Journal of Number Theory **88**, 241–262 (2001)
doi:10.1006/jnth.2000.2612, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

Sur la distance d'un point algébrique à l'origine dans les variétés abéliennes

Federico Pellarin

Structures Discrètes et Analyse Diophantienne, Université de Caen, Campus II–Boulevard Maréchal Juin, BP 5186, F-14032 Caen Cedex, France
E-mail: pellarin@math.unicaen.fr

Communicated by M. Waldschmidt

Received January 26, 1999; published online April 9, 2001

Nous étudions les propriétés métriques des points rationnels de petite hauteur dans les variétés abéliennes. Plus précisément, tenant compte de la conjecture de Lehmer abélienne telle qu'elle a été établie par S. David et M. Hindry dans (1998, prépublications Univ. P. et M. Curie) nous avons étendu certains résultats de M. Mignotte et M. Waldschmidt (1994, *J. Number Theory* **47**, 43–62) aux variétés abéliennes définies sur un corps de nombres. Nous donnons une interprétation partiellement quantitative au principe suivant: "un point rationnel de petite hauteur de Néron–Tate non nulle ne peut pas être très près de l'origine de la variété abélienne." © 2001 Academic Press

We study the metric properties of rational points of small height over abelian varieties. More precisely, referring to the abelian Lehmer conjecture (as stated by S. David and M. Hindry in (1998, Prépublications Univ. P. et M. Curie)), we have extended some results of M. Mignotte and M. Waldschmidt in (1994, *J. Number Theory* **47**, 43–62) to abelian varieties defined over a number field. We give a partially quantitative interpretation of the following principle: "a rational point of small and non vanishing Néron–Tate height cannot be too close to the origin of the abelian variety." © 2001 Academic Press

1. INTRODUCTION, ÉNONCÉ PRINCIPAL ET PRÉLIMINAIRES

Soit A une variété abélienne complexe de dimension g munie d'un fibré inversible ample et symétrique $\mathscr{F}$, notons $\chi(A, \mathscr{F}) = \dim H^0(A, \mathscr{F})$. Le groupe de Lie complexe $A(\mathbb{C})$ est analytiquement isomorphe à un quotient de $\mathbb{C}^g$ par un réseau Γ_A. Cet isomorphisme est induit par l'application exponentielle que nous notons $\exp_A$. Dans les paragraphes suivants nous allons utiliser la norme hermitienne $\|\cdot\|_{\mathscr{F}}$ sur l'espace tangent à l'origine

0022-314X/01 $35.00

$T_0(A)(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g$ associée à la forme de Riemann $H_{\mathscr{F}}$ de $\mathscr{F}$. Notons $r_{\mathscr{F}}(p)$ la *distance de* p *à l'origine* 0 *de* A *relativement à* $\mathscr{F}$:

$$r_{\mathscr{F}}(p) := \min_{\gamma \in \Gamma_A} \|v - \gamma\|_{\mathscr{F}},$$

pour $v \in \mathbb{C}^g$ tel que $\exp_A(v) = p$.

Si A est définie sur un corps de nombres k, nous avons aussi la *hauteur canonique* de Néron–Tate relative à $\mathscr{F}^{\otimes 4}$: $\hat{h}_{\mathscr{F}}: A(\bar{k}) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Nous rappelons que $\hat{h}_{\mathscr{F}}(p) = 0$ si et seulement si p est un point de torsion.

Notons $h(A) = \max\{1, h_{\mathrm{Fal}}(A)\}$ où $h_{\mathrm{Fal}}(A)$ est la hauteur de Faltings *semi-stable* de A.

Le but de ce texte est de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 1.1. *Soient* g, d, δ *trois entiers rationnels* $\geqslant 1$. *Il existe un nombre réel* $c_1 = c_1(g, d, \delta) > 0$ *satisfaisant ce qui suit.*

Pour tout corps de nombres k *de degré* $d = [k : \mathbb{Q}]$, *pour toute variété abélienne* A *de dimension* g *définie sur* k *et munie d'un fibré inversible* $\mathscr{F}$ *ample et symétrique et défini sur* k *avec* $\delta = \chi(A, \mathscr{F})$, *pour tout nombre réel* $\mathfrak{C}$ *strictement positif, on a la propriété suivante. Soit* $K \supset k$ *un corps de nombres de degré* $D = [K : \mathbb{Q}]$ *avec un plongement fixé dans* $\mathbb{C}$. *Pour tout point* $q \in A(K)$ *d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne propre de* A, *de hauteur canonique satisfaisant*:

$$\hat{h}_{\mathscr{F}}(q) \leqslant \min\{\mathfrak{C} D^{-1/g}, dh(A) + \log D\},$$

on a:

$$\log r_{\mathscr{F}}(q) \geqslant -c_1 \mathfrak{C}^{g/(1+2g)} (h(A) + \log D)^{(1+g)/(1+2g)} D^{2g/(1+2g)}. \qquad (1)$$

1.1. *Motivations, lien avec le problème de Lehmer*

Notons h: $\mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ la hauteur logarithmique absolue de Weil. Le problème de Lehmer classique peut être énoncé de la manière suivante.

Conjecture I. Il existe une constante $c_2 > 0$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{Q}})$ la condition $h(\alpha) \leqslant c_2 D^{-1}$, où $D = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, implique que α est un point de torsion, i.e. $h(\alpha) = 0$.

Dans [Do], E. Dobrowolski démontre qu'il existe un nombre réel $c_3 > 0$ tel que tout $\alpha \in \mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{Q}})$ satisfaisant

$$h(\alpha) \leqslant \frac{c_3}{D} \left(\frac{\log \log(D+2)}{\log(D+1)} \right)^3, \qquad (2)$$

où $D = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, est de torsion.

Voici les points que nous trouvons essentiels, dans la démonstration de [Do], sous une présentation heuristique et non quantitative. Les paramètres qui suivent ne seront pas précisés.

Soit α un nombre algébrique de degré D, d'ordre infini et de hauteur petite. En utilisant un lemme de Siegel on peut construire un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $\leqslant L$ et s'annulant à un ordre grand M en α. De plus, P a ses coefficients de valeur absolue petite.

Nous pouvons démontrer qu'il existe un intervalle $[A, B]$ de $\mathbb{R}_{\geqslant 2}$ tel que pour tout p nombre premier dans $[A, B]$, α^p est v-adiquement proche de α pour v place de $\mathbb{Q}(\alpha)$ divisant p (on utilise essentiellement le petit théorème de Fermat). On peut alors appliquer un lemme de Schwarz v-adique pour tout v divisant p et p variant dans $[A, B]$ pour prouver que, par le fait que $h(\alpha)$ est petit, le polynôme ainsi construit P s'annule aussi à une certaine multiplicité $\geqslant M_p$ en tout point α^p pour $p \in [A, B]$. De plus, on peut construire $[A, B]$ contenant une proportion de nombres premiers suffisante pour contredire le lemme de zéros trivial. Le facteur d'erreur logarithmique qui apparaît à droite de l'estimation (1.2) dépend essentiellement de la distribution des nombres premiers dans les intervalles.

On voudrait montrer que le polynôme P ci-dessus s'annule en tout point α^n pour $n \in [A, B]$ entier, ce qui éliminerait le facteur d'erreur logarithmique dans (2). Le problème est alors que α^n n'est pas en général assez près de α pour toute place de $\mathbb{Q}(\alpha)$. Il ne reste alors qu'à imposer des conditions métriques pour α sur un ensemble fini de places.

Dans [Mi-Wa], Mignotte et Waldschmidt démontrent le résultat suivant (notons $e = 2.71...$ le nombre d'Euler).

THÉORÈME 1.2. *Pour tout nombre réel* $\mathfrak{C} > 0$ *nous avons la propriété suivante. Tout point* $\alpha \in \mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{Q}})$ *d'ordre infini et de degré* D *tel que* $h(\alpha) \leqslant \mathfrak{C} D^{-1}$ *satisfait*:

$$\log |\alpha - 1|_\sigma \geqslant -\frac{3}{2}\left(D\mathfrak{C} \log \max\left\{e, \frac{D}{\mathfrak{C}}\right\}\right)^{1/2} - 2\mathfrak{C} - \log \max\left\{e, \frac{D}{\mathfrak{C}}\right\}. \tag{3}$$

Pour démontrer ce résultat on impose une condition métrique supplémentaire en une unique place archimédienne σ de $\mathbb{Q}(\alpha)$. Si α ne satisfait pas l'estimation (3) (donc si α est très près de 1) et a hauteur petite, on récupère les multiplicités aux points α^n en utilisant un lemme de Schwarz d'une variable complexe.

Dans ce texte nous avons mis au point un analogue pour les variétés abéliennes définies sur les corps de nombres du théorème de Mignotte et Waldschmidt dans le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ ci-dessus, en fixant une seule place archimédienne σ.

Nous avons en fait insisté sur les connexions entre la démonstration du théorème de Dobrowolski et la démonstration du théorème de Mignotte et Waldschmidt car nous avons un cadre de la situation abélienne tout à fait analogue.

Le problème de Lehmer abélien, comme il a été posé par David et Hindry dans [Da-Hi], est au centre de nos investigations.

Conjecture II. Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres k, dotée d'un fibré inversible $\mathscr{F}$ ample et symétrique. Il existe une constante $c_4 > 0$ ne dépendant que de g, $[k : \mathbb{Q}]$ et $\chi(A, \mathscr{F})$, telle que tout point $P \in A(\bar{k})$ d'ordre infini satisfait

$$\hat{h}_{\mathscr{F}}(P) \geqslant c_4 D^{-1/g_0},$$

où D est le degré d'un corps de nombres sur lequel P est défini, g_0 est la dimension de la fermeture de Zariski du sous-groupe engendré par P dans A.

Cette conjecture a été introduite dans [Da-Hi]. Dans [Da-Hi] David et Hindry ont de plus démontré un analogue du résultat de Dobrowolski pour les points d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne propre d'une variété abélienne A à structure d'endomorphisme *admettant des multiplications complexes*.

Notre théorème 1.1 constitue l'analogue abélien du théorème de Mignotte et Waldschmidt dans [Mi-Wa]. Nous le démontrons en appliquant un lemme de Schwarz "approché" d'une variable complexe sur une droite jouant le rôle de "droite de Baker".

Les connexions avec la méthode de Baker ne sont pas étonnantes. Dans [Be], proposition 1, p. 32, D. Bertrand démontre une résultat tout à fait similaire à notre théorème 1.1 sur la base des travaux plus généraux de P. Philippon et M. Waldschmidt dans [Phi-Wa2]. La nouveauté de notre résultat réside dans le fait d'être plus précis pour les points qui ont une petite hauteur de Néron–Tate. La proposition 1 de [Be] (ainsi que les très généraux résultats de Philippon et Waldschmidt) est au contraire plus précise pour les grandes valeurs de la hauteur de Néron–Tate.

Remarque 1. Nous n'assumons aucune hypothèse sur l'anneau d'endomorphismes de la variété abélienne A : nous analysons uniquement les propriétés métriques de l'action de $\mathbb{Z}$ sur A et notre résultat est plus précis dans le cas où $\mathrm{End}_k(A) \cong \mathbb{Z}$.

Si $\mathrm{End}_k(A)$ a rang sur $\mathbb{Z}$ plus grand que 1 l'exposant de D dans l'inégalité (1) peut être amélioré: ce problème ne sera pas poursuivi dans ce texte, mais pour justifier notre affirmation considérons brièvement le cas $g = 1$.

Nous obtenons un exposant 2/3 pour D dans la majoration (1). Si A admet des multiplications complexes sur K on peut plus simplement appliquer une technique alternative qui consiste à estimer des moyennes de potentiels sur les tores complexes, introduite par M. Hindry et J. Silverman (voir par exemple [Hi-Si]).

En réadaptant les principes de [Hi-Si] à notre situation, on peut démontrer que l'inégalité (1) du théorème 1.1 peut être améliorée pour donner un minorant pour la distance à l'origine d'un point de hauteur non nulle $\leqslant \mathfrak{C} D^{-1}$ de type :

$$c_5(D\mathfrak{C}(dh+\log D))^{1/2}.$$

Ceci veut dire que nous obtenons une minoration pour la distance d'un point de petite hauteur non nulle à l'origine qui est de même nature que l'inégalité (3) en la dépendance en D.

D'autre part dans [Am], F. Amoroso a démontré de manière totalement explicite que l'exposant 1/2 pour D dans l'inégalité (3) ne peut pas être amélioré. Peut-on démontrer un analogue de ce résultat de Amoroso pour les courbes elliptiques? Existe-t-il une version conjecturale "raisonnable" du théorème 1.1 sur le modèle de la conjecture de Lehmer?

Remarque 2. Noter que le principe des tiroirs ne permet pas de choisir un multiple d'un point K-rationnel de A de hauteur petite suffisamment près de l'origine pour pouvoir appliquer le lemme de Schwarz, comme le fait Masser dans [Ma2] et [Ma3]. En revanche on peut probablement calculer des majorations effectives du nombre de points K-rationnels de A de hauteur petite et proches de l'origine de A en utilisant les idées de [Ma2] et [Ma3].

On peut démontrer des analogues v-adiques du théorème 1.2 pour v place ultramétrique, ou des analogues de ce théorème avec des hypothèses métriques plus faibles, mais sur un nombre de places plus grand. Ceci nous laisse penser que de tels analogues peuvent être démontrés aussi pour le théorème 1.1.

Ces extensions ne seront pas traitées dans ce texte.

1.2. *Réduction du problème*

Notons $\mathfrak{S}_g$ l'espace de Siegel des matrices $g\times g$ symétriques de partie imaginaire définie positive. Soit $\tau\in\mathfrak{S}_g$ et posons $\Gamma=\mathbb{Z}^g+\tau\mathbb{Z}^g$. Pour tout entier non nul n notons $\mathscr{R}_n$ un système de représentants (m_1, m_2) de $((\frac{1}{n}\mathbb{Z}^g)/\mathbb{Z}^g)^2$ ayant les valeurs absolues de ses coordonnées dans $([0, 1[^g)^2$.

Le groupe de Lie $\mathbb{C}^g/\Gamma$ admet le plongement analytique (projectivement normal) Θ_τ dans un espace projectif $\mathbb{P}_\eta(\mathbb{C})$:

$$\Theta_\tau(z)=(\theta_{m,0}(\tau, 2z))_{m\in\mathscr{R}_2},$$

avec

$$\theta_{(m_1, m_2)}(\tau, 2z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}^g} \exp\{2i\pi(\tfrac{1}{2}(r+m_1)\,\tau^t(r+m_1) + (r+m_1)^t(z+m_2))\},$$

où l'on a noté ${}^t(\cdot)$ la transposée d'une matrice (tous les vecteurs sont considérés comme des vecteurs ligne).

Notons $A(\tau)$ l'image du plongement (Θ_τ): c'est une variété abélienne complexe principalement polarisée. Une polarisation principale est induite par le fibré en droites $\mathscr{L}$ associé au diviseur thêta sur $\mathbb{C}^g/\Gamma$, dont la forme de Riemann H est déterminée par $H(z_1, z_2) = z_1 \cdot \mathfrak{I}(\tau)^{-1} \cdot {}^t\bar{z}_2$ ($\bar{z}$ est la conjugaison complexe dans $\mathbb{C}^g$ et $\mathfrak{I}(\tau)^{-1}$ est l'inverse de la partie imaginaire de τ).

Le groupe modulaire $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ agit sur $\mathfrak{S}_g$ proprement et discontinuement. Notons $\mathfrak{F}_g$ le domaine fondamental pour cette action, décrit dans le paragraphe 4 du chapitre 5 de [Ig]. Nous choisirons toujours les matrices τ dans $\mathfrak{F}_g$.

Pour un point projectif $(1 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_\mu) \in \mathbb{P}_\mu(\bar{\mathbb{Q}})$ notons $h(1 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_\mu)$ sa hauteur projective logarithmique absolue. Nous posons aussi $h(\alpha) = h(1 : \alpha)$ pour $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}$, et si P est un polynôme homogène à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}$, nous notons $h(P)$ la hauteur logarithmique absolue du point projectif donné par les coefficients de P. Lorsque $\tau \in \mathfrak{F}_g$ est tel que $\Theta_\tau(0) \in \mathbb{P}_\eta(\bar{\mathbb{Q}})$ (i.e. $A(\tau)$ est définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$) nous écrivons aussi $h(\tau) = h(A(\tau)) = h(\Theta_\tau(0))$.

Si $A(\tau)$ est définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$, notons $\hat{h}$ la hauteur de Néron–Tate associée à $\mathscr{L}^{\otimes 4}$.

Notons $r = r_{\mathscr{L}}$. Nous démontrerons le résultat suivant en utilisant la hauteur naïve $h(\tau)$ introduite ci-dessus.

Théorème 1.3. *Soient g, d deux entiers rationnels $\geqslant 1$. Il existe une constante $c_6 = c_6(g, d) > 0$ satisfaisant ce qui suit.*

Pour tout corps de nombres k de degré $d = [k : \mathbb{Q}]$, pour tout $\tau \in \mathfrak{F}_g$ tel que la variété abélienne $A = A(\tau)$ soit définie sur k, pour tout nombre réel $\mathfrak{C}$ strictement positif, on a la propriété suivante. Soit $K \supset k$ un corps de nombres de degré $D = [K : \mathbb{Q}]$ avec un plongement fixé dans $\mathbb{C}$. Pour tout point $q \in A(K)$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne propre de A, de hauteur canonique satisfaisant:

$$\hat{h}(q) \leqslant \min\{\mathfrak{C} D^{-1/g}, dh(\tau) + \log D\},$$

on a:

$$\log r(q) \geqslant -c_6 \mathfrak{C}^{g/(1+2g)} (h(\tau) + \log D)^{(1+g)/(1+2g)} D^{2g/(1+2g)}. \tag{4}$$

Montrons d'abord comment on déduit le théorème 1.1 du théorème 1.3. Supposons pour commencer que A soit principalement polarisée.

Pour toute variété abélienne A, définie sur un corps de nombres k, munie d'une polarisation principale associée à un fibré en droites $\mathscr{F}'$, il existe une matrice $\tau \in \mathfrak{F}_g$ telle que $A(\tau)$ est définie sur l'extension k' de k engendrée par les points de 24-torsion de A (son degré est borné en fonction uniquement de g) et est k'-isomorphe à A (cf. p. 124 de [Da1]). Il existe de plus un k'-isomorphisme $i: A \to A(\tau)$ tel que $i^* \mathscr{L}^{\otimes 4} \cong \mathscr{F}'^{\otimes 4}$. Cet isomorphisme nous permet de relier les hauteurs de Néron–Tate et les métriques à l'infini: $\hat{h}_{\mathscr{F}'} = \hat{h} \circ i$ et $r_{\mathscr{F}'} = r \circ i$.

Le théorème 1.1 de [Mo] implique que $h_{\mathrm{Fal}}(A) \leqslant c_7 \log(h(\tau) + 2) + 2h(\tau) \leqslant c_8 \max\{1, h(\tau)\}$, où c_7 et c_8 sont deux nombres réels ne dépendant que de g. Donc le théorème 1.1 se déduit du théorème 1.3 lorsque la polarisation est principale.

Considérons maintenant le cas général. Donnons-nous une variété abélienne A définie sur un corps de nombres k et munie d'un fibré en droites ample et symétrique $\mathscr{F}$. Notons $H(\mathscr{F})$ le sous-groupe de $A_\sigma(\mathbb{C})$ constitué de tous les points $p \in A_\sigma(\mathbb{C})$ tels qu'on ait un isomorphisme $\tau_p^* \mathscr{F} \cong \mathscr{F}$ (cf. [Mu] p. 288. Ici σ désigne un plongement de k dans $\mathbb{C}$).

Puisque $\mathscr{F}$ est ample $H(\mathscr{F})$ est fini de cardinal $\chi(A, \mathscr{F})^2$ (cf. [Mu] p. 289). Quitte à opérer une extension du corps de nombres k de degré borné en fonction uniquement de $\chi(A, \mathscr{F})$, nous pouvons supposer que $H(\mathscr{F})$ est stable sous l'action du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\bar{k} \mid k) = G_k$.

Soit maintenant H un sous-groupe isotrope maximal de $H(\mathscr{F})$. La variété abélienne $A' := A/H$ est définie sur k, admet un fibre en droites $\mathscr{F}'$ ample symétrique de degré 1 tel que si l'on note $\psi: A \to A'$ l'isogénie de passage au quotient, on a un isomorphisme $\psi^* \mathscr{F}' \cong \mathscr{F}$ (voir [Mu] pp. 290–291).

On trouve les identités $\hat{h}_{\mathscr{F}'} \circ \psi = \hat{h}_{\mathscr{F}}$ et $\|v\|_{\mathscr{F}} = \deg \psi \ \|\psi(v)\|_{\mathscr{F}'}$. Comme le degré de ψ divise $\chi(A, \mathscr{F})$, la hauteur de Faltings semistable de A' satisfait $h_{\mathrm{Fal}}(A') \leqslant h_{\mathrm{Fal}}(A) + \log \chi(A, \mathscr{L})$, d'après le lemme 5 p. 358 de [Fa].

Il est maintenant clair que le théorème 1.1 se déduit du 1.3.

1.3. *Notations*

Nous utiliserons des multi-indices dans $\mathbb{N}^g$. Exemple : $\underline{t} = (t_1, ..., t_g)$. Nous écrirons aussi $|\underline{t}| := t_1 + \cdots + t_g$. Si $v = (v_1, ..., v_g)$ est un vecteur de $\mathbb{C}^g$ nous noterons $v^{\underline{t}} := v_1^{t_1} \cdots v_g^{t_g}$.

Tout au long de ce texte nous allons employer des nombres réels $c_1, ..., c_{39}$ strictement plus grands que 1 et *ne dépendant que de* g. Leur numérotation sera progressive. De plus C sera un nombre réel "assez grand" effectivement calculable en fonction d'un sous ensemble de l'ensemble des quantités c_j. Il pourra être choisi de manière définitive en fin d'argument, mais son calcul explicite ne fera pas l'objet de ce travail.

Inégalité de Liouville. Dans tout ce texte nous supposons fixé un plongement σ de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$. Rappelons que nous utilisons l'inégalité élémentaire suivante. Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ non nul, $\log |\alpha| \geqslant -dh(\alpha)$, où $d = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ et $|\cdot| = |\cdot|_\sigma$ est la valeur absolue de $\mathbb{C}$ associée au plongement σ.

1.4. *Préliminaires à la démonstration*

Soit k un corps de nombres, K une extension finie de k. Choisissons $\tau \in \mathfrak{F}_g$ tel que la variété abélienne plongée $A = A(\tau)$ soit définie sur k.

La variété abélienne A est munie du fibré $\mathscr{L}^{\otimes 4}$. Une base de $H^0(A, \mathscr{L}^{\otimes 4})$ sur $\mathbb{C}$ est donnée par les fonctions $(\theta_{m,0}(4\tau, 4z))_{m \in \mathscr{R}_4}$ (cf. [Da1] p. 138).

Hypothèse (H1) *sur les corps k et K.* En utilisant le théorème 4.1 p. 135 de [Da1] nous pouvons supposer, sans perte en généralité, que k est égal au corps engendré par les relations différentielles liant les fonctions abéliennes $(\theta_{m,0}(4\tau, 4z)/\theta_\alpha(z))_{m \in \mathscr{R}_4}$, où $\theta_\alpha(z) \in (\theta_{m,0}(4\tau, 4z))_{m \in \mathscr{R}_4}$ est fixée (ce corps est noté $\mathscr{K}$ dans cette référence. L'indice α sera précisé dans la suite). On peut aussi supposer que K soit égal à $k(\theta_{m,0}(4\tau, 4v)/\theta_\alpha(v))_{m \in \mathscr{R}_4})$ où $v \in T_0(A) \otimes_\sigma \mathbb{C}$ est un élément tel que $\exp_A(v) = q$.

Nous regardons les sections k-rationnelles de $\mathscr{L}^{\otimes 4}$ sur A comme des combinaisons linéaires des $\theta_{m,0}(4\tau, 4z)$ à coefficients dans k et les sections k-rationnelles de $\mathscr{L}^{\otimes 4L}$ (pour un entier rationnel positif L) comme des polynômes homogènes de degré L en les $\theta_{m,0}(4\tau, 4z)$ à coefficients dans k. Ainsi la hauteur d'une section k-rationnelle de $\mathscr{L}^{\otimes 4L}$ est pour nous la hauteur du polynôme correspondant au choix de base effectué ci-dessus.

Notons $T_0(A)$ l'espace tangent de A à l'origine. L'hypothèse (H1) implique que $T_0(A)$ est un k-espace vectoriel de dimension g. De plus il existe une k-base (de G. Shimura) $(\partial_1, ..., \partial_g)$ ainsi définie :

$$(\partial_1, ..., \partial_g) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_g}\right) \theta_\beta(\tau, 0)\, M(\tau)^{-1}, \tag{5}$$

où $\beta \in \mathscr{R}_2$ est choisi de manière que $|\theta_\beta(\tau, 0)|$ réalise le maximum des $|\theta_{m,0}(\tau, 0)|$ pour $m \in \mathscr{R}_2$ et $M(\tau)$ est la matrice :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\theta_1(\tau,0)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_1(\tau,0)}{\partial z_g} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\theta_g(\tau,0)}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial\theta_g(\tau,0)}{\partial z_g} \end{pmatrix},$$

pour un choix opportun de fonctions thêta $\theta_1, ..., \theta_g$ dans la collection $(\theta_{m,0}(\tau, 0))_{m \in \mathscr{R}_2}$, tel que le rang de la matrice $M(\tau)$ est maximal (cf. pp. 134–135 de [Da1]).

1.4.1. *La variété abélienne $A \times A$.* La variété abélienne $A \times A$ est dotée du fibré inversible $\mathscr{M}$ défini ainsi : si π_1 et π_2 sont les projections sur le premier et sur le deuxième facteur de $A \times A$ respectivement, $\mathscr{M} = \pi_1^* \mathscr{L}^{\otimes 4} \otimes \pi_2^* \mathscr{L}^{\otimes 4}$.

Nous avons plongé k dans $\mathbb{C}$. L'espace vectoriel complexe $T_0(A \times A)(\mathbb{C}) = T_0(A \times A) \otimes \mathbb{C}$ se décompose en somme directe $T_0(A)(\mathbb{C}) \oplus T_0(A)(\mathbb{C})$ et il est doté de la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{M}}$. Nous avons une base sur $\mathbb{C}$, $(\partial_1, ..., \partial_{2g})$ définie par $\partial_{i+g} = \partial_g$ pour $1 \leqslant i \leqslant g$.

Fixons un entier positif non nul $N < L^2$. Notons B la sous-variété abélienne de $A \times A$ (définie sur k et k-isomorphe à A) constituée de tous les points (p, Np) pour $p \in A$. Le fibré $\mathscr{M}$ induit par restriction un fibré sur B dont l'image inverse par l'isomorphisme $A \to B$ est $\mathscr{L}^{\otimes 4(N^2+1)}$.

Notons $(\delta_1, ..., \delta_g)$ la base de $T_0(A)$ définie par image inverse de l'isomorphisme $A \to B$ de la base $(\partial_1 + N\partial_{g+1}, ..., \partial_g + N\partial_{2g})$ de $T_0(B) \subset T_0(A \times A)$.

2. PREUVE DU THÉORÈME 1.3

Soit k un corps de nombres et $K \supset k$ une extension algébrique finie avec un plongement $\sigma: K \to \mathbb{C}$ fixé. Choisissons $\tau \in \mathfrak{F}_g$ tel que la variété abélienne $A = A(\tau)$ soit définie sur k, supposons de plus que k et K satisfont l'hypothèse (H1). Notons $h = \max\{1, h(\tau)\}$. Soit q un point K-rationnel de A qui ne soit contenu dans aucun sous-groupe algébrique propre de A. On a:

$$\hat{h}(q) \geqslant \xi_{\inf} \tag{6}$$

où nous avons noté:

$$\xi_{\inf} = \min\{1, c_1(g)\, h(D(h + \log D))^{-8g-3}\},$$

et $c_1 > 0$ est une constante qui ne dépend que de g. Cette estimation se déduit aisément du théorème 1.4 p. 511 de [Da2] (elle est en fait beaucoup plus faible).

Posons $\mathfrak{L} := dh + \log \max\{e, -\log \xi_{\inf}\}$, soit ξ un nombre réel positif satisfaisant $\xi_{\inf} < \xi \leqslant \mathfrak{L}$ (remarquer que $\xi_{\inf} < \mathfrak{L}$). Soit C un réel $\geqslant 1$ assez grand : une valeur pour C pourra être déterminée en fonction de g uniquement, en fin d'argument. Notons $[\cdot]$ la partie entière d'un nombre réel. Nous définissons les entiers et les réels positifs non nuls suivants, en fonction de C:

$$
\begin{aligned}
L &= [C^{g^2+1} D^{1/2} \mathfrak{L}^{1/(2(1+2g))} \xi^{-1/(2(1+2g))}], & T &= [C^{2g^2+g+2} D \mathfrak{L} h^{-1}], \\
T_0 &= [C^2 D \mathfrak{L} h^{-1}], & \kappa &= [C^g \mathfrak{L}^{g/(1+2g)} \xi^{-g/(2g+1)}], \\
\rho &= C^{2g^2+2g+1} D \mathfrak{L}^{(g+1)/(1+2g)} \xi^{g/(2g+1)}, & N &= [\sqrt{L}] + 1.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Noter que la condition $\xi \leqslant \mathfrak{L}$ implique $\kappa, L \geqslant 1$.

Hypothèses (H2). Nous supposons par l'absurde qu'il existe $q \in A(K)$ satisfaisant:

(a) Le point q est d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne propre de A.

(b) La hauteur canonique de q satisfait $\hat{h}(q) \leqslant \xi$.

(c) Le point q est "trop proche de l'origine": $\log r(q) \leqslant -\rho - \log(\kappa g)$.

La condition (c) implique que pour $j = 0, 1, \ldots, g\kappa$ on a $r(jq) \leqslant e^{-\rho}$. D'après l'inégalité (6) il existe une constante $c_2 > 0$, ne dépendant que de g, telle que $\log(\kappa g) \leqslant c_2(\log C + \mathfrak{L})$, ainsi pour C assez grand, en fonction uniquement de g, on a $\rho > \log(\kappa g)$.

Nous allons montrer que pour un choix opportun de C (en fonction uniquement de g) on parvient à une contradiction: les deux conditions (a) et (b) ne peuvent pas être satisfaites au même temps.

Plus précisément, nous construisons dans le lemme 2.1 une section Φ de $\mathcal{M}^{\otimes L}$ non nulle sur $A \times A$ et "algébrique" (un polynôme de bi-degré $\leqslant (L, L)$ en $(\theta_{m_1, 0}(4\tau, 4z))_{m_1 \in \mathcal{R}_4}$ et $(\theta_{m_2, 0}(4\tau, 4w))_{m_2 \in \mathcal{R}_4}$, $z, w \in \mathbb{C}^g$), telle que sa restriction à $A \cong B$ (non nulle car $L < N^2$) satisfait la propriété suivante. Les dérivées qui sont d'ordre $\leqslant T_0$ le long de la droite vectorielle $\mathfrak{D}$ déterminée par un logarithme abélien de q, et qui sont d'ordre $\leqslant T$ le long d'un certain hyperplan complexe de $T_0(B)$ qui ne contient pas cette droite, évaluées en $0, q, \ldots, \kappa g q$ sont très petites. On doit donc fixer une base transcendante de $T_0(B) \otimes_\sigma \mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$, c'est à dire une base qui n'est pas en général définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Puisque les points $0, q, \ldots, \kappa g q$ sont par hypothèse très près de l'origine (cf. hypothèse (H2) ci-dessus) nous pouvons appliquer une formule d'interpolation pour les fonctions analytiques d'une variable complexe (jouant le rôle de lemme de Schwarz "approché") dans cette droite $\mathfrak{D}$, sur des disques centrés à l'origine, de rayons $0 < r < R$ proportionnels à $e^{-\rho}$ et $e^{-\rho/2}$

respectivement. Il suit que la "partie quadratique" de la croissance analytique de la fonction auxiliaire est négligeable ([1]). De plus, en comparant ces propriétés analytiques aux propriétés arithmétiques des dérivées aux points jq relativement à une base de Shimura de $T_0(B)$ fixée, on déduit que la section Φ s'annule à un ordre $\geqslant T+1$ en ces points (lemme 2.2). Ceci permet d'appliquer de manière non triviale un *lemme de zéros* (théorème 2.1) et parvenir à contradiction.

Nous effectuons donc une "extrapolation" sur les multiplicités le long de la droite de Baker $\mathfrak{D}$ avec le fait essentiel que la quantité $\log(R/r)$ est très grande.

Commençons par estimer le maximum des valeurs absolues des matrices de changement de base de dérivations, reliant une base transcendante définie ci-dessous à la base de Shimura.

Une base transcendante. Soient $v=(v_1, ..., v_g)$ les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{C}^g \cong T_0(A) \otimes_\sigma \mathbb{C}$ d'un point v tel que $\exp_G(v)=q$ et $r(q)=\|v\|$. Il existe une base de dérivations $(D_1, ..., D_g)$ de $T_0(A) \otimes_\sigma \mathbb{C}$ avec les deux propriétés suivantes. (i) on a $D_1=v_1 \partial/\partial z_1+\cdots+v_g \partial/\partial z_g$. (ii) si on note M_1 la matrice de passage de la base $(D_1, ..., D_g)$ à la base $(\partial/\partial z_1, ..., \partial/\partial z_g)$, on a:

$$\max\{\|M_1\|, \|M_1^{-1}\|\} \leqslant \max\{1, |v_1|, ..., |v_g|\}, \tag{8}$$

où $\|M_1\|$ désigne le maximum des valeurs absolues des coefficients de M_1. Tout au long de ce texte, fixons une de ces bases $(D_1, ..., D_g)$.

Il existe deux constantes positives $c_3>c_4>0$ dépendant uniquement de g telles que:

$$c_4 d^{-1} h^{-1} \max\{|v_1|, ..., |v_g|\} \leqslant \|v\| \leqslant c_3 \max\{|v_1|, ..., |v_g|\}. \tag{9}$$

Pour prouver cet encadrement élémentaire on peut appliquer les inégalités (4.4) p. 120 de [Ma1] en utilisant l'hypothèse $\tau \in \mathfrak{F}_g$, la description de $\mathfrak{F}_g$ donnée p. 194 de [Ig], ainsi que le lemme matriciel de D. Masser (cf. [Ma1] p. 115 et lemme 6.3 p. 158 de [Da1]). Donc $\max\{\|M_1\|, \|M_1^{-1}\|\} \leqslant (1+c_4^{-1})\, dh \max\{1, \|v\|\}$.

Soit M_2 la matrice de passage de la base $(\partial/\partial z_1, ..., \partial/\partial z_g)$ à la base $(\delta_1, ..., \delta_g)$. En utilisant le lemme 4.14 p. 148 de [Da1] on prouve qu'il existe une constante c_5 ne dépendant que de g, telle que $\max\{\|M_2\|, \|M_2^{-1}\|\} \leqslant \exp\{c_5 dh+\log N\}$.

[1] Dans [Be] p. 34 on pourra remarquer qu'au contraire, Bertrand applique un lemme de Schwarz sur des grands rayons $0<r<R$ proportionnels, et utilise de manière essentielle la croissance analytique des fonctions thêta. De même pour [Phi-Wa1] et [Phi-Wa2].

Notons $\mathfrak{M}$ la matrice de passage de la base $(D_1, ..., D_g)$ à la base $(\partial/\partial z_1, ..., \partial/\partial z_g)$. Nous avons:

$$\max\{\|\mathfrak{M}\|, \|\mathfrak{M}^{-1}\|\} \leqslant \exp\{c_6(\log\max\{1, \|v\|\} + dh + \log N)\}. \quad (10)$$

2.1. *Application du lemme de Thue–Siegel*

Posons $U = \rho T_0 \kappa$. Fixons une fonction thêta $\theta_\alpha(z) = \theta_{\alpha,0}(4\tau, 4z)$ (avec $\alpha \in \mathcal{R}_4$) ne s'annulant pas dans le disque $\{z \in \mathbb{C}^g \text{ avec } \|z\|_{\mathcal{L}} \leqslant (1/2)\, N^{-1} e^{-\rho}\}$ (En choisissant C assez grand en fonction uniquement de g on peut toujours trouver un tel indice α).

Lemme 2.1. *Il existe une constante $c_7 > 0$ dépendant uniquement de g, telle que si $C \geqslant c_7$ et T, T_0, L, N, κ sont comme dans* (7), *alors il existe une section $\Phi \in H^0(A \times A, \mathcal{M}^{\otimes L})$ dont la restriction à B est non nulle, telle que ses coefficients sont des nombres algébriques dans K satisfaisant*:

$$h(\Phi) \leqslant c_8(L\kappa^2 N^2 \xi + (T+L))(\log(T+L+N) + dh) + D(\xi + h)), \quad (11)$$

$$\leqslant c_9 C^{2(g^2+g+1)} D^2 \mathfrak{L} \xi^{-1}, \quad (12)$$

où c_8 et c_9 sont deux nombres réels positifs ne dépendant que de g, et telle que pour $j = 0, 1, ..., \kappa g$ on ait:

$$|D_1^{t_1} \cdots D_g^{t_g} \Phi(jv, jNv)(\theta_\alpha(jv)\, \theta_\alpha(jNv))^{-L}| \leqslant e^{-U}, \quad (13)$$

pour tout multi-indice $\underline{t} = (t_1, ..., t_g)$ tel que $0 \leqslant t_j \leqslant T$ pour $j = 2, ..., g$ et $0 \leqslant t_1 \leqslant T_0$.

Démonstration. Nous appliquons le lemme 6.1 de [Phi-Wa1]. Rappelons ici son énoncé.

Lemme de Thue-Siegel. *Soit $(u_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{l},\, 1 \leqslant j \leqslant \mathfrak{t}}$ une matrice de nombres complexes de rang $\leqslant \mathfrak{e}$. Soient $\mathfrak{h}, \mathfrak{m}, \mathfrak{u}$ des nombres réels positifs tels que*:

$$[2\mathfrak{t} e^{\mathfrak{h}+\mathfrak{m}+\mathfrak{u}}]^{\mathfrak{e}} \leqslant e^{\mathfrak{l}\mathfrak{h}}, \quad (14)$$

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant \mathfrak{t}} \left\{ \sum_{i=1}^{\mathfrak{l}} |u_{i,j}| \right\} \leqslant e^{\mathfrak{m}}. \quad (15)$$

Alors il existe un vecteur non nul $(a_1, ..., a_{\mathfrak{l}}) \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{l}}$ tel que:

$$0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant \mathfrak{l}} |a_i| \leqslant e^{\mathfrak{h}}, \quad (16)$$

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant \mathfrak{t}} \left\{ \left| \sum_{i=1}^{\mathfrak{l}} u_{i,j} a_i \right| \right\} \leqslant e^{-\mathfrak{u}}. \quad (17)$$

Posons $\mathfrak{u}=U$, $\mathfrak{h}=U/D$, $\mathfrak{l}=4^{2g}DL^{2g}\chi(A\times A,\mathscr{M})$, $\mathfrak{t}=\mathfrak{e}=(T+1)^{g-1}(T_0+1)$ et

$$\mathfrak{m}=c_{10}(g)\,D(LN^2\kappa^2\xi+(T+L)(dh+\log(T+L+N))+D(\xi+h)),\tag{18}$$

où c_{10} est une constante qui ne dépend que de g; nous verrons plus bas comment il faut la choisir.

Le premier pas consiste à expliciter la matrice $(u_{i,j})$.

On peut trouver une base $\mathfrak{B}=(\gamma_1,...,\gamma_D)$ de K sur $\mathbb{Q}$ telle que $h(1:\gamma_1:\cdots:\gamma_D)\leqslant c_{11}D(h+h(q))$, où $h(q)$ est la hauteur projective de q via le plongement induit par $\mathscr{M}$. (utiliser, par exemple, le lemme 4.4 p. 255 de [Ma2]).

D'après [Man-Zar] Théorème 3.2, il existe une constante c_{12}, dépendant uniquement de g et $[k:\mathbb{Q}]$, telle que pour tout $p\in A(\bar{k})$ on ait $|h(p)-\hat{h}(p)|\leqslant c_{12}h$. Ainsi la base $(\gamma_1,...,\gamma_D)$ satisfait $h(1:\gamma_1:\cdots:\gamma_D)\leqslant c_{13}D(h+\hat{h}_{\mathscr{L}}(q))\leqslant c_{13}D(h+\xi)$.

Nous avons une base $\mathfrak{B}^{\#}$ de $H^0(A\times A,\mathscr{M}^{\otimes L})$ correspondante à des monômes unitaires $(\mathscr{M}_1,...,\mathscr{M}_{\mathfrak{l}^{\#}})$ de bi-degré (L,L) en $(\theta_{m_1,0}(4\tau,4z))_{m_1\in\mathscr{R}_4}$ et $(\theta_{m_2,0}(4\tau,4w))_{m_2\in\mathscr{R}_4}$, linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$: ici le cardinal $\mathfrak{l}^{\#}$ de $\mathfrak{B}^{\#}$ est égal à $4^{2g}L^{2g}\chi(A\times A,\mathscr{M})$.

Les $\mathfrak{l}^{\#}$ fonctions abéliennes sur $\mathbb{C}^{2g}$, $F_1(z,w)=\mathscr{M}_1(z,w)/(\theta_\alpha(z)\,\theta_\alpha(w))^L$, ..., $F_{\mathfrak{l}^{\#}}(z,w)=\mathscr{M}_{\mathfrak{l}^{\#}}(z,w)/(\theta_\alpha(z)\,\theta_\alpha(w))^L$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes et définies en $(z,w)=(jv,jNv)$ pour $j=0,...,\kappa g$. Suivant [Da1], théorème 4.1, p. 135, nous travaillons avec ces fonctions abéliennes pour disposer d'équations différentielles à coefficients dans k.

Nous construisons la matrice $(u_{i,j})$. Après avoir fixé une indexation de l'ensemble $\mathscr{T}$ des g-uplets $(t_1,...,t_g)$ avec $0\leqslant t_s\leqslant T$ pour $s=2,...,g$ et $0\leqslant t_1\leqslant T_0$, et une indexation pour l'ensemble $\mathscr{E}=\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}^{\#}$, on pose:

$$(u_{i,j})_{i,j}=(D_1^{t_1}\cdots D_g^{t_g}\,\gamma_hF_\ell(jv,\,jNv))_{(h,\ell),(j,\underline{t})}.$$

Nous devons montrer comment on peut choisir la constante c_{10} dans (18) pour que (15) soit satisfaite.

Tout d'abord l'inégalité (10) implique (cf. lemme 3.1 de [Phi-Wa1]):

$$\begin{aligned}|D_1^{t_1}&\cdots D_g^{t_g}\,\gamma_hF_\ell(jv,\,jNv)|\\&\leqslant\exp\{c_{14}T(dh+\log N)\}\;|\gamma_h\delta_1^{t_1}\cdots\delta_g^{t_g}F_\ell(jv,\,jNv)|\\&\leqslant\exp\{c_{14}T(dh+\log N)+c_{13}D^2(h+\xi)\}\\&\quad\times|\delta_1^{t_1}\cdots\delta_g^{t_g}F_\ell(jv,\,jNv)|.\end{aligned}\tag{19}$$

Il ne nous reste qu'à majorer $|\delta_1^{t_1}\cdots\delta_g^{t_g}F_\ell(jv,\,jNv)|$ pour $0\leqslant t_s\leqslant T$ pour $s=2,...,g$ et $0\leqslant t_1\leqslant T_0$, et $j=0,...,\kappa g$. Posons $\delta_1^{t_1}\cdots\delta_g^{t_g}=\delta^{\underline{t}}$.

Appliquons l'astuce dite de "Anderson–Baker–Coates". Fixons $j \in \{0, ..., \kappa g\}$ et posons $q' = j(q, Nq)$. Définissons les opérateurs K-linéaires agissant sur les fonctions abéliennes K-rationnelles sur $A \times A$:

$$\delta^{\underline{t}}_{q'} := \delta_1^{t_1} \cdots \delta_g^{t_g} \circ \tau_{q'},$$

où $\tau_{q'}$ désigne la translation par q' dans l'espace des fonctions abéliennes sur $A \times A$. Clairement $\delta^{\underline{t}} F_\ell(jv, jNv) = \delta^{\underline{t}}_{q'} F_\ell(0, 0)$.

D'après le théorème 4.1 p. 135 de [Da1] on a que $\delta^{\underline{t}}_{q'} F_\ell(z, w)$ s'écrit comme un polynôme P_1 de bidegré $(L + |\underline{t}|, L + |\underline{t}|)$ à coefficients dans K en $(\theta_{m_1, 0}(4\tau, 4z)/\theta_\alpha(z))_{m_1 \in \mathscr{R}_4}$ et $\theta_{m_2, 0}(4\tau, 4w)/\theta_\alpha(w))_{m_2 \in \mathscr{R}_4}$ dont la hauteur satisfait $h(P_1) \leqslant c_{15} L h(q') + c_{16}((|\underline{t}| + L) \log(|\underline{t}| + L) + |\underline{t}|(h + \log N))$, où $h(q')$ est la hauteur projective absolue du point K-rationnel q' à travers le fibré inversible $\mathscr{M}$.

Cette estimation est vérifiée en observant que la translation $\tau_{q'}$ dans $A \times A$ peut s'exprimer par des formes de bidegré (2, 2), et que le polynôme $\tau_{q'}(F_j)$ a son hauteur $\leqslant c_{17} L h(q') + h$.

On applique le théorème 3.2 de [Man-Zar]. Comme $j \leqslant \kappa g$, $|\underline{t}| \leqslant T(g-1) + T_0$ et $\hat{h}_{\mathscr{M}}(j(q, Nq)) = j^2 \hat{h}_{\mathscr{L}^{\otimes 4(1+N^2)}}(q) = 4j^2(1 + N^2)\, \hat{h}(q)$, on vérifie que pour tout ℓ, la hauteur $h(\delta^{\underline{t}}_{q'} F_\ell(0, 0))$ est inférieure ou égale à c_{18} $(L\kappa^2 N^2 \hat{h}_{\mathscr{L}}(q) + (T + L) \log(T + L) + Ldh + T(dh + \log N))$. Tenant compte de $\hat{h}(q) \leqslant \xi$ on a:

$$\begin{aligned} &|\delta_1^{t_1} \cdots \delta_g^{t_g} F_\ell(jv, jNv)| \\ &\qquad \leqslant \exp\{c_{18} D(L\kappa^2 N^2 \xi + (T + L)(\log(T + L + N) + Ldh))\}, \end{aligned}$$

où $c_{18} > 0$ est une constante qui ne dépend que de g. On combine cette inégalité avec l'estimation (19) et on obtient le majorant (18) de $|D_1^{t_1} \cdots D_g^{t_g} \gamma_h F_\ell(jv, jNv)|$.

Il s'agit ensuite de montrer qu'avec le choix de paramètres fait et pour C assez grand en fonction uniquement de g, l'inégalité (15) est vraie, mais ceci résulte immédiatement du choix des paramètres (7).

Le lemme de Thue–Siegel s'applique, et il existe des entiers rationnels non tous nuls $(a_{j,\ell}) = (a_1, ..., a_{\mathrm{I}})$ satisfaisant les propriétés (16) et (17). La section Φ du lemme 2.1 est donc:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{D} \sum_{\ell=1}^{\mathrm{I}^\sharp} a_{j,\ell} \gamma_j \mathscr{M}_\ell.$$

Il est clair que l'inégalité (11) est satisfaite, et l'inégalité (12) découle de (11) en appliquant notre choix de paramètres (7). Le lemme 2.1 est démontré.

Cette section Φ que nous venons de construire a sa restriction Ψ à B non nulle. En effet la condition $L < N^2$ (vérifiée par le choix de paramètres

(7)) implique que l'application de restriction $H^0(A\times A, \mathscr{M}^{\otimes L})\to H^0(A, \mathscr{L}^{\otimes 4L(N^2+1)})$ est injective. En particulier les $\mathfrak{l}^\#$ fonctions abéliennes sur $\mathbb{C}^g$, $F_1(z, Nz), ..., F_{\mathfrak{l}^\#}(z, Nz)$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.

Les inégalités (13) impliquent des majorations pour $|D^{\underline{t}}\Psi(jv, jNv)|$ pour $0\leqslant t_2, ..., t_g\leqslant T$, $0\leqslant t_1\leqslant T_0$ et $j=0, ..., \kappa g$. La formule de Leibniz s'applique pour donner:

$$|D^{\underline{t}}\Psi(jv, jNv)|\leqslant \exp\{-U+c_{19}T\log T\} \times \max_{z\in D(0,e^{-\rho})}\max_{|\underline{t}'|\leqslant|\underline{t}|}\{|D^{\underline{t}'}(\theta_\alpha(z)\,\theta_\alpha(Nz))^L|\}.$$

Si $D(0, R)$ est la boule de rayon R centré à l'origine de $\mathbb{C}^g$ pour la norme euclidienne, nous avons:

$$\begin{aligned}
&\max_{z\in D(0,e^{-\rho})}\max_{|\underline{t}'|\leqslant|\underline{t}|}|D^{\underline{t}'}(\theta_\alpha(z)\,\theta_\alpha(Nz))^L|\\
&\quad\leqslant((1+c_4^{-1})\,dh\max\{1,\|v\|\})^T\\
&\qquad\times\max_{|\underline{t}'|=|\underline{t}|}\{t_1'!\cdots t_g'!\,e^{\rho\,|\underline{t}|}\}\max_{z\in D(0,e^{-\rho})}\{|(\theta_\alpha(z)\,\theta_\alpha(Nz))^L|\}\\
&\quad\leqslant\exp\{T(\log T+\rho+\log(dh))+L\\
&\qquad\times\log\max\{|\theta_{m_1,0}(4\tau,4z)\,\theta_{m_2,0}(4\tau,4Nz)|,\\
&\qquad\qquad(m_1,m_2)\in\mathscr{R}_4^2,\ z\in D(0,e^{-\rho})\}\} \qquad (21)\\
&\quad\leqslant\exp\{T(\log T+\rho)+4\pi\cdot 4e^{-2\rho}L((N^2+1)\,\|\mathfrak{I}(\tau)^{-1}\|)+c_{20}\,\|\mathfrak{I}(\tau)\|\}\\
&\quad\leqslant\exp\{T(\log T+\rho)+c_{21}Ldh\}. \qquad (22)
\end{aligned}$$

Pour obtenir le majorant (21) dans cette chaîne d'inégalités nous avons utilisé l'inégalité (8) (pour nous ramener à la base de dérivations canonique de $T_0(A)$) et l'inégalité de Cauchy. Pour déduire le dernier majorant (22) du majorant (21) nous avons utilisé la première inégalité du corollaire 3.2 p. 125 de [Da1], et l'encadrement $\sqrt{3/2}\leqslant\|\mathfrak{I}(\tau)\|\leqslant c_{21}\,dh$. Cet encadrement découle de la caractérisation de $\mathfrak{F}_g$ donnée dans le paragraphe 4 du chapitre 5 de [Ig] d'une part, et du lemme matriciel de Masser. Pour C assez grand le terme proportionnel à $e^{-2\rho}$ est négligeable.

Il existe donc une constante $c_{22}>0$, ne dépendant que de g, telle que :

$$|D^{\underline{t}}\Psi(jv, jNv)|\leqslant\exp\{-U+c_{22}(T(\log T+\rho)+Ldh)\}, \qquad (23)$$

pour $\underline{t}$ et j comme ci-dessus.

2.2. *Comparaison de propriétés arithmétiques et analytiques*

Nous devons démontrer que Φ s'annule en jq pour $j=0, ..., g\kappa$, à un ordre $\geqslant T+1$ le long de $T_0(B)$.

Lemme 2.2. *Il existe une constante $c_{23} > 0$ ne dépendant que de g telle que, pour tout $C > c_{23}$, tenant compte du choix des paramètres* (7) *et des hypothèses* (H2), *la section Ψ non nulle de $H^0(A, \mathscr{L}^{\otimes 4L(N^2+1)})$ que nous avons construit dans le lemme* 2.1 *satisfait $\delta^{\underline{t}}\Psi(q') = 0$ pour tout multi-indice $\underline{t}$ avec $|\underline{t}| \leqslant T$ et pour tout point $q' = jq$ avec $j = 0, ..., g\kappa$.*

Démonstration. Travaillons dans A munie du fibré $\mathscr{L}'^{\otimes L}$ où $\mathscr{L}' = \mathscr{L}^{\otimes 4(N^2+1)}$. La fonction $\Psi(z)$ est entière sur $\mathbb{C}^g \cong T_0(A) \otimes \mathbb{C}$ et automorphe pour le réseau Γ_A.

Estimations analytiques de dérivées de Ψ. La condition métrique (c) dans les hypothèses (H2) et l'encadrement (9) impliquent:

$$\{0, v, 2v, ..., g\kappa v\} \subset D(0, c_{24} e^{-\rho}).$$

Soit $\tau = (0, \tau_2, ..., \tau_g) \in \mathbb{N}^g$ tel que $0 \leqslant \tau_j$ pour $j = 2, ..., g$ et $\sum_{j=2}^g \tau_j \leqslant T$, considérons l'opérateur différentiel $D^\tau = D_2^{\tau_2} \cdots D_g^{\tau_g}$. Soit g la fonction d'une variable complexe:

$$g(z) = (D^\tau \Psi)(v_1 z, ..., v_g z).$$

La fonction g est entière et satisfait:

$$\left|\frac{d^t}{dz^t}\, g(k)\right| \leqslant \exp\{-U + c_{22}(T(\log T + \rho) + Ldh)\},$$

pour tout $0 \leqslant k \leqslant \kappa g$ et tout $0 \leqslant t \leqslant T_0$, d'après l'inégalité (23).

Voici la formule d'interpolation dont nous avons besoin (cf. Lemme 2.3 de [Wa]).

Formule d'interpolation. Soient r et R deux nombres réels satisfaisant $2 \leqslant r \leqslant (1/2)\, R$, soient $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{k}$ deux entiers positifs. Soit g une fonction analytique dans un voisinage ouvert de la boule euclidienne $D(0, R)$ de $\mathbb{C}$. On a alors:

$$\max_{|z| = 2r} \{|g(z)|\} \leqslant 2 \max_{|z| = R} \{|g(z)|\} \left(\frac{4r}{R}\right)^{\mathfrak{t}\mathfrak{k}} + 5 \left(\frac{18r}{\kappa}\right)^{\mathfrak{t}\mathfrak{k}} \max_{0 \leqslant t \leqslant \mathfrak{t},\, 0 \leqslant k \leqslant \mathfrak{k}} \left\{\frac{1}{t!}\left|\frac{d^t}{dz^t}\, g(k)\right|\right\}. \tag{24}$$

Appliquons cette formule d'interpolation avec $r = \|v\|^{-1} e^{-\rho}$, $R = \|v\|^{-1} e^{-\rho/2}$, $\mathfrak{t} = T_0$ et $\mathfrak{k} = \kappa g$. Il est clair que pour C assez grand, de manière dépendante uniquement de g, on a $2 \leqslant r \leqslant (1/2)\, R$. L'hypothèse (H2) implique $\|v\|^{-1} \geqslant e^{\rho}(\kappa g)$, donc le deuxième terme du terme de droite dans (24) satisfait:

$$5\left(\frac{18r}{\kappa}\right)^{\mathfrak{t}\mathfrak{k}} \max_{0 \leqslant t \leqslant \mathfrak{t},\, 0 \leqslant k \leqslant \mathfrak{k}} \left\{\frac{1}{t!}\left|\frac{d^t}{dz^t}\, g(k)\right|\right\}$$
$$\leqslant 5 \cdot 18^{T_0 \kappa g} \exp\{-U + c_{22}(T(\log T + \rho) + Ldh)\}$$
$$\leqslant \exp\{-c_{25}\rho T_0 \kappa + c_{26}(T(\log T + \rho) + Ldh)\},$$

où $c_{25}, c_{26} > 0$ sont deux constantes dépendant uniquement de g.

Pour estimer le premier terme à droite de (24) nous devons d'abord majorer $\max_{|z| = R}\{|g(z)|\}$. On a:

$$\max_{|z| = R}\{|g(z)|\} \leqslant \exp\{T(\log T + \rho/2)\} \max_{z \in D(0,\, 2e^{-\rho/2})}\{|\Psi(z)|\}.$$

Nous avons utilisé les mêmes principes que dans la preuve de la majoration (21).

Reste à estimer la quantité $\max_{z \in D(0,\, 2e^{-\rho/2})} |\Psi(z)|$: on utilise les mêmes principes que pour la preuve de la majoration (22). On applique la majoration (11). On a que Ψ est un polynôme de bidegré (L, L) évalué en $\theta_{m_1, 0}(4\tau, 4z)$ et $\theta_{m_2, 0}(4\tau, 4Nz)$. La somme des valeurs absolues des coefficients (dans K) de ce polynôme est majorée par:

$$4^{2g} L^{2g} \chi(A \times A, \mathscr{M})$$
$$\times \exp\{c_8 D(L\kappa^2 N^2 \xi + (T + L)(\log(T + L + N) + dh) + D(\xi + h))\}.$$

On applique une deuxième fois le corollaire 3.2 p. 125 de [Da1] et on obtient qu'il existe une constante $c_{27} > 0$ telle que:

$$\max_{z \in D(0,\, 2e^{-\rho/2})} |\Psi(z)| \leqslant \exp\{c_{27} D(L\kappa^2 N^2 \xi + (T + L)(\log(T + L + N) + dh)$$
$$+ D(\xi + h))\}.$$

Nous avons ainsi prouvé que

$$\max_{|z| = R}\{|g(z)|\} \leqslant \exp\{T(\log T + \rho/2) + c_{28} D(L\kappa^2 N^2 \xi$$
$$+ (T + L)(\log(T + L + N) + dh) + D(\xi + h))\}$$
$$\leqslant \exp\{c_{29} D(L\kappa^2 N^2 \xi + (T + L)(\log(T + L + N) + dh)$$
$$+ D(\xi + h) + T\rho)\}.$$

Comme $r/R = e^{-\rho/2}$, la formule d'interpolation (24) implique:

$$\max_{|z|=2r} \{|g(z)|\} \leqslant \exp\{-c_{30}\rho T_0\kappa + c_{31}D(L\kappa^2N^2\xi + (T+L)(\log(T+L+N)+dh) + D(\xi+h) + T\rho)\}.$$

Nous revenons maintenant à la fonction Ψ en appliquant une dernière fois l'inégalité de Cauchy (une variable complexe).

Pour tout $\underline{t} = (t_1, ..., t_g) \in \mathbb{N}^g$ *avec* $0 \leqslant t_1, ..., t_g$ *et* $|\underline{t}| \leqslant T$ *et pour tout* $j = 0, 1, ..., \kappa g$, *on a*:

$$|D^{\underline{t}}\Psi(jv)| \leqslant \exp\{-c_{30}\rho T_0\kappa + c_{32}D(L\kappa^2N^2\xi + (T+L)(\log(T+L+N)+dh) + D(\xi+h) + T\rho)\}. \quad (25)$$

Cette dernière inégalité est notre estimation analytique.

Estimations arithmétiques de dérivées de fonctions abéliennes. Les estimations arithmétiques dont nous avons besoin sont essentiellement élémentaires. Travaillons avec la base de Shimura $(\delta_1, ..., \delta_g)$ de $T_0(A)$. Soit Ψ une section non nulle de $H^0(A, \mathscr{L}'^{\otimes L})$ à coefficients algébriques. Fixons une fonction thêta $\theta_\alpha(z) \in (\theta_{m,0}(4\tau, 4z))_{m \in \mathscr{R}_4}$. Soit $\underline{t} = (t_1, ..., t_g) \in \mathbb{N}^g$ avec $0 \leqslant t_1, ..., t_g$ et $|\underline{t}| \leqslant T$, fixons un indice $0 \leqslant j \leqslant \kappa g$. Si $\delta^{\underline{t}}(\Psi(jv)(\theta_\alpha(jv)\,\theta_\alpha(jNv))^{-L})$ est défini alors c'est un nombre algébrique (théorème 4.1 p. 139 de [Da1]) de hauteur majorée par:

$$h(\delta^{\underline{t}}(\Psi(jv)(\theta_\alpha(jv)\,\theta_\alpha(jNv))^{-L})) \leqslant h(s) + c_{18}(L\kappa^2N^2\xi + (T+L)(\log(T+L+N)+dh)).$$

Cette inégalité se démontre en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 2.1. En particulier si Ψ est comme dans le lemme 2.1, alors

$$h(\delta^{\underline{t}}(\Psi(jv)(\theta_\alpha(jv)\,\theta_\alpha(jNv))^{-L})) \leqslant c_{33}(L\kappa^2N^2\xi + (T+L)(\log(T+L+N)+dh) + D(\xi+h)).$$

Nous devons comparer ces estimations arithmétiques avec l'inégalité (25) et nous devons minorer les denominateurs introduits. Pour faciliter l'application du corollaire 3.2 p. 125 de [Da1] fixons la fonction thêta $\theta_\alpha(z)$ de telle sorte que $\theta_\alpha(jv)$, $\theta_\alpha(jNv)$ n'est jamais nul pour $j = 0, ..., \kappa g$ et que:

$$|\theta_\alpha(jv)| = \max_{m_1 \in \mathscr{R}_4} \{|\theta_{m_1,0}(4\tau, 4jv)|\} \qquad \text{et}$$

$$|\theta_\alpha(jNv)| = \max_{m_2 \in \mathscr{R}_4} \{|\theta_{m_2,0}(4\tau, 4Njv)|\},$$

pour tout $j=0, ..., \kappa g$: noter que ceci n'est pas restrictif. Ce n'est pas difficile de prouver l'existence de θ_α, en choisissant C assez grand en fonction uniquement de g.

Soit j avec $0 \leqslant j \leqslant \kappa g$, et $\underline{t}_0$ un élément de $\mathbb{N}^g$ tel que $\zeta = \delta^{\underline{t}_0}(\Psi(jv)(\theta_\alpha(jv)\,\theta_\alpha(jNv))^{-L})) \neq 0$. Supposons que $|\underline{t}_0|$ soit minimal avec cette propriété, et supposons par l'absurde que $|\underline{t}_0| \leqslant T$. La formule de Leibniz et la minimalité de $|\underline{t}_0|$ impliquent:

$$\delta^{\underline{t}_0}\left(\frac{\Psi(jv)}{\theta_\alpha(jv)^L\,\theta_\alpha(jNv)^L}\right) = \frac{\delta^{\underline{t}_0}\Psi(jv)}{(\theta_\alpha(jv)\,\theta_\alpha(jNv))^L}.$$

Les minorations des fonctions thêta du corollaire 3.2 p. 125 de [Da1] impliquent, via le lemme matriciel de Masser: $\log |(\theta_\alpha(jv)\,\theta_\alpha(jNv))^L| \geqslant -c_{34} L dh$. L'inégalité de Liouville nous donne:

$$\log |\zeta| \geqslant -c_{33} D(L\kappa^2 N^2 \xi + (T+L)(\log(T+L+N) + dh) + D(\xi + h)).$$

En combinant ces deux dernières inégalités nous obtenons notre minoration arithmétique:

$$\log |\delta^{\underline{t}_0}\Psi(jv)| \\ -c_{35} D(L\kappa^2 N^2 \xi + (T+L)(\log(T+L+N) + dh) + D(\xi + h)). \tag{26}$$

Utilisons maintenant l'inégalité (10) et le lemme 3.1 de [Phi-Wa1] pour minorer les dérivées de Ψ de même ordre, mais dans la base $(D_1, ..., D_g)$. L'inégalité (26) implique :

$$\log \max_{|\underline{t}| = |\underline{t}_0|} \{|D^{\underline{t}}\Psi(jv)|\} \\ \geqslant -c_{36} D(L\kappa^2 N^2 \xi + (T+L)(\log(T+L+N) + dh) + D(\xi + h) + T\rho).$$

Nous avons utilisé l'inégalité (25). Nous avons ainsi prouvé qu'il existe une constante $c_{37} > 0$ ne dépendant que de g telle que:

$$c_{30}\,\rho T_0 \kappa \leqslant c_{37} D(L\kappa^2 N^2 \xi + (T+L)(\log(T+L+N) + dh) + D(\xi + h) + T\rho).$$

Nous utilisons les définitions des paramètres (7). On vérifie ainsi que pour tout C réel positif assez grand :

$$c_{30} C^{2g^2+3g+3} D^2 \mathfrak{L}^2 h^{-1} \leqslant c_{37}(C^{2g^2+2g+1} + C^{2g^2+g+2}(\log C)\,\mathfrak{L} h^{-1})\, D^2 \mathfrak{L}.$$

C'est une contradiction. Puisque il est possible de choisir $C \geqslant c_{23}$ en fonction uniquement de g (cela peut être même fait de manière partiellement explicite), il faut que $|\underline{t}_0| > T$, mais $|\underline{t}_0|$ est par hypothèse minimal, donc la démonstration du lemme 2.2 est complète.

2.3. *Conclusion: application d'un lemme de zéros*

Rappelons le lemme de zéros énoncé dans [Phi], théorème 2.1, sous une forme qui nous convient.

THÉORÈME 2.1. *Soient $A=A(\tau)$ une variété abélienne de dimension g définie sur un corps de nombres k, et munie d'un fibré en droites très ample $\mathscr{F}=\mathscr{L}'^{\otimes L}$. Soit Ψ une section régulière non nulle de $\mathscr{F}$ et soit S un sous-ensemble fini de A, contenant son origine 0. Notons $S^{(g)}\subset A$ l'image de S^g par le morphisme d'addition $A^g\to A$ et supposons que Ψ s'annule à un ordre $\geqslant T+1$ en tout point de $S^{(g)}$. Il existe alors une sous-variété abélienne $\mathfrak{H}$ de A, distincte de A, telle que l'inégalité suivante soit satisfaite.*

$$\binom{[T/g]+g-\dim(\mathfrak{H})}{g-\dim(\mathfrak{H})}\operatorname{Card}\left(\frac{S+\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}}\right)\dim(\mathfrak{H})!\,\chi(\mathfrak{H},\mathscr{F})\leqslant g!\,\chi(A,\mathscr{F})\,2^g. \tag{27}$$

Nous travaillons avec $S=\{0,q,...,\kappa q\}$. Nous avons construit la section Ψ de $\mathscr{L}'^{\otimes L}$ (dans le lemme 2.2), qui est non nulle. Appliquons le théorème 2.1. Il existe une sous-variété abélienne $\mathfrak{H}$ de A, non égale à A, telle que si l'on note m $(m>0)$ sa codimension dans A, on a:

$$T^m\operatorname{Card}\left(\frac{S+\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}}\right)\chi(\mathfrak{H},\mathscr{F})\leqslant c_{38}L^m(N^2+1)^m,$$

pour une constante c_{38} qui ne dépend que de g. Observons que, comme nous avons supposé q d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne propre de A, on a $\kappa=\operatorname{Card}(S+\mathfrak{H}/\mathfrak{H})$ et la dernière inégalité induit une contradiction pour C assez grand (dépendant de g).

Nous obtenons le théorème 1.5 en posant $\xi=\mathfrak{C}D^{-1/g}$.

Remarque 3. On peut construire essentiellement la même fonction auxiliaire en utilisant un processus plus simple, mais en obtenant un résultat moins précis que le théorème 1.3. On applique d'abord un lemme de Thue–Siegel pour construire une fonction auxiliaire ayant une multiplicité uniquement à l'origine, puis on démontre que cette fonction auxiliaire s'annule aussi à une multiplicité plus faible en tout point de petite hauteur et très près de l'origine (c'est à dire qu'on ne suppose pas qu'un de ses logarithmes abéliens soit dans une direction privilégié).

La fonction auxiliaire obtenue s'exprime comme un polynôme homogène dans un anneau de coordonnées projectives opportun, de degré proportionnel à $\mathfrak{L}^{1/(2(1+2g))}\xi^{-1/(2(1+2g))}$, et la multiplicité en tout point près de l'origine et de hauteur canonique $\leqslant\xi$ est proportionnelle à $D\mathfrak{L}h^{-1}$.

On utilise ensuite le même argument de comptage en choisissant un point q, et en prenant $S = \{0, q, ..., \kappa^{\#} q\}$ avec $\kappa^{\#}$ proportionnel à $\mathfrak{L}^{g/(1+2g)} \xi^{-g/(2g+1)}$ dans le lemme de zéros: on ne peut pas utiliser tous les zéros de la fonction auxiliaire essentiellement parce que l'ensemble des points de petite hauteur non nulle n'a pas une structure de groupe.

On obtient que tout point q de petite hauteur non nulle satisfait:

$$\log r(q) \geqslant -c_{39} \mathfrak{L}^{(1+2g+2g^2)/(1+3g+2g^2)} \xi^{g/(1+3g+2g^2)}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[Am] F. Amoroso, Algebraic numbers close to 1 and variants of Mahler′s measure, *J. Number Theory* **60** (1996), 80–96.

[Be] D. Bertrand, Transcendental methods in arithmetic geometry, Analytic number theory, *in* "Proc. Jap.-Fr. Symp., Tokyo/Jap. 1988," Lecture Notes in Math., Vol. 1434, pp. 31–44, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1990.

[Da1] S. David, Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes, *Compositio Math.* **78** (1991), 121–160.

[Da2] S. David, Minorations de hauteurs sur les variétés abéliennes, *Bull. Soc. Math. France* **121** (1993), 509–544.

[Da-Hi] S. David et M. Hindry Minoration de la hauteur de Néron–Tate sur les variétés abéliennes de type C. M., Prépublications Univ. P et M. Curie, 1998.

[Do] E. Dobrowolski, On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial, *Acta Arith.* **34** (1979), 391–401.

[Hi-Si] M. Hindry et J. H. Silverman, On Lehmer's conjecture for elliptic curves, *in* "Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989," Progr. Math., Vol. 91, pp. 103–116, Birkhäuser, Boston, 1990.

[Fa] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, *Invent. Math.* **73** (1983), 349–366.

[Ig] J. Igusa, "Theta Functions," Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 194, Springer-Verlag, New York, 1972.

[Man-Zar] Yu. Manin et G. Zarhin, Heights on families of abelian varieties, *Mat. Sb. (N.S.)* **89** (131) (1972), 171–181.

[Ma1] D. W. Masser, Small values of heights on families of abelian varieties, *in* "Diophantine Approximation and Transcendence Theory, Bonn 1985," Lecture Notes in Math., Vol. 1290, pp. 109–148, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Ma2] D. W. Masser, Counting points of small height on elliptic curves, *Bull. Soc. Math. France* **117** (1989), 247–265.

[Ma3] D. W. Masser, Lettre à D. Bertrand, 17 Novembre 1986.

[Mi-Wa] M. Mignotte and M. Waldschmidt, On algebraic numbers of small height: linear forms in one logarithm, *J. Number Theory* **47** (1994), 43–62.

[Mo] L. Moret-Bailly, Compactifications, hauteurs et finitude, *dans* "Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: la conjecture de Mordell" (L. Szpiro, Ed.), *Astérisque* **127**, 113–129.

[Mu] D. Mumford, On the equations defining abelian varieties I, *Invent. Math.* **1** (1966), 287–354.

[Phi-Wa1] P. Philippon et M. Waldschmidt, Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs, *Illinois J. Math.* **32** (1988), 281–314.

[Phi-Wa2] P. Philippon et M. Waldschmidt, Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques, *Birkhäuser Prog. Math.* **75** (1988), 313–347.

[Phi] P. Philippon, Lemmes de zéros dans les groupes algébriques, *Bull. Soc. Math. France* **114** (1986), 355–383.

[Wa] M. Waldschmidt, A lower bound for linear forms in logarithms, *Acta Arith.* **37** (1980), 257–283.