

Salvatore Monaco    Claudia Califano

Paolo Di Giamberardino    Mattia Mattioni

# Teoria dei Sistemi

lineari stazionari  
a dimensione finita

**ISBN 978-88-9385-268-5**

© Copyright 2021

Società Editrice Esculapio s.r.l.

Via Terracini, 30 - 40131 Bologna

[www.editrice-esculapio.com](http://www.editrice-esculapio.com) - [info@editrice-esculapio.it](mailto:info@editrice-esculapio.it)

Impaginazione: Carlotta Lenzi

Layout Copertina: Carlotta Lenzi

Stampato da: LegoDigit - Lavis (TN)

Printed in Italy

Le fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale, con esclusione quindi di strumenti di uso collettivo) possono essere effettuate, nei limiti del 15% di ciascun volume, dietro pagamento alla S.I.A.E del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Tali fotocopie possono essere effettuate negli esercizi commerciali convenzionati S.I.A.E. o con altre modalità indicate da S.I.A.E. Per le riproduzioni ad uso non personale (ad esempio: professionale, economico o commerciale, strumenti di studio collettivi, come dispense e simili) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del volume.

CLEARedi - Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali

Corso di Porta Romana, n. 108 - 20122 Milano

e-mail: [autorizzazioni@clearedi.org](mailto:autorizzazioni@clearedi.org) - sito: <http://www.clearedi.org>.

# Premessa

Il libro rappresenta l'evoluzione di note del corso e precedenti testi del primo autore che ha tenuto l'insegnamento di Teoria dei Sistemi alla Sapienza dal 1989; la sequenza dei capitoli riflette l'organizzazione delle lezioni ed il tono colloquiale cerca di stemperare il formalismo del rigore matematico mantenendo i livelli di generalità ed astrazione necessari.

Gli argomenti trattati ricoprono i fondamenti metodologici per lo studio dei sistemi dinamici controllati e rappresentano la base dei percorsi di formazione in Automatica, ma anche di percorsi di formazione orientati al progetto di sistemi di controllo e automazione negli specifici settori applicativi.

Tutti i contenuti, organizzati in nove capitoli, possono essere trattati con un diverso livello di approfondimento in corsi da sei, nove fino a dodici crediti. È anche possibile seguire percorsi adatti ad assicurare obiettivi di formazione specifici: omettendo i capitoli sul comportamento in frequenza, lo studio dei sistemi interconnessi e l'avvio alle procedure di progetto, se la modellistica e lo studio dei sistemi dinamici sono gli obiettivi (corsi di laurea nell'area gestionale); omettendo i sistemi a tempo discreto e lo studio nel dominio del tempo dei sistemi con modi naturali multipli, se l'obiettivo è fornire le basi per il successivo studio dei sistemi di controllo (corsi di studio in ingegneria meccanica, elettrotecnica e aerospaziale).

L'organizzazione del materiale, che prevede aggiornamenti nella versione online, si propone di dare l'avvio alla costruzione di *un testo dinamico*, in grado di accompagnare le esigenze del lettore e proporre, esso stesso, una struttura aggiornata alle condizioni ed esigenze di apprendimento e formazione.

Qui nel seguito in sintesi viene richiamato il contenuto dei singoli capitoli.

L'*Introduzione* ha lo scopo di inquadrare il contesto nel quale i contenuti si collocano: l'Automatica. Premesso che la teoria dei sistemi si pone come disciplina autonoma, proponendo un approccio unificante nella comprensione e analisi di fenomeni e processi da diversi contesti applicativi, perché confinare lo studio ad un settore, seppure interdisciplinare, come quello dell'Automatica? Ebbene sono due i principali motivi. Il primo motivo, di carattere generale, è collegato al

livello di astrazione: questo aspetto comune ai due approcci permette di estendere, ai sistemi di controllo, i metodi di studio dei sistemi controllati (sistemi in cui sono specificate le grandezze attraverso le quali esercitare l'intervento), quelli considerati nel testo; vista in questa chiave la collocazione nel settore dell'Automatica non rappresenta un confinamento; i metodi proposti hanno infatti una valenza autonoma rispetto al loro ruolo nell'applicazione. Il secondo motivo, più specifico, è collegato agli oggetti studiati: si tratta dei sistemi dinamici, controllati, lineari e stazionari, la classe di sistemi che sono alla base del progetto dei sistemi di controllo. Resta comunque inteso che i contenuti compongono un corpo autonomo di metodi per lo studio dei sistemi dinamici lineari.

Il *primo capitolo* introduce, mediante esempi, la classe di modelli matematici che rappresentano i sistemi dinamici allo studio. La costruzione di modelli di semplici fenomeni e processi da diversi ambiti disciplinari introduce ai concetti di base della modellistica, della equivalenza dei modelli, della generalità del modello (fenomeni descritti dallo stesso modello) e della rappresentatività del fenomeno descritto (approssimazione lineare). Si prendono in considerazione processi e fenomeni che evolvono nel tempo continuo o che possono essere descritti mediante modelli in cui la variabile indipendente è l'insieme dei numeri naturali (tempo discreto).

Nel *secondo capitolo*, definita formalmente la classe dei sistemi allo studio, quelli che ammettono una rappresentazione differenziale (o alle differenze) con lo stato lineare stazionaria a dimensione finita, viene sviluppata un'analisi puntuale, nel dominio del tempo, della struttura delle evoluzioni corrispondenti a prefissate condizioni e sollecitazioni agenti sul sistema. Lo studio è proposto in più fasi per consentire diversi livelli di approfondimento. Lo studio matematico è accompagnato da numerosi commenti e osservazioni per collegarlo al comportamento fisico.

Il *terzo capitolo* studia il fondamentale problema della stabilità: sotto quali condizioni a piccole perturbazioni corrispondono piccoli effetti nelle evoluzioni? È certamente un problema importante se si tiene conto delle incertezze che si hanno nella modellistica e nelle misure. A partire dalle definizioni, vengono individuate le condizioni ed i criteri più noti per la classe dei sistemi allo studio. In una seconda fase vengono proposte anche alcune soluzioni per rappresentazioni non lineari, il criterio diretto ed indiretto di Lyapunov che è un approfondimento importante se si tiene conto del fatto che i modelli lineari sono in genere approssimazione di fenomeni più complessi.

Il *quarto capitolo* tratta dello studio dei sistemi dinamici lineari stazionari nel dominio della variabile complessa. A partire dalla caratterizzazione della trasformata di Laplace (o Zeta) e delle sue proprietà vengono messi in luce i collegamenti con lo studio nel dominio del tempo assieme alle potenzialità che consentono di dare risposte precise a problemi difficili da risolvere nel dominio del tempo (caso di matrici dinamiche non diagonalizzabili).

Il *quinto capitolo* rivela una diversa possibile caratterizzazione del comportamento di un sistema lineare dinamico, quello insito nelle modalità di rispondere

a sollecitazioni periodiche. È questo un punto di vista accreditato nei settori dell'Ingegneria e molto utile nel progetto dei sistemi di controllo. Nella trattazione vengono stabiliti i collegamenti più importanti con il funzionamento nel tempo e sviluppata la trattazione della rappresentazione grafica del comportamento in frequenza. Si tratta di aspetti che sono propedeutici al progetto di sistemi di controllo nei diversi comparti applicativi.

Il *sesto capitolo* tratta in senso lato della corrispondenza tra modelli che descrivono il comportamento forzato ingresso-uscita, eventualmente espresso mediante un funzionale causale lineare, e le rappresentazioni con lo stato di un sistema lineare stazionario. Si tratta di un problema importante in quanto collegato alla possibilità di costruire modelli e/o emulatori fisici di un comportamento ingresso-uscita predefinito. Tale possibilità si traduce quindi nella possibilità di far funzionare in tempo reale un dispositivo (modello o emulatore) che riproduca tale legame. Gli approfondimenti possibili sono qui molteplici, ma viene proposta una trattazione semplificata che permette di acquisire gli aspetti salienti collegati al problema.

Il *settimo capitolo* introduce e propone i metodi per lo studio delle proprietà dello spazio di stato. È necessario avere presente che lo stato è quella variabile che in un sistema dinamico racchiude in sé tutte le informazioni necessarie a specificare i comportamenti futuri (quella variabile che mantiene ad ogni istante di tempo le informazioni sul passato). La possibilità di rilevare lo stato, con misure dell'uscita, e di condizionarne il comportamento, mediante interventi dall'esterno, sono gli aspetti a fondamento delle possibilità di interazione con il sistema. Ebbene queste potenzialità possono essere ricondotte allo studio della raggiungibilità e dell'osservabilità. Questi sono i temi oggetto di studio che conducono, con la scomposizione di Kalman, a mettere in evidenza la struttura interna di un sistema controllato e di controllo.

L'*ottavo capitolo* studia i sistemi interconnessi lineari. Vengono introdotte le interconnessioni elementari ed i collegamenti che conducono ad un sistema interconnesso di questo tipo e vengono proposte le procedure per individuare i modelli, ingresso-uscita e rappresentazione con lo stato. Vengono messe in luce le condizioni che specificano le proprietà del sistema interconnesso in relazione a quelle dei componenti e sviluppato lo studio della stabilità. Il criterio di Nyquist è un importante strumento per lo studio della stabilità dei sistemi interconnessi, in particolare dei sistemi di controllo a retroazione, e consente un naturale collegamento con la caratterizzazione del sistema in frequenza.

Il *nono capitolo* completa la trattazione e propone un metodo di progetto, la modifica del comportamento dinamico di un sistema mediante retroazione dall'uscita, che ben si presta a mostrare il ruolo degli strumenti di analisi proposti. Anche solo con riferimento ai metodi che si riferiscono al dominio del tempo: la struttura impiegata si ispira a quanto studiato nel capitolo ottavo, le proprietà coinvolte sono quelle del settimo, gli effetti sul comportamento ingresso-uscita si collegano ai contenuti del sesto, le modalità di comportamento e le sue caratteristiche dinamiche sono quelle comprese nei capitoli due e tre in relazione alla collocazione degli autovalori ed alla stabilità dei sistemi.

Con l'auspicio degli autori di stimolare nel lettore l'interesse per la materia e l'entusiasmo per lo studio.

Settembre 2021

**Gli autori**

# Indice

<b>Premessa</b>	<b>iii</b>
<b>La Teoria dei Sistemi nell'Automatica</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Modelli di sistemi dinamici da diverse discipline</b>	<b>1</b>
1.1 Sistemi a tempo continuo . . . . .	2
1.1.1 Un semplice sistema meccanico . . . . .	2
1.1.2 Una rete elettrica elementare . . . . .	4
1.1.3 Motore elettrico . . . . .	6
1.1.4 Sistemi multi-agente . . . . .	8
1.2 Sistemi a tempo discreto . . . . .	9
1.2.1 Un algoritmo di integrazione . . . . .	10
1.2.2 La dinamica del prezzo . . . . .	11
1.2.3 La dinamica del prodotto nazionale lordo . . . . .	12
1.2.4 Un sistema radar di inseguimento . . . . .	14
1.2.5 Evoluzione della popolazione per classi di età . . . . .	16
1.3 Trasformazioni dello stato e rappresentazioni equivalenti . . . . .	19
1.4 Modelli equivalenti di sistemi fisici differenti . . . . .	21
1.5 Approssimazioni lineari di sistemi non lineari . . . . .	22
1.5.1 Due esempi di applicazione . . . . .	25
1.6 Ulteriori esempi di rappresentazioni con lo stato . . . . .	27
1.6.1 Dinamica newtoniana . . . . .	27
1.6.2 Satellite in orbita circolare . . . . .	29
1.6.3 Dinamica verticale di un missile . . . . .	30
1.6.4 Motore elettrico in corrente continua . . . . .	31
1.6.5 Levitazione magnetica . . . . .	33
1.7 La messa in scala . . . . .	34
<b>2 Analisi dei Sistemi Lineari Stazionari nel dominio del tempo</b>	<b>37</b>
2.1 Sistemi a tempo continuo: rappresentazioni implicite ed esplicite . . .	38
2.1.1 Da una descrizione esplicita alla rappresentazione differenziale	45
2.1.2 Sistema come l'insieme delle rappresentazioni equivalenti . . .	46

2.2	La matrice di transizione nello stato . . . . .	48
2.2.1	Operatore regolare . . . . .	49
2.2.2	Il caso generale . . . . .	53
2.3	I modi naturali nell'evoluzione libera dello stato . . . . .	56
2.3.1	I modi naturali di un operatore regolare . . . . .	56
2.3.2	Parametri caratteristici delle leggi di moto . . . . .	65
2.3.3	Il caso generale . . . . .	67
2.4	I modi naturali nello stato e in uscita . . . . .	73
2.4.1	Il caso di un operatore regolare . . . . .	73
2.4.2	Il caso generale . . . . .	77
2.5	Sistemi a tempo discreto: rappresentazioni implicite ed esplicite . . .	80
2.5.1	La matrice di transizione . . . . .	85
2.5.2	I modi naturali per i sistemi a tempo discreto . . . . .	87
2.6	Rappresentazioni a tempo discreto di sistemi a tempo continuo . . . .	91
<b>3</b>	<b>Elementi di teoria della stabilità</b>	<b>99</b>
3.1	Stabilità nei sistemi stazionari a tempo continuo: definizioni . . . . .	100
3.1.1	La stabilità di un moto . . . . .	103
3.2	Stabilità nei sistemi lineari stazionari a tempo continuo: proprietà e condizioni . . . . .	104
3.2.1	Condizioni di stabilità . . . . .	104
3.3	Il criterio di Routh . . . . .	109
3.3.1	Il criterio di Routh . . . . .	110
3.3.2	Ulteriori applicazioni del criterio di Routh . . . . .	118
3.4	Il metodo generale di Lyapunov . . . . .	122
3.4.1	Il criterio di Lyapunov . . . . .	122
3.4.2	Il criterio di Lyapunov per i sistemi lineari stazionari . . . . .	128
3.5	Stabilità mediante linearizzazione . . . . .	131
3.5.1	Condizioni di stabilità . . . . .	132
3.5.2	Esempi . . . . .	133
3.6	La Stabilità ingresso-uscita . . . . .	138
3.6.1	Condizione di stabilità esterna nello stato zero . . . . .	140
3.6.2	Condizione di stabilità esterna in ogni stato . . . . .	141
3.7	Stabilità nei sistemi stazionari a tempo discreto: definizioni . . . . .	144
3.8	Stabilità nei sistemi lineari stazionari a tempo discreto: proprietà e condizioni . . . . .	146
3.8.1	Condizioni di stabilità . . . . .	146
3.8.2	Relazione tra i criteri di Jury e di Routh . . . . .	150
3.8.3	Il criterio di Lyapunov per i sistemi a tempo discreto . . . . .	152
3.8.4	Il criterio di Lyapunov per i sistemi lineari stazionari a tempo discreto . . . . .	154
3.8.5	Analisi della stabilità mediante linearizzazione nel caso a tempo discreto . . . . .	155



<b>4 Le rappresentazioni lineari stazionarie nel dominio complesso</b>	<b>159</b>
4.1 La trasformata di Laplace nello studio dei sistemi a tempo continuo	159
4.2 La matrice di transizione nel dominio complesso	166
4.2.1 Il caso di operatore regolare	167
4.2.2 Il caso generale	172
4.3 I modi naturali nel dominio complesso	175
4.3.1 Il caso di operatore regolare	175
4.3.2 Il caso generale	176
4.4 La funzione di trasferimento	177
4.4.1 Modelli ingresso-uscita	179
4.4.2 Le rappresentazioni della funzione di trasferimento	180
4.5 La risposta forzata nel dominio complesso	183
4.5.1 La risposta agli ingressi canonici e la risposta indiciale	190
4.5.2 Risposte ad ingressi con ritardi	196
4.5.3 Una nota sulla risposta ad ingressi periodici	199
4.6 Sistemi a tempo discreto: analisi nel dominio della variabile complessa	203
4.6.1 La trasformata $Z$ nello studio dei sistemi a tempo discreto	203
4.6.2 La matrice di transizione ed i modi naturali	208
4.6.3 la funzione di trasferimento e la risposta forzata	210
4.6.4 La funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto equivalente	215
<b>5 La risposta a regime permanente e il comportamento in frequenza</b>	<b>219</b>
5.1 La risposta a regime permanente	219
5.1.1 Il regime permanente ad ingressi periodici	222
5.1.2 Il regime permanente a ingressi canonici	230
5.1.3 Una nota sul fenomeno della risonanza	233
5.2 Le rappresentazioni grafiche della risposta armonica	234
5.2.1 I diagrammi di Bode	234
5.2.2 I diagrammi polari	249
5.3 La risposta a regime permanente per i sistemi a tempo discreto	255
5.3.1 La risposta a regime ad ingressi periodici	255
5.3.2 La risposta a regime ad ingressi canonici	256
<b>6 Le proprietà geometriche dello spazio di stato</b>	<b>259</b>
6.1 Le proprietà della struttura interna: l'Osservabilità	259
6.2 Le proprietà della struttura interna: la Raggiungibilità	267
6.3 La scomposizione di Kalman	276
6.4 Le proprietà dello spazio di stato nei sistemi a tempo discreto	285
6.4.1 Inosservabilità	286
6.4.2 Raggiungibilità	286

<b>7 Modelli ingresso-uscita lineari e rappresentazioni con lo stato</b>	<b>289</b>
7.1 Il problema della realizzazione	290
7.2 Realizzazioni in forma canonica raggiungibile ed osservabile	292
7.2.1 Realizzazione in forma canonica raggiungibile	292
7.2.2 Realizzazione in forma canonica osservabile	296
7.3 Le realizzazioni minime	298
7.3.1 Realizzazione di Gilbert	304
7.4 Sistemi a tempo discreto	307
7.5 Realizzazioni di modelli ingresso-uscita in $t$	307
<b>8 Introduzione allo studio dei Sistemi Interconnessi</b>	<b>311</b>
8.1 Interconnessioni elementari	311
8.1.1 Connessione in serie	312
8.1.2 Connessione in parallelo	313
8.1.3 Connessione a retroazione	314
8.2 Rappresentazioni di sistemi interconnessi mediante grafi di flusso	316
8.3 Sistemi interconnessi: calcolo del modello	319
8.4 Le proprietà del sistema interconnesso	323
8.5 Il criterio di Nyquist	327
8.5.1 Il criterio di Nyquist	328
<b>9 Struttura interna, intervento e osservazione</b>	<b>335</b>
9.1 L'assegnazione degli autovalori con reazione dallo stato	336
9.1.1 Sistemi con un solo ingresso	338
9.1.2 Sistemi con più ingressi	342
9.2 Il problema della stima dello stato	343
9.2.1 Osservabilità e osservatore dello stato	344
9.2.2 Rilevabilità e ricostruttore dello stato	346
9.3 Il principio di separazione	348
9.4 Assegnazione della dinamica con reazione dall'uscita	351
9.4.1 Criteri di scelta di $N$ e $G$	351
9.4.2 Gli zeri del sistema complessivo	353
9.4.3 Controreazione dinamica dall'uscita	353
9.4.4 Ulteriori considerazioni sulla scelta di $G$	354
9.5 Assegnazione degli autovalori con regolazione	355
9.6 Assegnazione degli autovalori: sistemi a più ingressi	359
9.6.1 Un caso particolare	360
9.6.2 Il caso generale	361
9.7 L'osservatore asintotico ridotto	364
<b>A Forma spettrale di una matrice</b>	<b>369</b>
A.1 Autovalori e autovettori	370
A.1.1 $A$ con autovalori tutti distinti	372
A.1.2 $A$ diagonalizzabile a coefficienti reali	373
A.2 La forma di Jordan	374

---

A.2.1 Procedura di calcolo di J . . . . .	375
<b>Bibliografia</b>	<b>383</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>383</b>
<b>Indice analitico</b>	<b>385</b>