Giuseppe Reale*

IL RUOLO DELL'ASIMMETRIA RIGUARDO LE PREFERENZE

Abstract. This work is about the role of asymmetry in distribution of portfolio returns and preferences of investors. It is known that skewness of distribution can play some roles about preferences but usually in economic theory this role is merged with the concept of utility function, and in particular with expected utility maximization. This perspective seems me unsatisfactory in two respects. Firstly the financial intuition behind the opportunity of consider asymmetry become too abstract and difficult to grasp for practitioners. Secondly this strategy work only if the third moment exist, this is not a weak assumption for financial returns. Here we suggest another strategy. It takes in consideration the comparison between mean and median of return distribution. So we achieve a representation that give us an intuition about the opportunity of consider with favour positive asymmetry and with disfavour negative one. The main advantage of this representation is that it involves probabilistic concepts only (no utility theory) and it is easy to understand and communicate for practitioners too. Moreover in this way the existence of third moment is not required, first one it is enough.

Keywords: skewness, preference, moments

1. Introduzione

In finanza relativamente al tema dell'asset allocation è importante il ruolo delle preferenze dell'investitore. Queste, in generale, riguardano anche la distribuzione dei rendimenti del paniere di asset a partire dal quale l'esercizio di asset allocation è condotto. Più in particolare le preferenze si riverberano nelle scelte di asset allocation effettuate e, in generale, influenzano la distribuzione dei rendimenti del portafoglio selezionato.

* Sapienza Università Roma

È ben nota, ed è anche facilmente intuibile, l'importanza di grandezze come media e varianza della distribuzione del rendimento di portafoglio ma in letteratura una certa importanza è stata attribuita anche al concetto di asimmetria. In particolare la preferenza per un rendimento il più possibile elevato in combinato disposto con una varianza il più possibile ridotta è usualmente considerata come condizione necessaria per definire un investiture come *razionale* ed *avverso al rischio*. Peraltro questo è il punto di partenza per giustificare il modello media-varianza.

È invece meno evidente il ruolo dell'asimmetria.

Seguendo il paradigma della Teoria dell'Utilità, e più in particolare quello di massimizzazione dell'utilità attesa, quanto precedentemente affermato riguardo le preferenze su media e varianza si concretizza in condizioni analitiche sulla *funzione di utilità* dell'investitore [$U(\mathrm{r_p})$]. In particolare è stato dimostrato che le condizioni che devono valere su $U(\mathrm{r_p})$ sono: derivata prima positiva e seconda negativa.

In massima sintesi, il paradigma della massimizzazione dell'utilità attesa è molto diffuso e porta a considerare una forma di questo tipo[1]:

$$\mathrm{E}[U(\mathrm{r_p})] = \int_{-\infty}^{+\infty} U(\mathrm{r_p})dF(\mathrm{r_p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U^{(n)}(E[\mathrm{r_p}])}{n!} E(\mathrm{r_p} - E[\mathrm{r_p}])^n$$

dove a destra si sfrutta un'espansione in serie di Taylor attorno al valore atteso di $\mathrm{r_p}$ (rendimento di portafoglio). La natura aleatoria di $\mathrm{r_p}$ porta a considerare la sua distribuzione [$F(\mathrm{r_p})$] e l'espansione in serie di Taylor porta a far collassare le caratteristiche rilevanti nei momenti.

A partire da questa rappresentazione è stato anche argomentato che l'asimmetria negativa è una caratteristica non desiderabile per la distribuzione dei rendimenti di portafoglio mentre l'asimmetria positiva è desiderabile. Seguendo il paradigma in oggetto è stato dimostrato che

---

[1] Per una spiegazione che porta a trovare una forma di questo tipo si può fare riferimento a: *Multi moment Asset Allocation and Pricing Models* - Jurczenko and Maillet; John Wiley and Sons Ltd (2006; par 1.2). Oppure: *Financial Modeling of the Equity Market From CAPM to Cointegration* - Fabozzi Focardi Kolm; John Wiley & Sons (2006); pag 131-137. O anche: *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions* - Jondeau, Poon and Rockinger – Springer Finance 2007; ("Direct optimization of expected utility"; pag 350).

questo tipo di preferenza implica derivata terza positiva sulla funzione di utilità[2].

Tuttavia non è facile afferrare il contenuto pratico di questa condizione. Infatti a volte la preferenza per l'asimmetria positiva è ipotizzata come valida senza veramente comprendere perché questa sia una scelta ragionevole. Un errore comune tra i practitioner e nel sostenere ragionamenti che mostrano confusione tra i concetti di: asimmetria negativa, media negativa, maggiore variabilità. In massima sintesi si tende a credere che l'asimmetria negativa porti a deprimere l'aspettativa e/o ad aumentare la variabilità dei rendimenti. Questo è un errore logico perché la preferenza o meno per asimmetria positiva o negativa deve essere valutata a parità di altre condizioni ed in particolare a parità di media e varianza di portafoglio. Discorsi più problematici riguardano il concetto di rischio e l'effetto dell'asimmetria su esso. Le problematicità riguardano il fatto di cercare di valutare l'effetto dell'asimmetria senza prima aver definito il concetto di rischio.

Dal lato più accademico invece esiste la tendenza nel sostenere come valida l'indesiderabilità dell'asimmetria negativa senza dare motivazioni e/o in base al riconoscimento della derivata terza negativa sulla particolare funzione di utilità a cui si sta facendo riferimento. Tuttavia questa prassi non sembra soddisfacente dal punto di vista logico; questo perché la funzione di utilità dovrebbe rappresentare/esprimere le preferenze e non suggerirle/implicarle.

Quello che segue è un ragionamento che prova a rendere in termini il più possibile semplici ed intuitivi la desiderabilità dell'asimmetria positiva e l'indesiderabilità di quella negativa per la distribuzione del rendimento di portafoglio. L'idea è di fare riferimento solamente a concetti probabilistici e che non hanno alcun legame con la Teoria dell'Utilità. In particolare si tratta di concetti facilmente traducibili in termini finanziari.

2. Il concetto di asimmetria

In generale il ruolo dell'asimmetria è quello di dare indicazioni sulla forma della distribuzione (*asimmetria* e *curtosi* sono detti *indici*

---

[2] Questo risultato è stato anche generalizzato. Infatti è stato mostrato come per l'investitore avverso al rischio sia da preferire asimmetria massimizzata e curtosi minimizzata. In generale sarebbero da preferire momenti pari minimizzati e momenti dispari massimizzati. Il contributo principale su questo tema è: "*On the Direction of Preference for Moments of Higher Order Than Variance*," Scott and Horvath - *Journal of Finance* 35 (1980), pp. 915–919.

di forma). Peraltro, in base alla regola che mostreremo più avanti, possiamo anche dire che il ruolo dell'asimmetria è di darci indicazioni, data la media[3], sul comportamento della distribuzione rispetto ad essa; infatti sotto asimmetria la parte destra e sinistra della distribuzione sono diverse. Deve essere però chiaro, ed a volte non lo è, o comunque va sottolineato che anche per le distribuzioni asimmetriche la media resta il principale indice di posizione. Il mancato riconoscimento di questa circostanza può portare ad idee contraddittorie su cosa veramente significhi "asimmetria".

È opportuno già da adesso segnalare un problema. In finanza è solito utilizzare i concetti di asimmetria e/o momento terzo e/o indice di asimmetria (di Fisher) come sinonimi. Per il secondo ed il terzo concetto è accettabile, ci sono da considerare solo problemi di standardizzazione, ma per il primo no. Il concetto di asimmetria in distribuzione è delicato e non dovrebbe essere riferito immediatamente al momento terzo (o al connesso indice di Fisher) anche se nella letteratura finanziaria è prassi.

2.1. l'indice di asimmetria di Fisher

Per dare conto della presenza di *asimmetria* sono stati proposti in letteratura vari *indici di asimmetria*; il più diffuso in finanza è quello di Fisher. Questo è basato sul momento terzo centrato:

$$s_p^3 = E[r_p - \mu_p]^3$$

con r_p intendiamo il rendimento di portafoglio (la v.a. in analisi); con μ_p la sua media. Quindi l'indice di asimmetria di Fisher è:

$$\frac{s_p^3}{\sigma_p^3}$$

Il suo utilizzo è talmente diffuso che il concetto di asimmetria vi è spesso immediatamente associato senza ulteriori precisazioni ed è genericamente chiamato indice di asimmetria/skewness. Tuttavia il concetto di asimmetria è ampio e può portare a fare riferimento anche ad

---

[3] A meno di precisazioni in senso contrario parleremo di v.a. a media finita.

altre misure[4]. In ogni caso diversi indici di asimmetria hanno la caratteristica comune di annullarsi quando la distribuzione sotto analisi è simmetrica.

Tuttavia, sfortunatamente, l'annullamento di un particolare indice di asimmetria (compreso quello di Fisher) è *condizione solo necessaria e non anche sufficiente* per dimostrare la presenza di simmetria. Sarebbe allora operativamente consigliabile l'utilizzo congiunto di più indici ma oltre ed essere una prassi onerosa neppure questa, in generale, offre garanzie. In altre parole l'indice di Fisher non è un infallibile strumento di discernimento tra distribuzioni simmetriche e non. Peraltro tale problema non è l'unico e neppure il più importante.

Il limite più importante dell'indice di Fisher è che richiede, almeno, la finitezza del momento terzo[5]. Sfortunatamente si deve notare che per i rendimenti finanziari l'esistenza del momento terzo non è scontata e rappresenta invece un'ipotesi problematica[6]. Questo tema è legato a quello delle *code spesse*, caratteristica tipica per i rendimenti finanziari. Quindi, proprio per i rendimenti finanziari, l'indice di asimmetria di Fisher non è una scelta particolarmente felice. Infatti possiamo notare che esistono distribuzioni che sono di notevole interesse in finanza ed hanno momento terzo non definito; come ad esempio le α-stabili o la *t-Student* per la quale il momento terzo, quindi l'indice di Fisher, è definito solo se il *tail index* è maggiore di 3.

2.2. Criterio del confronto tra media e mediana

Un modo non legato ai momenti superiori al primo, e quindi più generale dell'indice di Fisher, di accostarsi al problema dell'asimmetria è quello di focalizzarsi sulle relazioni tra media, mediana e moda. Alcuni problemi sono connessi alle distribuzioni plurimodali ma i rendimenti finanziari sono quasi sempre ben descrivibili da distribuzioni unimodali; comunque il ruolo della moda è trascurabile nel ragionamento che proporremo. In particolare:

- se <u>media < mediana</u> si dovrebbe avere asimmetria negativa

---

[4] Per una concisa rassegna di vari indici di asimmetria si può fare riferimento a: *Statistica* – D. Piccolo, Il Mulino, terza edizione pag 157-164.

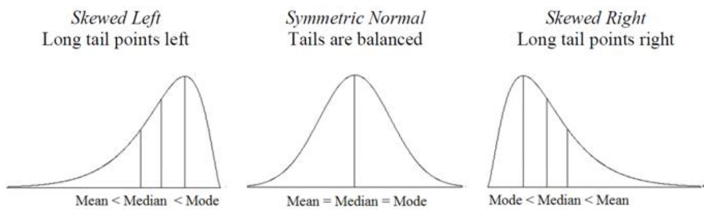
[5] In termini di stima corretta e/o consistente è solitamente necessaria anche la finitezza di momenti superiori.

[6] Per alcuni problemi relativi alla stima della skewness con l'indice tipico (quello di Fisher) ed alcune alternative vedere: *On More Robust Estimation of Skewness and Kurtosis: Simulation and Application to the S&P500 Index* – Kim and White; Finance Research Letters Volume 1, Issue 1, March 2004, Pages 56-73.

- se <u>media > mediana</u> si dovrebbe avere asimmetria positiva
- se media = mediana si dovrebbe avere simmetria

è opportuno riferirsi a questo grafico[7]:

Figura 1. distribuzioni: asimmetrica a sinistra, simmetrica, asimmetrica a destra



Source: Doane and Seward (2011)

sfortunatamente è stato dimostrato che anche questa regola non è infallibile[8]; tuttavia essa fallisce solo in casi patologici. Limitando il campo alle distribuzioni continue ed unimodali (ovvero quelle più interessano in finanza) molti di questi casi particolari non si possono produrre. Questo ci porta a dire che, almeno per i rendimenti finanziari, gli indici di asimmetria basati sul confronto tra media e mediana sono affidabili o comunque preferibili a quelli basati sul momento terzo[9].

Tra poco proporremo un ragionamento basato sulla regola sopra. Tuttavia per uscire dalle ambiguità è necessario dare una definizione del concetto di *simmetria in distribuzione*.

---

[7] Tratto da: *Measuring Skewness: A Forgotten Statistic?*- Doane and L. E. Seward; Journal of Statistics Education, Volume 19, Number 2(2011). Pag 3.

[8] Infatti nel manuale di Piccolo (2010) è affermato (pag 158) che "… *mentre media ≠ mediana implica certamente un'asimmetria nella distribuzione, media = mediana non implica necessariamente una simmetria*" ed è anche offerto un esempio a dimostrazione (pag 163 – 164). In particolare possiamo dire che se la distribuzione è simmetrica allora deve valere media = mediana, ma questa equivalenza non prova inequivocabilmente la presenza di simmetria. In generale non è possibile definire il concetto di *simmetria* solo a partire dal confronto tra media e mediana anche se a volte, forse per motivi di semplicità, simili definizioni sono state suggerite. Infatti in letteratura sono state avanzate perplessità nei confronti del rapporto tra media e mediana in relazione al discernimento tra distribuzioni simmetriche ed asimmetriche, vedere ad esempio: *Mean, Median, and Skew: Correcting a Textbook Rule* - Hippel - *Journal of Statistics Education* Volume 13, Number 2 (2005). L'Autore mostra delle distribuzioni che pur essendo right skew hanno media < mediana.

[9] Indici interessanti in questo senso sono quelli di: Hotelling e Solomon, Yule e Bowley. Vedere Piccolo (2010, pag 158).

Possiamo allora dire che una v.a. X è simmetrica se:

$$p(m - x) = p(m + x)$$

dove $p()$ è la *funzione di densità* per la v.a X, se continua, o la *funzione di probabilità*, se discreta; m è la mediana di X
Limitandoci alle v.a. continue possiamo aggiungere che la simmetria implica:

$F(m - x) = 1 - F(m + x)$, dove $F()$ è la CDF di X.

Un indice di asimmetria che si basa sulla definizione appena data è quello di Bonferroni. Esso è scritto direttamente a partire dalla definizione e quindi è più generale di quelli basati sui momenti, tuttavia è poco utilizzato[10].

D'altra parte è anche da dire che aggiungendo ipotesi distributive le limitazioni sui vari indici di asimmetria sarebbero da ridiscutere. Infatti in base a particolari ipotesi distributive utili in finanza la presenza o meno di simmetria è direttamente, ed indiscutibilmente, riferibile a qualche parametro. Ad esempio è così per la *t-skew* dove il segno di un apposito parametro indica il verso dell'asimmetria, in caso di parametro nullo si ottiene la *t-Student*.

2.3. Rappresentazione basata sul confronto tra media e mediana

Una volta chiarito il significato probabilistico dell'asimmetria in distribuzione possiamo tornare a parlare del suo rapporto con le preferenze dell'investitore.

L'intuizione finanziaria che porta a considerare con favore l'asimmetria positiva (o a destra) e con sfavore quella negativa (o a sinistra) è basata sul grafico precedente. In effetti si può notare che per le distribuzioni asimmetriche a sinistra si registrano valori estremi a sinistra più frequentemente di quanti se ne osservano a destra; mentre per le distribuzioni asimmetriche a destra si registrano valori estremi a destra più frequentemente di quanti se ne osservano a sinistra.

[10] Per una descrizione si può vedere il manuale di Piccolo (2010; pag 159 – 161). Un test basato sull'indice di Bonferroni è discusso in: *Distribution-free test for symmetry based on Bonferroni's measure* – Mira; *Journal of Applied Statistics, Vol. 26, No. 8, 1999, pag 959- 972.*

Adesso, senza perdita di generalità, pensando a quelle dei rendimenti come distribuzioni a media nulla: per quelle asimmetriche a destra i guadagni estremi sono più probabili che le perdite estreme mentre per quelle asimmetriche a sinistra le perdite estreme sono più probabili dei guadagni estremi. Per le simmetriche le perdite ed i guadagni, più o meno estremi, sono comunque equiprobabili.

L'intuizione finanziaria relativa al concetto di asimmetria è tutta qui. È per questo che le distribuzioni asimmetriche a sinistra sono indesiderabili. In letteratura è difficile trovare spiegazioni tecniche a sostegno di questo argomento, in questa sede proponiamo il seguente ragionamento.

In base al confronto tra media e mediana, per le distribuzioni con asimmetria negativa si deve avere:

"media < mediana" , quindi $P(X < \mu) < P(X > \mu)$;

a questo punto è utile la seguente scomposizione

$$E[X] = \mu = E[X|X < \mu]P(X < \mu) + E[X|X > \mu]P(X > \mu)$$

quindi $\mu - E[X|X < \mu]P(X < \mu) = E[X|X > \mu]P(X > \mu)$

ed allora considerando per semplicità $\mu = 0$ si ha[11]

$$|E[X|X < 0]P(X < 0)| = |E[X|X > 0]P(X > 0)|$$

questa relazione è vera in generale, a prescindere da uguaglianza tra $P(X < 0)$ e $P(X > 0)$ (simmetria) o disuguaglianza (asimmetria). Ma nel caso di asimmetria negativa deve valere

$$|E[X|X < 0]| > |E[X|X > 0]|$$

tale rappresentazione aiuta a capire che in caso di asimmetria negativa, ragionando di valori assoluti e separando le perdite dai guadagni, le perdite attese sono maggiori dei guadagni attesi; mentre in caso di asimmetria positiva, le perdite attese sono minori dei guadagni attesi; in caso di simmetria le quantità si equivalgono.
Questa dimostrazione riguarda i guadagni/perdite attesi, considerati separatamente, non gli eventi estremi; tuttavia il concetto è strettamente

[11] Notare che: $| - E[X|X < \mu]P(X < \mu)| = |E[X|X < \mu]P(X < \mu)|$

connesso. Infatti se le “perdite attese” sono maggiori dei “guadagni attesi” sembra sufficiente aggiungere qualche ipotesi distributiva per estendere questo risultato agli eventi estremi[12]. Peraltro anche a prescindere da tali ipotesi il risultato appena dimostrato può anche essere considerato in se stesso come un argomento a favore dell’asimmetria positiva. È un risultato facilmente comprensibile dall’investitore medio.

Adesso, prescindendo dall’annullamento della media ci potremmo ricondurre a una forma del tipo

$$|E[X|X<\mu]-\mu| > |E[X|X>\mu]-\mu|$$

o in termini più concisi

$$\mu-\mu_- > \mu_+ - \mu$$

Dove $\mu_- = E[X|X<\mu]$ e $\mu_+ = E[X|X>\mu]$
in questo caso, più generale, bisognerebbe essere un poco più accorti nel definire le “perdite” ed i “guadagni” in termini di differenze dall’aspettativa, ma l’interpretazione sostanziale è la precedente. Inoltre è possibile verificare la seguente indicativa uguaglianza

$$\frac{\mu-\mu_-}{\mu_+-\mu} = \frac{p_+}{p_-}$$

dove $p_+ = P(X>\mu)$ e $p_- = P(X<\mu)$

Ovvero la condizione sull’aspettativa relativa tra guadagni e perdite dipende solamente dalla condizione di asimmetria intesa come rapporto tra le probabilità indicate. I due rapporti sono sempre uguali, ma unitari solo sotto simmetria (>1 asimmetria negativa, <1 positiva).
Quello appena trovato può essere considerato a tutti gli effetti un indicatore di asimmetria. Per una lettura più convenzionale è sufficiente una trasformazione del tipo:

$$s = 1 - \frac{p_+}{p_-}$$

[12] È un tema che non affrontiamo in questa sede sotto il profilo tecnico ma, euristicamente, se le distribuzioni in analisi sono simili a quelle mostrate in Figura 1 (ovvero di forma campanulare, cioè: continue, unimodali, con code monotone decrescenti, senza troncamenti, ecc) il risultato mostrato per gli eventi (guadagni/perdite) attesi è estendibile agli eventi estremi; o almeno qui si suggerisce questa congettura.

per le distribuzioni asimmetriche a sinistra $s < 0$ per quelle asimmetriche a destra $s > 0$ per quelle simmetriche $s = 0$

Peraltro è da notare che sotto asimmetria positiva
$p_+ < p_-$ e $\mu - \mu_- < \mu_+ - \mu$ (probabilità di perdita maggiore ma perdita attesa minore).
Questa circostanza, che sarebbe quella preferibile, può stranire i practitioner per via di $p_+ < p_-$ (probabilità di perdita maggiore) ma è proprio quella che deve valere se i tre tipi di distribuzione (asimmetrica negativa, asimmetrica positiva, simmetrica) devono condividere la stessa media, quindi la stessa redditività. Infatti la preferibilità di cui parliamo è basata solo sulla riduzione della dimensione delle perdite attese e/o estreme e non sulla redditività generale.

3. Conclusioni

La circostanza secondo cui l'asimmetria positiva nella distribuzione dei rendimenti del titolo/portafoglio in cui si investe è preferibile a quella negativa è un fatto sostenuto da tempo in finanza.

La spiegazione offerta sopra di perché questo sia ragionevole è più convincente, e soprattutto più facilmente comprensibile all'investitore medio, di quella usualmente addotta. Quella usuale è basata su concetti troppo astratti come particolari condizioni analitiche riguardanti le funzioni di utilità. Inoltre queste condizioni coinvolgono il momento terzo, quantità che può portare problemi. Il ragionamento sopra prescinde dall'esistenza di momenti superiori al primo, coinvolge solo concetti probabilistici e porta a parlare di quantità facilmente intuibili.

References

DOANE AND SEWARD (2011), Measuring Skewness: A Forgotten Statistic?, *Journal of Statistics Education,* Volume 19, Number 2.

FABOZZI FOCARDI KOLM (2006), *Financial Modeling of the Equity Market From CAPM to Cointegration*, John Wiley & Sons.

HIPPEL (2005), Mean, Median, and Skew: Correcting a Textbook Rule, *Journal of Statistics Education,* Volume 13, Number 2.

JONDEAU POON AND ROCKINGER (2007), *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions,* Springer Finance.

JURCZENKO AND MAILET (2006), *Multi moment Asset Allocation and Pricing Models*, John Wiley and Sons.
KIM AND WHITE (2004), On More Robust Estimation of Skewness and Kurtosis: Simulation and Application to the S&P500 Index, *Finance Research Letters* Volume 1, Issue 1, March 2004, Pages 56-73.
MIRA (1999), Distribution-free test for symmetry based on Bonferroni's measure, *Journal of Applied Statistics,* Vol. 26, No. 8, 1999, pag 959- 972.
PICCOLO (2010), *Statistica*, Il Mulino, terza edizione.
SCOTT AND HORVATH (1980), On the Direction of Preference for Moments of Higher Order Than Variance, *Journal of Finance,* Vol 35 Number 4 pp. 915–919.