Paris, FR: OECD Publishing.

OECD. (2016d). PISA 2015 Technical report. Paris, FR: OECD Publishing.

OECD (2019a), PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do, PISA, OECD Publishing, Paris.

OECD (2019b), PISA 2018 Results (Volume II): Where All Students Can Succeed, PISA, OECD Publishing, Paris

Olshen, S. R., & Matthews, D. J. (1987). The disappearance of giftedness in girls: An intervention strategy. *Roeper Review*, *9*(4), 251-254.

Olszewski-Kubilius, P., & Lee, S. Y. (2011). Gender and other group differences in performance on off-level tests: Changes in the 21st century. Gifted Child Quarterly, *55*(1), 54-73.

Plake, B. S., & Parker, C. S. (1982). The development and validation of a revised version of the Mathematics Anxiety Rating Scale. Educational and Psychological Measurement, *42*, 551–557.

Poulos, A. (2020). A case study of a student who created problems for a mathematics competition. *Teaching of Mathematics*, *23*(2).

Primi, C., Busdraghi, C., Tomasetto, C., Morsanyi, K., & Chiesi, F. (2014). Measuring math anxiety in Italian college and high school students: validity, reliability and gender invariance of the Abbreviated Math Anxiety Scale (AMAS). Learning and Individual Differences, *34*, 51-56.

Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Reexamining a definition. *Phi delta kappan*, *60*(3), 180.

Retnawati, H., Arlinwibowo, J., & Sulistyaningsih, E. (2017). The students' difficulties in completing geometry items of national examination. *International Journal*, *8*(4), 03.

Reyes, L. H. (1984). Affective variables and mathematics education. *The elementary school journal*, *84*(5), 558-581.

Richardson, F. C., & Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: psychometric data. *Journal of counseling Psychology*, *19*(6), 551.

Rohland, B. M., Kruse, G. R., & Rohrer, J. E. (2004). Validation of a single-item measure of burnout against the Maslach Burnout Inventory among physicians. *Stress & Health*, *20*, 75-79.

Sbaragli S., Mammarella I.C. (2010). *L'apprendimento della geometria.* In: Lucangeli D., Mammarella I.C. (2010). Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento. Milano: Franco Angeli.

Segal, C. (2008). Motivation, test scores, and economic success", Working Paper 1124, Department of Economics, Universitat Pompeu Fabra.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem?. *Journal for research in mathematics education*, *34*(1), 4-36.

Siegel, J., & Shaughnessy, M. F. (1991). *Gifted Females Can Be Supported in Math and Science: A Proposal for Mentoring in Secondary Schools*. Portales, NM; Eastern New Mexico University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 344 381).

Soifel, A. (2017). Competitions for young mathematicians. *Perspectives from five continents. ICME-13 Monographs, Springer*.

Stoet, G., Bailey, D. H., Moore, A. M., & Geary, D. C. (2016). Countries with higher levels of gender equality show larger national sex differences in mathematics anxiety and relatively lower parental mathematics valuation for girls. PloS one, *11*(4), e0153857.

Subotnik, R. F., & Strauss, S. M. (1995). Gender Differences in Classroom Participation and Achievement: An Experiment Involving Advanced Placement Calculus Classes. *Journal of Secondary Gifted Education*, *6*(2), 77-85.

Sulistiowati, D. L., Herman, T., & Jupri, A. (2019, February). Student difficulties in solving geometry problem based on Van Hiele thinking level. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1157, No. 4, p. 042118). IOP Publishing.

Surányi, J. (2001). The Influence of Mathematics Competitions on Teaching: Benefits and Dangers. *Mathematics Competitions*, *14*(1), 23-29.

Tannenbaum, A. J. (1983). *Gifted children: Psychological and educational perspectives*. Macmillan Publishing Company.

Taylor, J. A. (1953). A personality scale of manifest anxiety. Journal of Abnormal and Social Psychology, *48*, 285–290.

Tobias, S. (1993). *Overcoming math anxiety*. WW Norton & Company.

Tohir, M., Susanto, H., & Suharto, D. (2018). Students' creative thinking skills in solving mathematics Olympiad problems based on problem-solving Polya and Krulik-Rudnick model. *Advanced Science Letters*, *24*(11), 8361–8364.

Tomasetto, C. (2013). Matematica per i maschi, italiano per le femmine: Stereotipi di genere e atteggiamenti verso le materie scolastiche tra genitori e figli. IN-MIND ITALIA, *5*, 19-24.

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.

Van Hiele-Geldof, D. (1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, 1-214.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic press.

Wai, J., Cacchio, M., Putallaz, M., & Makel, M. C. (2010). Sex differences in the right tail of cognitive abilities: A 30-year examination. Intelligence, *38*(4), 412-423.

Weiner, N. C., & Robinson, S. E. (1986). Cognitive abilities, personality and gender differences in math achievement of gifted adolescents. *Gifted Child Quarterly*, *30*(2), 83-87.

Wertheimer, R. (1999). Definition and identification of mathematical promise. In L. J. Sheffield (Ed.), *Developing mathematically promising students* (pp. 9-26). Reston: NCTM.

Winner, E. (1996). Gifted children (Vol. 1). New York: Basic Books. Witty, P. A. (1940). Some considerations in the education of gifted children. *Educational administration and Supervision*, *26*, 512-521.

Zani, S., & Cerioli, A. (2007). *Analisi dei dati e data mining per le decisioni aziendali*. Giuffrè editore.

Sitografia

http://aksf.org/index.xhtml

https://giochimatematici.unibocconi.it/index.php/gare/campionati

https://nces.ed.gov/timss/

https://nuovadidattica.wordpress.com/glossario/contratto-didattico/

http://olimpiadi.dm.unibo.it/

https://profsimoneschiavon.weebly.com/uploads/1/7/9/3/17934921/didattica_della_geometria.pdf

https://www.egmo.org/

https://www.imo-official.org/

https://www.indire.it/eccellenze/

https://www.invalsiopen.it/cosa-e-come-funziona-indagine-ocse-pisa/

https://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2018/docris/2019/Sintesi%20dei%20risultati%20italiani.pdf

https://www.kangourou.it/

http://www.mathisintheair.org/wp/2021/05/olimpiadi-della-matematica-intervista-a-ludovico-pernazza-presidente-della-commissione-olimpiadi-dellumi/

https://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Egmo2018/c3545b8e-bf88-4609-bb7e-e824929ca767

https://www.miur.gov.it/web/guest/tematiche-e-servizi/scuola/eccellenze/valorizzazione-delle-eccellenze/normativa

https://www.oecd.org/pisa/

http://www.phiquadro.it/