Sapienza
Università di Roma

La rinascita della Logica in Italia nella seconda metà del '900: aspetti storici e didattici.

Scuola di Dottorato Vito Volterra
Dottorato di Ricerca in Matematica (XXXV ciclo)

Antonio Veredice
Matricola 688533

Relatore
Prof. Claudio Bernardi

Correlatore
Prof. Lorenzo Tortora de Falco

Anno Accademico 2022/2023

Tesi discussa il 17 luglio 2023
di fronte a una commissione esaminatrice composta da:

Prof. Benedetto Scoppola (presidente)
Prof. ssa Giovanna D'Agostino
Prof. Lorenzo Carlucci

La rinascita della Logica in Italia nella seconda metà del '900: aspetti storici e didattici.
PhD thesis. Sapienza Università di Roma

Questa tesi è stata composta con LaTeX e la classe Sapthesis.

Email dell'autore: antonio.veredice@uniroma1.it

Sommario

All'origine dei vari indirizzi della ricerca in Logica Matematica che viene svolta attualmente in Italia c'è un preciso momento di nascita: la fondazione del Gruppo di Logica del CNR da parte di Ludovico Geymonat nel 1962. A questo momento storico è stato dato il nome di rinascita della Logica italiana per sottolineare la soluzione di continuità con la Logica di Peano di inizio secolo.

In questa tesi abbiamo cercato di ricostruire alcuni aspetti del percorso che ha portato la Logica Matematica in Italia, da una disciplina appannaggio di un ristretto gruppo di pionieri ad una vasta area di studio che interessa oggi un numero non trascurabile di ricercatori che contribuiscono in maniera importante alla ricerca internazionale. Per far ciò ci siamo avvalsi, oltre che degli strumenti tradizionali della ricerca matematica, anche di interviste a ricercatori che hanno vissuto direttamente la rinascita della Logica in Italia.

La seconda metà del '900 in Italia ha visto la Logica come crocevia tra Matematica, Filosofia e Informatica in un intreccio di rapporti e contaminazioni che hanno dato origine, in qualche caso, anche a controversie. Inoltre, attraverso la Logica, il mondo della ricerca scientifica e il mondo della scuola sono entrati in contatto e ciò ha dato vita a interessanti collaborazioni.

In questo lavoro abbiamo scelto alcuni temi di ricerca (in Algebra della Logica, Teoria della Dimostrazione e Teoria dei Modelli) e studiato i contributi di alcuni studiosi italiani in tali ambiti, cercando di far emergere quali sono stati gli snodi concettuali caratteristici della storia della Logica Italiana.

Ci siamo infine occupati di questioni che hanno legato l'evoluzione storica della Logica italiana ad ambiti che esulano dalla ricerca scientifica, come ad esempio l'introduzione di argomenti di Logica nei curricula scolastici di Matematica.

Indice

Capitolo 1

Introduzione storica

Con la dicitura *rinascita della Logica* si intende la ripresa degli studi di Logica in Italia nella prima metà degli anni '60 del Novecento ad opera di Ludovico Geymonat e di un gruppo di giovani studiosi interessati agli sviluppi internazionali della Logica Matematica del '900. Si parla di *rinascita* perché, dopo la scuola di Peano, che aveva raggiunto risultati di risonanza internazionale, non ci sono stati ricercatori italiani in Logica fino al tempo di Geymonat. In questo capitolo vogliamo fornire un quadro generale in cui inserire gli avvenimenti e le idee provenienti dalla ricerca italiana in Logica Matematica, che approfondiremo nei prossimi capitoli.

1.1 La Logica di Peano

Punto di riferimento imprescindibile per la Logica del '900 in Italia e non solo, è l'opera di Giuseppe Peano. Egli si occupa di Logica in una serie di scritti tra il 1888 e il 1903, raccolti nel volume [105]. Si tratta di: *Operazioni della Logica deduttiva*, *Principii di Logica Matematica*, *Formole di Logica Matematica*, *Notations de Logique Mathématique*, *Studii di Logica Matematica*, *Formules de Logique Mathématique*.

Inoltre, un discorso a parte va fatto per *Arithmetices principia nova methodo exposita* e *I principii di geometria logicamente esposti*. Si tratta di due opere non di Logica, ma rispettivamente di Aritmentica e Geometria; tuttavia risalta in esse l'uso da parte di Peano del suo originale formalismo logico per esprimere i fondamenti di queste due branche della Matematica. Questo fatto è emblematico del *ruolo cruciale* che Peano attribuisce alla Logica Matematica, riconoscendole la capacità di *esprimere in forma simbolica, per via assiomatica, le teorie matematiche classiche* [71].

Infine, un ruolo di primo piano, per quanto riguarda le opere di Peano che hanno a che fare con la Logica, spetta al *Formulario*, la sua opera di sistematizzazione della conoscenza matematica espressa in forma simbolica. Si tratta di un progetto ambizioso che coinvolge molti studiosi di quella che viene chiamata la *Scuola di Peano*: Giovanni Vailati, Filiberto Castellano, Cesare Burali-Forti, Giovanni Vacca, Alessandro Padoa, Mario Pieri. Il loro obiettivo, con il formulario, è creare uno strumento affidabile (Peano e i suoi lo paragonano a un *microscopio*) per l'analisi dei concetti matematici che sostituisca il linguaggio comune, in modo da restituire alla matematica il suo carattere di *assoluto rigore*. L'ambizione è *realizzare il sogno* *di Leibniz di costruire quella characteristica universalis, in grado di formalizzare i processi mentali, attraverso l'individuazione delle idee primitive e l'ideazione di simboli appropriati che quasi dipingano l'intima natura dei concetti* [71]. L'importanza del progetto del *Formulario* per Peano è evidente nelle parole seguenti che egli scrive a Felix Klein nel 1894:

> *La Logica matematica con un numero limitatissimo di segni (7 usati, e riduttibili ancora fra loro) è riuscita ad esprimere tutte le relazioni logiche immaginabili fra classi e proposizioni; o meglio l'analisi di queste relazioni ha portato ad usare quei segni, coi quali tutto si esprime, anche le relazioni più complicate, che difficilmente e faticosamente si esprimono col linguaggio ordinario. Ma il suo vantaggio non si limita alla semplificazione della scrittura; l'utilità sua sta specialmente nell'analisi delle idee e dei ragionamenti che si fanno in matematica. Intanto, per far vedere l'utilità sua si va stampando il "Formulario di Matematica".*

Come evidenziato da Lolli nella prefazione di [47], Peano, al pari di Frege, ha dato una spinta propulsiva alla Logica moderna creando un linguaggio interamente simbolico. Entrambi perseguirono tale scopo, seppur con motivazioni diverse: Frege nel 1879, con la *Begriffsschrift*, scrittura per concetti o ideografia e Peano nel 1888 con la *pasigrafia*.

> *Mentre l'ideografia di Frege non incontrò i favori del pubblico, ampia risonanza ebbe invece quella di Peano, che era conosciuto e apprezzato come matematico nell'ambiente internazionale; a questo si aggiunse la maggior maneggevolezza della pasigrafia che, oltre a presentarsi come estensione del simbolismo matematico era utilizzata da Peano, e dai suoi collaboratori, per la scrittura di lavori scientifici sia su una sua rivista dedicata, sia su altre.* (G. Lolli, dalla prefazione di [47])

L'influenza di Peano sulla comunità scientifica internazionale è ben nota e si può riscontrare in quanto riportato da B. Russell nella sua autobiografia. Russell afferma di essere rimasto colpito, durante il Congresso Internazionale di Filosofia di Parigi del 1900, dalla chiarezza di idee e dalla capacità di argomentazione di Peano e della sua scuola:

> *Il Congresso fu il punto di svolta della mia vita intellettuale, perché vi incontrai Peano. Lo conoscevo già di nome e avevo visto qualche suo lavoro, ma non mi ero preso la briga di imparare il suo formalismo. Al Congresso notai che era sempre il più preciso di tutti, e che sistematicamente aveva la meglio in ogni discussione in cui si imbarcava. Col passare dei giorni, decisi che questo era l'effetto della sua logica matematica. Capii che il suo formalismo era lo strumento di analisi logica che avevo cercato per anni.* (B. Russell, *autobiografia*, 1969)

Questo punto di vista trova riscontro, anni dopo, nelle parole di Hans Freudenthal che riguardo al convegno di Parigi del 1900 afferma:

> *nel campo della filosofia della scienza la falange italiana fu eccelsa: Peano, Burali-Forti, Padoa, Pieri dominarono la discussione nel modo più assoluto.* (H. Freudenthal)

Secondo Lolli [67], Peano costruisce la *pasigrafia* con due obiettivi: garantire rigore e assenza di ambiguità alle espressioni matematiche e pervenire ad una sintesi, una specie di *compressione a fini enciclopedici* che ha la sua realizzazione nel *Formulario*. La naturale evoluzione di questo percorso porta Peano alle successive ricerche linguistiche. Infatti, come sostenuto da Cassina [105] e ribadito da Geymonat [52], la Logica Matematica e le ricerche sull'*interlingua* costituiscono due momenti di uno stesso percorso, un *medesimo e grandioso programma volto a realizzare, in forma moderna, alcuni fra i più caratteristici temi dell'insegnamento leibniziano* [52].

1.2 La *decadenza di questo genere di studi*

Lo spostamento di interessi dalla Logica all'Interlingua allontana Peano dal dibattito sui fondamenti e, in qualche modo, lo isola rispetto alla ricerca internazionale in Logica. Probabilmente questo cambio di direzione di Peano e della sua Scuola è anche legato al ruolo da lui attribuito alla Logica che, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, era il linguaggio per rendere rigorosa la Matematica. Una volta assolto tale compito, la ricerca in Logica si era esaurita. Questo punto di vista è condiviso da Gabriele Lolli quando afferma che *la logica matematica di Peano si identificava veramente con il linguaggio per la matematica, e si esauriva in esso. Peano era principalmente interessato a questioni di Analisi e la Logica, considerata un tutt'uno con lo studio dei Fondamenti, doveva rispondere principalmente all'esigenza di rendere più rigorosa l'Analisi* (dall'introduzione di [47]). Pertanto non meraviglia il fatto che il simbolismo peaniano venga abbandonato, dopo un primo interesse, dai Logici degli altri paesi, e quindi che la collaborazione internazionale della scuola di Peano vada scemando nei primi del '900.

Ma l'isolamento di Peano non avvenne solo a livello internazionale. Anche in Italia le idee di Peano non ebbero diffusione al di là della sua scuola, né in ambiente matematico né in ambiente filosofico.

Fra i matematici si diffonde, già dalla fine dell'800, una sorta di atteggiamento scettico e sospettoso nei confronti della Logica Matematica come evidenziato da Geymonat in [52]. Ciò è dovuto in parte alla posizione di alcuni matematici nei confronti della *crisi dei fondamenti* che viene concepita come un problema inesistente da chi, *convinto della piena solidità della propria scienza, non è disposto ad ammettere questa crisi*. Un altro fattore che motiva l'avversione dei matematici nei confronti della Logica risiede nella contrapposizione tra rigore logico e fantasia matematica: la Logica, per la sua convenzionalità e l'eccessivo formalismo, priverebbe la matematica delle sue caratteristiche di inventiva e creatività. A tal proposito si vedano le posizioni di Volterra, Veronese ed Enriques, documentate in [108], nei confronti della Logica di Peano.

Inoltre, nell'ambiente filosofico italiano dei primi decenni del '900, la Logica Matematica trova un ostacolo insormontabile: l'atteggiamento apertamente ostile dell'Idealismo portato avanti da Benedetto Croce e Giovanni Gentile che dominano la cultura italiana dell'epoca. Questa ostilità traspare ad esempio dalla seguente citazione:

> *La logica formalistica è stata fatta segno a molti colpi violenti ... ma non si può dire che sia stata colpita nel punto vitale, perché non si è*

> *mirato al suo principio stesso ossia l'incoerenza da cui prende le mosse... e non mancano nemmeno ai giorni nostri, tentativi di riformularla, che hanno tutti il medesimo vizio, di volere riformare la Logica formalistica senza rigettarne l'intimo presupposto: la pretesa di cogliere il pensiero nelle parole, i concetti nelle proposizioni. Il tentativo più solenne in questo genere, e che conta oggi molti e zelanti seguaci, è la Logica Matematica... Che essa non abbia nulla d'intrinsecamente matematico è ammesso da coloro stessi che la professano...* (Benedetto Croce, *Logica come scienza del concetto puro*, 1909).

L'atteggiamento culturale dell'Idealismo si riverbera nelle prese di posizione politiche del regime fascista che ha, nei confronti della Logica, un atteggiamento non meno ostile. Ne è un esempio il parere dalla Sezione Prima del Consiglio Superiore nell'adunanza del primo ottobre 1937 avente per oggetto il *riordinamento didattico della Facoltà di Scienze statistiche, demografiche e attuariali.* Nel testo di tale parere, la Sezione, dichiarandosi contraria al corso di *Istituzioni di logica formale*, sostiene che la Logica non può essere altro fuorché: o *l'antica sillogistica di veneranda memoria* o un complesso *di indagini di natura speculativa, che richiedono una specialissima preparazione, raramente in atto nelle stesse Facoltà di Lettere e Filosofia, tra gli studenti di Filosofia.*

Le cose non cambiano molto negli anni del dopoguerra, quando la Logica, identificata con il neo-positivismo, viene *rifiutata in linea di principio anche dai marxisti di influenza sia crociana sia gentiliana, come pure lukácsiana.* Un esempio dell'avversione dell'ambiente filosofico legato alla sinistra italiana nei confronti del neo-positivismo è *Marxismo e neo-positivismo* scritto nel 1958 da Cesare Cases in risposta a *Praxis ed empirismo* di Giulio Preti.

In questo contesto non meraviglia la quasi completa sparizione degli studi di Logica in Italia nella prima metà del '900. Ciò accade proprio nel momento in cui il fermento sulla crisi dei fondamenti genera, in Europa e negli Stati Uniti, una varietà di temi di ricerca. Tali studi raggiungono un punto apicale con i teoremi di incompletezza di Gödel i quali, se da una parte forniscono una risposta definitiva e negativa alle domande sollevate dal programma di Hilbert, dall'altra danno inpulso a filoni di ricerca che diventeranno protagonisti nella Logica contemporanea: Calcolabilità, Teoria della Dimostrazione e Teoria dei Modelli.

Alla situazione della Logica Italiana in questo periodo storico fa riferimento Ludovico Geymonat quando parla di *decadenza - in Italia - di questo genere di studi, che proprio nel secolo XX ha trovato invece così rigoglioso sviluppo al di là dei nostri confini.*

Bisogna notare che, paradossalmente, anche l'eredità di Peano viene interpretata, in Italia, come un ostacolo alla diffusione dei moderni studi di Logica internazionali. Ciò non avviene solo durante il Fascismo per una visione campanilistica tendente a sminuire i progressi della scienza estera. L'idea che Peano avesse già fatto tutto quello di cui c'era bisogno in Logica è abbastanza diffusa tra i matematici ancora durante gli anni '50. Ugo Cassina, allievo e curatore delle opere di Peano, nel 1953 scrive:

> *Alcuni cultori della logica simbolica moderna e delle cosiddette logiche nuove, ritengono che l'opera di Peano nel campo della logica abbia ormai*

> *solo un valore storico, ma tale affermazione è fondata soltanto sulla poca conoscenza di detti autori dell'opera vera di Peano. Così.... si esaltano i moderni negatori della logica classica, che pretendono di ragionare privandosi degli strumenti della ragione e che si trincerano dietro un linguaggio simbolico prolisso, impreciso ed incompleto, che - colle debite proporzioni - sta a quello di Peano come un quadro cubista o surrealista di Picasso, intitolato donna sdraiata, ma in cui l'uomo comune non riesce a vedere che delle macchie di colore, sta alla donna sdraiata di Tiziano, o alla Danae di Correggio!* (U. Cassina, *Su l'opera filosofica e didattica di G. Peano*, 1953)

La citazione precedente è in linea con quanto affermato da Mario Piazza in [108] secondo cui *la triste sorte degli studi di logica matematica in Italia dopo Peano è anche da ascrivere all'esaltazione sproporzionata dei meriti del maestro da parte dei suoi allievi. I loro lavori, tesi a preservare l'ortodossia, restano di fatto impermeabili alle nuove direzioni della ricerca internazionale.*

In questo momento storico, Ludovico Geymonat svolge il delicato ruolo di *trait d'union* tra la Logica di Peano e la rinascita della Logica in Italia. Come si vede in [52], egli è fermamente convinto del valore dell'opera di Peano ma esorta al contempo la cultura italiana ad andare oltre Peano e ad aprirsi verso la Logica moderna.

Geymonat si era laureato nel 1930 in Filosofia e nel 1932 in Matematica. Nel gennaio 1932 chiede a Peano una tesina di Logica e si vede assegnato il compito di studiare la *definizione matematica*, uno degli ultimi interessi di tipo logico di Peano. Purtroppo la tesina non potrà essere discussa per la morte di Peano il 20 aprile 1932. Geymonat però sviluppa negli anni una profonda sensibilità per i temi fondazionali che lo porta a farsi promotore della rinascita della Logica in Italia.

1.3 La *rinascita* con Geymonat

Gli interessi di Geymonat per la Logica Matematica nascono con ogni probabilità, durante la frequentazione del Circolo di Vienna. Geymonat infatti si reca in Austria nel 1934 per approfondire la conoscenza della filosofia positivista ed entra in contatto con il Circolo di Moritz Schlick. Tornato in Italia inizia un'opera di divulgazione su temi di Logica e Filosofia della Scienza: nel '36 pubblica l'articolo *Logica e Filosofia della Scienza* sulla *Rivista di Filosofia* a cui seguono traduzioni e recensioni di opere legate alla Logica Matematica. Nel 1942 Geymonat propone a Einaudi la pubblicazione di una antologia delle opere di Frege che però vedrà la luce solo nel 1948 a causa dell'opposizione del Minculpop che vedeva l'opera di Frege *ormai di molto superata*. In realtà pare che dietro il diniego del Ministero ci fosse il parere della Reale Accademia d'Italia secondo cui non era opportuna la *pubblicazione di un libro come quello di Frege, dato che non si poteva mettere in valore l'opera di uno straniero sui fondamenti dell'aritmetica, senza contemporaneamente lumeggiare quella definitiva di Giuseppe Peano.*

L'impegno di Geymonat per un rinnovamento della cultura scientifica in Italia si esprime anche nella partecipazione al Centro di Studi Metodologici (CSM). Si tratta di una *comunità di liberi ricercatori* che iniziano a riunirsi nell'estate del 1945 a Torino in una serie di convegni privati, il cui scopo era lo *scambio delle idee* *rispettive intorno a questioni generali e particolari di metodo, riguardanti le scienze e le discipline che ognuno di essi coltivava.* La caratteristica principale del CSM è quella di riunire personalità provenienti da diverse aree disciplinari: Abbagnano, Buzano, Frola, Geymonat, Nuvoli e Persico.

Geymonat è l'elemento unificatore fra la componente filosofica e quella matematico - scientifica del CSM. Tuttavia il progetto del CSM era, secondo Geymonat, *paralizzato da una concezione superata della matematica e dalla scarsa conoscenza dei progressi della logica internazionale.* Insomma, per riformare la cultura scientifica italiana bisognava, secondo Geymonat, progredire nello studio della Logica Matematica.

Con questa intenzione Geymonat inserisce degli elementi di Logica nei suoi insegnamenti prima all'Università di Pavia dove viene chiamato nel 1953 sulla cattedra di Storia della Filosofia e poi a Milano dove si sposta nel 1955 sulla prima cattedra italiana di Filosofia della Scienza.

Determinanti per la rinascita della Logica sono gli incontri di Geymonat con alcuni giovani studiosi sul finire degli anni '50. Alberto Pasquinelli che dopo la laurea nel 1951 aveva trascorso un periodo di studio a Chicago con Carnap, nel 1957 pubblica *Introduzione alla Logica simbolica*, con introduzione di Geymonat, primo volumetto italiano del genere.

Un altro incontro fondamentale per la rinascita è quello di Geymonat con Ettore Casari.

L'interesse di Casari per la Logica nasce in modo casuale quando, studente di lettere classiche, segue il corso di Filosofia Morale tenuto da Giulio Preti:

> *Un giorno, dev'essere stato nella primavera del 1952, nel bel mezzo di una lezione sui "Principia Ethica" di Moore, il "Giulietto", come lo chiamavamo noi, scrisse sulla lavagna una parentesi aperta, una E maiuscola capovolta, una x, una parentesi chiusa e dei puntini in mezzo ai quali c'era ancora la x e, dicendo che oggigiorno il fatto che esistesse un oggetto con una certa proprietà lo si scriveva così, cambiò completamente il corso della mia vita.* (Casari, [22])

Casari, incuriosito, chiede quindi a Preti consigli su come approfondire quel tipo di scrittura simbolica. Preti, in risposta, consiglia il testo *Nove Lezioni di Logica Simbolica* di Bochenski il quale, come vedremo nel capitolo sull'insegnamento della Logica, aveva tenuto presso l'Angelicum di Roma il primo corso di Logica in Italia del periodo post Peano.

Grazie all'interessamento di Preti, Casari si laurea con una tesi sulla Logica Megarico–Stoica, coniugando gli studi da aspirante grecista con il suo nascente interesse per la Logica. Inoltre Casari, alloggiando nel periodo universitario presso il Collegio *Borromeo* di Pavia, ha la possibilità di usufruire di una borsa di studio per trascorrere un periodo a Münster dove era attivo l'istituto di *Logica Matematica e indagine sui Fondamenti.*

Al ritorno a Pavia, Casari incontra Geymonat. Nasce da questo momento un sodalizio che sarà fondamentale per la rinascita della Logica in Italia. Nel 1955 Casari, con l'approvazione di Geymonat, torna a Münster per approfondire gli studi di Logica e trascorre quasi cinque anni di studio all'*Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforshung* dove insegnano Hans Hermes, Wilhelm Ackermann e Gisbert Hasenjaeger. Al suo ritorno Casari è pronto a contribuire al progetto di diffusione della Logica in Italia. Nel 1957 egli tiene a Torino un corso di Logica Matematica su iniziativa del CSM. Le note per tale corso diventeranno il testo *Lineamenti di Logica Matematica* pubblicato nel 1960 nell'ambito della collana di Filosofia della Scienza di Feltrinelli.

Questa collana, inaugurata proprio nel 1960 e diretta da Geymonat, è uno dei passi cruciali della rinascita della Logica in Italia. Su questi testi, alcuni giovani studiosi italiani interessati alla Logica iniziano la loro formazione.

Fra la fine degli anni '50 e l'inizio degli anni '60 si crea pertanto una situazione favorevole per la ripresa della Logica. Alcuni, seppur pochi, matematici nutrono un certo interesse per tematiche vicine alla Logica, fra di essi Tullio Viola, Bruno de Finetti, Lucio Lombardo Radice e Beniamino Segre.

Viola ritiene che una delle cause della decadenza della Logica in Italia risieda nella mancata collaborazione tra Peano e Enriques e tenta un'*originale sintesi di quelle due posizioni nell'alveo dei suoi corsi di Matematiche complementari* [118]. De Finetti in *L'invenzione della verità* aveva scritto sulla caratteristica leibniziana e i suoi legami con il programma di Peano. Anche Lombardo Radice è, a detta di Casari, uno dei pochi che alla fine degli anni '50 aveva delle idee sugli ordinali, sugli alef, sul problema del continuo, sul ruolo del principio di scelta nell'aritmetica transfinita, *anche se non sempre correttissime* [22]. Infine Segre, con la sua posizione di rilievo nella cultura scientifica italiana, si rende conto, alla fine degli anni '50, che l'isolamento dell'Italia rispetto alla ricerca internazionae in Logica non è tollerabile (si veda a riguardo un episodio avvenuto nel 1957 ad un convegno a Nizza di cui parleremo nel capitolo sulla Teoria della Dimostrazione).

Dal 5 al 7 aprile del 1961, si tiene a Torino, il *Convegno nazionale di Logica*. I relatori sono: Alfio Andronico, Corrado Böhm, Pietro Buzano, Fernardo Bertolini, Maurizio Ciampa, Ettore Carruccio, Ettore Casari, Lucio Lombardo Radice, Corrado Mangione, Alberto Pasquinelli, Flavio Previale, Giovanni Vacca e Carlo Viano.

Durante l'anno accademico 1960/1961 alcuni neolaureati si interessano alla Logica. Fra di essi Corrado Mangione che si laurea nel 1960 a Milano con una tesi di algebra *ante-litteram, perché in quegli anni non era ancora stato istituito il corso di Algebra nei Dipartimenti di Matematica* [41]. Mangione, che aveva seguito le lezioni di Geymonat, nell'anno accademico 1960/61 collabora come assistente al corso di Logica tenuto da Geymonat e da Casari (vedi capitolo sull'insegnamento della Logica). A seguire il corso c'è Maria Luisa Dalla Chiara.

Dalla Chiara nel 1957 si iscrive al corso di Laurea in Filosofia all'università di Padova e si laurea nel 1961 con una tesi sul *concetto di dialettica nell'estetica di Adorno*. Preparando la tesi, Dalla Chiara si interessa alle tematiche dell'empirismo e del positivismo logico verso le quali Adorno aveva un atteggiamento critico:

> *Allora mi è venuta la curiosità di leggere questi autori. Così per contrapposizione ho cominciato a studiare sia Husserl sia i positivisti logici. Paradossalmente facendo la tesi mi sono innamorata degli argomenti di cui l'autore della mia tesi parlava così male...* (Maria Luisa Dalla Chiara, intervista in [41])

Dalla Chiara, durante la preparazione della tesi, scrive a Geymonat, di cui aveva seguito una conferenza a Padova, per manifestare i suoi nascenti interessi per la

Logica. Geymonat risponde invitandola, dopo la laurea, a iscriversi a un corso di perfezionamento in Filosofia della durata di tre anni. Per frequentare il corso, Dalla Chiara, nell'ottobre 1961 si trasferisce a Milano.

Nello stesso anno si tiene, a Torino, il *III Simposio Internazionale di Storia delle Scienze*, organizzato dal Gruppo Italiano di Storia delle Scienze, tra gli invitati c'è Evandro Agazzi. Agazzi aveva studiato Filosofia e Fisica e aveva un interesse per la Logica; nel 1960 trascorre un periodo di studio a Münster, dove conosce Casari, e nel 1961 pubblica *Introduzione ai problemi dell'assiomatica.* Al *III Simposio Internazionale di Storia delle Scienze* Agazzi incontra Geymonat che lo invita ad unirsi al gruppo di giovani studiosi interessati alla Logica. In questo momento si costituisce il primo nucleo del gruppo di Logica Matematica.

1.4 Il Gruppo di Logica del C.N.R.

Il punto di svolta nella rinascita della Logica in Italia è la creazione del gruppo di Logica del CNR. Nel 1962 Agazzi, Casari, Dalla Chiara e Mangione chiedono a Geymonat di istituzionalizzare il gruppo. A detta di Casari, Geymonat è inizialmente *preoccupato di compromettere, con un'operazione non priva di aspetti brancaleoneschi, il credito di cui godeva nel mondo dei matematici* [22]. Tuttavia, vinte le perplessità, nel maggio 1962 Geymonat chiede al CNR l'istituzione del *Gruppo di ricerca per la Logica Matematica*:

> *Tenuto conto della rinascita in Italia degli studi di Logica matematica (in notevole parte iniziata proprio ad opera mia e dei miei allievi) mi permetto di avanzare al CNR la domanda per l'istituzione di un nuovo gruppo di ricerca, espressamente rivolto a questo ramo dell'indagine matematica che tanti successi ha raggiunto all'estero, in questi anni, aprendo nuove prospettive teoriche e pratiche alla ricerca scientifica. Come risulta dal programma inserito nell'accluso contratto, il nuovo Gruppo intenderebbe occuparsi per ora dell'aspetto essenzialmente teorico della logica matematica moderna, e cioè delle strutture algebriche e topologiche da essa suggerite, riservandosi in un secondo tempo di prendere anche in esame le più significative applicazioni di tali strutture* (L. Geymonat a L. Polvani, 18/5/1962)

Subito dopo la fondazione, si uniscono al gruppo anche due matematici di Firenze: Roberto Magari e Piero Mangani di cui parleremo diffusamente nei capitoli sull'Algebra della Logica e sulla Teoria dei Modelli. I due matematici, detti nel gruppo "i fiorentini", si interessano all'attività del gruppo dopo aver assistito ad una conferenza di Geymonat a Firenze. Grazie alla collaborazione di Guido Zappa, che era stato loro docente di Algebra, Magari e Mangani scrivono a Geymonat. A rispondere a quella lettera sarà però Mangione che li invita ad unirsi al gruppo e propone loro la lettura di alcuni testi sull'Algebra della Logica (i testi di Henkin, Sikorski e Halmos di cui parleremo nel capitolo sull'Algebra della Logica).

Le riunioni del gruppo si tengono alla Statale di Milano, in via Festa del Perdono, con cadenza quindicinale il sabato pomeriggio. Nel 1963 partecipano alle riunioni del gruppo, oltre a Geymonat, Casari, Mangione, Agazzi, Dalla Chiara, Magari e

Mangani, anche il torinese Flavio Previale, allievo di Tullio Viola e il padovano don Bruno Busulini, allievo di Ugo Morin. Alla fine dell'anno, si unisce al gruppo anche il matematico fiorentino Mario Servi appena arrivato dagli Stati Uniti:

> *un sabato dopo pranzo stavamo lavorando dentro il Gruppo ed entrarono i Fiorentini con il nuovo arrivato Mario Servi. Servi raccontò che in America un certo Cohen aveva dimostrato l'indipendenza dell'ipotesi del continuo.* (E. Casari, intervista in [41]).

Nel 1964 inizia a frequentare le riunioni del gruppo anche Carlo Cellucci. Il suo interesse per la Logica e la Filosofia della Matematica nasce durante l'ultimo anno di Liceo. Dopo essersi iscritto a Fisica a Napoli, cambia idea e nell'anno accademico 1959/60 passa a Filosofia alla Sapienza.

> *Nel 1960, nella vetrina di una libreria, vidi i primi due volumi, appena pubblicati, della nuova collana di filosofia della scienza di Feltrinelli, diretta da Ludovico Geymonat, cioè il "Manuale di logica" di Quine, e i "Lineamenti di logica matematica" di Ettore Casari. Così appresi che in Italia vi erano persone interessate alla logica matematica. Non ve ne erano invece nell'università in cui studiavo, cioè la Sapienza di Roma* [26].

Cellucci frequenta il corso di Filosofia della Scienza tenuto da Somenzi e gli manifesta il proprio interesse per una tesi in Logica. Nel 1963 si tiene alla Sapienza l'esame per la libera docenza in Filosofia della Scienza di Agazzi. La commissione è presieduta da Geymonat e, in quell'occasione, grazie all'intercessione di Somenzi, Cellucci entra in contatto con Geymonat. Cellucci si trasferisce quindi a Milano per lavorare a una tesi sugli ordinali ricorsivi con Casari e Geymonat e si laurea nel 1964.

> *Con mia grande sorpresa, al mio esame di laurea, invece del consueto pubblico di familiari ed amici, assistè tutto il gruppo di persone che gravitava intorno a Geymonat, a cominciare da Corrado Mangione. Dopo la laurea, Corrado Mangione mi spiegò che avevano voluto assistere al mio esame di laurea perché la mia era, in assoluto, la prima tesi di laurea su un argomento di logica matematica che venisse discussa nella Facoltà di Lettere e Filosofia della Statale di Milano* [26].

Dopo la laurea, Cellucci e Dalla Chiara ottengono due borse di studio del CNR, di durata biennale, per partecipare al Gruppo di Logica Matematica.

Uno degli aspetti peculiari del gruppo di Logica di Geymonat è la composizione eterogenea di Filosofi (quelli del gruppo milanese) e Matematici (i fiorentini e i torinesi). Da un lato ciò ha costituito una delle ricchezze culturali del gruppo. Dall'altro, a causa di questa pluralità di formazioni, veniva emergendo un contrasto tra due diverse visioni.

> *Sullo stato della logica in Italia così come sulla necessità di porvi rimedio eravamo tutti d'accordo; la diversità sorgeva sulle vie da percorrere per conseguire quell'obiettivo* [22].

Alcuni erano dell'avviso che fosse necessario lavorare innanzitutto sulla preparazione dei logici italiani, recuperando il divario di conoscenze rispetto alla ricerca internazionale. Ovvero diffondere le conoscenze e consolidare le basi prima di fare ricerca; questa posizione è sostenuta prevalentemente dai Logici di formazione Filosofica, primo fra tutti Casari. Altri invece, i matematici e soprattutto Magari, erano convinti che si potesse dare subito un contributo alla ricerca anche senza conoscere approfonditamente tutte le direzioni in cui si andava evolvendo la Logica contemporanea. Magari riteneva che solo producendo subito risultati di ricerca che si inserissero nel panorama internazionale, si potesse vincere la diffidenza dell'ambiente accademico italiano verso la Logica.

Questa differenza di visioni era anche determinata, come evidenzia Casari, dalle diverse tradizioni accademiche dei filosofi e dei matematici:

> *a un filosofo si chiedeva allora, e in qualche caso fortunato si chiede ancora oggi, soprattutto quali libri e su quali argomenti egli abbia scritto; a un matematico invece soprattutto quali articoli e su quali riviste abbia pubblicato* [22].

Nonostante le divergenze, le attività del Gruppo proseguono per anni con passione ed entusiasmo. Nel 1966, grazie alle borse di studio del CNR, altri tre giovani entrano nel gruppo: Annalisa Marcja e Paolo Pagli, che erano stati studenti di Magari a Firenze, e Gabriele Lolli che era stato informato da Previale della possibilità di concorrere per la borsa. Nel 1966 anche Ruggero Ferro vince la borsa di studio per il Gruppo di Logica ma l'anno successivo lascia l'Italia per la California dove continua la sua preparazione in Logica all'UCLA seguendo i corsi di Chang e Robinson.

Negli incontri del Gruppo, i partecipanti si scambiano informazioni, idee e crescono culturalmente, espongono sia argomenti di Logica di base sia risultati recenti attraverso seminari e cicli di lezioni, con il duplice obiettivo di prepararsi alla ricerca e all'insegnamento, cioè a diffondere la conoscenza in Logica.

Lolli ricorda una introduzione sull'Algebra Universale e una sulle Categorie a cura di Servi; inoltre ricorda anche un proprio seminario sui teoremi di Löwenheim-Skolem, tenuto quando era nel gruppo da soli due mesi:

> *c'era molto da fare, ricordo per esempio che quando parlai per la prima volta all'inizio del 1967 in una riunione a Firenze sui teoremi di Löwenheim-Skolem, argomento concordato con Previale all'interno di una relazione congiunta su "Alcuni risultati sulla cardinalità dei modelli", ero molto agitato perché ero convinto che tutti dovessero già sapere quello che avrei dovuto dire, ma scoprii con mia sorpresa che non era così* [67].

Nel 1967, Magari, che era diventato professore ordinario di Algebra presso l'Università di Ferrara, subentra a Geymonat nella direzione del Gruppo.

In questo periodo Geymonat inizia a prendere le distanze dalla Logica Matematica in modo *definitivo e, in un certo senso, brusco*, come afferma Mangione in [85], *giungendo non di rado ad assumere atteggiamenti polemici contro quella che potrebbe chiamarsi una sua "creatura".* Geymonat critica la Logica Matematica, per l'*eccessiva specializzazione* e la *scarsa rilevanza filosofica.*

Ma quelle di Geymonat non sono le uniche critiche che iniziano a sollevarsi verso la fine degli anni Sessanta all'interno del Gruppo di Logica. Carlo Cellucci mette in luce in [26] che la rinascita della Logica in Italia avviene in un momento molto particolare, quasi anacronistico, se si considera che i programmi fondazionali per cui Frege, Russell, e Hilbert avevano creato la Logica Matematica, erano ormai falliti.

> *il canto del cigno della Logica sono stati i risultati sull'indipendenza del continuo di Cohen. La Logica veniva sviluppata in Italia con l'ingenuità e la passione propria dei neofiti, come se si trattasse di una disciplina nascente e dotata di un lungo e radioso avvenire.* (Cellucci in [41].)

Ciò spiega, secondo Cellucci, il motivo per cui gli interessi del Gruppo di Logica del CNR fossero inizialmente dedicati in maniera quasi esclusiva all'Algebra della Logica, tema che *non aveva molto a che fare con il tipo di Logica che era stata creata in funzione dei programmi fondazionali* [26]. Cellucci invece, già dalla tesi di laurea sugli ordinali ricorsivi, si dedica alla Teoria della Dimostrazione alla Gentzen che trae origine proprio dal fallimento dei programmi fondazionali. *Nel gruppo di logica del CNR, però, non vi era quasi alcun interesse per quelle tematiche* [26].

Un altro punto di vista critico sul lavoro del Gruppo è quello di Ruggero Ferro dopo l'esperienza all'UCLA:

> *I logici italiani, visto il confronto, mi parevano molto autodidatti: tanta gente che studiava le cose, ne vedeva gli aspetti... ma non era cresciuta in un ambiente in cui quei concetti erano nati.* (R. Ferro in [41].)

In ogni caso, grazie all'esperienza del Gruppo del CNR, si può dire che, alla fine degli anni Sessanta, la Logica in Italia si avvia ad uscire da quella che Casari ha definito *fase catacombale.*

1.5 Uscita dalla fase catacombale

Durante gli anni Sessanta il Gruppo di Logica diventa una realtà consolidata in cui si formano molti fra gli studiosi che faranno ricerca e insegneranno la Logica in Italia negli anni successivi. Tuttavia questa realtà non è ancora nota al mondo scientifico italiano come lo era ad esempio la scuola di Peano. Per questo motivo Casari parla di *fase catacombale* e cita due eventi che hanno avuto una notevole importanza per far uscire la Logica italiana allo scoperto: la Scuola estiva di Logica tenutasi a Varenna nel 1968 e il primo Seminario di Teoria dei Modelli all'Istituto di Alta Matematica di Roma nel 1969.

La scuola di Varenna ha come tema *aspects of mathematical logic* ed è organizzata dal CIME (Centro Internazionale Matematico Estivo) fondato nel 1954 da Giovanni Sansone. Alle lezioni mattutine seguono discussioni e seminari nel pomeriggio. Le lezioni vengono tenute da logici internazionali di chiara fama (Hermes, Mostowski, Robinson...) e spaziano su argomenti di Ricorsività, Teoria degli Insiemi e Teoria dei Modelli.

Il Seminario del 1969, di cui torneremo a parlare nel capitolo sulla Teoria dei Modelli, viene organizzato da Magari e vede la partecipazione, come relatori, di

Logici italiani (Casari, Mangione, Magari, Previale, Servi) accanto agli studiosi più affermati del panorama internazionale: Chang, Felscher, Morley, Shoenfield, Fraïssé e Robinson il quale, come ricorda Casari: *per manifestare il suo apprezzamento per tutti i nostri sforzi, tenne (fra la costernazione degli altri stranieri) la sua relazione in italiano* [22].

Bisogna notare peraltro che Robinson era già stato ospite presso l'Istituto di Matematica di Roma nel 1966. Casari, che lo aveva conosciuto a Lovanio nel 1958, lo aveva invitato, su incarico di Segre, a Roma per tenere un ciclo di lezioni sulla Teoria dei Modelli. Tuttavia, tra i matematici romani, solo lo stesso Segre e Lucio Lombardo Radice presero parte alle lezioni di Robinson.

Il Seminario del 1969 ha invece una maggiore risonanza e viene pertanto considerato dai logici del periodo una delle tappe fondamentali della rinascita della Logica in Italia.

1.6 La Scuola di Siena

Tra la fine degli anni Sessanta e l'inizio degli anni Settanta i logici italiani, uniti dall'esperienza del Gruppo del CNR, cominciano a organizzarsi nelle diverse sedi universitarie dando vita a vari gruppi di ricerca.

L'esempio più emblematico di gruppo di ricerca coeso e radicato in una sede universitaria è il Gruppo di Siena - di cui parleremo diffusamente nel capitolo sull'Algebra della Logica - formatosi grazie a Roberto Magari.

Nell'anno accademico 1963/64 Magari tiene a Firenze un corso per incarico di Logica presso l'Istituto di Matematica. I suoi primi temi di ricerca, in collaborazione con Mangani, riguardano i *Calcoli Generali* - generalizzazioni dei calcoli logici da un punto di vista algebrico - e l'Algebra Universale (classi filtrali e ideali di algebre). Nel 1967 Magari vince la cattedra di Algebra a Ferrara e nel 1972 diventa il primo direttore dell'Istituto di Matematica dell'Università di Siena.

In questo periodo nasce la Scuola di Siena formata da giovani studiosi che si laureano e iniziano il loro percorso di ricerca con Magari, fra di essi Laura Toti Rigatelli, Raffaella Franci, Aldo Ursini, Claudio Bernardi, Giovanni Sambin, Franco Montagna etc. (vedi capitolo sull'Algebra della Logica).

1.6.1 La Scuola di Specializzazione in Logica Matematica

Nel 1973 Magari inizia a concepire l'idea di una Scuola di Specializzazione, presso l'Università di Siena, con lo scopo di avviare i giovani laureati alla ricerca in Logica Matematica. Tuttavia la domanda che Magari inoltra al Ministero rimane in sospeso per quasi dieci anni.

Nel 1982 finalmente la Scuola di Specializzazione in Logica Matematica di Siena viene istituita. All'inizio la scuola ha durata biennale, prevede un esame di ammissione e la frequenza di corsi tenuti da docenti della scuola e da docenti ospiti; gli studenti devono sostenere 6 esami. Possono essere ammessi alla Scuola anche studenti con laurea non in Matematica ma, in tal caso, la commissione che si occupa dell'esame di ammissione può prescrivere a tali studenti un'integrazione del piano di studi, solitamente con un esame di algebra o di analisi.

Nell'anno accademico 1983/84, nonostante alcune difficoltà legate al reperimento dei fondi per le borse di studio, iniziano le attività didattiche della Scuola. Vengono ammessi sei allievi tra i quali Alessandro Berarducci che in quel periodo vince anche una borsa di studio a Berkeley, collabora con Corrado Böhm e, in un secondo momento, ottiene importanti risultati in Teoria dei Modelli. Oltre a Berarducci, fra gli altri studenti che frequentano in quegli anni la Scuola di Specializzazione di Siena, ricordiamo anche Stefano Baratella e Nazario Renzoni.
Nel primo anno della Scuola vengono attivati i seguenti corsi:

- **Logica I**, tenuto, per contratto da Dag Prawitz nei primi mesi e poi da Aldo Ursini e da Ralph McKenzie.
- **Teoria degli Insiemi**, tenuto da Roberto Magari in collaborazione con Franco Montagna ai quali subentra, nel mese di Aprile, Keith Delvin;
- **Ricorsività I**, tenuto da Claudio Bernardi a cui subentra, nel mese di febbraio, Piergiorgio Odifreddi che, in veste di docente ospite, tiene una serie di lezioni sulla Teoria dei gradi. Nel mese di maggio le lezioni sono svolte da Robert Di Paola che si occupa del Metodo della priorità.

Nella Scuola si svolgono, oltre ai corsi istituzionali, numerosi seminari, tenuti anche da studenti, e conferenze di vario genere, Ad esempio le conferenze su *Matematica e cultura* hanno un respiro più ampio rispetto alla ricerca tecnica in Logica e sono tenute da matematici come Paolo Valabrega, Francesco Speranza e Carlo Pucci.

Le tasse di iscrizione alla Scuola ammontano a 500.000 Lire all'anno più 40.000 Lire di immatricolazione. Alla fine del primo anno accademico non è ancora certa l'assegnazione delle borse di studio ministeriali per gli studenti che frequentano la Scuola. Per supplire alla situazione economicamente incerta, viene data agli studenti la possibilità di alloggiare gratuitamente presso il Collegio di Pontignano.

Nel 1985 Roberto Magari riferisce, sulle pagine di Notizie di Logica, sullo stato della Scuola: permangono le difficoltà economiche ma c'è disponibilità da parte dei logici italiani e stranieri a contribuire al progetto, in particolare collaborano come docenti Daniele Mundici, Ann Troestra, Giovanni Sambin, Keith Devlin, Mario Servi, Michele Abrusci, Dick De Jongh, Laurence Kirby e Angus Macintyre.

Nel 1986, in seguito all'intervento dell'allora rettore dell'Università di Siena, Luigi Berlinguer, vengono, per la prima volta, assegnate tre borse di studio finanziate dalla Banca Toscana. L'erogazione di tali borse continua, negli anni seguenti, grazie a una convenzione con l'Italsiel e il Monte dei Paschi di Siena. La Scuola di Specializzazione diventa quindi una realtà riconosciuta anche a livello internazionale con scambi e convenzioni con importanti università (City University of NY, Paris VII, University of Amsterdam). Verso la fine degli anni Ottanta, tuttavia, la situazione economica torna a farsi precaria e nel '90 nasce il Dottorato di Logica e Informatica Teorica che raccoglie l'eredità della Scuola.

1.6.2 Gli Incontri di Logica Matematica

A partire dal 1982, si organizzano a Siena gli *Incontri di Logica Matematica*. Si tratta di convegni che spaziano su vari temi legati alla Logica (Logica Algebrica, Teoria degli Insiemi, Ricorsività, Categorie, Teoria dei Modelli, Teoria della Dimostrazione, Logica e Informatica, Logica e Didattica) e che diventano, negli anni '70 e '80, un punto di riferimento per il mondo della Logica italiana. Sono occasioni che vengono ricordate da molti studiosi come luogo di incontro tra diverse aree di ricerca. Vedremo ad esempio, nel capitolo sulla Teoria della Dimostrazione, come il mondo della Logica italiana e quello dell'Informatica Teorica, avranno i primi scambi proprio grazie agli Incontri di Logica Matematica. A questi eventi partecipano anche Logici di chiara fama provenienti da tutto il mondo:

> *Siena era diventato un centro, un nucleo organizzativo istituzionale. Attirava tutti. Tutti quanti ci consideravamo "importanti" nel poter presentare delle relazioni agli Incontri* (E. Casari in [41])

1.6.3 Il periodico Notizie di Logica

Nel 1982 inizia anche la pubblicazione della rivista Notizie di Logica (nel seguito NdL) a cura della Scuola di Specializzazione in Logica Matematica di Siena. Il primo numero della rivista, che risale al trimestre gennaio–marzo 1982, si apre con una definizione dell'ambito di interesse della rivista che in parte vuole rispecchiare il campo di azione della ricerca in Logica in Italia:

> *Logica è Logica Matematica: il più delle volte l'aggettivo mancherà, ma sempre l'accezione sarà quella. Propendiamo comunque per un'interpretazione "ampia" del significato del termine: considereremo pertinenti anche temi che non hanno, per ora, una diretta applicazione alla matematica, e la storia della logica.* (Dal primo numero di NdL [98]).

NdL svolge negli anni '80 e '90 la funzione di notiziario informativo su vari aspetti che riguardano la Logica:

- pubblicazioni di articoli e libri da parte di logici italiani;
- convegni, seminari, conferenze e professori visitatori nelle varie sedi universitarie;
- rapporti interni degli istituti italiani e stranieri, quaderni dei vari organismi di ricerca, preprint;
- insegnamenti di Logica nelle varie università italiane e informazioni sui concorsi.

I numeri di NdL si concludono di solito con un brano di un autore di importanza storica per la Logica: Carroll, Russell, Peano, Eulero ma anche scritti critici nei confronti della Logica come la *Critica della logica formalistica* di Croce che abbiamo citato precedentemente.

Inoltre il notiziario contiene una sezione di lettere alla redazione. Questa parte diventa spesso teatro di accese polemiche fra i logici italiani su vari temi, la *vis polemica* è infatti un tratto distintivo della comunità logica italiana. A tal proposito citiamo la discussione su *Logica Matematica* e *Logica Filosofica* che si svolge nei numeri di NdL pubblicati fra 1984 e 1985. Si tratta di un'esposizione dei punti di vista, talvolta discordanti, di Lolli, Dalla Chiara e Cellucci sulla opportunità della dicitura *Logica Filosofica* e sul ruolo della Logica Matematica da strumento per la ricerca fondazionale a strumento per la pratica matematica.

Ben più aspri sono i toni di un'altra polemica, più prosaica, sul concorso a cattedre di Logica svoltosi in Italia nel 1986.

Nel 1990 NdL diventa il notiziario dell'AILA (Associazione Italiana per la Logica e le sue Applicazioni) che era stata fondata nel 1987. Si ha un avvicendamento nella direzione della rivista, da Paolo Pagli a Carlo Marchini. Il periodico cambia leggermente veste ed inizia una serie di nuove rubriche:

- Filosofia, a cura di Lolli;
- Notizie dall'AILA, a cura di Sambin;
- Logica e didattica, a cura di Ferro e Gerla (si veda il capitolo sull'insegnamento della Logica);
- La ricerca in Logica in Italia, a cura di Montagna.

1.7 Lo sviluppo delle varie Scuole di Logica

Oltre a Siena, anche altre sedi universitarie diventano, nel corso degli anni '70, centri di insegnamento e di ricerca in Logica grazie al contributo degli studiosi provenienti dal Gruppo di Geymonat.

1.7.1 Firenze

A Firenze la Logica è presente in quegli anni sia nell'Istituto di Filosofia sia nell'Istituto di Matematica. A Filosofia il gruppo di Logica si forma grazie alla presenza di Casari che nel 1967 ottiene la cattedra di Filosofia della Scienza. Egli rimane a Firenze come ordinario fino al 1998, ricoprendo anche la carica di Preside della Facoltà di Lettere nel periodo 1974-1977; dal 1998-99 viene chiamato a tenere la cattedra di Logica alla Scuola Normale Superiore di Pisa, dove è ordinario fino al 2006. A Firenze Casari si occupa della formazione di giovani ricercatori in Logica, i suoi allievi principali sono Pierluigi Minari, Andrea Cantini, Sergio Bernini, Michele Abrusci, Giovanna Corsi, Gisèle Fischer Servi, Francesco Paoli e Stefania Centrone.

Inoltre a Firenze nel 1970 ottiene un incarico di Logica anche Marialuisa Dalla Chiara che inizia ad interessarsi alla Logica Quantistica e alle Logiche Empiriche.

> *Io mi sono occupata molto di Logica Quantistica e sono convinta del fatto che il formalismo matematico della meccanica quantistica - che poi è stato usato nella Logica Quantistica classica, creata da Birkhoff e Von Neumann negli anni '30 - e anche queste nuove logiche che sono nate dalla teoria della computazione quantistica, hanno messo in luce l'interesse di questi concetti quantistici che dovrebbero riguardare il microcosmo e invece hanno un significato universale. È molto naturale applicare ad altri campi quel concetto fondamentale che fa parte del formalismo quantistico che è il concetto di sovrapposizione di stati. Perché è un concetto che, in modo molto naturale, si può usare per descrivere situazioni di ambiguità, di vaghezza, di allusività. Per esempio il concetto di sovrapposizione di*

> *stati è ideale per studiare, con metodi logici, argomenti di tipo metaforico.* (Dalla Chiara, intervista del 12/02/2021).

In quel periodo si tengono a Firenze, come a Milano precedentemente, i seminari del sabato.

> *Anche a Firenze continuò lo spirito dei seminari del sabato, avevamo proprio questa passione per il sabato!...Lo spirito del primo gruppo di Logica che era nato a Milano, in qualche modo continuò a Firenze. Però Firenze non era l'unico centro italiano della Logica...ormai il seme era stato gettato e quindi cominciò a dare tanti frutti in tanti campi.* (Dalla Chiara, intervista del 12/02/2021)

Anche a Matematica il gruppo di Logica è molto attivo. Sotto la guida di Piero Mangani, ordinario di Algebra nel 1973, lavorano Annalisa Marcja, Sauro Tulipani, e poi Francesco La Cava, Donato Saeli e Carlo Toffalori; in un secondo momento si unisce anche Daniele Mundici.

Notevoli sono le collaborazioni internazionali: all'istituto di Matematica vengono ospitati negli anni '70 e '80, Macintyre, Cherlin, Lascar e Lindström.

Nel capitolo sulla Teoria dei Modelli approfondiremo alcuni dei risultati prodotti da questo gruppo di ricerca, in particolare la caratterizzazione algebrica della *stabilità* nei lavori di Mangani e Marcja.

Inoltre Mangani nel 1973 pubblica un importante lavoro sulle MV–algebre, strutture algebriche che descrivono le logiche a più valori. Le MV–algebre erano state introdotte da Chang nel 1957 per ottenere una dimostrazione algebrica del teorema di completezza delle logiche infinito–valenti di Łukasievicz. Si tratta dell'articolo *Su certe algebre connesse con logiche a più valori* [80]. Questo tipo di strutture algebriche viene studiato anche da Casari e da Minari a testimonianza del fatto che è ancora presente, almeno su alcuni temi, la matrice comune del gruppo di Logica di Geymonat con la sua anima filosofica che dialoga con l'anima matematica.

In effetti, pur essendo i due istituti (Matematica e Filosofia) in zone diverse della città e le ricerche in ambiti non sempre vicini, c'è un senso di appartenenza alla stessa comunità:

> *Eravamo tutti amici e c'era un'interazione continua. Loro venivano a Filosofia a sentire dei seminari e noi andavamo a Matematica. All'Istituto Ulisse Dini sono venuti come visitatori Quine e Feferman, con quest'ultimo ha studiato il nostro Andrea Cantini* (Dalla Chiara, intervista del 12/02/2021)

Si vive perciò a Firenze la realtà della Logica come terreno di confine tra Matematica e Filosofia.

> *Spesso la Logica, a Matematica, era guardata con un certo sospetto. Quindi chi faceva Logica a Matematica doveva difendere il carattere strettamente matematico della Logica, non si doveva dire: "Ah, questa è Filosofia!" E viceversa: a Filosofia spesso ci giudicavano troppo matematici e poco filosofi, si seccavano perché sporcavamo troppo le cattedre con il gesso e usavamo troppo le lavagne. Ci dicevano: "ma cosa sono*

> *tutte queste formule!" Avevano l'idea che le formule fossero la negazione della Filosofia. Quindi direi che le due situazioni erano perfettamente simmetriche: i colleghi dei logici matematici gli rimproveravano di fare Filosofia e non Matematica e invece noi eravamo rimproverati di fare Matematica e che le cose che facevamo non avessero un vero interesse filosofico.* (Dalla Chiara, intervista del 12/02/2021)

Una personalità importante per la storia della Logica in Italia, che inizia il suo lavoro, come logico, a Firenze è Daniele Mundici. Mundici si laurea in Fisica nel 1970 all'Università di Modena. Dal '70 al '72 presta servizio civile come assistente all'Università di Asmara in Etiopia. Durante quel periodo Mundici studia e, in assenza di fotocopiatrici, copia a mano ben quindici libri che gli interessano. Viene in contatto quindi con testi di Hermes, Mendelson e Cohen che contribuiranno alla sua formazione in Logica da autodidatta. Tornato in Italia Mundici entra in servizio come insegnante prima nella Scuola Media e poi nel Liceo Scientifico *Castelnuovo* di Firenze. Non abbandona però gli interessi per la Logica che lo porteranno poi a studiare i possibili collegamenti fra la Logica a più valori e le C^*–algebre di operatori per la Meccanica Quantistica.

> *Mundici è una persona con tantissimi interessi, molto colta. È un grande tecnico, ha fatto lavori importantissimi, in particolare sulle logiche polivalenti, però è stato sempre molto attento all'interesse per le regioni di confine della Logica in cui possono nascere anche degli interessi filosofici.* (Dalla Chiara, intervista del 12/02/2021)

A Firenze Mundici prende contatti con il gruppo di Logica presentandosi a Mangani.

> *Per come arrivò, Mundici era un professore di scuola secondaria…Mangani lo accolse in maniera molto aperta e Mundici si inserì molto bene, diventò una sorta di "punta di diamante" di tutto quanto il gruppo.* (Toffalori, intervista del 24/04/2020)

Nella seconda metà degli anni '70 Mundici si interessa alla Teoria Astratta dei Modelli e nel 1979 pubblica un articolo sul Teorema di consistenza di Robinson.

> *Con l'avvento di Mundici le cose a Firenze cambiarono, la sua personalità, la sua capacità di portare idee nuove…a quei tempi si occupava di Teoria Astratta dei Modelli e lo faceva in maniera già eccellente a livello mondiale. Tutto ciò aprì il mio orizzonte.* (Toffalori, intervista del 24/04/2020)

La produzione di Mundici si estende su molti temi: oltre alla teoria astratta dei modelli, le C^*-algebre, la meccanica quantista e le connessioni con le logiche a più valori che abbiamo già citato, anche la logica di Łukasiewicz con infiniti valori di verità, le applicazioni alla probabilità, alla combinatoria, all'informatica teorica con codici autocorrettivi, l'interpolazione di Craig, la complessità, i giochi di Ulam, il criterio di coerenza di de Finetti e altro.

1.7.2 Milano

Nel 1987 Mundici si sposta a Milano presso il Dipartimento di Informatica come professore ordinario, la sua carriera è costellata da risultati importanti, viene invitato in molti congressi internazionali, è visitatore in istituzioni dell'Europa, dell'America latina, della Cina; è nel consiglio editoriale di una decina di riviste internazionali; le sue collaborazioni hanno portato altri a livello internazionale, come Antonio Di Nola che con i lavori sulle MV-algebre iniziati da Mundici ha fatto di Salerno un centro di ricerca di eccellenza.

A Milano, prima del trasferimento di Mundici alla fine degli anni '80, la parte matematica della Logica viene portata avanti da Giancarlo Meloni. Sul versante filosofico invece, l'eredità del gruppo di Geymonat è tenuta viva da Corrado Mangione con Edoardo Ballo, Silvio Bozzi e Giulio Giorello.

1.7.3 Torino

La scuola di Logica torinese dopo Peano, nasce grazie alla presenza di Flavio Previale, membro, come abbiamo visto, del Gruppo di Logica di Geymonat. Grazie a Previale molti studiosi vengono indirizzati alla Logica fra gli anni '60 e '70. Fra di essi Gabriele Lolli che, dopo aver studiato teoria degli insiemi negli Stati Uniti, vince nel 1975 una cattedra di Logica nel primo concorso di Logica Matematica con tre posti di ruolo nelle Facoltà di Scienze, gli altri posti vengono vinti da Previale e da Servi. Con Previale si laureano Franco Parlamento e Piergiorgio Odifreddi. Quest'ultimo, durante periodi di studio passati all'estero (fra cui Stati Uniti nel 1978 e Unione Sovietica nel 1982) lavora a un imponente trattato sulla ricorsività: *Classical Recursion Theory*, il cui primo volume esce nel 1988.

La situazione di Torino è particolare perché, oltre ai logici che si formano con Previale in ambito matematico, è presente dal 1970 al 1977 anche Corrado Böhm come professore ordinario di Informatica. Del ruolo di Böhm e del gruppo di Torino (Dezani, Coppo, Margaria, Ronchi della Rocca, Zacchi) parleremo diffusamente nel capitolo sulla Teoria della Dimostrazione in cui indagheremo il rapporto tra il mondo dell'Informatica Teorica e il gruppo dei logici italiani tra gli anni '70 e '80.

1.7.4 Pisa

Nel capitolo sulla Teoria della Dimostrazione analizzeremo anche il contributo alla storia della Logica di un'altra importante sede universitaria: Pisa.

Come vedremo, a Pisa le ricerche in Logica seguono un percorso per certi aspetti diverso dal resto dell'Italia. Ciò è dovuto alla presenza del grande matematico Ennio De Giorgi che, pur non essendo un logico, ha forti interessi per le tematiche fondazionali e promuove discussioni su tali argomenti nei seminari che si tengono nella Scuola Normale di Pisa.

Nasce così la ricerca sulle teorie degli insiemi in cui l'assioma di fondazione è sostituito dal *principio di libera costruzione* (vedi capitolo sulla Teoria della Dimostrazione).

A tali ricerche collaborano studiosi come Giuseppe Longo, Marco Forti e Furio Honsell. Come è stato affermato da Giuseppe Rosolini (comunicazione privata del 01/12/2022) Honsell ha avuto un ruolo importante nel rendere rigorose le idee di

De Giorgi. Come vedremo nel seguito, Longo, Forti e Honsell avranno un ruolo fondamentale nell'evoluzione dei rapporti fra Logica Matematica e Informatica Teorica.

1.7.5 Altre sedi universitarie

Sulla situazione dei corsi di Logica nelle varie università italiane tra gli anni '70 e '80 torneremo nel capitolo sull'insegnamento della Logica. Per ora ci limitiamo a ricordare che, oltre alle sedi appena citate, nascono scuole di Logica anche a:

- Napoli, grazie a Pantaleo Aloisio i cui corsi sono seguiti, fra gli altri, anche da Gian Giacomo Gerla.
- Padova, grazie a Giovanni Sambin che, oltre alla cattedra a Siena, ottiene nel 1981 un incarico a Padova.
- Genova, grazie ad Evandro Agazzi e in seguito a Marco Borga.
- Parma, per opera di Mario Servi e poi anche di Carlo Marchini con il quale si laurea Giuseppe Rosolini. In questo ambito si sviluppa un interesse per la Teoria delle Categorie di cui parleremo nel capitolo sulla Teoria della Dimostrazione.
- A Roma, dal 1960 al 1968, presso il Dipartimento di Matematica, Corrado Böhm si dedica al λ-calcolo e alla Logica Combinatoria collaborando con alcuni giovani ricercatori fra i quali Giuseppe Jacopini. Negli anni '70 anche altri studenti romani di Matematica si interessano alla Logica, fra di essi Maurizio Fattorosi Barnaba e Anna Labella, allieva di Lucio Lombardo Radice. Inoltre a Filosofia la cattedra di Logica viene occupata da Carlo Cellucci e, in seguito, presso l'Università di Tor Vergata, lavorano Barbara Veit e Paolo Lipparini.

1.8 La SILFS e l'AILA

La SILFS (Società Italiana di Logica e Filosofia delle Scienze) e l'AILA (Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni) sono due società scientifiche che rivestono un ruolo importante per l'istituzionalizzazione della Logica Matematica in Italia.

1.8.1 SILFS

La SILFS viene fondata a Roma nel 1950 in un periodo precedente alla rinascita della Logica. Il primo statuto risale al 22 gennaio 1951 e riporta lo scopo con il quale la società è fondata: *promuovere e favorire le ricerche sulla Logica e gli aspetti filosofici del pensiero scientifico.*

Il primo presidente è Francesco Severi e, fra i membri fondatori, ci sono anche matematici interessati ad aspetti storici e filosofici della propria disciplina, come Frajese, Vacca, Segre, D'Ancona e Zappa; c'è anche Giulio Preti, il filosofo della scienza grazie al quale Ettore Casari entra in contatto con il mondo della Logica Matematica.

Il primo articolo dello statuto afferma che *la società è aperta a tutte le varie correnti del pensiero scientifico e filosofico* e in effetti i membri della SILFS hanno rapporti positivi con il Centro di Studi Metodologici che, come abbiamo visto, costituisce negli anni '50 un tentativo di fusione fra la cultura scientifica e quella umanistica.

Nel 1955 viene fondata dall'Ingegner Valerio Tonini la rivista *La nuova critica* che contiene il notiziario della SILFS.

Nel 1960 entrano nel Consiglio della Società Geymonat e Pasquinelli - che proprio in quegli anni sono impegnati in un'opera di diffusione della nuova Logica in Italia - e Bruno de Finetti.

All'inizio degli anni Sessanta la SILFS è riconosciuta a livello internazionale tanto da rappresentare l'Italia nella *Division of Logic, Methodology and Philosophy of Science and Technology* dell'*Union of History and Philosophy of Science.* Nonostante ciò, dal 1965 al 1972, la SILFS vive un periodo di decadenza, come riportato nella seguente testimonianza di Evandro Agazzi:

> *Anch'io ero all'oscuro dell'esistenza della SILFS quando, confidenzialmente, Raymond Klibanski mi disse a Bucarest nel 1972, in occasione del Congresso di Logica, Metodologia e Filosofia della Scienza, che all'ordine del giorno dell'Assemblea Generale che si sarebbe tenuta la sera dopo era prevista la cancellazione della SILFS perché da anni si limitava a pagare la quota associativa ma non inviava alcun rapporto di attività. Chiesi ed ottenni di presenziare come osservatore all'Assemblea e in tale sede mi impegnai, al mio ritorno in Italia, a chiarire le cose e riattivare la società. Così avvenne. Io presi solo contatto con Somenzi che, all'epoca, era l'unico superstite reperibile della SILFS. In seguito seppi casualmente da Valerio Tonini che la Società era stata effettivamente fondata anni prima da illustri personaggi, fra cui Beniamino Segre.* (Mail di Evandro Agazzi a Giovanna Corsi, 2016)

Così Agazzi promuove un'assemblea di *riattivazione* della SILFS e ne diventa presidente. Nel Consiglio della Società ci sono molti nomi legati alla nuova Logica (a Geymonat e Pasquinelli si aggiungono Casari e Cellucci) ma anche studiosi di altri campi interessati alla Logica come l'algebrista Lucio Lombardo Radice e il fisico Giuliano Toraldo di Francia. Il *rilancio* della SILFS passa anche per il nuovo statuto del 1972 in cui si evidenzia il crescente interesse per i nuovi studi logici ed epistemologici. Nel periodo che va dal 1972 al 1991 la SILFS vive una fase di attività intensa con l'organizzazione di più di quindici convegni internazionali fra i quali il convegno di Santa Margherita Ligure del 1972. A partire da questo convegno Roberto Magari inizia una riflessione sui Teoremi di Gödel che lo porta a concepire i sistemi dialettici dai quali nasceranno, come vedremo nel capitolo sull'Algebra della Logica, le Algebre Diagonalizzabili.

La riflessione di Magari nasce da una divergenza di punti di vista rispetto ad Agazzi sul tema dell'incompletezza. Agazzi, come altri filosofi anche stranieri, riteneva che dai teoremi di Gödel seguisse che i sistemi assiomatici (almeno come vengono usualmente intesi in logica) fossero insoddisfacenti per parlare degli oggetti matematici. In sostanza, riteneva che dai teoremi di Gödel discendesse che l'attività matematica umana non potesse essere tradotta con algoritmi meccanici: *l'uomo è superiore alla macchina*, perché può trovare un enunciato vero ma non dimostrabile nell'Aritmetica di Peano.

Di tutt'altro avviso era Magari, che non vedeva nei teoremi di Gödel un fallimento dei sistemi formali; anzi riteneva che, nell'ambito dei teoremi di Gödel, la pretesa superiorità dell'uomo rispetto alla macchina consistesse in azioni a loro volta simulabili da una macchina.

Proprio con l'obiettivo di rendere rigorosa quest'ultima idea nascono i sistemi dialettici, che poi porteranno alle algebre diagonalizzabili. Questo percorso è emblematico del rapporto fecondo fra concezioni filosofiche e risultati tecnici nell'opera di Magari. Notiamo che in anni molto recenti i sistemi dialettici sono stati ripresi da Andrea Sorbi e altri, in un ambito strettamente tecnico.

1.8.2 AILA

L'AILA ha una storia molto diversa da quella della SILFS. Innanzitutto nasce in un momento in cui la ricerca in Logica in Italia, dopo il momento della rinascita, è già più matura. Inoltre nell'AILA c'è un'attenzione maggiore per la ricerca matematica e *tecnica* rispetto a quanto avviene nella SILFS che è una società di stampo più marcatamente filosofico ed epistemologico.

L'idea di un'associazione italiana di studiosi di Logica viene proposta da Giovanni Sambin nel 1984 sul periodico *Notizie di Logica*. Ne nasce un dibattito che coinvolge la comunità dei logici italiani e che va avanti fino alla fondazione dell'AILA il 7 febbraio 1987 a Firenze. La prima sede dell'Associazione è il Dipartimento di Matematica di Siena, centro nevralgico della Logica Italiana fra gli anni '70 e '80. I soci fondatori, presenti alla firma dell'Atto di nascita dell'AILA presso lo studio notarile Gunnella, sono Michele Abrusci, Edoardo Ballo, Corrado Böhm, Andrea Cantini, Ettore Casari, Giovanna Corsi, Maria Luisa Dalla Chiara, Mariangiola Dezani, Ruggero Ferro, Gabriele Lolli, Giuseppe Longo, Piero Mangani, Giancarlo Meloni, Franco Montagna, Daniele Mundici, Giovanni Sambin, Roberto Tortora, Sauro Tulipani e Virginia Vaccaro.

> *L'associazione ha come scopo la diffusione dello studio e della conoscenza della Logica in tutte le sue forme, l'avanzamento della ricerca e la promozione delle sue applicazioni. Essa si riconosce nelle finalità e negli obiettivi della Association for Symbolic Logic.* (Dallo Statuto del 1987)

La fondazione dell'AILA è un atto ufficiale di identità per la comunità del logici italiani. È da notare che a far parte di questa comunità, oltre ai protagonisti del periodo della rinascita della Logica, come Casari, Dalla Chiara e Lolli, ci sono anche personalità provenienti dal mondo dell'Informatica Teorica come Corrado Böhm, Mariangiola Dezani e anche Giuseppe Longo che ha seguito un percorso che si discosta dal *mainstream* della Logica Italiana patrocinata da Ludovico Geymonat. Del rapporto tra questi diversi "mondi" si parlerà nel capitolo sulla Teoria della Dimostrazione.

Come presidenti dell'AILA si alternano, negli anni, Sambin (dal 1987 al 1994), Mundici (dal 1994 al 1998), Marcja (dal 1998 al 2001), Rosolini (dal 2001 al 2005), Toffalori (dal 2005 al 2017), Di Nola (dal 2017 al 2020) e Ghilardi (dal 2020 a oggi).

Lo Statuto della Società è stato riscritto nel 2011 e ultimamente nel 2022. La sede dell'AILA varia automaticamente con la nomina del nuovo Presidente coincidendo con la sua sede universitaria. Ad oggi l'associazione ha circa 200 soci.

Capitolo 2

L'Algebra di Magari: storia di un'idea

In questo capitolo ci concentriamo su alcuni risultati ottenuti in Algebra della Logica in Italia tra gli anni '70 e '80. In particolare vedremo la genesi di una struttura algebrica ad opera di Roberto Magari e del gruppo di ricerca da lui formato nell'Università di Siena negli anni '70. Nella nascita di quest'idea, le problematiche filosofico fondazionali, gli interessi logici e le tecniche algebriche si fondono creando un terreno fertile per i giovani ricercatori protagonisti di questa storia.

Per contestualizzare l'interesse di Roberto Magari per l'Algebra della Logica bisogna risalire al suo incontro con il gruppo di Logica Matematica del C.N.R. fondato e diretto da Ludovico Geymonat.

Magari entrò in contatto con il gruppo di Geymonat nel 1962 insieme a Pietro Mangani e, secondo quanto riportato in [104] chiese a Geymonat dei riferimenti bibliografici per approfondire temi di Algebra della Logica. A tale richiesta rispose Corrado Mangione, già nel gruppo del C.N.R., proponendo tre titoli: P. R. Halmos, *Algebraic Logic* (1962); L. Henkin, *La structure algébrique des théories mathématiques* (1956), e R. Sikorski, *Boolean Algebras* (1960). *Il primo di questi sarà fondamentale per l'avvio allo studio dell'algebra della logica, che porterà ad un insieme di ricerche e lavori*, alcuni dei quali con Piero Mangani. *Essi rappresentano il primo interesse autonomo di Magari. Lo strumento costituito dalle algebre di Boole rimarrà fondamentale in tutta la sua attività successiva di ricerca* [104].

Gabriele Lolli, a proposito della propria partecipazione alle riunioni del gruppo di Logica Matematica del C.N.R., ricorda come la maggior parte dei componenti del gruppo fossero dediti più allo studio e all'aggiornamento sui temi di Logica provenienti dalle ricerche internazionali, che alla produzione di propri risultati; solo pochi, in quella prima fase, si dedicavano a ricerche originali; fra questi c'era Roberto Magari:

> *... alcuni, ma pochi, i "Fiorentini" [Magari e Mangani] già "lavoravano" perché già avevano imparato a fare il mestiere del matematico, quindi sapevano tirar fuori il "risultatino"... poi fecero anche dei "risultatoni"*
>
> Lolli (intervista del 12/02/2020)

Nell'anno accademico 1971/72 la Facoltà di Scienze dell'Università di Siena, inaugura il corso di laurea in Matematica e affida a Roberto Magari la cattedra di Algebra e l'organizzazione del nascente Istituto di Matematica.

A Siena lo seguono Laura Toti Rigatelli, Raffaella Franci e tutti i suoi allievi più giovani. Già dal 1968 infatti, quando era Professore straordinario di Algebra a Ferrara, le ricerche di Magari sull'algebra universale[1] avevano iniziato ad attrarre studenti da altre sedi universitarie, i quali lavorarono alle loro tesi di laurea con Magari pur avendo, per motivi legali, come relatori dei docenti delle rispettive sedi.

Fra di essi Aldo Ursini che si laurea con una tesi dal titolo *Sulla teoria metamatematica degli ideali* (Università di Napoli, A.A. 1969-70), Claudio Bernardi, *Sull'unione di classi filtrali* (Università di Pavia, A.A. 1970-71), Giovanni Sambin, *Su una estensione del concetto di prodotto ridotto* (Università di Padova, A.A. 1970-71), Franco Montagna, *Operatori su classi di algebre* (Università di Pavia, A.A. 1971-72). Questi giovani studiosi, insieme a Giuliana Gnani, Giuliano Mazzanti, Paolo Pagli, Piero Macchi e altri, costituiscono, nell'Università di Siena, il primo nucleo di un gruppo di ricerca che sarà molto attivo negli anni successivi, il *gruppo di Siena*. In seguito si uniranno al gruppo anche Stefano Stefani, Massimo Mirolli, Fabio Bellissima, Silvio Valentini e, dopo qualche anno, Andrea Sorbi.

Nel 1972 l'interesse di Magari si volge al predicato di dimostrabilità di Gödel. A quanto dicono Pagli [104] e Sambin [17] la causa scatenante di questo nuovo interesse di ricerca è la partecipazione ad un congresso sui fondamenti della matematica di stampo filosofico tenutosi a Santa Margherita Ligure nel giugno di quell'anno. In quell'occasione avrà modo di parlare con Arend Heyting e gli interventi del convegno lo stimoleranno ad approfondire la natura e la portata dei teoremi limitativi. A detta di Sambin [17] Magari era rimasto negativamente colpito da come i teoremi di incompletezza di Gödel erano stati interpretati da alcuni studiosi presenti al convegno.

In effetti Magari, trovava *assai discutibile* ([74], [75]) dedurre dai teoremi limitativi delle *pretese conseguenze filosofiche* come, ad esempio, la tesi di una *superiorità umana sulle macchine*.

Tuttavia le discutibili interpretazioni filosofiche non erano, in quel periodo, l'unico ostacolo epistemologico nei confronti dei teoremi di Gödel; ancora trent'anni dopo la loro formulazione, alcuni aspetti tecnici non erano stati completamente assimilati. Ciò è dovuto, probabilmente, anche alla complessità intrinseca e all'esposizione non sempre chiara dei risultati originali. Tali difficoltà vennero superate grazie alla pubblicazione dei primi manuali di Logica [91] e dell'importante testo di divulgazione di Nagel e Newman [97].

A proposito del forte impatto dei teoremi di Gödel e delle difficoltà nell'accettarli da parte della cultura scientifica italiana, citiamo un articolo di L.Lombardo Radice del 1951 *Ordinali transfiniti e principio del terzo escluso, a proposito di*

[1]Magari, in seguito alla lettura di *Universal Algebra* di P. M. Cohn aveva cominciato ad interessarsi a questa disciplina, allora poco coltivata in Italia, alla quale darà contributi importanti con le sue ricerche sulle *classi filtrali* e gli *ideali di algebre*. Queste ricerche originali lo faranno entrare in contatto con alcuni dei massimi esperti di Algebra Universale come George M. Bergmann e Georg Grätzer (autore di un altro testo, *Universal Algebra* , importante per Magari) e saranno anche alla base della relazione della Commissione giudicatrice che gli attribuirà l'ordinariato di Algebra a Siena [104].

un ragionamento del Gödel [70] in cui l'autore solleva dubbi sulla correttezza delle argomentazioni gödeliane. Nel Giugno 1958, Alonzo Church scriverà, sul Journal of Symbolic Logic una recensione molto critica di tale scritto di Lombardo Radice, liquidandolo in poche righe che riportiamo:

> *The author first discusses the rejection of the law of excluded middle by mathematical intuitionists, and misunderstanding their position, objects that intuitionists' examples are of undecided rather than clearly undecidable propositions. Then he turns to Gödel's incompleteness theorem, which he calls Gödel's refutation of the law of excluded middle. He refers to Poincaré's objection against impredicative definition. Hence relying on Gödel's preliminary heuristic account rather than on the detailed proof of the incompleteness theorem, he reaches the conclusion that - on pain of impredicativity - Gödel's undecidable sentence cannot belong to the enumeration of the (well-formed) formulas of the system, but must be an ω–th formula. And this continues into the transfinite. Therefore the deducible formulas (or theorems) of the system, it is said, must be not enumerable.* (Alonzo Church [29])

Situazione analoga, sempre in Italia, riguarda gli studi di Francesca Rivetti Barbò che più volte assumono posizioni critiche nei confronti dei lavori di Gödel. In particolare si veda il suo testo *Il teorema e il corollario di Gödel, indagine critica* [116], che viene recensito in un numero del Bollettino dell'U.M.I del 1965 da Ettore Casari il quale analizza le argomentazioni della Rivetti Barbò mostrando che tali argomentazioni si imperniano, a suo dire, su un *errore di fondo…l'errore consistente nella confusione tra simboli e simbolizzati ovvero, in terminologia classica, uno scambio di "suppositiones"* [24].

Abbiamo citato questi esempi per dare un'idea del contesto in cui Magari decise di dedicare i suoi studi all'analisi dei risultati limitativi di Gödel.

Una volta tornato a Siena (dopo il congresso di Santa Margherita Ligure) *Magari iniziò immediatamente una lunga e profonda investigazione sul fenomeno dell'incompletezza, con l'intento di fornire una risposta incontrovertibile e definitiva a tali interpretazioni fuorvianti* [17]. Magari inizia quindi a studiare i cosiddetti *sistemi dialettici* guidato dall'idea di immaginare dei sistemi logici che si distinguono dai sistemi formali perché presentano una evoluzione, nella loro struttura assiomatica, per mezzo di un meccanismo di "tentativi ed errori", *il suo scopo era, grosso modo, quello di introdurre l'idea di una macchina che possa commettere errori* [17] e simuli il modo di procedere della comunità matematica.

Questi studi confluiscono in due articoli [74] e [75] e vengono da Magari esposti ai suoi collaboratori durante numerosi seminari tra il '72 e il '73. Il seminario è, per il gruppo di Siena, un importante momento di studio, crescita personale e condivisione; Bernardi, Pagli[2] e Sambin ricordano distintamente dei seminari, tenuti da Magari, in cui *si studiava il Rogers … pagina per pagina.*

In questo contesto nasce, attorno al 1973, l'idea di studiare la traduzione algebrica del predicato di dimostrabilità. Lo scopo principale di questo studio è quello di descrivere, da un punto di vista algebrico, le caratteristiche che rendono

[2] Intervista del 17 Gennaio 2020.

l'Aritmetica di Peano, *parzialmente autologa.* In particolare ci si riferisce al *lemma di diagonalizzazione* che viene posto alla base della dimostrazione del I Teorema di Gödel in varie esposizioni ([56], [46]).

Nel lavoro di Magari e dei suoi collaboratori, il lemma di diagonalizzazione viene tradotto all'interno di una struttura algebrica, l'*algebra diagonale.* Tale denominazione era già stata usata da Jerzy Płonka nel 1966 per indicare altri tipi di strutture algebriche; probabilmente per questo motivo viene a volte usato il nome *algebre diagonalizzate* per indicare le strutture studiate da Magari. La base per la costruzione di queste nuove strutture è costituita dalle Algebre di Lindenbaum, ossia algebre di Boole i cui elementi sono classi di equivalenza di formule logiche.

2.1 Algebre di Lindenbaum

Descriviamo le algebre di Lindenbaum partendo dalle formule del calcolo proposizionale. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio proposizionale, si consideri un calcolo proposizionale in tale linguaggio. Le proposizioni sono *formule ben formate* nel linguaggio $\mathcal{L}$ costruite a partire da un insieme non vuoto di lettere proposizionali A, B, C... componendole mediante i connettivi $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Dal punto di vista semantico, un *modello* per il calcolo proposizionale è una attribuzione dei valori di verità Vero o Falso (1 o 0) alle lettere proposizionali. Mediante le tavole di verità si ottengono quindi i valori di verità delle formule ben formate del calcolo delle proposizioni. In particolare si individuano le *tautologie* ovvero quelle formule che sono vere per qualsiasi valore di verità assegnato alle loro lettere proposizionali. Per indicare che la formula α è una tautologia si usa il simbolo seguente

$$\models \alpha$$

mentre per esprimere che ogni assegnazione di valori di verità alle lettere proposizionali che rende vera la formula α rende vera anche la formula β, cioè che ogni modello di α è anche un modello di β, si usa il seguente simbolo

$$\alpha \models \beta$$

in questo caso si dice anche che *β è conseguenza logica di α.*

Tra le formule del calcolo delle proposizioni è definita, oltre alla nozione *semantica* di conseguenza logica, anche la nozione *sintattica* di *derivabilità.* Per definire la derivabilità per le formule ben formate, si fissano degli assiomi logici e delle regole di deduzione. Si definisce quindi una *dimostrazione* come una procedura *finitaria* che, a partire dagli assiomi, produce, in un numero finito di passi, una formula ben formata, mediante l'applicazione delle regole di deduzione (per l'apparato deduttivo di un calcolo logico si veda [91]). Per esprimere che una formula α è *derivabile* in un calcolo S usiamo il seguente simbolo:

$$\vdash_S \alpha$$

il cui significato è, *la formula α può essere derivata nel sistema formale (calcolo logico) S.* Talvolta il simbolo S può essere omesso, se è chiaro dal contesto di quale sistema logico si tratta.

Anche nel caso sintattico possiamo utilizzare il simbolo:

$$\alpha \vdash_S \beta$$

che ha il significato di *la formula β può essere derivata nel sistema S aggiungendo agli assiomi di S, la formula α e usando le regole di deduzione.*
È possibile definire, nell'insieme delle formule, la seguente relazione di equivalenza

$$\alpha \approx \beta \quad \text{se e solo se} \quad \vdash_S \alpha \leftrightarrow \beta$$

Nel calcolo delle proposizioni, l'aspetto sintattico e quello semantico sono strettamente collegati dal *teorema di completezza* il quale afferma che:

$$\alpha \vdash \beta \quad \text{se e solo se} \quad \alpha \models \beta$$

Pertanto la relazione di equivalenza precedentemente introdotta può essere riformulata come segue

$$\alpha \approx \beta \quad \text{se e solo se} \quad \vdash_S \alpha \leftrightarrow \beta \quad \text{se e solo se} \quad \models \alpha \leftrightarrow \beta$$

Passando al quoziente, si può quindi definire una struttura i cui elementi sono le classi di equivalenza delle formule rispetto alla relazione appena introdotta.

$$[\alpha] = \{\beta \in S | \beta \approx \alpha\}$$

Nell'insieme delle classi di equivalenza introduciamo le operazioni seguenti:

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha \vee \beta]^3$$

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$$

$$[\alpha]' = [\neg\alpha]^4$$

Si vede, per mezzo delle regole del calcolo logico, che le precedenti definizioni sono ben poste perché indipendenti dai rappresentanti scelti per le rispettive classi di equivalenza. Inoltre definiamo gli elementi:

$$1 = [\alpha \vee \neg\alpha] \quad \text{e} \quad 0 = [\alpha \wedge \neg\alpha]$$

con α formula qualsiasi del calcolo proposizionale. Quindi 1 è definito come la classe di equivalenza di tutte le tautologie e 0 è definito come la classe di equivalenza di tutte le contraddizioni.

Si verifica che l'insieme delle proposizioni, quozientato secondo la relazione di equivalenza introdotta e dotato delle precedenti operazioni e delle costanti 0 e 1, è un'algebra di Boole, detta Algebra di Lindenbaum.

[3] Abbiamo utilizzato i somboli $+$ e $\cdot$ per indicare le operazioni booleane, invece dei più attuali $\wedge$ e $\vee$, per due motivi: evitare la confusione con i connettivi e mantenere le notazioni utilizzate nel momento storico in cui le idee esposte in questo capitolo si sono formate.

[4] Qui e nel seguito il simbolo $'$ indica l'operazione booleana di complementazione. Spesso nella letteratura dell'epoca in cui alcuni dei risultati di questo capitolo sono stati trovati (anni '70 del '900) il simbolo per il complemento era ν.

Usando le regole del calcolo delle proposizioni, si può dedurre che

$$[\alpha \to \beta] = [\neg\alpha \vee \beta] = [\alpha]' + [\beta]$$

per questo motivo, si utilizza talvolta il simbolo di implicazione anche tra gli elementi dell'algebra, intendendo che:

$$[\alpha] \to [\beta]$$

è un altro modo per scrivere

$$[\alpha]' + [\beta]$$

Osserviamo che, come accade in generale nelle Algebre di Boole, è possibile introdurre una relazione d'ordine:

$$a \leq b \quad \text{se e solo se} \quad a \cdot b = a$$

Nel caso delle proposizioni si ha quindi:

$$[\alpha] \leq [\beta] \quad \text{se e solo se} \quad [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha] \quad \text{se e solo se} \quad [\alpha \wedge \beta] = [\alpha]$$

ciò accade se e solo se $\models (\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha)$ ovvero, grazie al teorema di completezza, se e solo se $\vdash (\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha)$. Si noti che l'implicazione $p \wedge q \to p$ è una tautologia quindi è sempre deducibile nel calcolo degli enunciati.

Pertanto si ha $\vdash (\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha)$ se e solo se $\vdash (\alpha \to \alpha \wedge \beta)$ e ciò è equivalente a $\vdash (\alpha \to \beta)$ dato che la proposizione α è banalmente conseguenza logica di se stessa.

Riassumendo abbiamo:

$$[p] \leq [q] \qquad \text{se e solo se} \qquad \vdash p \to q$$

Notiamo che la formula $\vdash p \to q$ equivale, grazie al cosiddetto *teorema di deduzione*, all'espressione $p \vdash q$.

Un discorso analogo a quello fatto per le proposizioni, vale anche per i predicati, cioè per le formule costruite in un linguaggio predicativo $\mathcal{L}$ del primo ordine che contenga simboli di costante, $a, b, c...$, variabili individuali, $x, y, z, ...$, simboli di funzione, $f(x), g(x, y), ...$, simboli di relazione, $P(x), R(x, y)$, i connettivi, $\neg, \wedge, \vee, \to$, $\leftrightarrow$ e i quantificatori, $\exists, \forall$.

Per quanto riguarda l'aspetto sintattico, il calcolo predicativo può essere formulato, come il calcolo degli enunciati, in vari modi a seconda degli assiomi e delle regole di deduzione scelte (si vedano a tale proposito i sistemi di deduzione *alla Hilbert*, la *deduzione naturale* e il *calcolo dei sequenti*, [91], [1]).

Dal punto di vista semantico invece, si segue solitamente la *semantica di Tarski* per dare una interpretazione ai termini e alle formule predicative in un modello.

In ogni caso l'aspetto semantico e quello sintattico sono messi in relazione, come nel caso della logica proposizionale, dal *teorema di completezza* la cui dimostrazione, dovuta a Gödel (1930), è più articolata di quella relativa al caso proposizionale.

Teorema 1 (completezza). *Data una qualsiasi formula α del calcolo dei predicati, si ha:*

$$\vdash \alpha \qquad \textit{se e solo se} \qquad \models \alpha$$

Anche nell'insieme dei predicati possiamo introdurre la relazione di equivalenza:

$$\alpha \approx \beta \qquad \text{se e solo se} \qquad \vdash \alpha \leftrightarrow \beta \quad (\models \alpha \leftrightarrow \beta)$$

e nell'insieme delle classi di equivalenza si possono introdurre le stesse operazioni già viste nel caso proposizionale. Si ottiene quindi ancora un'algebra booleana, l'Algebra di Lindenbaum per i predicati, dotata anch'essa di una relazione d'ordine:

$$[p] \leq [q] \qquad \text{se e solo se} \qquad \vdash p \rightarrow q$$

Notiamo che, in questo caso, l'equivalenza tra $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ e $\alpha \vdash \beta$ richiede un po' più di accortezza. Infatti se il passaggio da $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ a $\alpha \vdash \beta$ risulta quasi automatico applicando la regola del *Modus Ponens* che, in diverse forme, è presente nei vari sistemi deduttivi, il viceversa necessita di qualche cautela aggiuntiva. Infatti il citato teorema di deduzione, che comporta il passaggio da $\alpha \vdash \beta$ a $\vdash \alpha \rightarrow \beta$, vale sotto opportune ipotesi nell'applicazione delle regole di deduzione alle formule contenenti variabili libere (vedi [91]).

Fin qui abbiamo descritto, per sommi capi, come le algebre di Lindenbaum traducano i linguaggi formali della logica in *calcoli* algebrici, cioè in *algebre* dotate di operazioni $(+, \cdot, ')$.

Precisiamo che, nei paragrafi precedenti, abbiamo introdotto le algebre di Lindenbaum per il calcolo delle proposizioni e dei predicati. In modo analogo è possibile studiare algebre di Lindenbaum per specifiche teorie aggiungendo, agli assiomi del calcolo logico, gli assiomi specifici della teoria in questione. Nel seguito tratteremo l'algebra di Lindenbaum relativa all'aritmetica di Peano formalizzata al prim'ordine.

Il procedimento descritto, detto *algebrizzazione della logica*, è il risultato di numerose ricerche portate avanti nei secoli come è stato messo in luce da Paolo Freguglia in [48]. Possiamo infatti far risalire ad Augustus De Morgan (1806-1871) l'idea di inquadrare il *sillogismo aristotelico* e in particolare l'operazione di *eliminazione del termine medio* in un contesto matematico relazionale; nonostante ciò De Morgan *non si spinge oltre la mentalità della sillogistica*. Infatti, prima dell'opera di George Boole (1815-1864) la logica *formale* e in generale l'applicazione di tecniche matematiche alla logica si limita essenzialmente alla trattazione del sillogismo aristotelico.

Boole contribuisce in modo importante a rinnovare alcuni aspetti della logica riguardanti il linguaggio e le operazioni su di esso. In particolare vengono precisati i simboli del linguaggio logico, che viene inteso come *strumento del ragionamento*, e vengono esplicitate le leggi per combinare tali simboli (*Mathematical Analysis of Logic* (1847), *An Investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities* (1854)). Boole afferma, nell'introduzione dell'*Analysis*, di aver ritrovato un certo interesse per la logica seguendo la polemica fra W. Hamilton e De Morgan, a proposito della quantificazione del predicato:

> *Nella primavera di quest'anno la mia attenzione fu attratta dalla disputa allora sorta fra Sir William Hamilton ed il prof. De Morgan, e l'interesse che tale disputa suscitò in me mi indusse a riprendere la traccia, ormai quasi dimenticata, di antiche ricerche.*

L'aspetto peculiare di questo *rinnovato interesse* risiede nell'approccio innovativo di Boole, incentrato sul concetto di *quantità* e fortemente legato all'apparato relazionale strutturale della matematica. Tale apparato, proprio in quel periodo storico, in Inghilterra, era al centro di una trasformazione, dal punto di vista notazionale, ad opera della *Scuola Algebrica di Cambridge* (nata nel 1812 con la costituzione della Cambridge Analytical Society, raggruppava insigni matematici quali G. Peacock, J. Herschel e W. Whewell). Fu proprio Peacock ad introdurre il *principio di permanenza delle proprietà formali*—poi espresso in maniera più esplicita da H. Hankel nel 1867— il quale ci dà una misura dell'importanza attribuita all'aspetto simbolico dalla *Scuola Algebrica di Cambridge*.

Il cambiamento di impostazione simbolica dell'Analisi e dell'Algebra, che metteva in risalto l'aspetto sintattico di queste discipline, deve aver probabilmente influenzato Boole, che aveva lavorato in Analisi. Proprio la formazione di analista gioca un ruolo fondamentale nel suo approccio alla Logica, in particolare il suo procedimento logico detto *sviluppo* è mutuato dallo sviluppo delle funzioni in serie di Mac Laurin [48].

La sistemazione assiomatica delle idee di Boole avviene, nei primi del '900 ad opera di Edward V. Huntington in *Sets of independent postulates for the Algebra of Logic* (1904). Qui abbiamo l'esposizione di un insieme di assiomi per un'algebra di Boole $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$, costituita da un insieme B i cui elementi vengono indicati con la variabili $x, y, z, ...$, 0 e 1 sono due costanti e $+, \cdot, '$ sono le operazioni.

Il primo sistema di assiomi di Huntington è il seguente

$$\text{Se } x \in B \text{ e } y \in B \text{ allora } x + y \in B \text{ e } x \cdot y \in B \tag{2.1}$$
$$x + y = y + x \tag{2.2}$$
$$x \cdot y = y \cdot x \tag{2.3}$$
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \tag{2.4}$$
$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \tag{2.5}$$
$$x + 0 = x \tag{2.6}$$
$$x \cdot 1 = x \tag{2.7}$$
$$x + x' = 1 \tag{2.8}$$
$$x \cdot x' = 0 \tag{2.9}$$
$$1 \neq 0 \tag{2.10}$$

Bisogna notare che tale sistema di assiomi è stato adattato da Huntington, da un analogo sistema presentato da Whitehead nella sua opera *Universal Algebra* del 1898. Inoltre la nozione di dualità, centrale negli assiomi di Huntington, in particolare fra gli operatori $+$ e $\cdot$ e fra le costanti 0 e 1, era già emersa nei lavori logici di Peano (si veda a tal proposito *Notations de logique mathématique* del 1894).

Queste sono le tappe fondamentali che hanno portato alla definizione di quelle strutture algebriche che sono state riprese da Lindebaum, e contemporaneamente da Tarski, per trattare in modo algebrico i calcoli logici. In particolare, come abbiamo visto, le algebre di Lindenbaum permettono di *algebrizzare* il calcolo logico classico.

Tuttavia nell'algebra di Lindenbaum, *il ruolo dei quantificatori ed in generale di altri operatori logico-linguistici è assai poco messo in evidenza, c'è quindi la necessità di far corrispondere a tali operatori altrettanti operatori algebrici. In questo modo* *l'impostazione algebrico-logica acquista effettivamente un aspetto più completo di matematizzazione delle teorie formali* [48].

Questa esigenza viene avvertita in maniera più urgente in seguito ai teoremi di Gödel e alla conseguente enfasi posta sulla formalizzazione delle teorie matematiche e della metamatematica stessa.

Due possibili approcci per studiare il calcolo predicativo in termini algebrici, consistono nell'introduzione delle *algebre cilindriche* ([129], [57]) e delle *algebre poliadiche* ([59]) che hanno lo scopo seppur per vie diverse di caratterizzare in modo algebrico i quantificatori. Un'altra via *intermedia* è quella seguita da R. Magari e dalla Scuola di Siena per *trasferire sul piano algebrico l'aspetto parzialmente autologo di certi sistemi* [76] .

2.2 Algebre Diagonali

Con la dicitura *certi sistemi* Magari si riferisce alle teorie formali, come l'*aritmetica di Peano*, formalizzata al primo ordine, che hanno mostrato, in seguito ai risultati di Gödel (1931), il loro *carattere parzialmente autologo.* Si tratta del fenomeno dell'*autoreferenzialità* grazie al quale, in una teoria formalizzata, come l'aritmetica di Peano, è possibile costruire formule (predicati) che esprimono proprietà della teoria stessa, ovvero delle affermazioni metamatematiche. Usando un linguaggio evocativo si può affermare che, tramite i procedimenti di Gödel, l'aritmetica riesce a *parlare di se stessa.* In particolare nelle dimostrazioni dei teoremi di Gödel si fa uso del predicato $\mathbf{Teor}(x)$[5] il cui significato è *esiste una dimostrazione della formula che corrisponde a* x.

Per precisare la questione consideriamo un sistema formale (PA) per l'aritmetica di Peano formalizzata al primo ordine, fissando *alfabeto*, *termini* e *formule* in un linguaggio predicativo che comprende il simbolo di costante $\mathbf{0}$, il simbolo relazionale di uguaglianza e i simboli di funzione di successore S, somma e prodotto. Inoltre agli assiomi logici del linguaggio predicativo con uguaglianza vengono aggiunti gli assiomi tipici della teoria PA, in particolare quelli riguardanti il successore ($\mathbf{0}$ non è il successore di alcun numero, e l'operazione di successore è iniettiva), le definizioni *ricorsive* di somma e prodotto e il principio di induzione formalizzato al I ordine:

$$(\alpha(0) \wedge \forall x(\alpha(x) \to \alpha(S(x)))) \to \forall x \alpha(x) \qquad \text{al variare di } \alpha \text{ tra le formule di PA.}$$

Inoltre si definisce una funzione iniettiva che associa ad ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$, un termine di PA detto numerale di n e indicato con il simbolo $\overline{n}$. La corrispondenza è definita in modo che

$$\overline{0} = \mathbf{0} \qquad \text{e} \qquad \overline{n+1} = S(\overline{n})$$

Inoltre si riesce a definire una corrispondenza iniettiva e *calcolabile* in modo da associare a ogni formula α di PA un numero naturale detto il gödeliano di α e indicato con il simbolo $\ulcorner \alpha \urcorner$. Ci sono diversi modi, sostanzialmente equivalenti, per

[5] Per il predicato di *dimostrabilità* sono state usate diverse notazioni, nel lavoro originale di Gödel [56] viene indicato con $\mathbf{Bew}(x)$, nei lavori degli anni '70 Magari usa la notazione $\dot{T}(x)$ [76]. Noi nel seguito utilizzeremo il simbolo $Th(x)$.

costruire tale corrispondenza ([91], [1]); l'idea di base è assegnare ad ogni simbolo u del linguaggio formale, un numero $\ulcorner u \urcorner$ (il suo gödeliano). Data poi una formula α che può essere considerata come una stringa di simboli del linguaggio nel modo seguente

$$\alpha = u_1 u_2 ... u_k$$

si associa ad essa il gödeliano

$$\ulcorner \alpha \urcorner = 2^{\ulcorner u_1 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner u_2 \urcorner} \cdot ... \cdot p_k^{\ulcorner u_k \urcorner}$$

dove p_k è il k-esimo numero primo. La corrispondenza così definita non è suriettiva (esistono numeri naturali che non sono gödeliani di alcuna formula) ma è iniettiva. Infatti dato un gödeliano è possibile risalire alla formula da cui esso proviene tramite la scomposizione in fattori. In modo analogo si può associare un gödeliano anche alle sequenze di formule, e quindi alle dimostrazioni formalizzate in PA.

Per completare il quadro teorico alla base dei teoremi di Gödel, è bene ricordare il concetto di *rappresentabilità* o *numerabilità* di una relazione, o di una funzione, in PA.

Definizione 1. Sia $\alpha(x_1, x_2, ..., x_n)$ una formula di PA e $R \subseteq \mathbb{N}^n$ una relazione in $\mathbb{N}^n$. Si dice che

- la formula α numera (o rappresenta) R se, dati $(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$ si ha:

$$(k_1, ..., k_n) \in R \qquad \text{se e solo se} \qquad \vdash \alpha(\overline{k_1}, ..., \overline{k_n})$$

- la formula α binumera R se, dati $(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$ si ha:

$$(k_1, ..., k_n) \in R \qquad \text{se e solo se} \qquad \vdash \alpha(\overline{k_1}, ..., \overline{k_n})$$

  e

$$(k_1, ..., k_n) \notin R \qquad \text{se e solo se} \qquad \vdash \neg\alpha(\overline{k_1}, ..., \overline{k_n})$$

Le nozioni di numerabilità e di ricorsività sono collegate dai seguenti risultati.

Teorema 2. *Sono binumerabili tutte e sole le relazioni ricorsive e sono numerabili tutte e sole le relazioni ricorsivamente enumerabili.*

Teorema 3. ***S**ia $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ una funzione totale ricorsiva. Allora esiste una formula $\alpha(x_1, ..., x_n, x_{n+1})$ che binumera il grafico di f e tale che:*

$$\vdash \forall x_1 ... \forall x_n \exists! y \alpha(x_1, ..., x_n, y)$$

dove il simbolo $\exists!$ significa "esiste ed è unico". In altri termini la formula $\exists! y \beta(y)$ è una abbreviazione per la formula $\exists y(\alpha(y) \wedge \forall x(\alpha(x) \to x = y))$.

Si può quindi dimostrare che:

Teorema 4.

- *L'insieme dei gödeliani degli assiomi di PA è ricorsivo;*
- *l'insieme dei gödeliani delle dimostrazioni di PA è ricorsivo;*

- *l'insieme dei gödeliani dei teoremi di PA è ricorsivamente enumerabile.*

Grazie all'ultimo punto del teorema precedente e al teorema 2 possiamo introdurre una formula in PA, che indicheremo con $Th(x)$, che rappresenta i teoremi di PA nel senso prima esplicitato. Il *significato* del predicato $Th(x)$ è *x è un teorema.* In modo più preciso la formula può essere tradotta con la frase *esiste una dimostrazione della formula il cui gödeliano ha numerale x.* Infatti la formula $Th(x)$ ha la seguente forma:

$$Th(x) = \exists y \mathrm{Prov}(y, x)$$

dove $\mathrm{Prov}(y, x)$ è una formula priva di quantificatori che esprime la frase *y è il numerale del gödeliano di una dimostrazione della formula che ha come numerale del gödeliano x.*

Il predicato $Th(x)$ soddisfa una serie di proprietà che elenchiamo di seguito e che si rivelano di fondamentale importanza nelle dimostrazioni dei teoremi di Gödel e di alcuni importanti risultati algebrici.

Teorema 5. *Siano p e q formule chiuse di PA, allora:*

T1 *Se $\vdash p$ allora $\vdash Th(\overline{\ulcorner p \urcorner})$;*

T1' Nel caso in cui si ammetta l'ω–coerenza[6] di PA, vale anche il viceversa della proprietà T1 ovvero *se $\vdash Th(\overline{\ulcorner p \urcorner})$ allora $\vdash p$;*

T2 *Se $\vdash Th(\overline{\ulcorner p \to q \urcorner})$, allora $\vdash Th(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \to Th(\overline{\ulcorner q \urcorner})$;*

T3 $\vdash Th(\overline{\ulcorner p \to q \urcorner}) \to \Big(Th(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \to Th(\overline{\ulcorner q \urcorner})\Big)$;

T4 $\vdash Th(\overline{\ulcorner p \wedge q \urcorner}) \leftrightarrow \Big(Th(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \wedge Th(\overline{\ulcorner q \urcorner})\Big)$;

T5 $\vdash Th(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \to Th(\overline{\ulcorner Th(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \urcorner})$;

Notiamo che le proprietà **T1** e **T1'** esprimono il fatto che, sotto l'ipotesi di ω–coerenza, l'insieme dei teoremi di PA è *numerato* dalla formula $Th(x)$, nel senso precedentemente esplicitato. Ciò, grazie al teorema 2, equivale ad affermare che l'insieme dei teoremi di PA è ricorsivamente enumerabile.

L'ultima delle proprietà precedenti (**T5**) viene dimostrata da Löb in [66] come lemma per arrivare ad un suo risultato, detto *Teorema di Löb* su cui ritorneremo in seguito.

Altro *ingrediente* fondamentale nella dimostrazione dei risultati limitativi di Gödel, insieme al predicato $Th(x)$, è il **lemma di diagonalizzazione** ([56], [46]) il quale, grazie al suo carattere di autoreferenzialità, racchiude i *principali aspetti paradossali dell'autologia.*

Lemma 1 (diagonalizzazione)**.** *Sia $\alpha(x)$ una formula di PA con esattamente una variabile libera x. Allora esiste una formula chiusa p tale che*

$$\vdash p \leftrightarrow \alpha(p)$$

[6] Un sistema formale per l'aritmetica si dice ω-coerente se non contiene alcuna formula $\alpha(x)$ tale che $\vdash \exists x \alpha(x)$ e per ogni n si ha $\vdash \neg\alpha(n)$, cioè non è possibile dimostrare, nel sistema formale, l'esistenza di un elemento che soddisfi una certa proprietà e, allo stesso tempo, escludere che ogni numero abbia quella proprietà.

Lo studio algebrico delle proprietà autologiche di PA ha come passo iniziale la possibilità di esprimere il predicato $Th(x)$ nell'ambito della struttura algebrica. Ciò viene realizzato da Roberto Magari mediante l'operatore τ. Tale operatore è definito nell'algebra di Lindenbaum, quindi sulle classi di equivalenza di formule, come segue. Sia p una formula chiusa di PA:

$$\tau[p] = \left[Th(\ulcorner p \urcorner)\right]$$

Bisogna mostrare che tale definizione è ben posta, ovvero non dipende dalla formula p scelta come rappresentante della classe di equivalenza $[p]$. Per far ciò ci basiamo sulle proprietà del predicato $Th(x)$.

Infatti sia $[p] = [q]$, ovvero $\vdash p \leftrightarrow q$, grazie alla **T1** si ha che $\vdash Th(\overline{\ulcorner p \leftrightarrow q \urcorner})$. Da ciò, applicando la proprietà **T2**, si ottiene $\vdash Th(\overline{\ulcorner p \urcorner}) \leftrightarrow Th(\overline{\ulcorner q \urcorner})$, ovvero che $[Th(\overline{\ulcorner p \urcorner})] = [Th(\overline{\ulcorner q \urcorner})]$. Quindi la definizione di τ è indipendente dal rappresentante scelto.

Dalle proprietà del predicato $Th(x)$ precedentemente esposte discende una serie di proprietà riguardanti l'operatore τ che riassumiamo nel seguente teorema.

Teorema 6. *Siano x e y elementi di un'algebra di Lindenbaum e sia τ l'operatore appena definito, si ha:*

($\tau_{\mathbf{1}}$) $\tau 1 = 1$;

($\tau_{\mathbf{2}}$) $\tau(x \cdot y) = \tau x \cdot \tau y$;

($\tau_{\mathbf{3}}$) $\tau(x \to y) \leq \tau x \to \tau y$;

($\tau_{\mathbf{4}}$) $\tau x \leq \tau\tau x$

Dimostrazione. ($\tau_{\mathbf{1}}$) Per la definizione dell'elemento 1 nell'algebra di Lindenbaum si ha

$$1 = [\alpha \vee \neg\alpha]$$

dove α è una qualsiasi formula chiusa. Inoltre per la definizione dell'operatore τ si ha

$$\tau 1 = \left[Th(\overline{\ulcorner \alpha \vee \neg\alpha \urcorner})\right]$$

Per la proprietà **T1**, $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ se e solo se $\vdash Th(\overline{\ulcorner \alpha \vee \neg\alpha \urcorner})$ e ciò equivale (dato che α è chiusa) a $\vdash (\alpha \vee \neg\alpha) \leftrightarrow Th(\overline{\ulcorner \alpha \vee \neg\alpha \urcorner})$ quindi

$$\tau 1 = \left[Th(\overline{\ulcorner \alpha \vee \neg\alpha \urcorner})\right] = [\alpha \vee \neg\alpha] = 1$$

($\tau_{\mathbf{2}}$) Scegliamo un rappresentante per ciascuna classe di equivalenza di formule scrivendo $x = [\alpha]$ e $y = [\beta]$. Si ha quindi, applicando l'operazione $\cdot$ definita nell'algebra di Lindenbaum, la definizione di τ e la proprietà **T4**,

$$\tau(x \cdot y) = \tau([\alpha] \cdot [\beta]) = \tau([\alpha \wedge \beta]) = \left[Th(\overline{\ulcorner \alpha \wedge \beta \urcorner})\right] = \left[Th(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \wedge Th(\overline{\ulcorner \beta \urcorner})\right] =$$

$$= \left[Th(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner})\right] \cdot \left[Th(\overline{\ulcorner \beta \urcorner})\right] = \tau[\alpha] \cdot \tau[\beta] = \tau x \cdot \tau y$$

(τ_3) Come nel punto precedente, scegliamo come rappresentanti delle classi di equivalenza x e y, due formule chiuse α e β. Per quanto detto precedentemente sulle algebre di Lindenbaum, sappiamo che

$$x \to y = [\alpha \to \beta]$$

quindi anche

$$\tau x \to \tau y = \left[Th(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\right] \to \left[Th((\overline{\ulcorner\beta\urcorner})\right] = \left[Th(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \to Th(\overline{\ulcorner\beta\urcorner})\right]$$

pertanto, applicando la proprietà **T3**, otteniamo

$$\vdash Th(\overline{\ulcorner\alpha \to \beta\urcorner}) \to \left(Th(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \to Th(\overline{\ulcorner\beta\urcorner})\right)$$

ovvero, per quanto è stato detto sulla relazione $\leq$ nell'algebra di Lindenbaum,

$$\left[Th(\overline{\ulcorner\alpha \to \beta\urcorner})\right] \leq \left[Th(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \to Th(\overline{\ulcorner\beta\urcorner})\right] = \left[Th(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\right] \to \left[Th((\overline{\ulcorner\beta\urcorner})\right]$$

che corrisponde, per la definizione di τ, a

$$\tau(x \to y) \leq \tau(x) \to \tau(y)$$

(τ_4) È una conseguenza immediata della proprietà **T5**, infatti, se $x = [\alpha]$ allora, per **T4**, abbiamo

$$\vdash Th(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \to Th(\overline{\ulcorner Th(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\urcorner})$$

quindi

$$\left[Th(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\right] \leq \left[Th(\overline{\ulcorner Th(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\urcorner})\right]$$

ovvero

$$\tau x \leq \tau \left[Th(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\right] = \tau\tau x$$

□

Ora bisogna notare che l'idea di considerare un'algebra di Lindenbaum con un operatore τ che traduca in termini algebrici il predicato $Th(x)$ e che quindi soddisfi le proprietà (τ_1), (τ_2), (τ_3), (τ_4), era già stata introdotta da Kent e Simmons ([63], [73]).

Il contributo originale di Magari e del gruppo di Siena consiste nell'*arricchire* l'algebra in modo da tradurre il *lemma di diagonalizzazione*. Tale lemma, come abbiamo ricordato, afferma che, data una qualsiasi formula $\alpha(x)$, esiste in PA una formula chiusa p, che si comporti da *punto fisso* per $\alpha(x)$, ovvero tale che $\vdash p \leftrightarrow \alpha(p)$ esprimendone il carattere autoreferenziale. Vedremo che, in termini algebrici, questo carattere autoreferenziale verrà conservato per le formule costruite con il predicato $Th(x)$.

Dato che $Th(x)$ è stato tradotto algebricamente con l'operatore τ, per effettuare una traduzione fedele del lemma di diagonalizzazione in termini algebrici, si considera ogni espressione costruita nell'algebra di Lindenbaum a partire dalle costanti 0 e 1, utilizzando le operazioni $(+, \cdot, ')$ e contenente un elemento x che può comparire anche più volte ma ogni volta *sotto l'azione* di τ (indichiamo tale espressione con $f(x)$). Si richiede che $f(x)$ abbia un *punto fisso rispetto a* x, cioè

($\star$) per ogni $f(x)$, esiste un elemento g_f, appartenente all'algebra, tale che

$$f(g_f) = g_f$$

Magari ([76]) per indicare l'espressione $f(x)$ parla di *polinomio* nel senso dell'algebra universale.

Notiamo che, se in $f(x)$ l'elemento x compare fuori da τ, non è detto che il punto fisso esista. Ad esempio consideriamo l'espressione $f(x) = x'$, essa non ha alcun punto fisso, altrimenti ci sarebbe, nell'algebra, un elemento uguale al suo complementare. Per garantire l'esistenza del punto fisso, l'elemento x deve comparire *unicamente* sotto l'azione di τ. Si consideri ad esempio l'espressione

$$f(x) = x' \cdot \tau x$$

nell'espressione precedente l'elemento x compare sia sotto l'azione di τ sia *esternamente* a τ nel *fattore* x'. In questo caso non è possibile trovare un punto fisso, infatti se fosse

$$x' \cdot \tau x = x$$

allora, moltiplicando ambo i membri per x, si avrebbe $x = 0$. Ma 0 non può essere il punto fisso della precedente espressione, altrimenti

$$0 = 0' \cdot \tau 0 = 1 \cdot \tau 0 = \tau 0$$

mentre, come vedremo nel seguito, $\tau 0 > 0$.

In generale si definisce un'algebra diagonale (detta anche talvolta algebra diagonalizzata) nel modo seguente:

Definizione 2. Un'**algebra diagonale** (o *algebra diagonalizzata*) è un'algebra di Boole $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, ', 0, 1, \tau)$ che soddisfi le proprietà ($\tau_\mathbf{1}$), ($\tau_\mathbf{2}$), ($\tau_\mathbf{3}$), ($\tau_\mathbf{4}$), e tale che valga la proprietà ($\star$).

Nell'esposizione di Magari [76] il *polinomio* viene considerato in $n+1$ variabili $x, y_1, y_2, ..., y_n$ ($f(x, y_1, ..., y_n)$). Di tali variabili, x compare sotto l'azione di τ, quindi si chiede l'esistenza di un'operazione $n - aria$, g_f tale che:

$$f(g_f(y_1, ..., y_n), y_1, ..., y_n) = g_f(y_1, ..., y_n)$$

I risultati precedenti sul predicato $Th(x)$, unitamente al lemma di diagonalizzazione, mostrano che, dall'insieme delle formule chiuse del sistema formale PA, si può ricavare un'algebra diagonale.

Inoltre Magari [76] cita una generalizzazione di tale definizione dovuta a P. Pagli, si tratta della cosiddetta *algebra multidiagonale*, ovvero un'algebra $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, ', 0, 1, \tau)$ del tipo precedente nella quale la richiesta che valga la proprietà ($\star$), viene generalizzata come segue.

Per ogni sequenza finita $f = (f)_{0<i\leq n}$ di "polinomi" (nel senso precedentemente specificato) costruiti nell'algebra $\mathcal{A}$, di arietà $n + m$ e in cui le prime n variabili

cadano soltanto sotto l'azione dell'operatore τ, chiediamo che esistano n nuovi simboli di operazione m-aria: $\left(g_{(i)}^{(f)}\right)_{0<i\leq n}$ tali che

$$(\star\star) \qquad g_{(i)}^{(f)}(\overline{y}) = f_i\left(g_{(1)}^{(f)}(\overline{y}), g_{(2)}^{(f)}(\overline{y}), ..., g_{(n)}^{(f)}(\overline{y}); \overline{y}\right) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

dove $\overline{y} = (y_1, ..., y_m)$.

Le strutture algebriche $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, ', 0, 1, \tau)$ che soddisfano gli assiomi delle algebre di Boole, le proprietà (τ_1), (τ_2), (τ_3), (τ_4), e tali che in esse valga la proprietà $(\star\star)$, si dicono **algebre multidiagonali**.

Torniamo al caso delle algebre diagonali. Si verifica che se in una qualsiasi algebra di Boole $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, ', 0, 1)$ introduciamo l'operatore τ ponendo:

$$\tau x = 1 \qquad \text{per ogni } x \in A$$

otteniamo da $\mathcal{A}$ un'algebra diagonale che chiamiamo *algebra diagonale banale.*

Nelle algebre diagonali è possibile formulare i corrispondenti algebrici del primo e del secondo teorema di Gödel:

Teorema 7 (**I Teorema di Gödel**). *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra diagonale non banale allora essa ha più di 2 elementi (ovvero non può ridursi ai soli due elementi* 0 *e* 1*).*

Dimostrazione. Grazie alla proprietà $(\star)$, esiste in $\mathcal{A}$ un elemento p, tale che $p = (\tau p)'$. Si noti che in questo caso il *polinomio* è $f(x) = (\tau x)'$ costruito nell'algebra usando l'operatore τ e la complementazione $()'$ e in cui la *variabile* x compare solo sotto l'azione dell'operatore τ. A questo punto dimostrare il Teorema di Gödel significa dimostrare che il *punto fisso* p non può essere né 0 né 1, cioè p è una classe di equivalenza di formule indecidibili.

Se fosse $p = 1$ allora per (τ_1) si avrebbe $\tau p = 1$ e quindi $(\tau p)' = 0$ in contraddizione con il fatto che p sia un punto fisso perché $p = 1 \neq 0 = (\tau p)'$.

Se fosse invece $p = 0$ allora, si avrebbe $(\tau 0)' = 0$ e quindi $\tau 0 = 1$ da cui, applicando la proprietà (τ_2), si ottiene $\tau x = \tau 0 = 1$ per ogni x nell'algebra, quindi l'algebra sarebbe banale. □

Nella dimostrazione precedente si vede come alcune idee di Gödel vengano tradotte in termini algebrici. Ad esempio la *formula* α tale che $\vdash \alpha \leftrightarrow \neg T(\ulcorner \alpha \urcorner)$, che afferma *io non sono dimostrabile* corrisponde al *punto fisso* del polinomio $(\tau x)'$, e la dimostrazione che tale formula non possa essere né dimostrata né refutata in PA, corrisponde al fatto che tale punto fisso è diverso da entrambe le costanti 0 e 1 dell'algebra. La stessa idea porta anche ad una traduzione, in termini algebrici, del secondo teorema di Gödel.

Teorema 8 (**II Teorema di Gödel**). *Se $\mathcal{A}$ è un'algebra diagonale non degenere (se cioè $0 \neq 1$) allora $\tau 0 > 0$.*

Dimostrazione. Per dimostrare che $\tau 0 > 0$, si prende la formula p usata nella dimostrazione precedente tale che $p = (\tau p)'$. Si deriva che:

$$p' = \tau p \quad \text{quindi} \quad \tau p' = \tau\tau p \geq \tau p$$

Dalla disequazione $\tau p' \geq \tau p$ si ottiene, per come è definita la disuguaglianza nell'algebra, $\tau p \cdot \tau p' = \tau p$.
Grazie alla proprietà ($\tau_{\mathbf{2}}$) abbiamo:

$$\tau(p \cdot p') = \tau p \quad \text{ovvero} \quad \tau 0 = \tau p = p'$$

A questo punto per dimostrare il teorema basta far vedere che p' non può essere 0 e questo deriva dal fatto che $p \neq 1$ come mostrato nella dimostrazione precedente. □

Sottolineiamo che la disequazione $\tau 0 > 0$ *cattura* l'idea del secondo teorema di Gödel secondo cui non è possibile dimostrare, nel sistema PA, la coerenza del sistema stesso. Infatti affermare che è possibile dimostrare (in PA) la coerenza di PA, corrisponde a mostrare che è dimostrabile in PA la formula $\neg T\left(\ulcorner q \wedge \neg q \urcorner\right)$ dove q è una formula chiusa e l'espressione $q \wedge \neg q$ corrisponde ad una contraddizione ovvero all'elemento 0 dell'algebra. Quindi $\neg T\left(\ulcorner q \wedge \neg q \urcorner\right)$ equivale a dire che *non esiste una dimostrazione di una contraddizione*, cioè equivale alla coerenza del sistema.

Dire che tale coerenza è dimostrabile significa, in termini algebrici, affermare la validità dell'equazione $(\tau 0)' = 1$ perché 1 è la classe di equivalenza delle formule dimostrabili. Possiamo dunque affermare che l'elemento $(\tau 0)'$ esprime, nell'algebra diagonale, la consistenza di PA. L' equazione $(\tau 0)' = 1$ corrisponde a $\tau 0 = 0$ che è infatti in contraddizione con la disequazione $\tau 0 > 0$ dimostrata nel teorema precedente.

2.3 Il Teorema di Löb

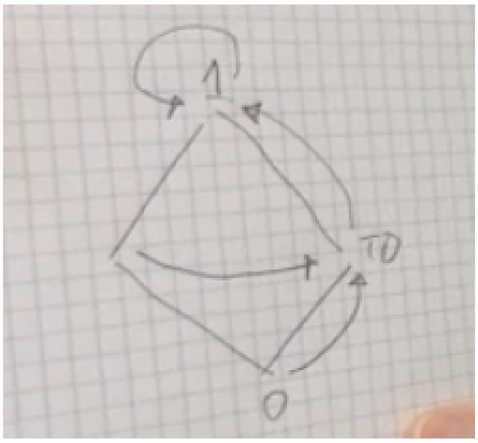
Abbiamo visto che le *algebre diagonali* raggiungono lo scopo di tradurre in termini algebrici i teoremi di Gödel. Si pone però, per il *gruppo di Siena*, il problema di riflettere sulla definizione e sull'assiomatizzazione delle algebre diagonali.

In particolare il problema risiede nella proprietà ($\star$) che traduce in maniera adeguata il lemma di diagonalizzazione ma al contempo rende la struttura algebrica scarsamente *controllabile.* La proprietà ($\star$) richiede infatti, per ogni polinomio in cui la x appare sotto l'azione di τ, l'esistenza di un elemento dell'algebra, il cosiddetto *punto fisso.* Tale punto fisso accresce il numero di elementi dell'algebra e quindi anche le possibilità di formare polinomi, dai quali (sempre per ($\star$)) si creano altri elementi in un procedimento *ricorsivo* in cui sembra difficile esercitare un controllo sulla *quantità* di elementi che appartengono all'algebra. Di conseguenza, sia la costruzione di esempi sia la dimostrazione di proprietà risultano, nell'ambito delle algebre diagonali, estremamente macchinose.

In questo contesto anche la domanda *esistono algebre diagonali non banali finite?* sembra di non facile soluzione.

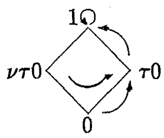
In questo senso un primo passo viene compiuto da Giovanni Sambin che costruisce un esempio di algebra diagonale di quattro elementi detto, dal gruppo, *algebretta di Giovanni.* Si tratta di un esempio semplice da un punto di vista retrospettivo ma che, agli occhi di un gruppo di ricercatori alle prese con strutture algebriche di cui stavano studiando le proprietà e le potenzialità, apparve probabilmente come illuminante e *quasi un piccolo miracolo* (Bernardi); infatti, oltre all'aritmetica di Peano formalizzata algebricamente, non si conosceva un esempio di algebra diagonale.

Nell'immagine seguente è riportata l'algebra diagonale di quattro elementi *scoperta* da Sambin e mostrata dal suo autore durante un'intervista.



Nella figura precedente possiamo vedere le costanti booleane 0 e 1 (rispettivamente in basso e in alto), poi l'elemento $\tau 0$ (a destra) e, non etichettato, il complemento di $\tau 0$, cioè l'elemento $(\tau 0)'$ (a sinistra). Le frecce indicano l'azione dell'operatore τ.

La stessa rappresentazione grafica appare nell'articolo scritto da Sambin con Boolos nel 1991 [17], la riportiamo di seguito.



Sambin afferma di aver presentato agli altri componenti del gruppo questa sua *scoperta* in un seminario tenutosi nella primavera del '73 nel Dipartimento di Matematica, in Via Sallustio Bandini:

> *... in un primo seminario fatto in Via Sallustio Bandini, dimostro che quell'algebretta soddisfa tutte le condizioni, cioè in quell'algebretta per ogni polinomio esiste già - non occorre inventarlo - esiste già un altro termine che fa da punto fisso per le equazioni che si possono scrivere. Naturalmente si usava l'informazione sugli elementi e si andava caso per caso, se l'elemento è così, faccio così...tabelle di conti...*
> Sambin (intervista del 2 Febbraio 2021)

Da questa testimonianza di Sambin, emergono alcune caratteristiche del lavoro del *gruppo di Siena*; il confronto costruttivo con nuove idee e nuove strutture, spesso proposte dal *maestro*, l'approccio euristico alla ricerca e la condivisione, durante i seminari, dei risultati trovati da ciascuno.

ll problema della formalizzazione algebrica dei teoremi limitativi che dà origine alle algebre diagonali viene proposto dal Magari in calce ad un suo articolo, *Significato e verità nell'aritmetica peaniana* [75]. L'articolo verrà pubblicato nel 1975 negli Annali di Matematica Pura ed Applicata ma una versione preliminare circolava già tra i componenti del gruppo nel 1973[7]. In questo lavoro Magari affronta i temi della computabilità e dell'incompletezza con l'intento di approfondire alcune questioni emerse, come già detto, dall'analisi dei teoremi limitativi di Gödel.

Sambin ricorda di aver preso lo spunto di studiare le algebre diagonali proprio da [75]. Alla fine di quest'articolo troviamo infatti un ultimo paragrafo, *Problemi aperti e temi per ulteriori ricerche*, con proposte per altre ricerche, rivolte anche ai suoi collaboratori; il paragrafo è diviso in punti e l'ultimo punto, il quinto, è il seguente:

5) La considerazione dell'algebra di Lindenbaum del sistema F (o del sistema F^*) suggerisce lo studio della varietà di algebre definita come segue.

Definiamo per induzione incrociata il tipo e le identità.

Passo 0. Sono simboli di operazioni certi simboli per le operazioni booleane e un ulteriore simbolo di operazione unaria, τ. Sono identità le identità booleane e inoltre le:

$$\tau = 1\,,$$
$$\tau(p\cdot q) = \tau p\cdot\tau q$$
$$\tau(p\to q)\leqslant \tau p\to\tau q\,,$$
$$\tau p\leqslant\tau\tau p\,.$$

Passo $(n+1)$. Sia $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ un polinomio astratto costruito con le operazioni fin qui introdotte, tale che la variabile x occorra solo sotto l'azione di τ (per esempio si potrebbe considerare il polinomio $\tau(x+y)\cdot z\to(u\to\tau x')$). Si introduce allora un nuovo simbolo di operazione n-aria f^* e l'identità: $f^*(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(f^*(y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n)$.

È facile vedere che le algebre di questa varietà hanno molte delle proprietà rilevanti del sistema $F(F^*)$. Lo studio della varietà e della sua sottoclasse costituita dalle algebre per cui se $\tau p = 1$ allora $p = 1$ dovrebbe chiarire certi aspetti di $F(F^*)$.

Nell'estratto sopra riportato non si parla ancora di *algebre diagonali* (o *algebre diagonalizzate*) ma la definizione è già completa di tutte le parti essenziali da cui scaturiranno gli studi successivi, in particolare è ben evidente quell'aspetto di *induzione incrociata* che rende le strutture difficili da *controllare*. Tuttavia la *scoperta* dell'algebra di 4 elementi è un passo in avanti nello studio di queste strutture.

Sambin ricorda che, nel seminario in cui aveva presentato la sua algebra diagonale di 4 elementi, qualcuno dei presenti gli chiese se una struttura simile sarebbe stata riscontrabile anche in un'algebra di 8 elementi[8], cioè nell'algebra di Boole finita di cardinalità successiva. Ricordiamo che le algebre di Boole finite hanno come cardinalità le potenze di 2, infatti ogni algebra di Boole finita, è *atomica*[9] ed è isomorfa all'algebra dell'insieme delle parti dell'insieme degli atomi di B.

Sambin, in seguito alla domanda dei colleghi, studia l'algebra di 8 elementi e cerca strategie che gli semplifichino i conti necessari alle varie verifiche. Nel gruppo

[7] Si veda [104] dove si riporta la pubblicazione di tale articolo da parte dell'Istituto di Matematica dell'Università di Siena, senza data, la data attribuita da P. Pagli è comunque il 1973.

[8] L'algebra diagonalizzabile di 8 elementi comparirà in seguito in [78].

[9] Un'algebra di Boole B si dice atomica se per ogni elemento $x \in B$ esiste un *atomo* $a \in B$ tale che $a \leq x$ dove la relazione d'ordine $\leq$ è quella indotta dalle operazioni dell'algebra di Boole. Un elemento di B si dice *atomo* se è un elemento minimale, tra gli elementi diversi da zero, rispetto alla relazione d'ordine $\leq$.

ci si stava rendendo conto dell'importanza della validità della formula seguente:

$$\tau(\tau x \to x) = \tau x$$

che viene usualmente detta *teorema di Löb generalizzato.*

In effetti il teorema di Löb ha un ruolo chiave in questa storia. Si tratta di un risultato che compare, per la prima volta, in un articolo di M. H. Löb del 1955 [66] intitolato *Solution of a problem of Leon Henkin.* Il problema di Henkin a cui si fa riferimento nel testo è il seguente.

Problema (versione di Leon Henkin [58])**.** *In un sistema formale Σ per l'aritmetica, si può costruire una formula (il cui gödeliano sarà un certo numero q) che esprima la proposizione: "la formula che ha gödeliano q è dimostrabile in Σ". La domanda è: "la formula in questione è dimostrabile in Σ"?*

Riformulando il problema nei termini *più moderni* introdotti nel paragrafo precedente, possiamo dire che:

Problema (riformulato)**.** *In PA sappiamo che, grazie al lemma di diagonalizzazione, esiste una formula α tale che:*

$$\vdash \alpha \leftrightarrow T(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner})$$

L'esistenza di α è di per se banale (perché se α è un teorema la condizione è soddisfatta) ma la domanda è: "la formula α è necessariamente dimostrabile in PA, ovvero si ha $\vdash \alpha$"?

La risposta di Löb è affermativa e, in effetti, egli dimostra un risultato più forte, il seguente.

Teorema 9 (Löb)**.** *Sia α una formula tale che:*

$$\vdash T(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \to \alpha$$

allora si ha $\vdash \alpha$.

Facciamo precedere alla dimostrazione del teorema alcune considerazioni. Notiamo che, per dimostrare il risultato, Löb utilizza alcune proprietà del predicato $Th(x)$ che corrispondono alle proprietà che noi abbiamo indicato con **T1**, **T2** e **T3**. Löb dà come riferimento bibliografico per la dimostrazione di queste proprietà i "Grundlagen der Mathematik" di Hilbert e Bernays, mentre ritiene necessario fornire una dimostrazione esplicita della proprietà che noi abbiamo indicato con **T5**.

Con questi strumenti, Löb dimostra il suo teorema seguendo un'argomentazione analoga a quella che viene posta alla base del lemma di diagonalizzazione in molte trattazioni ([46], [76]). L'idea è quella di usare la funzione parziale ricorsiva $sost(x, y)$ così definita:

- se x è il gödeliano di una formula $\alpha(z)$ (cioè se $x = \ulcorner\alpha(z)\urcorner$) allora

  $$sost(x, y) = \ulcorner\alpha\,(\overline{y})\urcorner$$

  cioè $sost(x, y)$ è il gödeliano della formula ottenuta sostituendo ogni occorrenza di z con $\overline{y}$.

- se x non è il gödeliano di una formula $\alpha(z)$, allora $sost(x, y)$ non è definita.

Essendo la funzione $sost(x, y)$ ricorsiva parziale, il suo grafico può essere numerato da una formula del tipo $A(x, y, z)$. Si può dimostrare che la formula $A(x, y, z)$ ha la forma $\sigma(x, y) = z$ dove σ è un simbolo di funzione binario. Usando il termine $\sigma(x, y)$ è possibile costruire, ed è questo il punto centrale della dimostrazione, per ogni formula α, una formula β della forma seguente:

$$\beta : Th(\overline{\ulcorner \beta \urcorner}) \to \alpha$$

Per far ciò si considera la formula:

$$Th(\overline{\ulcorner \sigma(z, z) \urcorner}) \to \alpha$$

la formula appena scritta avrà un suo gödeliano, chiamiamolo u. Allora anche la formula $Th(\overline{\ulcorner \sigma(\overline{u}, \overline{u}) \urcorner}) \to \alpha$ avrà un suo gödeliano, che sarà proprio lo stesso numero k tale che la formula $\sigma(\overline{u}, \overline{u}) = \overline{k}$ sia un teorema. Infatti abbiamo, grazie alla numerabilità del grafico di *sost* che, per un certo termine (numerale) $\overline{k}$, si ha:

$$\vdash \sigma(\overline{u}, \overline{u}) = \overline{k} \quad \text{se e solo se} \quad sost(u, u) = k$$

D'altra parte, per come è definito *sost* e dato che u è il gödeliano di $Th(\overline{\ulcorner \sigma(z, z) \urcorner}) \to \alpha$, abbiamo che:

$$k = \ulcorner Th(\overline{\ulcorner \sigma(\overline{u}, \overline{u}) \urcorner}) \to \alpha \urcorner$$

quindi

$$\vdash \sigma(\overline{u}, \overline{u}) = \overline{\ulcorner Th(\overline{\ulcorner \sigma(\overline{u}, \overline{u}) \urcorner}) \to \alpha \urcorner}$$

da ciò si deduce che la formula $Th(\overline{\ulcorner \sigma(\overline{u}, \overline{u}) \urcorner}) \to \alpha$, avendo gödeliano $\sigma(\overline{u}, \overline{u})$, è proprio la formula β cercata.

Dimostrazione. (del Torema di Löb) Procediamo per punti:

1. In base a quanto appena detto, esiste una formula β che ha la forma
$$Th(\overline{\ulcorner \beta \urcorner}) \to \alpha$$

2. Se una tale formula β esiste, e se β è anche un teorema, allora è un teorema anche α, ciò si ottiene applicando la proprietà **T1** e il modus ponens.

3. L'ultima affermazione si può formalizzare, usando le proprietà del predicato $Th(x)$, ciò conduce a:
$$\vdash Th(\overline{\ulcorner \beta \urcorner}) \to Th(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner})$$

4. Riprendiamo ora l'ipotesi del teorema, secondo cui la formula α è tale che
$$\vdash Th(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \to \alpha$$
mettendo insieme tale ipotesi con il punto 3., grazie alle regole del calcolo logico, possiamo ottenere:
$$\vdash Th(\overline{\ulcorner \beta \urcorner}) \to \alpha$$
quindi siamo giunti a mostrare che la formula β è dimostrabile.

5. Possiamo quindi concludere grazie al punto 2. che, dato che β è dimostrabile, anche α è dimostrabile.

□

Analizzando la struttura della precedente dimostrazione, ci rendiamo conto che essa conduce ad alcuni aspetti paradossali del linguaggio naturale, come viene evidenziato anche da Löb nel suo articolo. Infatti se consideriamo una qualsiasi frase A, e se indichiamo con B la frase seguente:

"Se questa frase è vera, allora anche A è vera"

allora possiamo affermare che, se B è vera, allora lo è anche A. Quindi B è vera. Pertanto lo è anche A. Ciò è indipendente dalla frase A presa in considerazione. Potremmo ad esempio pronunciare la frase: "se questa frase è vera, allora 4 è un numero primo". La frase in questione deve essere vera (non può essere falsa altrimenti l'antecedente "questa frase è vera" dovrebbe essere vero e quindi la frase sarebbe vera); pertanto si arriva alla conclusione che 4 è un numero primo. Si noti che questo tipo di paradosso si ottiene senza l'uso esplicito della *negazione*.

Abbiamo visto quali siano le implicazioni del teorema di Löb e della sua dimostrazione anche dal punto di vista *linguistico*. Nel seguito ci concentreremo sul ruolo svolto da questo teorema nella definizione delle strutture algebrico logiche che stiamo analizzando; in particolare nel prossimo paragrafo vedremo come la versione formalizzata del teorema di Löb sia alla base del concetto di algebra diagonalizzabile.

2.4 Algebre Diagonalizzabili e Teorema del Punto Fisso

Come abbiamo già ricordato, il teorema di Löb può essere formalizzato in un'algebra dotata dell'operatore τ, per mezzo della seguente formula:

$$\tau(\tau x \to x) = \tau x$$

L'idea di base che ha portato alla definizione di *algebre diagonalizzabili* è la seguente: si introduce come assioma il teorema di Löb formalizzato e si mostra che, con questo assioma, è possibile dimostrare la proprietà ($\star$), quindi l'esistenza di un punto fisso per ogni polinomio.

Ma come nasce questa idea? Negli articoli di Magari dell'epoca ([74], [75], [76]) si fa spesso riferimento al risultato di Löb. Dapprima solo in bibliografia [75], successivamente [76] l'articolo di Löb viene esplicitamente citato da Magari il quale afferma, dopo aver esposto la definizione di algebra diagonale, che *può essere utile il seguente lemma.*

Lemma 2. *Se in un'**algebra diagonale**, per un certo x si ha $\tau x \leq x$ allora $x = 1$.*

Si noti che il lemma precedente rappresenta una traduzione in termini algebrici del teorema di Löb.

Inoltre Sambin afferma (intervista del 2 Febbraio 2021) di aver scritto in un articolo dell'epoca che *quello* (il teorema di Löb formalizzato) *era l'assioma giusto*.

Si tratta dell'articolo del '74 [123] in cui Sambin si interessa allo studio e all'approfondimento del risultato di Löb e, pur non mettendolo esplicitamente in relazione con la algebre diagonali, sostiene che la condizione:

$$\vdash Th\left(\overline{Th(\overline{\phi}) \to \phi}\right) \leftrightarrow Th(\overline{\phi}) \quad \text{per ogni } \phi$$

affine al teorema di Löb *meglio si presta ad una assiomatizzazione delle proprietà di* $Th(x)$ *in termini di equazioni.* Si stava dunque diffondendo l'idea che l'equazione $\tau(\tau x \to x) = \tau(x)$ fosse collegata alla verifica dell'esistenza di un punto fisso per ogni polinomio.

Nel successivo articolo del 1975 [77], Magari non parla più di *algebre diagonali* e scrive: *un teorema dovuto a C. Bernardi ... ha permesso di concentrare lo studio sulle cosiddette* ***algebre diagonalizzabili*** e introduce la seguente definizione:

Definizione 3. Un'**algebra diagonalizzabile** è un'algebra di Boole

$$\mathcal{A} = (A, +, \cdot, ', 0, 1, \tau)$$

che soddisfi gli assiomi:

(τ_1) $\tau 1 = 1$

(τ_2) $\tau(x \cdot y) = \tau x \cdot \tau y$

(τ_5) $\tau(\tau x \to x) \leq \tau x$

Si noti che gli assiomi sono ridotti a tre e il teorema di Löb generalizzato (nella versione con il simbolo $\leq$) compare tra di essi. Infatti le altre proprietà, fra cui $\tau_{\mathbf{3}}$ e $\tau_{\mathbf{4}}$ possono essere dimostrate a partire da questi tre assiomi, insieme ad altre proprietà dell'operatore τ. In [78], in particolare, Magari afferma che Giovanni Sambin ha mostrato come $\tau_{\mathbf{4}}$ possa essere ottenuto a partire dagli altri assiomi.

Inoltre, anche nelle algebre diagonalizzabili vale l'equivalente algebrico del teorema di Löb:

Lemma 3. *Se in un'**algebra diagonalizzabile**, per un certo x si ha $\tau x \leq x$ allora $x = 1$.*

Ma l'aspetto più importante di questa definizione è il seguente; usando i tre assiomi (τ_1), (τ_2) e (τ_5), è possibile dimostrare l'esistenza del punto fisso per ogni polinomio. Questo risultato viene dimostrato, nel caso particolare di polinomi in una sola incognita x, nel teorema di Bernardi citato da Magari.

Si tratta del lavoro esposto in [11] dove Bernardi mostra che i concetti di algebra diagonale e algebra diagonalizzabile sono sostanzialmente equivalenti. Per arrivare a tale conclusione Bernardi studia l'algebra diagonalizzabile libera sull'insieme vuoto, ossia priva di generatori, detta $\mathcal{F}_0$. Quest'algebra era stata già introdotta e studiata da Magari in [78]. Si tratta dell'algebra di Boole liberamente generata dalla catena:

$$0 < \tau 0 < \tau^2 0 < \ldots < \tau^n 0 < \ldots < 1$$

Si noti che in questa catena le disuguaglianze sono strette perché $\tau^n 0 \neq 1$, per ogni n, dato che l'algebra è libera, e se fosse $\tau^{n+1} 0 = \tau^n 0$ allora, per il teorema di Löb (si veda il lemma precedente) si avrebbe $\tau^n 0 = 1$.

In [11] si considera poi l'isomorfismo tra $\mathcal{F}_0$ e l'algebra P dei sottoinsiemi finiti e cofiniti di $\mathbb{N}$; quindi si dimostra che il punto fisso di ogni polinomio $f(x)$, in cui x compare sotto l'azione dell'operatore τ, è il limite della successione di insiemi $(f^n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ per ogni elemento $A \in \mathcal{F}_0$. Per dimostrare tale risultato ci si basa sul lemma seguente.

Lemma 4. *Siano x e y due elementi di un'algebra diagonalizzabile e $f(z)$ un polinomio in tale algebra in cui z compare solo sotto l'azione dell'operatore τ. Se si ha*

$$x \cdot \tau^n(0) = y \cdot \tau^n(0)$$

allora si ha anche

$$f(x) \cdot \tau^{n+1}(0) = f(y) \cdot \tau^{n+1}(0)$$

Come dicevamo, il punto fisso è il limite che si ottiene iterando l'applicazione del polinomio $f(x)$. In effetti, anche se in [11] il discorso non è esplicito, il precedente lemma permette di vedere $f(x)$ come una contrazione, rispetto ad un'opportuna metrica e di applicare il teorema delle contrazioni di Banach-Cacciopoli.

Si noti che, in tal modo viene dimostrata l'esistenza del punto fisso per ogni algebra diagonale ma non l'unicità, che viene provata solo per $\mathcal{F}_0$.

Nel successivo lavoro [12] Bernardi dimostra l'unicità del punto fisso per ogni algebra diagonalizzabile; per farlo si basa sul seguente lemma che è una generalizzazione del lemma 4.

Lemma 5. *Siano x, y e a elementi di un'algebra diagonalizzabile e $f(z)$ un polinomio in tale algebra in cui z compare solo sotto l'azione dell'operatore τ. Se si ha*

$$x \cdot a = y \cdot a$$

allora si ha anche

$$f(x) \cdot \tau(a) = f(y) \cdot \tau(a)$$

La dimostrazione dell'unicità del punto fisso si articola quindi nei seguenti passaggi

- Consideriamo due punti fissi x e y per $f(z)$, possiamo affermare che

  $$x \cdot (x \leftrightarrow y) = y \cdot (x \leftrightarrow y)$$

  infatti l'elemento $x \leftrightarrow y$ corrisponde al complementare della differenza simmetrica tra x e y e pertanto $x \cdot (x \leftrightarrow y)$ e $y \cdot (x \leftrightarrow y)$ corrispondono entrambi a $x \cdot y$.

- Applicando il lemma 5 all'uguaglianza precedente si ottiene

  $$f(x) \cdot \tau(x \leftrightarrow y) = f(y) \cdot \tau(x \leftrightarrow y)$$

  da cui, essendo x e y punti fissi per f

  $$x \cdot \tau(x \leftrightarrow y) = y \cdot \tau(x \leftrightarrow y)$$

- a questo punto osserviamo che il complementare della differenza simmetrica, ossia $x \leftrightarrow y$, è il più grande elemento (nella relazione d'ordine dell'algebra di Boole) per cui vale $x \cdot (x \leftrightarrow y) = y \cdot (x \leftrightarrow y)$ quindi

$$\tau(x \leftrightarrow y) \leq x \leftrightarrow y$$

- dalla disuguaglianza precedente discende, per il teorema di Löb (Lemma 3),

$$x \leftrightarrow y = 1$$

  e quindi x e y coincidono.

Quasi contemporaneamente alle ricerche di Bernardi, nell'Aprile 1975, Sambin, che aveva continuato a *calcolare ostinatamente i punti fissi di vari polinomi* [17], viene a conoscenza dei lavori di Craig Smorynski e Dick de Jongh. Si trattava di ricerche sulla dimostrabilità in logica modale, in particolare de Jongh aveva dimostrato un teorema di punto fisso. Sambin prova a contattare entrambi ma senza immediato successo. La scoperta del lavoro dei colleghi, insieme all'incoraggiamento di Magari, è lo sprone per Sambin, per portare a termine una dimostrazione basata sulle sue tecniche effettive di calcolo del punto fisso per ogni polinomio.

Si tratta del lavoro [124] in cui Sambin espone una complessa costruzione per passi del punto fisso. Il risultato è più generale rispetto al teorema del punto fisso di Bernardi, in [124] si dimostra infatti l'esistenza del punto fisso anche per un polinomio $f(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ con x che compare solo sotto l'azione di τ e con $y_1, y_2, ..., y_n$ parametri. Inoltre la congettura originale sulle algebre diagonalizzabili viene estesa alle algebre diagonali intuizionistiche, che erano state introdotte da Aldo Ursini [139]. In effetti il teorema di Sambin può essere esteso ad ogni teoria del primo ordine dotata di un predicato di *derivabilità* e la costruzione del punto fisso verrà in seguito semplificata facendo uso del calcolo dei sequenti per la logica modale GL [125].

Ciò si ricollega alle ricerche già citate di Smorynski e de Jongh sul predicato di dimostrabilità in logica modale. Infatti nel sistema di logica modale detto GL (da Gödel e Löb), il predicato di dimostrabilità può essere rappresentato dalla modalità *è necessario che* espressa dalla costante logica $\Box$ (detta *box*).

Ricordiamo che un sistema di logica modale può essere visto come un sistema di logica classica al quale si aggiunge una costante logica unaria $\Box$. Inoltre dal punto di vista sintattico la logica modale contiene, oltre agli assiomi e alle regole di inferenza della logica classica, anche la regola di *necessitazione*:

$$\frac{p}{\Box p}$$

e l'assioma

$$\text{Assioma } \mathbf{A}: \qquad \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$$

dove p e q sono formule ben formate di un linguaggio enunciativo modale.

Una logica modale normale è una logica classica che contiene questo assioma ed è chiusa rispetto alla regola di necessitazione. La *più piccola* logica modale normale è il sistema Kripkiano K.

La logica modale GL, rispetto a K, ha un assioma in più

$$\text{Assioma } \mathbf{G}: \qquad \Box(\Box p \to p) \to \Box p$$

Si noti che l'assioma **G** è analogo al teorema di Löb formalizzato (τ_5). Inoltre, usando **G** e degli altri assiomi di GL, si dimostra anche la formula

$$\Box p \to \Box\Box p$$

che equivale alla proprietà τ_4 la quale, come detto precedententemente, è derivabile da τ_5. Riportiamo la dimostrazione di $\Box p \to \Box\Box p$ a partire dall'assioma **G** in GL notando che passaggi analoghi possono essere fatti nell'algebra diagonalizzabile.

Teorema 10. *Sia p una formula ben formata di un linguaggio enunciativo modale.*

$$GL \vdash \Box p \to \Box\Box p$$

Dimostrazione. Partiamo dalla formula

$$p \to ((q \wedge r) \to (r \wedge p))$$

dove p, q ed r sono formule ben formate del linguaggio GL. La formula precedente è una tautologia e, in quanto tale, è dimostrabile in GL. Sostituendo q ed r rispettivamente con $\Box\Box p$ e $\Box p$ otteniamo

$$\vdash p \to ((\Box\Box p \wedge \Box p) \to (\Box p \wedge p)) \tag{2.11}$$

Inoltre sappiamo che in GL vale la distributività di $\Box$ rispetto a $\wedge$, quindi, in particolare, si può dimostrare la seguente formula

$$\vdash \Box(\Box p \wedge p) \leftrightarrow (\Box\Box p \wedge \Box p) \tag{2.12}$$

Mettendo insieme la 2.11 e 2.12 con le usuali regole e assiomi della logica classica si ottiene

$$\vdash p \to (\Box(\Box p \wedge p) \to (\Box p \wedge p)) \tag{2.13}$$

A questo punto possiamo applicare la regola di necessitazione alla 2.13 ottenendo

$$\vdash \Box(p \to (\Box(\Box p \wedge p) \to (\Box p \wedge p))) \tag{2.14}$$

Applicando l'assioma **A** e la regola del *modus ponens*, otteniamo

$$\vdash \Box p \to \Box(\Box(\Box p \wedge p) \to (\Box p \wedge p)) \tag{2.15}$$

Applichiamo ora l'assioma **G** : $\Box(\Box\alpha \to \alpha) \to \Box\alpha$ sostituendo alla formula α, la formula $\Box p \wedge p$ e abbiamo

$$\vdash \Box(\Box(\Box p \wedge p) \to (\Box p \wedge p)) \to \Box(\Box p \wedge p) \tag{2.16}$$

Mettendo insieme la 2.15 e la 2.16 con l'ausilio di regole e assiomi della logica classica si ottiene

$$\vdash \Box p \to \Box(\Box p \wedge p) \tag{2.17}$$

da cui, applicando ancora una volta la distributività di di $\Box$ rispetto a $\wedge$, ricaviamo

$$\vdash \Box p \to (\Box\Box p \wedge \Box p) \tag{2.18}$$

ora notiamo che $\Box p \to \Box p$ è una tautologia, quindi dall'implicazione precedente (2.18), sempre tenendo conto di assiomi e regole logiche, otteniamo

$$\vdash \Box p \to \Box\Box p \tag{2.19}$$

$\Box$

2.5 Ulteriori sviluppi e conclusioni

Le algebre diagonalizzabili si sono rilevate uno strumento particolarmente fecondo per lo studio della dimostrabilità. Inoltre, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, alcune idee nate dalle ricerche sulle algebre diagonalizzabili, come l'esistenza e l'unicità del punto fisso, hanno incontrato temi di ricerca provenienti da contesti geograficamente diversi.

In particolare, negli Stati Uniti, Saul Kripke, George Boolos, Craig Smorynski, Robert Martin Solovay e altri, si interessarono, in ambito di logica modale, al predicato di *dimostrabilità* e al teorema di Löb; ad Amsterdam Johan van Benthem, Henk Barendregt, Dick de Jongh lavorarono su temi simili. La corrispondenza tra la logica modale e il predicato di derivabilità fu scoperta indipendentemente e contemporaneamente in Italia (Siena), in Olanda (Amsterdam) e negli Stati Uniti. Questa convergenza di interessi con l'ambiente logico internazionale ci dà una misura del livello raggiunto dalla scuola di Logica di Siena negli anni Settanta.

Da queste occasioni di scambio nacquero collaborazioni costanti tra Siena e l'estero. Smorynski divenne un corrispondente ed un collaboratore del gruppo di Siena dopo gli eventi che abbiamo narrato. Nel 1975 Robert di Paola, logico statunitense di origini italiane residente a New York, scrisse a Roberto Magari e, da allora, rimase in contatto con il gruppo di Siena anche con frequenti visite in Italia [104].

Vale la pena di ricordare, in questo contesto, l'interazione tra George Boolos e Siena a seguito delle ricerche sul 35^0 problema di Friedman [49]. Il problema può essere formulato, in termini algebrici, come la *possibilità di verificare, in maniera effettiva, l'uguaglianza di polinomi in* $\mathcal{F}_0$. Questo problema venne risolto da Bernardi e Montagna utilizzando la forma normale degli elementi di $\mathcal{F}_0$ mostrata in [11]. Nello stesso periodo anche George Boolos negli USA [18] e Johan van Benthem ad Amsterdam risolvevano lo stesso problema con altri metodi.

Le ricerche sulle algebre diagonalizzabili aprirono poi la strada ad ulteriori sviluppi. Magari in [79] dimostrò che ogni algebra diagonalizzabile è una sottoalgebra di $P(Z)$, dove Z è un insieme parzialmente ordinato con opportune condizioni e l'operatore τ è definito in modo opportuno. Nel far ciò Magari applicò la teoria degli emimorfismi di Halmos, mostrando che l'operatore $\nu\tau\nu$ è un emimorfismo.

Altri sviluppi riguardarono il problema di verificare se l'algebra diagonalizzabile ottenuta dall'algebra di Lindenbaum di PA, fosse generica, ovvero se generasse l'intera classe delle algebre diagonalizzabili. In termini equivalenti la domanda era *l'operatore τ nell'algebra diagonalizzabile di PA gode di altre proprietà esprimibili con equazioni?* Un primo risultato in tal senso fu ottenuto da Franco Montagna [92] il quale dimostrò che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'algebra diagonalizzabile libera $\mathcal{F}_n$, non è generica, nel senso che esistono delle identità valide in $\mathcal{F}_n$, ma non valide nell'algebra diagonalizzabile di PA.

La soluzione completa al problema fu data da Solovay che, nel 1976, dimostrò la corrispondenza tra i teoremi di GL e i teoremi dell'aritmetica di Peano, di conseguenza tutte le identità dell'algebra diagonalizzabile di PA sono valide nella teoria equazionale delle algebre di Magari. In [93] Montagna estende questo teorema di completezza aritmetico, dimostrando che l'algebra diagonalizzabile libera su un'infinità numerabile di generatori si immerge nell'algebra diagonalizzabile di PA [9].

Le ricerche di Montagna sulle algebre diagonalizzabili e sulla logica della dimostrabilità sono poi andate avanti, producendo vasti ed importanti risultati fra i quali l'algebrizzazione del *predicato di Feferman*, un predicato non-standard di derivabilità che numera in maniera *naturale* i teoremi di PA, ma per il quale non valgono né il Teorema di Löb né il secondo teorema di incompletezza di Gödel [94].

Nel 1994, pochi giorni dopo la morte di Roberto Magari, in un convegno di Teoria della dimostrazione a Berna, George Boolos propose, durante il suo intervento, di rendere *ufficiale* il nome di *Algebre di Magari* per indicare le algebre diagonalizzabili.

Capitolo 3

Teoria della Dimostrazione: storia di una convergenza

In questo capitolo ci proponiamo di studiare come si sono evolute, in Italia, alcune idee riguardanti la Teoria della Dimostrazione. Queste idee sono state introdotte in Italia durante il periodo di rinascita della Logica (anni '60) grazie al lavoro seminale del gruppo di ricerca del C.N.R. guidato inizialmente da Ludovico Geymonat e in seguito da Roberto Magari; si sono sviluppate poi negli anni '70, fino a portare negli anni '80 alla convergenza tra il mondo della Logica Matematica e il mondo dell'Informatica Teorica. Tale incontro ha avuto come conseguenza la nascita di un ambiente di ricerca particolarmente fecondo e in sintonia con tematiche provenienti dalla comunità scientifica internazionale.

Un aspetto, a nostro avviso, rilevante in questa storia è il fatto che i due ambienti, Logica e Informatica, abbiano convissuto in Italia su binari paralleli senza sostanziali scambi per tutti gli anni Settanta. Solo negli anni Ottanta sono iniziate delle contaminazioni che, insieme alle evoluzioni scientifiche provenienti dalla ricerca internazionale, come ad esempio la corrispondenza di Curry-Howard, hanno generato la consapevolezza anche in Italia che i due mondi (Logica e Informatica) fossero interessati a temi per larga parte comuni come la Calcolabilità e, appunto, la Teoria della Dimostrazione.

Seguiremo questo percorso concettuale ponendoci, come punto di arrivo, la fine degli anni '80, momento che consideriamo storicamente rilevante per la Logica in Italia, grazie anche alla fondazione dell'AILA nel 1987.

3.1 Ingresso della teoria della dimostrazione in Italia

Nel 1978 viene pubblicata, nell'Enciclopedia del Novecento edita dall'Istituto Treccani, la voce *Logica Matematica* scritta da Abraham Robinson (1918-1974) nei suoi ultimi anni di vita. Robinson delinea una panoramica della disciplina, citando i principali campi di ricerca: Teoria degli Insiemi, Teoria dei Modelli, Teoria della Ricorsività o Calcolabilità e Teoria della Dimostrazione.
Secondo Robinson la nascita della Teoria della Dimostrazione risale ai lavori di Gerhard Gentzen del 1934-1935, in cui viene sviluppato il calcolo della *deduzione naturale* allo scopo di affrontare il problema della coerenza dell'Aritmetica. Da allora,

afferma Robinson, *il calcolo di Gentzen è stato ampiamente applicato nella logica. Per quanto riguarda invece l'analisi sistematica e la correlazione delle dimostrazioni in matematica, il lavoro è ancora quasi tutto da fare* ([117], pag 112). L'ultima frase ci fa riflettere su quali fossero i risultati raggiunti e quali i risultati attesi in Teoria della Dimostrazione nella seconda metà degli anni Settanta. In particolare dalle parole di Robinson sembra trapelare l'idea di una Teoria della Dimostrazione che possa svelare alcuni aspetti del processo dimostrativo in Matematica mentre vedremo che tale disciplina, in Italia ma anche nel contesto internazionale, sia andata per lo più in un'altra direzione.

In ogni caso è opinione condivisa anche in Italia che la Teoria della Dimostrazione abbia origine dal lavoro di Gentzen. Giuseppe Longo afferma che Gentzen, nel 1935, con la dimostrazione di coerenza dell'Aritmetica per mezzo dell'induzione transfinita, *inaugura la Teoria della Dimostrazione moderna, in forma di "Analisi Ordinale".* Longo fa riferimento alla dimostrazione di Gentzen di coerenza che si basa sulla tecnica di induzione sull'ordinale ϵ_0 che è definito come limite della seguente successione di ordinali:

$$\omega, \quad \omega^{\omega}, \quad ,\omega^{\omega^{\omega}}, \quad \omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}}, \ldots$$

La dimostrazione di Gentzen non è formalizzabile nell'aritmetica di Peano (PA). Ciò ci riporta ad una riflessione condivisa da molti, cioè che la maggior parte dei filoni di ricerca della Logica nella seconda parte del '900 hanno origine dai risultati limitativi di Gödel. Nel capitolo sull'Algebra della Logica abbiamo visto come l'idea delle Algebre Diagonali nasca dalla riflessione sui teoremi di Gödel. In questo caso vediamo, su scala internazionale, che le moderne ricerche sulla Teoria della Dimostrazione nascono dal tentativo di Gentzen di andare oltre i teoremi di Gödel, nel senso di tentare una dimostrazione della coerenza dell'aritmetica con metodi *esterni* all'aritmetica stessa dato che il II teorema di Gödel aveva provato l'impossibilità di condurre tale dimostrazione all'interno del sistema formale PA.

Un evento importante per l'ingresso della Teoria della Dimostrazione in Italia è la pubblicazione, nel novembre 1978, del testo *Teoria della Dimostrazione* di Carlo Cellucci [27]. Cellucci è sicuramente una personalità di primo piano nella Logica italiana del '900 e, in particolare, nella Teoria della Dimostrazione. Come abbiamo visto nell'introduzione storica, la tesi di laurea di Cellucci è stata la prima tesi della *nuova* Logica in Italia. Nella sua tesi Cellucci si occupa di ordinali ricorsivi, argomento *legato all'idea di studiare il ruolo degli ordinali nelle dimostrazioni di non contraddittorietà alla Gentzen* [26]. Cellucci ha infatti affermato (ibidem) che una delle peculiarità della rinascita della Logica in Italia risiede nel particolare momento storico in cui avvenne, un momento in cui *i programmi fondazionali per cui Frege, Russell e Hilbert avevano creato la logica matematica, erano ormai falliti.* Secondo Cellucci questo aspetto è importante per capire il motivo che portò il gruppo di Logica di Geymonat a rivolgere la propria attenzione verso temi di Algebra della Logica, come abbiamo visto nel capitolo dedicato a questo tema. Era stato infatti proprio Geymonat a indirizzare il gruppo verso la Logica Algebrica dopo la lettura, tra il 1956 e il 1957 dell'opera di Leon Henkin, *La structure algébrique des théories mathématiques.* Come abbiamo già analizzato, le ricerche in questo campo, *le prime ricerche originali di logica matematica pubblicate in Italia, dai tempi di Peano* (ibidem), furono condotte dal gruppo fiorentino di Roberto Magari, Piero Mangani e Mario Servi.

Cellucci, dal canto suo, era convinto che, nonostante il fallimento dei programmi fondazionali, potesse essere interessante sviluppare alcune tematiche legate alla Teoria della Dimostrazione alla Gentzen. Nel testo di Cellucci del '78 si introducono i principali strumenti e le idee fondamentali della ricerca internazionale sulla teoria della dimostrazione del '900, in particolare i risultati di normalizzazione e univocità relativi alla logica predicativa del primo ordine, all'aritmetica del primo ordine con induzione infinita e al sistema funzionale con induzione completa.

3.2 Teoria riduttiva e teoria generale

Le idee che hanno dato origine alla Teoria della Dimostrazione si ritrovano già in alcuni lavori di Hilbert e in particolare nel suo *programma* di risolvere il problema dei fondamenti della Matematica, riducendo la formalizzazione e la coerenza delle varie teorie matematiche, alla coerenza dell'Aritmetica elementare. Così facendo, i principi generalmente accettati nella pratica matematica avrebbero avuto un solido fondamento nella Teoria dei Numeri, la cui corenza sembrava alla portata di uno studio formalizzato e chiaro. L'idea di Teoria di Dimostrazione che deriva da Hilbert ha pertanto finalità riduttive (*teoria riduttiva della dimostrazione*).

Nonostante il programma di Hilbert venga messo in crisi dai risultati limitativi di Gödel, la *teoria riduttiva* della dimostrazione va oltre il fallimento del programma hilbertiano. La teoria riduttiva cerca formalizzazioni che descrivano le teorie matematiche e ne dimostrino la coerenza per mezzo di principi che, pur essendo necessariamente più generali di quelli dell'aritmetica elementare, risultino, in qualche senso da precisare, più *sicuri* di quelli che sono alla base delle teorie matematiche in oggetto.

Obiettivo fondamentale della teoria riduttiva è pertanto quello di riportare dei principi dimostrativi *epistemologicamente più astratti* ([27]) a principi dimostrativi più elementari e quindi descrivere cosa è matematicamente dimostrabile a partire da tali principi elementari. In altri termini, l'oggetto di studio della teoria riduttiva, non è la dimostrazione in sé, cioè non è il modo in cui viene stabilita la validità di un enunciato matematico, bensì la possibilità o meno di stabilire tale validità mediante determinati principi, ovvero la nozione di *dimostrabilità* più che la nozione di *dimostrazione*.

La dimostrazione come oggetto di studio è invece al centro della *teoria generale*. Questa teoria si può ricondurre al lavoro di Prawitz ([110]) il quale studiò la nozione di dimostrazione e le sue proprietà senza finalità riduzioniste.

In effetti le tecniche e alcuni dei risultati fondamentali della *teoria generale* sono già presenti nell'opera di Gentzen ([51]). Infatti, nonostante i lavori di Gentzen vengano generalmente interpretati come un contributo alla teoria riduttiva, analizzando la dimostrazione del teorema di eliminazione del taglio e della coerenza dell'Aritmetica del primo ordine, si evince uno spostamento del focus dalla ricerca di fondamenti solidi per l'Aritmetica allo studio sistematico della dimostrazione come oggetto matematico e delle sue trasformazioni.

3.3 La Deduzione Naturale

Uno dei contributi fondamentali apportati da Gentzen alla Teoria della Dimostrazione consiste in un rinnovamento dell'apparato formale per descrivere le deduzioni logiche. Abbiamo detto che la teoria della dimostrazione ha un fondamento nel lavoro di Hilbert.

In Hilbert la descrizione formale delle deduzioni logiche veniva condotta mediante un sistema articolato in un certo numero di *assiomi* e di *regole di inferenza.* A titolo di esempio presentiamo un calcolo *alla Hilbert* per il *linguaggio proposizionale*; si tratta del calcolo che viene presentato nel testo di Mendelson ([91]) che, come abbiamo visto nel capitolo sull'Algebra della Logica, ha rappresentato un riferimento importante per molti logici italiani negli anni Settanta.

Nel calcolo *alla Hilbert* abbiamo tre (schemi di) assiomi per il calcolo proposizionale; sottolineiamo che si tratta di *schemi di assiomi* in quanto, nelle formule seguenti, le lettere α, β e γ rappresentano delle *formule ben formate* qualsiasi del linguaggio proposizionale.

A1 $(\alpha \to (\beta \to \alpha))$

A2 $((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$

A3 $((\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta))$

L'unica regola di deduzione di questo calcolo è il modus ponens (MP) che possiamo schematizzare come segue:

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha\\ \alpha \to \beta\end{array}}{\beta}$$

il MP può essere interpretato come la regola che fa passare, dalle premesse α e $\alpha \to \beta$, alla conclusione β.
Una volta stabiliti gli assiomi e la regola di deduzione, si possono definire le *dimostrazioni* del sistema formale come sequenze (di formule ben formate) del tipo:

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad ... \quad \alpha_n$$

in cui ciascuna formula α_i è un assioma oppure può essere ottenuta da formule precedenti della sequenza per mezzo della regola di deduzione.
Un *teorema* del sistema formale è una formula ben formata α tale che esiste una dimostrazione la cui ultima formula è α.
Si può verificare che i tre assiomi sono tautologie, inoltre i teoremi formalmente descritti da questo sistema sono tutte e sole le tautologie del linguaggio delle proposizioni. Si tratta del *teorema di completezza* per il calcolo proposizionale (si veda il capitolo Algebra della Logica).
I sistemi *alla Hilbert* sono stati usati, oltre che da Hilbert stesso, anche da altri importanti logici tra Ottocento e Novecento, ad esempio Frege, Russell e Whitehead. Tuttavia tali sistemi di deduzione hanno mostrato, in alcuni frangenti, i propri limiti. Ad esempio *tra gli anni 1920 e 1930 la scuola logica polacca (in particolare J. Łukasiewicz e S. Jaśkowski) inizia a mostrare una certa insoddisfazione per tali*

sistemi formali a causa di un modo di sviluppare le dimostrazioni complicato e distante dalle forme inferenziali usate in matematica. I logici polacchi iniziano a reclamare un trattamento più naturale della logica ([109]).
Per dare un'idea di come il calcolo alla Hilbert possa risultare talvolta artificioso, mostriamo come derivare, in tale calcolo, la formula $\alpha \to \alpha$. Nella deduzione seguente scriveremo ogni formula della sequenza in una diversa riga numerata e, accanto a ogni formula, specificheremo se si tratta di un assioma o di una formula che si ottiene come applicazione della regola di deduzione a formule scritte in righe precedenti.

1. $\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$	Assioma **A1**
2. $(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$	Assioma **A2**
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$	MP (1., 2.)
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$	Assioma **A1**
5. $\alpha \to \alpha$	MP (4., 3.)

Analizzando la deduzione precedente si capisce che anche una semplice formula come $\alpha \to \alpha$ richiede, per la sua dimostrazione formale, una serie di passaggi non intuitivi.

Il calcolo detto *Deduzione Naturale* (*natürliches Schließen*), viene introdotto da Gentzen nel 1934-35, per rendere la formalizzazione delle dimostrazioni logiche più vicina al vero ragionamento matematico.

> *My starting point was this: The formalization of logical deduction, especially as it has been developed by Frege, Russell, and Hilbert, is rather far removed from the forms of deduction used in practice in mathematical proofs. Considerable formal advantages are achieved in return.*
>
> *In contrast, I intended first to set up a formal system which comes as close as possible to actual reasoning. The result was a* ***calculus of natural deduction*** *(**NJ** for intuitionist, **NK** for classical predicate logic). This calculus then turned out to have certain special properties; in particular the* ***law of the excluded middle****, which the intuitionists reject, occupies a special position.* [51]

In questa citazione di Gentzen ritroviamo un altro tema importante, il rapporto con le logiche di matrice intuizionista. Andando avanti con l'esplorazione dell'aspetto computazionale insito nella Teoria della Dimostrazione, ci renderemo conto di quale sia il ruolo della Logica intuizionista la quale si presta, più della Logica classica, a una analisi profonda delle diverse dimostrazioni di una stessa formula.

Per introdurre il calcolo della deduzione naturale seguiamo la linea indicata da Gentzen in [51] dove la presentazione dell'apparato formale è preceduta da alcuni esempi per mostrare come dovrebbe essere fatta una *deduzione naturale*. Gentzen considera ad esempio la formula:

$$(X \vee (Y \wedge Z)) \to ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z))$$

che risulta essere valida nella logica proposizionale (in effetti è possibile verificare che si tratta di una tautologia). Secondo Gentzen la validità di tale formula può essere stabilita mediante un ragionamento del tipo seguente: si parte dall'ipotesi che X o $Y \wedge Z$ siano valide. Abbiamo quindi due casi (non esclusivi):

1. vale X
2. vale $Y \wedge Z$

Nel caso 1 si può dedurre che, essendo valida X, lo sono anche $X \vee Y$ e $X \vee Z$. Quindi nel caso 1 possiamo dedurre la validità della formula $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$. Nel caso 2, dal fatto che la formula $Y \wedge Z$ è valida, possiamo dedurre sia la validità di Y sia la validità di Z. Da Y si deduce $X \vee Y$ e da Z si deduce $X \vee Z$. Quindi anche la formula $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ è valida.
In conclusione possiamo affermare che la formula $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ può essere derivata indifferentemente da X oppure da $Y \wedge Z$, cioè dalla disgiunzione $X \vee (Y \wedge Z)$. Ciò corrisponde alla validità della formula

$$(X \vee (Y \wedge Z)) \rightarrow ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z))$$

Secondo Gentzen, un calcolo logico deve riuscire a formalizzare derivazioni di questo tipo. A questo scopo egli introduce la deduzione naturale limitandosi, in prima istanza, alla Logica intuizionista.

La differenza fondamentale fra le deduzioni naturali e le derivazioni nei sistemi di Russell, Hilbert e Heyting è che, in questi ultimi, si parte sempre da un insieme di *formule logiche base* (si vedano ad esempio gli assiomi **A1**, **A2** e **A3**) e da queste formule si deducono, mediante poche regole di inferenza, i *teoremi*.

Nella deduzione naturale invece non si parte da formule base ma da *assunzioni* come nell'esempio precedente in cui si assumeva la validità di X o di $Y \wedge Z$. Dalle assunzioni poi si derivano, mediante le regole di deduzione, altre formule fino alla derivazione della conclusione che viene resa, sempre mediante le regole di deduzione, indipendente dalle assunzioni. Quindi essenzialmente la deduzione naturale non è incentrata, come il calcolo alla Hilbert, sul ruolo degli assiomi ma su quello delle regole di deduzione.

Una derivazione in deduzione naturale ha la forma di un albero. In prima approssimazione possiamo indicare con

$$\begin{matrix} \vdots \\ A \end{matrix}$$

una deduzione in cui la conclusione è la formula A. In questa deduzione non sono specificate le assunzioni ma solo la conclusione.
La deduzione più semplice è la seguente

$$\mathrm{A}$$

in cui la formula A è sia l'assunzione sia la conclusione (come dire che *da A si deduce A*). Invece una scrittura del tipo

$$\begin{matrix} \Gamma \\ \vdots \\ A \end{matrix}$$

sta ad indicare una deduzione in cui la conclusione A dipende dall'insieme di ipotesi Γ.
Può accadere che, applicando una delle regole di derivazione che vedremo nel seguito (introduzione dell'implicazione), alcune ipotesi vengano *scaricate* nel corso della deduzione, cioè perdano il loro *status* di ipotesi *attive*; in questo caso metteremo l'ipotesi scaricata tra parentesi quadre come nella scrittura seguente:

$$\begin{array}{c}[B]\\ \vdots\\ A\end{array}$$

in cui la formula A è stata ottenuta come conclusione della deduzione, scaricando l'ipotesi B. Chiariamo ciò con un esempio: grazie alle regole di deduzione che enunceremo a breve è possibile costruire la deduzione siffatta:

$$\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]^1}{B}}{(A \wedge B) \to B}\,1$$

Il significato della deduzione che abbiamo scritto è il seguente: sapendo che dall'ipotesi $A \wedge B$ si deduce B, possiamo concludere che è valida la formula $(A \wedge B) \to B$ in cui $A \wedge B$ non è più un'ipotesi in quanto è stata *inglobata* nella formula finale. Diciamo quindi che l'ipotesi $A \wedge B$ è stata *scaricata*; per indicare ciò l'ipotesi $A \wedge B$ appare, nella deduzione, tra parentesi quadre.
In generale indicheremo con

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}B\\ \mathcal{D}\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \mathcal{D}\\ A\end{array}$$

rispettivamente: una qualsiasi deduzione che ha come conclusione la formula A, una deduzione che ha come conclusione la formula A e fra le sue assunzioni non scaricate, una o più occorrenze della formula B, una deduzione che ha come conclusione la formula A e fra le sue assunzioni scaricate, una o più occorrenze della formula B.

Esponiamo di seguito le regole della deduzione naturale per il calcolo dei predicati seguendo [27]. Useremo un linguaggio in cui le lettere maiuscole A, B, C... rappresentano formule del calcolo dei predicati, il simbolo $\perp$ rappresenta il *falso*, i connettivi presi in considerazione sono la congiunzione $\wedge$ e l'implicazione $\to$ e come quantificatore consideriamo quello universale $\forall$. Gli altri simboli logici saranno da intendere pertanto come abbreviazioni, ovvero:

- $\neg A = A \to \perp$
- $A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$
- $\exists x A(x) = \neg \forall x \neg A(x)$

Di seguito riportiamo le regole della Deduzione Naturale Classica:

$$\text{(Assioma) } A$$

$$(\wedge I)\ \frac{A \qquad B}{A \wedge B} \qquad\qquad (\wedge E_1)\ \frac{A \wedge B}{A} \qquad (\wedge E_2)\ \frac{A \wedge B}{B}$$

$$(\to I)\ \frac{\begin{array}{c}[A]^1\\ B\end{array}}{A \to B}\,1 \qquad\qquad (\to E)\ \frac{A \qquad A \to B}{B}$$

$$(\forall I)\ \frac{A(a)}{\forall x A(x)} \qquad\qquad (\forall E)\ \frac{\forall x A(x)}{A(t/x)}$$

a non libera nelle assunzioni non scaricate di A e in $\forall x A(x)$

t libero per x in A

$$(\bot_c)\ \frac{\begin{array}{c}[\neg A]^1\\ \bot\end{array}}{A}\,1$$

A formula atomica diversa da $\bot$

Notiamo che le regole di deduzione sono associate ai vari simboli logici. In particolare abbiamo regole di introduzione dei simboli logici: ($\wedge$ I), ($\to$, I), ($\forall$, I); regole di eliminazione: ($\wedge$, E_1), ($\wedge$, E_2), ($\to$, E), ($\forall$, E), e una regola per il falso: ($\bot$).
Con la notazione $A(x)$ si intende che la formula A può contenere x come variabile libera. Mentre con $A(t/x)$ si indica la formula ottenuta da A sostituendo ogni occorrenza della variabile libera x con il termine t. La variabile libera a a cui si applica la regola $(\forall I)$ viene detta *variabile propria* e, come specificato, non deve occorrere libera nelle assunzioni non scaricate di $A(a)$ e nemmeno nella formula $\forall x A(x)$.
Specifichiamo che un termine t si dice libero per una variabile x in una formula $A(x)$ se esso non contiene alcuna variabile che occorre anche come indice di un quantificatore di $A(x)$ nel cui campo di azione compaia x. Ad esempio consideriamo la formula:

$$A(x) = \exists y(y \geq x)$$

e interpretiamo tale formula nell'insieme dei numeri naturali con l'usuale relazione d'ordine $\geq$. Consideriamo il termine $t = y + 1$ che contiene la variabile y. Questo termine non è libero per x in $A(x)$. Infatti la variabile y occorre, nella formula $A(x)$, come indice del quantificatore $\exists y$ nel cui campo d'azione compare x. Pertanto sostituendo t al posto di x in $A(x)$ si ottiene la formula

$$A(t/x) = \exists y(y \geq y + 1)$$

in cui la variabile y del termine $t = y + 1$ è stata *catturata* dal quantificatore $\exists$. Notiamo che la formula iniziale $\exists y(y \geq x)$ è valida dal punto di vista dell'interpretazione nell'insieme dei numeri naturali (dato un qualsiasi numero naturale x, esiste un numero y che è maggiore o uguale a x), mentre la formula ottenuta dopo la sostituzione $\exists y(y \geq y + 1)$ non è più valida in tale interpretazione.

Una volta esposte le regole di deduzione possiamo definire una dimostrazione in deduzione naturale.

Definizione 4. Una *dimostrazione* (detta anche *deduzione* o *derivazione*[1]) in deduzione naturale è un albero finito, i cui nodi sono occorrenze di formule del linguaggio predicativo, tali che:

- Le occorrenze di formule che costituiscono i nodi iniziali o foglie sono dette *assunzioni* o ipotesi. Durante la deduzione alcune ipotesi possono essere scaricate usando le regole di deduzione.
- I nodi che non sono foglie sono occorrenze di formule ottenute mediante una delle regole di deduzione dai nodi che le precedono immediatamente (le premesse della regola di deduzione applicata). Tali formule dipendono dalle stesse assunzioni dalle quali dipendono le loro premesse tranne, eventualmente, le ipotesi che sono state scaricate applicando la regola di deduzione.
- La radice dell'albero è la conclusione della deduzione naturale.

A titolo di esempio riportiamo la derivazione della formula

$$A \to (B \to (A \wedge B))$$

in deduzione naturale:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \qquad [B]^1}{A \wedge B}\,(\wedge I)}{B \to (A \wedge B)}\,(\to I)^1}{A \to (B \to (A \wedge B))}\,(\to I)^2$$

Notiamo che, nella derivazione precedente, le assunzioni A e B compaiono tra parentesi quadre perché vengono scaricate nel corso della deduzione. Inoltre, l'assunzione B compare con apice 1, perché viene scaricata nel momento in cui si applica, per la prima volta, la regola di introduzione dell'implicazione, che abbiamo indicato con $(\to I)^1$. Mentre l'assunzione A compare con apice 2, perché viene scaricata nel momento in cui si applica, per la seconda volta, la regola di introduzione dell'implicazione che abbiamo indicato con $(\to I)^2$.
Data una dimostrazione $\mathcal{D}$, si definisce in maniera naturale il concetto di *sottodimostrazione immediata* come una delle dimostrazioni che si ottengono da $\mathcal{D}$ eliminando la conclusione e quindi l'ultima regola di deduzione. Definiamo quindi la *lunghezza di una dimostrazione*, nel modo seguente:

Definizione 5. Data una dimostrazione $\mathcal{D}$, la sua *lunghezza*, $l(\mathcal{D})$, è definita per mezzo delle seguenti clausole:

1. se la conclusione di $\mathcal{D}$ si ottiene per applicazione dell'assioma, allora $l(\mathcal{D}) = 0$;

[1] Nel seguito useremo il termine *derivazione* per evitare ambiguità con l'usuale accezione che si dà al termine *dimostrazione* in Matematica in generale e anche in Logica in un contesto metateorico, cioè come prova rigorosa della validità di un certo risultato non espressa però in un sistema logico codificato.

2. se la conclusione di $\mathcal{D}$ si ottiene per applicazione di $(\wedge E_1)$, $(\wedge E_2)$, $(\rightarrow I)$, $(\forall I)$, $(\forall E)$, $(\bot)$, e $\mathcal{D}_1$ è la sottodimostrazione immediata di $\mathcal{D}$, allora $l(\mathcal{D}) = l(\mathcal{D}_1)+1$;

3. se la conclusione di $\mathcal{D}$ si ottiene per applicazione di $(\wedge I)$, $(\rightarrow E)$, e $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, sono le sottodimostrazioni immediate di $\mathcal{D}$, allora $l(\mathcal{D}) = max\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\} + 1$.

Nella deduzione naturale è evidente la simmetria tra le regole di *introduzione* e le regole di *eliminazione*. A partire da tale simmetria è possibile studiare un processo di trasformazione delle derivazioni che porta ad uno dei risultati fondamentali della Teoria della Dimostrazione: il teorema di normalizzazione che, come vedremo in seguito, corrisponde, nel calcolo dei sequenti, al teorema di eliminazione del taglio. Gentzen spiega ([51]) come un'analisi approfondita del calcolo di deduzione naturale lo abbia portato ad un teorema molto generale, l'*Hauptsatz* o *Eliminazione del taglio* secondo il quale ogni dimostrazione di una formula, può essere trasformata, attraverso un processo di *normalizzazione*, in una dimostrazione che contenga solo concetti appartenenti alla formula stessa; in termini usuali nella pratica matematica potremmo dire che ogni dimostrazione di una formula data può essere trasformata in una dimostrazione della stessa formula in cui però non si faccia uso di lemmi. Per dimostrare questo importante teorema Gentzen inventa un ulteriore sistema formale che ritiene più adatto all'elaborazione di una strategia dimostrativa, il Calcolo dei Sequenti, che sarà da noi trattato nel paragrafo 3.5.

3.4 L'Intuizionismo

Come abbiamo notato, Gentzen, nell'introdurre la deduzione naturale, parte da un sistema di Logica intuizionista (NJ) per poi estenderlo alla Logica classica (NK). In generale la Logica intuizionista riveste una particolare importanza nella storia della Teoria della Dimostrazione e dei rapporti tra Logica e Informatica. Anche in Italia molti logici si sono interessati negli anni all'intuizionismo, fra di essi Giovanni Sambin e Giuseppe Rosolini di cui torneremo a parlare nel seguito.

L'intuizionismo trae la sua origine dalle idee rivoluzionarie di Luitzen Egbertus Jan Brouwer nell'ambito del dibattito sui fondamenti della Matematica. Nella sua tesi di dottorato *Over de grondslagen der wiskunde* del 1907 e nel successivo articolo del 1908 *De onbetrouwbaarheid der logiche principes* Brouwer pone le basi della sua originale concezione della Matematica come una libera attività dell'intelletto indipendente da qualsiasi linguaggio e lontana da un realismo di tipo Platonico.

Brouwer afferma: *in mathematics no truths could be recognized which had not been experienced* [19] intendendo l'esperienza come una costruzione mentale tramite la quale il soggetto riesce a cogliere la verità di un enunciato. In altri termini per dire che una proposizione matematica è vera bisogna esibire una costruzione teorica che la giustifichi.

Per questo motivo l'intuizionismo rifiuta uno dei principi base della Logica classica, la *legge del terzo escluso*: data una qualsiasi proposizione A, tale proposizione è vera oppure è vera la sua negazione $\neg A$. Ciò equivale ad affermare la verità della proposizione $A \vee \neg A$ indipendentemente dall'interpretazione di A. Secondo Brouwer la *legge del terzo escluso* è valida per strutture finite. Ad esempio sia $G(n)$ il predicato "se n è un numero pari maggiore di 2 allora n è la somma di due numeri primi" che esprime la congettura di Golbach. Se consideriamo qualsiasi insieme finito S di numeri naturali possiamo verificare direttamente se $G(n)$ è vero per ogni $n \in S$, cioè se è vero il predicato $\forall nG(n)$ nella struttura S. Se $\forall nG(n)$ non è vero allora significa che abbiamo trovato almeno un $\overline{n}$ tale che $G(\overline{n})$ non è vero, quindi vale il predicato $\exists n \neg G(n)$ che è esattamente la negazione del predicato $\forall nG(n)$. Quindi in questo caso vale il principio del terzo escluso con $A = \forall nG(n)$:

$$\forall nG(n) \ \vee \ \exists n \neg G(n)$$

Tuttavia non è possibile applicare lo stesso procedimento ad una struttura S' infinita. Se non si riesce a fornire una prova esplicita che tutti i numeri n in S' soddisfano $G(n)$ e non si riesce neanche ad esibire un controesempio, cioè un numero $\overline{n}$ che soddisfa $\neg G(\overline{n})$, allora non si può concludere che valga $\forall nG(n) \ \vee \ \exists n \neg G(n)$ in S'.

Nella logica intuizionista proposta da Brouwer, conoscere $\exists xP(x)$ come vera significa essere in grado, almeno idealmente, di produrre un individuo specifico d del dominio di quantificazione D per cui $P(d)$ è vera. E similmente, conoscere la verità di $A \vee B$ significa, almeno idealmente, sapere che vale A oppure sapere che vale B [122].

Il principio del terzo escluso è equivalente ad altri principi della logica classica fra di essi la legge della doppia negazione per cui $\neg\neg A \rightarrow A$ (da cui segue il metodo di dimostrazione per assurdo o *reductio ad absurdum*) e il principio secondo il quale $((A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow B$. In logica intuizionista tali principi non sono più *verità incontrovertibili* ma dipendono dall'interpretazione delle costanti logiche $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$.

Assume quindi un'importanza centrale l'interpretazione dei connettivi che, nella semantica BHK (dai nomi di Brouwer, Heyting e Kolmogorov) vengono interpretati, alla luce di una concezione costruttiva delle dimostrazioni, nel modo seguente:

1. una dimostrazione di $A \wedge B$ consiste in una coppia il cui primo elemento è una dimostrazione di A e il secondo elemento è una dimostrazione di B;

2. una dimostrazione di $A \vee B$ è data da una dimostrazione di A oppure da una dimostrazione di B;

3. una dimostrazione di $A \rightarrow B$ è una costruzione che associa ad ogni dimostrazione di A, una dimostrazione di B;

4. una dimostrazione di $\exists xP(x)$ per x appartenente a un certo dominio di quantificazione D è data da una dimostrazione di $P(d)$ dove $d \in D$;

5. una dimostrazione di $\forall xP(x)$ per x appartenente a un certo dominio di quantificazione D è una costruzione che associa ad ogni elemento $x \in D$, una dimostrazione di $D(x)$;

6. il simbolo $\perp$ rappresenta l'assurdo (o la contraddizione): una proposizione per cui non esistono dimostrazioni;

7. la negazione di una formula $\neg A$ corrisponde all'implicazione $A \rightarrow \perp$ cioè a una costruzione che trasforma ogni dimostrazione di A in una dimostrazione di $\perp$.

Questa interpretazione della Logica intuizionista compare implicitamente nei lavori di Brouwer del 1908, viene resa esplicita per la Logica proposizionale da Kolmogorov nel 1932 e viene estesa anche alla Logica predicativa da Heyting nel 1934 [138].

Nel seguito vedremo che la concezione costruttiva delle dimostrazioni e la semantica BHK acquistano un significato computazionale alla luce del paradigma *formulae as types* basato sulla corrispondenza di Curry-Howard (si veda il paragrafo 3.11.4).

Un momento importante per la Teoria della Dimostrazione intuizionista è la formulazione del sistema di deduzione naturale NJ e del calcolo dei sequenti intuizionista. Riportiamo di seguito l'assioma e le regole di deduzione per la logica intuizionista evidenziando le differenze con il calcolo per la Logica classica esposto nel paragrafo 3.3.

$$\text{(Assioma) } A$$

$$(\wedge I)\ \frac{A \qquad B}{A \wedge B} \qquad\qquad (\wedge E_1)\ \frac{A \wedge B}{A} \qquad (\wedge E_2)\ \frac{A \wedge B}{B}$$

$$(\vee I_1)\ \frac{A}{A \vee B} \qquad (\vee I_2)\ \frac{B}{A \vee B} \qquad\qquad (\vee E)\ \frac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C}$$

$$(\to I)\ \frac{\begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{A \to B} \qquad\qquad (\to E)\ \frac{A \qquad A \to B}{B}$$

$$(\forall I)\ \frac{A(a)}{\forall x A(x)}$$

a non libera nelle assunzioni non scaricate di A e in $\forall x A(x)$

$$(\forall E)\ \frac{\forall x A(x)}{A(t/x)}$$

t libero per x in A

$$(\exists I)\ \frac{A(t/x)}{\exists x A(x)}$$

t libero per x in A

$$(\exists E)\ \frac{\exists x A(x) \qquad \begin{matrix}[A(a)]\\ B\end{matrix}}{B}$$

x non libera in B e nelle premesse di B

$$(\perp_i)\ \frac{\perp}{A}$$

A formula atomica diversa da $\perp$

Le regole appena scritte sembrano molto simili a quelle della deduzione naturale per la Logica classica (cfr paragrafo 3.3). In particolare una differenza riguarda la regola $\perp_i$ che si discosta dall'analoga regola del caso classico perché non prevede l'eventuale *scaricamento* dell'ipotesi $\neg A$. Tuttavia questa differenza è centrale. Il significato della regola $\perp_i$ è: "da una proposizione falsa è possibile dedurre qualunque proposizione", ciò corrisponde al principio dell'*ex falso quodlibet*, valido anche in

Logica classica[2]. D'altra parte il significato della regola $\bot_c$ è : "se dalla negazione di una proposizione A ottengo un'assurdo allora posso concludere che la proposizione A è vera", questo è il procedimento di *reductio ad absurdum* che, come abbiamo detto, non è valido in Logica intuizionista.

Inoltre notiamo che per la Logica intuizionista abbiamo esplicitato le regole della disgiunzione $\vee I$, $\vee E_1$, $\vee E_2$. Queste regole sono superflue nella Logica classica in cui la disgiunzione è definita in termini di negazione e di congiunzione nel modo seguente:

$$A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

questa uguaglianza non è più valida in Logica intuizionista perché le due proposizioni non sono equivalenti ovvero non si possono derivare l'una dall'altra. Per mostrare ciò ricordiamo la definizione della negazione che continua ad essere valida anche in Logica intuizionista:

$$\neg A = A \to \bot$$

da questa definizione e dalle regole per l'implicazione $\to I$ e $\to E$, otteniamo le seguenti regole per la negazione (valide quindi sia in Logica classica sia in Logica intuizionista):

$$(\neg I)\ \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \bot\end{matrix}}{\neg A} \qquad\qquad (\neg E)\ \dfrac{A \qquad \neg A}{\bot}$$

Ora mostriamo come dall'ipotesi $A \vee B$ è possibile dedurre $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ (anche in Logica intuizionista) mediante la seguente derivazione:

$$\dfrac{\dfrac{A \vee B \qquad \dfrac{[A]^1 \qquad \dfrac{[\neg A \wedge \neg B]^2}{\neg A}\,(\wedge E_1)}{\bot}\,(\neg E) \qquad \dfrac{[B]^1 \qquad \dfrac{[\neg A \wedge \neg B]^2}{\neg B}\,(\wedge E_2)}{\bot}\,(\neg E)}{\bot}\,(\vee E)^1}{\neg(\neg A \wedge \neg B)}\,(\neg I)^2$$

Nella derivazione precedente abbiamo ottenuto, dall'ipotesi non scaricata $A \vee B$, la conclusione $\neg(\neg A \wedge \neg B)$. Il viceversa non è possibile in Logica intuizionista, mentre, in Logica classica, si può ottenere anche la conclusione $A \vee B$ a partire dall'ipotesi $\neg(\neg A \wedge \neg B)$, mediante l'applicazione della regola $\bot_c$ come si vede nella deduzione seguente:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \vee B}\,(\vee I_1) \qquad [\neg(A \vee B)]^3}{\bot}\,(\neg E)}{\neg A}\,(\neg I)^1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^2}{A \vee B}\,(\vee I_2) \qquad [\neg(A \vee B)]^3}{\bot}\,(\neg E)}{\neg B}\,(\neg I)^2}{\neg A \wedge \neg B}\,(\wedge I) \qquad \neg(\neg A \wedge \neg B)}{\bot}\,(\neg E)}{A \vee B}\,(\bot_c)^3$$

[2] Si noti che nella regola $\bot_c$ è previsto anche il caso in cui l'ipotesi fra parentesi $\neg A$ venga scaricata zero volte, quindi la regola $\bot_c$ comprende la regola $\bot_i$ come caso particolare.

3.5 Il Calcolo dei Sequenti

In [51] Gentzen motiva l'introduzione del calcolo dei sequenti, con la necessità di avere un sistema deduttivo che abbia i vantaggi sia dei calcoli alla Hilbert, che Gentzen chiama *logistici*, sia della deduzione naturale. Come i calcoli logistici, il calcolo dei sequenti non deve avere *assunzioni*, ovvero ipotesi non scaricate mentre della deduzione naturale deve conservare la divisione delle forme di inferenza in regole di introduzione e regole di eliminazione.
A livello intuitivo, una deduzione naturale di una formula B che dipende dalle assunzioni $A_1, A_2, ..., A_n$, corrisponde a una dimostrazione logistica della formula $A_1 \wedge ... \wedge A_n \to B$. Pertanto Gentzen introduce il simbolo metalinguistico di sequente (che con simbologia più moderna noi indicheremo con $\vdash$)[3] e, al posto della formula $A_1 \wedge ... \wedge A_n \to B$, scrive il sequente:

$$A_1, ..., A_n \vdash B$$

mantenendone però, a livello informale, lo stesso significato.
Il calcolo dei sequenti ha come oggetti formule del tipo:

$$A_1, ..., A_n \vdash B_1, ..., B_m$$

sulle quali si può operare mediante una serie di regole. L'interpretazione naturale del sequente $A_1, ..., A_n \vdash B_1, ..., B_m$ è $A_1 \wedge ... \wedge A_n \vdash B_1 \vee ... \vee B_m$, cioè la dimostrabilità del sequente corrisponde al fatto che dalla congiunzione delle formule che si trovano a sinistra, segue la disgiunzione delle formule che si trovano a destra. In Logica classica si hanno in generale n formule a sinistra del sequente e m formule a destra del simbolo di sequente (si può avere anche $n = 0$ oppure $m = 0$). In Logica intuizionista invece a destra del simbolo di sequente è presente sempre una e una sola formula. Ciò è dovuto al fatto che in Logica intuizionista si dimostra la disgiunzione di più formule solo quando si riesce a dimostrare una di quelle formule. Pertanto il sequente

$$\vdash A, \neg A$$

non è in generale dimostrabile in Logica intuizionista mentre è dimostrabile in Logica classica a partire dall'assioma $A \vdash A$ grazie alla presenza di più formule a destra del sequente e corrisponde alla *legge del terzo escluso*. Come abbiamo visto infatti in Logica intuizionista la legge del terzo escluso non vale.
Vediamo ora le regole del calcolo dei sequenti per la logica classica. Nell'introdurre formalmente il calcolo dei sequenti seguiremo l'approccio di [1] in cui la negazione viene vista non come un connettivo ma come una relazione binaria simmetrica tra le formule del linguaggio. Ciò permette di evidenziare il dualismo della Logica classica in cui ogni simbolo logico ammette un suo duale per mezzo della negazione come rappresentato dalla seguente tabella:

V	**F**
F	**V**
$\vee$	$\wedge$
$\wedge$	$\vee$
$\forall$	$\exists$
$\exists$	$\forall$

in cui i simboli **V** e **F** rappresentano rispettivamente le costanti logiche del vero e del falso (**F** è equivalente al simbolo $\perp$ che abbiamo usato nell'esporre la deduzione naturale). Sull'insieme delle formule del linguaggio logico del primo ordine è definita la negazione partendo dal presupposto che ogni variabile proposizionale e ogni simbolo predicativo ammetta una sua negazione. Inoltre la negazione di una formula contente i simboli logici è definita come segue:

[3] Nell'articolo originale di Gentzen [51] la congiunzione è rappresentata dal simbolo &, l'implicazione dal simbolo $\supset$ e il sequente dal simbolo $\to$ quindi alla formula logistica $A_1\&...\&A_n \supset B$ corrisponde il sequente $A_1, ..., A_n \to B$; abbiamo preferito usare la notazione che è entrata nell'uso comune per evitare ambiguità.

$\neg\ \mathbf{V} = \mathbf{F}$
$\neg\ \mathbf{F} = \mathbf{V}$
$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
$\neg\forall x A = \exists x \neg A$
$\neg\exists x A = \forall x \neg A$

Inoltre, se A e B sono formule, allora l'implicazione è così definita:

$$A \to B = \neg A \vee B$$

e la doppia implicazione è definita come:

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$$

In questo linguaggio definiamo un sequente come un *multinsieme* finito di formule, ovvero un insieme di occorrenze di formule, in numero finito, in cui la stessa formula può apparire più volte. Se Γ è una sequenza ordinata che contiene tutti e soli gli elementi del sequente allora $\vdash \Gamma$ è una *presentazione* del sequente. L'ordine in cui compaiono le formule in una data presentazione di un sequente è inessenziale.
Quando focalizziamo l'attenzione su una data occorrenza di una formula A allora il sequente viene di solito rappresentato in una delle seguenti forme:

$$\vdash A, \Gamma \quad \text{oppure} \quad \vdash \Gamma, A$$

e Γ viene chiamato il *contesto* di A in quel sequente. Le regole del calcolo dei sequenti permettono di derivare un sequente da nessuno (regole 0-arie), uno (regole unarie) o due sequenti (regole binarie). Tali regole possono essere divise in gruppi come segue:

- **Regole basilari o gruppo identità: assioma (Ax o ID) e taglio (cut)**

$$\frac{}{\vdash A, \neg A}\ (\text{Ax o ID}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, \neg A}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (\text{cut})$$

- **Regole strutturali: indebolimento (W) e contrazione (C)**

$$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A}\ (\text{W}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, A}{\vdash \Gamma, A}\ (\text{C})$$

- **Regole logiche**
  - **Regole per le unità logiche V e F**

$$\frac{}{\vdash \mathbf{V}}\ (\text{V}) \qquad \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \mathbf{F}}\ (\text{F})$$

  - **Regole per i connettivi** $\wedge$ **e** $\vee$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B}\ (\wedge) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \vee B}\ (\vee_1) \qquad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \vee B}\ (\vee_2)$$

- **Regole per i quantificatori** $\forall$ **e** $\exists$: Se y non compare come variabile libera nel contesto Γ e t è un termine libero per x in A:

$$\frac{\vdash \Gamma, A(y/x)}{\vdash \Gamma, \forall x A(x)}\ (\forall) \qquad \frac{\vdash \Delta, A(t/x)}{\vdash \Gamma, \exists x A(x)}\ (\exists)$$

Una volta fissate le regole del calcolo dei sequenti è possibile definire una **derivazione** di un sequente $\vdash \Gamma$:

Definizione 6. Una **derivazione** di un sequente $\vdash \Gamma$ è un albero finito tale che:

- la radice è il sequente $\vdash \Gamma$;
- ogni foglia è conclusione di una regola 0-aria, cioè è un'applicazione dell'assioma o della regola del vero;

- ogni nodo è un sequente che è ottenuto dai suoi predecessori mediante l'applicazione di una regola del calcolo dei sequenti.

A titolo di esempio riportiamo la derivazione del sequente $\vdash \neg A \vee (\neg B \vee (A \wedge B))$ che corrisponde alla dimostrazione della formula $A \to (B \to (A \wedge B))$ che abbiamo mostrato nel paragrafo precedente in deduzione naturale.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash A, \neg A}\,(\mathrm{Ax})}{\vdash A, \neg A, \neg B}\,(\mathrm{W}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash B, \neg B}\,(\mathrm{Ax})}{\vdash B, \neg B, \neg A}\,(\mathrm{W})}{\vdash \neg A, \neg B, A \wedge B}\,(\wedge)}{\vdash \neg A, \neg B, \neg B \vee (A \wedge B)}\,(\vee_2)}{\vdash \neg A, \neg B \vee (A \wedge B), \neg B \vee (A \wedge B)}\,(\vee_1)}{\vdash \neg A, \neg B \vee (A \wedge B)}\,(\mathrm{C})}{\vdash \neg A, \neg A \vee (\neg B \vee (A \wedge B))}\,(\vee_2)}{\vdash \neg A \vee (\neg B \vee (A \wedge B)), \neg A \vee (\neg B \vee (A \wedge B))}\,(\vee_1)}{\vdash \neg A \vee (\neg B \vee (A \wedge B))}\,(\mathrm{C})}{}
$$

Analizzando le regole appena esposte ci rendiamo conto che le regole logiche introducono i simboli logici a destra del sequente. Grazie a tali regole e alle regole basilari (assioma e taglio) è possibile riprodurre quella simmetria tra regole di introduzione e di eliminazione che è presente nella deduzione naturale, secondo le intenzioni originarie di Gentzen. Ad esempio vediamo come è possibile riprodurre la prima regola di eliminazione della congiunzione ($\wedge E_1$):

$$
\dfrac{\vdash \Gamma, A \wedge B \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash A, \neg A}\,(\mathrm{Ax})}{\vdash A, \neg A \vee \neg B}\,(\vee_1)}{\vdash \Gamma, A}\,(\mathrm{cut})
$$

Gentzen osserva però che sono necessarie delle regole che esulano dalla simmetria introduzione/eliminazione di simboli logici; tuttavia il vantaggio del calcolo dei sequenti è che tali regole (contrazione e indebolimento) possono essere formulate facendo riferimento solo alla struttura del sequente stesso, per questo Gentzen assegna loro il nome di regole strutturali.

Nella presentazione del calcolo dei sequenti che abbiamo dato, le formule compaiono solo a destra del simbolo $\vdash$. Ciò è sostanzialmente equivalente alla trattazione originale di Gentzen della logica classica in cui il sequente viene rappresentato come $A_1, ..., A_n \vdash B_1, ..., B_m$ e la negazione è un connettivo per cui valgono le regole:

$$
\dfrac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}
$$

infatti le formule che compaiono a sinistra di $\vdash$ possono essere trasferite a destra di $\vdash$ dopo averle negate e viceversa.
Le regole del calcolo dei sequenti vengono classificate in *reversibili*, quando le premesse si derivano, nel calcolo dei sequenti, dalla conclusione, e *irreversibili* quando ciò non avviene. Le regole del $\mathbf{F}$, $\wedge$, $\forall$ e la contrazione sono reversibili mentre le regole $\mathbf{V}$[4], $\vee$, $\exists$ e l'indebolimento sono irreversibili. Si dice che una derivazione di un sequente S gode della *proprietà della sottoformula* se ogni occorrenza di formule in un sequente della derivazione è sottoformula[5] di una occorrenza di formula nel sequente S.

[4] Il concetto di reversibilità per la regola del vero è diverso da quello che abbiamo descritto per le altre regole. Infatti quando si tratta una regola 0-aria, non ha senso affermare che le premesse possono essere derivate dalla conclusione. In questo caso la regola si dice reversibile se esprime una condizione non solo sufficiente ma anche necessaria per la derivazione di una delle formule del sequente nel contesto dato. Nel caso della regola del vero, la derivazione di $\mathbf{V}$ nel contesto vuoto non è l'unica possibile pertanto la regola è irreversibile.

[5] Qui il concetto di sottoformula è inteso in senso esteso, sono considerate sottoformule di una formula A tutte le formule che "compongono" A e anche le formule che si ottengono da queste sostituendo termini al posto di variabili.

Una derivazione del calcolo dei sequenti si dice *cut-free* se non contiene alcuna applicazione della regola del taglio.
Il risultato fondamentale di Gentzen relativo al calcolo dei sequenti è il teorema di eliminazione del taglio.

Teorema 11 (di eliminazione del taglio (**Hauptsatz**))**.** *Esiste una procedura effettiva che associa ad ogni derivazione π di un sequente $\vdash \Gamma$, una derivazione π' cut-free di $\vdash \Gamma$.*

Come conseguenza del teorema di eliminazione del taglio abbiamo che ogni derivazione può essere trasformata in una derivazione dello stesso sequente che ha la proprietà della sottoformula.
L'aspetto interessante di questo risultato ai fini della nostra lettura della storia della Teoria della Dimostrazione in Italia, è la strada tracciata da Gentzen nella dimostrazione del teorema di eliminazione del taglio.
Infatti in [51] si descrive una procedura di trasformazione delle derivazioni che influenzerà profondamente la storia della Logica e i suoi legami con l'Informatica anche in Italia, sebbene in un secondo momento rispetto all'ambiente di ricerca internazionale e con alterne vicende come vedremo nel seguito del capitolo.
Tale procedura si basa su alcune regole di trasformazione delle derivazioni che sono definite in corrispondenza alle regole del calcolo dei sequenti.
A titolo di esempio mostriamo una regola di trasformazione di una derivazione che corrisponde alle regole $\wedge$ e $\vee_1$.
Partiamo da una derivazione in cui è presente un taglio tra una formula $A \wedge B$ (introdotta tramite la regola $\wedge$) e la formula $\neg A \vee \neg B$ (introdotta tramite la regola $\vee_1$) e trasformiamo tale derivazione in un'altra derivazione (quella che compare nella seconda riga, dopo il simbolo $\rightsquigarrow$) in cui la regola di taglio è applicata alle formule A e $\neg A$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \pi_1\\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \pi_2\\ \vdash \Gamma, B\end{matrix}}{\vdash \Gamma, A \wedge B}(\wedge) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \pi_3\\ \vdash \Delta, \neg A\end{matrix}}{\vdash \Delta, \neg A \vee \neg B}(\vee_1)}{\vdash \Gamma, \Delta}(\text{cut}) \qquad \rightsquigarrow$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \pi_1\\ \vdash \Gamma, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \pi_3\\ \vdash \Delta, \neg A\end{matrix}}{\vdash \Gamma, \Delta}(\text{cut})$$

La trasformazione appena descritta permette il passaggio da una derivazione con un taglio su una formula $A \wedge B$ ad una deduzione contenente un taglio su una formula di *grado* minore. In generale, applicando le regole di trasformazione delle derivazioni, può accadere che il numero dei tagli e anche la lunghezza delle derivazioni aumenti. Tuttavia è possibile definire una *misura della complessità* delle derivazioni che, durante il processo di trasformazione, dimininuisce sempre; è questa la chiave per dimostrare l'eliminazione del taglio.
Le regole di trasformazione delle derivazioni costituiscono l'architettura di una procedura di calcolo che ha come oggetto le derivazioni stesse.
Abbiamo accennato al fatto che Gentzen introduce il calcolo dei sequenti per avere un sistema in cui dimostrare in maniera agevole il teorema di eliminazione del taglio.
In seguito, soprattutto grazie a Prawitz [110], ci si rende conto che il risultato di Gentzen può essere dimostrato anche in termini di deduzione naturale. Il teorema di eliminazione del taglio per il calcolo dei sequenti corrisponde infatti al teorema di normalizzazione in deduzione naturale.

Fra i logici italiani che hanno lavorato nell'ambito della deduzione naturale e del calcolo dei sequenti dobbiamo citare, oltre a Cellucci il cui lavoro sarà analizzato nel paragrafo 3.6, anche Previale. Suoi sono alcuni lavori riguardo la congettura di Takeuti [111] per la Logica del secondo ordine formalizzata nel calcolo dei sequenti e sull'eliminazione del taglio [112] interesse che permane anche in alcuni suoi lavori odierni [113].

3.6 *Teoria della Dimostrazione* di Carlo Cellucci

Come abbiamo già detto, l'ingresso ufficiale della Teoria della Dimostrazione in Italia risale alla pubblicazione nel 1978 di *Teoria della Dimostrazione* di Carlo Cellucci per Boringhieri. Scopo principale del testo è fornire una traduzione in italiano degli elementi fondamentali della Teoria della Dimostrazione. In particolare la trattazione si sviluppa, con approccio rigoroso, attorno a *due tipi di risultati: il teorema di normalizzazione e la proprietà di univocità* [27]. I riferimenti di Cellucci nella stesura del testo sono i lavori di Prawitz e Kreisel.

In particolare l'autore, nell'introduzione, afferma che il testo ha origine da alcune note di un corso che aveva tenuto all'Università del Sussex nell'anno accademico 1970-71, *subito dopo quel Second Scandinavian Logic Symposium (Oslo, 18-20 giugno 1970) che per molti versi può essere considerato l'atto di nascita della teoria generale.*

Accanto alla riproposizione in italiano dei risultati di Prawitz, Cellucci riporta alcuni suoi contributi originali, in particolare studia come la lunghezza delle dimostrazioni, durante il processo di normalizzazione, possa essere *controllata*, ovvero limitata superiormente da un'esponenziazione iterata.

In questo paragrafo analizzeremo da vicino tali risultati e le loro dimostrazioni al fine di evidenziare un parallelo tra tale trattazione della teoria della dimostrazione e lo studio del λ-calcolo che veniva portato avanti, negli stessi anni, sempre in Italia, da Corrado Böhm.

Per studiare la dimostrazione del teorema di normalizzazione introduciamo un processo di trasformazione delle derivazioni tipico della deduzione naturale che ha il suo fulcro nel concetto di *deviazione* in una derivazione. Una *deviazione* di una dimostrazione $\mathcal{D}$ è la sequenza data da una applicazione di una regola di introduzione immediatamente seguita da una regola di eliminazione in modo tale che la regola di eliminazione abbia come premessa, in cui compare la costante logica da eliminare, la formula ottenuta per applicazione della regola di introduzione. Tale formula è detta *formula di deviazione.*

A titolo di esempio mostriamo una deviazione in cui la regola di introduzione $(\wedge I)$ è immediatamente seguita dalla regola di eliminazione $(\wedge E_1)$.

$$\dfrac{\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}\,(\wedge I)}{A}\,(\wedge E_1)$$

Nell'esempio precedente, la formula di deviazione è $A \wedge B$.

È immediato comprendere che una deviazione come la precedente può essere eliminata da una dimostrazione senza alterarne il senso, la conclusione A della deviazione precedente era infatti già presente nelle premesse. Seguendo questa idea si definiscono le regole di eliminazione delle deviazioni, dette regole di *conversione.* Su tali regole si basa una relazione di conversione tra le dimostrazioni.

L'obiettivo è quello di pervenire, tramite l'applicazione successiva di un numero finito di regole di conversione, ad una derivazione priva di deviazioni, ovvero a quella che si dice *dimostrazione normale.*

Di seguito elenchiamo le regole di conversione legate alle varie costanti logiche, indicando con il simbolo $\rightsquigarrow$ la relazione tra una dimostrazione contenente una deviazione e la dimostrazione ottenuta mediante conversione, cioè eliminando la deviazione in questione.

1. $\wedge_1$ conversione: $$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ B\end{matrix}}{A \wedge B}\,(\wedge I)}{A}\,(\wedge E_1) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A\end{matrix}$$

2. $\wedge_2$ conversione: $$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ B\end{matrix}}{A \wedge B}\,(\wedge I)}{B}\,(\wedge E_2) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ B\end{matrix}$$

3. $\rightarrow$ conversione: $$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \mathcal{D}_2\\ B\end{matrix}}{A \rightarrow B}\,(\rightarrow I)}{B}\,(\rightarrow E) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ A\\ \mathcal{D}_2\\ B\end{matrix}$$

$$\text{4. } \forall \text{ conversione:} \quad \begin{array}{c} \mathcal{D}(a) \\ \dfrac{\dfrac{A(a)}{\forall x A(x)}\,(\forall I)}{A(t/x)}\,(\forall E) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}(t/a)\\ A(t/a)\end{array}$$

Si dice che una dimostrazione $\mathcal{D}$ si *converte immediatamente* in una dimostrazione $\mathcal{D}'$ se $\mathcal{D}'$ si ottiene da $\mathcal{D}$ mediante l'applicazione di una regola di conversione. Si dice che una dimostrazione $\mathcal{D}$ si *converte* in una dimostrazione $\mathcal{D}'$, e si scrive $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}'$ se esiste una successione finita di dimostrazioni:

$$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_n$$

tali che $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$, $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}'$ e per ogni $1 \leq i < n$ si ha che $\mathcal{D}_i$ si converte immediatamente in $\mathcal{D}_{i+1}$. Una successione finita del tipo descritto si dice successione di conversioni di lunghezza n.

Osservazione 1. *Se $\mathcal{D}$ si converte in $\mathcal{D}'$ allora $\mathcal{D}'$ è ancora una dimostrazione, cioè soddisfa le condizioni per l'applicazione delle regole $(\forall I), (\forall E), (\bot)$. Inoltre $\mathcal{D}'$ ha la stessa conclusione di $\mathcal{D}$ e le ipotesi non scaricate di $\mathcal{D}'$ sono comprese tra le ipotesi non scaricate di $\mathcal{D}$.*

Si noti che, in generale, dopo una conversione immediata, non è detto che il numero di deviazioni diminuisca. Infatti l'applicazione di una regola di conversione elimina una deviazione ma potrebbe farne apparire delle altre. Tuttavia le eventuali nuove formule di deviazione che dovessero apparire nell'applicazione di una regola di conversione hanno una "complessità" inferiore rispetto alla formula che è stata eliminata nella conversione. Per rendere più precisa questa idea di complessità della formula, introduciamo la nozione di *grado*.

Definizione 7. Il *grado* $g(A)$ di una formula A è definito nel modo seguente:

- se A è una formula atomica allora $g(A) = 0$;
- se $A = B \wedge C$ allora $g(B \wedge C) = max\{g(B), g(C)\} + 1$
- se $A = B \rightarrow C$ allora $g(B \rightarrow C) = max\{g(B), g(C)\} + 1$
- $g(\forall x A(x)) = g(A) + 1$

Possiamo riformulare quanto detto precedentemente affermando che il grado delle eventuali nuove formule di deviazione che dovessero apparire nell'applicazione di una regola di conversione è sempre minore del grado della formula che è stata eliminata nella conversione.
Per illustrare ciò mostriamo una successione di conversioni applicate a una dimostrazione della formula:

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Partiamo dalla seguente dimostrazione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \qquad [B]^1}{A \wedge B}\,(\wedge I)}{B \rightarrow A \wedge B}\,(\rightarrow I)^1}{A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)}\,(\rightarrow I)^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)]^5 \qquad [A]^4}{B \rightarrow A \wedge B}\,(\rightarrow E) \qquad [B]^3}{A \wedge B}\,(\rightarrow E)}{A}\,(\wedge E_1)}{B \rightarrow A}\,(\rightarrow I)^3}{A \rightarrow (B \rightarrow A)}\,(\rightarrow I)^4}{(A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A))}\,(\rightarrow I)^5}{A \rightarrow (B \rightarrow A)}\,(\rightarrow E)$$

Questa dimostrazione contiene una deviazione costituita dalla sequenza della regola di introduzione $(\rightarrow I)^5$, immediatamente seguita dalla regola di eliminazione $(\rightarrow E)$. Per eliminare tale deviazione, applichiamo la regola di $\rightarrow$ conversione, ottenendo la seguente derivazione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \qquad [B]^1}{A \wedge B}\,(\wedge I)}{B \to A \wedge B}\,(\to I)^1}{A \to (B \to A \wedge B)}\,(\to I)^2 \qquad [A]^4}{B \to A \wedge B}\,(\to E) \qquad [B]^3}{A \wedge B}\,(\to E)}{A}\,(\wedge E_1)}{B \to A}\,(\to I)^3}{A \to (B \to A)}\,(\to I)^4$$

Possiamo notare che, dopo la conversione, pur avendo eliminato una deviazione, ne abbiamo introdotta un'altra, ovvero la deviazione data dalla sequenza della regola di introduzione $(\to I)^2$, immediatamente seguita dalla regola di eliminazione $(\to E)$.
Per eliminare questa nuova deviazione, applichiamo nuovamente la regola di $\to$ conversione, ottenendo la seguente derivazione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^4 \qquad [B]^1}{A \wedge B}\,(\wedge I)}{B \to A \wedge B}\,(\to I)^1 \qquad [B]^3}{A \wedge B}\,(\to E)}{A}\,(\wedge E_1)}{B \to A}\,(\to I)^3}{A \to (B \to A)}\,(\to I)^4$$

Anche in quest'ultima derivazione, eliminando una deviazione, ne abbiamo introdotta un'altra: la deviazione costituita da $(\to I)^1$, immediatamente seguita dalla regola di eliminazione $(\to E)$. Eliminiamo anche questa deviazione ottenendo:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^4 \qquad [B]^3}{A \wedge B}\,(\wedge I)}{A}\,(\wedge E_1)}{B \to A}\,(\to I)^3}{A \to (B \to A)}\,(\to I)^4$$

L'ultima derivazione scritta contiene ancora una deviazione, questa volta si tratta della sequenza costituita dalla regola $(\wedge I)$ immediatamente seguita dalla regola $(\wedge E_1)$. Eliminiamo anche questa deviazione applicando la regola di $\wedge_1$ conversione e otteniamo:

$$\dfrac{\dfrac{[A]^4}{B \to A}\,(\to I)^3}{A \to (B \to A)}\,(\to I)^4$$

che non contiene deviazioni ed è quindi una derivazione in forma normale.
Nella successione di conversioni precedente abbiamo visto un esempio in cui una dimostrazione viene trasformata, attraverso una serie di passaggi, in una dimostrazione in forma normale. Il *Teorema di normalizzazione* afferma che questo tipo di trasformazione si può effettuare per ogni dimostrazione. Questa proprietà della deduzione naturale non è banale; infatti, come abbiamo visto nell'esempio precedente, non è detto che il numero di deviazioni diminuisca in ogni passaggio di conversione. La dimostrazione del teorema di normalizzazione si basa sul fatto che il *grado* delle formule di deviazione che nascono da un'applicazione di una regola di conversione è sempre minore del grado della formula di deviazione che viene eliminata da quell'applicazione.
Per approfondire ciò, introduciamo il concetto di grado di una dimostrazione.

Definizione 8. Il *grado* di una dimostrazione $\mathcal{D}$ è:

$$g(\mathcal{D}) = max\{g(A) : A \text{ è una formula di deviazione di } \mathcal{D}\}$$

In particolare $g(\mathcal{D}) = 0$ se $\mathcal{D}$ è in forma normale.

Lemma 6. *Se una derivazione $\mathcal{D}$ si riduce immediatamente in una derivazione $\mathcal{D}'$ allora $g(\mathcal{D}') \leq g(\mathcal{D})$.*

Dimostrazione. Discutiamo il caso in cui $\mathcal{D}$ si riduce immediatamente in $\mathcal{D}'$ mediante l'applicazione di una regola di $\to$ conversione ad una deviazione che ha come formula di deviazione $A \to B$ (gli altri casi sono analoghi). Tale applicazione elimina una occorrenza di $A \to B$ ma può generare altre deviazioni con formule di deviazione A o B che hanno grado strettamente minore rispetto al grado di $A \to B$.
Se $A \to B$ non è l'unica formula di deviazione di grado massimo in $\mathcal{D}$, cioè di grado $g(\mathcal{D})$, allora si ha $g(\mathcal{D}') = g(\mathcal{D})$ perché alcune formule di deviazione di grado massimo di $\mathcal{D}$ sono presenti anche in $\mathcal{D}'$ e le formule di deviazione presenti in $\mathcal{D}'$ ma non in $\mathcal{D}$ hanno grado minore di $g(\mathcal{D})$.
Se invece $A \to B$ è l'unica formula di deviazione di grado massimo in $\mathcal{D}$ allora $g(\mathcal{D}') < g(\mathcal{D})$ perché nessuna formula di deviazione di grado massimo di $\mathcal{D}$ è presente anche in $\mathcal{D}'$ e le formule di deviazione presenti in $\mathcal{D}'$ ma non in $\mathcal{D}$ sono occorrenze di A e B e hanno grado minore di $g(\mathcal{D}) = g(A \to B)$.

□

Lemma 7. *Date due dimostrazioni:* $\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\end{array}$ *e* $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{D}_2\end{array}$ *tali che nessuna variabile propria di $\mathcal{D}_2$ compare nelle assunzioni non scaricate di $\mathcal{D}_1$, il risultato della sostituzione di* $\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\end{array}$ *al posto della premessa A, cioè la dimostrazione:*

$$\mathcal{D} = \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\\ \mathcal{D}_2\end{array}$$

ha le seguenti proprietà:

1. $g(\mathcal{D}) \leq max\{g(\mathcal{D}_1), g(\mathcal{D}_2), g(A)\}$*;*
2. $l(\mathcal{D}) \leq l(\mathcal{D}_1) + l(\mathcal{D}_2)$

Dimostrazione. 1. Consideriamo che le deviazioni di $\mathcal{D}$ sono date dalle deviazioni di $\mathcal{D}_1$, dalle deviazioni di $\mathcal{D}_2$ ed eventualmente da una o più deviazioni che hanno come formula di deviazione la formula A. Quest'ultima eventualità può accadere se l'ultima regola di $\mathcal{D}_1$ è una regola di *introduzione*, e se una delle occorrenze di A come premessa in $\mathcal{D}_2$, è la premessa di una regola di *eliminazione* contenente la costante logica da eliminare. Pertanto l'unico modo per avere una nuova deviazione in $\mathcal{D}$ rispetto alle deviazioni di $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, è che A stessa sia una formula di deviazione di $\mathcal{D}$.

2. Dimostriamo l'enunciato per induzione su $l(\mathcal{D}_2)$. Se $l(\mathcal{D}_2) = 0$ allora la dimostrazione $\mathcal{D}_2$ coincide con l'applicazione dell'assioma A e si ha $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$, pertanto, in questo caso, $l(\mathcal{D}) = l(\mathcal{D}_1)$.
Se $l(\mathcal{D}_2) > 0$ allora abbiamo vari casi a seconda di quale sia l'ultima regola di deduzione applicata in $\mathcal{D}_2$. Mostriamo un esempio in cui l'ultima regola di $\mathcal{D}_2$ è unaria ($\wedge E_1$) e un esempio in cui l'ultima regola di $\mathcal{D}_2$ è binaria ($\to E$). Se l'ultima regola di $\mathcal{D}_2$ è $\wedge E_1$, allora:
$$\mathcal{D}_2 = \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2'\\ B \wedge C\end{array}}{B}\ .$$
Sia $\mathcal{D}' = \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\\ \mathcal{D}_2'\end{array}$ allora, per ipotesi induttiva, $l(\mathcal{D}') \leq l(\mathcal{D}_2') + l(\mathcal{D}_1)$ e dato che $\mathcal{D} = \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}'\\ B \wedge C\end{array}}{B}$
possiamo affermare, applicando la definizione di lunghezza di una dimostrazione, che:
$$l(\mathcal{D}) = l(\mathcal{D}') + 1 \leq l(\mathcal{D}_2') + 1 + l(\mathcal{D}_1) = l(\mathcal{D}_2) + l(\mathcal{D}_1)$$
Vediamo il caso in cui l'ultima regola di $\mathcal{D}_2$ è $\to E$, in questo caso: $\mathcal{D}_2 = \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2'\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2''\\ B \to C\end{array}}{C}\ .$

Siano $\mathcal{D}' = \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\\ \mathcal{D}_2'\end{array}$ e $\mathcal{D}'' = \begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\\ \mathcal{D}_2''\end{array}$ Allora
$$l(\mathcal{D}) \leq max\{l(\mathcal{D}'), l(\mathcal{D}'')\} + 1 \leq max\{l(\mathcal{D}_2') + l(\mathcal{D}_1), l(\mathcal{D}_2'') + l(\mathcal{D}_1)\} + 1$$

nell'ultima disuguaglianza abbiamo applicato l'ipotesi induttiva. Quindi si ha

$$l(\mathcal{D}) \leq l(\mathcal{D}_1) + max\{l(\mathcal{D}_2') + l(\mathcal{D}_2'')\} + 1 = l(\mathcal{D}_1) + l(\mathcal{D}_2)$$

Per le altre regole di deduzione si ragiona in maniera analoga.

□

Lemma 8. *Per ogni dimostrazione $\mathcal{D}$ esiste una dimostrazione $\mathcal{D}'$ priva di formule di deviazione che abbiano la forma di congiunzione o quantificazione universale e tale che $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}'$, $l(\mathcal{D}) \geq l(\mathcal{D}')$ e $g(\mathcal{D}) \geq g(\mathcal{D}')$.*

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che, date due derivazioni $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$, se $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}'$ allora $g(\mathcal{D}) \geq g(\mathcal{D}')$; ciò si ottiene applicando il lemma 6 un numero finito di volte.
Dimostriamo ora che esiste una derivazione $\mathcal{D}'$, priva di formule di deviazione in forma di congiunzione o quantificazione universale, tale che $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}'$ e $l(\mathcal{D}) \geq l(\mathcal{D}')$. Ragioniamo per induzione sulla lunghezza di $\mathcal{D}$. Se $l(\mathcal{D}) = 0$ allora $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$. Se $l(\mathcal{D}) > 0$ allora bisogna considerare l'ultima regola applicata in $\mathcal{D}$. Abbiamo tre casi:

1. L'ultima regola di $\mathcal{D}$ è una delle seguenti: $(\wedge I), (\rightarrow I), (\forall I), (\bot)$. In questo caso l'ultima regola non può essere parte di una deviazione quindi si applica il passo induttivo in maniera automatica. Vediamo per esempio il caso $(\rightarrow I)$, possiamo scrivere la deduzione nel modo seguente:

$$\mathcal{D}= \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\mathrm{A}]\\ \mathcal{D}_1\\ B\end{array}}{A \rightarrow B}$$

Per ipotesi induttiva esiste una derivazione $\mathcal{D}_1'$, priva di formule di deviazione in forma di congiunzione o quantificazione universale, tale che $\mathcal{D}_1 \succeq \mathcal{D}_1'$ e $l(\mathcal{D}_1) \geq l(\mathcal{D}_1')$. Grazie all'osservazione 1, possiamo considerare

$$\mathcal{D}'= \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\mathrm{A}]\\ \mathcal{D}_1'\\ B\end{array}}{A \rightarrow B}$$

che soddisfa la tesi del teorema, in particolare $l(\mathcal{D}') = l(\mathcal{D}_1') + 1 \leq l(\mathcal{D}_1) + 1 = l(\mathcal{D})$.

2. L'ultima regola di $\mathcal{D}$ è una delle seguenti: $(\wedge E_i), (\forall E)$. Riportiamo a titolo di esempio il caso $(\forall E)$, gli altri sono analoghi. La deduzione può essere scritta così:

$$\mathcal{D}= \quad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \forall x A(x)\end{array}}{A(t/x)}$$

Per ipotesi induttiva esiste una dimostrazione $\mathcal{D}_1'$, che soddisfa la tesi del teorema, a cui si riduce $\mathcal{D}_1$. In questo caso l'ultima regola potrebbe essere parte di una deviazione. Se non lo è allora la dimostrazione procede analogamente al caso precedente. Se invece l'ultima regola è parte di una deviazione, allora la formula di deviazione in questione ha la forma di una quantificazione universale e per dimostrare il passo induttivo, tale deviazione deve essere eliminata. La deduzione può essere scritta così:

$$\mathcal{D}= \quad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \forall x A(x)\end{array}}{A(t/x)} \qquad \text{dove} \qquad \mathcal{D}_1= \quad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2(a)\\ A(a)\end{array}}{\forall x A(x)}$$

Per ipotesi induttiva esiste una dimostrazione $\mathcal{D}_2'$ a cui $\mathcal{D}_2$ si riduce e che soddisfa le ipotesi del teorema. Pertanto possiamo definire

$$\mathcal{D}'= \quad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2'(t/a)\\ A(t/a)\end{array}$$

Infatti, considerando la dimostrazione

$$\mathcal{D}''= \cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ \forall x A(x)\end{array}}{A(t/x)} \qquad \text{dove} \qquad \mathcal{D}_1'= \cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2'(a)\\ A(a)\end{array}}{\forall x A(x)}$$

Dato che $\mathcal{D}_2(a) \succeq \mathcal{D}_2'(a)$, anche $\mathcal{D}_1 \succeq \mathcal{D}_1'$, quindi $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}''$, inoltre $\mathcal{D}''$ si riduce immediatamente a $\mathcal{D}'$ con l'applicazione della regola di $\forall$ conversione, pertanto $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}'$. Inoltre:

$$l(\mathcal{D}') = l(\mathcal{D}_2'(a)) \leq l(\mathcal{D}_2(a)) \leq l(\mathcal{D}_2(a)) + 1 = l(\mathcal{D}_1) \leq l(\mathcal{D}_1) + 1 = l(\mathcal{D})$$

nella prima disuguaglianza della catena precedente abbiamo applicato l'ipotesi induttiva.

3. L'ultima regola di $\mathcal{D}$ è ($\rightarrow$ E). La deduzione può essere scritta così:

$$\mathcal{D}= \cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ B \rightarrow C\end{array}}{C}$$

Per ipotesi induttiva, si possono trovare due dimostrazioni $\mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2'$ a cui si riducono $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ e che soddisfano le ipotesi del teorema. Possiamo pertanto definire:

$$\mathcal{D}'= \cfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1'\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2'\\ B \rightarrow C\end{array}}{C}$$

Infatti dall'ipoptesi induttiva $\mathcal{D}_1 \succeq \mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2 \succeq \mathcal{D}_2'$ si ha che $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}'$. Inoltre:

$$l(\mathcal{D}') = \max\{l(\mathcal{D}_1'), l(\mathcal{D}_2')\} + 1 \leq \max\{l(\mathcal{D}_1), l(\mathcal{D}_2)\} + 1 = l(\mathcal{D})$$

nella disuguaglianza precedente abbiamo applicato l'ipotesi induttiva. Si noti che, nella dimostrazione $\mathcal{D}'$, la sottodimostrazione $\mathcal{D}_2'$ potrebbe avere come ultima regola, l'introduzione di una implicazione ($\rightarrow$ I), anche se $\mathcal{D}_2$ non ha come ultima regola l'introduzione di una implicazione. Ciò significa che in $\mathcal{D}'$ possono comparire formule di deviazione che hanno la forma di implicazione, anche nel caso in cui tali devizioni non sono presenti in $\mathcal{D}$.

□

A questo punto abbiamo bisogno di un altro passaggio per arrivare alla normalizzazione. Il risultato precedente infatti non ci assicura una forma normale in quanto, nella derivazione $\mathcal{D}'$, potrebbero esserci ancora formule di deviazione contenenti implicazioni.
Il prossimo teorema ci permetterà di pervenire alla normalizzazione e, allo stesso tempo, di avere un limite superiore per la lunghezza della derivazione in forma normale $\mathcal{D}'$ in funzione della lunghezza e del grado di $\mathcal{D}$. Quest'ultimo aspetto costituisce il contributo originale di Cellucci e, per comprendere quale sia il limite superiore per la lunghezza della dimostrazione, dobbiamo introdurre l'esponenziazione iterata e alcune sue proprietà.

Definizione 9. Dato un numero naturale k, l'*esponenziazione iterata* $2_n(k)$ è definita induttivamente per mezzo delle seguenti clausole:

- $2_0(k) = k$;
- $2_{n+1}(k) = 2^{2_n(k)}$

L'esponenziazione iterata ha le proprietà seguenti:

Lemma 9. *Siano $m, n, k, p, k_1, k_2, ..., k_l$ numeri interi non negativi.*

1. *se $k_1 < k_2$ allora $2_n(k_1) < 2_n(k_2)$;*
2. *$max\{2_n(k_1), ..., 2_n(k_l)\} = 2_n(max\{k_1, ..., k_l\})$;*
3. *$2_n(k) + p \leq 2_n(k + p)$;*
4. *$2_n(2_m(k)) = 2_{n+m}(k)$;*
5. *se $n > 0$ allora $2_n(k) \cdot 2 \leq 2_n(k + 1)$.*

La dimostrazione delle proprietà esposte nel lemma 9 si ottiene in maniera immediata ragionando per induzione.
Per mezzo dell'esponenziazione e delle sue proprietà possiamo enunciare e dimostrare il seguente teorema.

Teorema 12. *Per ogni numero naturale n, per ogni derivazione $\mathcal{D}$ e ogni numero naturale m, se si ha $g(\mathcal{D}) \leq m+n$, allora esiste una derivazione $\mathcal{D}'$ tale che $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}'$, $l(\mathcal{D}') \leq 2_n(l(\mathcal{D}))$ e $g(\mathcal{D}') \leq m$.*

Di seguito dimostriamo il teorema precedente per induzione lessicografica sulla coppia $(n, l(\mathcal{D}))$. Ricordiamo infatti che il principio di induzione può essere applicato ad ogni insieme ben ordinato e l'insieme delle coppie di numeri naturali dotato dell'ordine lessicografico è un buon ordine isomorfo a $\omega \times \omega$.

Dimostrazione. Grazie al lemma 8 possiamo supporre che la dimostrazione $\mathcal{D}$ sia priva di formule di deviazione che abbiano la forma di congiunzione o quantificazione universale.
Dimostriamo che per ogni coppia di numeri naturali $(n, l(\mathcal{D}))$ e per ogni numero naturale m, se $\mathcal{D}$ è una derivazione tale che $g(\mathcal{D}) \leq m+n$, allora esiste una derivazione $\mathcal{D}'$ è tale che $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}'$, $l(\mathcal{D}') \leq 2_n(l(\mathcal{D}))$ e $g(\mathcal{D}') \leq m$. Dimostriamo ciò per induzione lessicografica sulla coppia $(n, l(\mathcal{D}))$.
Se $(n, l(\mathcal{D})) = (0, 0)$ allora basta prendere $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$ infatti $\mathcal{D}' \succeq \mathcal{D}$ per la proprietà riflessiva della relazione di conversione, inoltre $l(\mathcal{D}) = 2_0(l(\mathcal{D}))$ per la definizione di esponenziazione iterata, infine $g(\mathcal{D}) \leq m + 0 = m$.
Sia ora $(n, l(\mathcal{D})) > (0, 0)$. Supponiamo che la tesi sia vera per ogni (p, l) tale che $(p, l) < (n, l(\mathcal{D}))$, cioè che per ogni numero naturale m' e per ogni derivazione $\mathcal{D}_1$ tale che $l(\mathcal{D}_1) = l$ e $g(\mathcal{D}_1) \leq p + m'$ esiste una derivazione $\mathcal{D}_1'$ che soddisfi $\mathcal{D}_1 \succeq \mathcal{D}_1'$, $l(\mathcal{D}_1') \leq 2_p(l)$ e $g(\mathcal{D}_1') \leq m'$; e mostriamo che la tesi vale anche per $(n, l(\mathcal{D}))$.
Dobbiamo analizzare diversi casi a seconda dell'ultima regola applicata in $\mathcal{D}$. Abbiamo tre casi:

1. L'ultima regola di $\mathcal{D}$ è una delle seguenti: $(I\wedge), (I\rightarrow), (I\forall), (\perp)$. In questo caso l'ultima regola non può essere parte di una deviazione pertanto applichiamo il passo induttivo con pochi accorgimenti. Vediamo ad esempio il caso $(I\wedge)$. Possiamo scrivere la deduzione nel modo seguente:

$$\mathcal{D}= \dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \mathrm{A} & \mathrm{B}\end{array}}{A \wedge B}$$

   Siccome $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono sottodimostrazioni di $\mathcal{D}$, si ha che $g(\mathcal{D}_1) \leq g(\mathcal{D})$, $l(\mathcal{D}_1) < l(\mathcal{D})$, $g(\mathcal{D}_2) \leq g(\mathcal{D})$ e $l(\mathcal{D}_2) < l(\mathcal{D})$ quindi possiamo applicare l'ipotesi induttiva alle coppie $(n, l(\mathcal{D}_1))$ e $(n, l(\mathcal{D}_2))$, ponendo $m_1' = m_2' = m$, e dire che esistono due dimostrazioni $\mathcal{D}_1'$ e $\mathcal{D}_2'$ tali che $\mathcal{D}_1 \succeq \mathcal{D}_1'$, $\mathcal{D}_2 \succeq \mathcal{D}_2'$, $l(\mathcal{D}_1') \leq 2_n(l(\mathcal{D}_1))$, $l(\mathcal{D}_2') \leq 2_n(l(\mathcal{D}_2))$,$g(\mathcal{D}_1') \leq m$ e $g(\mathcal{D}_2') \leq m$. Prendiamo quindi come $\mathcal{D}'$ la dimostrazione:

$$\mathcal{D}'= \dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1' & \mathcal{D}_2' \\ \mathrm{A} & \mathrm{B}\end{array}}{A \wedge B}$$

   infatti, da $\mathcal{D}_1 \succeq \mathcal{D}_1'$, $\mathcal{D}_2 \succeq \mathcal{D}_2'$ possiamo dedurre che $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}'$, inoltre $l(\mathcal{D}') = max\{l(\mathcal{D}_1'), l(\mathcal{D}_2')\} + 1 \leq max\{2_n(l(\mathcal{D}_1)), 2_n(l(\mathcal{D}_2))\} + 1 = 2_n(max\{l(\mathcal{D}_1), l(\mathcal{D}_2)\}) + 1 \leq 2_n(max\{l(\mathcal{D}_1), l(\mathcal{D}_2)\} + 1) = 2_n(l(\mathcal{D}))$ dove abbiamo applicato il lemma 9 nella seconda uguaglianza e nella seconda disuguaglianza. Infine $g(\mathcal{D}') = max\{g(\mathcal{D}_1'), g(\mathcal{D}_2')\} \leq m$.

2. L'ultima regola di $\mathcal{D}$ è una delle seguenti: $(\wedge E_1), (\wedge E_2), (\forall E)$. Anche in questo caso l'ultima regola non può essere parte di una deviazione perché abbiamo supposto, applicando il lemma 8, che $\mathcal{D}$ sia priva di formule di deviazione che abbiano la forma di congiunzione o quantificazione universale. Tuttavia queste potrebbero comparire applicando il passo induttivo. Vediamo ad esempio il caso $(\wedge E_1)$, Possiamo scrivere la deduzione nel modo seguente:

$$\mathcal{D}= \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ A \wedge B\end{array}}{A}$$

   come nel caso precedente possiamo applicare l'ipotesi induttiva alla coppia $(n, l(\mathcal{D}_1))$ ponendo $m' = m$ e ottenendo una dimostrazione $\mathcal{D}_1'$ tale che $\mathcal{D}_1 \succeq \mathcal{D}_1'$, $l(\mathcal{D}_1') \leq 2_n(l(\mathcal{D}_1))$ e $g(\mathcal{D}_1') \leq m$.

A questo punto dobbiamo considerare se l'ultima regola di $\mathcal{D}'_1$ è del tipo $(\wedge I)$ oppure no. Se l'ultima regola di $\mathcal{D}'_1$ non è l'introduzione della congiunzione allora possiamo prendere come dimostrazione $\mathcal{D}'$ la dimostrazione seguente:

$$\mathcal{D}' = \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}'_1\\ A\wedge B\end{array}}{A}$$

infatti da $\mathcal{D}_1 \succeq \mathcal{D}'_1$ discende che $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}'$, inoltre $l(\mathcal{D}') = l(\mathcal{D}'_1) + 1 \leq 2_n(l(\mathcal{D}_1)) + 1 \leq 2_n(l(\mathcal{D}_1) + 1) = 2_n(l(\mathcal{D}))$ grazie al lemma 9, inoltre, poiché $A \wedge B$ non è una formula di deviazione, si ha che $g(\mathcal{D}') = g(\mathcal{D}'_1) \leq m$.

Quest'ultimo ragionamento non vale nel caso in cui l'ultima regola di $\mathcal{D}'_1$ introduca la congiunzione; in tal caso infatti $A \wedge B$ risuleterebbe essere una formula di deviazione che deve essere eliminata, tramite una $\wedge_1$-conversione, per ottenere la dimostrazione $\mathcal{D}'$. Quindi, se l'ultima regola di $\mathcal{D}'_1$ introduce l'implicazione, allora $\mathcal{D}'_1$ sarà della forma:

$$\mathcal{D}'_1 = \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{E}_1\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{E}_2\\ B\end{array}}{A\wedge B}$$

In questo caso prenderemo come $\mathcal{D}'$ la dimostrazione $\mathcal{E}_1$, infatti, sia $\mathcal{D}''$ della forma seguente:

$$\mathcal{D}'' = \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}'_1\\ A\wedge B\end{array}}{A}$$

allora, dato che $\mathcal{D}_1 \succeq \mathcal{D}'_1$, si ha $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}''$, inoltre $\mathcal{D}''$ si riduce immediatamente a $\mathcal{E}_1$ con un passo di $\wedge_1$-conversione. Quindi definendo $\mathcal{D}' = \mathcal{E}_1$ abbiamo $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}'$; inoltre $l(\mathcal{D}') < l(\mathcal{D}'_1) \leq 2_n(l(\mathcal{D}))$, infine $g(\mathcal{D}') \leq g(\mathcal{D}'_1) \leq m$.

3. L'ultima regola di $\mathcal{D}$ è $(\to E)$, questa regola deve essere studiata a parte perché potrebbe dar luogo ad una deviazione sotto forma di implicazione. Se l'ultima regola di $\mathcal{D}$ è $(\to E)$, allora $\mathcal{D}$ ha la forma seguente:

$$\mathcal{D} = \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ A\to B\end{array}}{B}$$

Dato che $l(\mathcal{D}_1) < l(\mathcal{D})$ e $l(\mathcal{D}_2) < l(\mathcal{D})$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva alle coppie $(n, l(\mathcal{D}_1))$ e $(n, l(\mathcal{D}_2))$, ponendo $m'_1 = m'_2 = m$. Esistono pertanto due dimostrazioni $\mathcal{D}'_1$ e $\mathcal{D}'_2$ tali che $\mathcal{D}_1 \succeq \mathcal{D}'_1$, $\mathcal{D}_2 \succeq \mathcal{D}'_2$, $l(\mathcal{D}'_1) \leq 2_n(l(\mathcal{D}_1))$, $l(\mathcal{D}'_2) \leq 2_n(l(\mathcal{D}_2))$, $g(\mathcal{D}'_1) \leq m$ e $g(\mathcal{D}'_2) \leq m$.
Se l'ultima regola di $\mathcal{D}'_2$ è diversa da $(\to I)$, allora possiamo prendere, come $\mathcal{D}'$, la dimostrazione seguente:

$$\mathcal{D}' = \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}'_1\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}'_2\\ A\to B\end{array}}{B}$$

Infatti in questo caso la formula $A \to B$ non può essere una formula di deviazione e si ha $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}'$ (dato che $\mathcal{D}_1 \succeq \mathcal{D}'_1$ e $\mathcal{D}_2 \succeq \mathcal{D}'_2$). Inoltre $l(\mathcal{D}') = max\{l(\mathcal{D}'_1), l(\mathcal{D}'_2)\} + 1 \leq max\{2_n(l(\mathcal{D}_1)), 2_n(l(\mathcal{D}_2))\} + 1 = 2_n(max\{l(\mathcal{D}_1), l(\mathcal{D}_2)\}) + 1 \leq 2_n(max\{l(\mathcal{D}_1), l(\mathcal{D}_2)\} + 1) = 2_n(l(\mathcal{D}))$. Infine $g(\mathcal{D}') = max\{g(\mathcal{D}'_1), g(\mathcal{D}'_2)\} \leq m$. Quest'ultimo passaggio non è valido se $A \to B$ è una formula di deviazione; analizziamo pertanto il caso in cui l'ultima regola di $\mathcal{D}'_2$ è $(\to I)$.

In questo caso mostriamo innanziutto che $\mathcal{D}_2$ deve contenere una sottodimostrazione $\mathcal{D}_3$ che ha come ultima regola una $(\to I)$ e tale che la conclusione di $\mathcal{D}_3$ e le altre formule che ne discendono sono tutte premesse di regole di eliminazione contenenti il simbolo logico da eliminare. La dimostrazione $\mathcal{D}$ ha pertanto la forma seguente:

$$\mathcal{D} = \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{E}_h\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{E}_1\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[C]\\ \mathcal{D}_3\\ C\to D\end{array}\,(\to I)}{D}\,(\to E)\\ \vdots\end{array}}{A\to B}\,(...E)}{B}\,(\to E)$$

Dove la sottoderivazione $\mathcal{D}_3$ ha come ultima regola $(\to I)$, le sottoderivazioni $\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_h$ hanno come conclusioni le premesse di altrettante regole di eliminazione dell'implicazione, e le regole che seguono la sottoderivazione $\mathcal{D}_3$ sono tutte regole di eliminazione.

Per mostrare ciò ragioniamo nel modo seguente. Seguiamo un ramo della dimostrazione $\mathcal{D}$ che parta dalla radice B e salga fino ad una foglia scegliendo, in caso di regole di eliminazione dell'implicazione, la premessa che contiene l'implicazione da eliminare. In questo ramo incontriamo, andando verso l'alto, innanzitutto una regola di eliminazione dell'implicazione (l'ultima regola di $\mathcal{D}$); quindi il secondo nodo di tale ramo, dopo B, è $A \to B$ da cui si ottiene B per eliminazione dell'implicazione. Continuando a salire sullo stesso ramo si incontrano o una regola $(\to I)$ oppure una regola di eliminazione. Non ci possono essere né la regola $(\bot)$ che avrebbe come conclusione una formula atomica (che non può essere premessa di una regola di eliminazione contenente il simbolo logico da eliminare) né una regola di introduzione della congiunzione o del quantificatore (altrimenti si avrebbero delle deviazioni che abbiamo supposto non esserci grazie al lemma 8). D'altra parte non possono esserci solo regole di eliminazione altrimenti anche la derivazione $\mathcal{D}'_2$ avrebbe solo regole di eliminazione e non presenterebbe, come ultima regola, $(\to I)$ come invece abbiamo supposto. La prima regola $(\to I)$ che incontriamo "salendo" lungo il ramo considerato è la conclusione della sottoderivazione $\mathcal{D}_3$ che, nella rappresentazione precedente, abbiamo indicato come $C \to D$.

Notiamo che $C \to D$ è una formula di deviazione e che:

$$g(D \to C) \leq g(\mathcal{D}) \leq m + n$$

quindi abbiamo

$$g(D) < m + n \quad \text{e} \quad g(C) < m + n$$

Pertanto esiste un numero p minore di n tale che $m + p = max\{m, g(D), g(C)\}$.

Notiamo che $g(\mathcal{E}_i) \leq m+n = m+p+(n-p)$ per $i = 1, ...n$ e che $g(\mathcal{D}_3) \leq m+n = m+p+(n-p)$. Ora applichiamo l'ipotesi induttiva alle coppie $(n - p, l(\mathcal{E}_i))$ $(i = 1, ..., h)$ e $(n - p, l(\mathcal{D}_3))$ ponendo per tutte le coppie $m' = m + p$, e otteniamo delle derivazioni $\mathcal{E}'_i$ $(i = 1, ..., h)$ e $\mathcal{D}'_3$ tali che:

$$\mathcal{E}_i \succeq \mathcal{E}'_i \quad (i = 1, ..., h) \quad \mathcal{D}_3 \succeq \mathcal{D}'_3$$

e

$$l(\mathcal{E}'_i) \leq 2_{n-p}(l(\mathcal{E}_i)) \quad g(\mathcal{E}'_i) \leq m + p \quad (i = 1, ..., h)$$
$$l(\mathcal{D}_3) \leq 2_{n-p}(l(\mathcal{D}_3)) \quad g(\mathcal{D}_3) \leq m + p$$

Consideriamo la derivazione $\mathcal{D}''$ ottenuta sostituendo $\mathcal{D}'_3$ a $\mathcal{D}_3$ e, per ogni $i = 1, ..., h$, $\mathcal{E}'_i$ a $\mathcal{E}_i$, che rappresentiamo nel modo seguente:

$$\mathcal{D}''= \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{E}'_h\\ A\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{E}'_1\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[C]\\ \mathcal{D}'_3\\ C \to D\end{array}\,(\to I)}{D}\,(\to E)\\ \vdots\end{array}}{A \to B}\,(...E)}{B}\,(\to E)$$

Dal fatto che $\mathcal{D}_3 \succeq \mathcal{D}'_3$ e $\mathcal{E}_i \succeq \mathcal{E}'_i$ segue che $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}''$.

Dato che l'ultima regola di $\mathcal{D}_3$ è $(\to I)$, si ha che anche l'ultima regola di $\mathcal{D}'_3$ deve essere $(\to I)$, quindi la conclusione di $\mathcal{D}'_3$ sarà una formula di deviazione di $\mathcal{D}''$ che possiamo eliminare tramite la regola di $\to$ conversione. Otterremo quindi, da $\mathcal{D}''$, una dimostrazione $\mathcal{D}^*$ che non contiene più la formula di deviazione $C \to D$, ma può contenere altre formule di deviazione di tipo C o D. Poiché $\mathcal{D}''$ si converte immediatamente in $\mathcal{D}^*$, abbiamo che $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}^*$.

Vogliamo ora dimostrare che

$$l(\mathcal{D}^*) \leq 2_{n-p}(l(\mathcal{D}))$$

Per far ciò[6] scriviamo prima di tutto un'espressione per la lunghezza di $\mathcal{D}$ in cui compaiono le lunghezze dei cammini che, all'interno della deduzione, conducono dalla conclusione di $\mathcal{D}$ (cioè da B) alle conclusioni di $\mathcal{E}_h, \mathcal{E}_{h-1}, ..., \mathcal{E}_1$ e $\mathcal{D}_3$. Dato che il cammino che porta da B alla conclusione di $\mathcal{E}_h$ ha lunghezza 1, possiamo indicare questi cammini rispettivamente con

$$1, \quad 1 + l_{h-1}, \quad 1 + l_{h-2}, \quad ... \quad 1 + l_2, \quad 1 + l_1, \quad 1 + l_1$$

Dove $l_{h-1}, l_{h-2}, ..., l_2, l_1$ sono opportuni numeri interi maggiori o uguali a 1.
Si noti che gli ultimi due cammini (quelli che portano da B alle conclusioni di $\mathcal{E}_1$ e di $\mathcal{D}_3$) hanno la stessa lunghezza che abbiamo indicato con $1 + l_1$. Possiamo quindi scrivere la seguente espressione per la lunghezza di $\mathcal{D}$:

$$l(\mathcal{D}) = max\{l(\mathcal{E}_h) + 1, l(\mathcal{E}_{h-1}) + 1 + l_{h-1}, ..., l(\mathcal{E}_2) + 1 + l_2, l(\mathcal{E}_1) + 1 + l_1, l(\mathcal{D}_3) + 1 + l_1\}$$

Analogamente la lunghezza di $\mathcal{D}''$ è uguale a:

$$l(\mathcal{D}'') = max\{l(\mathcal{E}'_h) + 1, l(\mathcal{E}'_{h-1}) + 1 + l_{h-1}, ..., l(\mathcal{E}'_2) + 1 + l_2, l(\mathcal{E}'_1) + 1 + l_1, l(\mathcal{D}'_3) + 1 + l_1\}$$

Applicando il lemma sulla composizione delle dimostrazioni, otteniamo che la lunghezza di $\mathcal{D}^*$ soddisfa la seguente disuguaglianza:

$$l(\mathcal{D}^*) \leq max\{l(\mathcal{E}'_h) + 1, l(\mathcal{E}'_{h-1}) + 1 + l_{h-1}, ..., l(\mathcal{E}'_2) + 1 + l_2, l(\mathcal{E}'_1) + l(\mathcal{D}'_3) + l_1\}$$

In cui l'ultima espressione: $l(\mathcal{E}'_1) + l(\mathcal{D}'_3) + l_1$ è ottenuta dalla sostituzione della deduzione $\mathcal{E}'_1$ al posto delle assunzioni C nella deduzione $\mathcal{D}'_3$ (si noti che la distanza di B dalla conclusione della "nuova" deduzione—ottenuta dopo la sostituzione—si è accorciata di 1).
Ci concentriamo proprio su questa espressione $l(\mathcal{E}'_1) + l(\mathcal{D}'_3) + l_1$ per la quale valgono le seguenti disuguaglianze che abbiamo ottenuto applicando una proprietà del massimo, l'ipotesi induttiva e il lemma sull'esponenziazione iterata:

$$l(\mathcal{E}'_1) + l(\mathcal{D}'_3) + l_1 \leq 2 \cdot max\{l(\mathcal{E}'_1), l(\mathcal{D}'_3)\} + l_1 \leq 2 \cdot max\{2_{n-p}(l(\mathcal{E}_1)), 2_{n-p}(l(\mathcal{D}_3))\} + l_1 =$$
$$= 2 \cdot 2_{n-p}(max\{l(\mathcal{E}_1), l(\mathcal{D}_3)\}) + l_1 \leq 2_{n-p}(max\{l(\mathcal{E}_1), l(\mathcal{D}_3)\} + 1) + l_1 \leq$$
$$\leq 2_{n-p}(max\{l(\mathcal{E}_1), l(\mathcal{D}_3)\} + 1 + l_1)$$

Quindi ritorniamo alle disuguaglianze sulla lunghezza della dimostrazione $l(\mathcal{D}^*)$:

$$l(\mathcal{D}^*) \leq max\{l(\mathcal{E}'_h) + 1, ..., l(\mathcal{E}'_2) + 1 + l_2, l(\mathcal{E}'_1) + l(\mathcal{D}'_3) + l_1\} \leq$$
$$\leq max\{2_{n-p}(l(\mathcal{E}_h) + 1), ..., 2_{n-p}(l(\mathcal{E}_2) + 1 + l_2), 2_{n-p}(max\{l(\mathcal{E}_1), l(\mathcal{D}_3)\} + 1 + l_1)\} =$$
$$= 2_{n-p}(max\{l(\mathcal{E}_h) + 1, ..., l(\mathcal{E}_2) + 1 + l_2, max\{l(\mathcal{E}_1), l(\mathcal{D}_3)\} + 1 + l_1\}) =$$
$$= 2_{n-p}(max\{l(\mathcal{E}_h) + 1, , ..., l(\mathcal{E}_2) + 1 + l_2, l(\mathcal{E}_1) + 1 + l_1, l(\mathcal{D}_3) + 1 + l_1\}) = 2_{n-p}(l(\mathcal{D}))$$

Infine $g(\mathcal{D}^*) \leq max\{g(\mathcal{E}'_1), ..., g(\mathcal{E}'_h), g(\mathcal{D}'_3), g(D), g(C)\} \leq m + p$ grazie al lemma 7 e alla scelta di p.
Poiché $p < n$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva alla coppia $(p, l(\mathcal{D}^*))$ ponendo $m' = m$ e trovare una dimostrazione $\mathcal{D}'$ tale che $\mathcal{D}^* \succeq \mathcal{D}'$, $g(\mathcal{D}') \leq m$ e $l(\mathcal{D}') \leq 2_p(l(\mathcal{D}^*))$ che, applicando il lemma 9, diventa

$$l(\mathcal{D}') \leq 2_p(l(\mathcal{D}^*)) \leq 2_p(2_{n-p} l(\mathcal{D})) = 2_n(l(\mathcal{D}))$$

Infine, dato che da $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}^*$ e $\mathcal{D}^* \succeq \mathcal{D}'$ segue che $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}'$, possiamo concludere che la dimostrazione $\mathcal{D}'$ soddisfa la tesi del teorema.

□

Dal teorema precedente, ponendo $m = 0$, si ottiene il seguente teorema.

[6] In questa parte della dimostrazione il testo originale [27] presenta, a nostro avviso, alcuni punti poco chiari. Per questo motivo presentiamo, di seguito, una nostra variazione rispetto alla dimostrazione originale.

Teorema 13 (di Normalizzazione)**.** *Sia $\mathcal{D}$ una qualsiasi derivazione, allora esiste una derivazione $\mathcal{D}'$ in forma normale tale che $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}'$, $l(\mathcal{D}') \leq 2_n(l(\mathcal{D}))$.*

Dimostrazione. Basta porre, nel teorema precedente, $m = 0$ $n = g(\mathcal{D})$ e si ottiene una derivazione $\mathcal{D}'$ tale che $g(\mathcal{D}') = 0$, quindi senza deviazioni. □

Notiamo che il teorema di normalizzazione appena dimostrato garantisce l'esistenza di una forma normale per ogni dimostrazione $\mathcal{D}$ ma non garantisce l'unicità di tale forma normale. Per dimostrare l'unicità della forma normale ci si basa su una proprietà della relazione di conversione secondo cui se una dimostrazione $\mathcal{D}$ si converte in due dimostrazioni diverse $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, allora esiste una dimostrazione $\mathcal{D}'$ tale che sia $\mathcal{D}_1$ sia $\mathcal{D}_2$ si convertono in $\mathcal{D}'$; ciò può essere espresso nel modo seguente:

$$\text{Se } \mathcal{D} \succeq \mathcal{D}_1 \text{ e } \mathcal{D} \succeq \mathcal{D}_2 \text{ allora esiste } \mathcal{D}' \text{ tale che } \mathcal{D}_1 \succeq \mathcal{D}' \text{ e } \mathcal{D}_2 \succeq \mathcal{D}' \tag{3.1}$$

Dalla proprietà 3.1 discende subito l'unicità della forma normale espressa dal seguente teorema:

Teorema 14. *Se $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D} \succeq \mathcal{D}_2$, dove $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono dimostrazioni normali, allora $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$.*

Dimostrazione. Per la proprietà 3.1 esiste una dimostrazione $\mathcal{D}'$, tale che $\mathcal{D}_1 \succeq \mathcal{D}'$ e $\mathcal{D}_2 \succeq \mathcal{D}'$. Dato che $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ sono in forma normale, da $\mathcal{D}_1 \succeq \mathcal{D}'$ si deduce che $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}'$ e da $\mathcal{D}_2 \succeq \mathcal{D}'$ si deduce che $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}'$; quindi $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$. □

Notiamo l'analogia tra la proprietà 3.1 e la proprietà di Church–Rosser valida nel λ-calcolo. In effetti uno degli obiettivi del nostro studio è proprio quello di evidenziare come, già negli anni Settanta, lo studio della teoria della dimostrazione e del λ-calcolo in Italia procedesse su temi molto simili anche se in contesti accademici diversi con scarse possibilità di comunicazione. Nel prossimo paragrafo vedremo quali sono stati i contributi degli studiosi italiani nel λ-calcolo durante gli stessi anni in cui il testo di Cellucci veniva pubblicato.

3.7 Corrado Böhm e il λ-calcolo puro

In questo paragrafo introduciamo alcuni concetti e risultati fondamentali che riguardano il λ-calcolo. Vedremo poi quali sono stati i contributi in questo campo dei ricercatori italiani che si sono formati attorno alla figura di Corrado Böhm.
Böhm nasce a Milano nel 1923 e si trasferisce in Svizzera nel 1942 dove studia ingegneria all'Università di Losanna

Poco dopo la laurea nel 1946 diventa ricercatore al ETH (Eiddenössische Technische Hochschule) il Politecnico Federale di Zurigo.
Inizia la sua attività in Informatica nel 1947 quando gli viene chiesto di collaborare al progetto Z4, il primo computer digitale elettro-meccanico al mondo, ideato da Konrad Zuse, un pioniere dell'Informatica. L'incontro con Zuse è un momento cruciale per lo sviluppo delle idee scientifiche di Böhm.
Con la sua tesi di dottorato, discussa nel 1951, Böhm costruirà un primo ponte tra l'Informatica e la Matematica. Nella tesi viene sviluppato un linguaggio, una macchina e un metodo di traduzione per compilare il linguaggio nella macchina.

> *Böhm's dissertation was expecially remarkable because he not only described a complete compiler, he also defined the compiler in its own language. And the language was interesting in itself, because every statement (including input statements, output statements and control statements) was a special case of an assignement statement* D. E. Knuth, [64].

Già in questo lavoro, troviamo quindi un Böhm precursore dei tempi: basti pensare al fatto che la descrizione del compilatore contenuta nella tesi avviene quattro anni prima dello sviluppo del linguaggio FORTRAN e sette anni prima del LISP. L'origine della tesi di dottorato risiede nell'interesse di Böhm per le macchine di Turing stimolato da Paul Bernays.
Nel 1951 Böhm ritorna a Roma e diventa ricercatore allo IAC, l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del CNR, diretto da Mauro Picone.
Dal 1960 al 1968 Böhm affianca al suo lavoro allo IAC, l'insegnamento all'università la Sapienza. Si crea quindi un gruppo di studenti, fra i quali Giorgio Ausiello, Daniel Bovet, Giuseppe Jacopini,

Alfonso Miola e Marisa Venturini Zilli fortemente influenzati dal carisma e dalle idee di Böhm. Uno dei frutti di questo periodo è il seminale teorema di Böhm-Jacopini dimostrato nel 1966.

Negli stessi anni Böhm è uno dei primi studiosi a dedicarsi al λ-calcolo. Nel 1963 dirige la tesi di Marisa Venturini Zilli sulle applicazioni del λ-calcolo all'Informatica. In particolare la tesi tratta la rappresentazione nel λ-calcolo, dei tipi di dati usati nel linguaggio di programmazione APL di Iverson.
Inoltre, insieme al suo amico Wolf Gross, Böhm introduce il CUCH, un linguaggio di programmazione funzionale basato sulla teoria dei combinatori di Curry e sul λ-calcolo di Church (da cui il nome CU per Curry e CH per Church).
L'obiettivo delle ricerche nel λ-calcolo è quello di studiare le proprietà dei linguaggi di programmazione funzionali tramite l'analisi delle proprietà di un linguaggio paradigmatico basato sul λ-calcolo.
Nell'ambito di questa ricerca si colloca il risultato del 1968, noto come Teorema di Böhm, di grande importanza per le sue vaste applicazioni. In questo paragrafo, dopo aver introdotto le proprietà fondamentali del λ-calcolo, richiameremo il Teorema di Böhm.

La fondazione dei sistemi formali che vengono oggi chiamati λ-calcolo e logica combinatoria, risale agli anni '20 con lo scopo di studiare le proprietà che sono alla base del concetto di funzione cioè *astrazione*, *sostituzione* e *applicazione* in un senso più generale possibile [20].
In particolare la Logica combinatoria è stata introdotta da Moses Ilyich Schönfinkel in un seminario del dicembre 1920 tenuto al gruppo di ricerca di cui faceva parte, probabilmente il gruppo di ricerca in Matematica più importante del tempo, guidato da David Hilbert a Gottinga. Nell'idea di Schönfinkel, poi ripresa anche da Curry, il concetto di applicazione di una funzione a un argomento e il concetto di sostituzione vengono resi, in maniera implicita, tramite l'uso di alcuni combinatori di cui parleremo più avanti.

Nel λ-calcolo invece è presente una notazione esplicita per l'applicazione di una funzione ad un argomento. Ad esempio dato un termine f, il termine $\lambda x.f$ rappresenta l'*astrazione* della variabile x dal termine f; ciò equivale a considerare il termine f come funzione della variabile x. Inoltre dati due termini s e t, l'*applicazione* di t ad s viene rappresentata dal termine (ts). In particolare l'*applicazione* del termine $(\lambda x.f)$ ad un altro termine t corrisponde alla sostituzione del termine t al posto della variabile x in f; ciò è espresso dalla regola di calcolo che approfondiremo meglio in seguito detta β riduzione:

$$(\lambda x.f)t = f[t/x]$$

Per spiegare intuitivamente la notazione immaginiamo che f sia il termine $3 \cdot x + 2$ e t sia il numero 5, allora si ha:

$$(\lambda x.(3 \cdot x + 2))5 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$$

Le prime notazioni per l'astrazione e la sostituzione appaiono già nell'opera di Peano in [106], tuttavia l'idea della regola di calcolo (la β-riduzione) è di Church. Egli introduce il λ-calcolo nel 1928 (ma la prima pubblicazione a riguardo risale al 1932 [30]) per fondare la Logica sul concetto di funzione in un modo più naturale rispetto all'approccio di Russell, basato sui tipi, e alla teoria degli insiemi di Zermelo e Fraenkel. Seguendo questa direzione Church dimostra attraverso il λ-calcolo, per la prima volta nella storia nel 1936, l'indecidibilità della Logica predicativa [31].
Ciò che rende interessante il λ-calcolo, dal punto di vista della calcolabilità, è che può essere considerato un modello di calcolo alla stregua delle macchine di Turing e delle funzioni ricorsive.
Questi tre modelli catturano l'idea intuitiva di funzione calcolabile. Infatti, secondo la tesi di Church, le funzioni intuitivamente calcolabili, ovvero tali che esista un algoritmo che determina in maniera effettiva il valore in output a partire da un dato valore in input, sono tutte e sole le funzioni ricorsive. Siccome è possibile dimostrare che le funzioni ricorsive coincidono con le funzioni Turing-calcolabili e con le funzioni rappresentabili nel λ-calcolo; si può affermare che questi tre modelli sono equivalenti nel formalizzare il concetto di funzione calcolabile. Tuttavia i tre modelli rappresentano lo stesso concetto di funzione da tre prospettive differenti. Le funzioni ricorsive si basano su un approccio assiomatico, essendo definite mediante *funzioni base* e proprietà di chiusura che permettono di costruire altre funzioni a partire dalle *funzioni base*. La macchina di Turing è un modello più concreto, in cui è definito un passo elementare di calcolo attraverso una descrizione meccanica di come il calcolo viene effettuato. Il λ-calcolo ha caratteristiche intermedie tra i due modelli precedenti. Da un lato possiede, nella definizione induttiva dei suoi termini, il rigore sintetico dell'assiomatizzazione, dall'altro è possibile definire in esso un passo elementare di calcolo, la β-riduzione.

Introduciamo ora, seguendo [65], i termini del λ-calcolo, parole definite a partire da un alfabeto A, mediante un numero finito di regole.

Definizione 10. Sia V un insieme numerabile di variabili $V = \{x_0, x_1, ...\}$. Definiamo l'alfabeto $A = \{(,), \lambda\} \cup V$. I **termini** si definiscono induttivamente come segue:

- **Base**: Ogni variabile è un termine del λ-calcolo.
- **Passo**:
  - Se u e t sono termini del λ-calcolo, allora anche (ut) lo è. (**Applicazione**)
  - Se x è una variabile e t è un termine del λ-calcolo, allora anche $(\lambda x.t)$ è un termine del λ-calcolo (**Astrazione**)
- **Clausola finale**: Nient'altro è un termine del λ-calcolo.

Chiamiamo L l'insieme dei termini.
Il significato intuitivo della regola di astrazione è, come abbiamo detto, quello di rappresentare il concetto di *funzione*. Infatti dato un termine t, il termine $\lambda x.t$ corrisponde a considerare il termine t come funzione di x.
Per minimizzare il numero di parentesi, useremo le seguenti convenzioni:

- le parentesi più esterne di un termine sono omesse;
- la regola di applicazione è associativa a sinistra, cioè:

$$ut_1t_2...t_k := ...(((ut_1)t_2)...)t_k \quad \text{da cui la notazione} \quad u\vec{t} := ut_1t_2...t_k$$

- l'astrazione è associativa a destra, cioè:

$$\lambda x_1.\lambda x_2....\lambda x_k.t := \lambda x_1.(\lambda x_2...(\lambda x_k.t)...) \quad \text{da cui la notazione}$$

$$\lambda\vec{x}.t := \lambda x_1.\lambda x_2...\lambda x_k.t$$

Un **sottotermine** è una sottosequenza di simboli che è un termine esso stesso secondo la definizione 10. Possiamo quindi definire l'insieme (che denotiamo con $sub(t)$) dei sottotermini di un termine t nel modo seguente:

Definizione 11. Sia t un termine, allora:

- se $t = x$ allora $sub(t) = \{t\}$;
- se $t = uv$ allora $sub(t) = sub(t) \cup sub(u) \cup \{t\}$;
- se $t = \lambda x.u$ allora $sub(t) = sub(u) \cup \{t\}$

Esempio 1. *I sottotermini del termine $\lambda x.(\lambda y.y)x$ sono:*

$$\lambda x.(\lambda y.y)x \quad (\lambda y.y)x \quad \lambda y.y \quad x \quad y$$

Definizione 12. Sia t un termine. La **lunghezza** di t, indicata con $|t|$, è così definita:

- se $t = x$ allora $|t| = 1$;
- se $t = uv$ allora $|t| = |u| + |v| + 1$;
- se $t = \lambda x.u$ allora $|t| = |u| + 1$.

Definiamo, per induzione sulla complessità di un termine, il concetto di occorrenza libera di una variabile in un termine:

Definizione 13. 1. Se t è una variabile x, l'occorenza di x in t è libera;

2. se $t = uv$ le occorenze libere di x in t, sono le occorrenze libere di x in u e le occorenze libere di x in v;
3. se $t = \lambda y.u$ e $x \neq y$ le occorrenze libere di x in t sono le occorrenze libere di x in u. Se invece $x = y$ allora x non ha occorrenze libere in t.

Si noti che una stessa variabile può avere, nello stesso termine, sia occorenze libere sia occorenze non libere. Per esempio consideriamo il termine $\lambda x.(xy)\lambda y.y$ in cui la prima occorrenza di y è libera mentre le altre due non sono libere.
Una **variabile libera** in t è una variabile che ha almeno un'occorrenza libera in t altrimenti la variabile si dice **legata** o **vincolata**. L'insieme delle variabili libere di un termine t si indica con $FV(t)$. Un termine senza variabili libere è detto **termine chiuso**, un termine avente almeno una variabile libera è detto **termine aperto**.

Esempio 2.

$$FV(x) = \{x\};$$
$$FV(xy) = \{x, y\};$$
$$FV((\lambda x.xy)x) = FV(\lambda x.xy) \cup FV(x) = \{y\} \cup \{x\} = \{x, y\}.$$

Nel λ-calcolo, come in altri campi della matematica, il nome della variabile legata deve essere considerato inessenziale.
Ad esempio se consideriamo la formula logica $\forall x(x \geq 0)$, la variabile x è vincolata dal quantificatore $\forall$ e il suo nome non è essenziale nel senso che le formule $\forall y(y \geq 0)$ e $\forall t(t \geq 0)$ hanno entrambe lo stesso significato della formula precedente.
Analogamente consideriamo l'integrale $\int_0^1 x^2dx$ il cui valore numerico è $\frac{1}{3}$; in esso la variabile x è vincolata dal simbolo di integrale e il suo nome non è essenziale nel senso che anche gli integrali $\int_0^1 y^2dy$ e $\int_0^1 t^2dt$ hanno lo stesso valore numerico.
Pertanto due termini del λ-calcolo saranno considerati coincidenti se sono ottenuti l'uno dall'altro rinominando le variabili legate.
Ciò viene espresso tramite la relazione di α-equivalenza che indicheremo con il simbolo $\equiv_\alpha$. Intuitivamente $u \equiv_\alpha u'$ significa che u' è stato ottenuto da u rinominando le variabili legate. Per definire formalmente l'α-equivalenza abbiamo bisogno di una nozione di sostituzione.
Siano $u, t_1, ..., t_k$ termini e $x_1, ..., x_k$ variabili distinte, $u < t_1/x_1, ..., t_k/x_k >$ è il termine che si ottiene sostituendo t_i ad ogni occorrenza libera di x_i in u $(1 \leq i \leq k)$.

Definizione 14 (Sostituzione semplice)**.** Definiamo il termine $u < t_1/x_1, ..., t_k/x_k >$ per induzione sulla lunghezza di u.

- Se $u = x_i$ $(1 \leq i \leq k)$ allora $u < t_1/x_1, ..., t_k/x_k >= t_i$;
- se u è una variabile diversa da $x_1, ..., x_k$, allora $u < t_1/x_1, ..., t_k/x_k >= u$;
- se $u = wv$ allora
$$u < t_1/x_1, ..., t_k/x_k >= w < t_1/x_1, ..., t_k/x_k > v < t_1/x_1, ..., t_k/x_k >;$$
- se $u = \lambda x_i.v$ con $(1 \leq i \leq k)$ allora
$$u < t_1/x_1, ..., t_k/x_k >= \lambda x_i.(v < t_1/x_1, ..., t_{i-1}/x_{i-1}, t_{i+1}/x_{i+1}, ..., t_k/x_k >)$$
- se $u = \lambda y.v$ con $y \neq x_1, ..., x_k$ allora $u < t_1/x_1, ..., t_k/x_k >= \lambda y.(v < t_1/x_1, ..., t_k/x_k >)$

Questa sostituzione è detta *semplice* per distinguerla dalla sostituzione che ci servirà in seguito, la quale si accompagna ad una rinominazione delle variabili legate.

Esempio 3. $(\lambda x.xy)x < t/x >= (\lambda x.xy) < t/x > x < t/x >= (\lambda x.xy)t$

Definiamo ora l'α-equivalenza.

Definizione 15. Definiamo $u \equiv_\alpha u'$ per induzione sulla lunghezza di u:

- se u è una variabile, si ha $u \equiv_\alpha u'$ se e solo se $u = u'$;
- se $u = wv$ allora $u \equiv_\alpha u'$ se e solo se $u' = w'v'$, con $w \equiv_\alpha w'$ e $v \equiv_\alpha v'$;
- se $u = \lambda x.v$ allora $u \equiv_\alpha u'$ se e solo se $u' = \lambda x'.v'$, con $v < y/x > \equiv_\alpha v' < y/x' >$, per ogni variabile y tranne un numero finito.

L'α-equivalenza è una relazione di equivalenza e se $u \equiv_\alpha u'$ allora u e u' hanno le stesse variabili libere e la stessa lunghezza. Inoltre l'α-equivalenza è compatibile con le operazioni fondamentali del λ-calcolo nel senso della seguente definizione.

Definizione 16. Sia R una relazione binaria sull'insieme dei termini. Si dice che R **passa al contesto** se è riflessiva e si ha:

1. Se $t\,R\,t'$ allora $\lambda x.t\,R\,\lambda x.t'$;
2. Se $t\,R\,t'$ e $u\,R\,u'$ allora $ut\,R\,u't'$

La dimostrazione del seguente lemma e dei successivi risultati si ottiene per induzione applicando, in modo quasi automatico, la definizione di sostituzione semplice e pertanto viene omessa.

Lemma 10. *Se R passa al contesto e se $t_1\,R\,t'_1, ..., t_k\,R\,t'_k$ allora si ha:*

$$u < t_1/x_1, ..., t_k/x_k > \; R\, u < t'_1/x_1, ..., t'_k/x_k >$$

La prossima proposizione ci servirà per dimostrare che l'α-equivalenza passa al contesto.

Proposizione 1. *Siano $u, u', t_1, ..., t_k$ termini e $x_1, ..., x_k$ variabili distinte. Se $u \equiv_\alpha u'$ e nessuna delle variabili libere di $t_1, ..., t_k$ è legata in u o in u', allora :*

$$u < t_1/x_1, ..., t_k/x_k > \equiv_\alpha u' < t_1/x_1, ..., t_k/x_k >$$

Notiamo che, nella proposizione precedente, l'ipotesi che nessuna delle variabili libere di $t_1, ..., t_k$ sia legata in u o in u' è essenziale. Infatti, se consideriamo ad esempio i due termini $u = \lambda y.xy$ e $u' = \lambda z.xz$, vediamo che essi sono α-equivalenti, secondo la definizione. Tuttavia applicando la sostituzione semplice e prendendo $t = y$ si ottiene:

$$u < t/x >= \lambda y.xy < y/x >= \lambda y.yy \not\equiv_\alpha \lambda z.yz = \lambda z.xz < y/x >= u' < t/x >$$

Corollario 1. *La relazione $\equiv_\alpha$ passa al contesto.*

Corollario 2. *Se $u, t_1, ..., t_k, t'_1, ..., t'_k$ sono termini tali che $t_1 \equiv_\alpha t'_1, ..., t_k \equiv_\alpha t'_k$ e $x_1, ..., x_k$ sono variabili distinte, allora si ha:*

$$u < t_1/x_1, ..., t_k/x_k > \equiv_\alpha u < t'_1/x_1, ..., t'_k/x_k >$$

Lemma 11. *Se u è un termine e y è una variabile che non compare in u, allora*

$$\lambda x.u \equiv_\alpha \lambda y.u < y/x >$$

Lemma 12. *Sia t un termine e $x_1, ..., x_k$ delle variabili, allora è possibile trovare un termine t' tale che $t' \equiv_\alpha t$ e le variabili $x_1, ..., x_k$ non siano legate in t'.*

D'ora in poi considereremo i termini del λ-calcolo a meno di α-equivalenza. Pertanto quozientiamo l'insieme L dei termini rispetto alla relazione di equivalenza $\equiv_\alpha$ ottenendo l'insieme $\Lambda = L/\equiv_\alpha$. Sull'insieme Λ delle classi di equivalenza dei termini possiamo definire le operazioni:

$$u, v \to (uv) \quad \text{e} \quad u, x \to (\lambda x.u)$$

che sono ben definite perché le operazioni di applicazione e astrazione sono *compatibili* con la relazione $\equiv_\alpha$. Inoltre ha senso parlare di variabili libere di un determinato elemento di Λ dato che due termini $u \equiv_\alpha u'$ hanno le stesse variabili libere.
Definiamo ora il termine $u[t_1/x_1, ..., t_k/x_k]$ che si ottiene sostituendo t_i ad ogni occorrenza libera di x_i, avendo però scelto un rappresentante della classe di equivalenza di u, le cui variabili legate non coincidano con le variabili libere di t_i.

Definizione 17 (Sostituzione)**.** Siano $u, t_1, ..., t_k$ termini e $x_1, ..., x_k$ variabili distinte, allora:

$$u[t_1/x_1, ..., t_k/x_k] = u' < t_1/x_1, ..., t_k/x_k >$$

dove $u \equiv_\alpha u'$ e nessuna variabile legata di u' è libera in $t_1, ..., t_k$.

La definizione precedente è ben posta perché l'esistenza di un tale u' è assicurata dal lemma 12. Inoltre valgono le due proprietà:

1. Per la proposizione 1, la classe di equivalenza di $u' < t_1/x_1, ..., t_k/x_k >$ non dipende dalla scelta di u', quindi:

$$\text{se } u \equiv_\alpha u' \quad \text{allora} \quad u[t_1/x_1, ..., t_k/x_k] \equiv_\alpha u'[t_1/x_1, ..., t_k/x_k]$$

2. Per il corollario 2 si ha:

$$\text{se } t_1 \equiv_\alpha t'_1, ..., t_k \equiv_\alpha t'_k \quad \text{allora} \quad u[t_1/x_1, ..., t_k/x_k] \equiv_\alpha u[t'_1/x_1, ..., t'_k/x_k]$$

dalle due proprietà precedenti discende che l'operatore di sostituzione che associa a $u, t_1, ..., t_k$ il termine $u[t_1/x_1, ..., t_k/x_k]$ è ben definito su Λ.

Lemma 13. *Siano $u, a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_l$ termini e $x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_l$ variabili, allora si ha:*

$$u[b_1/y_1, ...b_l/y_l][a_1/x_1, ..., a_k/x_k] = u[a_1/x_1, ..., a_k/x_k, b'_1/y_1, ..., b'_l/y_l]$$

dove $b'_j = b_j[a_1/x_1, ..., a_k/x_k]$ $(1 \leq j \leq l)$.
Se inoltre $y_1, ..., y_l$ non sono libere in $a_1, ..., a_k$ allora:

$$u[b_1/y_1, ...b_l/y_l][a_1/x_1, ..., a_k/x_k] = u[a_1/x_1, ..., a_k/x_k][b'_1/y_1, ..., b'_l/y_l]$$

Notiamo che questo lemma non vale per la sostituzione semplice, prendiamo ad esempio i termini $u = \lambda x.y$ e $b = x$, si ha:

$$u < b/y >< a/x >= \lambda x.y < x/y >< a/x >= \lambda x.x < a/x >= \lambda x.x$$

mentre

$$u < a/x >< b'/y >= \lambda x.y < a/x >< a/y >= \lambda x.y < a/y >= \lambda x.a$$

perché $b' = b < a/x >$.
Introduciamo ora la β-riduzione che ci permette di sviluppare un calcolo i cui oggetti sono i termini. Se pensiamo a $\lambda x.t$ come a una funzione nella quale x è una variabile, allora l'applicazione di $\lambda x.t$ a un termine u corrisponde intuitivamente all'idea di calcolare la funzione $\lambda x.t$ in u.

Definizione 18. Un termine della forma $(\lambda x.u)v$ è detto **β-redex** (o semplicemente **redex**), il termine $u[v/x]$ è il suo **contratto**.
Definiamo la relazione binaria $t\beta_0 t'$ per induzione sulla lunghezza di t:

- se t è una variabile allora $t\beta_0 t'$ è falso per ogni t';
- se $t = \lambda x.u$, allora $t\beta_0 t'$ se e solo se $t' = \lambda x.u'$ con $u\beta_0 u'$;
- se $t = uv$ allora $t\beta_0 t'$ se e solo se è soddisfatta una delle seguenti ugugaglianze:
  - $t' = uv'$ con $v\beta_0 v'$
  - $t' = u'v$ con $u\beta_0 u'$
  - $\boxed{u = \lambda x.w \text{ e } t' = w[v/x]}$

Fra le clausole della definizione precedente abbiamo evidenziato l'ultima, ponendola in un riquadro, perché è quella essenziale in quanto esprime il passo di calcolo seguente:

$$(\lambda x.w)v \quad \beta_0 \quad w[v/x]$$

La relazione β_0 è ben definita in Λ perché vale la seguente implicazione:

$$(\lambda x.u)t \equiv_\alpha (\lambda x'.u')t' \quad \Rightarrow \quad u[t/x] \equiv_\alpha u'[t'/x']$$

Definizione 19. La **β-conversione** è la più piccola relazione binaria β su Λ che sia riflessiva, transitiva e che contenga β_0. Se un termine v è in relazione con un termine u tramite β-conversione, scriviamo $v \rightarrow_\beta u$.

$$\begin{tikzcd}
& t \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\
u \arrow[dr, "R"'] & & u' \arrow[dl, "R"] \\
& v &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.1. Proprietà di Curch–Rosser

Quindi si ha che $t\beta t'$ se e solo se esiste una sequenza di termini

$$t_0 = t, \quad t_1, \quad ... \quad t_{n-1}, \quad t_n = t'$$

tali che $t_i \beta_0 t_{i+1}$ per ogni $0 \leq i \leq n-1$.
Si noti l'analogia tra la relazione β tra termini del λ-calcolo e la relazione di conversione tra dimostrazioni che abbiamo analizzato nel paragrafo precedente. Questa analogia non è casuale e porterà, attraverso la corrispondenza di Curry–Howard, ad un parallelismo tra il λ-calcolo tipato e la teoria della dimostrazione.
Osserviamo che se $t\beta t'$ allora tutte le variabili libere di t' sono anche libere in t.

Proposizione 2. *Se $t\beta t'$ e $u\beta u'$, allora $u[t/x]\,\beta\, u'[t'/x]$*

Per la dimostrazione vedere [65].

Definizione 20. Un termine è in **forma normale** se non contiene alcun redesso, ovvero se è costruito secondo le seguenti clausole:

- una variabile x è in forma normale;
- se t è in forma normale anche $\lambda x.t$ lo è;
- se t e u sono in forma normale e u non inizia con il simbolo λ, allora ut è in forma normale.

Un termine t è in forma normale se e solo se non esiste t' tale che $t\beta_0 t'$. Un termine si dice **normalizzabile** quando si può ridurre, tramite β-conversione, ad un termine in forma normale. Un termine t si dice **fortemente normalizzabile** se non esiste alcuna successione infinita

$$t_0 = t, t_1, t_2, ..., t_n, ...$$

tale che $t_i \beta_0 t_{i+1}$ per ogni $i \geq 0$.
Ad esempio il termine $\mathbf{\Omega} = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ non è normalizzabile perché convertendo l'unico redesso si ottiene un cammino di riduzione infinito:

$$(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)\beta_0(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)\beta_0...$$

Se consideriamo invece il termine $(\lambda y.z)(\mathbf{\Omega\Omega})$, allora si ha $(\lambda y.z)(\mathbf{\Omega\Omega})\beta_0 z$ convertendo il redesso che si trova a sinistra, e si ottiene quindi una forma normale. Se si converte invece il redesso di destra, si ottiene lo stesso termine e, continuando a convertire il redesso di destra, non si arriva mai a una forma normale. Quindi non è fortemente normalizzabile.
Se un termine del λ-calcolo è normalizzabile, la forma normale a cui si riduce è unica. Ciò è dovuto alla proprietà di Church–Rosser.

Definizione 21. Si dice che una relazione binaria R soddisfa la **proprietà di Church–Rosser (CR)** se si ha:

$$\text{Se } tRu \text{ e } tRu' \quad \text{allora esiste } v \text{ tale che} \quad uRv \text{ e } u'Rv$$

La figura 3.1 illustra la proprietà di Curch–Rosser.

Teorema 15 (Church–Rosser)**.** *La β-conversione soddisfa la proprietà di Church–Rosser*

Per la dimostrazione vedere [65] o [7].
Dal teorema precedente deriva l'unicità della forma normale, qualora esista. Infatti, se $t\beta u$ e $t\beta u'$ con u e u' forme normali, allora, per CR, esiste v tale che $u\beta v$ e $u'\beta v$, ovvero $u \equiv_\alpha v \equiv_\alpha u'$ dato che sono forme normali. Si noti anche qui l'analogia con la teoria della dimostrazione e, in particolare, con il teorema 14.

Definizione 22. Indichiamo con il nome di β-**equivalenza**, la più piccola relazione di equivalenza contenente β_0. Indichiamo con $u =_\beta v$ il fatto che due termini siano β-equivalenti.

Consideriamo alcuni esempi di termini chiusi, detti anche **combinatori**, e osserviamo il loro *comportamento* alla luce della β-equivalenza.

I $=\lambda x.x$ rappresenta la funzione identità. Dato un qualsiasi termine t si ha:

$$\mathbf{I}t \equiv_\beta (\lambda x.x)t \equiv_\beta t$$

T $=\lambda xy.x$ è la funzione che, applicata a due argomenti, sceglie il primo, corrisponde anche alla funzione booleana Vero (a volte questo combinatore viene indicato anche con **K**);

F $=\lambda xy.y$ è la funzione che, applicata a due argomenti, sceglie il secondo, corrisponde al booleano Falso e anche, come vedremo, al numero 0;

B $=\lambda xyz.x(yz)$ rappresenta l'applicazione di due funzioni ad un argomento, infatti:

$$\mathbf{B}f_1f_2t \equiv_\beta (\lambda xyz.x(yz))f_1f_2t \equiv_\beta f_1(f_2t)$$

S $=\lambda xyz.xz(yz)$ applicato a tre argomenti agisce nel modo seguente:

$$\mathbf{S}t_1t_2t_3 \equiv_\beta (\lambda xyz.xz(yz))t_1t_2t_3 \equiv_\beta t_1t_3(t_2t_3)$$

Dimostriamo ora un teorema di punto fisso per la β-equivalenza.

Teorema 16 (Punto fisso)**.** *Per ogni termine u esiste un termine t tale che $ut \equiv_\beta t$*

Dimostrazione. Partiamo dal termine $W = \lambda x.u(xx)$ e costruiamo il punto fisso come $t = WW$. Abbiamo infatti:

$$t \equiv_\beta WW \equiv_\beta (\lambda x.u(xx))W \equiv_\beta = u(WW) = ut$$

□

Proposizione 3. *Ogni termine del λ-calcolo ha le seguente forma:*

$$\lambda x_1 ... \lambda x_k.(vt_1...t_n)$$

dove $k, n \geq 0$ e v può essere una variabile o un redesso.

Per la dimostrazione vedere [65].

Definizione 23. Un termine t si dice in **forma normale di testa** se è della forma $\lambda x_1...\lambda x_k.(vt_1...t_n)$ con v variabile. Se t non è in forma normale di testa, v viene detto **redesso di testa** di t. Un redesso non di testa viene detto **redesso interno**.

Come abbiamo accennato precedentemente, nel λ-calcolo possono essere rappresentate le funzioni ricorsive. Per far ciò introduciamo dei termini che rappresentano i numeri naturali, in particolare il numero intero k è rappresentato dal termine:

$$\underline{k} = \lambda x \lambda y. \underbrace{x(x(...(x}_{k-\text{volte}}\, y)...))$$

Ad esempio 0 è rappresentato dal termine $\underline{0} = \lambda x \lambda y.y$ mentre 2 è rappresentato dal termine $\underline{2} = \lambda x \lambda y.(x(xy))$. Mediante termini si possono rappresentare anche operazioni tra numeri e, in generale, funzioni numeriche.

Definizione 24. Sia ϕ una funzione parziale da $\mathbb{N}^n$ a $\mathbb{N}$; dato un termine Φ del λ-calcolo, si dice che Φ **rappresenta** la funzione ϕ se, presi comunque $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}$, si ha:

- se $\phi(k_1, ..., k_n)$ non è definita allora $\Phi \underline{k_1} ... \underline{k_n}$ non è normalizzabile;
- se $\phi(k_1, ..., k_n) = k$ allora $\Phi \underline{k_1} ... \underline{k_n} \, \beta \, \underline{k}$

Teorema 17. *Una funzione è rappresentabile da un termine del λ-calcolo se e solo se è una funzione ricorsiva.*

Per la dimostrazione del teorema precedente si veda [65]. Noi abbiamo citato il risultato solo per mostrare l'importanza del λ-calcolo riguardo al tema della calcolabilità.

Ora invece ci concentriamo sui risulati ottenuti da Böhm nel λ-calcolo e in particolare sul suo teorema pubblicato nel 1968. Notiamo che il λ-calcolo studiato da Böhm negli anni '60 è λ-calcolo *puro*, ovvero in cui i termini possono essere liberamente costruiti applicando le regole di *applicazione* e *astrazione* senza limitazioni. Tale calcolo si differenzia dal λ-calcolo *tipato* in cui ad ogni termine è associata una formula (un *tipo*) e la costruzione dei termini mediante astrazione e applicazione deve seguire regole opportune in base ai tipi dei termini in gioco. Chiariremo ciò nel prossimo paragrafo dando un esempio di λ-calcolo tipato e spiegandone il valore logico.

Per trattare il teorema di Böhm dobbiamo introdurre un'altra relazione da affiancare alla β-riduzione: la η-riduzione basata sull'idea che ogni termine può essere visto come una funzione. Secondo il *principio di estensionalità*, se due funzioni applicate ad un argomento qualsiasi danno lo stesso risultato, allora le due funzioni sono uguali. Pertanto due termini come $\lambda x.ux$ (dove x non è libera in u) e u, che applicati ad un qualsiasi termine t danno lo stesso risultato—o meglio danno risultati β equivalenti perché $(\lambda x.ux)t \quad \beta_0 \quad ut$—possono essere considerati *uguali* nel senso specificato dalla seguente definizione.

Definizione 25. Un termine della forma $\lambda x.ux$, dove x non è libera in u, è detto **η-redex**. Definiamo la relazione binaria $t \, \eta_0 \, t'$ per induzione sulla lunghezza di t:

- se t è una variabile allora $t \, \eta_0 \, t'$ è falso per ogni t';
- se $t = \lambda x.v$ allora $t \, \eta_0 \, t'$ se e solo se è soddisfatta una delle seguenti uguaglianze:
  - $t' = \lambda x.v'$ con $v \, \eta_0 \, v'$
  - $\boxed{v = t'x \text{ con } x \text{ non libera in } t'}$
- se $t = uv$ allora $t \, \eta_0 \, t'$ se e solo se è soddisfatta una delle seguenti uguaglianze:
  - $t' = u'v$ con $u \, \eta_0 \, u'$;
  - $t' = uv'$ con $v \, \eta_0 \, v'$.

Fra le clausole della definizione precedente quella posta nel riquadro è essenziale in quanto esprime il passo di calcolo seguente:

$$\lambda x.t'x \quad \eta_0 \quad t'$$

in cui x non è libera in t'.
Unendo le relazioni β_0 e η_0 possiamo definire **$\beta\eta$ - redex** un termine che sia o un redex o un η-redex. Diciamo quindi che $t \, \beta \, \eta_0 t'$ se il termine t' è ottenuto da t contraendo un $\beta\eta$-redex cioè se $t \, \beta_0 \, t'$ oppure $t \, \eta_0 \, t'$.
La **η-conversione** (rispettivamente **$\beta\eta$ - conversione**) è la più piccola relazione binaria η (risp. $\beta\eta$) su Λ, riflessiva e transitiva che contenga η_0 (risp. $\beta\eta_0$).
La **η-equivalenza**, indicata con il simbolo $=_{\beta\eta}$, è la più piccola relazione di equivalenza che contenga $\beta\eta$.
Un termine t è in forma $\beta\eta$-normale se e solo se non esiste alcun termine t' tale che $t\beta\eta_0 t'$.
Il teorema di Böhm afferma che se due termini chiusi t e s sono in forma $\beta\eta$-normale distinta allora è possibile separarli, ovvero renderli equivalenti a due variabili distinte.
Enunciamo il teorema ricordando il valore dei due combinatori booleani: $\mathbf{T} = \lambda xy.x$ e $\mathbf{F} = \lambda xy.y$.

Teorema 18 (Böhm)**.** *Siano t e s due termini in forma $\beta\eta$-normale distinti, allora esistono dei termini $u_1, ..., u_n$ con $n \geq 0$ tali che:*

$$tu_1...u_n \quad \beta \quad \boldsymbol{T}$$
$$su_1...u_n \quad \beta \quad \boldsymbol{F}$$

una dimostrazione di questo teorema si trova in [7] che dedica un intero capitolo ai risultati e alle tecniche di Böhm per il λ-calcolo. La dimostrazione originale invece è in una nota [16] pubblicata dall'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del C.N.R. nel 1968.
Il teorema di Böhm è un risultato importante che permette una comprensione più profonda del comportamento dei termini. Inoltre la dimostrazione di questo teorema è l'opportunità per Böhm di ideare una serie di nuovi strumenti e tecniche (trasformazioni di Böhm, alberi di Böhm, Böhm out).
Come conseguenza del teorema di Böhm abbiamo che due termini chiusi t e s in forma $\beta\eta$-normale distinta non possono essere considerati β-equivalenti a meno di rendere il λ-calcolo un sistema formale inconsistente, in cui cioè tutti i termini coincidono.

Corollario 3. *Siano t e s due termini in forma $\beta\eta$-normali distinti. Se $t =_\beta s$ allora, dati comunque due termini p e q, si ha $p =_\beta q$.*

Dimostrazione. Siano p e q due termini qualsiasi. Per la definizione dei combinatori $\mathbf{T}$ e $\mathbf{F}$ si ha:

$$p =_\beta \mathbf{T}pq \quad \text{e} \quad q =_\beta \mathbf{F}pq$$

ma, per il teorema 18, esistono $u_1, ..., u_n$ tali che $\mathbf{T} =_\beta tu_1, ..., u_n$ e $\mathbf{F} =_\beta su_1, ..., u_n$ quindi:

$$p =_\beta \mathbf{T}pq =_\beta tu_1, ..., u_n pq =_\beta su_1, ..., u_n pq =_\beta \mathbf{F}pq =_\beta q$$

□

Il 1968, oltre a essere l'anno in cui il Teorema di Böhm viene pubblicato, è anche l'anno in cui Böhm diventa professore ordinario di Informatica. Dopo un breve periodo al Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena, si trasferisce a Torino dove sarà tra i promotori del corso di Informatica, il secondo in Italia dopo quello di Pisa del quale parleremo più avanti. L'unica dotazione della facoltà di Scienze in quel periodo è un IBM 360/44 e l'"Istituto di Informatica" della facoltà di Scienze consiste in una sola stanza che Böhm condivide con tutti i suoi collaboratori.

Nonostante le difficoltà nasce, sotto la direzione di Böhm, un gruppo di ricercatori entusiasti e pieni di risorse: Mariangiola Dezani-Ciancaglini, Mario Coppo, Ines Margaria, Simona Ronchi Della Rocca e Maddalena Zacchi, che daranno, a partire dagli anni Settanta, importanti contributi alla ricerca in λ-calcolo e in Informatica Teorica. Faremo riferimento a questo gruppo di ricerca, nel seguito, come al *gruppo di Torino*.

3.8 L'interesse del gruppo di Torino per i *tipi*

Alcuni temi che abbiamo analizzato nel paragrafo precedente, ad esempio la normalizzazione e il teorema di Church–Rosser, richiamano da vicino la normalizzazione e la proprietà di univocità per le dimostrazioni studiate nel testo di Cellucci. La differenza fondamentale è che mentre nella deduzione naturale per il calcolo dei predicati vale, come abbiamo visto, un teorema di normalizzazione, nel caso del λ-calcolo puro, tale proprietà non vale, ne è un esempio il combinatore $\mathbf{\Omega} = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ che si β-riduce a se stesso non giungendo mai ad una forma normale.
Tuttavia la normalizzazione vale in alcuni sistemi di λ-calcolo tipato[7], cioè nel λ-calcolo in cui, a ogni termine, è associato un **tipo**.
Per spiegare meglio cosa sono i tipi descriviamo un sistema di tipi semplici alla Church per il λ-calcolo.

L'alfabeto per la costruzione dei tipi è costituito da un insieme infinito numerabile di variabili: $X, Y, Z, ...$ e dal simbolo $\rightarrow$. Le regole per la formazione dei tipi sono le seguenti:

- ogni variabile è un tipo;
- se S e T sono tipi allora anche $S \rightarrow T$ è un tipo.

Associare un tipo a un termine significa specificare quali proprietà ha quel termine, "come si comporta". Ad esempio un termine di tipo $X \rightarrow Y$ si comporterà come una funzione che, applicata ad un termine di tipo X, produce un termine di tipo Y. Seguendo questa idea si definiscono i termini del λ-calcolo tipato semplice. Innanzitutto si assegna un tipo (cioè una delle variabili X, Y, Z...) ad ogni variabile del λ-calcolo. Quindi si definiscono i termini tipati.

[7] Si tratta della corrispondenza di Curry-Howard di cui parleremo nel seguito.

Definizione 26. I termini del λ-calcolo tipato semplice si definiscono induttivamente come segue:

- una variabile x a cui è associato un tipo X è un termine di tipo X che viene indicato con x^X;
- se t è un termine di tipo T e x è una variabile di tipo S, allora. $\lambda x^S.t$ è un termine di tipo $S \to T$ e si indica con $(\lambda x^S.t)^{S\to T}$;
- se t è un termine di tipo $U \to V$ e u è un termine di tipo U, allora (tu) è un termine di tipo V.

Ad esempio il termine $(\lambda x^T.x^T)^{T\to T}$ rappresenta l'identità su termini di tipo T. Si noti che in questo caso non è possibile definire l'identità universale che possa essere applicata ad ogni termine come era $\mathbf{I} = \lambda x.x$ nel λ-calcolo puro.

Anche nel λ-calcolo tipato è presente il passo di calcolo descritto dalla β-riduzione. In particolare un redex e il suo contratto hanno lo stesso tipo; si veda a tal proposito l'esempio seguente:

$$((\lambda y.(y^{A\to B}x^A)^B)^{(A\to B)\to B})u^{A\to B})^B \quad \beta \quad (u^{A\to B}x^A)^B$$

Nel λ-calcolo tipato semplice è possibile ottenere la forma normale di ogni termine tramite β-riduzione. Per la dimostrazione dei due teoremi seguenti vedere [65].

Teorema 19 (Normalizzazione debole)**.** *Per ogni termine t del λ-calcolo semplicemente tipato, esiste una forma normale di t.*

Questo teorema assicura l'esistenza della forma normale per ogni termine t ma non dà indicazioni su come ottenerla ovvero sulla strategia di normalizzazione da attuare. Grazie al seguente risultato ci rendiamo conto che ciò non è limitante.

Teorema 20 (Normalizzazione forte)**.** *Per ogni termine t del λ-calcolo semplicemente tipato,ogni processo di β-riduzione di t termina in un numero finito di passi.*

La nozione di *tipo* ha una lunga tradizione in Logica. Nei *Principia Mathematica* di Whitehead e Russell (1910-1913) i tipi vengono introdotti per evitare i paradossi logici come "il paradosso del barbiere" legati all'autoreferenza. La stessa idea si può far risalire agli *stufe* di Frege ovvero alla strutturazione dei concetti in diversi livelli. Nel λ-calcolo, come abbiamo visto, Church introduce i tipi per differenziare i termini fra loro, ponendo delle limitazioni nell'applicazione di un termine all'altro; ciò evita processi di β-riduzione infiniti.
I tipi vengono largamente usati anche in Informatica, si parla in questo caso di *data types*, ma non bisogna pensare che i tipi informatici abbiano una diretta filiazione dai tipi logici, come ha osservato Simone Martini.

> *Non c'è nessuna derivazione dei tipi dell'Informatica dai tipi della Logica, c'è una lenta convergenza che va a maturazione solo alla fine degli anni '70. Nella documentazione di Algol 1958 si parla per la prima volta di data type ma non c'è traccia del fatto che questo nome derivi dalla Logica Matematica. Nonostante i primi calcolatori risalgano al '47 e i primi linguaggi di programmazione indipendenti dalla macchina (Fortran, Cobol...) emergano negli anni '50, la consapevolezza che i data types (Fortran ad esempio aveva data types: interi, float...) siano, a livello epistemologico, la stessa cosa dei tipi della Logica è arrivata solo alla fine degli anni 'settanta.*
>
> Simone Martini (intervista del 29/11/2019)

Nella ricerca di Böhm sul λ-calcolo puro fino al 1968, la nozione di tipo non compare. A Torino però, nel gruppo da lui fondato, nasce un interesse per i tipi che può essere considerato uno dei germi di quella convergenza tra Logica e Informatica di cui riparleremo in seguito.
Infatti come evidenzia Cardone in [21] *la nozione di tipo costituisce uno dei canali privilegiati per il passaggio di teorie, tecniche e risultati dalla Logica all'Informatica, non solo teorica.*
Ma come nasce l'interesse per i tipi del gruppo di Torino?
Il lavoro di Böhm aveva evidenti riconoscimenti presso i logici stranieri. In particolare Mariangiola Dezani ricorda di aver partecipato, con Böhm, nell'autunno del '74, a un incontro organizzato da J. Roger Hindley a Swansea in cui c'erano anche Haskell Curry e Gordon Plotkin. Dezani ricorda inoltre una visita a Georg Kreisel in Austria e anche contatti con Jean-Yves Girard in alcuni Logic Colloquia ai quali aveva partecipato sempre al seguito di Böhm.

Grazie alle frequentazioni con Plotkin, Barendregt, Curry, Seldin, Hindley e grazie allo studio del testo di Curry e Feys, *Combinatory logic* [36] la nozione di tipo diventa familiare per il gruppo di Torino. Il primo volume del "Curry Feys" è del '58 e il secondo del '72; inoltre, sempre nel '72, esce il testo di Hindley, Lercher e Seldin *Introduction to combinatory logic*, sorta di sintesi del "Curry Feys", che viene tradotto nel '75 in Italiano da Ferdinando Arzarello[8], a testimoniare l'importanza di questo testo, in quegli anni, per l'ambiente torinese.

Nel '74 Böhm torna a Roma e il gruppo di ricerca Torinese si ritrova senza una guida politica all'interno dell'università ma carico di idee e suggestioni lasciate dal maestro.

> *Corrado nel '74 è tornato a Roma, noi ci siam trovati qua un po' come figli orfani, non so se ha idea di come uno possa venir schiacciato in un'università baronale, io allora ho detto "o combatto, o muoio!"*
>
> Mariangiola Dezani (intervista del 21 gennaio 2022)

In particolare Dezani ricorda che, lavorando con Mario Coppo sulla classificazione delle forme normali iniziata con Böhm, pensarono di rendere tale classificazione più efficace usando i tipi da associare ai termini: nascono così i tipi intersezione, un prodotto originale della ricerca del gruppo di Torino.

Tuttavia secondo Mariangiola Dezani i tipi intersezione non sono tipi logici, nel senso che per essi non vale la corrispondenza di Curry-Howard. Ella vede nei tipi intersezione gli antesignani dei *tipi comportamentali*.
In ogni caso bisogna ammettere, seguendo Cardone, che l'interesse per i tipi ha avuto un'importanza cruciale nei legami tra il gruppo di Torino e l'ambiente logico internazionale:

> *è del 1983 la dimostrazione della completezza del sistema di inferenza di Curry tramite un passaggio attraverso i tipi intersezione e un risultato di conservatività. Quel risultato, ottenuto con Barendregt, è stato molto importante per l'ingresso nella comunità internazionale del gruppo di Torino.*
>
> Felice Cardone (mail del 21 gennaio 2022)

Da queste testimonianze ci sembra importante rilevare che l'interesse per i temi logici sia stato trasmesso al gruppo di Torino da studiosi esteri e non da logici italiani.
Tale interesse è evidente in pubblicazioni quali *A new type assigment for λ-terms* di Dezani e Coppo, pubblicato nel 1978 in "Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung" che cita in bibliografia lavori di Church, Curry, Gentzen, Hindley e Seldin; e, più tardi, nel 1987, nell'uso della tecnica della computabilità di Tait[9] in *Type theories, normal forms and D_∞ λ-models.*

3.9 L'ambiente Pisano

Un altro ambiente di ricerca che riveste un'importanza particolare nell'evoluzione del rapporto fra Logica e Informatica è quello che si crea attorno a Ennio De Giorgi presso la Scuola Normale di Pisa tra gli anni '70 e '80 grazie al contributo di Giuseppe Longo, Furio Honsell e Marco Forti.

> A partire dalla metà degli anni '70, stimolato dalle problematiche e dalle difficoltà emerse nelle sue esperienze di insegnamenti di base presso l'Università dell'Asmara, Ennio De Giorgi decise di trasformare uno dei suoi tradizionali corsi presso la Scuola Normale (quello del mercoledì) in un Seminario in cui discutere ed approfondire tematiche fondazionali insieme ai suoi studenti e ricercatori interessati, non necessariamente specialisti di Logica, ma anzi possibilmente rappresentativi di diverse discipline, non soltanto matematiche.
>
> Inizialmente si proponeva soltanto di trovare una formulazione dei consueti fondamenti insiemistici, atta a fornire una base assiomatica chiara e naturale su cui innestare i concetti fondamentali dell'Analisi Matematica. In questa accezione i Fondamenti, più

[8]Arzarello è un logico di Torino che ha iniziato la sua carriera interessandosi anche alla Teoria della Dimostrazione e si è poi dedicato alla Didattica della Matematica con esiti di rilevanza internazionale.

[9]Tait, W. N. (1967) *Intensional interpretation of functionals of finite type* J. Symbolic Logic, 32, 198-212.

> che fornire una "base certa" su cui posare tutte le costruzioni matematiche, debbono fornire un ambiente (un quadro assiomatico) in cui poter inserire tali costruzioni; più che essere la radice da cui nascono tutti gli alberi della Scienza devono predisporre una rete di sentieri per esplorare le foreste della Scienza.
>
> (Biografia di Ennio De Giorgi a cura di L. Ambrosio, G. Dal Maso, M. Forti, M. Miranda, S. Spagnolo [40])

L'approccio di De Giorgi ai fondamenti è caratterizzato da un'apertura mentale che gli consente di lavorare in ambito assiomatico senza tuttavia sentirsi legato ad una determinata formalizzazione. In Matematica, secondo De Giorgi, bisogna essere liberi di introdurre, in ogni teoria, nuove specie di oggetti con le loro proprietà.
Il seminario del mercoledì diventa pertanto un momento in cui studiosi di diversi orientamenti e interessi possono discutere dei fondamenti in modo aperto, scevro da pregiudizi.
In una prima fase le discussioni del seminario vertono su questioni di Teoria degli Insiemi, in quest'ambito De Giorgi è interessato a un approccio alla fondazione della Matematica che non sia così schematico e vincolante come la Teoria degli Insiemi di Zermelo–Fraenkel. In particolare egli vuole una Teoria degli Insiemi in cui ci siano oggetti primitivi, gli *ur-elemente*, che non sono insiemi ma possono essere elementi di insiemi. Inoltre le coppie, le corrispondenze, le relazioni, fanno parte della teoria e non sono ottenuti per codifica, come in ZF. Ma soprattutto non vuole l'assioma di fondazione, vuole cioè permettere che gli insiemi possano appartenere a se stessi. Queste esigenze portano, nel 1979, alla formulazione del "Principio di Libera Costruzione" (PLC):

Principio 1 (PLC)**.** *È sempre possibile costruire un insieme d'insiemi assegnandone liberamente gli elementi mediante un'opportuna parametrizzazione.*

Il PLC è un importante contributo alla Logica Matematica. Assiomatizzazioni basate sulla stessa idea erano già state proposte da Finsler negli anni '30 e da Scott, Boffa e Hajek negli anni '60. Tuttavia la formulazione del PLC da parte di De Giorgi ha dato il via ad una riflessione che ha portato agli assiomi di *anti-fondazione* che garantiscono l'esistenza di insiemi non ben fondati rispetto all'appartenenza. Questi assiomi si sono rivelati particolarmente adatti nelle applicazioni della Teoria degli Insiemi alla Semantica e all'Infomatica.
Bisogna notare che il principio PLC non compare in pubblicazioni a nome di De Giorgi il quale lascia spesso ai suoi allievi il compito di sviluppare i dettagli tecnici e le idee emerse durante il seminario. In questo caso spetta a Marco Forti e Furio Honsell approfondire e sviluppare le idee del Maestro giungendo nel 1983 alla pubblicazione di *Set theory with the weak construction principles* negli Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa [50].

Forti e Honsell sono quindi interessati alle problematiche fondazionali e anche alle connessioni fra tali tematiche e le nuove suggestioni provenienti dall'Informatica Teorica. Su questo tema collaborano anche con un altro studioso che, formatosi negli stessi anni all'università di Pisa, frequenta i seminari di De Giorgi e si interessa a questioni di Ricorsività e di Teoria degli Insiemi: Giuseppe Longo.

> *Ho seguito come studente il corso di Logica di Longo a Pisa nell' '81. Honsell era appena laureato e teneva delle esercitazioni di Teoria degli Insiemi.*
>
> Simone Martini (intervista del 30/09/2021)

Longo si laurea a Pisa nel 1971 e, dopo una tesi sulla complessità di calcolo delle funzioni ricorsive, inizia a occuparsi, nel 1973, dei modelli di Scott per il λ-calcolo. Questo tema lo porterà a collaborare, nel 1980, con Barendregt e Hindley e lo avvicinerà al gruppo di Torino. In questo contesto nasce l'interesse per i tipi e le strutture matematiche legate alla semantica denotazionale, tale interesse si riscontra in varie pubblicazioni e nella collaborazione con Coppo, Dezani, Forti e Honsell documentata dall'intervento di Mariangiola Dezani al Logic Colloquium tenutosi a Firenze nel 1982.

Le importanti collaborazioni di Longo a livello internazionale, le sue pubblicazioni su riviste di Logica e il suo ruolo nella fondazione dell'AILA, ne fanno una personalità chiave della storia della Logica italiana, pur non provenendo dal gruppo di logici che, come abbiamo visto, sono stati i fautori della rinascita della Logica in Italia (Geymonat, Casari, Mangione, Magari etc...).
Ciò ci spinge ad una riflessione sull'identità della ricerca in Logica in Italia a cavallo tra gli anni '70 e '80. A tal proposito ci sembra interessante il punto di vista di Simone Martini il quale, essendosi

laureato con Longo, ha vissuto le vicissitudini del rapporto tra Logica e Informatica negli anni '80. Egli, riferendosi all'esperienza del Seminario di De Giorgi, si esprime così:

> *De Giorgi sta facendo della Logica Matematica? Certo che la sta facendo, sta facendo Teoria degli Insiemi! Ma lui non la vede assolutamente come Logica Matematica, la vede piuttosto come una fondazione della Matematica o meglio come una fondazione della conoscenza, nel senso che tutta la conoscenza si deve strutturare secondo quella teoria quadro.*
>
> Simone Martini (intervista del 30/09/2021)

Dal canto loro Longo, Forti e Honsell avevano consapevolezza dell'importanza del loro lavoro per i temi della Logica.

> *…nel seminario De Giorgi di Logica Matematica in Normale a Pisa dalla prima metà degli anni '70 in poi, Forti, Honsell ed io facevamo ponti (e pubblicavamo articoli matematici) fra questioni di Teoria degli insiemi, Logica, λ-calcolo…*
>
> Giuseppe Longo (mail del 29/09/2021)

La presenza di altri studiosi che, al di fuori della *scuola* nata dal gruppo CNR di Geymonat, si occupano comunque di Logica, diventa pertanto non più trascurabile già dall'inizio degli anni '80. Si tratta di giovani ricercatori interessati anche ai temi provenienti dal mondo dell'Informatica Teorica.

3.10 Due binari paralleli

Un aspetto a nostro avviso caratteristico della storia della Logica italiana è che, fino alla seconda metà degli anni '80, l'ambiente dei logici, intendendo con questo termine la scuola di Logica che si era formata dal gruppo di ricerca del C.N.R. di Ludovico Geymonat, e l'ambiente degli informatici, sviluppavano le proprie ricerche in modo indipendente l'uno dall'altro senza sostanziali scambi. Ciò non avveniva nell'ambiente della ricerca internazionale in cui la comunicazione fra Logica e Informatica era già avviata da tempo, si pensi ad esempio ai lavori di Curry, Hindley, Martin-Löf più volte citati.
I risultati di Böhm sul λ-calcolo puro (cioè senza tipi) non venivano percepiti in Italia come risultati "di Logica", almeno nel gruppo di ricerca avviato da Geymonat. Ciò emerge da alcune testimonianze che abbiamo raccolto fra le quali la seguente:

> *…quando io facevo parte del gruppo CNR di Geymonat non vi era quasi alcun interesse per la Teoria della Dimostrazione. Gli unici argomenti che interessavano al gruppo CNR erano l'Algebra della Logica e un po' la Teoria degli Insiemi, come si può vedere dal libro di Casari, "Questioni di filosofia della matematica" (1964). Si può immaginare, perciò, quale interesse potesse esserci per il rapporto tra Teoria della Dimostrazione e Informatica Teorica. Se per la Teoria della Dimostrazione non vi era quasi alcun interesse, del rapporto con l'Informatica Teorica non si parlava neppure, era una cosa che non esisteva! La cosa mi metteva un po' a disagio perché a Roma io avevo studiato con Somenzi, che era molto amico di Böhm e perciò avevo frequenti occasioni di incontrare Böhm. Ma per i logici dell'epoca Böhm era un ingegnere che si occupava di calcolatori, nulla a che fare con la Logica. Invece il lavoro di Böhm ebbe ampio riconoscimento fuori dall'Italia. Per esempio, il manuale di Barendregt, The Lambda Calculus (1981), dedicò un intero capitolo ai risultati di Böhm.*
>
> Carlo Cellucci (mail del 1/12/2021)

Probabilmente anche Böhm stesso non si considerava un logico e non pensava di fare ricerca in questa disciplina. Anche perché, a giudicare dalle testimonianze dei suoi allievi e collaboratori, l'interesse di Böhm appare più diretto alla ricerca in sé che alla preoccupazione dell'ambito in cui tale ricerca si collochi, insomma non pare ci sia interesse ad ascrivere le proprie ricerche sotto questa o quella etichetta.

> *Sin dal mio primo incontro con Corrado Böhm sono stata affascinata dalla sua creatività, passione e curiosità nel fare ricerca. Corrado Böhm è un grande maestro*

> *che sa prendere dolcemente per mano i suoi studenti per svelare quanto sia meraviglioso il mondo dell'indagine scientifica...*
>
> Mariangiola Dezani Ciancaglini (www.corradoböhm.it)

> *...Si trattava di una teoria? Di un linguaggio di programmazione? Nulla di tutto ciò: per Corrado i combinatori semplicemente agivano, come i microbi diciamo, e l'unico atteggiamento sensato era quello di cercare di utilizzarli per i propri fini senza porre confini di alcun tipo. Abituato al rigido schema dell'insegnamento tradizionale, io mi aspettavo come prima cosa assiomi definizioni e teoremi, ma questo mal si coniugava con il metodo di Corrado. Per lui la ricerca era intimamente legata alla libertà, alla sperimentazione, all'arte, e alla fantasia.*
>
> Alessandro Berarducci (www.corradoböhm.it)

Per avere un'idea della scarsa comunicazione che c'era ancora a metà degli anni Settanta tra l'ambiente legato alla Logica Matematica e nato nel gruppo C.N.R. di Geymonat e l'ambiente della ricerca in Informatica Teorica, in particolare in λ-calcolo, analizzeremo un caso legato alla Logica Combinatoria.

La Logica Combinatoria, che come abbiamo visto è strettamente legata al λ-calcolo, viene presentata nell'opera enciclopedica di Ludovico Geymonat *Storia del pensiero filosofico e scientifico*. In particolare *la logica del ventesimo secolo* è il titolo del sesto capitolo (del settimo volume dell'opera in questione) curato da Corrado Mangione [84]. Questo capitolo riveste una particolare importanza anche alla luce del progetto di rinnovamento culturale portato avanti da Geymonat e dal gruppo di intellettuali a lui vicini; si tratta di un progetto dai forti connotati ideologici.

Geymonat, già nel 1948, quando aveva fondato il Centro di Studi Metodologici a Torino (si veda il primo capitolo di introduzione storica) aveva come obiettivo il rinnovamento degli studi scientifici italiani all'insegna di una Filosofia della Scienza rinnovata anche dal punto di vista metodologico, era la *sua traduzione del neo-positivismo che aveva portato in Italia al termine della guerra, dopo i suoi precedenti contatti in Germania con gli esponenti maggiori del movimento* [67]. Geymonat, in seguito, *aveva capito con acuta percezione che proprio una concezione sorpassata della Matematica e l'ignoranza della Logica paralizzavano il progetto* (ibidem) del Centro di Studi Metodologici. Da qui la necessità di riunire attorno a se giovani studiosi capaci di impadronirsi degli strumenti necessari per aggiornarsi in Logica Matematica ed essere al passo con l'ambiente internazionale. Questa esigenza culturale viene condivisa anche da altri intellettuali, ad esempio Beniamino Segre, come è evidente dalla seguente testimonianza di Ettore Casari:

> *vorrei ricordare un piccolo episodio accaduto a Nizza nel settembre del 1957 in occasione del primo dei "Congressi dei matematici di espressione latina" dove detto fra parentesi, c'ero potuto andare perché Geymonat, allora ancora senza i diritti d'autore che avrebbero rasserenato la sua vecchiaia, con moglie e cinque figli a carico, mi aveva dato i soldi necessari per il viaggio e la permanenza. Al termine della conferenza del franco-canadese Maurice L'Abbé che parlava delle nuove strutture algebriche (cilindriche e poliadiche) che Tarski, Henkin e Halmos stavano proprio allora estraendo dalla considerazione delle teorie deduttive elementari, Beniamino Segre, in quel momento forse la figura più prestigiosa della matematica italiana* [10]*... mi fece cercare e visibilmente scosso mi disse che bisognava assolutamente fare qualcosa, che non era possibile accettare che la matematica italiana, così ben rappresentata altrove, fosse totalmente assente da questo settore.*
>
> Ettore Casari, [22].

Possiamo quindi immaginare quale fosse l'importanza di un'opera come *Storia del pensiero filosofico e scientifico* di Geymonat, e in particolare del capitolo sulla *logica del ventesimo secolo*, all'interno del progetto di rinnovamento della cultura scientifica italiana.
Ed è proprio in questo capitolo che troviamo un passo che ci fra riflettere sulla distanza tra il gruppo dei logici che gravitavano attorno a Geymonat e gli studiosi italiani di λ-calcolo.
In [84], la trattazione della logica combinatoria parte dalla descrizione del *linguaggio formato dagli atomi* (termini atomici) *fra i quali i tre combinatori fondamentali* **I**, **K**, **S**. I termini del linguaggio

[10] Segre era, in quel momento, anche presidente della SILFS, la Società italiana di Logica e Filosofia della Scienza, succeduto al primo presidente Francesco Severi (1879-1961).

sono quindi gli atomi e, se X e Y sono termini, allora anche (XY), cioè l'*applicazione* del termine X al termine Y, è un termine. Si passa quindi alla descrizione, attraverso regole di riscrittura, di una relazione di *riducibilità* fra termini che "intuitivamente" cattura l'idea di *computazione.* Tale relazione, indicata come

$$A \rhd B$$

da leggersi "A si riduce a B", è definita per mezzo dei seguenti assiomi:

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \mathbf{I}X & \rhd & X \\ (2) & \mathbf{K}XY & \rhd & X \\ (3) & \mathbf{S}XYZ & \rhd & XZ(YZ) \\ (4) & X & \rhd & X \end{array}$$

e delle seguenti regole: per ogni X, Y, Z

$$\begin{array}{lc} (\alpha) & X \rhd X' \to ZX \rhd ZX' \\ (\beta) & X \rhd X' \to XZ \rhd X'Z \\ (\gamma) & X \rhd Y \wedge Y \rhd Z \to X \rhd Z \end{array}$$

Notiamo che i primi tre assiomi corrispondono alla descrizione del comportamento dei combinatori **I**, **K** e **S** che abbiamo trattato nel λ-calcolo; il quarto corrisponde invece alla proprietà riflessiva; le regole (α) e (β) affermano che la relazione $\rhd$ *passa al contesto* rispetto all'*applicazione* e la regola (γ) è la proprietà transitiva.
La relazione $\rhd$ corrisponde pertanto alla β-riduzione $\to_\beta$ del λ-calcolo.
In [84], dopo aver spiegato che è possibile costruire un combinatore che corrisponda all'operatore di *astrazione* del λ-calcolo, si passa alla definizione della relazione di *equivalenza* tra termini per mezzo del concetto di riducibilità.

> mine si potrà convertire ad una sola forma normale. La seconda riguarda la relazione di equivalenza « = » che possiamo stabilire fra termini sulla base del concetto di riducibilità. La riducibilità infatti introduce chiaramente un preordine fra i termini: la « = » non è nient'altro che l'equivalenza che possiamo definire assumendo che $X = Y$ se e solo se $X \rhd Y$ e $Y \rhd X$. Il teorema di Church e Rosser afferma allora che se $X = Y$ esiste uno Z cui entrambi si riducono; da ciò consegue che se $X = Y$ o entrambi non hanno forma normale oppure, se l'hanno, è la stessa.

In questo passaggio notiamo un errore[11] nel definire la relazione di equivalenza. Infatti se fosse

$$X = Y \quad \text{se e solo se} \quad X \rhd Y \text{ e } Y \rhd X$$

allora due termini X e Y non potrebbero considerarsi equivalenti nel momento in cui $X \rhd Z$, $Y \rhd Z$ ma non si ha $X \rhd Y$ o $Y \rhd X$. Ciò non rispecchia l'equivalenza tra termini in Logica Combinatoria o, equivalentemente, in λ-calcolo.
Illustriamo ciò con un esempio tratto appunto dal λ-calcolo. In questo caso la relazione $\rhd$ corrisponde alla β-riduzione $\to_\beta$ e l'equivalenza $=$ della logica combinatoria corrisponde alla relazione di β-equivalenza $\equiv_\beta$ tra λ-termini.
Consideriamo il termine $\mathbf{y}$ detto *Curry's paradoxical combinator* e definito come:

$$\mathbf{y} = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

Tale termine ha la proprietà di essere un combinatore di punto fisso, cioè di essere un termine chiuso tale che, per ogni termine t, si abbia:

$$t(\mathbf{y}t) \equiv_\beta \mathbf{y}t$$

Come ci si rende conto effettuando il calcolo, la proprietà del combinatore si verifica perché si ha

$$\mathbf{y}t \to_\beta (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))t \to_\beta (\lambda x.t(xx))(\lambda x.t(xx)) \to_\beta t((\lambda x.t(xx))(\lambda x.t(xx)))$$

[11] L'errore in questo passaggio è stato notato da Giuseppe Longo e da J. Roger Hindley che hanno condiviso con me questa loro osservazione.

quindi dalle uguaglianze precedenti si ha che

$$\mathbf{y}t \to_\beta (\lambda x.t(xx))(\lambda x.t(xx))$$

per cui, dato che la relazione passa al contesto, si ha

$$t(\mathbf{y}t) \to_\beta t((\lambda x.t(xx))(\lambda x.t(xx)))$$

ma anche che

$$\mathbf{y}t \to_\beta t((\lambda x.t(xx))(\lambda x.t(xx)))$$

in sostanza i due termini $\mathbf{y}t$ e $t(\mathbf{y}t)$ si riducono allo stesso termine e pertanto sono equivalenti, tuttavia nessuno di essi si riduce "direttamante" all'altro. Quindi la definizione di equivalenza data non consentirebbe l'equivalenza di tali termini. Ma questo è solo un esempio, come osservano Longo e Hindley, in questo modo non valgono i fondamentali risultati di Normalizzazione e la proprietà di Church-Rosser.

La svista nella definizione della relazione di equivalenza ci dà un'idea di quanto i temi della Logica Combinatoria fossero poco familiari al gruppo di Geymonat laddove altri ricercatori italiani in quegli anni avevano non solo dimestichezza con questa parte della Logica ma addirittura davano, come abbiamo visto, contributi importanti nel campo. A tal proposito abbiamo chiesto il parere di Simone Martini:

> *Una svista analoga in un argomento come il teorema di completezza alla Henkin non l'avrebbero (n.d.a. riferendosi ai curatori di [84]) mai fatta. Chiunque avesse riletto il capitolo, l'avrebbe immediatamente osservata e non ci sarebbe stata sulla versione a stampa. Invece su una questione che non gli interessa, che conoscono poco, che anche i lettori di quel capitolo, prima che venga pubblicato, conoscono poco, nessuno se ne accorge.*
>
> Simone Martini (Intervista del 30/09/2021)

La scarsa confidenza con la Logica Combinatoria e il λ-calcolo impedisce ai logici italiani di essere sensibili a quei temi, come la *corrispondenza Curry–Howard*, che possono favorire un'apertura verso il mondo dell'Informatica e che emergono solo sporadicamente nei loro lavori. Ad esempio nel testo di Cellucci [27], nel paragrafo sulla *teoria della funzionalità*, si specifica, in nota, che

> *Le relazioni tra la nozione di dimostrazione e la nozione di funzionale furono notate per la prima volta da Curry e Feys (1958)*[12]*, e vennero poi estese in Howard (1969)*[13]*, Martin-Löf (1972)*[14]*, Girard (1972)*[15]

Ciò costituisce una traccia del fatto che la *Corrispondenza di Curry–Howard*, era già in qualche modo nota all'ambiente logico italiano alla fine degli anni Settanta.

C'è un'ulteriore conferma di ciò in [28], un contributo che Cellucci presenta ad un convegno nel 1981 a Firenze. Nell'introduzione si spiega che lo studio della complessità delle dimostrazioni non ha come unico scopo quello di investigare i principi che sono alla base della Matematica ma ha anche una applicazione *pratica* in Informatica. Tale tesi è avvalorata dai riferimenti all'interpretazione di Kolmogorov delle *proposizioni come problemi* e, appunto, e alla *corrispondenza di Howard*:

> *However the study of complexity of proofs is not only relevant to a proper understanding of mathematical phenomena but may also be of pratical use in computer science. In view of Kolmogorov's interpretation of propositions as problems (tasks) there is a strict correspondence between "d is a derivation of the proposition A" and "d is a program for the problem A". This correspondence, together with the well known Howard' correspondence between "d is a derivation of the proposition A" and "d is an object of type A", is just being exploited.*
>
> Carlo Cellucci, [28]

Questi elementi, insieme ad alcune cause esterne alla ricerca scientifica che indagheremo nel prossimo paragrafo, porteranno negli anni '80 ad un avvicinamento progressivo della Logica italiana all'Informatica.

[12] *Combinatory Logic*, Vol. 1, Studies in Logic and the foundation of Mathematics.

[13] *The Formulae-as-Types notion of construction*, nota privata.

[14] *Infinite terms and a System of Natural Deduction*, Composition Mathematica, 24, 93-103.

[15] *Interprétation fonctionelle et élimination des coupures de l'arithmétique d'ordre supérieur*, tesi di dottorato, Università di Parigi.

3.11 La convergenza

Durante gli anni '80 i due mondi, della Logica e dell'Informatica italiane, vengono finalmente a convergere. In un primo momento tale convergenza si realizza non attraverso vere e proprie collaborazioni scientifiche, ma in una serie di situazioni in cui gli studiosi di entrambe le discipline iniziano a condividere degli interessi comuni e a partecipare ad eventi che li vedono fianco a fianco.

3.11.1 I convegni e il ruolo della scuola di Siena

Nel 1982 il *Logic colloquium* della ASL (Association for Symbolic Logic) si svolge, per la prima volta, in Italia, a Firenze ed è dedicato a Teoria dei Modelli, Logica Categoriale e λ-calcolo. Delle 22 conferenze generali, 3 sono tenute da italiani: Mariangiola Dezani, Roberto Magari e Daniele Mundici. Anche nel comitato organizzativo troviamo rappresentanti del gruppo originario di Geymonat, come Ettore Casari, al fianco di studiosi interessati anche all'Informatica come Giuseppe Longo.

Ancora più rilevante da questo punto di vista è il convegno della SILFS che si tiene a San Gimignano nel 1983. Qui le varie tendenze della Logica italiana in senso lato vengono rappresentate e viene dato largo spazio alla Teoria della Dimostrazione e a tematiche legate all'Informatica, come la semantica denotazionale. Ciò è evidente nelle relazioni di Girard, Cellucci, Abrusci, Martin-Löf, Longo, Böhm e Dezani.

> *...stavo andando a San Gimignano e avevo bisogno di chiedere qualcosa sulle categorie per la mia tesi di laurea. Nel bar della stazione di Poggibonsi, Martin Löf, con il suo modo molto intimista, gentilissimo come sempre, mi aveva raccontato qual era la sua idea sulle categorie, citandomi Husserl, la fenomenologia,..., c'era Lolli (era lui che mi aveva presentato a Martin-Löf) e c'erano dei vecchietti che erano lì a fare una partita a carte e guardavano questi personaggi stranissimi che, chinati come se dovessero chiedere perdono, si raccontavano cose in una lingua sconosciuta.*
>
> Felice Cardone intervista del 18/01/2022

Lo studio delle categorie in quegli anni interessa alcuni logici italiani ed è uno dei punti di contatto tra la Matematica e l'Informatica.

Giuseppe Rosolini, laureatosi a Parma nel 1977 con Carlo Marchini, presenta al VII Incontro di Logica di Siena, nel 1983, un contributo su *domains and dominical categories*. L'interesse di Rosolini per le categorie nasce durante la tesi di laurea. Studia un problema sulle algebre di Lindenbaum e si rende conto che non può essere risolto per mezzo di una costruzione proposta in un articolo di Teoria dei Numeri.

> *Marchini mi disse: "se non funziona così, dobbiamo usare i topoi". Da allora ho incominciato a studiare la Teoria delle Categorie e i Topoi. C'era, a Parma, un gruppo di logici che tenevano un seminario sulle Categorie: oltre a Servi e Marchini anche Daniela Monteverdi, Carla Luppi, e Cristina Reggiani.*
>
> Giuseppe Rosolini intervista del 01/12/2022

Nel 1986 Rosolini consegue il PhD all'università di Oxford e continua ad interessarsi alla teoria delle categorie e ai topoi come strumenti per ottenere strutture matematiche che generalizzino i domini di Scott ([120], [121]).

Nella prima metà degli anni Ottanta ci sono altri eventi in cui i due mondi si trovano ad interfacciarsi: del 1984 è un convegno su Logica e Informatica tenuto a Pordenone con relazioni, fra gli altri, di Gabriele Lolli e Ugo Montanari. Nel 1985 l'ottavo Incontro di Logica Matematica organizzato dalla Scuola di Specializzazione in Logica Matematica di Siena riguarda *Proof theory e Intuizionismo* e prevede due corsi brevi tenuti da Girard (*Logic and related notions*) e Sambin (*gli spazi di Martin-Löf e la teoria intuizionista dei tipi*).
Il decimo Incontro di Logica della Scuola di Siena dell'86 è dedicato a *la logica nell'informatica* e prevede una tavola rotonda dal titolo *Logica e informatica: da incidenti di confine a un'alleanza di interesse?* che vede interventi di Barendregt, Böhm e Cellucci.
Nel suo intervento Böhm riconosce un importante ruolo alla Logica nell'Informatica:

> *Spero di aver illustrato l'insostituibilità della logica per lo sviluppo dell'informatica e non solo per quello dell'informatica teorica.*
>
> Corrado Böhm (intervento al X incontro di Logica, 1986)

Più critico è invece il punto di vista di Cellucci:

> *Sono diffuse credenze che sembrano dare per scontato che il rapporto informatica–logica matematica non sia solo—per usare la felice espressione che compare nel titolo di questa tavola rotonda—un incidente di confine, ma abbia un carattere più organico, o addirittura abbia già dato sostanziosi frutti nella pratica informatica. Una di queste credenze—o, per meglio dire, miti—è che una riprova della fecondità del rapporto informatica–logica matematica sia data dal LISP: un figlio legittimo—così si ritiene—del λ-calcolo. Ora, questo mito è stato contestato recentemente dallo stesso McCarthy, il padre del LISP. … Spesso i miti sono innocui, e talora sono persino utili perché aiutano a sopportare il peso dell'esistenza. Ciò non toglie che in qualche caso essi possano essere pericolosi.*
>
> Carlo Cellucci (intervento al X incontro di Logica, 1986)

In ogni caso la presenza del mondo della ricerca italiana in Informatica nel decimo incontro è forte: Mario Coppo tiene un corso (*tipi e polimorfismo nei linguaggi di programmazione*) e molti fra i relatori hanno profondi legami con l'Informatica (Marco Forti, Anna Labella, Giuseppe Longo, Simone Martini, Furio Honsell), si tratta di un ulteriore riconoscimento dell'Informatica come parte della Logica italiana in senso lato.

Infine la fondazione dell'AILA è un atto ufficiale di riconoscimento dei ricercatori in Informatica Teorica come parte della comunità logica italiana. Il 7 febbraio 1987 presso lo studio notarile di Giuseppe Gunnella sono presenti, a firmare come soci fondatori l'atto di nascita dell'Associazione Italiana per la Logica e le sue Applicazioni, anche Böhm, Longo e Dezani.

Al di là dei dati storici è evidente che gli *incontri di logica* organizzati dal gruppo di Siena vengono considerati, nei ricordi dei testimoni, il *luogo* dell'incontro fra i due mondi:

> *questi incontri sono stati veramente fondamentali, perché ci siamo passati veramente tutti… lì ho incontrato Simone Martini, Eugenio Moggi, abbiamo scoperto di avere interessi comuni e si è formato un gruppo di persone che aveva la possibilità di chiacchierare lì alla Certosa di Pontignano, la sera mangiavamo lì, parlavamo e ci conoscevamo tutti, era una comunità abbastanza affiatata, molti di noi erano coetanei ma c'erano più fasce di età. C'era Mundici, Cellucci, poi c'erano ovviamente i senesi, Bernardi, Magari, c'era veramente tutta la logica italiana.*
>
> Felice Cardone (intervista del 18/01/2022)

> *I primi contatti* [fra Logica e Informatica] *avvengono a Siena. Per la Scuola di Logica di Siena si convenzionano molte università italiane,… è la prima volta in cui viene rotta questa struttura rigida della scuola di Geymonat e in cui si incontrano anche altre persone, Longo, Coppo, Dezani, il panorama si apre e cominciano le contaminazioni.*
>
> Simone Martini (intervista del 30/09/2021)

Tuttavia, stando ai dati e alle testimonianze raccolte, si ha l'impressione che la convergenza tra i due mondi non sia stata determinata da una effettiva vicinanza dei temi di ricerca.

> *Noi andavamo a questi convegni ma non c'era collaborazione.*
>
> Mariangiola Dezani (intervista del 21/01/2022)

Infatti come abbiamo visto i logici italiani erano più interessati a temi di Algebra della Logica o Teoria dei Modelli e solo in alcuni casi, come quelli di Abrusci e Sambin di cui parleremo nel seguito, scelgono dei percorsi che li porteranno a comunicare con altre realtà.

3.11.2 Le cause esterne alla ricerca

La spinta verso l'apertura dei logici italiani all'Informatica sembra dovuta in gran parte a fattori esterni alla ricerca scientifica che veniva prodotta in Italia. Come abbiamo visto infatti le tematiche logiche entrano nel gruppo di Informatica di Torino negli anni '70, non mediante uno scambio con i logici italiani, con i quali non c'era dialogo, ma tramite il contatto con la comunità logica internazionale.

Per fattori esterni alla ricerca intendiamo ad esempio la consapevolezza che, ad un livello generale, ci fossero dei temi di interesse comune: la calcolabilità, la corrispondenza di Curry–Howard.

Questa consapevolezza fa nascere l'idea che la condivisione dei temi comuni possa essere il connettivo per creare una realtà che abbia più peso sul piano culturale (ma anche più concretamente sul piano accademico) della sola comunità dei logici.

> *Negli Incontri di Siena c'era l'idea di non mettere steccati tra le varie aree: logica in senso standard, logica filosofica, λ-calcolo e informatica teorica e anche teoria delle categorie; sia per una motivazione culturale sia per avere una maggiore rappresentatività. Ciò non voleva dire per forza collaborare nella ricerca ma almeno conoscersi e prendere contatti.*
>
> Claudio Bernardi

Tutto ciò si inserisce in un contesto storico favorevole all'Informatica. Non bisogna infatti dimenticare che l'Italia vive a cavallo fra gli anni '70 e gli anni '80 un periodo di grande entusiasmo verso l'informatica che sfocia, a livello di programmi scolastici, nel PNI (Piano Nazionale per l'Informatica).

Nel PNI gli elementi di Informatica vengono inseriti nei programmi di Matematica e la Logica gioca il ruolo centrale di mediatore fra Matematica e Informatica (si veda a tal proposito il capitolo sulla Logica oltre la ricerca).

Vediamo dunque che nel mondo *esterno* alla ricerca in Logica e in Informatica, l'idea che queste due discipline siano intimamente legate è ben radicata. D'altra parte uno *slogan* sull'importanza della Logica per l'Informatica veniva spesso rilanciato in quel periodo, lo ritroviamo anche nelle pagine di Notizie di Logica nel 1988:

> *Questo strettissimo legame tra logica e informatica (che non sorprende appena si ricordi che oggetto della logica sono proprio i linguaggi e i sistemi formalizzati), fa pensare a molti che la logica sia per l'informatica oggi, e lo sarà maggiormente in futuro, più di quel che l'analisi matematica fu per la fisica.*
>
> P. Pagli, NdL 1988

Inoltre i corsi di laurea in Informatica che si diffondono in Italia già dagli anni '70 (i primi sono Pisa e Torino) prevedono tutti un insegnamento di Logica che in alcuni casi sarà reso obbligatorio. Infatti se i logici italiani non sono, almeno in un primo momento, interessati a temi di Informatica; gli informatici, dal canto loro, considerano importante la Logica per la loro formazione:

> *Corrado* (Böhm) *aveva chiara l'importanza della logica in quello che faceva ... si adoperò affinché gli studenti di informatica a Torino seguissero un insegnamento di logica già nel '71, ricordo che all'inizio gli informatici seguivano il corso di Previale...*
>
> Mariangiola Dezani (intervista del 21/01/2022)

Flavio Previale, uno dei membri del gruppo di Logica matematica del CNR diretto da Geymonat (si veda il capitolo di introduzione storica) ricorda di aver tenuto, nel 1970, il primo corso di Logica istituito a Torino per il corso di laurea in Matematica; quindi è probabile che il corso di Logica a cui fa riferimento Dezani fosse quello tenuto da Previale a Matematica.

> *ricordo che ancora nel 1975 non vi era alcun corso specifico di logica a scienze dell'informazione, i primi sono stati attivati negli anni '80*
>
> Franco Parlamento (mail del 01/02/2022)

L'istituzione di insegnamenti di Logica nei diversi corsi di laurea (Matematica, Filosofia, Informatica) diventa, negli anni Ottanta, un tema sensibile per la comunità logica italiana, che si andava ampliando e vedeva in quegli insegnamenti delle possibilità per ottenere posizioni accademiche.

Nel 1987 l'AILA promuove una giornata di studio sull'insegnamento della Logica nel CdL in Matematica in cui si propone di inserire come fondamentale, per tutti gli indirizzi, un insegnamento di Logica Matematica. Tale proposta non verrà mai attuata non riscuotendo l'approvazione del resto della comunità matematica. Il massimo che si riuscirà a fare, nei corsi di laurea in Matematica, sarà rendere la Logica caratterizzante nell'indirizzo didattico. Nei CdL in Scienze dell'Informazione invece si istituirà un semestre obbligatorio di Logica e ciò contribuirà a saldare il legame tra le due realtà almeno dal punto di vista accademico.

Insomma il rapporto tra Logica e Informatica vive in Italia una situazione per certi aspetti paradossale. Il paradosso consiste, a nostro avviso, nella presenza di due gruppi di ricerca nelle due discipline senza collaborazioni scientifiche; tali gruppi entrano in contatto e stringono un rapporto a causa di pressioni sociali e culturali esterne al mondo della ricerca scientifica.

3.11.3 I rapporti con l'estero

Naturalmente esistono eccezioni a ciò, che riguardano soprattutto i ricercatori italiani che hanno avuto contatti con studiosi di Logica, non italiani, interessati a temi vicini alla Computer Science. Il contatto con l'ambiente logico internazionale è stato un fattore importante per sensibilizzare i logici italiani all'importanza dell'Infomatica Teorica.
Per una panomarica dei rapporti tra i logici italiani e l'estero, un punto di partenza è ancora il lavoro pionieristico di Cellucci nell'introdurre la Teoria della Dimostrazione in Italia, influenzato dall'esperienza di studio e di ricerca svolte all'estero. Nel 1968 grazie ad una borsa CNR, Cellucci si reca all'università di Oxford, nel 1970 tiene un corso presso l'università del Sussex le cui note saranno lo stimolo per il testo di Teoria della Dimostrazione di cui abbiamo parlato diffusamente. In questo periodo Cellucci inizia uno scambio con Georg Kreisel, Shigeru Hinata e Dag Prawitz, quest'ultimo trascorrerà anche un periodo come professore visitatore a Roma.

> *invitai Prawitz a Roma, tenne un corso come professore a contratto a Villa Mirafiori nel 1983*
>
> Carlo Cellucci (mail del 18 ottobre 2020)

Il ruolo di Cellucci per promuovere la Logica in Italia attraverso i contatti con l'estero passa anche per iniziative editoriali.

> *Negli anni '80 riuscii a convincere l'ditore di Bibliopolis, Francesco del Franco*[16]*, a pubblicare una collana di "Studies in Proof Theory" (editors: Prawitz, Girard, Schwichtenberg, e io stesso). In quella collana, nel 1987, pubblicammo il libro di Girard, Proof Theory and Logical Complexity.*
>
> Carlo Cellucci (ibidem)

Vogliamo a questo punto sottolineare che, oltre a Francesco del Franco di Bibliopolis, anche altri editori italiani si dedicarono all'opera di diffusione della Logica Matematica attraverso la traduzione di importanti testi internazionali. Un esempio è l'attività della casa editrice *Progresso tecnico editoriale*, per le cui stampe uscì nel 1964 *Algoritmi e macchine calcolatrici automatiche* di Boris Avraamovich Trakhtenbrot. Progresso tecnico editoriale è attiva tra gli anni Sessanta e gli anni Settanta con tre collane: *Argomenti di Matematica*, *Parlando di Matematica* e *Argomenti di Chimica moderna*. La prima delle tre collane è diretta da Corrado Mangione e presenta le traduzioni in italiano di alcuni volumi di origine sovietica la cui traduzione viene effettuata non dall'originale russo ma da una traduzione statunitense.

Abbiamo già parlato della risonanza del lavoro di Böhm presso l'ambiente logico internazionale. Un'importante conseguenza di ciò sono i contatti dell'ambiente informatico italiano (in particolare Dezani, Coppo e Longo) con logici del calibro di Plotkin, Barendregt, Curry, Seldin, Hindley, Kreisel e Girard.
Anche Giovanni Sambin, già citato nel capitolo sull'Algebra della Logica, dopo essersi formato e aver lavorato nel gruppo di Magari, sposta i suoi interessi verso l'intuizionismo e la Matematica costruttiva grazie anche ai suoi contatti con i logici stranieri.
Già dalla prova del suo teorema del punto fisso (si veda il capitolo sull'Algebra della Logica) Sambin si era reso conto, grazie alla collaborazione con Ursini, che il risultato che stava dimostrando era valido nelle algebre diagonali intuizioniste.

> *Facendo quella prova, nella mia dimostrazione del fatto che ogni polinomio ammette un punto fisso, il fatto di essere in un'algebra di Boole non l'ho mai usato, non ho mai usato che $\neg\neg x = x$ e non ho mai usato che $x \vee x' = 1$, mai! E di questo mi sono accorto a posteriori perché usare queste proprietà distruggeva certe informazioni che mi servivano. Aldo Ursini, che aveva introdotto la definizione di "algebre diagonalizzabili intuizioniste", mi ha detto "se non usi mai queste proprietà puoi dire che il risultato vale nelle algebre diagonalizzabili intuizioniste" e difatti ho aggiunto il titolo "an effective fixed point theorem in intuitionistic diagonalizable algebras" ...allora, un po'*

[16]Francesco del Franco, di formazione fisico teorico, ha fondato la casa editrice *Bibliopolis* nel 1976 ponendo particolare attenzione alle collane di Scienze, Fisica Teorica, Filosofia e Logica Matematica. A cavallo tra gli anni '70 e '80 prese contatto con alcuni studiosi di Logica Matematica diventando un editore di riferimento per il mondo della Logica italiana.

> *per questo un po' per motivi miei, ho cominciato a interessarmi dell'intuizionismo. Poi ho avuto la fortuna di incontrare Martin Löf*[17] *che è venuto a Padova nel giugno 1980 e da lì ho deciso che avrei cambiato tutto.* Giovanni Sambin (Intervista del 02/02/2021)

Questa svolta avvicina Sambin agli aspetti computazionali della Logica.
Un altro tema che costituisce un terreno di comunicazione tra Logica e Informatica è la Teoria delle Categorie. In quest'ambito ha lavorato, come abbiamo ricordato, Giuseppe Rosolini che ha conseguito il PhD a Oxford nel 1986 con Dana Scott.

In ambito più prettamente legato alla Teoria della Dimostrazione, uno studioso italiano che ha avuto importanti esperienze all'estero è Andrea Cantini; allievo di Casari, studia con Feferman negli Stati Uniti. In Italia Cantini è stato uno dei pochi ad occuparsi di teoria riduttiva della dimostrazione.

> *Sono andato negli Stati Uniti per studiare Teoria degli Insiemi, poi ho fatto un corso sulla Matematica costruttiva con Feferman e i miei interessi si sono spostati verso la Teoria riduttiva della Dimostrazione.*
>
> Andrea Cantini (Intervista del 28/01/2022)

Infine un altro studioso italiano che ha mediato tra il mondo della Logica e il mondo dell'Informatica è Michele Abrusci. Allievo di Casari, si reca a Parigi nel 1981

> *Casari mi disse "non c'è base per fare ricerca su quelle cose" ... poi cambiò idea...*
>
> Vito Michele Abrusci (Intervista del 02/01/2021)

Inizia da qui un sodalizio con Jean Yves Girard, logico francese formatosi a l'École normale supérieure de Saint Cloud. Nel 1970, nella sua tesi di dottorato, Girard dimostra un teorema di normalizzazione forte per il sistema F, un sistema di Logica del secondo ordine con tipi polimorfi. Da allora Girard si interessa alla semantica denotazionale: dai domini di Scott fino allo studio, alla fine degli anni '80, degli spazi coerenti per mezzo dei quali arriverà all'introduzione della Logica Lineare.
Girard era interessato ai lavori di Böhm e del gruppo di Torino e alcune delle idee che lo portarono alla Logica Lineare nacquero proprio in Italia:

> *Girard era da solo nell'ufficio di Mario Coppo, cercando quest'ultimo sono entrato e Girard stava lavorando alla lavagna. Era verso la fine del 1985 e, da quello che Girard dice sulle origini della Logica Lineare (alla fine del suo articolo del 1987), ho immaginato più tardi che stesse lavorando proprio sulla decomposizione della freccia. Non ho avuto tempo di vedere cosa stava scritto sulla lavagna, al momento probabilmente non l'avrei nemmeno capito ... poi si è formato un interesse diffuso in Italia per la Logica Lineare, con Abrusci che è stato il profeta più "energico" e altri come Simona Ronchi che aveva interessi di tipo proof–teoretico... ma Girard è stato sempre molto legato a Torino.*
>
> Felice Cardone (intervista del 18/01/2022)

In questo contesto, Abrusci si è adoperato a fare da ponte per la comunicazione tra il mondo della Logica e quello dell'Informatica.

> *Abrusci ha mediato fra i due mondi organizzando dei convegni a cui abbiamo partecipato tutti*
>
> Mariangiola Dezani (intervista del 22/01/2022)

Ad esempio nell'organizzazione del già citato convegno di San Gimignano dell'83 Abrusci punta al sincretismo tra Logica e Informatica:

> *Chiesi a Casari di chiamare un po' tutti*
>
> Vito Michele Abrusci (Intervista del 02/01/2021)

Questo lavoro di mediazione darà negli anni a venire dei frutti importanti in progetti di ricerca basati su un sodalizio tra Teoria della Dimostrazione e Informatica Teorica. Tale sodalizio ruota intorno ad un nodo concettuale basato sulla più volte citata corrispondenza di Curry–Howard che approfondiamo nel prossimo paragrafo.

[17]Nel giugno 1980 Per Martin-Löf tiene a Padova un corso sulla teoria intuizionistica dei tipi.

3.11.4 La corrispondenza Curry–Howard

La corrispondenza di Curry–Howard è una relazione che sussiste fra le dimostrazioni della Logica minimale e i termini del λ-calcolo semplicemente tipato.
La Logica minimale è una rielaborazione della logica intuizionista che a sua volta può essere vista come una rielaborazione della Logica classica.
Come abbiamo visto, in Logica intuizionista non vale il principio del *terzo escluso*, ovvero la formula $A \vee \neg A$ non è dimostrabile al contrario di ciò che accade in Logica classica. In Logica intuizionista tuttavia continua a valere il principio dell'*ex falso quodlibet* in base al quale da una contraddizione $A \wedge \neg A$ è possibile dedurre qualsiasi formula B. In Logica minimale invece non vale neanche l'*ex falso quodlibet*, per questo si tratta di una Logica che permette meno deduzioni della Logica intuizionista. Nonostante il minor potere deduttivo delle logiche minimale e intuizionista rispetto alla Logica classica, questi due sistemi hanno acquisito notevole importanza negli anni '70 e '80 a causa del crescente interesse per la matematica costruttiva. Le riflessioni filosofiche sulla matematica intuizionista e sulle semantica legata alle dimostrazioni ad opera di Brouwer, Heyting e Kolmogorov (semantica BHK) si sono rilevate infatti particolarmente adatte nel descrivere il comportamento dei programmi in informatica teorica.
Al cuore di questa relazione tra costruttivismo e Informatica Teorica c'è appunto la corrispondenza di Curry–Howard descritta dallo schema seguente:

Formula	=	tipo di un λ-termine (specifica di un programma)
Dimostrazione	=	λ-termine (programma)
Eliminazione del Taglio	=	β-riduzione del λ-termine (esecuzione del programma)

Per esporre in questa sede la corrispondenza di Curry-Howard ci riferiamo ad un frammento del calcolo dei sequenti minimale contenente il solo connettivo $\rightarrow$.
Le regole di deduzione di questo sistema logico sono ristrette alle **regole strutturali a sinistra** del sequente (**indebolimento e contrazione a sinistra**), **assioma**, e regole di **introduzione ed eliminazione dell'implicazione**:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to I) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}\ (\to E)$$

In questo sistema pertanto vale la **proprietà della formula a sinistra** in base alla quale in un sequente del tipo:

$$A, \Gamma \vdash B$$

la formula A che si trova a sinistra del sequente può essere ottenuta solo tramite l'assioma o una regola di indebolimento. Infatti non ci sono regole di introduzione di simboli logici a sinistra del sequente.
Per evidenziare la corrispondenza tra formule e tipi, il generico sequente:

$$A_1, ..., A_n \vdash A$$

viene *decorato* da termini nel modo seguente:

$$x_1^{A_1} : A_1, ..., x_n^{A_n} : A_n \vdash t : A$$

in cui $x_1, ..., x_n$ sono variabili di tipi rispettivamente $A_1, ..., A_n$ e t è un termine di tipo A.
Adesso mostriamo come associare, ad ogni regola del calcolo dei sequenti minimale nel frammento $\rightarrow$, un termine del λ-calcolo semplicemente tipato:

- All'**assioma**, cioè alla deduzione $A \vdash A$, corrisponde una variabile x di tipo A; ciò può essere scritto nel modo seguente:

$$x : A \vdash x : A$$

- Alla regola di **introduzione dell'implicazione**:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to I)$$

corrisponde il termine $\lambda x_i^A.v$ di tipo $A \to B$; ciò può essere scritto nel modo seguente:

$$\frac{\Gamma, x_i^A : A \vdash v : B}{\Gamma \vdash \lambda x_i^A.v : A \to B}\ (\to I)$$

- Alla regola di **eliminazione dell'implicazione**:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}\ (\to E)$$

corrisponde il termine (tu) di tipo B, dove t è un termine di tipo $A \to B$ e u è un termine di tipo A; ciò può essere scritto nel modo seguente:

$$\frac{\Gamma \vdash u : A \qquad \Gamma \vdash t : A \to B}{\Gamma \vdash (tu) : B}\ (\to E)$$

Mostriamo ora che a un *taglio* del calcolo dei sequenti minimale corrisponde un *redex* in un termine del λ-calcolo semplicemente tipato. Inoltre un passo del processo di eliminazione del taglio corrisponde ad un passo di β-riduzione del redex nel termine.
Nel sistema logico a cui stiamo facendo riferimento, un **taglio** corrisponde a una inferenza del tipo seguente, cioè ad una regola di introduzione dell'implicazione, immediatamente seguita da una regola di eliminazione della stessa implicazione:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to I) \qquad \dfrac{\pi_2}{\Delta \vdash A}}{\dfrac{\Gamma, \Delta \vdash B}{\pi}}\ (\to E)$$

A questo taglio corrisponde il termine dato da:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, x : A \vdash t : B}}{\Gamma \vdash (\lambda x.t) : A \to B}\ (\to I) \qquad \dfrac{\pi_2}{\Delta \vdash u : A}}{\dfrac{\Gamma, \Delta \vdash (\lambda x.t)u : B}{\pi}}\ (\to E)$$

cioè il redex $(\lambda x.t)u$.
Analizziamo il passo di eliminazione del taglio. Dato che la formula A che compare nelle conclusioni della sottodimostrazione π_1 si trova a sinistra del sequente, essa, per la proprietà della formula a sinistra, deve essere stata ottenuta per applicazione di un assioma o di una regola di indebolimento a sinistra. Se A è stata ottenuta per applicazione dell'assioma $A \vdash A$ allora, per eliminare il taglio, si sostituisce all'applicazione dell'assioma, la sottodimostrazione seguente:

$$\frac{\pi_2}{\Delta \vdash A}$$

Se invece A è stata ottenuta per indebolimento a sinistra allora si sostituisce alla regola di indebolimento una successione finita di indebolimenti fino ad ottenere tutte le formule dell'insieme Δ. In entrambi i casi il taglio viene eliminato e sostituito dalla dimostrazione che indichiamo con:

$$\frac{\pi_1[\pi_2/A \vdash A]}{\dfrac{\Gamma, \Delta \vdash B}{\pi}}$$

a questa dimostrazione risulta associato il termine:

$$t[u/x]$$

cioè il contratto del redex $(\lambda x.t)u$.
Riassumendo è possibile stabilire una corrispondenza tra le dimostrazioni della logica minimale ristretta al frammento $\to$ e i termini del λ-calcolo semplicemente tipato in base alla quale:

- a ogni formula corrisponde un tipo;

- a ogni dimostrazione del sequente $\vdash A$ corrisponde un termine chiuso di tipo A che contiene un redex per ogni taglio presente nella deduzione;
- a ogni dimostrazione del sequente $A_1, ..., A_n \vdash A$ corrisponde un termine aperto di tipo A con n variabili di tipo $A_1, ..., A_n$ che contiene un redex per ogni taglio presente nella deduzione;
- al teorema di eliminazione del taglio, il teorema di normalizzazione debole. Schematizzando si avrà:

$$\begin{array}{ccc} \pi & \xrightarrow{cut-el} & \pi' = \pi_1[\pi_2/A \vdash A] \\ {\scriptstyle CH}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle CH} \\ (\lambda.xt)u & \xrightarrow{\beta-red} & t[u/x] \end{array}$$

dove CH sta per corrispondenza di Curry-Howard, $cut - el$ sta per eliminazione del taglio e $\beta - red$ sta per β-riduzione.

Come è stato evidenziato in [20] la corrispondenza tra formule e tipi è stata notata per la prima volta da Curry negli anni '30. Si trattava di un isomorfismo tra le espressioni assegnabili come tipi a determinati combinatori elementari e le formule dimostrabili in un frammento della logica intuizionista contenente come connettivo la sola implicazione. In una forma più generale, valida anche per combinatori composti, la corrispondenza appare nel testo di Curry e Feys del 1958 [36]. L'estensione dai combinatori al λ-calcolo con l'esplicita dicitura *formulae as types*, compare più tardi, in un manoscritto di William Howard che inizia a circolare nel 1969 e viene stampato nel 1980 [61]. Nel frattempo però la corrispondenza era stata scoperta indipendentemente anche da altri studiosi:

> *Nel primo volume di "Combinatory Logic" di Curry e Feys* [36] *c'era ben descritta questa analogia tra proposizioni e tipi, in modo molto formale come Curry era solito fare e quindi l'origine dell'isomorfismo è qui. Poi però, prima di Howard, ci sono state molte altre persone. Forse lo studioso più influente e più dimenticato in questo senso è stato De Bruijn. Lui era stato collega di Heyting e conosceva bene l'interpretazione delle costanti logiche nell'intuizionismo. Ad un certo punto aveva bisogno di un assistente computerizzato per certe dimostrazioni combinatorie, ed aveva inventato un formalismo che incorporava una nozione di "formulae as types" che poi è diventato "automath"*[18]*. Per De Bruijn quindi la corrispondenza era uno strumento, non un obiettivo. Ci sono una serie di lavori scritti da De Bruijn nel '68 in cui la corrispondenza è perfettamente descritta. Nel frattempo Dana Scott era ad Amsterdam perché interagiva con de Bakker sulla semantica denotazionale e ha scritto l'articolo "constructive validity", che è un contributo per il Symposium on Automatic Demonstration tenutosi in Francia nel '68. In questo articolo Scott riprende idee di de Bruijn, Goodman, Kreisel e Troelstra. Quindi la corrispondenza di Curry-Howard è passata almeno attraverso de Bruijn, Scott e anche Läuchli.*
>
> Felice Cardone (intervista del 18/01/2022)

Durante gli anni '80 la consapevolezza della corrispondenza tra termini e formule si diffonde anche tra i ricercatori italiani, prima in ambiente informatico e poi anche fra alcuni logici che si interessano alla teoria della dimostrazione.

> *La corrispondenza con i combinatori mi pare di averla letta per la prima volta sul Curry-Feys quando Corrado* (Böhm) *era ancora a Torino cioè prima del '74.*
>
> Mariangiola Dezani, (intervista del 22/01/2022)

Ciò da origine a quello che forse è uno dei frutti più importanti dell'incontro tra Informatica Teorica e Teoria della Dimostrazione in Italia: la creazione di una comunità scientifica pluridisciplinare nata intorno all'innovazione portata dalla Logica Lineare introdotta da Girard nel 1987.

[18] Automath è un linguaggio formale inventato da De Bruijn nel 1967 per consentire ad un *proof checker*, un software in grado di controllare il processo di deduzione formale, di verificare la correttezza di determinate proposizioni matematiche

3.12 La nascita della Logica Lineare

La genesi della Logica Lineare è legata allo studio degli spazi coerenti, strutture matematiche introdotte da Girard nelle sue ricerche sulla semantica iniziate con la scoperta del sistema F nel 1970 durante il suo dottorato.

3.12.1 Spazi Coerenti

Gli spazi coerenti si inseriscono nella tradizione della semantica denotazionale inaugurata da Scott con i *domini* come modelli per il λ-calcolo. Tuttavia, mentre nei lavori di Scott si studiano gli insiemi ordinati (cpo e dcpo) e le funzioni continue tra di essi secondo un'opportuna topologia (la topologia di Scott); nel caso degli spazi coerenti le funzioni prese in considerazione sono le funzioni stabili che, oltre alle proprietà delle funzioni continue secondo Scott, hanno anche un'ulteriore proprietà detta appunto stabilità, già introdotta da Gérard Berry.
L'idea di base di Girard è quella di interpretare un tipo (*tipo di dato*) come uno spazio coerente $\mathcal{A}$ e ogni termine di quel tipo (ogni *dato*) come un punto di $\mathcal{A}$ [54].

Consideriamo ad esempio i tipi booleani T, F; ad essi corrisponde lo spazio coerente $\mathcal{B}ool = \{\emptyset, \{T\}, \{F\}\}$, ciò significa che un dato booleano può assumere il valore $\emptyset$ se non abbiamo informazioni su di esso, oppure i valori $\{T\}$ o $\{F\}$. Lo spazio coerente $\mathcal{B}ool$ è molto semplice e apparentemente poco interessante perché i suoi punti sono insiemi che hanno al più un elemento.
Tuttavia, a partire dallo spazio coerente $\mathcal{B}ool$, si costruisce lo spazio $\mathcal{B}ool \,\&\, \mathcal{B}ool$ i cui punti sono:

$$\mathcal{B}ool \,\&\, \mathcal{B}ool = \{\emptyset, \{(1,T)\}, \{(1,F)\}, \{(2,T)\}, \{(2,F)\}, \{(1,T),(2,T)\},\\ \{(1,T),(2,F)\}, \{(1,F),(2,T)\}, \{(1,F),(2,F)\}\}$$

Notiamo che i punti di $\mathcal{B}ool \,\&\, \mathcal{B}ool$ sono insiemi che possono contenere più di un elemento. Tutti gli elementi che costituiscono un punto di questo spazio coerente hanno il significato di *informazioni* che riguardano un dato di tipo *coppia di booleani*. Il dato stesso è l'insieme delle informazioni che abbiamo su di esso.
Per capire meglio, fissiamo le idee sul punto $\{(1,F),(2,T)\}$ che rappresenta la coppia in cui il primo elemento è F e il secondo elemento è T. Nello spazio $\mathcal{B}ool \,\&\, \mathcal{B}ool$ sono presenti, oltre al punto $\{(1,F),(2,T)\}$ che ci fornisce una informazione completa sulla coppia che stiamo considerando, anche i punti $\emptyset$, $\{(1,F)\}$ e $\{(2,T)\}$ che ci forniscono informazioni parziali sulla coppia ma comunque coerenti (si noti che non è presente il punto $\{(1,F),(1,T)\}$ che fornirebbe un'informazione incoerente).

Definizione 27 (**Spazio Coerente**). Uno spazio coerente $\mathcal{A}$ è un insieme di insiemi che soddisfa le seguenti proprietà:

1. (**Sottochiusura**) se $a \in \mathcal{A}$ e $a' \subset a$ allora $a' \in \mathcal{A}$;
2. (**Completezza binaria**) se $M \subset \mathcal{A}$ e per ogni a_1, a_2 tali che $a_1 \in M$ e $a_2 \in M$ si ha $a_1 \cup a_2 \in M$, allora $\bigcup M \in \mathcal{A}$

La presenza in $\mathcal{B}ool \,\&\, \mathcal{B}ool$ di punti come $\{(1,F)\}$ e $\{(2,T)\}$ che forniscono informazioni coerenti, implica la presenza della loro unione $\{(1,F),(1,T)\}$.
Questo fatto suggerisce l'introduzione di una relazione riflessiva e simmetrica tra gli elementi dei punti di uno spazio coerente $\mathcal{A}$: la relazione di *coerenza* modulo $\mathcal{A}$ così definita

$$\alpha \supset \alpha' \mod \mathcal{A} \qquad \text{se e solo se} \qquad \{\alpha, \alpha'\} \in \mathcal{A}$$

la relazione riflessiva e simmetrica appena introdotta induce naturalmente un grafo non orientato e riflessivo che ha come nodi gli elementi dei punti di $\mathcal{A}$ e tale che, dati due nodi α e α' tra di essi esiste un arco se e solo se $\alpha \supset \alpha'$.
Ciò dà luogo a una visione alternativa degli spazi coerenti; in questa nuova prospettiva, i punti dello spazio coerente sono esattamente le *cliques* (cioè i sottografi completi) di un grafo non orientato e riflessivo.
Infatti se un insieme a è un punto di uno spazio coerente allora per ogni α, α' elementi di a si ha, per la sottochiusura, $\{\alpha, \alpha'\} \in \mathcal{A}$ e quindi $\alpha \supset \alpha'$ (c'è un arco tra α e α') pertanto a è una clique. D'altra parte ogni clique del grafo è un punto di $\mathcal{A}$ per la completezza binaria.
Viceversa si vede rapidamente che le cliques di un grafo non orientato e riflessivo soddifano le proprietà di sottochiusura e completezza binaria della definizione di spazio coerente.

A titolo di esempio riportiamo in figura la rappresentazione come grafo dello spazio coerente $\mathcal{B}ool \,\&\, \mathcal{B}ool$[19]. Si noti che le cliques di tale grafo sono esattamente i singoli punti e le quattro coppie di elementi collegati da archi ($\{(1,T),(2,T)\}$, $\{(1,T),(2,F)\}$, $\{(1,F),(2,T)\}$, $\{(1,F),(2,F)\}$).

$$\begin{tikzcd}
(1,T) \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & (2,T) \arrow[dl, dash] \\
(1,F) \arrow[r, dash] & (2,F)
\end{tikzcd}$$

Gli spazi coerenti, rispetto alle altre strutture matematiche usate in semantica denotazionale, hanno dunque il vantaggio di poter essere studiati sia come insiemi ordinati sia come grafi.
Definiamo ora le funzioni stabili tra spazi coerenti.

Definizione 28 (**Funzione stabile**). Dati due spazi coerenti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, una funzione F da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ si dice *stabile* se:

1. Se $a' \subset a$ allora $F(a') \subset F(a)$ (F è **monotona**);
2. $F(\bigcup_{i\in I}^{\uparrow} a_i) = \bigcup_{i\in I}^{\uparrow} F(a_i)$ (F preserva le **unioni dirette**);
3. Se $a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A}$ allora $F(a_1 \cap a_2) = F(a_1) \cap F(a_2)$ (F è **stabile**).

Le proprietà 1 e 2 della definizione precedente erano già proprie delle funzioni continue secondo lo topologia di Scott. In particolare la 1 stabilisce la monotonia di F rispetto a $\subset$, ciò significa che F preserva le *approssimazioni*: interpretando gli elementi a' e a di uno spazio coerente come informazioni su un dato, la monotonia assume il significato seguente, all'aumentare delle informazioni sul dato in input, aumentano anche le informazioni sul dato in output.

La proprietà 2 stabilisce che la funzione F preserva le unioni dirette e ciò corrisponde alla continuità secondo Scott. Un insieme D parzialmente ordinato (in questo caso stiamo considerando come ordinamento, l'inclusione $\subset$) si dice *diretto* se è non vuoto e per ogni coppia di elementi $d_1, d_1 \in D$ esiste un elemento $d \in D$ tale che $d_1 \subset d$ e $d_2 \subset d$. Nel nostro caso sarà $d = d_1 \cup d_2$. Per unione diretta (indicata con il simbolo $\bigcup^{\uparrow}$) si intende l'unione dell'insieme diretto $\{a_i\}_{i\in I}$. Per la completezza binaria degli spazi coerenti si ha che $\bigcup_{i\in I}^{\uparrow} a_i \in \mathcal{A}$. Inoltre, per la monotonia di F si ha che anche l'insieme $\{F(a_i)\}_{i\in I}$ è diretto, quindi si può calcolare l'unione diretta $\bigcup_{i\in I}^{\uparrow} F(a_i)$ che è un elemento di $\mathcal{B}$.

La proprietà 3 è la *stabilità* introdotta da Berry e può essere interpretata, in termini di Teoria delle Categorie, come la proprietà della funzione F di preservare i pullback. Consideriamo uno spazio coerente $\mathcal{A}$ come una categoria i cui oggetti sono gli elementi $a \in \mathcal{A}$ e tale che c'è una freccia tra a e a' se e solo se $a \subset a'$. Dalla proprietà 1 della definizione di funzione stabile discende che una funzione stabile è un funtore fra categorie. Se, dati $a_1 \in \mathcal{A}$ e $a_2 \in \mathcal{A}$, si ha $a_1 \cup a_2 \in \mathcal{A}$, allora $a_1 \cap a_2$ con le due inclusioni in a_1 e a_2 forma un pullback come si vede nella figura seguente:

$$\begin{tikzcd}
 & a_1 \cup a_2 & \\
a_1 \arrow[ur] & & a_2 \arrow[ul] \\
 & a_1 \cap a_2 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

D'altra parte anche $F(a_1) \cap F(a_2)$ con le relative inclusioni è un pullback, quindi l'immagine di un pullback per mezzo del funtore F è ancora un pullback.

[19]Per semplificare la rappresentazione abbiamo escluso i cappi che sarebbero presenti in ogni nodo grazie alla riflessività della relazione $\overset{\frown}{\smile}$.

Dalle proprietà delle funzioni stabili che abbiamo esaminato, discende il seguente teorema di forma normale.

Teorema 21 (Forma normale)**.** *Sia F una funzione stabile da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ e siano $a \in \mathcal{A}$ e $\beta \in F(a)$, allora:*

1. *esiste a_0 finito, $a_0 \subset a$ tale che $\beta \in F(a_0)$;*
2. *se a_0 è scelto minimale rispetto a $\subset$ fra gli elementi che soddisfano la proprietà precedente (1), allora a_0 è unico.*

Nel teorema precedente l'esistenza dell'elemento a_0 dipende dal fatto che le funzioni stabili preservano i limiti diretti, mentre l'unicità di a_0 dipende dalla stabilità ovvero dal fatto che F preserva i pullback.

Dal teorema di forma normale discende la seguente rappresentazione di una funzione stabile attraverso il concetto di *traccia*.

Definizione 29 (Traccia)**.** Sia F una funzione stabile da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, la *traccia* di F (indicata con il simbolo $Tr(F)$) è l'insieme delle coppie (a, β) tali che:

- $a \in \mathcal{A}$ e a è finito;
- $\{\beta\} \in \mathcal{B}$ e $\beta \in F(a)$;
- se $a' \subset a$ e $\beta \in F(a')$, allora $a = a'$.

Teorema 22 (Rappresentazione)**.** *Se F è una funzione stabile da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ allora essa è univocamente individuata dalla seguente equazione:*

$$F(a) = \Big\{\beta \ : \ \ \textit{esiste } \ a' \subset a \ \ \textit{tale che} \ \ (a', \beta) \in Tr(F)\Big\}$$

L'insieme delle *tracce* delle funzioni stabili da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ è uno spazio coerente; indicato con $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ esso corrisponde, attraverso la corrispondenza Curry-Howard, all'implicazione intuizionista.
Un caso particolare di funzioni stabili sono le funzioni lineari.

Definizione 30. Una funzione stabile $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ si dice *lineare* se la traccia è formata dalle sole coppie del tipo $(\{\alpha\}, \beta)$

Le tracce delle funzioni lineari costituiscono anch'esse uno spazio coerente indicato con $\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}$.
Ci sono poi ulteriori costruzioni sugli spazi coerenti: spazio coerente duale $\mathcal{A}^{\perp}$, prodotti ($\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \parr \mathcal{B}$) e somme ($\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}$) di spazi coerenti, sottospazio coerente dei punti finiti definito nel modo seguente:

$$!\mathcal{A} = \{a \ : \ a \in \mathcal{A},\ a \text{ è finito }\}$$

e anche il suo duale ($?\mathcal{A}$).
Il nocciolo della questione è che ognuno di questi spazi coerenti rappresenta un *tipo* e, sulla scorta della corrispondenza di Curry-Howard, i tipi sono formule in una logica costruttiva. Nasce così l'idea di una nuova logica che abbia come formule i tipi che corrispondono agli spazi coerenti.
Il punto di svolta in questo senso è la scoperta che lo spazio coerente delle funzioni stabili fra due spazi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, cioè lo spazio $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, che corrisponde come tipo all'implicazione intuizionista, ha gli stessi punti dello spazio delle funzioni lineari dal sottospazio $!\mathcal{A}$ allo spazio $\mathcal{B}$, cioè $!\mathcal{A} \multimap \mathcal{B}$. Questa scoperta, a cui viene dato il nome di *decomposizione dell'implicazione intuizionista* e che viene di solito espressa mediante l'equazione:

$$A \to B = !A \multimap B$$

dà fondamento all'idea che le nuove costruzioni sugli spazi coerenti possano avere un significato logico.
A partire da questa consapevolezza Girard traduce le operazioni definite sugli spazi coerenti in connettivi di una nuova logica, la Logica Lineare. Descriviamo le caratteristiche principali della logica lineare seguendo [3].

3.12.2 Logica Lineare

Innanzitutto si tratta di una logica *sensibile alle risorse* nel senso che il numero di volte che una proposizione A viene usata in una dimostrazione è rilevante. La proposizione A può essere intesa come una *risorsa* e una volta utilizzata, tale risorsa non è più disponibile nel processo dimostrativo, al contrario di quanto accade nella logica classica in cui un'ipotesi, una volta assunta, può essere "usata" quante volte si vuole.
Ciò si concretizza nelle restrizioni nell'applicazione delle regole strutturali (indebolimento e contrazione) che rende la Logica Lineare particolarmente adatta alla descrizione di vari fenomeni e alle applicazioni.
Un altro aspetto interessante della Logica Lineare è la coesistenza di caratteristiche tipiche della Logica intuizionista con altre tipiche della Logica classica. Della Logica classica mantiene le *simmetrie*, ad esempio la negazione involutiva e la *dualità* delle leggi di De Morgan. Della Logica intuizionista invece mantiene una semantica delle dimostrazioni significativa che si presta ad applicazioni computazionali.
Vediamo meglio queste caratteristiche partendo dalla negazione di una formula A che, in Logica Lineare, viene indicata con $A^{\perp}$ ed è involutiva nel senso che soddisfa l'uguaglianza:

$$A^{\perp\perp} = A$$

I connettivi di disgiunzione e congiunzione in Logica Lineare si sdoppiano. Abbiamo due disgiunzioni: la *disgiunzione moltiplicativa* $⅋$ e la *disgiunzione additiva* $\oplus$; e due congiunzioni: la *congiunzione moltiplicativa* $\otimes$ e la *congiunzione additiva* &. Questi connettivi soddisfano le seguenti uguaglianze analoghe alle leggi di De Morgan della logica classica:

$$(A \otimes B)^{\perp} = A^{\perp} ⅋ B^{\perp} \qquad (A ⅋ B)^{\perp} = A^{\perp} \otimes B^{\perp}$$

$$(A \,\&\, B)^{\perp} = A^{\perp} \oplus B^{\perp} \qquad (A \oplus B)^{\perp} = A^{\perp} \,\&\, B^{\perp}$$

Il motivo della presenza dei connettivi moltiplicativi e additivi è legato alla sensibilità alle risorse della Logica Lineare. Infatti, dato che le regole di indebolimento e contrazione non sono più valide in generale, si ha bisogno di due regole per la congiunzione:

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\,(\otimes) \qquad\qquad \frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \,\&\, B}\,(\&)$$

Queste due regole sono interderivabili in Logica classica ma non in Logica Lineare in cui, avendo delle limitazioni sulle regole strutturali, i due contesti Γ e Δ vengono trattati in maniera distinta. Lo stesso accade anche per le disgiunzioni:

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A ⅋ B}\,(⅋) \qquad\qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\,(\oplus 1) \qquad \frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B}\,(\oplus 2)$$

Si noti che il dualismo tra i connettivi rispecchia il dualismo tra *reversibilità* e *irreversibilità* delle regole logiche. Infatti il duale della congiunzione moltiplicativa $\otimes$ che viene introdotta con una regola irreversibile, è la disgiunzione moltiplicativa $⅋$ che viene introdotta con una regola reversibile. Mentre il duale della congiunzione additiva & che viene introdotta con una regola reversibile, è la disgiunzione additiva che può essere introdotta con due diverse regole entrambe irreversibili ($\oplus 1$ e $\oplus 2$). Questo dualismo tra regole reversibili (o negative) e regole irreversibili (positive) era già presente nella Logica classica ad esempio fra i quantificatori universale, negativo e reversibile, ed esistenziale, positivo e irreversibile.
L'aspetto in cui la Logica Lineare si distingue dalla Logica classica per avvicinarsi alle caratteristiche costruttive della Logica intuizionista è, come dicevamo, la *semantica delle dimostrazioni*. Con questa dicitura intendiamo l'associazione, ad ogni derivazione formale π definita in un opportuno sistema logico, di un oggetto matematico $[\![\pi]\!]$ o meglio di un oggetto appartenente ad una determinata classe di strutture matematiche. Tale associazione deve soddisfare la seguente proprietà: se una derivazione π si può ridurre ad un'altra dimostrazione ψ (in simboli $\pi \rightsquigarrow \psi$) attraverso un processo di trasformazione delle dimostrazioni (*normalizzazione* in deduzione naturale o *eliminazione del taglio* in calcolo dei sequenti) allora $[\![\pi]\!] = [\![\psi]\!]$. Si tratta pertanto di associare alle deduzioni un *invariante* rispetto al processo di calcolo delle dimostrazioni stesse.

Per qualsiasi associazione di invarianti alle dimostrazioni si ha che, se una stessa dimostrazione π si riduce a due diverse dimostrazioni ψ_1 e ψ_2, in simboli

$$\pi \rightsquigarrow \psi_1 \quad \text{e} \quad \pi \rightsquigarrow \psi_2$$

allora $[\![\pi]\!] = [\![\psi_1]\!]$ e $[\![\pi]\!] = [\![\psi_2]\!]$, quindi $[\![\psi_1]\!] = [\![\psi_2]\!]$, ovvero se una derivazione π si trasforma in due derivazioni ψ_1 e ψ_2 allora ψ_1 e ψ_2 devono essere ritenute uguali.
In Logica classica l'assegnazione di invarianti è banale nel senso che a tutte le derivazioni di una stessa formula viene associato lo stesso invariante, ciò è conseguenza delle regole strutturali.
In Logica Lineare invece, come in Logica intuizionista, è possibile trovare diverse dimostrazioni della stessa formula che danno origine a diversi processi di calcolo e ciò ha importanti conseguenze dal punto di vista computazionale.
Un'ulteriore innovazione portata dalla Logica Lineare riguarda la prospettiva geometrica sulle dimostrazioni. L'introduzione dei *proof-net* permette di rappresentare le dimostrazioni come grafi e di studiarne le caratteristiche geometriche (aciclicità, connessione ...) non limitandosi allo studio sintattico sequenziale rappresentato dal calcolo dei sequenti. Ciò ha aperto le porte ad un ricongiugimento della Teoria della Dimostrazione con strumenti e metodi di altre aree della matematica come la Teoria dei Grafi e la Topologia.

A questo proposito ci sembra interessante citare il contributo italiano alla nascita dell'idea di rappresentare le dimostrazioni in modo alternativo agli alberi della tradizione proof-teoretica.

> *Negli anni '80 c'era il problema di estendere la corrispondenza di Curry-Howard al calcolo parallelo... Io spiegai questo problema a Girard a Roma (lo avevo conosciuto tramite Michele Abrusci). Gli dissi, quasi in maniera provocatoria, "mi sembra che, per avere una teoria della dimostrazione che tenga in considerazione il calcolo parallelo, l'idea di dimostrazione come albero vada superata..."*
> (Gianfranco Mascari, intervista 2023)

Questa testimonianza trova conferma anche nei ringraziamenti che Girard scrive alla fine dell'articolo [53] in cui pone le basi della Logica Lineare.

Acknowledgment

The author is indebted to Jean-Louis Krivine, whose simultaneous work on lambda-calculus and its execution had some crucial influence on earlier versions of linear logic. Also, the author wishes to express his indebtedness to Gianfranco Mascari who introduced him to the subject of parallelism and whose influence was important for the shift to 'classical' framework and parallel syntax.

Durante la nascita e lo sviluppo della Logica Lineare la comunità scientifica italiana ha collaborato portando importanti contributi. Vito Michele Abrusci, Andrea Asperti, Gianluigi Bellin, Claudia Casadio, Ugo Dal Lago, Stefano Guerrini, Simone Martini, Andrea Masini, Simona Ronchi della Rocca, Paolo di Giamberardino, Lorenzo Tortora de Falco, Roberto Maieli, Gianfranco Mascari, Mario Piazza, Claudia Faggian, Sara Negri, Marco Pedicini, Luca Roversi, sono alcuni dei nomi di ricercatori italiani, provenienti da formazioni culturali diverse e attivi in diverse aree geografiche e in diversi dipartimenti universitari (Matematica, Informatica, Filosofia) che, collaborando con studiosi di altri paesi (in particolare Francesi) hanno animato una comunità scientifica internazionale, pluridisciplinare fondatasi sulle innovazioni introdotte dalla Logica Lineare.
L'attività di questa comunità scientifica è testimoniata, a partire dagli anni '90, da una serie di progetti europei quali "Types Lambda Calculus" dal 1991 al 1996, vari progetti "Types" Esprit dal 1989 in poi, "Linear Logic in Computer Science" dal 1998 al 2002, ProToCoLLo (From Proofs to Computation through Linear Logic) nel 2003, fino alla fondazione della International Research Network on Linear Logic nel 2015, una rete di ricerca Italo–Francese supportata dal CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) e dall'INDAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica).

Capitolo 4

Teoria dei Modelli: la via italiana alla *categoricità*

In questo capitolo ci occuperemo di alcune ricerche in Teoria dei Modelli, portate avanti da logici italiani fra gli anni '70 e gli anni '80. In particolare studieremo come Annalisa Marcja e Piero Mangani svilupparono un loro originale approccio ai temi della categoricità e della classificazione al quale, in seguito, collaborò anche Carlo Toffalori [10]. Piero Mangani fa parte, insieme a Roberto Magari e Mario Servi, del nucleo dei *fiorentini* che si uniscono al gruppo di Logica Matematica del CNR diretto da Geymonat nel 1962. Come abbiamo visto nel capitolo di introduzione storica, Mangani nel 1973 diventa ordinario di Algebra e da allora nasce un gruppo di Logica a Firenze anche sul versante matematico che si va ad aggiungere al gruppo dei logici che operavano a Filosofia sotto la guida di Ettore Casari (vedi primo capitolo).

Abbiamo già fatto riferimento all'importanza del gruppo di Logica attivo nell'istituto di Matematica di Firenze negli anni '70 e '80. Qui lavorano, sotto la guida di Mangani, Annalisa Marcja, Sauro Tulipani e poi Francesco La Cava, Donato Saeli e in un secondo momento Daniele Mundici i cui lavori sulle MV-algebre rivestono un ruolo importante nella ricerca logica internazionale.

In questo capitolo abbiamo fatto la scelta di seguire solo una delle linee di ricerca sviluppate nell'ambito del gruppo di Firenze. Operare tale scelta ci ha permesso di notare come Piero Mangani e Roberto Magari abbiano conservato, nelle loro ricerche degli anni Settanta, l'interesse per le algebre di Boole che avevano maturato nell'iniziale frequentazione del gruppo di Geymonat, pur sviluppando tale interesse in direzioni diverse. Nel caso di Magari abbiamo già discusso i lavori sulle algebre diagonalizzabili nel capitolo ad esse dedicato. Nel caso di Mangani invece l'interesse per le algebre di Boole si incontra con le ricerche in Teoria dei Modelli.

4.1 Origine della Teoria dei Modelli

Il termine *Teoria dei Modelli* per indicare una branca della Logica Matematica viene per la prima volta usato da Alfred Tarski nel 1954 in [130] e [131].

Tuttavia l'origine della Teoria dei Modelli può essere fatta risalire ai lavori di Löwenheim del 1915 che, grazie anche al contributo di Skolem, tra il 1920 e il 1922, portarono al seguente teorema che viene oggi ritenuto una pietra miliare.

Teorema 23 (Löwenheim-Skolem). *Se una teoria T in un linguaggio contabile*[1] *ha un modello $\mathfrak{A}$ infinito allora ha anche un modello in ogni cardinalità infinita.*

Un'altra colonna portante della Teoria dei Modelli è il *teorema di completezza*, di cui abbiamo già parlato nel capitolo sull'Algebra della Logica, enunciato e dimostrato da Gödel nel 1930, che ha come conseguenza un altro risultato fondamentale: il *teorema di compattezza.*

Teorema 24 (Compattezza). *Un insieme di enunciati Σ ha un modello se e solo se ogni sottoinsieme finito di Σ ha un modello.*

[1] Qui e nel seguito con il termine *contabile* intendiamo *finito* o *numerabile*.

Altri lavori fondanti per la Teoria dei Modelli riguardano l'eliminazione dei quantificatori in alcune teorie logiche del I ordine. Per eliminazione dei quantificatori si intende la possibilità di rimpiazzare una formula logica $\alpha(\vec{v})$ (dove $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ rappresenta un insieme di variabili presenti nella formula) e contenente dei quantificatori, con una formula $\alpha'(\vec{v})$ priva di quantificatori e tale che le due formule siano *equivalenti* rispetto alla teoria T, ovvero tale che in T si possa dimostrare l'equivalenza fra $\alpha(\vec{v})$ e $\alpha'(\vec{v})$ per ogni scelta dei parametri $\vec{v}$.

Possiamo chiarire questo punto con un semplice esempio tratto dalla teoria delle equazioni polinomiali di secondo grado nel campo reale. Sappiamo che una equazione di secondo grado del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ ha soluzioni in campo reale se e solo se il suo discriminante è maggiore o uguale a zero, cioè se e solo se $b^2 - 4ac \geq 0$. Quindi possiamo affermare che la formula: $\alpha(a, b, c) : \exists x(ax^2 + bx + c = 0)$, contenente un quantificatore universale, è equivalente (nell'ambito della teoria del campo reale) alla formula priva di quantificatori $\alpha'(a, b, c) : (b^2 - 4ac \geq 0)$.

La possibilità di eliminare i quantificatori ha importanti conseguenze nello studio dei temi della *decidibilità*, *definibilità* e *completezza* di una teoria. In questo senso sono stati importanti i contributi di Löwenheim (1915), Skolem (1919), Langford (1926-27) e Tarski che tra il 1927 e il 1929 coordinò all'Università di Varsavia un seminario sull'eliminazione dei quantificatori in cui pose le basi del suo importante lavoro [132] e dell'eliminazione dei quantificatori per la teoria dei campi algebricamente chiusi e per i campi reali chiusi.

4.2 Oggetto di studio della Teoria dei Modelli

> *Within the last years, a new branch of mathematical logic has been developing. Is is called theory of models and can be regarded as a part of the semantics of formalized theories. The problems studied in the theory of models concern mutual relations between sentences of formalized theories and mathematical systems in which these sentences hold.* Alfred Tarsky, 1954

Già dalle parole di Tarski si capisce come l'oggetto principale di studio della Teoria dei Modelli sia la relazione reciproca tra due entità. Da una parte gli insiemi T di enunciati, cioè di formule chiuse (ovvero prive di variabili libere), espressi in un determinato linguaggio del primo ordine $\mathcal{L}$, questi insiemi di enunciati vengono detti *teorie*. Da un'altra parte abbiamo invece le strutture matematiche del linguaggio $\mathcal{L}$ che soddisfano gli enunciati di T.

Chiariamo questo punto con un esempio. Per caratterizzare un linguaggio $\mathcal{L}$ della Logica predicativa del primo ordine, bisogna stabilire quali sono le costanti, i simboli di funzione e i simboli relazione. Di solito in Teoria dei Modelli ogni linguaggio viene considerato come dotato di un simbolo di relazione binario, usualmente indicato con $\doteq$, che viene interpretato come uguaglianza (e quindi soddisfa, in ogni teoria, le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva). Naturalmente le formule di $\mathcal{L}$ possono essere costruite usando anche i simboli logici (connettivi e quantificatori) e le parentesi.

Fissiamo un linguaggio $\mathcal{L} = \{e, f, g\}$ in cui e è una costante, f è un simbolo di funzione binario e g è un simbolo di funzione unario.
Allora è possibile scrivere, nel linguaggio $\mathcal{L}$, i seguenti enunciati:

G_1) $\forall x \forall y \forall z \quad f(f(x, y), z) \doteq f(x, f(y, z))$;

G_2) $\forall x \quad (f(x, e) \doteq x \wedge f(e, x) \doteq x)$;

G_3) $\forall x \quad (f(x, g(x)) \doteq e \wedge f(g(x), x) \doteq e)$.

I 3 enunciati precedenti costituiscono una teoria T e possiamo chiederci se esistono strutture matematiche che soddisfano questa teoria. Ad esempio consideriamo come struttura l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ interpretando il simbolo di costante e con il numero intero 0, il simbolo di funzione binario $f(x, y)$ applicato a due variabili con la somma di due numeri interi $x + y$ e il simbolo di funzione unario $g(x)$ con l'opposto di un numero intero $-x$. Se riscriviamo gli enunciati alla luce di questa interpretazione (confondendo i simboli del linguaggio formale con le loro interpretazioni) otteniamo:

1. $\forall x \forall y \forall z \quad (x + y) + z = x + (y + z)$;
2. $\forall x \quad (x + 0 = x \wedge 0 + x = x)$;
3. $\forall x \quad (x + (-x) = 0 \wedge (-x) + x = 0)$.

che rappresentano i tre assiomi della teoria dei gruppi di cui $(\mathbb{Z}, 0, +, -)$ è un modello. Notiamo che nella formalizzazione della teoria dei gruppi che abbiamo dato compaiono una costante e due simboli di operazione al contrario delle usuali trattazioni presenti nei manuali di Algebra in cui si considera un'unica operazione binaria e al posto dell'operazione unaria si postula, per ogni elemento del gruppo, l'esistenza di un "simmetrico", che è ad esempio l'opposto nel caso dell'addizione e l'inverso nel caso della moltiplicazione. Il motivo di questa differenza è che, a livello logico, è più semplice aggiungere al linguaggio un simbolo di operazione unario che indichi $-x$ (nel caso dell'addizione) piuttosto che inserire un assioma con il doppio quantificatore:

$$\forall x \exists y\, (x + y = 0)$$

Una volta chiarita la relazione tra una teoria T e una struttura $\mathfrak{A}$ che soddisfa gli enunciati di T possiamo enunciare, seguendo [86], due problemi fondamentali per la teoria dei modelli:

1. Dato un insieme T di enunciati di $\mathcal{L}$, *classificare* le strutture di $\mathcal{L}$ che sono modelli degli enunciati di T.
2. Data una classe $\mathbf{K}$ di strutture di $\mathcal{L}$, *classificare* gli enunciati di $\mathcal{L}$ veri in tutte le strutture di $\mathbf{K}$.

Nei punti 1. e 2. il significato del termine *classificare* va inteso in un senso opportuno che verrà chiarito nei paragrafi successivi.

4.3 Modelli e verità

Nella sezione precedente abbiamo introdotto informalmente il concetto di struttura (o modello) per un linguaggio formale. Ne diamo ora una definizione precisa. Consideriamo come simboli presenti in ogni linguaggio logico del I ordine i connettivi: $\neg$ e $\wedge$, il quantificatore $\exists$[2], un'infinità numerabile di variabili individuali $x, y, z, ...$, e le parentesi $(,)$.

Definizione 31. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio del I ordine. Una struttura $\mathfrak{A}$ di $\mathcal{L}$ è costituita da:

1. Un insieme non vuoto A, detto dominio di $\mathfrak{A}$;
2. Per ogni costante c di $\mathcal{L}$, un elemento $c^{\mathfrak{A}}$ di A;
3. Per ogni simbolo di funzione n-aria f del linguaggio $\mathcal{L}$, una funzione $f^{\mathfrak{A}} : A^n \longrightarrow A$;
4. Per ogni simbolo di relazione n-aria R del linguaggio $\mathcal{L}$, un sottoinsieme $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$;

In maniera sintetica possiamo indicare un modello di un linguaggio $\mathcal{L}$ nel modo seguente:

$$\mathfrak{A} = (A, (c^{\mathfrak{A}})_{c \in \mathcal{L}}, (f^{\mathfrak{A}})_{f \in \mathcal{L}}, (R^{\mathfrak{A}})_{R \in \mathcal{L}})$$

Nel paragrafo 4.2 abbiamo affermato che la struttura $(\mathbb{Z}, 0, +, -)$ soddisfa gli enunciati G_1, G_2 e G_3 che assiomatizzano la teoria dei gruppi. Questo concetto di soddisfacibilità viene chiarito e formalizzato da Tarski che, in una serie di lavori dal 1933 al 1957, indaga *il concetto di verità* approdando a quella che oggi chiamiamo *semantica di Tarski.* Nel suo lavoro, Tarski parte dalla consapevolezza che *nel linguaggio* [comune] *sembra impossibile definire o persino usare la nozione di verità in modo coerente, in accordo con le leggi della logica.*

Seguendo [135] osserviamo che *prima di Tarski, il concetto di verità matematica, che pure era premessa di teoremi fondamentali, come quello di completezza di Gödel, era accostato in modo sostanzialmente intuitivo e non sistematico.* A tal proposito ricordiamo una polemica scaturita tra Frege e Hilbert fra la fine dell'800 e l'inizio del '900:

> Frege (1899): *Attribuisco il nome di assiomi a enunciati che sono veri, ma che non vengono dimostrati perché la loro conoscenza scaturisce da una fonte conoscitiva di natura extralogica, che possiamo chiamare intuizione spaziale* [...] *il fatto che gli assiomi siano veri ci assicura di per sé che essi non si contraddicono, e ciò non richiede alcuna ulteriore dimostrazione.*
>
> Hilbert: *io ho detto esattamente il contrario: se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri.*

[2] Come abbiamo discusso altrove (si veda il capitolo sull'Algebra della Logica e il capitolo sulla Teoria della Dimostrazione) gli altri connettivi $(\vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$ e il quantificatore $\forall$ possono essere definiti a partire da $\neg$, $\wedge$ e $\exists$.

Dalle precedenti citazioni emerge una visione controversa del rapporto fra verità e dimostrabilità. La Logica del '900 ha contribuito a chiarire questo rapporto stabilendo che la dimostrabilità riguarda la deduzione da assiomi nell'ambito di una teoria formalizzata mentre la verità di un enunciato matematico, seguendo Tarski, si riferisce a una struttura. L' approccio di Tarski, le cui idee di base risalgono a [133] e la cui definitiva sistematizzazione si trova in [134], è diventato lo standard nella Logica dalla seconda metà del '900 e viene seguito in molti manuali fra cui [91] che, come abbiamo già detto, è stato uno dei testi di riferimento per i logici italiani negli anni '60 e '70.

La nozione di *verità* per una formula α (del linguaggio $\mathcal{L}$) in un modello $\mathfrak{A}$ si ottiene in maniera naturale interpretando i vari simboli del linguaggio nel modello. Ad esempio se consideriamo la formula:

$$\forall x \exists y (f(x,x) = y)$$

e interpretiamo i simboli del linguaggio $\mathcal{L} = \{e, f, g\}$ nel modello $(\mathbb{Z}, 0, +, -)$, possiamo affermare che tale formula è *vera* perché dato un qualsiasi numero intero x esiste un numero intero y tale che $x + x = y$. Notiamo che, al di là dei dettagli tecnici, il merito di Tarski è stato quello di mettere in evidenza la distinzione tra simboli del linguaggio e interpretazione dei simboli nei vari modelli. Uno stesso simbolo può avere diverse interpretazioni in contesti diversi, mentre diversi simboli possono avere le stesse proprietà. Ad esempio la formula:

$$\exists x (x \cdot x = 2)$$

è vera se interpretata nel campo dei reali ma non è vera se interpretata nel campo dei razionali. Viceversa le due strutture $(\mathbb{Z}, 0, +, -)$ e $(S_n, id, \circ, ^{-1})$, essendo gruppi, soddisfano entrambe la formula:

$$\forall x \forall y \forall z \quad ((x * y) * z) = (x * (y * z))$$

dove il simbolo $*$ del linguaggio viene interpretato una volta come addizione fra interi $+$ e una volta come composizione fra permutazioni $\circ$.

Osserviamo che se α è una formula chiusa (detta anche *enunciato*) ovvero priva di variabili libere, allora α o è vera o è falsa in un dato modello $\mathfrak{A}$; nel caso in cui sia vera, si dice che $\mathfrak{A}$ soddisfa α e si scrive $\mathfrak{A} \models \alpha$.

Si dice che $\mathfrak{A}$ è un modello per una teoria T (e si scrive $\mathfrak{A} \models T$) se ogni enunciato di T è vero in $\mathfrak{A}$. Diciamo invece che un enunciato α è *conseguenza logica* di una teoria T (e scriviamo $T \models \alpha$) se ogni modello di T è anche modello di α. D'ora in poi considereremo solo teorie chiuse per conseguenze logiche, ovvero tali che, dato un qualsiasi enunciato α, se $T \models \alpha$ allora $\alpha \in T$.

Una teoria T è *completa* se dato un qualsiasi enunciato α del linguaggio $\mathcal{L}$ si ha che $\alpha \in T$ oppure $\neg\alpha \in T$. L'insieme degli enunciati veri in una struttura $\mathfrak{A}$ costituisce una teoria completa che viene detta teoria di $\mathfrak{A}$ (in simboli $Th(\mathfrak{A})$).

4.4 Relazioni tra Modelli

Una volta chiarito il concetto di modello e di verità in un modello, vediamo alcune relazioni fondamentali tra le strutture di un linguaggio del primo ordine.

Definizione 32. Date due strutture $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ in un linguaggio $\mathcal{L}$, un **omomorfismo** di $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ è una funzione $F : A \longrightarrow B$ tale che:

1. per ogni costante $c \in \mathcal{L}$ si ha $F(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$;
2. per ogni funzione $f \in \mathcal{L}$ di arietà n e ogni n-pla $(a_1, ..., a_n)$ di elementi di A si ha $F(f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(F(a_1), ..., F(a_n))$;
3. per ogni simbolo di relazione $R \in \mathcal{L}$ di arietà n e ogni n-pla $(a_1, ..., a_n)$ di elementi di A si ha che se $(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$ allora anche $(F(a_1), ..., F(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$.

Si dice che F è un'*immersione* di $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ se è iniettiva e nel punto 3. della definizione precedente vale anche l'implicazione inversa (se $(F(a_1), ..., F(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$ allora $(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$). Un *isomorfismo* di $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ è un'immersione suriettiva.

Per esemplificare il concetto di omomorfismo consideriamo la relazione di allineamento fra tre punti nel piano e nello spazio euclideo.

Il linguaggio $\mathcal{L}$, in questo caso, è costituito solo dal simbolo di relazione ternario A che ha la seguente interpretazione: $A(P, Q, R)$ se e solo se P, Q e R sono *allineati* (giacciono sulla stessa retta).

Mostriamo che la proiezione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x, y, z) = (x, y)$ definisce un omomorfismo. Bisogna verificare che se tre elementi di $\mathbb{R}^3$ sono in relazione allora lo sono anche le loro immagini in $\mathbb{R}^2$. Ciò è vero perché se tre punti nello spazio sono allineati, allora anche le loro proiezioni sul piano sono allineate. Si noti che non si tratta di un'immersione, infatti la proiezione non è iniettiva; inoltre è possibile che tre punti del piano siano allineati e che siano proiezione di tre punti dello spazio non allineati.

Come esempio di immersione consideriamo invece la funzione $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, \cdot)$ definita come $f(x) = 2^x$. In questo caso stiamo considerando due strutture di un linguaggio in cui compare solo un simbolo di funzione binario. nel primo modello, il simbolo è interpretato come addizione fra numeri reali, nel secondo, il simbolo di funzione è interpretato come prodotto fra numeri reali. Sappiamo che la funzione esponenziale in questione è iniettiva. Il fatto che si tratti di un omomorfismo discende dall'uguaglianza: $2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$.

Infine, come esempio di isomorfismo, consideriamo la corrispondenza tra le strutture $\{Z_2, +\}$ e $\{\{V, F\}, \leftrightarrow\}$ in cui la classe resto 0 modulo 2 corrisponde alla costante logica V (Vero), la classe resto 1 corrisponde a F e la somma modulo due corrisponde all'operatore logico $\leftrightarrow$. La corrispondenza è biunivoca e si tratta di un omomorfismo come si vede confrontando le due tabelle seguenti:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\leftrightarrow$	V	F
V	V	F
F	F	V

Date due strutture $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ tali che $A \subseteq B$, se l'inclusione di A in B definisce un'immersione di $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ allora si dice che $\mathfrak{A}$ è una *sottostruttura* di $\mathfrak{B}$ o che $\mathfrak{B}$ è un'*estensione* di $\mathfrak{A}$.

Notiamo che se A è un sottoinsieme di B e $\mathfrak{B}$ è una struttura di un linguaggio $\mathcal{L}$, non è detto che A sia il dominio di una sottostruttura di $\mathfrak{B}$. Infatti in $\mathcal{L}$ potrebbe esserci una costante c la cui interpretazione in $\mathfrak{B}$ non sia contenuta in A cioè potrebbe essere $c^{\mathfrak{B}} \notin A$. Inoltre potrebbe esserci in $\mathcal{L}$ un simbolo di funzione f tale che la restrizione di $f^{\mathfrak{B}}$ ad A non sia ben definita, cioè potrebbe accadere che esista $a \in A$ tale che $f^{\mathfrak{B}}(a) \notin A$.

Ad esempio consideriamo l'insieme dei numeri naturali con l'operazione unaria di successore $(\mathbb{N}, s)$ e l'insieme dei numeri pari che indichiamo con $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, tuttavia non è chiuso rispetto all'operazione di successore perché ad esempio $s(2) = 3 \notin \mathcal{P}$, quindi $\mathcal{P}$ non è il dominio di una sottostruttura di $(\mathbb{N}, s)$. Si può però definire un isomorfismo f tra $(\mathcal{P}, s)$ e $(\mathbb{N}, s)$ ponendo $f(x) = x/2$.

Consideriamo una struttura $\mathfrak{A}$ di un linguaggio $\mathcal{L}$. Sia $\phi(\vec{x})$ una formula le cui variabili libere appartengano a $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e sia $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A^n$. La scrittura $\mathfrak{A} \models \phi(\vec{a})$ significa che, se interpretiamo la formula $\phi(\vec{x})$ in $\mathfrak{A}$ assegnando alle variabili $\vec{x}$ i valori $\vec{a}$, allora la formula risulta vera in $\mathfrak{A}$.

Le definizioni di immersione, isomorfismo e sottostruttura che abbiamo dato hanno una forte connotazione algebrica, in particolare il concetto di sottostruttura generalizza concetti usuali in algebra (sottogruppo, sottoanello...). Tuttavia c'è una controparte logica di tali concetti espressa dai seguenti teoremi.

Teorema 25. *Siano $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ due strutture di un linguaggio $\mathcal{L}$ e $F : A \longrightarrow B$, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- *F è un'immersione di $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$.*
- *Per ogni formula $\phi(\vec{x})$ priva di quantificatori e per ogni $\vec{a} \in A^n$, $\mathfrak{A} \models \phi(\vec{a})$ se e solo se $\mathfrak{B} \models \phi(F(\vec{a}))$.*

Teorema 26. *Siano $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ due strutture di un linguaggio $\mathcal{L}$ e $F : A \longrightarrow B$ suriettiva, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- *F è un isomorfismo di $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$.*
- *Per ogni formula $\phi(\vec{x})$ e per ogni $\vec{a} \in A^n$, $\mathfrak{A} \models \phi(\vec{a})$ se e solo se $\mathfrak{B} \models \phi(F(\vec{a}))$.*

Notiamo che nel teorema 25 si richiede che la formula $\phi(\vec{x})$ sia priva di quantificatori. Infatti una formula $\phi(\vec{x})$ contenente un quantificatore esistenziale potrebbe essere soddisfatta in B da un elemento che non è immagine di alcun elemento di A. Si pensi ad esempio ad un linguaggio contenente - oltre all'uguaglianza - solo un simbolo di relazione $\mathcal{L} = \{<\}$ che interpretiamo con l'usuale disuguaglianza. Consideriamo come strutture l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi e l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ e come funzione $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ l'identità. L'identità è un'immersione di $(\mathbb{Z}, <)$ in $(\mathbb{Q}, <)$, per verificarlo basta considerare il fatto che la relazione d'ordine è rispettata. Consideriamo la formula $\phi(x_1, x_2) = \exists z(x_1 < z \wedge z < x_2)$ e $\vec{a} = (1, 2)$, abbiamo che $\mathbb{Q} \models \phi(F(1), F(2))$ infatti esistono numeri razionali compresi tra 1 e 2 mentre $\mathbb{Z} \not\models \phi(1, 2)$ perché non ci sono numeri interi compresi fra 1 e 2. Una situazione simmetrica potrebbe accadere con una formula contenente un quantificatore universale e soddisfatta da tutti gli elementi di A ma non soddisfatta da elementi di B che non sono immagine di elementi di A.

Riguardo le relazioni che sussistono fra strutture che soddisfano le stesse formule, una nozione fondamentale in teoria dei modelli è la seguente.

Definizione 33. Due strutture $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ si dicono *elementarmente equivalenti* se soddisfano gli stessi enunciati.

Naturalmente due strutture isomorfe sono elementarmente equivalenti ma non è vero il viceversa. Come evidenziato in [10] *non è difficile individuare due modelli che differiscono per qualche proprietà strutturale (e quindi non sono isomorfi) e tuttavia sono elementarmente equivalenti perché gli enunciati del primo ordine non sanno cogliere ed esprimere questa loro difformità.* Si considerino ad esempio due modelli di una stessa teoria completa aventi cardinalità diversa: si tratta di strutture elementarmente equivalenti perché soddisfano gli stessi enunciati (quelli della teoria) ma non possono essere isomorfe in quanto hanno cardinalità differenti. Ad esempio Tarski ha dimostrato che la teoria dei campi algebricamente chiusi è completa. Pertanto due campi algebricamente chiusi come $\mathbb{C}$ e il campo dei numeri algebrici, sono elementarmente equivalenti pur avendo cardinalità diverse.

Abbiamo visto che la nozione di sottostruttura ha una connotazione più che altro algebrica e può essere caratterizzata anche in termini logici limitandosi a formule prive di quantificatori. Ora vediamo una nozione più forte dal punto di vista logico.

Definizione 34. Siano $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ due strutture di $\mathcal{L}$. Un'immersione F di $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ si dice *elementare* se, per ogni formula $\phi(\vec{x})$ e per ogni $\vec{a} \in A^n$ si ha:

$$\mathfrak{A} \models \phi(\vec{a}) \quad \text{se e solo se} \quad \mathfrak{B} \models \phi(F(\vec{a}))$$

Si dice che $\mathfrak{A}$ è una *sottostruttura elementare* di $\mathfrak{B}$ se $A \subseteq B$ e l'inclusione di A in B definisce un'immersione elementare di $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$.

Notiamo che se $A \subseteq B$ e $\mathfrak{A}$ è una sottostruttura elementare di $\mathfrak{B}$ allora $\mathfrak{A}$ è anche elementarmente equivalente a $\mathfrak{B}$, basta predere come formule $\phi(\vec{x})$, gli enunciati. Tuttavia il viceversa non è vero: una sottostruttura $\mathfrak{A}$ di $\mathfrak{B}$ può essere elementarmente equivalente a $\mathfrak{B}$ senza esserne una sottostruttura elementare. Si pensi all'insieme dei numeri pari con la relazione di disuguaglianza $(\mathcal{P}, <)$ come sottostruttura di $(\mathbb{N}, <)$. $(\mathcal{P}, <)$ e $(\mathbb{N}, <)$ sono isomorfe, come si vede associando ad ogni numero pari la sua metà, e pertanto elementarmente equivalenti però $(\mathcal{P}, <)$ non è sottostruttura elementare di $\mathbb{N}$ perché $(\mathcal{P}, <)$ non soddisfa la formula $\phi(x_1, x_2) = \exists z(x_1 < z \wedge z < x_2)$ nei parametri $\vec{a} = (2, 4)$.

Una teoria si dice *model completa* se, dati due suoi modelli $\mathfrak{A} \models T$ e $\mathfrak{B} \models T$ con $\mathfrak{A}$ sottostruttura di $\mathfrak{B}$, si ha che $\mathfrak{A}$ è sottostruttura elementare di $\mathfrak{B}$.

4.5 Ingresso della Teoria dei Modelli in Italia

Fra gli anni '60 e gli anni '70 la teoria dei modelli si sviluppa nel panorama internazionale grazie ai contributi di Tarski, Robinson, Shelah e altri. Come abbiamo visto, proprio in quegli anni il gruppo del CNR per la Logica Matematica si dedicava allo studio delle ricerche di Logica che si stavano svolgendo all'estero e iniziava a dare i propri contributi.

Un momento importante per la rinascita della Logica italiana, che segna anche l'inizio degli interessi per la Teoria dei Modelli, è il Simposio di Teoria dei Modelli che si tiene dal 17 al 20 novembre del 1969 a Roma presso l'Istituto di Alta Matematica (INdAM) e organizzato da Roberto Magari.

Abraham Robinson presente al simposio e già legato al Gruppo di Logica del CNR disse a Casari, in quella occasione:

> *Finalmente c'è qualcosa in Italia di Logica dove sotto non ci sia Casari!*
> Ettore Casari, intervista rilasciata in [41].

In occasione del simposio i logici italiani si confrontano con studiosi di fama internazionale presentando anche le proprie ricerche originali. Ci sono relazioni di Robinson, Bertolini, Casari, Chang, Morley, Shoenfield, Mangione, Magari, Mangani, Felsher, Fraïssé, Previale e Servi. Per capire in che modo le ricerche internazionali influenzano gli studi in Italia, riportiamo una testimonianza di Carlo Toffalori:

> *Mi sono laureato nel '76 quindi all'epoca ero un ragazzetto, però ricordo che in quel periodo la teoria dei modelli, a livello internazionale si stava evolvendo. Da una parte c'era l'impostazione di Abraham Robinson, l'interesse per le strutture esistenzialmente chiuse, la model completezza, e su questo fronte a Firenze in quegli anni si lavorò molto. Ma a livello internazionale ci si stava muovendo da questi interessi verso quella che sarebbe diventata la teoria della classificazione, allora chiamata "teoria della stabilità". L'ambizione era la seguente: data una teoria T completa, riuscire a classificare tutti i modelli di T, con opportuni invarianti, a meno di isomorfismo. Cosa non banale perché si sta parlando di strutture infinite. Grazie infatti al Teorema di Löweneim–Skolem–Tarski se c'è un modello di cardinalità infinita ce n'è uno in ogni cardinalità infinita e se la cardinalità del linguaggio è λ ci possono essere fino a 2^λ modelli. Questa grande ricchezza di modelli si riscontra anche in teorie abituali come la teoria dei campi ordinati reali chiusi. Questo nuovo approccio è dovuto essenzialmente a Shelah anche se un articolo di Morley del '65 [95] aveva già fatto presagire tali sviluppi.*
> Carlo Toffalori, intervista del 22/05/2022

L'interesse per la Teoria dei Modelli si incrementa in Italia negli anni '70 soprattutto nell'istituto di Matematica di Firenze grazie al lavoro di Piero Mangani.

Nel 1975 Mangani dirige il corso estivo "Teoria dei Modelli e applicazioni" del CIME (Centro Internazionale Matematico Estivo) a Bressanone; le lezioni tenute durante il corso da logici di fama mondiale sono documentate in [83]. Tra la fine degli anni '70 e l'inizio degli anni '80 gli scambi con l'ambiente internazionale diventano più frequenti e proficui.

> *Nel 1980 ci fu la visita a Firenze di Gregory Cherlin. Tenne dei seminari per un mese e collaborò alla ricerca su argomenti riguardanti la stabilità dando vari spunti che furono sviluppati negli articoli di Mangani e Marcja successivi all'80. Gli spunti di Cherlin riguardavano le classi di isomorfismo delle algebre dei definibili di modelli numerabili di teorie ω-stabili.*
> Carlo Toffalori, intervista del 22/05/2022

Nel 1982 l'Istituto Matematico "Ulisse Dini" dell'Università di Firenze ospita il Logic Colloquium a testimonianza dell'importanza che aveva acquisito l'ambiente logico italiano nel panorama internazionale.

Le conferenze su invito riguardano temi di Teoria dei Modelli, Logica Categoriale e λ-calcolo. Fra i relatori ci sono nomi importanti per la teoria dei modelli (Cherlin, Keisler, Lascar, Macintyre, Shelah) accanto a ricercatori italiani come Magari e Mundici. Il congresso viene finanziato dal CNR, dallo GNSAGA (Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche, Geometriche e le loro Applicazioni, istituito come gruppo CNR nel 1970), dall'Università di Firenze, dal Comune e dalla Regione Toscana. Secondo una testimonianza di Mangani *Il Congresso, che ha sancito indubbiamente la maturità della logica matematica italiana, è risultato perfettamente organizzato su ogni piano*. Il comitato organizzativo è composto da Casari, Fenstad, Lolli, Longo, Marcja, Van Dalen.

In questo contesto si sviluppa, nell'università di Firenze, attorno alla personalità di Piero Mangani un approccio originale alla stabilità che tende a mettere insieme gli stimoli provenienti dalla ricerca internazionale con l'esperienza che avevano maturato i logici italiani lavorando sull'Algebra della Logica.

> *La teoria della stabilità che si stava evolvendo rapidamente fu collegata all'attenzione verso l'algebra di Boole. Io penso che questa idea riprenda alcuni degli interessi precedenti di Mangani sull'algebra della logica.*
> Carlo Toffalori, intervista del 22/05/2022

4.6 Algebre di Boole e dualità di Stone

Il contributo dei logici italiani alla Teoria dei Modelli che vogliamo approfondire in questo capitolo, è basato su un approccio algebrico che ha come punto di partenza le algebre di Boole.

Abbiamo già discusso la rilevanza di tale strumento matematico per gli studiosi fautori della rinascita della Logica in Italia nei primi anni '60. In particolare abbiamo visto come le algebre di Boole rivestirono un ruolo fondamentale in tutta la ricerca di Roberto Magari. Stando alle testimonianze di Carlo Cellucci [26], *la spinta verso la logica algebrica era stata data dal direttore del gruppo CNR, Ludovico Geymonat. Tra il 1956 e il 1957, egli aveva letto il volumetto di Leon Henkin, "La structure algébrique des théories mathématiques", pubblicato nel 1956, e ne era rimasto conquistato. Ma Geymonat non fece alcuna ricerca originale nel campo. Le ricerche di logica algebrica furono condotte dal gruppo fiorentino di Roberto Magari, Piero Mangani e Mario Servi.*

Per capire il ruolo delle algebre di Boole nell'approccio alla Teoria dei Modelli di Pietro Mangani, bisogna ricordare alcuni legami fra la teoria delle algebre di Boole e la topologia che erano ben noti al gruppo fiorentino.

Grazie a un teorema dovuto a Stone è possibile associare a ogni algebra di Boole B uno spazio topologico $St(B)$, detto spazio duale di B o anche spazio di Stone, i cui elementi sono gli *ultrafiltri* di B. Ricordiamo che:

Definizione 35. Un *filtro* in un'algebra di Boole B è un sottoinsieme non vuoto F di B tale che:

1. F è *chiuso verso l'alto*, cioè se $x \in F$ e $x \leq y$ (nell'ordinamento dell'algebra di Boole) allora $y \in F$;
2. F ha la *proprietà dell'intersezione finita*, cioè se $x \in F$ e $y \in F$, allora $x \wedge y \in F$.

Un filtro si dice *proprio* se non contiene l'elemento 0 dell'algebra di Boole, cioè se non coincide con B.
Un *ultrafiltro* di B è un filtro proprio U di B tale che per ogni $b \in B$ si ha:

$$b \in U \quad \text{oppure} \quad b' \in U.$$

Un ultrafiltro è, equivalentemente, un filtro proprio e *massimale* nel senso che non è strettamente incluso in nessun altro filtro proprio.
Lo spazio di Stone associato a un'algebra di Boole B è:

$$St(B) = \{U \subseteq B : U \text{ è un ultrafiltro}\}.$$

Descriviamo la topologia di B che indicheremo con τ_B. Tale topologia è *generata* dagli insiemi del tipo $N_b = \{U \in St(B) : b \in U\}$ al variare di $b \in B$. Per topologia generata da questo tipo di insiemi intendiamo la più piccola topologia contenente come aperti tali insiemi. Sono pertanto aperti della topologia tutte le intersezioni finite di insiemi del tipo N_b precedententemente descritti e le unioni qualsiasi di tali intersezioni finite. Diciamo che gli insiemi N_b formano una *semibase* per τ_B.
Gli elementi del tipo N_b hanno le seguenti proprietà facilmente dimostrabili:

- per ogni $b \in B$, si ha $N_b \cap N_{b'} = \emptyset$;
- per ogni $b \in B$, si ha $N_b \cup N_{b'} = St(B)$;
- dati comunque $b_1, ..., b_n \in B$, $N_{b_1} \cap ... \cap N_{b_n} = N_{b_1 \wedge ... \wedge b_n}$;
- dati comunque $b_1, ..., b_n \in B$, $N_{b_1} \cup ... \cup N_{b_n} = N_{b_1 \vee ... \vee b_n}$.

Ad esempio per provare che $N_b \cap N_{b'} = \emptyset$ basta notare che se un ultrafiltro U appartenesse sia a N_b sia a $N_{b'}$ allora si avrebbe $b \in U$ e $b' \in U$ quindi, per la proprietà 2 della definizione di filtro, $0 = b \wedge b' \in U$ ma ciò non è possibile perché un ultrafiltro è un filtro proprio. Le altre proprietà si dimostrano in maniera analoga. Si noti che, alla luce delle proprietà precedenti, unioni e intersezioni finite di elementi del tipo N_b sono ancora della forma N_b. Si può affermare che gli insiemi del tipo N_b formano una base per $St(B)$.

Teorema 27 (Stone)**.** *Lo spazio topologico $(St(B), \tau_B)$ costituito dagli ultrafiltri di B e dotato della topologia descritta è:* ***compatto****, di* ***Hausdorff*** *e* ***totalmente sconnesso****.*

Per provare la compattezza di $(St(B), \tau_B)$ si usa una caratterizzazione degli spazi compatti facendo vedere che se una famiglia non vuota $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di $St(B)$ ha la *proprietà dell'intersezione finita* (cioè ogni intersezione di un numero finito di elementi di $\mathcal{A}$ è non vuota) allora anche l'intersezione di tutti gli elementi di $\mathcal{A}$ è non vuota.

$(St(B), \tau_B)$ è di Hausdorff. Per provarlo notiamo che gli aperti del tipo N_b sono anche chiusi (si dicono *clopen*) infatti $N_b \cap N_{b'} = \emptyset$, e $N_b \cup N_{b'} = St(B)$ per le prime due proprietà di N_b. Dati due elementi distinti di $St(B)$, U_1 e U_2 esiste $b \in B$ tale che $b \in U_1$ e $b \notin U_2$, da cui $b' \in U_2$. Pertanto N_b è un intorno di U_1, $N_{b'}$ è un intorno di U_2 e i due intorni sono disgiunti.

Infine ricordiamo che uno spazio è totalmente sconnesso se ammette una base di clopen e in questo caso la base in questione è fornita dagli elementi del tipo N_b.

Consideriamo ora, a titolo di esempio, la seguente algebra finita:

$$B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

in questo caso gli ultrafiltri sono i sottoinsiemi del tipo:

$$U_a = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\} \quad U_b = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$U_c = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

La base per la topologia di Stone (che in questo caso coincide con l'intera topologia) è quindi costituita da: $N_\emptyset = \emptyset$, $N_{\{a\}} = \{U_a\}$, $N_{\{b\}} = \{U_b\}$, $N_{\{c\}} = \{U_c\}$, $N_{\{a,b\}} = \{U_a, U_b\}$, $N_{\{a,c\}} = \{U_a, U_c\}$, $N_{\{b,c\}} = \{U_b, U_c\}$, $N_{\{a,b,c\}} = \{U_a, U_b, U_c\}$. Si vede pertanto che la topologia di Stone, nel caso di insiemi finiti, è la *topologia discreta* in cui ogni sottoinsieme (dell'insieme degli ultrafiltri) è sia aperto sia chiuso.

Associare ad ogni elemento b di B l'insieme N_b di $St(B)$ crea una corrispondenza tra elementi di un'algebra di Boole e clopen di uno spazio topologico compatto, di Hausdorff e totalmente disconnesso; uno spazio topologico con queste caratteristiche viene detto *spazio booleano*.

Inoltre i clopen di uno spazio booleano formano, a loro volta, un'algebra di Boole ed è possibile dimostrare che la corrispondenza tra elementi di B e clopen di $St(B)$ è un isomorfismo di algebre di Boole.

Viceversa ogni spazio topologico (X, τ) compatto, di Hausdorff e totalmente disconnesso è omeomorfo allo spazio di Stone dell'algebra di Boole dei clopen di (X, τ).

Questa intima connessione tra algebre di Boole e spazi topologici prende il nome di *dualità di Stone* e ha importanti applicazioni in teoria dei modelli e in particolare nello studio degli *insiemi definibili* e dei *tipi* come vedremo nel prossimo paragrafo.

4.7 Stabilità, insiemi definibili e modelli saturati

L'approccio allo studio dei modelli seguito da Mangani e Marcja si inquadra nel contesto della teoria della stabilità o della classificazione, tali concetti affondano le loro radici nell'idea di categoricità introdotta nel 1904 da Oswald Veblen. Egli usa il termine *categorica* per definire una teoria i cui modelli sono tutti isomorfi tra loro. Secondo [128] il termine "categorica" è stato suggerito a Veblen da John Dewey che propose anche il nome "disgiuntiva" per una teoria che non fosse categorica, si tratta di *termini provenienti dalla logica classica per indicare alcuni tipi di enunciati* [128].

La scoperta del teorema di Löwenheim-Skolem pone un limite al concetto introdotto da Veblen: se una teoria formalizzata al primo ordine ha modelli infiniti, allora ha modelli in ogni cardinalità infinita. Pertanto non esistono teorie categoriche del primo ordine con modelli infiniti. Dal teorema di Löwenheim-Skolem in poi si può parlare solo di categoricità in un fissato cardinale infinito λ.

Definizione 36. Una teoria T si dice *categorica* in un certo cardinale λ infinito (λ-categorica) se tutti i modelli di T di cardinalità λ sono fra loro isomorfi.

L'indagine sul concetto di λ-categoricità porta ad una congettura formulata nel 1954 da Jerzy Łoś:

Congettura (Łoś). *Esistono solo tre tipi di teorie λ-categoriche:*

1. *teorie λ-categoriche per ogni cardinale infinito λ. Un esempio è la teoria degli spazi vettoriali su un campo finito;*

2. *teorie λ-categoriche per ogni cardinale più che numerabile $\lambda > \aleph_0$. Un esempio è la teoria degli spazi vettoriali su un campo numerabile;*
3. *teorie λ-categoriche solo per $\lambda = \aleph_0$. Un esempio è la teoria degli ordini lineari densi e senza estremi.*

Stimolato dalla congettura di Łoś, Michael Morley introduce una serie di idee e tecniche innovative che sfociano nell'importante articolo del 1965 [95] in cui Morley risolve la congettura di Łoś dimostrando il seguente teorema.

Teorema 28. *Una teoria completa T in un linguaggio contabile è categorica in un cardinale non contabile se e solo se è categorica in ogni cardinale non contabile.*

Per arrivare a dimostrare questo teorema Morley, negli anni '60, pone le basi di quella che verrà in seguito chiamata teoria della stabilità o della classificazione [44] portata avanti da Shelah e al cui sviluppo contribuiranno molti ricercatori anche in Italia.

Alla base della teoria della stabilità c'è il concetto di insieme definibile.

Sia $\mathfrak{A}$ una struttura per un linguaggio $\mathcal{L}$, consideriamo il linguaggio $\mathcal{L}(A)$ ottenuto aggiungendo a $\mathcal{L}$ un simbolo di costante per ogni elemento di A.

Definizione 37. Sia n un intero positivo. Un sottoinsieme $D \subseteq A^n$ si dice *definibile* in $\mathfrak{A}$ se esiste una formula $\phi(\vec{v})$ di $\mathcal{L}(A)$ tale che D coincide con l'insieme degli elementi $\vec{a} \in A^n$ che soddisfano la formula, cioè tali che $\mathfrak{A} \models \phi(\vec{a})$.

Gli elementi di A che compaiono come costanti nella formula $\phi(\vec{a})$ sono i *parametri* che definiscono D.

Per esempio consideriamo la formula $x_1^2 + x_2^2 = r^2$ dove $r \in \mathbb{R}$ ha un valore fissato mentre x_1, x_2 sono variabili. L'insieme degli elementi di $\mathbb{R}^2$ che soddisfa tale formula è un insieme definibile in $\mathbb{R}^2$, si tratta di una circonferenza che ha centro nell'origine e raggio r.

Se $X \subseteq A$ e i parametri $\vec{r}$ in una formula che definisce D appartengono a X, si dice che D è X-*definibile*. In particolare D è $\emptyset$-*definibile* se e solo se è definibile da una formula senza parametri.

Notiamo che, data una struttura $\mathfrak{A}$ di un linguaggio $\mathcal{L}$ e un sottoinsieme $X \subseteq A$, l'insieme dei sottoinsiemi X-definibili di A^n forma una sottoalgebra dell'algebra di Boole di tutti i sottoinsiemi di A^n. Infatti la famiglia degli insiemi definibili è chiusa per le operazioni di complementare, unione e intersezione che corrispondono, nell'ambito delle formule, ai connettivi logici di negazione, disgiunzione e congiunzione.

Indichiamo con $\mathcal{B}_n(X, \mathfrak{A})$ l'algebra di Boole dei sottoinsiemi di A^n X-definibili di $\mathfrak{A}$. Tale algebra è uno strumento importante per studiare quanto è *complicata* una struttura (o in generale una classe di strutture, ad esempio quella data da tutti i modelli di una teoria T). In questo senso si tenta di *misurare* la complessità degli insiemi definibili in quella struttura, associando ad ogni insieme definibile, se possibile, un certo valore ordinale: un *rango*.

> *L'idea che ebbe Piero Mangani è la seguente: "Quali informazioni possiamo avere su una teoria, guardando alle algebre di Boole dei sottoinsiemi definibili sui diversi modelli della teoria?".*
> Carlo Toffalori, intervista del 22/05/2022

Gli insiemi definibili sono **chiusi per proiezione** nel senso di seguito specificato. Sia che $D \subseteq A^n$ un insieme definibile; sia π la proiezione di A^n in un certo numero fissato di coordinate $i \leq n$; allora l'insieme $\pi(D) \subseteq A^i$ è definibile. Come esempio consideriamo ancora la circonferenza, possiamo definire il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dato da $[-r, r]$ come "proiezione" della circonferenza su $\mathbb{R}$, tramite la formula:

$$\exists x_2 (x_1^2 + x_2^2 = r^2)$$

Inoltre ogni sottoinsieme finito D di A^n è definibile, sostanzialmente basta prendere come parametri nella formula $\phi(\vec{x})$ le coordinate degli elementi di D. Sia ad esempio $D \subseteq A^2$ tale che $D = \{(p_1, p_2), (q_1, q_2)\}$ allora D è definibile dalla formula:

$$\phi(x, y) : (x = p_1 \wedge y = p_2) \vee (x = q_1 \wedge y = q_2)$$

Di conseguenza anche gli insiemi cofiniti sono definibili dato che, come abbiamo detto precedentemente, la famiglia degli insiemi definibili è chiusa per complementare.

Infine notiamo che se il modello $\mathfrak{A}$ è infinito allora esistono sottoinsiemi di A^n non definibili in $\mathfrak{A}$. Ciò segue da questioni di cardinalità, infatti i sottoinsiemi di A^n sono $2^{|A|}$ mentre i sottoinsiemi definibili non possono essere più delle formule di $\mathcal{L}(A)$ che li definiscono e quindi non possono essere più di $|A|$, considerando il linguaggio come contabile.

Si può anche mostrare un esempio esplicito di una struttura infinita con sottoinsiemi non definibili. Si consideri il linguaggio vuoto $\mathcal{L} = \emptyset$ le cui strutture sono gli insiemi non vuoti A. Sia A un insieme infinito, dimostriamo che gli unici insiemi definibili in A sono gli insiemi finiti e cofiniti. Per far ciò supponiamo per assurdo che esista un insieme D infinito, che sia definibile tramite una formula $\phi(x, \vec{r})$ con parametri $\vec{r}$ e che abbia complemento $A - D$ infinito . Siano $d \in D$ e $d' \in A - D$ distinti dagli elementi di $\vec{r}$. Consideriamo una biezione di A (che è automaticamente anche un automorfismo) che fissa gli elementi di $\vec{r}$ e manda d in d'. Dato che $d \in D$ abbiamo che $A \models \phi(d, \vec{r})$ e siccome l'isomorfismo conserva la soddisfacibilità si deve avere $A \models \phi(d', \vec{r})$ ma ciò è assurdo perché $d' \notin D$. Una struttura come quella appena considerata, costituita da un insieme infinito A, si dice *minimale*.

Definizione 38. Una struttura $\mathfrak{A}$ si dice *minimale* se gli insiemi definibili su di essa sono solo gli insiemi finiti e cofiniti (dunque l'algebra $\mathcal{B}_1(A, \mathfrak{A})$ è quella degli insiemi finiti e cofiniti). Una teoria completa T si dice *fortemente minimale* se ogni modello $\mathfrak{A}$ di T è minimale.

La teoria dei campi algebricamente chiusi è fortemente minimale; si tratta di una conseguenza dell'eliminazione dei quantificatori dimostrata da Tarski per la teoria dei campi algebricamente chiusi nel linguaggio $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$. Mentre come conseguenza dell'eliminazione dei quantificatori per la teoria dei campi reali chiusi nel linguaggio $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, 0, 1, \leq\}$ si ottiene che gli insiemi definibili in un campo reale chiuso sono esattamente quelli che si ottengono come unione finita di intervalli incluse le semirette (intese come intervalli con un estremo infinito). Questo concetto viene ripreso nella seguente definizione.

Definizione 39. Una struttura infinita e dotata di ordine $\mathfrak{A} = (A, \leq, ...)$ si dice *o-minimale* se ogni sottoinsieme di A definibile in $\mathfrak{A}$ è ottenibile come unione finita di intervalli (chiusi o aperti, anche con estremi infiniti). Una teoria completa T si dice *o-minimale* se ogni suo modello è o-minimale.

Tornando allo studio degli insiemi definibili come via per valutare la complessità di una teoria, è importante notare che gli elementi dell'algebra dei definibili $\mathcal{B}_n(X, \mathfrak{A})$ possono essere visti, in maniera equivalente, come classi di equivalenza di formule del linguaggio $\mathcal{L}(X)$. Importanti insiemi di tali formule sono i *tipi*.

Sia $\mathfrak{A}_X$ la struttura sul linguaggio $\mathcal{L}(X)$ ottenuta estendendo $\mathfrak{A}$ e interpretando, per ogni $x \in X$, il simbolo di costante corrispondente a x con x stesso. Sia $Th(\mathfrak{A}_X)$ la teoria del modello $\mathfrak{A}_X$ nel senso specificato precedentemente.

Definizione 40. Un *n-tipo consistente* su X in $Th(\mathfrak{A}_X)$ è un insieme p di formule $\phi(\vec{v})$ (dove $\vec{v} = (v_1, ..., v_n)$) di $\mathcal{L}(X)$ tali che ogni congiunzione finita di formule di p è soddisfatta in $\mathfrak{A}_X$ da qualche $\vec{a} \in A^n$.

Definizione 41. Un *n-tipo completo* su X in $Th(\mathfrak{A}_X)$ è un *n-tipo consistente* massimale rispetto all'inclusione. Indichiamo con $S_n(X, \mathfrak{A})$ l'insieme degli n-tipi completi su X in $Th(\mathfrak{A}_X)$.

Per capire il senso della definizione di n-tipo pensiamo alla costruzione dei numeri reali a partire dai razionali. Consideriamo il linguaggio $\mathcal{L} = \{\leq\}$ e la $\mathcal{L}$-struttura $(\mathbb{Q}, \leq)$. Sia data una partizione di $\mathbb{Q}$ in due insiemi non vuoti e disgiunti A e B tali che A non ha massimo, B non ha minimo e per ogni $a \in A$ e $b \in B$ si ha $a < b$. Ora si consideri il seguente insieme di formule nel linguaggio $\mathcal{L}(\mathbb{Q})$:

$$p = \{a < v : a \in A\} \cup \{v < b : b \in B\}$$

nessun elemento $r \in \mathbb{Q}$ soddisfa tutte le formule di p. Tuttavia ogni congiunzione finita $\phi(v)$ di formule di p è soddisfatta da qualche $r \in \mathbb{Q}$, grazie alla densità di $\mathbb{Q}$. L'insieme di formule p che abbiamo considerato è un esempio di 1-tipo su $\mathbb{Q}$.

In generale, ricordando la teoria delle algebre di Boole, si vede che ogni n-tipo completo è un ultrafiltro dell'algebra di Boole dei definibili o equivalentemente dell'algebra di Lindenbaum delle formule.

Come abbiamo visto in generale, gli ultrafiltri di un'algebra di Boole possono essere considerati come i punti di uno spazio topologico *booleano* cioè di Hausdorff, compatto e totalmente disconnesso. Ciò è vero anche per gli n-tipi e consente un altro punto di vista per lo studio della complessità dei modelli di una teoria.

Un modo per caratterizzare una teoria in base agli n-tipi è fornito dalla definizione di modello saturato.

Data una teoria completa T con modelli infiniti in un linguaggio contabile $\mathcal{L}$, un modello $\mathfrak{A}$ di T potrebbe non realizzare tutti gli 1-tipi su un certo sottoinsieme $X \subseteq A$. Come esempio si consideri l'1-tipo su A (nel caso di A infinito) costituito dalle formule $\{\neg(v = a) : a \in A\}$ che non è soddisfatto da nessun elemento di A. I modelli saturati sono quelli che realizzano il maggior numero di tipi possibile sui propri sottoinsiemi.

Definizione 42. Sia λ un cardinale infinito. Un modello $\mathfrak{B}$ di T è detto λ-*saturato* se per ogni sottoinsieme $X \subseteq B$ tale che $|X| < \lambda$, $\mathfrak{B}$ realizza ogni 1-tipo su X. In generale diremo che un modello $\mathfrak{B}$ è *saturato* se è $|B|$-saturato.

Sia T una teoria completa senza modelli finiti in un linguaggio contabile $\mathcal{L}$ e sia Ω un modello saturato di T.

Definizione 43. Una teoria T è ω-stabile se per ogni sottoinsieme $X \subseteq \Omega$ contabile, lo spazio $S(X)$ dei tipi su X è contabile.

È possibile dimostrare che ogni teoria fortemente minimale è ω-stabile. Inoltre Morley ha dimostrato che una teoria categorica in un cardinale non contabile è ω-stabile.

Un forte impulso alla teoria della stabilità viene dato dal lavoro di Shelah che si pone l'ambizioso obiettivo di classificare una qualsiasi teoria completa del primo ordine in un linguaggio contabile. La teoria della classificazione di Shelah consiste nel descrivere tutti i modelli della teoria di ogni cardinalità infinita a meno di isomorfismi, tramite l'assegnazione di opportuni invarianti (che in alcuni casi sono numeri cardinali), oppure nel provare l'impossibilità di tale caratterizzazione.

Per attuare tale programma, Shelah individua, per una teoria, una serie di proprietà che siano legate alla possibilità di effettuarne una classificazione, la prima di esse è la *stabilità*. Una teoria è stabile se nessuna formula del suo linguaggio può definire, in qualche suo modello, un ordine totale infinito. In particolare nessuna teoria di strutture totalmente ordinate può essere stabile. Una teoria instabile possiede troppi modelli per consentirne una classificazione [10]

Il lavoro di Shelah, e in particolare l'assegnazione di invarianti che coinvolgano gli ordinali, è ispirato dall'approccio di Morley il quale, per misurare la complessità degli insiemi definibili in un certo modello, associa ad essi un numero ordinale che viene detto *rango*.

Attraverso la dualità di Stone, l'algebra Booleana degli insiemi definibili corrisponde allo spazio topologico dei tipi che descrivono la complessità model-teorica di una teoria in quanto le estensioni elementari di un certo modello $\mathfrak{A}$ si creano realizzando i tipi su $\mathfrak{A}$.

4.8 Un approccio originale alla stabilità

In una serie di articoli scritti tra il 1980 e il 1984 ([81], [82], [87], [88]), Piero Mangani e Annalisa Marcja e, in un secondo momento, Carlo Toffalori, sviluppano un loro approccio alla teoria della stabilità basato sulle algebre di Boole. In particolare i ricercatori italiani si chiedono quali informazioni si possono ottenere su una teoria completa T guardando ai tipi di isomorfismo delle algebre di Boole degli insiemi definibili nei modelli di T. È possibile ricavare dalla conoscenza delle algebre dei definibili delle informazioni essenziali sulla complessità model teoretica della teoria T?

Nei prossimi paragrafi seguiremo il percorso che ha portato i logici italiani a rispondere a tali domande ripercorrendo il contenuto di alcuni lavori pubblicati tra la fine degli anni '70 e l'inizio degli anni '80.

4.8.1 Rango associato a un'algebra di Boole

In [81] si introduce un rango per un'algebra di Boole detto *rango di Shelah* perché ispirato ad un lavoro di Shelah [126] in cui si fornisce una caratterizzazione delle algebre superatomiche, che descriveremo nel prosieguo del capitolo, studiate da Day in [38].

L'obiettivo dell'articolo di Mangani e Marcja [81] è lo studio di una teoria elementare (cioè formalizzata al I ordine) T da un punto di vista algebrico; cioè lo studio dell'algebra di Boole degli insiemi definibili in un modello $\mathfrak{A}$ di T. In questo modo gli autori ottengono una caratterizzazione delle teorie $\aleph_1$-categoriche e una nuova dimostrazione del risultato di Marsh: "ogni teoria fortemente minimale è $\aleph_0$-categorica".

Sia $\mathcal{B} =< B, +, \cdot, ', 0, 1 >$ un'algebra di Boole. Dati tre elementi dell'algebra b, b_1, b_2 usiamo la notazione $[b : b_1, b_2]$ per intendere che l'elemento b può essere *decomposto* nei due elementi b_1 e b_2 nel senso che valgono le due proprietà seguenti:

- $b = b_1 + b_2$;
- $b_1 \cdot b_2 = 0$

Per definire il *rango* di un'algebra di Boole si considera la classe On^* formata da tutti gli ordinali e dai due elementi: -1 e ∞. In questa classe è definito, in modo naturale, un ordinamento a partire dall'ordinamento degli ordinali e assumendo che, per ogni ordinale α, si ha $-1 < \alpha < \infty$.

Definizione 44. Un rango è una funzione $R : \mathcal{B} \to On^*$ che soddisfa le seguenti proprietà:

R_1 $R(b) = -1$ se e solo se $b = 0$;

R_2 se $b_1 \leq b_2$ allora $R(b_1) \leq R(b_2)$;

R_3 $-1 < R(b) < \infty$ se e solo se per ogni decomposizione $[b : b_1, b_2]$ si ha $R(b_1) < R(b)$ o $R(b_2) < R(b)$

Per chiarire la definizione precedente proponiamo un esempio di rango sull'algebra $P(\mathbb{N})$ dell'insieme delle parti di $\mathbb{N}$. In questo caso, fissato un qualsiasi ordinale β, definiamo il rango di un sottoinsieme $B \subseteq \mathbb{N}$, nel modo seguente:

- se $B = \emptyset$ allora $R(B) = 0$;
- se B è un singoletto allora $R(B) = \beta$;
- se B è un insieme finito di cardinalità n allora $R(B) = n \cdot \beta$;
- se B è un insieme infinito allora $R(B) = \infty$

Grazie ai primi tre punti, è chiaro che valgono le proprietà R_1 e R_2 del rango. Quanto a R_3, il rango di un sottoinsieme B di $\mathbb{N}$ è un ordinale se e solo se B è finito e non vuoto. Infatti se B è infinito è possibile decomporlo in due insiemi disgiunti B_1 e B_2 entrambi infiniti e quindi tali che $R(B_1) = R(B_2) = R(B)$.

Data un'algebra di Boole $\mathcal{B}$ e un suo elemento $b \in B$, indichiamo con $\mathcal{B}|b$ l'algebra dei sottoelementi di b cioè l'algebra di Boole che ha come elementi gli elementi $a \in B$ tali che $a \leq b$, come 0 lo stesso 0 di B e come 1, l'elemento $b \in B$. Dato un elemento $a \in \mathcal{B}|b$, il complementare a' è definito come $b - a$ (dove quest'ultima differenza è da intendersi nell'algebra $\mathcal{B}$). Si noti che $\mathcal{B}|b$ non è in generale una sottoalgebra di $\mathcal{B}$.
Dalla definizione di rango discende immediatamente la seguente proposizione:

Proposizione 4. 1. *Se $-1 < R(b) = \alpha < \infty$ allora non esiste una decomposizione $[b : b_1, b_2]$ tale che $R(b_1) = R(b_2) = \alpha$.*

2. *Se $R(b) = \infty$ allora esiste una decomposizione $[b : b_1, b_2]$ tale che $R(b_1) = R(b_2) = \infty$.*
3. *Sia $b \in B$ e sia $\mathcal{B}|b$ l'algebra dei sottoelementi di b. Se $R(b) < \infty$ allora $\mathcal{B}|b$ è atomica. Di conseguenza se $b \neq 0$ e $\mathcal{B}|b$ è senza atomi allora $R(b) = \infty$.*

Dimostrazione. Le prime due affermazioni discendono immediatamente dalla proprietà R_3. Dimostriamo la terza affermazione: Sia $b \in B$, $b \neq 0$, facciamo vedere che esiste un atomo sotto b. Siccome $R(b) < \infty$, se b non è un atomo allora esiste una decomposizione $[b : b_1, b_2]$ dove il rango di b_1 (o b_2) è minore di quello di b. Se b_1 è diverso da 0, gli si riapplica il procedimento. D'altra parte non può esistere una catena discendente infinita di ordinali, così che prima o poi, dopo un numero finito di passi, il procedimento si interrompe. L'elemento c trovato a quel punto, diverso da 0, non può che essere un atomo: in ogni sua decomposizione disgiunta $[c : c_1, c_2]$ uno tra c_1 e c_2 ha rango -1, quindi è 0. □

Ricordiamo che un *ideale* per un'algebra booleana $\mathcal{B} =< B, +, \cdot, ', 0, 1 >$ è un sottoinsieme $I \subseteq B$ tale che:

- se $b_1 \in I$ e $b_2 \in I$ allora $b_1 + b_2 \in I$;
- se $b \in I$ e $a \leq b$ allora $a \in I$.

Notiamo che il concetto di ideale è *duale* rispetto al concetto di filtro, nel senso che il complementare di un ideale è un filtro e viceversa. Inoltre si può facilmente provare che un ideale I di un'algebra di Boole, per come lo abbiamo definito, corrisponde a un ideale di un anello booleano in cui l'operazione di somma coincide con la differenza simmetrica: $a\dot{+}b = a \cdot b' + a' \cdot b$[3] e l'operazione di prodotto coincide con il prodotto $\cdot$ dell'algebra booleana.

Proposizione 5. *L'insieme* $I^{<\infty} = \{b \in B : R(b) < \infty\}$ *è un ideale di* $\mathcal{B}$.

Dimostrazione. Innanzitutto $0 \in I^{<\infty}$, ciò deriva dalla proprietà R_1: $R(0) = -1 < \infty$. Inoltre se $b \in I^{<\infty}$ e $c \leq b$, allora $c \in I^{<\infty}$.
Infine dobbiamo mostrare che se $b_1 \in I^{<\infty}$ e $b_2 \in I^{<\infty}$, allora $b_1 + b_2 \in I^{<\infty}$. Per dimostrare ciò ragioniamo per induzione su $\gamma = \min\{R(b_1), R(b_2)\}$. Se $\gamma = -1$ allora $b_1 = 0$ o $b_2 = 0$ e la tesi è automaticamente verificata. Supponiamo che dati comunque $x_1, x_2 \in I^{<\infty}$ tali che $\min\{R(x_1), R(x_2)\} < \gamma$, si abbia $x_1 + x_2 \in I^{<\infty}$. Se per assurdo fosse $R(b_1 + b_2) = \infty$ allora si avrebbe una decomposizione $[b_1 + b_2 : c_1, c_2]$ con $R(c_1) = R(c_2) = \infty$. Supponiamo, per fissare le idee, che sia $R(b_1) = \gamma$. Possiamo scrivere:

$$b_1 + (b_2 - b_1) = c_1 + c_2 \qquad \text{da cui} \qquad b_1 = b_1c_1 + b_1c_2$$

quindi $R(b_1c_1 + b_1c_2) = \gamma$ e, per la proprietà R_3, si deve avere che $R(b_1c_1) < \gamma$ oppure che $R(b_1c_2) < \gamma$. Supponiamo che sia $R(b_1c_1) < \gamma$, allora possiamo scrivere:

$$c_1 = b_1c_1 + (b_2 - b_1)c_1$$

con $\min\{R(b_1c_1), R((b_2 - b_1)c_1)\} < \gamma$, quindi, per ipotesi induttiva, $R(c_1) < \infty$, da ciò la contraddizione. ☐

Consideriamo ora l'algebra di Boole data dal quoziente di $\mathcal{B}$ modulo l'ideale $I^{<\infty}$ che viene indicata con il simbolo $\mathcal{B}/I^{<\infty}$

Proposizione 6. $\mathcal{B}/I^{<\infty}$ *è un'algebra di Boole senza atomi.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{B}/I^{<\infty}$ si riduce alla sola classe di equivalenza di 0, allora l'enunciato è ovvio. Altrimenti deve esistere un elemento $b \in B$ tale che la classe di equivalenza di b soddisfa $[b] \neq 0$ quindi $b \notin I^{<\infty}$, pertanto $R(b) = \infty$, mostriamo che $[b]$ non è un atomo. Dato che $R(b) = \infty$ esiste una decomposizione $[b : b_1, b_2]$ tale che $R(b_1) = R(b_2) = \infty$ da cui segue che $[b_1] \neq 0$. Sappiamo che $b_1 \leq b_1 + b_2 = b$ quindi $[b_1] \leq [b]$. Se fosse $[b_1] = [b]$ allora si avrebbe $b_1\dot{+}b \in I^{<\infty}$. Ora sostituendo b con $b_1 + b_2$, considerando che un anello Booleano ha caratteristica 2 e che $b_1 + b_2 = b_1\dot{+}b_2$ per la decomposizione considerata, si ha:

$$b_1\dot{+}b_1\dot{+}b_2 = b_2 \in I^{<\infty}$$

che è in contraddizione con $R(b_2) = \infty$. Si può quindi concludere che $[b_1] < [b]$. Quindi $[b]$ non è un atomo. ☐

Definizione 45. Un'algebra $\mathcal{B}$ è *dotata di rango* se esiste un rango R tale che per ogni $b \in B$ si ha $R(b) < \infty$ o, equivalentemente, se $R(1) < \infty$.

Ad esempio l'algebra $P(\mathbb{N})$ che abbiamo considerato precedentemente non è ranked perché i sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ hanno tutti rango ∞. Consideriamo invece l'algebra dei sottoinsiemi finiti o cofiniti di $\mathbb{N}$, si tratta di una sottoalgebra di $P(\mathbb{N})$, inoltre è possibile assegnare come rango un ordinale a ciascun sottoinsieme finito o cofinito nel modo seguente:

- ad ogni insieme finito A_{fin} si assegna come rango la cardinalità dell'insieme meno 1: $R(A_{\text{fin}}) = |A_{\text{fin}}| - 1$, così i singoletti hanno rango 0, gli insiemi di due elementi rango 1, etc.

[3] Nelle trattazioni attuali si preferisce usare il join $\vee$ al posto del simbolo $+$ e il simbolo $+$ al posto di $\dot{+}$.

- Ad ogni insieme cofinito A_{cofin} si assegna come rango lo stesso ordinale limite, ad esempio $R(A_{\text{cofin}}) = \omega$.

In questo modo la definizione di rango è soddisfatta. In particolare ogni insieme cofinito ammette solo decomposizioni come somma di due sottoinsiemi dove esattamente uno dei due sottoinsiemi è finito e quindi ha rango strettamente minore di ω. Pertanto l'algebra dei sottoinsiemi finiti o cofiniti di $\mathbb{N}$ è dotata di rango.

Tramite la definizione precedente, Mangani e Marcja stabiliscono una relazione tra il concetto di rango per un'algebra di Boole e le algebre superatomiche che erano state studiate da Day in [38] e prima ancora da Mostowski e Tarski in [96].

Definizione 46. Un'algebra di Boole $\mathcal{B}$ è detta *superatomica* se ogni immagine omomorfa di $\mathcal{B}$ è atomica.

Ad esempio l'algebra $P(\mathbb{N})$ che abbiamo appena introdotto è atomica (gli atomi sono i singoletti) ma non è superatomica perché il quoziente rispetto all'ideale I_{fin} dei finiti è un'algebra senza atomi. Per dimostrarlo consideriamo un sottoinsieme infinito $b \subseteq \mathbb{N}$. Dato che $b \notin I_{\text{fin}}$, si ha $[b] \neq 0$ in $P(\mathbb{N})/I_{\text{fin}}$. Mostriamo che $[b]$ non è un atomo: numerando gli elementi di $b = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, ...\}$ possiamo costruire un sottoinsieme $b' \subseteq b$ nel modo seguente $b' = \{\beta_1, \beta_3, \beta_5, ...\}$, si ha che $[b] \neq [b']$ perché differiscono per infiniti elementi e inoltre $[b'] \neq 0$ perché b' ha infiniti elementi, inoltre $[b'] \leq [b]$ quindi $[b]$ non è un atomo.
L'algebra dei sottoinsiemi finiti o cofiniti di $\mathbb{N}$ è una sottoalgebra di $P(\mathbb{N})$ ed è superatomica come si vede ragionando sulle sottoalgebre.
È possibile dimostrare che un'algebra di Boole è superatomica se e solo se ogni sua sottoalgebra è atomica ([38] e [96]).

Teorema 29. *Un'algebra di Boole $\mathcal{B}$ è dotata di rango se e solo se è superatomica.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ un'algebra di Boole *dotata di rango*, e sia $\mathcal{B}_1$ una sottoalgebra di $\mathcal{B}$; dato un qualsiasi elemento $b \in B_1, b \neq 0$ consideriamo, fra gli elementi minori uguali di b, quello di rango minimo, chiamiamolo c. c è un atomo, infatti se fosse $c' < c$ e $c' \neq 0$ si avrebbe la decomposizione $[c : c', c - c']$ con $R(c') < R(c)$ oppure $R(c - c') < R(c)$ contro la minimalità del rango di c.
Viceversa se $\mathcal{B}$ non è *dotata di rango* allora l'ideale $I^{<\infty}$ non coincide con $\mathcal{B}$. Pertanto l'algebra di Boole quoziente $\mathcal{B}/I^{<\infty}$ è non degenere e senza atomi. Essendo $\mathcal{B}/I^{<\infty}$ immagine omomorfa di $\mathcal{B}$, concludiamo che $\mathcal{B}$ non è superatomica. □

Si definisce quindi il rango di Shelah per un'algebra di Boole.

Definizione 47. Si dice *rango di Shelah* una funzione $r_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to On^*$, definita da:

(r_1) $r_{\mathcal{B}}(b) = -1$ se e solo se $b = 0$;

(r_2) se $b \in B$ e $b \neq 0$:

$$r_{\mathcal{B}}(b) = \begin{cases} \min\{\alpha \in \text{On}:[b : b_1, b_2] \Rightarrow r_{\mathcal{B}}(b_1) < \alpha \text{ o } r_{\mathcal{B}}(b_2) < \alpha\} & \text{se esiste} \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per capire meglio la definizione precedente conviene partire dalla disuguaglianza:

$$r_{\mathcal{B}}(b) \geq \alpha$$

definita per induzione sull'ordinale α:

1. se $\alpha = 0$: $r_{\mathcal{B}}(b) \geq 0$ per ogni $b \neq 0$;
2. se α è un ordinale successore, $\alpha = \beta + 1$: $r_{\mathcal{B}}(b) \geq \beta + 1$ se e solo se esiste una decomposizione $[b : b_1, b_2]$ tale che $r_{\mathcal{B}}(b_1) \geq \beta$ e $r_{\mathcal{B}}(b_2) \geq \beta$;
3. se α è un ordinale limite: $r(b) \geq \alpha$ se e solo se $r(b) \geq \gamma$ per ogni $\gamma < \alpha$.

Ci sono quindi due casi se $b \neq 0$: o $r_{\mathcal{B}}(b) \geq \alpha$ per ogni ordinale α e allora $r_{\mathcal{B}}(b) = \infty$, oppure c'è un ordinale α tale che $r_{\mathcal{B}}(b)$ non è maggiore o uguale a α e quindi c'è un minimo tra gli ordinali siffatti che deve essere, per definizione, un ordinale successore $\alpha = \beta + 1$. Dato che $r_{\mathcal{B}}(b)$ non è maggiore o uguale a $\alpha = \beta + 1$, per ogni decomposizione $[b : b_1, b_2]$ si ha che $r(b_1) < \beta$ oppure $r(b_2) < \beta$, in questo caso si pone $r_{\mathcal{B}}(b) = \beta$ e ciò chiarisce la definizione precedente.

Osserviamo che il rango di Shelah è un rango nel senso della definizione 44. Tuttavia non ogni rango nel senso della definizione 44, è un rango di Shelah. Per esempio si consideri un'algebra di 4 elementi: $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Se assegniamo ai due singoletti rango 0 (e quindi automaticamente a $\{0,1\}$ rango 1) abbiamo un rango di Shelah. Se invece assegniamo ai due singoletti rango 1 e a $\{0,1\}$ rango 2, abbiamo un rango nel senso della definizione 44 che non è un rango di Shelah. Per vederlo basta considerare che l'unica decomposizione $[b : b_1, b_2]$ di un singoletto $b = \{0\}$ è tale che $b_1 = \emptyset$ e $b_2 = \{0\}$ o viceversa. Quindi il minimo ordinale α tale che $r_{\mathcal{B}}(b_1) < \alpha$ o $r_{\mathcal{B}}(b_2) < \alpha$ è 0.

Con considerazioni analoghe alle precedenti si dimostra che un'algebra $\mathcal{B}$ è superatomica se e solo se per ogni $b \in B$ si ha $r_{\mathcal{B}}(b) < \infty$, se e solo se $r_{\mathcal{B}}(1) < \infty$, se e solo se, per ogni $b \in B$, $\mathcal{B}/b$ è superatomica.

Infine notiamo che se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono due algebre di Boole e $b \in B_1 \cup B_2$, allora, in generale $r_{\mathcal{B}_1}(b) \neq r_{\mathcal{B}_2}(b)$. Ad esempio consideriamo come $\mathcal{B}_1 = P(\mathbb{N})$ e $\mathcal{B}_2 = \{\emptyset, \text{pari}, \text{dispari}, \mathbb{N}\}$, dove $\mathcal{B}_2$ è una sottoalgebra di $P(\mathbb{N})$ costituita dall'insieme vuoto, dall'insieme dei numeri pari, dall'insieme dei numeri dispari e da tutto $\mathbb{N}$. Se calcoliamo il rango di Shelah di $\mathbb{N}$ nelle due algebre otteniamo: $r_{\mathcal{B}_1}(\mathbb{N}) = \infty$ (come abbiamo mostrato precedentemente), mentre $r_{\mathcal{B}_2}(\mathbb{N}) = 1$ infatti $r_{\mathcal{B}_2}(\text{pari}) = r_{\mathcal{B}_2}(\text{dispari}) = 0$ e di conseguenza $r_{\mathcal{B}_2}(\mathbb{N}) = 1$.

Definizione 48. Diciamo che un elemento $b \in B$ è *finito* se è uguale a 0 oppure esistono n atomi $a_1, ..., a_n$ tali che $b = a_1 + ... + a_n$.

D'ora in poi, quando non c'è ambiguità, indicheremo il rango di Shelah di un'algebra $\mathcal{B}$ semplicemente con $r(b)$.

Proposizione 7. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. $r(b) = 0$ *se e solo se* b *è un atomo;*
2. $r(b) < \omega$ *se e solo se* b *è finito;*
3. $r(b) = \omega$ *se e solo se* b *è infinito e per ogni* $[b : b_1, b_2]$, b_1 *è finito oppure* b_2 *è finito;*
4. *se* $r(b_1) \leq n$ *e* $r(b_2) \leq n$ *con* $n \in \omega$, *allora* $r(b_1 + b_2) \leq n + 1$;
5. *se* $b_1 \cdot b_2 = 0$, $r(b_1) < \omega$ *e* $r(b_2) = \alpha \geq \omega$, *allora* $r(b_1 + b_2) = \alpha$.

Dimostrazione.

1. Per la proprietà r_2, $r(a) = 0$ se e solo se per ogni decomposizione $[a : a_1, a_2]$ si ha che $r(a_1) < 0$ oppure $r(a_2) < 0$. Ciò avviene se e solo se $r(a_1) = -1$ o $r(a_2) = -1$ cioè $a_1 = 0$ o $a_2 = 0$ ovvero l'unica decomposizione di a è $a = a + 0$ ciò equivale a dire che a è un atomo.
2. Per induzione su m, dimostriamo che $r(b) = m \in \omega$ se e solo se $b = a_1 + ... + a_n$ con $a_1, ..., a_n$ atomi e $n = 2^m + k \quad (0 \leq k < 2^m)$. Per il punto precedente, $m = 0$ se e solo se b è un atomo quindi la tesi è verificata con $b = a_1$ e $1 = 2^0 + 0$. Supponiamo che la tesi sia vera per $m \in \omega$ e dimostriamo che è vera anche per $m + 1$. Si ha $r(b) = m + 1$, per la minimalità richiesta dalla proprietà r_2, deve esistere una decomposizione $[b : b_1, b_2]$ con $r(b_1) \geq m$ e $r(b_2) \geq m$. Almeno uno fra b_1 e b_2 deve pertanto avere rango uguale a m affinché le proprietà generali del rango siano soddisfatte. Supponiamo, per fissare le idee, che sia $r(b_1) = m$. Allora per ipotesi induttiva $b_1 = b_{11} + ... + b_{1n_1}$ con $n_1 = 2^m + k_1, \quad 0 \leq k_1 < 2^m$. Si può dimostrare che anche b_2 (che ha rango massimo $m + 1$), deve essere del tipo $b_2 = b_{21} + ... + b_{2n_2}$ con $n_2 = 2^m + k_2, \quad 0 \leq k_2 < 2^m$, quindi si ha in definitiva:
$$b = b_1 + b_2 = b_{11} + ... + b_{1n_1} + b_{21} + ... + b_{2n_2}$$
dove $n_1 + n_2 = 2^m + 2^m + k_1 + k_2 = 2^{m+1} + k_1 + k_2$, con $0 \leq k_1 + k_2 < 2^{m+1}$.
3. Se $r(b) = \omega$ allora b è infinito per quanto dimostrato al punto precedente. Inoltre se esistesse una decomposizione $[b : b_1, b_2]$ con $r(b_1) \geq \omega$ e $r(b_2) \geq \omega$ allora, per r_2, si avrebbe $r(b) > \omega$. Il viceversa si basa sulla proprietà r_2.
4. Per quanto dimostrato al punto 2, se b_1 e b_2 hanno rango minore di n si possono entrambi decomporre in un numero di atomi che sia minore o uguale di 2^n più rispettivamente due numeri k_1 e k_2. Pertanto la somma $b_1 + b_2$, anch'essa finita può essere decomposta in un numero h di atomi che soddisfi
$$h = 2^r + k_1 + k_2 \leq 2^n + 2^n + k_1 + k_2 = 2^{n+1} + k_1 + k_2$$
dove r è il rango di $b_1 + b_2$. Da ciò si ottiene che $r = r(b_1 + b_2) \leq n + 1$.

5. si dimostra per induzione sull'ordinale α.

□

Proposizione 8. *Se $r(b) = \alpha \in Or$, allora, per ogni $\beta < \alpha$, in B c'è un elemento $b_1 < b$ tale che $r(b_1) = \beta$.*

Dimostrazione. Per induzione su α. Se $\alpha = 0$ allora $\beta = -1$ e $b_1 = 0$. Se α è un ordinale successore, $\alpha = \beta + 1$, esiste una decomposizione $[b : b_1, b_2]$ tale che $r(b_1) \geq \beta$ e $r(b_2) \geq \beta$, non potendo essere entrambi strettamente maggiori di β, ce ne sarà uno, supponiamo per fissare le idee che sia b_1, tale che $r(b_1) = \beta$. Lo stesso vale per gli altri $\beta' < \beta < \beta + 1$ per ipotesi induttiva. Se α è un ordinale limite allora, per ogni $\beta < \alpha$, c'è un ordinale β' tale che $\beta < \beta' < \alpha$. Dunque per il rango si Shelah on ci sono "salti", come invece avviene per altri ranghi. □

4.8.2 La pseudo–categoricità

Vediamo ora come nel lavoro di Mangani e Marcja [81] il concetto di rango viene applicato all'algebra delle formule.

Sia F^1_X un insieme di formule di $\mathcal{L}_X$ aventi una sola variabile libera e sia $\mathcal{B}_1(X, \mathfrak{A})$ l'algebra di Lindenbaum della teoria $Th(\mathfrak{A}_X)$; usiamo la notazione abbreviata $\mathcal{B}(A)$ per indicare l'algebra di Lindenbaum $\mathcal{B}(A, \mathfrak{A})$.

Definizione 49. Per ogni $\phi \in F^1_A$, $r_{\mathfrak{A}}(\phi) = r_{\mathcal{B}(A)}([\phi])$ e $r(\mathfrak{A}) = r_{\mathfrak{A}}(v = v)$.

Proposizione 9. *Siano $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ due modelli ω-saturati di $\mathcal{L}$, sia X un sottoinsieme di $A \cap C$ e supponiamo che si abbia $\mathfrak{A}_X$ isomorfo a $\mathfrak{C}_X$. Allora ogni formula ϕ di $\mathcal{L}_X$ ha lo stesso rango in $\mathfrak{A}$ e in $\mathfrak{C}$. Pertanto anche $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{C}$ hanno lo stesso rango.*

La proposizione precedente giustifica la seguente definizione.

Definizione 50. Sia T una teoria completa. Definiamo *rango* di T il rango di un qualsiasi modello ω-saturato di T.

Si noti che nella definizione precedente non è possibile omettere l'ipotesi di ω-saturazione. A tal proposito sia $T = Th(\langle \mathbb{Z}, \leq, s \rangle)$. Si può dimostrare che $r(\langle \mathbb{Z}, \leq, s \rangle) = \omega + 1$ e che se $\mathfrak{C}$ è un modello saturato contabile (un tale modello esiste) allora $r(\mathfrak{C}) = \infty$.

D'ora in poi considereremo solo teorie T in un linguaggio contabile, con modelli infiniti, che siano complete e che ammettano l'eliminazione dei quantificatori. Dato che, se $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \models T$ e $X \subseteq A \cap C$, allora $\mathcal{B}(X, \mathfrak{A}) \cong \mathcal{B}(X, \mathfrak{C})$, possiamo scrivere semplicemente $\mathcal{B}(X)$ al posto di $\mathcal{B}(X, \mathfrak{A})$ per ogni $\mathfrak{A} \models T$. Notiamo anche che se $|X| \leq \aleph_0$ allora anche $|\mathcal{B}(X)| \leq \aleph_0$.

Definizione 51. Sia k un cardinale infinito; T è detta *k-superatomica* se e solo se per ogni modello $\mathfrak{A} \models T$ di cardinalità $|A| = k$, l'algebra $\mathcal{B}(A)$ è superatomica.

Teorema 30. *I seguenti enunciati sono equivalenti:*

1. *Per ogni X con $|X| \leq \aleph_0, X \subseteq \mathfrak{A} \models T$ si ha che $\mathcal{B}(X)$ è superatomica;*
2. *T è $\aleph_0$-superatomica;*
3. *T è ω-stabile;*
4. *per ogni $k \geq \aleph_0$, T è k-superatomica;*
5. *$r(T) < \infty$, ovvero esiste un modello ω-saturato $\mathfrak{C} \models T$ tale che $r(\mathfrak{C}) < \infty$;*
6. *per ogni $X \subseteq \mathfrak{A} \models T$, si ha che $\mathcal{B}(X)$ è ranked.*

La dimostrazione del teorema precedente è in parte conseguenza diretta delle definizioni e in parte basata sui risultati di Day [38] e Shelah [126].
La seguente definizione permette una caratterizzazione algebrica dei modelli saturati. Indichiamo con $\mathcal{B}$ un'algebra di Boole atomica e con $At(\mathcal{B})$ l'insieme degli atomi di $\mathcal{B}$.

Definizione 52. $\mathcal{B}$ è detta **principale** se per ogni sottoalgebra $\mathcal{B}_1$ di $\mathcal{B}$ tale che $|\mathcal{B}_1| < |At(\mathcal{B})|$ e per ogni ultrafiltro F di $\mathcal{B}_1$, esiste un ultrafiltro principale G di $\mathcal{B}$ tale che $F = G \cap \mathcal{B}_1$.

Le algebre di Boole atomiche e contabili sono tutte principali.

Proposizione 10. *Sia* $\mathfrak{A} \models T$, $|\mathfrak{A}| > \aleph_0$. *Allora* $\mathfrak{A}$ *è saturato se e solo se* $\mathcal{B}(A)$ *è principale.*

La dimostrazione della proposizione precedente si basa sulla definizione di modello saturato e sulla seguente implicazione: se $|A| > \aleph_0$, $|X| < |A|$ e $\mathcal{L}$ è contabile, allora $|\mathcal{B}(X)| < |A|$.

Grazie alla proposizione appena enunciata si dimostra una nuova caratterizzazione algebrica delle teorie $\aleph_1$-categoriche per mezzo della seguente definizione:

Definizione 53. Una teoria si dice *pseudo* λ*-categorica* ($p \cdot \lambda$-categorica) se per ogni $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \models T$ con $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{C}| = \lambda$ si ha $\mathcal{B}(A) \cong \mathcal{B}(C)$.

Quindi una teoria è $p \cdot \lambda$-categorica se, dati due suoi modelli di cardinalità λ, le algebre di Boole degli insiemi definibili su tali modelli sono isomorfe.

> *Invece di parlare di teoria* λ*-categorica si iniziò a parlare di teoria "pseudo"* λ*-categorica intendendo dire che tutti i modelli di cardinalità* λ *hanno la stessa algebra dei definibili, a meno di isomorfismi. Questo era un primo spunto, un'altra idea fu quella di vedere quali informazioni era possibile ricavare su una teoria studiando le algebre dei definibili dei sottoinsiemi numerabili. Ciò era collegato alla* ω*-stabilità.*
> Carlo Toffalori, intervista del 22/05/2022

Notiamo che se una teoria T è λ-categorica allora è ovviamente anche $p \cdot \lambda$-categorica. Tuttavia esistono teorie che sono $p \cdot \aleph_0$-categoriche ma non sono $\aleph_0$-categoriche. Ad esempio la teoria dei campi reali chiusi ha $2^{\aleph_0}$ modelli contabili di cardinalità $\aleph_0$ ma un solo tipo di isomorfismo di algebre di Boole dei definibili, si tratta dell'algebra di Boole contabile senza atomi.

La $p \cdot \aleph_0$-categoricità quindi non implica la $\aleph_0$-categoricità. Cosa si può dire riguardo le altre cardinalità infinite $\lambda > \aleph_0$? I due risultati seguenti, contenuti in [81], dimostrano che, sotto l'ipotesi di ω-stabilità, per cardinali $\lambda > \aleph_0$, la $p \cdot \lambda$-categoricità implica la λ-categoricità.

Proposizione 11. *Se* T *è una teoria* $p \cdot k$*-categorica e ha modelli saturati di cardinalità* k*, allora* T *è* k*-categorica.*

Dimostrazione. Deriva dalla proposizione 10. ☐

Teorema 31. *Se* T *è* ω*-stabile e* λ *è un cardinale più che numerabile, allora* T *è* λ*-categorica se e solo se è* $p \cdot \lambda$*-categorica.*

Dimostrazione. Il teorema discende dalla proposizione precedente considerando che una teoria ω-stabile ha modelli saturati in ogni cardinalità. ☐

> *Sotto l'ipotesi di* ω*-stabilità Marcja e Mangani dimostrarono che* λ*-categoricità e* $p \cdot \lambda$*-categoricità si equivalgono per* $\lambda > \aleph_0$*. In questo risultato un'implicazione è ovvia: è chiaro che strutture isomorfe hanno le stesse algebre dei definibili. Il viceversa è un risultato profondo di per sé: se tutti i modelli di cardinalità* λ *di una teoria completa hanno la stessa algebra dei definibili allora sono isomorfi tra loro, ciò è notevole, infatti una condizione apparentemente più debole, l'isomorfismo delle algebre dei definibili, ne implica una apparentemente più forte, l'isomorfismo di tutti quei modelli. Però una volta dimostrato questo, il concetto di* $p \cdot \lambda$*-categoricità diventa meno importante, almeno per le cardinalità maggiori di* $\aleph_0$*. Infatti la doppia implicazione non vale nel caso di* $\aleph_0$*. Ciò ha creato un certo interesse attorno al tema della* $p \cdot \aleph_0$*-categoricità.*
> Carlo Toffalori, intervista del 22/05/2022

Questo è il punto di arrivo di [81]. Rimaneva aperto il problema di determinare se esistessero teorie $p \cdot k$-categoriche che non fossero categoriche in qualche cardinale $k > \aleph_0$, eliminando l'ipotesi di ω-stabilità.

Questo problema viene risolto da Daniel Lascar che, in visita presso il Dipartimento di Matematica di Firenze, si interessa alla questione sollevata da Mangani e Marcja in [81]. Lascar e Baldwin, in una comunicazione privata, osservano che l'esistenza di un solo tipo di isomorfismo per l'algebra dei definibili dei modelli di una teoria implica l'ω-stabilità. Pertanto vale il seguente risultato frutto della collaborazione dei logici del dipartimento di matematica di Firenze con Lascar e Baldwin[4].

[4] Ciò si deduce da quanto riportato in nota in [87] e nel teorema 1.2 di [82].

Proposizione 12. *Se T è $p \cdot \lambda$-categorica in qualche cardinale λ più che numerabile, allora T è λ-categorica.*

Intanto però Annalisa Marcja continua ad indagare la stessa linea di ricerca iniziata con Mangani con l'intento di fornire una caratterizzazione algebrica delle teorie *superstabili.*

4.8.3 Una caratterizzazione algebrica delle teorie superstabili

Il concetto di ω-stabilità che abbiamo trattato può essere generalizzato a qualsiasi cardinale λ. Una teoria è quindi λ-stabile se per ogni modello $\mathfrak{A} \models T$ e ogni $X \subseteq A$ tale che $|X| \leq \lambda$ si abbia $|S(\mathcal{B}(X))| \leq \lambda$, dove $S(\mathcal{B}(X))$ è lo spazio dei tipi completi su X. Una teoria si dice *stabile* se è $2^{\aleph_0} - stabile$.

Definizione 54. Una teoria T è *superstabile* se T è stabile in ogni cardinalità λ tale che $k \geq 2^{\aleph_0}$.

In [87] per fornire una caratterizzazione algebrica della superstabilità si introduce un rango di Shelah relativo ad un cardinale λ.

Definizione 55. Si dice *rango di Shelah* relativo a λ per un'algebra di Boole $\mathcal{B}$, una funzione $R^\lambda_B : B \to On^*$ che soddisfa le seguenti proprietà:

(R_1) $R^\lambda_B(b) \geq 0$ se e solo se $b \neq 0$;

(R_2) se δ è un ordinale limite, $R^\lambda_B(b) \geq \delta$ se e solo se $R^\lambda_B(b) \geq \alpha$ per ogni $\alpha < \delta$;

(R_3) $R^\lambda_B(b) \geq \alpha + 1$ se e solo se per ogni $\mu < \lambda$ esiste un insieme $\{p_i\}_{i \leq \mu}$ di ultrafiltri che contengono b, tali che per ogni $i \leq \mu$ e per ogni $y \in p_i$, $R^\lambda_B(y) \geq \alpha$.

Se $R^\lambda_B(b) \geq \alpha$ per ogni α allora $R^\lambda_B(b) = \infty$. Infine $R^\lambda(\mathcal{B})$ sta per $R^\lambda_B(1)$.

Il rango appena definito e il concetto di algebra di Boole superatomica sono gli ingredienti necessari per la caratterizzazione algebrica delle teorie superstabili. Indichiamo con $S(\mathcal{B})$ l'insieme degli ultrafiltri di $\mathcal{B}$.

Definizione 56. Un elemento $a \in B$, $a \neq 0$, si dice λ-atomo se:

$$|p \in S(\mathcal{B}) : a \in p| < \lambda.$$

La definizione data generalizza la proprietà secondo la quale ogni atomo è contenuto in un unico ultrafiltro.

Definizione 57. $\mathcal{B}$ è detta λ-atomica se per ogni $x \in B$, $x \neq 0$, esiste un λ-atomo a tale che $a \leq x$. $\mathcal{B}$ è λ-*libera da atomi* se non ha λ-atomi.

Definizione 58. $\mathcal{B}$ è detta super-λ-atomica se ogni immagine omomorfa di $\mathcal{B}$ è λ-atomica.

A questo punto si può dimostrare che il rango introdotto fornisce una caratterizzazione delle algebre superatomiche.

Proposizione 13. *$\mathcal{B}$ è super-λ-atomica se e solo se $R^{\lambda^+}(\mathcal{B}) < \infty$.*

Grazie alla proposizione precedente si può dimostrare il seguente teorema che è il punto di arrivo di [87].

Teorema 32. *T è superstabile se e solo se, per ogni $\mathfrak{A} \models T$, $\mathcal{B}(A)$ è super-$(2^{\aleph_0})^+$-atomica.*

4.8.4 Aleph-1–spettro booleano e stabilità

Continuando nello studio dell'algebra dei definibili, Mangani e Marcja in [82] compiono un ulteriore passo avanti nello studio della stabilità. Per farlo si concentrano ancora sui tipi di isomorfismo delle algebre dei definibili. Nella definizione seguente T è una teoria completa con l'eliminazione dei quantificatori in un linguaggio contabile e λ è un cardinale infinito.

Definizione 59. Chiamiamo λ-spettro booleano di T, indicato con $Spec_k(T)$, l'insieme dei tipi di isomorfismo delle algebre dei definibili $\mathcal{B}(M)$ dove M è il dominio di un modello $\mathfrak{M} \models T$ e $|M| = \lambda$.

In base a ciò che abbiamo visto nei paragrafi precedenti, come frutto della collaborazione tra Mangani, Marcja, Lascar e Baldwin, possiamo affermare che, per $\lambda \geq \aleph_1$, si ha $|Spec_k(T)| = 1$ se e solo se la teoria T è λ-categorica.

Mangani e Marcja in [82] danno una caratterizzazione delle teorie stabili e superstabili tramite lo spettro booleano facendo uso del concetto di albero di un'algebra di Boole.

Definizione 60. Un sottoinsieme $\mathcal{T}$ di un'algebra di Boole $\mathcal{B}$ si dice *albero* se valgono le seguenti condizioni:

1. $0 \in \mathcal{T}$, $1 \in \mathcal{T}$;
2. per ogni $x \in \mathcal{T}$ l'insieme $\hat{x} = \{y \in \mathcal{T} : y <^* x\}$ è ben ordinato. ($<^*$ denota l'ordine inverso rispetto a quello di $\mathcal{B}$, dunque $y <^* x$ sta per $x < y$)

Il tipo di ordine di $\hat{x}$ (rispetto all'ordine inverso di quello di $\mathcal{B}$) è detto *ordine* di x ed è indicato con il simbolo $o(x)$. Un *ramo* di un albero $\mathcal{T}$ è un sottoinsieme totalmente ordinato e massimale di $\mathcal{T}$. La *lunghezza* di un ramo X è definita come il $\sup\{o(x) : x \in X\}$. Un α-*livello* di $\mathcal{T}$ è l'insieme U_α di tutti gli elementi di $\mathcal{T}$ che hanno ordine α.

Definizione 61. Se λ è un cardinale e α un ordinale, $\mathcal{T}$ è un (λ, α)-albero se ogni ramo di $\mathcal{T}$ ha lunghezza α e ogni elemento di $\mathcal{T}$ ha esattamente λ successori immediati a due a due disgiunti.

Se una teoria T ha un modello $\mathfrak{M}$ tale che $\mathcal{B}(M)$ contiene un albero $\mathcal{T}$ diciamo che T contiene $\mathcal{T}$.

Le definizioni precedenti conducono al prossimo teorema che è il contributo dato da Marcja e Mangani in [82] alla stabilità:

Teorema 33.

- *T è stabile se e solo se per ogni $\mathcal{B} \in Spec_{\aleph_1}(T)$, $\mathcal{B}$ non contiene nessun $(2, \omega_1)$-albero.*
- *T è superstabile se e solo se per ogni $\mathcal{B} \in Spec_{\aleph_1}(T)$, $\mathcal{B}$ non contiene né un $(2, \omega_1)$-albero né un $(2, \omega)$-albero.*
- *T è ω-stabile se e solo se per ogni $\mathcal{B} \in Spec_{\aleph_1}(T)$, $\mathcal{B}$ non contiene nessun $(2, \omega)$-albero, se e solo se ogni $\mathcal{B} \in Spec_{\aleph_1}(T)$ è superatomica, se e solo se ogni $\mathcal{B} \in Spec_{\aleph_0}(T)$ è superatomica.*

4.9 Epilogo e ulteriori sviluppi

Il lavoro fatto da Marcja e Mangani negli articoli che abbiamo citato è stato importante sia per le collaborazioni con esperti internazionali di teoria dei modelli, sia per la creazione di un ambiente fecondo per lo studio e la ricerca nell'ambito dell'Università di Firenze.

> *Queste ricerche testimoniano la brillantezza dello spirito di Mangani, la capacità di spunti e idee nuove. C'era inoltre un gruppo di persone che, stimolate da Mangani, collaborarono con lui: Annalisa Marcja, Sauro Tulipani, Daniele Lacava, Donato Saeli e poi in seguito Daniele Mundici. Mundici era professore nella scuola secondaria, si presentò a Mangani il quale gli diede completa fiducia sin dall'inizio.*
> Carlo Toffalori, intervista del 22/05/2022

In questo contesto varie linee di ricerca sono state portate avanti nell'ambito della Teoria dei Modelli. In particolare altre connessioni tra i tipi di isomorfismo delle algebre dei definibili e le proprietà strutturali delle teorie sono state successivamente indagate, in particolare nei lavori [88], [89] e [136].

Capitolo 5

La Logica oltre la ricerca. Programmi scolastici e test di Logica.

In questo capitolo ci occuperemo dell'influenza che hanno avuto le ricerche in Logica, portate avanti da studiosi italiani fra gli anni '60 e gli anni '80, nell'ambiente culturale italiano *esterno* alla ricerca in Logica. In particolare vedremo come la Logica è entrata a far parte dei corsi universitari e dei programmi scolastici italiani. Nell'ultima parte del capitolo parleremo anche dei test di Logica per l'ingresso ai corsi universitari. Si tratta di un tema controverso e apparentemente lontano dal lavoro dei logici italiani. Tuttavia anche i *test* hanno rappresentato uno dei canali attraverso i quali la Logica Matematica è entrata nella cultura italiana.

5.1 L'insegnamento della Logica nelle Università.

Già dai primi anni della rinascita della Logica in Italia, a metà degli anni '60, accanto al lavoro di ricerca e studio, i fautori della rinascita si occupano anche di insegnare Logica in corsi universitari e in altri contesti come la Scuola Estiva di Varenna (1968) o la Scuola di Specializzazione di Siena.

Il primo corso di Logica in Italia dopo la scuola di Peano risale però a un periodo precedente agli anni '60. Si tratta del corso tenuto da un sacerdote dell'Ordine dei Predicatori: padre Józef Maria Bochenski.

5.1.1 Prodromi

Nell'anno accademico 1935/36 Józef Bochenski insegna Logica presso il *Pontificium Institutum Internationale Angelicum* situato nell'antico monastero domenicano dei santi Domenico e Sisto sul colle Esquilino di Roma. L'isituto, denominato anche semplicemente *Angelicum* e ora noto sotto il nome di *Pontificia università "San Tommaso d'Aquino"*, affonda le sue radici nel primo *studium* conventuale domenicano fondato a Roma nel 1222 presso il convento di Santa Sabina. L'ordine dei frati predicatori, detti comunemente *domenicani*, era stato infatti riconosciuto da papa Onorio III nel 1217, come ordine di frati dediti allo studio.

Il volume *Nove lezioni di logica simbolica* pubblicato da Bochenski nel 1938 è la testimonianza degli insegnamenti di Logica di Bochenski di quegli anni.

Le lezioni furono tenute da Bochenski in lingua latina mentre il testo viene pubblicato in Italiano grazie all'aiuto del Dott. Angelo Ferrari, professore del Liceo "G. Cesare" di Roma che Bochenski nella prefazione ringrazia per aver voluto rivedere il suo *ben povero italiano* [15].

I riferimenti scientifici di Bochenski sono Tarski, Whitehead e Russell, Hilbert e Bernays e in particolar modo Łukasiewicz che egli apprezza per il lavoro di *recupero* e valorizzazione della Logica antica. L'importanza data al simbolismo di Łukasiewicz è un primo elemento che pone Bochenski in discontinuità sia con la precedente scuola di Peano sia con la successiva rinascita della Logica

Italiana. In [15] si afferma che, rispetto al simbolismo di Łukasiewicz, il linguaggio simbolico di Peano è *molto più complesso e insieme poco rigoroso* pur essendo stato *perfezionato da Russell e divulgatissimo oggi in ogni paese.*

Un altro elemento di discontinuità con la Logica Italiana degli anni '60 riguarda il rapporto con l'algebra. Abbiamo visto nel capitolo sull'Algebra della Logica come sia importante questo tema per i logici italiani e come molti logici operanti nei dipartimenti di Matematica siano anche algebristi. Bochenski invece sottolinea la distinzione netta tra le due discipline:

> *Non mancano autori che accusano la logica di "algebrismo" e di "tendenze matematiche". È un grosso errore: la logica simbolica non è algebra perché le sue variabili non sono variabili algebriche. Occorre tuttavia notare che l'accusa di "algebrismo" è causata da un algebrismo vero e proprio degli antichi logici simbolici, come ad esempio quello di G. Boole, uno dei fondatori della nostra scienza. Questi pensava che si può trattare la logica come una specie di Matematica. Oggi siamo già liberi da questo pregiudizio* [15].

Nella prefazione di [15], Bochenski delinea un interessante quadro delle posizioni assunte dai filosofi suoi contemporanei nei riguardi della Logica simbolica, in bilico tra "accoglienze entusiastiche e critiche acerbe". Da una parte i sostenitori della logica simbolica (chiamata anche da Bochenski *logistica*, *logica ideografica* o *logica matematica*) convinti della sua superiorità rispetto alla logica classica e della sua efficacia nel risolvere qualsiasi problema filosofico, in una prospettiva di positivismo radicale. Dall'altra i diffidenti verso il nominalismo positivistico e l'"aspetto simbolico della nuova scienza", i quali, "ad onta della norma più elementare di ogni scienza e di ogni filosofia, hanno giudicato la logica simbolica senza neppure conoscerla bene".

Dal canto suo Bochenski mette in guardia il lettore contro queste due posizioni estreme ed enfatizza l'importanza della Logica come "potentissimo strumento di controllo e di analisi del pensiero" che però non deve essere vista come "pietra filosofale capace di sanare tutti i dolori" e che soprattutto deve essere considerata come "continuazione legittima d'uno sforzo secolare dell'umanità" e quindi in continuità e non in opposizione rispetto alla grande eredità della Logica greca e scolastica.

Il corso di Bochenski ha come argomenti: la Logica delle proposizioni con le tavole di verità da egli dette *matrici*, il calcolo dei predicati, l'assiomatizzazione, l'approccio alle proposizioni mediante gli insiemi (che egli chiama *classi*) e un'ultima parte riguardante la Logica delle relazioni, punto di arrivo delle nove lezioni che introducono la Logica simbolica.

Non c'è quindi alcun accenno alle ricerche contemporanee in Logica e in particolare al Teorema di Gödel il cui livello è ben superiore a quello delle *nove lezioni.*

Inoltre Bochenski chiarisce nella prefazione che il manuale non contiene idee originali ma un insieme di dati che si credono "generalmente ammessi e certi nello stato presente della logica simbolica".

Circa vent'anni dopo il testo di Bochenski, nel 1957, viene pubblicato in Italia un altro manuale di Logica, *Introduzione alla Logica Simbolica* di Alberto Pasquinelli. Si tratta ancora di un testo introduttivo e privo di ricerche originali. Pasquinelli era allievo di Geymonat e aveva trascorso un periodo di studio negli Stati Uniti in cui aveva seguito le lezioni di Rudolf Carnap. Il testo di Pasquinelli si inserisce dunque nell'ambiente culturale che darà luogo alla rinascita della Logica sotto l'egida di Ludovico Geymonat.

> *Subito dopo la guerra si sono avuti alcuni lavori di logica di Carruccio; ma non saprei darle indicazioni precise...*

Sono parole di Geymonat in una lettera privata datata 4 ottobre 1982 e mostratami da Paolo Pagli. Geymonat in questa lettera testimonia la scarsità di lavori di Logica in Italia dopo Peano e afferma quanto segue.

> *Ma la vera rinascita della logica è dovuta secondo me ad altri. Per primo debbo ricordare il libretto di Pasquinelli "Introduzione alla logica simbolica" (Einaudi 1957), seguito qualche anno più tardi (1961) dal volume "Introduzione ai problemi dell'assiomatica" di Agazzi, e poi dai volumi di logica (Casari, Quine, ecc.) inseriti nella mia collana di Filosofia della Scienza edita da Feltrinelli*

Geymonat si interessa alla *nuova logica* [1] tramite i suoi contatti con i neopositivisti. Già nel '36 egli pubblica nella "Rivista di Firenze" un articolo dal titolo *Logica e Filosofia della Scienza.*

[1] Il termine *nuova logica* viene spesso usato (si veda [85]) come sinonimo di Logica Matematica.

Nel ’41 recensisce le *Nove lezioni* di Bochenski e nel ’42 propone a Einaudi la pubblicazione di un’antologia delle opere di Frege che vedrà la luce solo sei anni dopo. Nel ’53 Geymonat viene chiamato all’università di Pavia sulla cattedra di Storia della Filosofia e assume l’incarico di Logica, il primo in assoluto in una facoltà umanistica a detta di Mangione [85]. Nel ’55 Geymonat si sposta all’Università di Milano sulla prima cattedra italiana di Filosofia della Scienza, anche in questo caso con un incarico di Logica.

Il 1957 oltre a essere l’anno di pubblicazione del testo di Pasquinelli, è anche l’anno in cui Ettore Casari tiene a Torino il corso *Logica dei predicati* su iniziativa del Centro di Studi Metodologici, il *primo corso della nuova logica* secondo Lolli.

Il testo di queste lezioni era stato preparato da Casari mentre si trovava a Münster presso l’*Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforshung* dove si era recato per studiare con Hermes, Ackermann e Hasenjaeger, su sollecitazione di Geymonat. Durante il soggiorno a Münster Casari amplia ulteriormente il testo delle lezioni del 1957 giungendo alla stesura di *Lineamenti di Logica Matematica*, pubblicato come volume di apertura della collana Feltrinelli di Filosofia della Scienza diretta da Geymonat.

Secondo Lolli il testo di Casari può essere considerato il primo riferimento di buon livello per gli studiosi italiani che si affacciano nel mondo della Logica Matematica nei primi anni ’60. Ma Lolli riferisce che lo stesso Casari, già dopo pochi anni dalla pubblicazione, non consigliava i *Lineamenti* ai giovani borsisti del gruppo di logica del CNR, considerandolo insufficiente per la loro formazione. In effetti anche il testo di Casari, come quelli di Pasquinelli e Bochenski, non va oltre la Logica dei predicati. Tuttavia Michele Abrusci, che fu allievo di Casari, in [2], ha segnalato un aspetto peculiare della trattazione dei *Lineamenti* che avvicina questo testo a una concezione moderna della Logica. Si tratta del secondo capitolo della terza parte di [23], in cui Casari tratta la Logica dei predicati del secondo ordine:

> *Un primo vero e proprio ampliamento della logica dei predicati è ottenibile mediante l’abbandono della restrizione sinora accettata alla possibilità di quantificare soltanto le variabili soggettive, mediante l’ammissione, cioè, della quantificazione anche delle variabili predicative. La teoria logica risultante da questa generalizzazione è comunemente nota come logica dei predicati del secondo ordine.* [23]

Inoltre Casari, nel terzo paragrafo dello stesso capitolo, presenta il Teorema di Gödel come teorema di incompletezza della Logica del secondo ordine. Questo approccio non si ritrova nel resto dell’insegnamento della Logica negli anni ’60 e ’70 in Italia.

5.1.2 I corsi universitari negli anni ’60 e ’70

Nel 1961 Ettore Casari ottiene la libera docenza in Filosofia della Scienza grazie alla pubblicazione del già citato *Lineamenti* e delle note su *Computabilità e ricorsività: Problemi di logica matematica* per un volume speciale dell’Annuario della Scuola di Studi Superiori sugli Idrocarburi dell’Eni per l’anno 1958-59.

La Scuola di studi superiori sugli idrocarburi viene fondata nel 1958 a San Donato Milanese da Enrico Mattei e Marcello Boldrini. *Rifuggendo dall’impostazione rigidamente “americana” delle businnes school, la “Scuola di San Donato” si distinse per un approccio “umanistico” proprio nella preparazione dei tecnici, che si volevano mettere in grado di agire autonomamente in contesti spesso difficili e diversi rispetto a quelli europei, costruendo così un patrimonio immateriale strategico per le sorti e lo sviluppo del gruppo* [6]. In questo contesto assume un significato particolare la scelta di inserire nel piano di studi della *Scuola di San Donato* un corso di *Fondamenti di logica matematica* nel quale trovano posto le lezioni di computabilità e ricorsività compendiate nel volume suddetto.

Il primo corso della *nuova logica* in una università italiana viene tenuto da Ettore Casari nel 1961 a Pavia. Nello stesso anno Geymonat si trasferisce a Milano sulla cattedra di Filosofia della Scienza e nella stessa sede viene istituito un corso di Logica e viene assegnato a lui. In realtà le lezioni saranno svolte per metà da Geymonat e per metà da Casari. *In quel primo mezzo corso di Logica Casari presenta in modo sistematico la logica algebrica, che fino ad allora era stata il suo interesse principale. Fu in seguito alla dimostrazione di Cohen dell’indipendenza dell’ipotesi del continuo che sposterà maggiormente la sua attenzione verso la teoria degli insiemi* [67].

Il sodalizio fra Geymonat e Casari è uno dei momenti cruciali per la rinascita della Logica in Italia e per il suo ingresso nel mondo accademico. Geymonat infatti aveva visto in Casari il giovane studioso che poteva aiutarlo nel suo progetto di rinnovamento della cultura scientifica italiana e per questo lo aveva incoraggiato nei suoi studi di Logica a Münster.

Nel 1961 Corrado Mangione era assistente di Geymonat a Milano sulla cattedra di Logica e si occupava di stilare le dispense e preparare le esercitazioni del corso. Il libro di testo era *Lineamenti* di Casari. Maria Luisa Dalla Chiara, dopo la laurea in Filosofia a Padova nel 1961, si trasferì, su consiglio di Geymonat, a Milano per frequentare un corso di perfezionamento in Logica e Filosofia della Scienza. Dalla Chiara si ritrovò quindi ad essere studentessa in quel primo corso di Logica tenuto da Geymonat con Casari e Mangione.

> *Io ero, per la prima volta nella mia vita, studentessa di Logica e Casari era, per la prima volta nella sua vita, professore di Logica.* (Maria Luisa Dalla Chiara, intervista in [41])

Anche nelle facoltà scientifiche, negli anni '60 iniziano i corsi di Logica tenuti dai ricercatori che gravitano attorno a Geymonat. Evandro Agazzi nel 1963 ottiene la libera docenza in Filosofia della Scienza e poi, nel 1966, in Logica. Agazzi ha insegnato Logica Matematica presso la facoltà di Scienze dell'università di Genova e Logica Simbolica alla Scuola Normale Superiore di Pisa.

Nell'anno accademico 63/64, Roberto Magari, che si era appena unito al gruppo di Geymonat insieme agli altri Fiorentini—Mangani e Servi—ebbe l'incarico del corso di Logica Matematica nell'istituto di Matematica dell'Università di Firenze. Le lezioni di Magari hanno avuto un'importanza notevole per orientare verso la Logica altri giovani studiosi. Fra di essi Annalisa Marcja e Paolo Pagli che, dopo aver iniziato Fisica a Firenze, al terzo anno cambiò e si iscrisse a Matematica.

> *Furono diversi i motivi, ma ciò che mi convinse fu il corso di logica di Magari che seguii con Marcja.* (Paolo Pagli, intervista in [41])

Sempre in quegli anni, Magari tiene anche un corso di Logica a Roma nell'Istituto di Matematica per volontà di Lucio Lombardo Radice:

> *Ricordo ancora che io andavo alla stazione Termini in macchina a prendere Magari che arrivava da Firenze e lo accompagnavo a far lezione all'Istituto di Matematica.* (Carlo Cellucci)

Durante gli anni '70 i membri del gruppo CNR di Geymonat acquistano una certa autonomia scientifica e iniziano ad organizzare dei gruppi di ricerca nelle rispettive sedi, ciascuno con i rispettivi allievi, temi di ricerca e corsi universitari.

L'esempio più emblematico è il gruppo di Siena creatosi attorno a Roberto Magari che nel 1967 diventa professore di Algebra a Ferrara e nel 1971 si sposta a Siena nell'appena nato istituto di Matematica (vedi capitolo sull'Algebra della Logica). Siena diventa quindi il centro più importante per la comunità dei logici italiani, gli *Incontri di Logica* di cui abbiamo già sottolineato la rilevanza, sostituiscono in un certo senso le riunioni del gruppo del CNR e si aprono ad un maggior numero di persone.

A Torino, il corso di Logica Matematica per il corso di laurea in Matematica viene istituito nel 1970 e affidato a Flavio Previale, si va così a creare una scuola di Logica della quale uno dei primi esponenti è Gabriele Lolli, seguito poi da Piergiorgio Odifreddi e Franco Parlamento.

A Firenze la Logica è presente sia a Filosofia sia a Matematica; a Filosofia dopo il trasferimento di Casari nel '68, a Matematica grazie a Mangani che diventa ordinario di Algebra.

Un discorso a parte merita la scuola di Logica sviluppatasi a Napoli grazie a Pantaleo Aloisio, anch'egli presente ad alcune delle riunioni del gruppo di Geymonat. Aloisio era un *personaggio eccentrico che si interessava di arte e logica, teneva segreta la data di nascita* [67] e ha insegnato Logica per quaranta anni agli studenti di Matematica e Fisica dell'università di Napoli Federico II senza essere laureato.

5.1.3 Diffusione dei corsi di Logica nelle Università Italiane.

Per avere un'idea di come si diffondono i corsi di Logica in Italia tra il periodo pioneristico dei primi anni '60 e la fine degli ani '70 abbiamo consultato i primi numeri della rivista *Notizie di Logica* pubblicata a Siena a partire dal 1982 (vedi primo capitolo di introduzione storica).

Nel primo numero del notiziario [98] si discutono gli esiti di un questionario che era stato inviato, dalla redazione della rivista, agli studiosi di logica italiani di varie sedi universitarie. Vengono compilati 23 questionari che si riferiscono agli insegnamenti attivati nell'anno accademico 1980/81 in 25 Istituti di 14 Atenei. Riportiamo un quadro generale degli insegnamenti di logica basandoci su quanto scritto sul primo numero del notiziario e sugli aggiornamenti apportati nei numeri successivi [98], [99]:

Sede	**Istituto**	**Nome del corso**	**Docente**
Bologna	Matematica	Logica Matematica	Bruno D'Amore
	Filosofia	Logica	Giorgio Sandri
		Storia della Logica	Maurizio Ferriani
		Filosofia del Linguaggio	Eva Ricardi
Brescia	Matematica	Logica Matematica	Giovanni Melzi
Catania	Matematica	Matematiche Superiori	Giovanni Dantonio
Cosenza	Matematica	Logica Matematica	Silvio Bozzi
	Filosofia	Logica	Sergio Bernini
Firenze	Matematica	Strutture Algebriche	Piero Mangani
	Filosofia	Logica	M. Luisa Dalla Chiara
		Filosofia della scienza	Ettore Casari
Genova	Matematica	Logica Matematica	Marco Borga
		Programmazione	Egidio Astesiano
	Filosofia	Logica	Attila Faj
		Istituzioni di Matematica	Dario Palladino
		Filosofia della Scienza	Evandro Agazzi
		Storia della Matematica	Paolo Freguglia
Milano	Matematica	Logica Matematica	Giancarlo Meloni
	Filosofia	Logica	Corrado Mangione
		Filosofia della Scienza	Giulio Giorello
		Filosofia del Linguaggio	Andrea Bonomi
	Filosofia (Cattolica)	Logica Matematica	Sergio Galvan
	Scienze Politiche (Cattolica)	Logica	Carlo Felice Manara
Napoli	Matematica	Logica Matematica	Pantaleo Aloisio
	Fisica	Ricerca Operativa	
	Fisica Teorica	Epistemologia e Metodologia	Salvatore Guccione
	Filosofia	Logica	Michele Malatesta
		Filosofia della Scienza	Concetta Orsi
		Filosofia del Linguaggio	Raffaele Pucci
Palermo	Filosofia	Filosofia della Scienza	Marco Mondadori
Padova	Matematica	Ist. di Logica Matematica	Giovanni Sambin
		Logica Matematica	Ruggero Ferro
		Algebra di Boole	Annalisa Bossi
	Filosofia	Logica	Mario Mignucci
	Ingegneria	Automi e Linguaggi Formali	Enrico Pagello
	Psicologia (Magistero)	Logica	Pierdaniele Giaretta
Parma	Matematica	Logica Matematica	Mario Servi
		Fondamenti di Matematica	Carlo Marchini
		Matematiche Elementari	Mario Servi
	Filosofia (Magistero)	Logica	Lorenzo Pozzi
Pisa	Matematica	Algebra Superiore	Marco Forti
		Matematiche Complementari	Giovanni Prodi
	Sci. dell'Inf.	Logica Matematica	Giuseppe Longo
	Scuola Normale Superiore	Analisi (Seminario)	Ennio De Giorgi
	Ist. Elaboraz.	Logica e Fondamenti...	Vincenzo Manca
	Informaz. (CNR)	Logica e Fondamenti...	Vincenzo Manca
	Filosofia	Storia della Logica (I e II)	Vittorio Sainati

Roma	Matematica	Logica Matematica	Giuseppe Jacopini
		Matematiche Complementari	Anna Labella
		Matematiche Superiori	Maurizio Fattorosi Barnaba
	Filosofia	Logica	Carlo Cellucci
Siena	Matematica	Logica Matematica	Fabio Bellissima
		Algebra Superiore	Roberto Magari
		Algebra di Boole	Massimo Mirolli
		Matematiche Elementari	Giovanni Sambin
	Filosofia	Filosofia della Scienza	Claudio Pizzi
Torino	Matematica	Logica Matematica	Flavio Previale
		Matematiche Complementari	Ferdinando Arzarello
	Informatica	Logica Matematica	Gabriele Lolli
		Teoria degli Algoritmi	Simonetta Ronchi della Rocca
		Ling. Formali e Compilatori	Mario Coppo
	Filosofia	Filosofia del Linguaggio	Diego Marconi
Trento	Matematica	Logica Matematica	George Coe
		Storia delle Matematiche	Annalisa Marcja
Udine	Matematica	Logica Matematica	George Coe
		Storia delle Matematiche	Annalisa Marcja

5.1.4 Quale Logica per i Matematici?

A seguito della diffusione dei corsi di Logica nelle università italiane, inizia, nell'ambiente dei logici, una riflessione sul ruolo della Logica nei vari corsi di laurea e in particolare nel corso di laurea in Matematica.

Nel Novembre 1987 l'appena nata associazione dei logici italiani AILA promuove a Bologna una giornata di studio sull'insegnamento della Logica nei corsi di laurea in Matematica e in Scienze dell'Informazione.

Le domande fondamentali che si pongono durante l'incontro sono le seguenti:

- Si deve insegnare Logica nei corsi di laurea? Perché?
- Quale Logica insegnare?
- Come e dove? In quali corsi?

L'assemblea, com'è prevedibile, concorda sull'importanza di una preparazione di base in Logica per il laureato in Matematica; infatti, si dice, *la logica è lo strumento principale di una cultura matematica consapevole* [100].

Si individuano molti buoni motivi per i quali insegnare Logica nei corsi di laurea in Matematica e in Scienze dell'Informazione: la Logica è un ottimo strumento per affrontare problemi matematici classici come l'ipotesi del continuo, impostare in modo corretto e moderno lo studio dei fondamenti, valutare forza e limiti degli strumenti formali, con i risultati di impossibilità, chiarire il concetto di linguaggio formale e di calcolabilità, particolarmente importanti in informatica. Infine le notevoli applicazioni della Teoria dei Modelli all'algebra e all'analisi contribuiscono a rendere la Logica ancora più importante nello studio della Matematica.

Per quanto riguarda gli argomenti da insegnare, pur nella differenza di vedute fra i vari partecipanti all'incontro, se ne individuano alcuni irrinunciabili:

1. calcolo dei predicati, come esempio principe di sistema formale;
2. teorema di completezza, per collegare sintassi con semantica, dimostrazioni con interpretazioni;
3. le limitazioni dei sistemi formali, argomento da trattare in diverse possibili declinazioni: con i teoremi di Gödel sulla indimostrabilità della coerenza e sulla incompletezza, oppure con i risultati di indipendenza in teoria degli insiemi e in algebra o infine con la non categoricità delle teorie dell'aritmetica al prim'ordine, ovvero l'esistenza di modelli non isomorfi.

Uno degli obiettivi dell'incontro del 1987 è preparare una proposta da sottoporre all'UMI riguardo l'introduzione di un corso di Logica obbligatorio nel corso di laurea in Matematica.

Su questo tema si ritorna, sulle pagine del numero successivo di *Notizie di Logica* del 1988, nell'articolo *L'insegnamento della logica nel corso di laurea in Matematica* [101]. Si considera indispensabile che il neo–laureato conosca i problemi connessi con parole chiave come *dimostrazione*, *verità*, *modello*, *assioma*, *teorema*. La Logica può fornire un importante strumento di riflessione sulla Matematica anche per la sua capacità di mantenere un *punto di vista il più possibile generale e profondo e per aver conservato vitali contatti con varie discipline* [101].

Nell'articolo viene spiegata l'importanza della Logica per ciascuno dei tre indirizzi (generale, applicativo e didattico) del corso di laurea in Matematica.

Nella Matematica pura, per le dimostrazioni di coerenza, in Aritmetica e in Analisi, i teoremi sulle limitazioni intrinseche dei sistemi assiomatici, le dimostrazioni di indipendenza in Teoria degli Insiemi e le applicazioni della Teoria dei Modelli all'Algebra e all'Analisi.

In Matematica applicata, e in particolare in Informatica, i contributi della Logica sono evidenti nel tema della calcolabilità (macchine di Turing, modelli di Herbrand, metodo di risoluzione...). Notiamo che in questa sede non si parla della corrispondenza Curry-Howard come legame tra Logica e Informatica, ciò è una traccia del fatto (già argomentato nel capitolo sulla Teoria della Dimostrazione) che gli ambienti della Logica e dell'Informatica teorica fossero ancora sostanzialmente divisi in Italia anche dopo la nascita dell'AILA.

Infine si parla del contributo che la Logica può dare alla Didattica della Matematica. *Quanto più un insegnante è consapevole della natura e dei problemi connessi con i fondamenti della matematica, tanto più può comunicare agli studenti una visione della matematica non tanto come gioco intellettuale con regole imposte d'autorità, quanto come un metodo di ricerca profondo e motivato e come un corpo di conoscenze unitario. Una seria preparazione in logica aiuta a rispondere, senza inibire la creatività degli allievi e anzi stimolandola, ad alcune questioni di matematica elementare che si pongono nell'insegnamento: il metodo assiomatico che si incontra in geometria, i risultati di impossibilità (soluzione di problemi con riga e compasso, dimostrabilità del postulato delle parallele), la differenza tra definizione, assioma e teorema, l'infinito ecc. Con l'introduzione di elementi di logica nei nuovi programmi delle scuole di ogni ordine, l'assenza di una preparazione specifica in logica matematica degli insegnanti è inammissibile* [101].

È interessante notare che i logici italiani, nel proporre all'UMI e in generale agli organi competenti, l'introduzione di un corso di Logica per i corsi di laurea in Matematica e in Informatica, insistano sul fatto che a tenere il corso debba essere uno studioso con una preparazione specifica in Logica, vedendo ovviamente in questi corsi una possibilità di diffusione e di espansione per la loro comunità. Inoltre riteniamo degna di nota la seguente citazione, per comprendere come si inserisce la diffusione dell'insegnamento della Logica nel contesto storico che abbiamo delineato in questa tesi:

> *La recente rinascita della logica italiana ci permette di affermare che è possibile coprire solo con un numero limitato di nuovi posti o trasferimenti le necessità che deriverebbero dall'introduzione di un corso di logica matematica come fondamentale.* [101]

5.2 La Logica entra nella Scuola

Un tema interessante e controverso è il rapporto tra Logica Matematica e insegnamento preuniversitario in Italia. Non è un problema che nasce nel '900, nell'epoca della rinascita della Logica, ma ha radici più antiche, come si evince dalla seguente citazione:

> *Luigi Certo lesse la sua relazione su una proposta di modifica ai programmi universitari dei futuri insegnanti di scuole secondarie. Tra l'altro insistette sull'opportunità di isituire un corso di logica matematica, obbligatorio per tutti gli studenti di matematica... la lettura della relazione fu accolta da un vivo e prolungato applauso.* (H.C. Kennedy in "Peano, storia di un matematico" descrivendo il I Congresso della Mathesis del **1898**)

La discussione sull'inclusione o meno di contenuti di Logica nei programmi preuniversitari di Matematica, e di conseguenza la questione della formazione in Logica degli insegnanti di Matematica, ha visto nel tempo posizioni contrastanti da parte dei vari soggetti coinvolti, come è stato messo in luce in diversi lavori di Viviane Durand-Guerrier.

In Francia, come in altri paesi, nel periodo della cosiddetta *matematica moderna*, negli anni '60 e '70, la Logica e la teoria ingenua degli insiemi sono state introdotte nei curricula di Matematica pre-universitari [43]. A partire dagli anni '80 la questione del ruolo della Logica nell'insegnamento della Matematica è diventata molto controversa.

Un primo tema di discussione fra gli studiosi è se la Logica debba essere considerata opposta o complementare all'intuizione. Inoltre alcuni insegnanti e anche molti matematici provenienti dall'Accademia, hanno espresso un dissenso verso l'introduzione della Logica nell'insegnamento pre-universitario. Tale avversione nasce dalla convinzione che le competenze logiche richieste dalla Matematica si acquisiscano naturalmente *facendo matematica* e non necessitino di una istruzione specifica in Logica.

Le posizioni avverse all'introduzione di contenuti di Logica espliciti sono sostenute anche da studi psicologici condotti fin dalla fine degli anni '60 e risalenti al famoso Test di Wason [141] secondo i quali *la logica formale ... non è un modello di come le persone costruiscono le loro inferenze* [62].

Questi studi sono stati portati avanti anche in Italia da Vittorio Girotto, psicologo e neuroscienziato che si è occupato di ragionamento deduttivo. In un intervento nel diciannovesimo convegno dell'UMI-CIIM svoltosi a Vicenza nel 1997 [55], Girotto ha messo in discussione, con validi argomenti, l'idea, proveniente dalla tradizione logica aristotelica e sostenuta da Piaget, che, a partire dall'adolescenza, si sviluppi negli individui una capacità deduttiva che permette di ricavare inferenze logicamente valide. All'intervento di Girotto è seguita la risposta di Lolli che, basandosi proprio sugli errori che vengono spesso commessi nei procedimenti deduttivi, insiste sull'importanza di un'educazione al ragionamento logico nel processo di formazione dell'individuo.

C'è da dire che, rispetto ad altri paesi, l'Italia ha per tradizione (già dalla fine dell'800 con Peano e Albino Nagy) una visione degli studi di Logica come strettamente legati all'insegnamento. Se ne parla ad esempio in [108] facendo riferimento alla *sovrapposizione tipicamente italiana della tematica fondazionale alla finalità didattica di perfezionare i metodi d'insegnamento e di formare gli insegnanti della scuola secondaria*; e lo afferma Peano stesso nel 1919: *già alcuni libri scolastici sono formati sulla logica matematica, ed è nel campo dell'insegnamento che questa scienza può dimostrare la sua fulgida semplicità* [108].

Molti anni dopo, la comunità dei logici italiani, formatasi negli anni della rinascita, torna a occuparsi del ruolo della Logica nell'insegnamento della Matematica, tema questo di vivace discussione tra insegnanti e ricercatori ancora oggi. La questione ha assunto, fra gli anni '80 e '90, un'importanza notevole anche negli Stati Uniti. Nel 1991, l'Association for Simbolic Logic (ASL) istituisce un comitato per la Logica e l'Educazione, formato da importanti studiosi (Barwise, Baumgartner, Davis, Henrion, Marker, Sieg, Visser, Woodruff). Il comitato dell'ASL rilascia, nel 1992, un documento sull'insegnamento della Logica che viene interamente pubblicato in Notizie di Logica nel 1992 *nella speranza che possa essere lo stimolo per l'auspicato dibattito sull'insegnamento della Logica Matematica in Italia.*

5.2.1 I logici e la Didattica della Matematica.

Fra i ricercatori in Logica che hanno operato in Italia, a partire dagli anni '70 molti si sono occupati sia di Logica sia di Didattica della Matematica, fra di essi Ferdinando Arzarello, Claudio Bernardi, Cinzia Bonotto, Ruggero Ferro, Giangiacomo Gerla, Carlo Marchini, Giuseppe Rosolini, Carlo Toffalori, Roberto Tortora.

Nell'incontro già citato del 1987 sull'insegnamento della Logica nel corso di laurea in Matematica, emerge, in vari interventi, la questione del rapporto fra Logica a livello universitario e pre–universitario. Ad esempio Giovanni Prodi, fortemente impegnato nella riforma dei programmi scolatici, fa presente nel suo intervento che, in base alla sua esperienza, c'è una grande domanda di Logica a livello pre-universitario.

La seguente frase di Prodi, ci dà inoltre l'idea di quale fosse il rapporto tra Logica e Matematica in Italia alla fine degli anni '80: *troppo pochi matematici sanno del clamoroso re–impianto della Logica in Italia negli ultimi vent'anni, e dei suoi successi, e in generale non conoscono le applicazioni della Logica alla Matematica* [101].

Anche Claudio Bernardi, presente all'incontro e impegnato su entrambi i fronti, Logica e Didattica, indica un fatto curioso relativo alla diffusione della logica nella società: *si fa un gran parlare di logica per tutti, dalle elementari alle superiori, fuorché per i matematici!* [101].

Siamo quindi in un periodo in cui la *richiesta di Logica* da parte del mondo esterno alla ricerca, in particolare da parte della Scuola, già ha iniziato a farsi sentire e probabilmente il mondo accademico reagisce a questa situazione con una certa inerzia.

Tuttavia, tra la fine degli anni '80 e l'inizio degli anni '90, la comunità dei logici italiani si fa promotrice di alcune importanti iniziative orientate ad approfondire il tema dell'insegnamento della Logica nella Scuola.

Nel 1988 si tiene a Roma l'Incontro di Logica dedicato alla Logica Matematica nella Didattica. Fra i relatori ci sono personalità di rilievo internazionale per la Logica (R. Smullyan) e per la Didattica della Matematica (H. Freudenthal). Fra i relatori italiani ci sono logici provenienti dall'esperienza della rinascita della Logica (Cellucci), ricercatori che hanno interessi a cavallo tra Logica e Didattica (Arzarello, Ferro e Gerla) e studiosi impegnati nel rinnovamento dell'insegnamento della Matematica (Prodi, Villani).

Nel presentare gli atti del convegno, Bernardi riassume la situazione *ben nota: il fatto che la logica matematica sia esplicitamente citata nei nuovi programmi per tutti i livelli scolastici, ha determinato una diffusa "richiesta di logica" nelle attività di aggiornamento... molti logici si sono così trovati coinvolti nella didattica, dapprima in maniera occasionale, poi, almeno per qualcuno, in modo sistematico e più ragionato* [5]. Bernardi evidenzia, a consuntivo del convegno, che, nonostante il vivace interesse per il tema dell'insegnamento della Logica nella Scuola da parte di tutti gli attori coinvolti (logici, esperti di didattica e, naturalmente, insegnanti), le posizioni espresse nei vari interventi non sono apparse ancora ben consapevoli e definite. Emergeva già l'annosa questione di evitare un inserimento di argomenti di Logica nel curriculum di Matematica in modo *superficiale e matematicamente non rilevante (se non addirittura scorretto). Se questo dovesse verificarsi, assisteremmo, come in qualche misura è già accaduto per la teoria degli insiemi, prima al fallimento di certe esperienze, e poi a vigorose e malinconiche "marce indietro".* [5].

Nell'incontro emerge che la situazione all'estero non è molto diversa rispetto all'Italia: Josette Adda descrive la situazione in Francia e David Pimm in Inghilterra. Ciò è in linea con con quanto evidenziato da Durand-Guerrier. La questione dell'inserimento altalenante dei contenuti di Logica nei curricula scolastici di Matematica ha riscontri anche nelle Fiandre come è stato recentemente studiato in [60].

Dopo l'incontro di Logica del 1988, si hanno in Italia altre iniziative didattiche che coinvolgono la comunità dei logici. Dal 1990, sulla rivista *Notizie di Logica*, inizia la rubrica *Logica e Didattica* a cura di Ferro e Gerla. I curatori esprimono la convinzione che il rapporto Logica–Didattica non debba *esaurirsi nella mera divulgazione o, peggio, nella solita tripletta "connettivi logici–tavole di verità–circuiti elettrici"*. Si propone pertanto, per la parola *Logica*, un'accezione più ampia che riesca ad abbracciare temi importanti come l'*intelligenza artificiale*, l'*epistemologia* e i *fondamenti*.

Possiamo già ravvisare in questo auspicio una traccia di una questione che non si è in effetti mai risolta. La parola *Logica* non ha assunto, nel contesto dell'insegnamento secondario, questa accezione allo stesso tempo ampia, profonda ma anche ben definita e forse questo è uno dei motivi per cui, come vedremo, è definitivamente scomparsa dalle recenti *Indicazioni Nazionali*.

Nel 1992 l'AILA fonda un gruppo di lavoro che ha come scopo la progettazione di una settimana residenziale di presentazione della Logica Matematica agli insegnanti delle scuole superiori. L'iniziativa è promossa da Lucia Ciarrapico, Ispettrice dell'allora Ministero della Pubblica Istruzione. Il testo del programma proposto è il seguente:

> *Al fine di offrire le necessarie basi per lo sviluppo degli argomenti di Logica previsti dai nuovi programmi ministeriali delle scuole superiori (distinzioni tra linguaggio e metalinguaggio, tra semantica e sintassi, tra linguaggio naturale e linguaggio formale, tra ragionamento comune e ragionamento assiomatizzato, nel primo biennio, problemi di coerenza e di soddisfacibilità di teorie assiomatiche, poi) sembra opportuno offrire ai docenti un'ampia prospettiva sui seguenti temi: il principio di induzione, molteplicità delle cardinalità transfinite, differenza tra sintassi e semantica, tra linguaggio e metalinguaggio, concetto di struttura, linguaggio formale, teoremi di adeguatezza e completezza, teoremi di incompletezza, assiomatizzazione e consistenza delle teorie matematiche.*

Il corso è articolato in cinque giorni, nelle mattine vengono svolte lezioni teoriche mentre i pomeriggi sono dedicati ad attività di gruppo di esercitazione, approfondimento e riflessione sulle ricadute didattiche dei contenuti appresi. Il corso si svolge a Maglie, in procincia di Lecce, presso il Liceo F.

Capece, nei giorni 22-26 novembre 1993. Dopo qualche mese i partecipanti al corso si ritrovano a Otranto per tre giorni (21-23 aprile 1994) di revisione del lavoro fatto.

Dall'esperienza della settimana di aggiornamento sulla Logica nasce, nel 1994, il volume sull'*Insegnamento della Logica* [32] a cura di Lucia Ciarrapico e Daniele Mundici. Il testo contiene contributi di Dario Palladino, Claudio Bernardi, Carlo Marchini, Anna Sgherri Costantini, Carlo Cellucci, Franco Montagna, Ruggero Ferro, Ferdinando Arzarello e Daniele Mundici. I temi toccati sono: insiemi, principio di induzione, formalizzazione del linguaggio, metodo ipotetico–deduttivo, dimostrazione e deduzione formale, concetti di modello e di verità, completezza, compattezza, categoricità e infine i teoremi di incompletezza di Gödel.

Nella prefazione, scritta da Ciarrapico e Mundici, si sottolineano due aspetti che ci sembrano importanti in una prospettiva storica. Il primo è l'urgenza di introdurre argomenti di Logica a scuola come conseguenza dei rapporti tra Logica e Informatica:

> *Negli ultimi decenni di questo secolo i rapporti della Logica con le scienze dell'informazione sono andati sempre più assomigliando ai rapporti tra analisi matematica e scienze fisiche nel secolo scorso. Il crescente ruolo dell'analisi ebbe conseguenze importanti anche dal punto di vista didattico: per esempio per quanto riguarda l'insegnamento dei numeri reali e del calcolo differenziale, che furono innestati in una millenaria tradizione didattica di stampo euclideo.... Passando dal calcolo differenziale al calculus ratiocinator, le realtà della logica contemporanea si chiamano: linguaggio formale, sintassi e semantica, regola deduttiva, conseguenza, completezza e incompletezza, enumerabilità e indecidibilità, algoritmo, macchina di Turing universale, passo di calcolo, complessità. Alcune delle applicazioni si chiamano: verifica di software e hardware, programmazione logica, deduzione automatizzata, rappresentazione della conoscenza imprecisa e suo controllo mediante logiche aventi molti valori di verità.* [32].

Abbiamo già visto in un'altra citazione (vedi capitolo sulla teoria della dimostrazione) come questa analogia fra il rapporto Logica–Informatica e il rapporto Analisi–Fisica fosse un paradigma condiviso dai logici italiani alla fine degli anni '80. Qui si va oltre, evidenziando come questa analogia fra rapporti si riverberi in un'analogia fra le ricadute didattiche delle due discipline: Analisi e Logica.

Se pensiamo al peso che hanno avuto, negli ultimi decenni, aree di studio come l'ingegneria del software, il machine learning, la comunicazione e le reti di computer, l'informatica quantistica, capiamo che il rapporto fra Logica e Informatica non ha seguito le direzioni previste. Nello stesso modo la Logica e l'Analisi nella scuola hanno seguito percorsi molto diversi, almeno in Italia; si pensi ad esempio alla recente introduzione delle equazioni differenziali nel curriculum di Matematica dei licei scientifici e la si confronti con l'assenza di contenuti di Logica nelle Indicazioni Nazionali.

L'altro punto che emerge nell'introduzione del volume è la stretta collaborazione tra le diverse parti coinvolte nel corso di aggiornamento:

> *Non è facile dire se il contributo maggiore alla realizzazione del testo finale sia stato dato da insegnanti oppure da logici professionisti. Sicuramente l'interazione positiva tra queste componenti è stata determinante* [32].

Il rapporto tra la comunità dei ricercatori in Logica e la Didattica della Matematica, iniziato negli anni '80 grazie a iniziative come il testo di Mundici e Ciarrapico, è proseguito negli anni. In tempi recenti ci sono stati importanti eventi nella stessa direzione, come i convegni su Logica e Didattica svoltisi a Salerno del 2008 e nel 2010 e i convegni *Educare alla razionalità*: Sestri Levante (2016) e Torino (2019). Tuttavia delle esperienze di collaborazione tra logici e insegnanti è rimasto, nella pratica didattica attuale, meno di quanto si poteva sperare.

5.2.2 La logica nei programmi scolastici.

L'ingresso della Logica nei programmi scolastici rientra nel solco di una tradizione che risale agli anni '60, quando si è iniziato a parlare di argomenti di *matematica moderna* nei programmi scolastici. Negli Sati Uniti tale fenomeno è stato appunto denominato *new math* ed è stato al centro di un acceso dibattito con interventi fortemente critici da parte di matematici professionisti. Per averne un'idea si può far riferemento al testo *Why Johnny can't add? The failure of the New Math* scritto nel 1973 da Morris Kline.

Questa tendenza ad introdurre nuovi argomenti nei curricula di matematica trae origine dal movimento bourbakista. In particolare il momento di svolta è rappresentato dal Convegno di Royamont, vicino Parigi, del 1959, promosso dall'OCSE sul tema *Le nuove matematiche*. In quell'occasione Dieudonné levò il celebre grido: *A bas Euclid*, per trasmettere in modo dirompente la necessità di andare oltre l'insegnamento tradizionale. Nel suo intervento *Per una nuova concezione dell'insegnamento della matematica*, Dieudonné propone, fra l'altro, di introdurre fin dalla Scuola Primaria il linguaggio e il simbolismo della Teoria degli Insiemi. In seguito all'intervento di Dieudonné, nell'agosto 1960 si riunisce a Dubrovnik, in Jugoslavia, una Commissione allo scopo di redigere un programma per l'insegnamento secondario. La proposta, pubblicata dall'OCSE nel 1961, si riferisce a un corso di tre anni di ciclo medio e tre anni di ciclo superiore e prevede l'introduzione di nozioni elementari della Teoria degli Insiemi.

La proposta di Dubrovnik ha riscontri in molti paesi europei e in Italia, nel 1961, l'UMI-CIIM organizza un Convegno a Bologna. A partire da questo momento, molte istanze di origine bourbakista sono riscontrabili nelle proposte di rinnovamento del curriculum di Matematica formulate dalla comunità matematica italiana.

Un esempio è l'idea, che si fa spazio tra alcuni insegnanti e in molti libri di testo, che i numeri debbano essere introdotti, a livello di scuola elementare, a partire dagli insiemi. Alla base di questa idea c'è la definizione di Cantor di numero ordinale come classe di equivalenza—di insiemi ben ordinati—rispetto alla relazione di isomorfismo. I limiti pedagogici di questo approccio vengono messi in evidenza da Michele Pellerey il quale sostiene l'importanza di *matematizzare situazioni grezze* rimandando l'introduzione di strutture matematiche più sofisticate a un maggior grado di consapevolezza del bambino [107].

L'*ondata bourbakista* degli anni '60 viene quindi parzialmente superata fra gli anni '70 e gli anni '80, nella fase di elaborazione dei programmi delle scuole elementari, medie e PNI per i licei.

Scuole elementari

I programmi ministeriali delle scuole elementari, a partire da un Decreto Regio del 1928, rimangono sostanzialmente invariati fino alla fine degli anni '80, se si eccettua la parentesi dei Programmi Ermini del 1955, abrogati pochi anni dopo la loro introduzione. Nel 1985 vengono emanati i nuovi programmi per la Scuola Elementare che entrano poi in vigore dall'anno scolastico 1987/88. La situazione è molto diversa rispetto al 1955, i programmi delle elementari non sono più condizionati dalla necessità di fornire agli allievi gli strumenti matematici indispensabili per le attività pratiche (far di conto, misurare lunghezze, aree, volumi) e si può aprire una riflessione sul senso dei concetti matematici che saranno oggetto di insegnamento.

> *In Italia vi era stato, anche a livello di ciclo primario, un intenso movimento che aveva portato all'uso della cosiddetta "insiemistica", abbastanza diffusa nelle scuole. Nella scuola elementare la velocità di propagazione del nuovo è sempre alta, al contrario di ciò che avviene nella scuola secondaria dove i docenti sono più restii a rimettere in discussione contenuti e metodi, forse perché condizionati dagli esami conclusivi.*
>
> *A questa ondata, diciamo così bourbakista, era seguito tra i matematici italiani un forte ripensamento che si deve anche a un attento lavoro di ricerca teorica sul campo, i cui risultati hanno influenzato la stesura dei programmi della scuola elementare del 1985*[34]

Quando parla dell'*attento lavoro di ricerca teorica sul campo*, Ciarrapico si riferisce ad esempio al lavoro compiuto nel convegno "processi cognitivi e apprendimento della matematica nella scuola elementare" organizzato dalla CIIM con promotore Giovanni Prodi nel 1980 e alla proposta di "programma per la scuola elementare" del 1983 a cura di Cattabrini, Pellerey, Prodi e Villani. Questi lavori vengono ripresi dalla commissione istituita dal Ministro Falcucci e presieduta da Mauro Laeng, nella stesura dei programmi del 1985. Le parole di Lucia Ciarrapico appena citate chiariscono il contesto in cui si sono sviluppati i programmi dell'85 e il loro rapporto con la *matematica moderna*. Tale rapporto viene esplicitato nella seguente riflessione di Prodi:

> *Negli anni scorsi è stato spesso proposto un approccio alla matematica che partiva da uno studio degli insiemi e dalle operazioni logiche fondamentali, per arrivare solo in un secondo tempo al numero. Questo approccio si è dimostrato errato; infatti la*

> *matematica è un'attività che coinvolge operazioni di carattere logico, ma che ha una sua originalità, una sua immediatezza... La logica permea tutti i nostri discorsi, ma raramente la si può esplicitare a questo livello di età...*

I programmi del 1985 presentano cinque temi: 1) *Problemi*, 2) *Aritmetica*, 3) *Geometria e Misura*, 4)*Logica*, 5) *Probabilità, Statistica, Informatica.* Quindi si evince subito che la Logica riveste una notevole importanza. Bisogna però notare che nei programmi dell'85 la Logica non è vista come contenuto matematico da aggiungere a quelli tradizionalmente insegnati nelle scuole elementari, ma come abilità trasversale. Ciò si evince chiaramente dal seguente estratto:

> *L'educazione logica, più che oggetto di un insegnamento esplicito e formalizzato, deve essere argomento di riflessione e di cura continua dell'insegnante.*

Questa riflessione continua deve essere perseguita ponendo attenzione alla *precisione e completezza del linguaggio, tenendo conto che... il linguaggio naturale ha ricchezza espressiva e potenzialità logica adeguate alle necessità di apprendimento.* Per perseguire tali risultati è suggerito l'uso di attività *concrete* che siano ricche di *potenzialità logiche: classificazioni mediante attributi, inclusioni, seriazioni.* Viene affrontato esplicitamente il problema dell'approccio simbolico ma con un'attenzione particolare alla consapevolezza e ai significati da attribuire alle rappresentazioni simboliche. In quest'ottica si suggerisce di allargare l'uso dei simbolismi logici a contesti diversi, ad esempio estendere *la rappresentazione logica–insiemistica (Eulero–Venn, grafi...) anche per aritmetica, geometria, scienze, lingua...* e anche a *elementari questioni di tipo combinatorio* che possono essere considerate un *campo di problemi di forte valenza logica.* Si chiarisce poi che, in linea con la precedente citazione di Prodi, *la simbolizzazione formale di operazioni logico–insiemistiche non è necessaria, in via preliminare, per l'introduzione degli interi naturali e delle operazioni aritmetiche.* Una volta stabilite queste premesse, vengono esplicitati gli **obiettivi e contenuti** del nucleo *Logica.* Per il I e il II anno gli obiettivi e i contenuti sono:

- classificare oggetti e figure e risconoscere classificazioni;
- individuare tutti i possibili casi di combinazioni di oggetti e attributi (in contesti problematici concreti e particolarmente semplici);
- scoprire e verbalizzare regolarità e ritmi in successioni date di oggetti, immagini, suoni e, viceversa, seguire regole per costruire tali successioni;
- rappresentare con schematizzazioni elementari (frecce) successioni spazio–temporali, relazioni d'ordine, corrispondenze, riferite a situazioni concrete.

Per il III, IV e V anno, gli obiettivi e i contenuti sono:

- classificare oggetti secondo due o più attributi e rappresentare tali classificazioni (diagrammi di Venn, di Carroll, ad albero, con tabelle, con schede a bordo perforato...), risconoscere classificazioni;
- usare correttamente il linguaggio degli insiemi (unione, intersezione, complemento) anche in relazione ai connettivi logici e con applicazioni ad aritmetica, geometria, scienze, lingua.

La ministra Falcucci, per facilitare l'attuazione dei nuovi programmi, predispone un piano quinquennale di aggiornamento per tutti gli insegnanti di scuola elementare. In questo programma di formazione vengono coinvolte le università che si occupano della formazione dei docenti producendo in alcuni casi dei testi di riferimento [14].

Scuole medie

La scuola italiana, nel primo dopoguerra, è articolata in tre cicli: primario, medio e secondario. Il ciclo medio non è però unificato ma diviso in indirizzi. La tendenza all'unificazione della Scuola Media viene iniziata con la proposta di Riforma Bottai del 1940. In quest'occasione la Matematica della Scuola media, *relegata prima a disciplina di seconda categoria* [34], acquisisce dignità sia come orari sia come contenuti. In particolare viene suggerito anche di corredare l'insegnamento della Matematica con *appropriate piccole informazioni di carattere storico.* Si tratta di un passo nella direzione di una visione culturalmente più ampia della Matematica, non a caso le *note storiche* verrano riprese nei libri di testo a partire dagli anni '70 ([69]) con l'intento di evidenziare il valore culturale della Matematica.

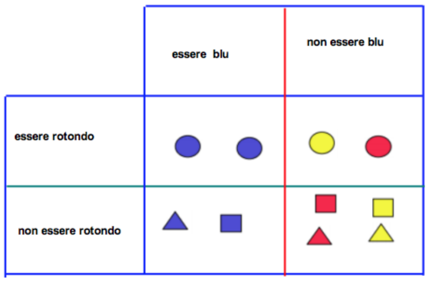


Figura 5.1. Diagramma di Carroll

Nel periodo della Seconda Guerra Mondiale, una Commissione nominata dai Governi Alleati e guidata da Carleton Washburne, pedagogista influenzato dal pensiero di John Dewey, si occupa di stilare dei nuovi programmi per la scuola media e per i licei, che tengano conto della situazione dell'Italia del secondo dopoguerra. Tali programmi, entrati in vigore nell'anno scolastico 1945/46, prevedono un insegnamento della Matematica di carattere pratico e intuitivo.

Nel 1952, la proposta di Riforma Gonella prevede una scuola media triennale suddivisa in tre indirizzi: classico, tecnico e normale, in contrapposizione alla tendenza iniziata con la proposta Bottai. La proposta però non viene approvata in parlamento.

Nel 1963 la riforma Gui segna il ritorno all'idea di Scuola Media unificata con qualche disciplina opzionale (latino e applicazioni tecniche). Contestualmente vengono anche eliminate le scuole di avviamento professionale che avevano lo scopo di fornire, dopo le elementari, un'istruzione orientata verso il mondo del lavoro. I nuovi programmi della Scuola Media, emanati con la riforma Gui, non introducono vere innovazioni nei contenuti di Matematica, nonostante la situazione al contorno sia influenzata, come abbiamo visto, dal dibattito sulla Matematica moderna. Non si fa riferimento, ad esempio, al concetto di *insieme*. Tuttavia, nelle indicazioni metodologiche, si percepisce il clima culturale *bourbakista* degli anni '60, ad esempio nell'invito ad *affinare la capacità di espressione e di pensiero su elementari questioni matematiche e di abituare anche alla riflessione e alla correttezza e sobrietà di espressione.*

Negli anni '70 viene istituita una nuova commissione ministeriale, detta *commissione dei sessanta*, allo scopo di aggiornare e attualizzare i programmi della scuola media unica. Fra i componenti della commissione, per la parte riguardante la Matematica, ci sono Emma Castelnuovo e Giovanni Prodi. La scuola Media viene quindi riformata nel 1977 stabilendo definitivamente il ciclo unico, e i programmi, elaborati dalla commissione dei sessanta, vengono emanati nel 1979.

In questi programmi la matematica forma un'unica cattedra con le scienze denominata *Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali.*

Nei programmi troviamo notevoli innovazioni sia nei contenuti sia nelle metodologie. I riferimenti alla Logica e alla formalizzazione si fanno evidenti e hanno lo scopo di connettere la Matematica con le altre discipline.

> *...la matematica fornisce un apporto essenziale alla formazione della competenza linguistica ... anche, mediante un primo confronto fra il linguaggio comune e quello più formale, proprio della matematica.*

Alcuni argomenti provenienti dall'ondata della matematica moderna (trasformazioni geometriche, elementi di Logica, probabilità e statistica) vengono inclusi negli argomenti dei programmi sotto il tema **Matematica del certo e del probabile**. In questo tema si fa esplicito riferimento ad *affermazioni del tipo vero o falso e affermazioni di tipo probabilistico. Uso corretto dei connettivi logici (e, o, non): loro interpretazione come operazioni su insiemi e applicazioni sui circuiti elettrici.* Negli *orientamenti per la "lettura" dei contenuti* dei nuovi programmi vengono chiariti i seguenti punti:

- La riflessione sull'uso dei connettivi concorre alla chiarificazione del linguaggio e del pensiero logico.

- Il linguaggio degli insiemi potrà essere usato come strumento chiarificatore, di visione unitaria e di valido aiuto per la formazione di concetti. Si eviterà comunque una trattazione teorica a sé stante, che sarebbe, a questo livello, inopportuna.
- L'insegnante potrà, inoltre, presentare equazioni e disequazioni in forma unificata utilizzando l'idea di "frase aperta" (enunciato con una o più variabili).

Emerge un'idea di Logica come disciplina portatrice di competenze trasversali. La modernità e la profondità di questi programmi però hanno rappresentato probabilmente anche un limite per la loro realizzabilità:

> *Un programma certo interessante, ma forse troppo ambizioso per trovare reale applicazione nelle scuole. Un'errata interpretazione del concetto di "programmazione didattica", intesa da molti docenti come arbitrio nelle scelte, ha condotto spesso ad escludere i contenuti nuovi delle proposte ed a rifugiarsi nell'inerzia dell'insegnamento tradizionale. Nella Scuola media, tranne lodevoli eccezioni, si continua per lo più ad insegnare algebra, più di quanto previsto dal programma stesso, e geometria, con una didattica del tutto tradizionale* [34].

Il distacco tra i contenuti del tema *matematica del certo e del probabile* e la pratica didattica delle scuola medie continua ad essere marcato anche negli anni '80 e '90. Si veda a tal proposito il testo *Il certo e il probabile. Piccolo manuale di logica e probabilità* di Carlo Felice Manara, pubblicato dall'Editrice la Scuola nella collana *Scuola Media/Didattica* nel 1989 come strumento di formazione per i docenti sui programmi che erano entrati in vigore dieci anni prima.

Scuole secondarie di secondo grado

I programmi della maggior parte degli indirizzi delle scuole secondarie di secondo grado hanno avuto un assetto definito in maniera stabile nella Riforma Gentile del 1923 e, per molti anni, non sono cambiati nonostante le varie proposte di riforma che si sono avvicendate.

Nei già citati programmi del 1945/46 i contenuti sono gli stessi della riforma Gentile con un'unica eccezione: nell'istituto magistrale, l'aritmetica razionale è spostata dalle prime due alle ultime due classi, in cui *la maggiore età consente di cogliere meglio il significato dei concetti e degli algoritmi aritmetici* [34].

Nel periodo della proposta di Riforma Gonella (1952), viene istituita una Consulta Didattica per l'elaborazione dei programmi che, per la Matematica, è coordinata da Attilio Frajese. È notevole il suo approccio al problema della dimostrazione in geometria che emerge dalla premessa ai programmi dei corsi liceali:

> *È opportuno evitare nelle prime classi del liceo, l'introduzione di una sfilza di postulati, partendo invece da proprietà evidenti per avviare il processo dimostrativo...* [nelle ultime due classi] *per la maggiore maturità e gli studi filosofici intrapresi* [gli studenti] *sono in grado di poter meglio affrontare uno studio puramente razionale della geometria.*

Nei primi anni '60, gli eventi del convegno di Royamont e le proposte di Dubrovnik hanno una forte eco anche in Italia. Nel 1961/62, dopo il convegno internazionale di Bologna, il Ministero istituisce, in alcune scuole secondarie superiori, delle *classi pilota* nelle quali si insegnano, oltre agli argomenti di matematica tradizionale, elementi di teoria degli insiemi e algebra astratta.

> *Le classi pilota avrebbero dovuto rappresentare, per l'intera comunità dei docenti, fari di ammodernamento. Ma non lo furono per tutta una serie di motivi tra cui l'avvio del progetto a partire dalle penultime classi dei corsi, quando i giochi pedagogico–didattici sono già fatti. Le classi pilota ebbero comunque la funzione di stimolare l'ambiente accademico e scolastico interessato ai problemi dell'insegnamento verso forme di ricerca teorica e sperimentale.*[34]

Nel 1963 la CIIM, Commissione per l'Insegnamento della Matematica dell'UMI (Unione Matematica Italiana), inizia a occuparsi di prosposte per un nuovo programma di Matematica e nel 1966 e 1967 vengono organizzati due convegni UMI-CIIM al CEDE (Centro europeao per l'educazione) di Frascati.

In seguito a questi convegni nascono i due programmi (detti *programmi di Frascati*) che contengono una proposta unitaria per il biennio della scuola secondaria di secondo grado e una proposta "minima" per il triennio. È da segnalare l'interesse e l'impegno di Bruno de Finetti nella discussione che ha portato a tali proposte [39].

Nei programmi di Frascati non si parla esplicitamente di Logica. Sono presenti però, nelle *avvertenze generali*, alcune questioni, evidenziate in [39], che sono di interesse anche per il rapporto con l'insegnamento della Logica. Si parla ad esempio di *procedere con molta misura dall'intuitivo al razionale* e di *insegnare per problemi.* Si prevede inoltre la possibilità di introdurre occasionalmente termini come *funzione*, *gruppo*, *struttura*, abituando dal contesto a capirne il significato. Secondo de Finetti, in tal senso va intesa anche la raccomandazione a *far uso del linguaggio della teoria degli insiemi, con naturalezza, senza che ciò implichi una preliminare trattazione sistematica.*

Nei programmi di Frascati si cita il *valore formativo che è proprio del metodo deduttivo* e si raccomanda che *non venga trascurata nessuna occasione per abituare l'allievo ad esporre, sia a voce che per iscritto, chiaramente e correttamente argomenti scientifici.* Questi temi si ricollegano alle competenze di chiarificazione del linguaggio e di controllo delle deduzioni che sono anche obiettivi dell'insegnamento della Logica.

Tuttavia, per capire le cause che determineranno l'introduzione di contenuti di Logica nelle scuole secondarie di secondo grado, bisogna considerare un altro aspetto che abbiamo parzialmente analizzato nel capitolo sul rapporto fra Logica e Informatica.

Fra il 1966 e il 1972 vengono istituiti alcuni nuovi indirizzi di istruzione tecnica. Nei programmi di questi indirizzi, compare, relativo all'ultimo anno di studi, il riferimento al *calcolo automatico* e ai *principi di funzionamento degli elaboratori elettronici.* È il momento dell'ingresso dell'Informatica nella scuola.

> *Negli anni '70 il computer influenza quasi tutta la vita sociale e produttiva dei paesi sviluppati, ed è ovunque oggetto di studio in indirizzi specialistici della Scuola secondaria. Anche in Italia sono attivati l'ITC per perito programmatore (1970) e l'ITI per perito informatico (1972). L'informatica in questi indirizzi è disciplina autonoma ed ha prevalentemente funzione di formazione professionale. È affiancata da un separato, ma forte, insegnamento della matematica, nonché della statistica, probabilità e ricerca operativa. Non molti anni dopo, tuttavia, il destino della matematica s'intreccerà fortemente con l'avvento dell'informatica* [34].

Dalla citazione precedente emerge un fatto degno di nota: l'ingresso dell'Informatica nella scuola non è accompagnato, in un primo momento, da una introduzione della Logica nei programmi. Questo è in qualche modo coerente con quanto è emerso nel capitolo sulla Teoria della Dimostrazione, sul rapporto fra Logica e Informatica, discipline che comunicano molto poco tra gli anni '60 e gli anni '70. La situazione cambia con l'istituzione del PNI (Piano nazionale per l'Informatica) nato nel 1985 sulla scorta di una serie di sperimentazioni portate avanti dagli anni '70.

A partire dal '74, iniziano in molte scuole secondarie di secondo grado i progetti sperimentali autorizzati dal Ministero. A motivare le innovazioni portate da queste sperimentazioni c'è la volontà di cambiare l'insegnamento della Matematica sia nei metodi sia nei contenuti. In questo contesto, il Comitato per la Matematica del CNR, e l'UMI, promuovono la formazione dei Nuclei di Ricerca Didattica che vengono attivati nei dipartimenti di Matematica di alcune università Italiane. Si tratta di *gruppi misti costituiti da docenti universitari e insegnanti dei diversi ordini di scuola: la loro attività era finalizzata alla progettazione e alla realizzazione di esperimenti didattici innovativi, coerenti con quanto si dibatteva al livello internazionale... L'esperienza maturata fu preziosa e fu gradualmente trasposta nella redazione dei programmi scolastici nazionali* [8].

Il PNI (1985) raccoglie le esperienze delle sperimentazioni didattiche in un unico grande progetto con lo scopo di introdurre l'Informatica nella scuola in modo estensivo.

> *...è stato, tra i progetti avviati da Ministero nell'ultimo quarto di secolo, il più rilevante sotto il profilo della innovazione culturale e metodologica e sotto quello quantitativo. La vasta attività organizzativa che ha richiesto non ha precedenti nella Scuola Italiana. Senza tema di errori si può affermare che, né prima né dopo, si ricordano progetti di tale portata* [35].

Il PNI prevede l'attivazione, in molte scuole secondarie di secondo grado, in particolare liceo scientifico, classico e magistrale, di sezioni sperimentali con una scansione oraria delle materie differente rispetto alle sezioni tradizionali e un potenziamento delle discipline scientifiche. L'obiettivo del progetto è da un lato introdurre gli studenti ai concetti, ai linguaggi e ai metodi dell'Informatica (*insegnare l'informatica*), dall'altro utilizzare gli strumenti informatici per rinnovare metodologicamente il processo di insegnamento-apprendimento (*insegnare con l'informatica*) [35].

Per l'attuazione del progetto, il Ministro dell'Istruzione, Franca Falcucci, nomina un Comitato Scientifico di cui fa parte Giovanni Prodi.

> *Uno dei primi problemi che si presentò al Comitato scientifico...fu dove e come inserire l'insegnamento dell'informatica, se come disciplina autonoma o nell'ambito di altre discipline.*

La questione si risolve introducendo l'Informatica nel programma di Matematica. Questa scelta rivela una visione dell'Informatica per la scuola come possibilità di allargamento degli orizzonti culturali degli studenti più che come disciplina specialistica. Nei programmi si parla infatti di *creare nella scuola un clima culturale volto a percepire informaticamente problematiche vecchie e nuove*. Questo approccio si discosta da quanto abbiamo visto riguardo l'introduzione dell'Informatica negli Istituti Tecnici. La scelta poi di accomunare Informatica e Matematica appare al Comitato Tecnico la più naturale:

> *Vi sono profonde ragioni di carattere culturale che legano l'informatica ai capitoli più tradizionali della matematica: sono rami che escono da uno stesso tronco* [114].

Tuttavia, pur condividendo il punto di vista di Prodi, bisogna notare che l'introduzione di una disciplina *nuova* come l'Informatica all'interno di una disciplina dalla consolidata tradizione come la Matematica, crea non pochi problemi. Dalla complessa organizzazione messa in atto per formare i docenti (si veda a tal proposito [35]), alla formulazione di nuovi programmi che tengano conto dell'integrazione fra le due discipline. Il ruolo cruciale di mediatore fra la Matematica e l'Informatica viene attribuito alla Logica. Ciò determina, per la prima volta in Italia, l'introduzione di argomenti di Logica, in maniera importante e sistematica, nei programmi della scuola secondaria di secondo grado.

> *Nei programmi si punta molto sulla logica, tanto da attribuire ad essa il compito di fare da ponte fra l'informatica e la matematica tradizionale. Alla base di questa scelta c'è una motivazione storica: l'informatica, come scienza, è sorta dalla logica, così come la logica moderna era sorta all'inizio del secolo, dall'algebra* [115]

Abbiamo già discusso questa citazione nel capitolo sulla Teoria della Dimostrazione notando come fosse legata ad un *fraintendimento* storico sui rapporti fra Logica e Informatica. Nel caso dei programmi scolastici questo fraintendimento ha determinato, a cavallo tra anni '80 e '90, una diffusione della Logica che era probabilmente al di là delle previsioni.

Vediamo quali sono i contenuti di Logica dei programmi di Matematica per il PNI. Uno degli obiettivi da raggiungere alla fine del primo biennio è *riconoscere le regole della logica e del corretto ragionare*. Inoltre uno dei temi in cui è articolato il programma del biennio riguarda proprio Logica e Informatica:

TEMA 5. ELEMENTI DI LOGICA E DI INFORMATICA

- Logica delle proposizioni: proposizioni elementari e connettivi, valore di verità di una proposizione composta. Inferenza logica, principali regole di deduzione.
- Variabili, predicati, quantificatori.
- Analisi, organizzazione e rappresentazione di dati, costruzione strutturata di semplici algoritmi e loro rappresentazione.
- Sintassi e semantica. Prima introduzione ai linguaggi formali.

Nel commento al TEMA 5 gli estensori affermano, in continuità con quanto abbiamo visto per i programmi dell'85 per le scuole elementari, che:

> *Gli elementi di logica* ***non*** *devono essere visti come una premessa metodologica all'attività dimostrativa (quasi che occorresse imparare le "regole del ragionamento" prima di mettersi a fare matematica), ma come una riflessione che si sviluppa man mano che matura l'esperienza matematica dell'allievo.*

Inoltre si raccomanda che gli elementi di Logica introdotti nel programma vengano interiorizzati anche con il confronto continuo con altre parti della Matematica, ad esempio osservando che *la risoluzione delle equazioni si basa sull'applicazione di principi logici che consentono di ottenere equazioni equivalenti o equazioni che sono conseguenza logica di altre.* Anche l'Informatica ha il ruolo di rendere *operative* le riflessioni linguistiche e logiche.

Fra gli obiettivi del triennio ci sono:

- Aver assimilato il metodo deduttivo e recepito il significato di sistema assiomatico.
- Avere consapevolezza del contributo della Logica in ambito matematico.
- Comprendere il rapporto tra pensiero filosofico e pensiero matematico.

Anche nel triennio uno dei *temi* è dedicato a Logica e Informatica:

TEMA 1 Elementi di logica e informatica:

- Approfondimento del processo deduttivo: concetti primitivi e assiomi; definizioni e teoremi; regole d'inferenza e dimostrazioni. Principio d'induzione.
- Coerenza, indipendenza e completezza di un sistema di assiomi. Sistemi formali e modelli.
- Elementi di teoria degli algoritmi.
- Insiemi di dati e loro strutture notevoli.
- Ampliamento delle strutture tipiche dei linguaggi.

La visione della Matematica che emerge dai programmi PNI è completamente diversa da quella tradizionale risalente, con poche modifiche, alla Riforma Gentile. Nella tradizione dell'Idealismo, la Matematica era una disciplina tecnica che trovava poco posto, ad esempio, nel prestigioso percorso di formazione del Liceo Classico.

> *Con il Progetto PNI una matematica vestita a nuovo entrava ufficialmente nella Scuola secondaria superiore, in forma sperimentale, ma si trattava di sperimentazione voluta dal Ministero e diffusa su larga scala. Era una matematica purificata dall'eccesso di simbolismo e formalismo dovuto all'ondata bourbakista, rientrata in un suo alveo naturale, ma vivificata dal dibattito e dall'esperienza maturati nel precedente ventennio.* [32]

I programmi PNI possono apparire oggi troppo ambiziosi e in alcune parti, soprattutto quelle relative all'Informatica, inevitabilmente datati. Tuttavia emerge da essi la volontà di far cogliere allo studente il valore culturale della Matematica sotto due punti di vista differenti ma coesistenti: come strumento per interpretare e prevedere la realtà e come strumento di riflessione epistemologica. In entrambi questi aspetti alla Logica viene riconosciuto un ruolo fondamentale.

Cosa è rimasto di ciò nelle attuali Indicazioni Nazionali? Sicuramente il valore culturale della Matematica che abbiamo descritto e l'importanza di constestualizzarla in senso storico e filosofico sono aspetti che permangono anche nelle Indicazioni Nazionali. Tuttavia la Logica viene completamente esautorata dal ruolo che aveva nel PNI; di più, nelle Indicazioni Nazionali per la Matematica, la parola *Logica* non è affatto presente.

Analizziamo più approfonditamente questo aspetto. Nelle Indicazioni Nazionali del 2012 per il primo ciclo, fra i nuclei tematici (*Numeri*, *Spazio e figure*, *Relazioni Dati e Previsioni*) non è presente il tema Logica come nell'85. Tuttavia la descrizione di alcune competenze del nucleo *Relazioni, Dati e Previsioni*:

> *Classificare numeri, figure, oggetti in base a una o più proprietà, utilizzando rappresentazioni opportune, a seconda dei contesti e dei fini ... Argomentare sui criteri che sono stati usati per realizzare classificazioni e ordinamenti assegnati.*

sembra ripresa da una parte del nucleo *Logica* dell'85 ma *svuotata* dai riferimenti alla Logica.

Un fenomeno analogo si ritrova in un documento del MIUR del 2017, *Indicazioni Nazionali e Nuovi Scenari*, in cui, fra gli *strumenti culturali per la cittadinanza*, si annoverano il *pensiero matematico* e il *pensiero computazionale*. Nel caratterizzare il *pensiero matematico* si afferma che la Matematica, come competenza trasversale, contribuisce, fra l'altro a *sviluppare la capacità di comunicare, discutere, argomentare in modo corretto*. D'altra parte il *pensiero computazionale* viene definito come *processo mentale che consente di risolvere problemi di varia natura seguendo metodi e* *strumenti specifici pianificando una strategia... educazione al pensiero logico analitico diretto alla soluzione di problemi.*

In questo documento emerge, a nostro avviso, uno sfasamento di piani tra questi due tipi di *pensiero* (matematico e computazionale) e il ruolo della Logica come ambiente comune non è in alcun modo rilevato. L'unico riferimento alla Logica che si trova nei *programmi* attualmente in vigore, è nelle Linee Guida per gli Istituti Tecnici e Professionali in cui, nel secondo biennio, si citano fra le *conoscenze: connettivi e calcolo degli enunciati* e come *abilità* correlata: *dimostrare una proposizione a partire da altre.*

Non si parla invece di Logica nelle Indicazioni Nazionali per i Licei. I temi più vicini alla Logica—e già presenti nei programmi PNI come temi di Logica e Informatica—sono:

- l'approccio assiomatico nella sua forma moderna;
- il principio di induzione;
- il concetto di algoritmo (in elementi di Informatica).

Questi temi hanno perso però la loro origine unitaria che, in ultima analisi, è riconducibile alla tradizione della Logica Matematica. Anche il riconoscimento di tale tradizione sembra venire meno nelle Indicazioni Nazionali quando si afferma che i *momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico sono: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.* Non si fa cenno al periodo della Crisi dei Fondamenti (Cantor, Gödel...) e a tutto ciò che ne è scaturito, al confine tra Matematica e Filosofia, in termini di riflessioni sulla Matematica e sulle sue applicazioni in campo tecnologico.

È possibile che il termine *Logica* sia sparito dalle tematiche da trattare nelle scuole perché è ritenuto *anacronistico* o *ambiguo.* Anacronistico perché la visione di una Logica come ponte fra Matematica e Informatica, tanto radicata negli anni '80, è quasi sparita nell'opinione pubblica odierna. Ambiguo perché, come vedremo nell'ultimo paragrafo, negli ultimi decenni il termine *Logica* viene spesso associato, in varie situazioni, a quesiti e test più che a una vasta area di studio.

5.3 La logica nelle prove (gare di Matematica, prove INVALSI ed esami di Stato)

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto come la Logica, da area di studio e ricerca per un gruppo ristretto di studiosi, sia entrata a far parte, seppur in maniera parziale e frammentaria, dell'istruzione di massa. Passiamo ora in rassegna alcune prove di vario genere (gare di matematica, test INVALSI e esami di Stato) con l'obiettivo di capire quali contenuti di Logica siano presenti in queste prove.

Nelle gare di matematica italiane compaiono pochi quesiti di Logica. Gli esempi di quesiti che possono ricondursi alla Logica, si trovano nelle gare a squadre che si svolgono alla Sapienza Università di Roma, nelle gare a squadre dell'UMI, talvolta anche nei Giochi di Archimede, raramente nelle gare distrettuali[2]. Si tratta per lo più di quesiti ispirati ai celebri rompicapi ideati dal logico Raymond Smullyan [127]. Un esempio è in figura 5.2.
Più rari, nelle gare di Matematica, sono i quesiti che coinvolgono contenuti espliciti di Logica come connettivi, implicazioni, condizione necessaria/sufficiente, quantificatori, etc. Un esempio è in figura 5.3.
Nelle prove INVALSI i quesiti che più si avvicinano alla Logica sono quelli in cui si usa la dicitura *condizione necessaria e sufficiente*, come in figura 5.4 ; oppure i quesiti su diagrammi di Eulero Venn e conteggio come quello in figura 5.5.
Infine passiamo agli esami di Stato. Ci limitiamo al caso dei Licei Scientifici in cui è presente, dal 1924 (anno del primo esame di maturità della Riforma Gentile), una prova scritta di Matematica. Coerentemente con quanto abbiamo visto analizzando i programmi, non sono presenti quesiti di Logica nelle prove scritte di indirizzo dei corsi di ordinamento, cioè quelli non sperimentali.

[2] Le gare distrettuali sono la seconda fase delle olimpiadi italiane di matematica organizzate dall'UMI, e si svolgono a febbraio in circa 100 sedi in tutta Italia.

In un'isola ci sono due tipi di abitanti: i cavalieri, che dicono sempre la verità, e i furfanti, che mentono sempre. Abbiamo incontrato su quest'isola un gruppo di quattro abitanti che, interrogati sulla loro identità, hanno risposto:
A: "C'è almeno un furfante tra noi."
B: "Ci sono al massimo due cavalieri tra noi."
C: "Ci sono almeno tre furfanti tra noi."
D: "Non ci sono cavalieri tra noi."
Quanti cavalieri ci sono in questo insieme di quattro abitanti?
(A) Nessuno **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** tutti.

Figura 5.2. Quesito, Olimpiadi della Matematica, Gara distrettuale, 2010

5) Tre compagni di classe, Andrea, Barbara e Carlo, sono incerti se andare al cinema. Si sa che:
- condizione necessaria perché Barbara vada al cinema è che ci vada Andrea;
- condizione necessaria e sufficiente perché Barbara vada al cinema è che non ci vada Carlo;
- condizione sufficiente perché Carlo vada al cinema è che ci vada Andrea.

Allora:

A. Andrea e Barbara andranno al cinema
B. nessuno dei tre andrà al cinema
C. Andrea e Carlo non andranno al cinema
D. Barbara andrà al cinema e Carlo no
E. Carlo andrà al cinema e Barbara no

Figura 5.3. Quesito, Gara a squadre, Sapienza Università di Roma, 2005

Nel PNI, il cui ultimo esame si è svolto nell'anno scolastico 2013/14, i quesiti che si avvicinano di più alla tradizione della Logica sono quelli che fanno riferimento alle geometrie non euclidee, come nelle figure 5.6 e 5.7; o al problema della cardinalità degli insiemi infiniti come nelle figure 5.8, 5.9 e 5.10.

È da notare che, sia nell'Esame di Stato del Liceo Scientifico sia nelle prove INVALSI, altre parti della *Matematica Moderna* introdotte in seguito alle riforme degli anni '70/'80 sono presenti (statistica, probabilità, combinatoria...), Purtroppo la stessa cosa non è accaduta per la Logica.

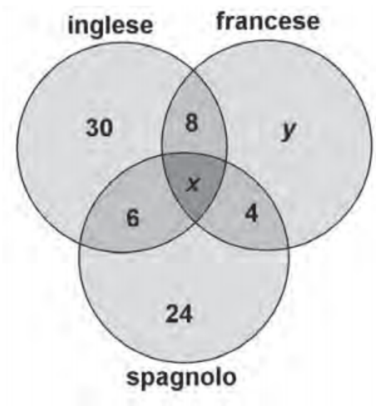
Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

		V	F
a.	Condizione necessaria affinché un quadrilatero abbia le diagonali uguali è che sia un rettangolo	☐	☐
b.	Condizione sufficiente affinché un quadrilatero abbia le diagonali uguali è che sia un rettangolo	☐	☐
c.	Condizione necessaria e sufficiente affinché un rombo sia un quadrato è che abbia le diagonali uguali	☐	☐

Figura 5.4. INVALSI, matematica, secondaria di II grado, a.s. 2014-2015

Nelle classi prime di una scuola ci sono 100 studenti. Tutti studiano almeno una lingua straniera.

50 studiano inglese
40 studiano francese
40 studiano spagnolo
8 studiano solo l'inglese e il francese
6 studiano solo l'inglese e lo spagnolo
4 studiano solo il francese e lo spagnolo



a. **Il numero *x* di studenti che studiano tutte e tre le lingue è** ....

Il numero *y* di studenti che studiano solo il francese è ....

b. **Qual è la probabilità che uno studente, preso a caso dall'elenco delle classi prime della scuola, studi solo l'inglese?**

Risposta: ....

Figura 5.5. INVALSI, matematica, secondaria di II grado, a.s. 2015-2016

Si consideri il teorema: «*la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.

Figura 5.6. Esame di Stato, P.N.I. 2007

"*Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta AB e gli angoli $\hat{PAB}$ e $\hat{QBA}$ hanno somma minore di 180°, allora le semirette AP e BQ, prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q, si devono intersecare*". Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.

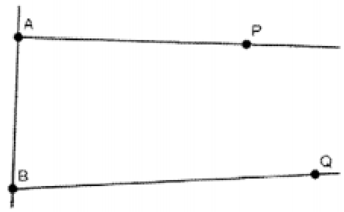


Figura 5.7. Esame di Stato, P.N.I. 2009

L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.

Figura 5.8. Esame di Stato, P.N.I. 2012

Le lettere N, Z, Q, R denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali mentre il simbolo $\aleph_0$ (*aleph-zero*) indica la cardinalità di N. Gli insiemi Z, Q e R hanno anch'essi cardinalità $\aleph_0$? Si motivi la risposta.

Figura 5.9. Esame di Stato, P.N.I. 2014

Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.

Figura 5.10. Esame di Stato, P.N.I. 2013

5.4 La Logica nei Test

Negli ultimi decenni si è diffusa anche in Italia una cultura dei test. Si tratta di test attitudinali, come nel caso delle prove di accesso all'università, o di test di valutazione di sistema, come le prove INVALSI o i test PISA, o ancora i quesiti delle gare di Matematica. Tutte le prove citate contengono domande di Logica. Per approfondire la questione, in [13], abbiamo studiato i quesiti di Logica delle prove di accesso ai corsi universitari. Ci siamo interessati in particolare alle domande poste nella prova di ammissione a Medicina e Chirurgia che ha una notevole risonanza sociale in Italia. In questo studio abbiamo cercato di chiarire che cosa si intende per *logica* nei test. Rientrano sotto questa voce proprietà dei connettivi (*e*, *o*, *non*, *implica*) e dei quantificatori (*per ogni*, *esiste*), e anche, in generale, i modi in cui si articola un ragionamento.

5.4.1 Lo scopo dei test di ingresso

I test di ingresso universitari hanno lo scopo di valutare conoscenze e competenze degli studenti che vogliono intraprendere le varie strade offerte dagli atenei.

Nei corsi ad accesso libero il test dà l'opportunità allo studente di controllare la propria preparazione e attitudine a seguire un dato percorso di studi (si parla appunto di test attitudinale); allo stesso tempo il test fornisce all'università le informazioni necessarie a predisporre, per gli studenti che ne abbiano bisogno, specifiche strategie di orientamento e recupero.

Nel caso dei corsi di laurea ad accesso programmato entra in gioco, inoltre, l'esigenza di operare una selezione degli studenti, in base alle loro conoscenze, capacità, abilità e attitudini.

5.4.2 Quali sono i test e chi li redige

Fino all'anno accademico 2022/2023 la situazione era la seguente: circa 50 università in Italia aderivano al CISIA (Consorzio Interuniversitario Sistemi Integrati per l'Accesso) che si occupa dei test d'ingresso. I test CISIA riguardavano solo i corsi di laurea ad accesso libero e ad accesso programmato locale. Nei corsi di laurea ad accesso programmato nazionale il Ministero fissava la data dei test d'ingresso, unica per tutte le sedi. In alcuni casi, come per Scienze della Formazione Primaria, il Ministero si limitava a fornire un quadro di riferimento per la prova (tempi, numero di domande, stesura del test), ma i contenuti venivano stabiliti dalle singole sedi; in altri casi, come per Medicina e Chirurgia, Odontoiatria e Protesi Dentaria, il Ministero decideva le domande del test.

Il 24 settembre 2022 la ministra dell'università e della ricerca Maria Cristina Messa ha firmato un Decreto che regola l'ammissione ai corsi di laurea magistrale di Medicina e Chirurgia e di Medicina Veterinaria. In base a tale decreto, nell'anno accademico 2023/2024 e seguenti, anche l'ammissione a Medicina e Chirurgia e di Medicina Veterinaria avverrà attraverso una prova d'esame del tipo TOLC mediante la piattaforma informatica CISIA.

Fino al Decreto del 24 settembre 2022, con poche variazioni da anno ad anno, la struttura della prova di ammissione a Medicina era la seguente: 60 domande da svolgere in 100 minuti; pertanto un candidato poteva dedicare, in media, meno di due minuti a domanda. Dall'anno accademico 2023/2024 si prevedono alcune variazioni di una certa rilevanza: le domande sono 50 in un tempo complessivo di 90 minuti. Fra di esse, 7 riguardano *comprensione testo, conoscenze acquisite negli studi* mentre 13 domande sono di *Matematica e ragionamento*. Le rimanenti domande si riferiscono ad argomenti di Biologia, Chimica, Fisica. Il tempo a disposizione per la prova è suddiviso per le diverse sezioni. Ad esempio per le 7 domande della sezione *Comprensione testo, conoscenze acquisite negli studi* il candidato ha a disposizione 15 minuti, mentre, per le 13 domande della sezione *Matematica e ragionamento*, il candidato ha a disposizione 25 minuti. Rimane pertanto l'intervallo temporale medio di circa due minuti a domanda. Un'altra caratteristica che rimane invariata è che il candidato, mentre svolge la prova, non sa quante risposte corrette gli serviranno per essere ammesso e quindi proverà a rispondere al maggior numero possibile di quesiti, anche se per le risposte errate è prevista una penalità.

Non sono ancora disponibili indicazioni riguardo i contenuti della prova di accesso a medicina dell'anno accademico 2023/2024. Nel prossimo paragrafo discuteremo le indicazioni a disposizione dei candidati fino all'anno accademico 2022/2023.

5.4.3 Informazioni a disposizione degli studenti e contenuto dei test

Delle 60 domande che costituiscono la prova di accesso a Medicina (fino all'anno accademico 2022/2023) 10 sono di *ragionamento logico*. Nella sezione ragionamento logico viene accertata la *capacità di usare correttamente la lingua italiana in diversi contesti e scopi e di completare logicamente un ragionamento, in modo coerente con le premesse, che vengono enunciate in forma simbolica o verbale attraverso quesiti a scelta multipla...I quesiti vertono altresì su casi o problemi, anche di natura astratta, la cui soluzione richiede l'adozione di forme diverse di ragionamento logico.*[3]

Non si parla di conoscenze specifiche su argomenti di Logica Matematica; tuttavia analizzando alcuni quesiti tratti dai test di ammissione di vari anni ci accorgiamo che le cose non stanno esattamente così.

Consideriamo ad esempio il quesito in figura 5.11; la risposta giusta è la A. Il quesito riguarda

Se l'enunciato "*Se continui a gridare, perderai la voce*" vale [A → B] e l'enunciato "*Non risolverai il problema*" vale [~ C], allora l'enunciato "*Se continui a gridare, non solo non risolverai il problema, ma perderai la voce*" vale:

A) [A → [[~ C] Λ B]]
B) [A → [~ [~ C] Λ B]]
C) [A → [[~ C] Λ (~B)]]
D) [A → [[~ C] → B]]
E) [A → [[~ C] Λ [~B]]

Figura 5.11. Quesito tratto dal Test di Medicina, 2018.

sia la formalizzazione del linguaggio sia l'uso di simboli logici. Sicuramente il candidato che ha dimestichezza con la gestione dei connettivi è avvantaggiato. Il testo presenta molti punti discutibili. Innanzitutto troviamo infelice la sovrapposizione tra l'uso delle lettere A, B, C per indicare sia alcune tra le opzioni di risposta sia le lettere proposizionali, cosa che può indurre confusione nel candidato. Notiamo inoltre che il simbolo di congiunzione $\wedge$ viene dato per scontato e il simbolo $\sim$ per indicare la negazione è desueto. Infine l'uso delle parentesi è decisamente anomalo. Nel distrattore E), la prima parentesi quadra si apre e non si chiude; a parte ciò, la risposta E) e la risposta C) sarebbero identiche, salvo una parentesi quadra al posto di una tonda; inoltre appare ridondante l'uso sistematico di parentesi esterne.

Consideriamo ora il quesito in figura 5.12, la risposta giusta è la B. Vale il discorso del quesito in figura 5.11, in modo persino più netto: uno studente, anche bravo, che non ha mai visto le tabelle di verità, non è in grado, nel poco tempo a disposizione, di individuare la risposta giusta.

Un'altra fonte di informazioni sui contenuti del test è il CISIA che organizza diversi tipi di test denominati TOLC (Test OnLine Cisia); la presenza della Logica in questi test è diversificata a seconda dell'area disciplinare. Ad esempio il TOLC–SU, test per l'accesso ai corsi di studi umanistici, e il TLC–E, per l'accesso a economia, contengono una sezione denominata *Ragionamento Logico* (10 quesiti su 80 per il TOLC–SU e 13 su 66 per il TOLC–E) in cui *le domande sono volte a saggiare le attitudini dei candidati piuttosto che accertare acquisizioni raggiunte negli studi superiori. Esse non richiedono, quindi, una specifica preparazione preliminare.*

Consideriamo il quesito in figura 5.13. La risposta giusta è la C. Pur non essendo presente alcun richiamo al simbolismo della logica, ci sembra utile formalizzare nel modo seguente:

$$(A \vee B) \rightarrow (\neg C \vee \neg D)$$

questa implicazione equivale alla sua contronominale:

$$\neg(\neg C \vee \neg D) \rightarrow \neg(A \vee B)$$

la quale, per le leggi di De Morgan, corrisponde all'implicazione:

$$(C \wedge D) \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

cioè alla risposta C. L'esempio ci sembra interessante perché mostra come quesiti di Logica che all'apparenza possono essere risolti usando il buon senso e riflettendo accuratamente sul linguaggio sono comunque impegnativi senza un'adeguata formalizzazione. Tale circostanza emerge anche dai commenti al quesito riportati sul sito CISIA e dalla bassa percentuale di risposte corrette $(10,94\%)$.

[3]Decreto Ministeriale del 28 Marzo 2019.

Le tavole di verità sono tabelle usate nella logica per determinare se, attribuiti i valori di verità alle proposizioni che la compongono, una determinata proposizione è vera o falsa. Le tabelle di verità della congiunzione "e" (∧), della disgiunzione "o" (∨) e della negazione "non" (¬) sono rispettivamente:

A	B	A∧B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	A∨B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	¬A
V	F
F	V

Qual è la tabella di verità della proposizione P: ¬ (A∧B) ∨ A?

A)

A	B	P
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

B)

A	B	P
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

C)

A	B	P
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

D)

A	B	P
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

E)

A	B	P
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Figura 5.12. Quesito tratto dal Test di Medicina, 2018.

Vogliamo dimostrare che tutte le volte che una funzione soddisfa la proprietà A oppure la proprietà B, essa viola la proprietà C oppure viola la proprietà D. È possibile dimostrare questa affermazione mostrando che:

A. quando una funzione soddisfa la proprietà A, essa viola la proprietà C
B. quando una funzione soddisfa la proprietà A e la proprietà B, essa viola sia la proprietà C che la proprietà B
C. quando una funzione soddisfa sia la proprietà C che la proprietà D, essa viola sia la proprietà A che la proprietà B
D. quando una funzione soddisfa sia la proprietà C che la proprietà D, essa viola la proprietà A oppure la proprietà B
E. esiste una funzione che soddisfa la proprietà A e viola la proprietà C

Figura 5.13. Quesito tratto dal Test CISIA, TOLC-E, 2012.

5.4.4 Che cosa si intende per logica nei test di ingresso

Sulla base degli esempi che abbiamo analizzato nel nostro studio e delle informazioni relative ai test messe a disposizione dal Ministero e dal CISIA, possiamo individuare quattro tipologie di quesiti di Logica che ricorrono nei test di ingresso, senza escludere che uno stesso quesito rientri in più di una tipologia:

1. quesiti che si risolvono usando il ragionamento *logico* e prestando attenzione al linguaggio; la formalizzazione del linguaggio non è strettamente necessaria ma può rivelarsi utile, si veda ad esempio il quesito in figura 5.14;
2. quesiti che contengono termini o concetti specifici tratti dalla Logica, che potrebbero essere stati oggetto di studio nella scuola secondaria durante le ore di Matematica o di Filosofia (connettivi, tavole di verità, sillogismi, modus ponens, ...)., si vedano ad esempio i quesiti nelle figure 5.11 e 5.12;
3. quesiti che contengono domande di ambito matematico o scientifico a cui si può rispondere senza particolari tecnicismi (in particolare senza calcoli), ma piuttosto mediante l'applicazione di inferenze spesso deduttive, si veda il quesito in figura 5.15;
4. problemi che si risolvono facendo ricorso a rappresentazioni varie (schemi, grafici, tabelle,...), si veda il quesito in figura 5.16.

"Tutte le volte che accompagno mia figlia a scuola arriviamo in ritardo".
Se la precedente affermazione è FALSA, quale delle seguenti è certamente vera?

A) Almeno una volta ho accompagnato mia figlia a scuola e siamo arrivati in ritardo
B) Tutte le volte che ho accompagnato mia figlia a scuola siamo arrivati puntuali
C) Tutte le volte che ho accompagnato mia figlia a scuola siamo arrivati in anticipo
D) Almeno una volta ho accompagnato mia figlia a scuola e non siamo arrivati in ritardo
E) Quando non sono io ad accompagnare mia figlia a scuola, arrivano in orario

Figura 5.14. Quesito tratto dal Test di Medicina, 2017.

Uno scultore vuole creare un enorme cubo composto da tanti piccoli cubetti di legno. Ha a disposizione 359 piccoli cubetti, tutti uguali. Quanti cubetti utilizzerà lo scultore per creare l'opera più grande possibile?

A) 359
B) 343
C) 256
D) 216
E) 316

Figura 5.15. Quesito tratto dal Test di Medicina, 2017.

5.4.5 Quando nasce l'idea di usare la Logica nella selezione e nella formazione?

Ci sembra che la Logica possa risultare utile ai fini di una selezione in base ad almeno due criteri.

Da un lato è ragionevole pensare che le persone che vogliono intraprendere un percorso di studi che li porti a diventare specialisti in una data disciplina (medici, scienziati, giuristi...) debbano avere buone capacità deduttive perché queste si riveleranno utili nella futura professione.

Dall'altro lato, è altrettanto ragionevole pensare che, al di là delle specifiche competenze necessarie per svolgere un determinato lavoro, un quesito di Logica sia utile per selezionare i candidati dotati di una più solida preparazione di base.

Queste idee hanno un'antica tradizione nella cultura occidentale e non solo. Platone nella *Repubblica* delinea il curriculum di studi di coloro che saranno avviati a ricoprire il ruolo apicale di filosofi–magistrati. Tale percorso, nella concezione del filosofo ateniese, si conclude, solo per chi supera una severa selezione, con un quinquennio dedicato allo studio della *dialettica*. In seguito, nel dialogo sulle *Leggi*, Platone modificherà la sua visione politica e proporrà, per i governanti, un'educazione basata non più sulla dialettica e sulla dottrina delle idee, ma sulla *geometria* e sull'astronomia. Notiamo come, pur nell'evoluzione del proprio pensiero, Platone continui ad attribuire un ruolo privilegiato, nella formazione dell'individuo, a discipline che si fondano sulle capacità logico–deduttive (dialettica prima e geometria dopo).

Nell'Alto Medioevo, in epoca carolingia, l'istituzione delle arti liberali rispondeva all'esigenza di riconoscere ufficialmente i campi del sapere nei quali istruire le persone che sarebbero diventate amministratori, burocrati, chierici etc. Le arti liberali erano divise in trivio e quadrivio. Del trivio faceva parte la dialettica che nel periodo medievale e in particolare con la filosofia scolastica, aveva assunto il significato di studio dei ragionamenti corretti e quindi serviva per acquisire la padronanza delle connessioni logiche e della razionalità. Un esempio dell'importanza di problemi che coinvolgono abilità logiche nel periodo della "rinascita carolingia" è il testo *Propositiones ad acuendo juvenes* scritto da Alcuino da York (730 ca. - 804) [4].

Nel 1700 anche Eulero sosteneva l'importanza della Logica come strumento per educare al ragionamento; nelle *Lettere ad una principessa tedesca* [45] egli afferma—a proposito della simbologia di quella che più tardi verrà denominata "teoria degli insiemi"—*sono termini molto usati nella logica che ci insegna le regole per ben ragionare.*

Brano 1

Leggere il testo del seguente problema.

Sara, Giulia, Elena e Laura hanno ognuna un mezzo di trasporto: un'auto, una moto, una bicicletta e un fuoristrada, tra loro di colore diverso. I colori dei mezzi di trasporto sono: verde, blu, rosso, nero.
Si sa che:
1.la moto appartiene a Sara mentre Laura non possiede un'auto;
2.il mezzo di trasporto di Elena è di colore nero;
3.l'auto è di colore blu e la bicicletta è rossa.

19.* Di che colore è la moto? *(vedi brano 1)
A) Rossa
B) Blu
C) Verde
D) Nera
E) Non è possibile stabilirlo con certezza

20.* Quale mezzo di trasporto è posseduto da Giulia? *(vedi brano 1)
A) L'auto
B) La moto
C) La bicicletta
D) Il fuoristrada
E) Non è possibile determinarlo con certezza

Figura 5.16. Quesito tratto dal Test di Medicina, 2017.

Non nasce però in Occidente l'idea di una serie di domande come prova di *selezione*. Bisogna guardare alla Cina e al sistema degli *esami imperiali* istituito dalle dinastie *Sui*(581-617) e *Tang* (618-907) e rimasto attivo, seppur con interruzioni, dal 605 al 1905 per ben 1300 anni [140]. Si tratta di una prova per reclutare e selezionare i funzionari governativi al servizio dell'impero sulla base di principi meritocratici. Tali esami erano incentrati sull'abilità di scrittura, anche in versi, e sulla memorizzazione di testi del confucianesimo; quindi non sembra che le capacità logico–deduttive avessero un ruolo di primo piano. Tuttavia, l'idea di un sistema di reclutamento basato sul merito fu poi ripresa dall'Europa illuminista del '700 fino all'istituzione, negli Stati Uniti, del test SAT (Scholastic Aptitude Test), antenato dei vari test di ammissione universitari odierni, che, nella sua prima versione (1926) conteneva una sezione denominata *logical inference*. Il SAT nacque ad opera di Carl Brigham (1890-1943), professore di psicologia a Princeton e convinto sostenitore dell'eugenetica, come rielaborazione dei test di intelligenza usati per selezionare i soldati durante la Prima Guerra Mondiale (Army Alpha e Beta intelligence test) [72]. Da allora il SAT è stato modificato più volte nei suoi contenuti ed attualmente si articola in due parti: *ragionamento verbale* e *ragionamento matematico*. In ogni caso l'accento è posto sulle capacità deduttive del candidato, seppur legate ai due contesti, verbale e matematico. Segnaliamo infine che nell'attuale LSAT (Law School Admission Test) si fa esplicito riferimento al *ragionamento logico* come *competenza chiave* per avere successo negli studi giuridici.

5.4.6 L'inserimento della Logica non è sempre coerente con le finalità del test.

In base a quanto abbiamo detto nel paragrafo precedente, appare ragionevole, quando si deve operare una selezione, far ricorso a un test a risposta multipla; e, fra le diverse domande, è opportuno che trovino posto quesiti di Logica.

Tuttavia temiamo che, per il poco tempo a disposizione e per i vari condizionamenti di ordine psicologico (la risposta giusta determina il futuro dello studente), l'atteggiamento dei candidati sia spesso improntato non tanto alla riflessione e allo sviluppo delle proprie capacità deduttive, quanto ad un addestramento preliminare e al tentativo di acquisire tecniche risolutive più o meno automatiche, complici i vari corsi di preparazione ai test di ingresso.

Con ciò non vogliamo intendere che uno sforzo di preparazione alla prova sia di per sé una tendenza negativa; anzi, un minimo di allenamento è sempre utile, quanto meno per acquisire familiarità con i test a risposta multipla. Ma se l'intento dei quesiti di Logica è quello di saggiare le attitudini dei candidati piuttosto che accertare acquisizioni raggiunte negli studi superiori, allora ci lasciano perplessi le numerose pubblicazioni ad hoc in cui si spiega come rispondere ai quesiti, in particolare di Logica.

Certamente è difficile prepararsi a rispondere a *domande senza contenuti* o comunque con contenuti trasversali atte a testare le non ben definite *capacità logiche* dei candidati. Nella realtà accade che la ricaduta di tutto ciò sia l'acquisizione, da parte degli studenti, di ulteriori tecniche e nozioni e si rischia che la Logica, come dice Gabriele Lolli, *finisca per diventare solo un altro formalismo da affiancare ai tanti già appresi* [68].

Capitolo 6

Conclusioni e ringraziamenti

La storia che ho cercato di tratteggiare in queste pagine è una *storia di idee*. Il termine *idea* ha qui un'accezione estensiva che vuole includere la capacità creativa di alcune persone di ideare strumenti, tecniche, forme e strutture matematiche. Ma queste capacità si intrecciano in maniera indissolubile con gli ideali di queste persone, con le loro convinzioni, le loro aspirazioni e con i loro pregiudizi, quindi riflettono le congiunture storiche sociali e politiche in cui queste persone sono vissute.

L'aspirazione di questo lavoro è stata quella di cercare di cogliere le idee—appunto in senso lato—che hanno caratterizzato una parte della ricerca in Logica Matematica in Italia che va dalla *rinascita* con il gruppo CNR di Geymonat del 1962 fino alla fondazione dell'AILA nel 1987. In questo senso la sfida per me è stata quella di provare a ricostruire questa storia presentando in modo continuo gli aspetti tecnici dei risultati dei ricercatori in Logica e il contesto sociale e umano che ha portato a tali risultati.

Già dalla mia prima visita al dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche di Siena (erede del Dipartimento di Matematica fondato da Roberto Magari, si veda a proposito il capitolo sull'Algebra della Logica) mi sono reso conto che, per approfondire gli aspetti matematici, senza trascurare quelli "sociali" e "psicologici", avrei dovuto parlare con molte persone, imparare da loro, studiare alcuni dei loro articoli e alcuni testi su cui loro stessi avevano studiato e tornare a parlare con loro per fare domande e chiedere chiarimenti.

Questa metodologia di lavoro mi ha, per forza di cose, obbligato a scegliere solo alcuni temi di ricerca specifici e ben delimitati, trascurandone altri, seppur parimenti importanti e profondi. La scelta dei temi da trattare è emersa—a volte in modo inevitabilmente casuale—parlando con le persone che avevano contribuito alla loro creazione e studiando i loro lavori.

Così sono nati i capitoli sulle Algebre Diagonalizzabili in Algebra della Logica e sulla pseudo–categoricità in Teoria dei Modelli; temi che caratterizzano due momenti di due gruppi di ricerca (Siena e Firenze) molto attivi nel periodo storico che ho preso in considerazione. Inoltre studiando questi temi di ricerca mi sono reso conto di come fosse presente, ancora negli anni '70 e '80, la matrice comune del gruppo C.N.R. di Geymonat. Sia le Algebre Diagonalizzabili sia la pseudo-categoricità hanno alla base lo stesso strumento di indagine: le Algebre di Boole, uno dei primi interessi del gruppo di Geymonat.

Tuttavia leggendo, parlando con le persone e ascoltando i vari punti di vista, mi sono reso conto che non tutta la Logica italiana fra gli anni '60 e '80 può essere ricondotta all'*ortodossia* del gruppo di Geymonat e che, all'interno e all'esterno di questo gruppo, sono andate via via sollevandosi varie "voci fuori dal coro" (l'esistenza di "voci fuori dal coro" è una caratteristica precipua e una ricchezza intrinseca della comunità dei logici italiani ancora oggi). Così è nato il capitolo sulla Teoria della Dimostrazione che, mettendo insieme le testimonianze di Cellucci, Longo, Dezani, Abrusci e Cardone, ha tracciato un profilo della Logica italiana al di fuori del *mainstream* del gruppo di Geymonat, seppur con forti legami con esso perché Cellucci ha fatto parte del gruppo e Abrusci è stato allievo di Casari. Quest'altra faccia della medaglia della Logica italiana mi ha dato modo di parlare—senza mai dimenticare l'aspetto tecnico (teorema di normalizzazione e risultati del λ-calcolo)—di un tema di grande rilevanza per la cultura e la società italiana di quegli anni: il rapporto con l'avvento dell'Informatica.

La comunità dei logici italiani si è trovata a gestire un rapporto non facile, quello fra Logica e Informatica, anche per le pressioni sociali esterne al mondo accademico. La scuola è stato uno degli ambienti in cui alla Logica è stata fatta una richiesta esplicita: quella di fare da *ponte* tra la millenaria Matematica e la nascente Informatica.

Così, seguendo l'evoluzione della Logica in Italia mi sono trovato a confrontarmi con le vicissitudini dei ricercatori che si sono impegnati nel rinnovamento dell'insegnamento della Matematica e con le fortune alterne dei contenuti di Logica nei curricula di Matematica e nella formazione degli insegnanti di Matematica. Va da sé che la ricerca su questi temi mi ha coinvolto particolarmente sia per i miei interessi relativi alla Logica sia per il mio ruolo di insegnante nella scuola secondaria di secondo grado.

Le ricerche per questo lavoro sono state avviate nel novembre 2019, nel momento in cui ho iniziato il mio congedo dalla scuola per svolgere il dottorato. Da allora la mia visione della storia della Logica italiana e, più in generale, della Matematica si è evoluta grazie al contributo di molte persone. Innanzitutto i miei relatori Claudio Bernardi e Lorenzo Tortora de Falco che mi hanno stimolato a studiare, approfondire e ricercare, dandomi punti di vista diversi e sfaccettati sulla Matematica. La loro disponibilità a discutere di problemi, dimostrazioni alternative, trovare l'esempio o il controesempio *giusto*, mi ha arricchito molto sia scientificamente che umanamente. Grazie a loro ho avuto la possibilità di approfondire sia gli aspetti tecnici delle varie linee di ricerca che andavo studiando, sia le tematiche più generali che si andavano via via intrecciando con le vicissitudini dei protagonisti di questa storia.

Nei tre anni di lavoro presso il Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo, ho avuto modo di collaborare con il gruppo di Didattica e Storia della Matematica sia per questioni inerenti la Tesi sia in altri lavori riguardanti l'insegnamento della Matematica. La collaborazione con tutte le persone del gruppo mi ha arricchito e mi ha fatto crescere. In particolare devo ringraziare Annalisa Cusi, Alessandro Gambini, Nicoletta Lanciano, Marta Menghini e Maria Anna Raspanti per aver condiviso con me la loro esperienza e sensibilità didattica.

Ringrazio Lorenzo Carlucci, Luca San Mauro e Antonio Piccolomini d'Aragona per le discussioni informali—ma molto formative per me—sulla Logica; il mio tutor Enrico Rogora per la professionalità con cui ha seguito il mio percorso e gli amici—più che colleghi—Lorenzo Mazza e Davide Passaro con cui si è creato un rapporto umano e professionale che non avrei immaginato prima.

Un ringraziamento particolare va ai due revisori esterni che, con scrupolosa attenzione, hanno riletto la prima stesura, mi hanno suggerito modifiche e consigliato ulteriori riferimenti bibliografici; tutto ciò ha sensibilmente migliorato e arricchito il lavoro.

Naturalmente questa ricerca non sarebbe potuta neanche iniziare senza il contributo di tutti gli studiosi che mi hanno regalato parte del loro tempo per parlare, anche più di una volta, e rispondere con pazienza e passione alle mie, talvolta insistenti e reiterate domande: Vito Michele Abrusci, Fabio Bellissima, Stefano Berardi, Andrea Cantini, Felice Cardone, Carlo Cellucci, Maria Luisa Dalla Chiara, Mariangiola Dezani, Gabriele Lolli, Giuseppe Longo, Simone Martini, Paolo Pagli, Franco Parlamento, Giuseppe Rosolini, Giovanni Sambin, Carlo Toffalori.

Bibliografia

[1] Abrusci, V. M., Tortora de Falco, L. *Logica. Vol 1. Dimostrazioni e modelli al primo ordine.* Springer-Verlag Italia 2014.

[2] Abrusci, V. M. *In memoria di Ettore Casari (1933-2019)* in *Iride*, 33, 89, pp. 131-138.

[3] Abrusci, V. M., Pistone, P. *Le direzioni della ricerca logica in Italia: la logica lineare e i suoi sviluppi* in Le direzioni della ricerca logica in Italia 2, a cura di Hosni, H. Lolli, G. e Toffalori, C. Edizioni ETS, 2018.

[4] Alcuino di York *Propositiones ad acuendo juvenes*, a cura di R. Franci, ETS, Pisa, 2016.

[5] *Atti degli incontri di Logica Matematica*, Vol. 5, XII Incontro: Roma 6-9 aprile 1988, La Logica Matematica nella didattica, a cura di M. Barra e A. Zanardo, Scuola di Specializzazione in Logica Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Siena.

[6] Bardelli, D. *La Scuola di Studi Superiori sugli Idrocarburi dell'ENI: Mattei, Boldrini e il contributo dei docenti dell'Università Cattolica* in "Cultura in azione. L'ENI e l'UniversitÃ Cattolica per lo sviluppo dei popoli", Vita e Pensiero, Milano 2017.

[7] Barendregt, H. P. *The Lambda Calculus. Its syntax and semantics.* Volume 103 di "Studies in Logic and the Foundations of Mathematics". North-Holland Publishing Co., Amsterdam, revisited edition, 1984.

[8] Bartolini Bussi, M. G. *Ricerca in didattica della matematica: alcuni studi italiani. In ricordo di Francesco Speranza* in Bollettino dell'UMI, Serie 8, Vol.4-A-"La matematica nella Società e nella Cultura" (2001), n.1, p.117-150.

[9] Bellissima, F., Sorbi, A., Ursini, A., *Ricordo di Franco Montagna.* Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana. Serie i, Vol. 1, N.2, Agosto 2016.

[10] Berarducci, A., Toffalori, C. *Le direzioni della ricerca logica in Italia: La Teoria dei Modelli* in Le direzioni della ricerca logica in Italia, a cura di Hosni, H. Lolli, G. e Toffalori, C. Edizioni della Normale, 2015.

[11] Bernardi, C. *The fixed-point theorem for diagonalizable algebras.* Studia Logica, 34, 1975.

[12] Bernardi, C. *The uniqueness of the fixed-point in every diagonalizable algebras.* Studia Logica, 34, 1975.

[13] Bernardi, C., Veredice, A. *La logica nei test di ingresso* in "Matematica, Cultura e Società-Rivista dell'UMI", Serie I, Vol. 5, N. 2, agosto 2020, 143-156.

[14] Bernardi, C., Cannizzaro, L., Lanciano, N., Mentrasti, P. (a cura di) *la Matematica nella scuola elementare.* La Nuova Italia, 1990.

[15] Bochenski, J. *Nove lezioni di logica simbolica*, Edizioni Studio Domenicano, Bologna, 2017. Prima edizione 1938.

[16] Böhm, C. *Alcune proprietà delle forme β-η-normali nel λ-K-calcolo.* Pubblicazioni dell'IAC, 696:1-19, 1968.

[17] Boolos, G., Sambin, G. *Provability: the emergence of a mathematical modality.* Stud Logica 50-23, 1991.

[18] Boolos, G. *On deciding the truth of certain statements involving the notion of consistency.* The Journal of Symbolic Logic, Vol. 41, 1976.

[19] Brouwer, L. E. J. *The effect of intuitionism on classical algebra of logic.* Proceedings of the Royal Irish Academy. 1955

[20] Cardone, F., Hindley, J. R. *Lambda-calculus and combinators in the 20th century* in Handbook of the History of Logic, editors Gabbay and Woods. North-Holland, 2009.

[21] Cardone, F. *Le direzioni della ricerca logica in Italia: Logica e Informatica* in Le direzioni della ricerca logica in Italia, a cura di Hosni, H. Lolli, G. e Toffalori, C. Edizioni della Normale, 2015.

[22] Casari, E. *Congedo* in Rivista di storia della filosofia, 62, pp. 559-67, 2007.

[23] Casari, E. *Lineamenti di Logica Matematica*, Feltrinelli Editore, Milano, 1959.

[24] Casari, E., *Francesca Rivetti-Barbò. Il teorema e il corollario di Gödel, indagine critica. Recensione.* Bollettino dell'UMI, Serie 3, Vol. 20, 1965.

[25] Casari, E., *Computabilità e ricorsività. Problemi di logica matematica.* Quaderno n. 3 della Scuola di Studi Superiori sugli Idrocarburi dell' E.N.I. Milano 1959, 107 pp.

[26] Cellucci, C. *La rinascita della logica in Italia.* Syzetesis. Anno VII, 2020, pag. 211-216.

[27] Cellucci, C. *Teoria della dimostrazione.* Bollati Boringhieri, 1978.

[28] Cellucci, C. *Proof Theory and complexity* Synthese 62, pp 173-189, 1985.

[29] Church, A., *Ordinali Transfiniti e Principio del Terzo Escluso (A proposito di un Ragionamento del Gödel.) by Lucio Lombardo-Radice. Review: Alonzo Church.* The Journal of Symbolic Logic, Vol. 23, No. 2, June 1958.

[30] Church, A. *A set of postulates for the foundation of logic.* Annals of Mathematics, Series 2, 33. 346-366, 1932

[31] Church, A. *A note on the Entscheidungsproblem.* Journal of Symbolic Logic, 1, 40-41, 1936.

[32] Ciarrapico, L., Mundici, D. (a cura di) *L'insegnamento della Logica.* Ministero della Pubblica Istruzione, in collaborazione con AILA, 1994.

[33] Berni, M., Ciarrapico, L. *I curricoli di Matematica, gli ordinamenti scolastici e le riforme dal 1940 al 2015*, Unione Matematica Italiana, 2017.

[34] Ciarrapico, L. *L'insegnamento della matematica, dal passato recente all'attualità*, Relazione svolta a Cattolica il 7 ottobre 2001, in occasione del Congresso ADT (Associazione per la Didattica con la Tecnologia).

[35] Barozzi, G. C., Ciarrapico, L. *Il piano nazionale per l'informatica.* Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 6-A-"La Matematica nella Società e nella Cultura" (2003), n. 3, p. 441-461.

[36] Curry, H. B., Feys, R. *Combinatory Logic, Volume I.* North-Holland, Amsterdam, 1958.

[37] Curry, H. B., Hindley, J. R., Seldin, J. P. *Combinatory Logic, Volume II.* North-Holland, Amsterdam, 1972.

[38] Day, G. W. *Superatomic Boolean Algebras.* Pacific Journal of Mathematics. Vol. 23, No. 3, 1967.

[39] de Finetti, B. *Le proposte per la matematica nei nuovi licei: informazioni, commenti critici, suggerimenti.* Periodico di Matematiche, 45, n.2, p.75-153

[40] Ambrosio, L., Dal Maso, G., Forti, M., Miranda, M., Spagnolo, S. *Ennio De Giorgi* Bollettino dell'UMI, Serie 8, Vol.2-B, n.1, p. 3-21, 1999.

[41] De Paoli, S. *La rinascita e lo sviluppo della Logica in Italia nella seconda metà del XX secolo*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Padova, Relatore: Giovanni Sambin, A.A. 1999-2000.

[42] Dezani-Ciancaglini, M., Venneri, B., *lambda calcolo*, «www.aphex.it», 16 (2017).

[43] Durand-Guerrier, V. *Logic in Mathematics Education* in "Encyclopedia of Mathematics Education" editor S. Lerman, Springer, 2020.

[44] Van Den Dries, L. *Introduction to Model-Theoretic Stability*, note del corso, Department of Mathematics, University of Illinois Urbana-Champaign.

[45] Eulero, L. *Lettere a una principessa tedesca*, traduzione italiana, a cura di G. Cantelli, Bollati Boringhieri, Torino, 2007.

[46] Feferman, S. *Arithmetization of metamathematics in a general setting.* Fund. Math, vol 49, 1960.

[47] Frege, G. *Alle origini della nuova Logica: carteggio scientifico con Hilbert, Husserl, Peano, Russell, Vailati e altri.* A cura di G. Gabriel, H. Hermes, F. kambartel, C. Thiel, A. Veraart. Edizione italiana a cura di C. Mangione. Prefazione di G. Lolli. Bollati Boringhieri, 2020.

[48] Freguglia, P., *L'Algebra della Logica. Un profilo storico.* Editori Riuniti, 1978.

[49] Friedman, H., *One hundred and two problems in mathematical logic.* The Journal of Symbolic Logic, Vol. 40,1975.

[50] Forti, M., Honsell, F. *Set theory with free construction principles.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci (4), 10, 493-522, 1983.

[51] Gentzen, G. *Investigations into logical deductions.* In M. E. Szabo (Ed.). The collected papers of Gerhard Gentzen (p. 68-131). Amsterdam. North-Holland, 1969.

[52] Geymonat, L. *Peano e le sorti della Logica in Italia*, Bollettino dell'UMI, Serie 3, Vol. 14, (1959), n.1, p. 109-118.

[53] Girard, J. Y. *Linear Logic*, in Theoretical Computer Science, Volume 50, Issue 1, 1987, Pages 1-101.

[54] Girard, J. Y., Lafont, Y., Taylor, P. *Proofs and Types.* Cambridge University Press, 1989.

[55] Girotto, V. *Ragionamento quotidiano e logica (errori o razionalità alternative?)*, in Atti del XI Convegno Nazionale UMI–CIIM sull'insegnamento della matematica: "apprendere la matematica: errori, difficoltà, conquiste", supplemento al notiziario dell'UMI, n. 10, ottobre 1998.

[56] Gödel, K. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System.* I. Mon.fur Math. and Ph., vol.38, 1931.

[57] Henkin, L., *La structure algèbrique des théories mathématiques.* Paris, 1956.

[58] Henkin, L. *A problem concerning provability.* Problem 3, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 17, 1952.

[59] Halmos, P., *Polyadic boolean algebras.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 40, 1954.

[60] Holvoet, A. *The reappearence of logic in Flemish secondary mathematics education.* Thesis presented in fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Mathematics, Ku Leuven. A.Y. 2020/21.

[61] Howard, W. A. *The formulae-as-types notion of construction*, in Hindley, J. R. Seldin J. P. editors "To H. B. Curry, Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism". Academic Press, London, pp. 479-490, 1980 (circolava come manoscritto già dal 1969).

[62] Johnson-Laird, P. N. *Models of deduction.* In R. J. Falmagne (Ed.), "Reasoning: representation and process in children and adults" (pp.7-54). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1975.

[63] Kent, C. F. *The relation of A to* $Prov(\ulcorner A \urcorner)$ *in the Lindenbaum sentence algebra.* The Journal of Symbolic Logic, Vol. 38, No. 2, June 1973.

[64] Knuth, D. E., Pardo, L. T.*The early development of programming languages.* Computer Science Department, University of Stanford, California, 1976.

[65] Krivine, J. L. *Lambda-calcul, types and modèles.* Études et Recherches en Informatique. Masson, Paris, 1990.

[66] Löb, M. H., *Solution of a problem of Leon Henkin.* The Journal of Symbolic Logic, Vol. 20, No. 2, June 1955.

[67] Lolli, G. *Ettore Casari e la rinascita della logica in Italia* in Atti della Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche, Volume 154, Accademia delle Scienze di Torino, 2020.

[68] Lolli, G. *QED. Fenomenologia della dimostrazione.* Bollati Boringhieri, Torino, 2005.

[69] Lombardo Radice, L., Mancini Proia, L. *Il Metodo Matematico*, Principato, 1977.

[70] Lombardo Radice, L. *Ordinali transfiniti e principio del terzo escluso, a proposito di un ragionamento del Gödel.* Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni. Università di Roma, Istituto Nazionale di Alta Matematica. 1951.

[71] Luciano, E., Roero, C. S. (a cura di) *Giuseppe Peano. Matematico e Maestro* Celebrazioni di Giuseppe Peano nel 150^0 della nascita e nel 100^0 del Formulario Mathematico. Dipartimento di Matematica dell'Università, Torino. 2008.

[72] Lawrence, I. M., Rigol, G. W., Essen, T. V., Jackson, C. A. *A historical perspective on the content of the SAT*, College Board Research Report, No 2003-3.

[73] Macintyre, A., Simmons, H. *Gödel's diagonalization technique and related properties of theories.* Colloquium Mathematicum 28, 1973.

[74] Magari, R., *Su certe teorie non enumerabili.* Ann. Mat. Pura. Appl. (4), 97, 1974.

[75] Magari, R., *Significato e verità nell'aritmetica peaniana.* Ann. Mat. Pura. Appl. (4), 103, 1975.

[76] Magari, R., *Problemi aperti sulle algebre diagonali.* Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 44, 1974.

[77] Magari, R., *Metodi algebrici in teoria della dimostrazione.* Bollettino UMI, 12 1975.

[78] Magari, R., *The diagonalizable algebras.* Bollettino UMI, 12 1975.

[79] Magari, R., *Representation and duality theory for diagonalizable algebras.* Studia Logica, 34, 1975.

[80] Mangani, P. *Su certe algebre connesse con logiche a più valori*, Bollettino U.M.I., 8 (4), 68-78, 1973.

[81] Mangani, P., Marcja, A. *Shelah rank for Boolean algebras and some application to elementary theories I.* Algebra Universalis, 10(2): 247-257, 1980.

[82] Mangani, P., Marcja, A. $\aleph_1$*-Boolean spectrum and stability.* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8), 72(5): 269-272, 1983.

[83] Mangani, P. (a cura di). *Model theory and applications.* Lectures given at the summer school of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Bressanone (Bolzano), Italy, June 20 - 28, 1975. Springer, Heidelberg, 2011. Ristampa dell'edizione originale, Cremonese, Roma, 1975.

[84] Mangione, C. *La logica del ventesimo secolo (II)* in Storia del pensiero filosofico e scientifico di Ludovico Geymonat, Cap. 6, Vol. VII, Il Novecento (2), Garzanti, 1976.

[85] Mangione, C. *Ludovico Geymonat e la rinascita della logica italiana* in "Storie e protagonisti della matematica italiana" per raccontare 20 anni di "Lettera Matematica Pristem". Springer-Verlag Italia, 2013.

[86] Marcja, A., Toffalori, C. *Introduzione alla Teoria dei Modelli* Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, Pitagora Editrice, Bologna 1998.

[87] Marcja, A. *An algebraic approach to superstability.* Boll. Un. mat. Ital. A (6), 1(1): 71-76, 1982.

[88] Marcja, A., Toffalori, C. *On pseudo-*$\aleph_0$*-categorical theories.* Z. math. Logik Grundlag. Math., 30(6):533-540, 1984.

[89] Marcja, A., Toffalori, C. *On the Cantor-Bendixon Spectra containing.* (1,1)-11. J. Symbolic Logic, 50:611-618, (1985).

[90] Marcja, A., Toffalori, C. *A guide to classical and modern Model Theory* in Trends in Logic, Vol. 19. Springere Science + Business Media, New York, 2003.

[91] Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic.* Chapman & Hall, London, 1964. Tradotto in Italiano da Boringhieri, Torino, 1972 (Traduzione di Teresa Pallucchini).

[92] Montagna, F. *For every n, the n-freely generated algebra is not functionally free in the equational class of diagonalizable algebras.* Studia Logica, 34, 1975.

[93] Montagna, F. *On the diagonalizable algebra of Peano arithmetic.* Bollettino UMI, 5, 1-B, 1979.

[94] Montagna, F. *On the algebraization of a Feferman's predicate.* Studia Logica, 37(3), 1978.

[95] Morley, M. *Categoricity in power.* Trans. Amer. Math. Soc., 114:514-538, 1965.

[96] Mostowski, A., Tarski, A. *Boolean rings with an ordered basis*, translated by M. J. Maczynski from German original *Boolesche ringe mit geordneter basis*, Fund. Math. 32 (1939), 69-86.

[97] Nagel, E., Newman, J. R. *Gödel's proof.* Routledge. 1958

[98] *Notizie di Logica*, gennaio–marzo 1982. Anno I - n.1, Scuola di specializzazione in Logica Matematica, Siena, 1982.

[99] *Notizie di Logica* aprile–giugno 1982. Anno I - n.2, Scuola di specializzazione in Logica Matematica, Siena, 1982.

[100] *Notizie di Logica*, ottobre–dicembre 1987. Anno VI - n.4, Scuola di specializzazione in Logica Matematica, Siena, 1987.

[101] *Notizie di Logica* gennaio–giugno 1988. Anno VII - n. 1-2, Scuola di specializzazione in Logica Matematica, Siena, 1988.

[102] *Notizie di Logica*, gennaio–giugno 1990. Anno IX - n. 1-2, notiziario dell'AILA, in collaborazione con la Scuola di specializzazione in Logica Matematica, Siena, 1990.

[103] *Notizie di Logica* luglio–dicembre 1992. Anno XI - n. 2-3-4, notiziario dell'AILA, in collaborazione con la Scuola di specializzazione in Logica Matematica, Siena, 1992.

[104] Pagli, P., a cura di, *Roberto Magari. Una mente algebrica.* Edizioni Quattro Venti, Urbino, 2000.

[105] Peano, G. *Opere scelte* a cura dell'UMI, Vol.II: "Logica Matematica, interlingua ed algebra della grammatica", Edizioni Cremonese, Roma, 1958.

[106] Peano, G. *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita.* Fratelli Bocca, Torino, 1889.

[107] Pellerey, M. *Oltre gli insiemi: nascita, crescita e crisi dell'insiemistica: nuovi orientamenti nella didattica dell'aritmetica.* Tecnodid, 1989.

[108] Piazza, M. *La logica e i fondamenti della matematica tra Ottocento e Novecento.* in "Il contributo italiano alla storia del pensiero." Scienze. Ottava appendice (pp.476-488.) Istituto dell'Enciclopedia italiana, Roma, 2013.

[109] Poggiolesi, F. *Gerhard Gentzen.* «www.aphex.it», 14 (2016).

[110] Prawitz, D. *Natural Deduction. A Proof-theoretical Study.* Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1965.

[111] Previale, F. *Observations on Takeuti's conjecture.* Proceedings of the conferences on mathematical logic, Vol. 3, 75-80, Univ. Siena, Siena, 1987.

[112] Previale, F. *Counterexamples to the cut-elimination property and to the coherence of pure logic.*. Proceedings of the conferences on mathematical logic, Vol. 4, 115-119, Univ. Siena, Siena, 1988.

[113] Parlamento, F., Previale, F. *The elimination of atomic cuts and the semishortening property for Gentzen's sequent calculus with equality.*. Rev. Symb. Log. 14, no. 4, 813-827, 2021.

[114] Prodi, G. *I nuovi programmi del biennio tra utopia e realtà.* Notiziario UMI, Novembre 1987.

[115] Prodi, G. *Problemi didattici inerenti all'attuazione dei nuovi programmi di matematica per il biennio.* Relazione tenuta nel 1988 alla Certosa di Pontignano (Siena), in "L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate", vol. 12, 2, 200-224.

[116] Rivetti Barbò, F. *Il teorema e il corollario di Gödel, indagine critica.* Vita e Pensiero, Milano, 1964.

[117] Robinson, A. *Logica Matematica.* In "Enciclopedia del Novecento", Istituto della Enciclopedia Italiana, 1978.

[118] Roero, C. S. (a cura di) *Peano e la sua Scuola; fra Matematica, Logica e Interlingua.* Atti del congresso internazionale di studi (Torino, 6-7 ottobre 2008).

[119] Rogers, H., *Theory of recursive functions and effective computability.* MIT Press, Cambridge, 1987.

[120] Rosolini, G. *Categories and effective computations.* Lecture Notes in Comput. Sci., 283, Springer, Berlin, 1987.

[121] Robinson, E. Rosolini, G. *Categories of partial maps.* Inform. and Comput. 79, no. 2, 95-130, 1988.

[122] Sambin, G. *Logica intuizionistica e logica classica a confronto.* Lettera Matematica Pristem, n. 62-63, 2007.

[123] Sambin, G. *Un'estensione del teorema di Löb.* Rendiconti del seminario matematico dell'università di Padova. 52, 1974.

[124] Sambin, G. *An effective fixed-point theorem in intuitionistic diagonalizable algebras.* Studia Logica, 35, 1976.

[125] Sambin, G., Valentini, S. *The modal logic of provability: the sequential approach.* Journal of philosophical logic, 11, 1982.

[126] Shelah, S. *Uniqueness and Characterization of Prime Models over Sets for Totally Transcendental First-Order Theories.* The Journal of Symbolic Logic Vol. 37, No. 1 (Mar., 1972), pp. 107-113.

[127] Smullyan, R. *What is the name of this book? The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*, Prentice-Hall, 1978.

[128] Hodges, W., Thomas, S. *First-order Model Theory*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/modeltheory-fo/>.

[129] Tarski, A., Thompson, F. B. *Some general properties of cylindric algebras.* Bull. of the Amer. Math. Soc. 58, 1952.

[130] Tarsky, A. *Contributions to the Theory of Models I.* Indag. Math., 16:572-581, 1954.

[131] Tarsky, A. *Contributions to the Theory of Models II.* Indag. Math., 16:582-588, 1954.

[132] Tarsky, A. *A decision method for elementary algebra and geometry.* a cura di J.McKinsey, RAND Corporation, Santa Monica, California. Seconda edizione, 1951, University of California Press, Berkeley.

[133] Tarsky, A. *Der Wahrheitsbegriff in den formalisiert Sprachenz*, Studia Philosophica 1, pp. 261-405, 1935 (versione in tedesco di un articolo originale in polacco del 1933). Traduzione italiana: "Il concetto di verità nei linguaggi formalizzati", in F. Rivetti Barbò (a cura di), L'antinomia del mentitore nel pensiero contemporaneo da Peirce a Tarski, Vita e Pensiero, Milano, pp. 391-677, 1961.

[134] Tarsky, A., Vaught, R. *Arithmetical extension of relational systems* Comp. Math. 13, pp. 81-102, 1957

[135] Toffalori, C. *Profilo di Alfred Tarski*, «www.aphex.it», 8 (2013).

[136] Toffalori, C. *On pseudo* $\aleph_0$*-categorical structures.* In Logic Colloquium '84, pages 303-327, Amsterdam, 1986. North Holland.

[137] Tranchini, L. *Dag Prawitz*, «www.aphex.it», 9 (2014).

[138] Troelstra, A. S. *History of constructivism in the 20th century.* In "Set Theory, Arithmetic, and Foundations of Mathematics Theorems, Philosophies", pp. 150 - 179, Cambridge University Press Print, 2011.

[139] Ursini, A. *Intuitionistic diagonalizable algebras.* Algebra Universalis 9, 1979.

[140] Wang, R. *The Chinese imperial examination system: an annotated bibliography.* The Scarecrow Press, Plymouth, UK, 2013.

[141] Wason, P. C. *Reasoning* in Foss, B. (Ed.) "New horizons in psychology", Harmondsworth, Penguin Books, 1966.