I DATI INVALSI PER INDAGARE E MIGLIORARE L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

III Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca"

a cura di
Patrizia Falzetti

FrancoAngeli
OPEN ACCESS

PON 2014-2020

INVALSI

INVALSI PER LA RICERCA
STUDI E RICERCHE

INVALSI PER LA RICERCA

La collana Open Access INVALSI PER LA RICERCA si pone come obiettivo la diffusione degli esiti delle attività di ricerca promosse dall'Istituto, favorendo lo scambio di esperienze e conoscenze con il mondo accademico e scolastico.
La collana è articolata in tre sezioni: "Studi e ricerche", i cui contributi sono sottoposti a revisione in doppio cieco, "Percorsi e strumenti", di taglio più divulgativo o di approfondimento, sottoposta a singolo referaggio, e "Rapporti di ricerca e sperimentazioni", le cui pubblicazioni riguardano le attività di ricerca e sperimentazione dell'Istituto e non sono sottoposte a revisione.

ISBN 9788835131045

ISBN 9788835131045

I DATI INVALSI PER INDAGARE E MIGLIORARE L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA

III Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca"

a cura di
Patrizia Falzetti

INVALSI

FrancoAngeli
OPEN ACCESS

Le opinioni espresse nei lavori sono riconducibili esclusivamente agli autori e non impegnano in alcun modo l'Istituto. Nel citare i contributi contenuti nel volume non è, pertanto, corretto attribuirne le argomentazioni all'INVALSI o ai suoi vertici.

Grafica di copertina: Alessandro Petrini

ISBN 9788835131045

Indice

ISBN 9788835131045

ISBN 9788835131045

11. Gli errori degli studenti in Matematica: un'analisi delle risposte alle prove INVALSI di grado 10

di Federica Ferretti, Alessandro Gambini, Sabrina Tiralongo

L'errore dello studente è considerato uno degli elementi fondamentali nel processo di comprensione e apprendimento della Matematica; il suo ruolo è stato approfondito sia dal punto di vista epistemologico (Enriques) che didattico (Zan, D'Amore). Per l'insegnante, è fondamentale avere degli strumenti per interpretare gli errori dei singoli allievi, collegandoli ai fenomeni generali di difficoltà. La ricerca in didattica della Matematica offre chiavi di analisi e di interpretazione molto precise. La grande mole di dati messa a disposizione dall'INVALSI per quanto riguarda le prove di valutazione standardizzata nazionali permette di supportare quantitativamente questi risultati.

Il contributo è focalizzato sull'analisi di alcune tipologie di errori ricorrenti, presenti nelle risposte date dagli studenti nelle prove INVALSI di Matematica del grado 10. Nella banca di item somministrati fino al 2017 sono state individuati cluster di domande, prevalentemente a risposta chiusa, in cui le scelte dei distrattori mettono in evidenza macrofenomeni di comportamento interpretabili con costrutti della didattica della Matematica diffusi e riconosciuti a livello internazionale. I dati relativi alle prove degli anni precedenti permettono di quantificare la portata di questi fenomeni. Nella ricerca presentiamo anche collegamenti "in verticale" rispetto al grado scolastico di questi cluster, mettendo in evidenza questi fenomeni con comportamenti analoghi di studenti in altri gradi scolastici (in modo da avere una prima informazione sull'evoluzione del fenomeno).

Il passaggio al *Computer based testing*, con la correzione centralizzata delle risposte degli studenti, offre la possibilità di analizzare anche le risposte date alle domande aperte. La ricerca analizzerà quindi anche le domande rilasciate della prova del 2018, in particolare quelle a risposta aperta, utilizzando specifici software per la classificazione e la clusterizzazione delle risposte.

ISBN 9788835131045

The student's mistake is considered one of the basic elements in the process of understanding and learning mathematics; its role has been deepened both from the epistemological way (Enriques) and didactic point of view (Zan, D'Amore). For the teacher, it is essential to have tools to interpret the mistakes of the single students, linking them to the general phenomena of difficulty. Research in mathematics education offers accurate keys for analysis and interpretation. The large amount of data available from INVALSI for national standardized assessment tests, allows quantitative support of these results. This paper is focused on the analysis of some kind of recurring errors, present in the answers given by the students in the INVALSI Maths Grade 10 tests. In the database of the item administered until 2017, clusters of tasks have been identified, mainly with closed answers, in which the choices of distractors highlight behavioral macrofenomena interpretable with constructs of mathematics education (in particular, as misconceptions, or as effects of didactic contract in the sense of Brousseau). The data related to the tests of previous years allow to quantify the extent of these phenomena. In the research we also present "vertical" links of these clusters, highlighting these phenomena with similar behaviors of students in other school grades (in order to have a first information on the evolution of the phenomenon). The transition to Computer Based Testing, with the centralized correction of student's answers, offers the possibility to analyze also the answers given to the open tasks. The research will then analyze the released tasks of the 2018 INVALSI Grade 10 test, in particular the open-ended ones, using specific software for the classification and clustering of answers.

1. Introduzione

L'*errore* dello studente è considerato uno degli elementi fondamentali nel processo di apprendimento/insegnamento della Matematica; il suo ruolo è stato approfondito sia dal punto di vista epistemologico (D'Amore, 2007) sia dal punto di vista didattico (Zan, 2000).

Per l'insegnante è fondamentale avere degli strumenti per interpretare gli errori dei singoli allievi in modo tale da poterli collegare a fenomeni generali di difficoltà (Binanti, 2005). Se dal punto di vista qualitativo la ricerca in didattica della Matematica offre chiavi di analisi e di interpretazione molto precise (si veda, per esempio Zan, 2007), la grande mole di dati messa a disposizione dalle prove INVALSI permette di supportare quantitativamente questi risultati.

ISBN 9788835131045

Il presente contributo è focalizzato sull'analisi di alcune tipologie di errori ricorrenti, emersi nelle risposte fornite dagli studenti nelle prove INVALSI di Matematica del grado 10.

Nella banca di item somministrati fino al 2017 sono stati individuati cluster di domande, prevalentemente a risposta chiusa, in cui le scelte delle varie opzioni mettono in evidenza macrofenomeni di comportamento interpretabili con costrutti della didattica della Matematica condivisi a livello internazionale (come per esempio le misconcezioni, o effetti di contratto didattico (Ferretti, 2015). Analisi qualitative e quantitative su questi dati delle rilevazioni degli anni precedenti permettono di quantificare, in linea di massima, la portata di questi fenomeni. Fino all'a.s. 2016/2017 le valutazioni standardizzate INVALSI sono state somministrate in modalità cartacea, mentre dall'a.s. 2017/2018 le prove INVALSI del grado 8 e del grado 10 si sono svolte in modalità *Computer based testing* (CBT). Il passaggio al CBT ha comportato tutta una serie di cambiamenti, sia dal punto di vista contenutistico sia dal punto di vista tecnico e tra questi cambiamenti un fatto rilevante è stata la correzione centralizzata dei test a livello nazionale. Con la correzione centralizzata è possibile avere un'analisi delle risposte aperte fornite dagli studenti di tutta Italia fornite durante la prova censuaria sul territorio nazionale (*main study*).

Focus della ricerca in oggetto sono le risposte aperte rilasciate dall'INVALSI della prova INVALSI di Matematica del *main study* 2018 della classe seconda della scuola secondaria di secondo grado (grado 10), svolto a livello nazionale a maggio 2018. In dettaglio verranno presentate le analisi di tre domande, codificate con specifici software per la classificazione e la clusterizzazione delle risposte, effettuate utilizzando alcuni dei principali costrutti di didattica della Matematica.

2. Quadro teorico della ricerca condotta

Di seguito verranno richiamati e approfonditi alcuni dei principali costrutti teorici di didattica della Matematica che hanno permesso di inquadrare la ricerca e, successivamente, di interpretare gli errori più ricorrenti individuati nelle risposte dagli studenti.

ISBN 9788835131045

2.1. Il contratto didattico

Uno dei costrutti che più ha fornito una chiave di lettura dei fenomeni evidenziati è il contratto didattico. Il concetto di contratto didattico nasce da studi da Guy Brousseau, effettuati in Francia alla fine del 1970, volti a indagare le cause dell'insuccesso degli studenti in Matematica (IREM Bordeaux, 1978).

A differenza del contratto pedagogico, che racchiude diritti e doveri di docenti e studenti, il contratto didattico pone al centro le aspettative, spesso implicite, che la situazione didattica e le convenzioni pongono al docente e allo studente durante attività matematiche.

Afferma Brousseau:

> In una situazione d'insegnamento l'accesso a un compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti nel modo di insegnare del maestro. Queste abitudini del maestro attese dall'allievo e i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico (Brousseau, 1980, p. 181).

Spesso queste "attese" sono del tutto implicite, non sono dovute ad accordi espliciti, imposti dalla scuola o dagli insegnanti o concordati con gli allievi, ma alla concezione della scuola, della Matematica, alla ripetizione di modalità. Lo studio dei vari fenomeni di comportamento degli allievi da questo punto di vista ha dato diversi frutti, di estremo interesse; oggi molti comportamenti considerati fino a poco tempo fa inspiegabili o legati al disinteresse, all'ignoranza o all'età immatura, sono invece stati chiariti.

Uno degli studi più noti è quello che prende il nome di "età del capitano" (Baruk, 1985). Alla fine degli anni 1970, i ricercatori dell'IREM (Institut de Recherche sur l'′Enseignement des Mathématiques) di Grenoble proposero la seguente consegna ad alcuni studenti della scuola primaria: "In una nave ci sono 26 pecore e 10 capre. Quanti anni ha il capitano della nave?".

76 studenti su 97 hanno calcolato l'età del capitano combinando i numeri presenti nel testo con qualche operazione come addizione o sottrazione. Nel corso degli anni, in diversi Paesi sono state utilizzate versioni di questo problema "adattato" in base al contesto e al livello scolastico. Nella maggior parte dei casi è stato osservato un comportamento degli studenti analogo a quello rilevato dai primi ricercatori; è stato notato che molto spesso gli atteggiamenti degli studenti sono governati dalla convinzione secondo cui i dati numerici nel testo di un problema in Matematica devono essere utilizzati nei calcoli e che la risposta corretta debba necessariamente derivare da questi calcoli.

ISBN 9788835131045

Con l'espressione *Effetto età del capitano* si indica oggi la condotta di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, quando questo problema non possiede invece una soluzione numerica (D'Amore, 1999).

Tale effetto rientra inoltre tra quelli detti di attesa di rottura del contratto didattico, cioè di "devoluzione" (Brousseau, 1988): anche se l'allievo si rende conto dell'assurdità del problema posto, necessita di farsi carico personale di una rottura del contratto didattico, per poter rispondere che il problema non si può risolvere. Questa nuova situazione, infatti, contrasta con tutte le sue attese, con tutte le sue abitudini, con tutte le clausole fin qui messe in campo nelle situazioni didattiche.

Durante la soluzione di un problema a volte succede che gli studenti non cerchino di dare un senso alla consegna e si rivela spesso una mancanza di controllo critico della situazione, lacune molto probabilmente dovute alla totale fiducia nel fatto che l'insegnante consegni un problema "che abbia senso" e che "si possa risolvere". In questa situazione gli studenti spesso rispondono "non quello che pensano", ma quello che "pensano che l'insegnante si aspetti che loro rispondano".

E il contratto didattico è un costrutto teorico inventato proprio per interpretare questo e ad altri fenomeni derivanti dal rapporto tra allievo, docente e Matematica. Si tratta infatti di un costrutto teorico particolarmente utile per descrivere i rapporti, riguardanti le prestazioni matematiche, che inevitabilmente (anche se spesso in modo inconsapevole) si creano in classe tra insegnante e allievi per il fatto che l'insegnante ha il compito "istituzionale" di insegnare Matematica agli allievi, organizzando attività in classe a ciò finalizzate, e gli allievi devono (più o meno di buon grado) adeguarsi a quello che l'insegnante pretende.

In dettaglio, il contratto didattico permette di interpretare vari fenomeni che riguardano le prestazioni matematiche degli allievi e, più in generale, l'insegnamento-apprendimento della Matematica, come per esempio:

- il comportamento degli allievi nei problemi del tipo "età del capitano";
- il tentativo, nella risoluzione di un problema, di ricordare degli schemi risolutivi quando si tratterebbe invece di ragionare ex novo;
- il tentativo, molto meno frequente del precedente, di costruire un ragionamento risolutivo originale dove basterebbe applicare una formula opportuna;
- l'adozione sistematica di forme di organizzazione della risoluzione di un problema (per esempio accompagnandola con una sequenza di disegni che rappresentano i diversi "passaggi") suggerite (e che funzionano) in casi particolari ma che possono risultare di grave impaccio in altri problemi;

ISBN 9788835131045

– le modalità di studio personale della Matematica (fortemente influenzate da quelle che gli allievi pensano siano le prestazioni richieste dall'insegnante);
– molte delle difficoltà e delle incomprensioni tra insegnante di Matematica e allievi che si manifestano nel passaggio a un nuovo livello scolastico (dalle elementari alle medie, dalle medie alle superiori) o nel cambio di insegnante di Matematica all'interno di uno stesso ciclo scolastico.

La problematica del contratto didattico è particolarmente rilevante per la ricerca in oggetto in quanto la natura delle prestazioni matematiche è molto varia (a volte occorre ricordare, altre volte riflettere, altre volte ancora progettare, esplorare ecc.), e quindi la scelta del comportamento più adatto in ogni circostanza è assai impegnativa, con il rischio inevitabile che l'allievo (soprattutto l'allievo meno sicuro di sé) si interroghi non su "cosa conviene fare" ma su "cosa l'insegnante si aspetta che lui faccia".

L'importanza del contratto didattico nell'insegnamento-apprendimento della Matematica suggerisce che è bene che gli insegnanti si chiedano (nel momento in cui propongono un'attività da svolgere) cosa i loro allievi possono aspettarsi di dover fare, e soprattutto prestino attenzione ai comportamenti dei loro allievi per individuare la possibile prevalenza di atteggiamenti del tipo "cosa devo fare per soddisfare l'insegnante", a prescindere dal contenuto e dalla logica interna della prestazione richiesta. È anche bene che l'insegnante imposti con la massima chiarezza il rapporto contrattuale con i propri allievi, anche attraverso discussioni su cosa gli allievi si aspettano di dover fare nelle diverse circostanze e attraverso chiarimenti sulla varietà di comportamenti utili per affrontare i compiti più complessi (ricordare, applicare, esplorare ecc.).

Fondamentale per l'apprendimento degli studenti è infatti la *devoluzione*, il processo di responsabilizzazione da parte dell'allievo che "rompe" il contratto didattico e impegna la sua responsabilità nell'attività cognitiva in gioco, accettandone le conseguenze (Bolondi e Fandiño Pinilla, 2012).

Uno dei motivi del non innescarsi della devoluzione è una clausola del contratto didattico, detta la *clausola di delega formale*. Questa clausola è spiegata dalle parole di Bruno D'Amore:

> Lo studente legge il testo, decide l'operazione da effettuare e i numeri con i quali deve operare; a quel punto scatta, appunto, la clausola di delega formale: non tocca più allo studente ragionare e controllare. Sia che faccia i calcoli a mano, tanto più se fa uso della calcolatrice, si instaura quella clausola che... disimpegna le facoltà razionali, critiche, di controllo: l'impegno dello studente è finito e ora tocca all'algoritmo o meglio ancora alla macchina, lavorare per lui. Il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere il risultato, qualsiasi

ISBN 9788835131045

cosa sia e non importa che cosa esso significhi nel contesto problematico (D'Amore, 2002, pp. 87-88).

Come vedremo in seguito, alcuni degli errori più ricorrenti degli studenti oggetto della presente ricerca sono inquadrabili con alcune caratteristiche chiaramente riconducibili al contratto didattico (D'Amore, 1999).

2.2. Errori e ostacoli che si frappongono all'apprendimento

I motivi del non innescarsi della devoluzione possono essere diversi, come per esempio la mancanza delle conoscenze, di sicurezza delle procedure e lacune nella capacità di lettura e nell'interpretazione di situazioni problematiche.

Tra gli studi che sono stati compiuti per cercare di trovare una spiegazione riguardo alle difficoltà che gli studenti incontrano nella risoluzione di problemi di Matematica vi è la teoria degli ostacoli di Brousseau (Brosseau, 1983).

Riprendendo le parole di Bruno D'Amore (1999, p. 120):

> Un ostacolo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi (anche solo cognitivi) precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla a un problema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.

Un ostacolo può essere considerato una conoscenza che gli studenti possiedono, oppure una conoscenza legata ad altre conoscenze precedenti che però sono spesso poco corrette, imprecise e provvisorie, oppure una conoscenza precedente che ha avuto successo, ma che ora è inadatta. Un ostacolo, dal punto di vista dello studente, ha una valenza negativa in quanto si produce quando egli ritiene di poter applicare in un dato contesto concettuale un certo modello che poi risulta essere inadeguato.

L'ostacolo-errore crea quindi un conflitto in quanto esso va contro le certezze dell'allievo, poiché mette in dubbio il suo modello che egli tenta di considerare come universale o assoluto. Anche per un insegnante l'ostacolo ha valenza negativa perché viene considerato come "evidenziatore di difficoltà" nell'apprendimento della materia, mentre per un ricercatore in didattica esso ha valenza positiva in quanto viene considerato come condizione necessaria per la costruzione della conoscenza dell'allievo.

ISBN 9788835131045

Nel corso del tempo lo studente può aver assunto un concetto ed esserse-ne fatto un'immagine; questa immagine può essere stata rinforzata da prove ed esperienze ripetute. Ma può capitare che tale immagine si rilevi inadeguata, prima o poi, rispetto a un'altra dello stesso concetto, per esempio proposta dall'insegnante stesso o da altri, e non attesa, in contrasto cioè con la precedente.

Si crea così un conflitto tra la precedente immagine, che lo studente credeva definitiva, riguardante quel concetto, e la nuova; ciò accade specialmente quando la nuova immagine amplia i limiti di applicabilità del concetto, o ne dà una versione più comprensiva.

Dare agli errori solo connotazioni negative e non interpretarli come segnali di malessere cognitivo, appunto, è troppo semplicistico e banale: non si tratta solo di valutare negativamente lo studente che sbaglia; si tratta, invece, di dare gli strumenti necessari per l'elaborazione critica. Sta al docente, rendersi conto che quelle che lo studente crede essere concezioni corrette, sono in realtà delle misconcezioni.

Come riportato in D'Amore *et al.* (2008) «L'errore, dunque, non è necessariamente solo frutto di ignoranza, ma potrebbe invece essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successo, che ha prodotto risultati positivi, ma che non tiene alla prova di fatti più contingenti o più generali» (p. 51).

Dunque, non si tratta sempre di errore di origine sconosciuta, imprevedibile, ma evidenzia una difficoltà. Queste considerazioni hanno portato la ricerca in didattica della Matematica a rivalutare in modo molto diverso dalla prassi usuale l'errore e il suo ruolo.

Come scriveva il matematico Federico Enriques ne *Il significato della storia del pensiero scientifico* (1936, p. 12):

> Il maestro sa che la comprensione degli errori dei suoi allievi è la cosa più importante della sua arte didattica. Egli impara presto a distinguere gli errori significativi da quelli, che non sono propriamente errori – affermazioni gratuite di sfacciati che cercano di indovinare – dove manca lo sforzo del pensiero, della cui adeguatezza si vorrebbe giudicare. E degli errori propriamente detti, che talora sono in rapporto con manchevolezze delle singole menti, ma nei casi più caratteristici si presentano come tappe del pensiero nella ricerca delle verità, il maestro sa valutare il significato educativo: sono esperienze didattiche che egli persegue, incoraggiando l'allievo a scoprire da sé la difficoltà che si oppone al retto giudizio, e perciò anche a errare per 4 imparare a correggersi. Tante specie di errori possibili sono altrettante occasioni di apprendere.

Quella che Enriques chiama *comprensione* va al di là della semplice osservazione dell'errore: è il risultato di un processo di *interpretazione*, fondamen-

ISBN 9788835131045

tale per pianificare un'azione didattica che non si ponga l'obiettivo riduttivo di sostituire la risposta scorretta con una risposta corretta, ma cerchi invece di promuovere la comprensione degli allievi (Bussotti, 2012). Per avere un'interpretazione sempre più approfondita degli errori e delle possibili difficoltà che incontrano gli studenti, è molto efficace "posizionare" l'attività matematica in una delle fasi del ciclo della modellizzazione (OECD, 2013).

3. Il ciclo della matematizzazione

Il quadro di riferimento internazionale delle valutazioni standardizzate OCSE PISA 2012 tradotto da INVALSI definisce la competenza matematica come «la capacità di una persona di formulare, utilizzare e interpretare la Matematica in svariati contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la Matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo» (INVALSI, 2018, p. 25).

Nel Quadro di riferimento vengono indicate due direzioni lungo le quali i quesiti INVALSI sono costruiti, e in base alle quali i risultati sono organizzati e interpretati:

– i *contenuti matematici*, ovvero in quale ambito è posta la domanda (Numeri, Dati e previsioni, Relazioni e funzioni, Spazio e figure);
– i *processi cognitivi* che l'allievo deve attivare per rispondere alla domanda (Risolvere problemi, Conoscere, Argomentare).

La figura seguente (fig. 1) mostra una panoramica dei principali costrutti dell'attuale quadro di riferimento e indica le relazioni esistenti tra essi.

Il ciclo della matematizzazione comprende due processi di *matematizzazione orizzontale* che vengono definiti come il processo di *formulare* e quello di *interpretare*, e un processo di matematizzazione verticale che viene definito come il processo di *utilizzare*.

I tre verbi, formulare, utilizzare e interpretare si riferiscono ai processi in cui sono impegnati i ragazzi quando sono chiamati a risolvere problemi. In particolare, nella fase del *formulare* lo studente parte da una situazione così come si presenta nel contesto reale e la trasforma in una forma trattabile utilizzando un modello matematico (per esempio un'equazione, una funzione, un grafico ecc). Nella fase dell'*utilizzare* la Matematica lo studente lavora sul modello matematico utilizzando ragionamenti matematici, concetti e procedure, esegue calcoli, manipola espressioni algebriche, equazioni o

ISBN 9788835131045

altri modelli. Nella fase dell'*interpretare* lo studente riflette sulle soluzioni matematiche che ha trovato e interpreta i risultati nel contesto del problema. Per fare ciò deve saper valutare le soluzioni e le argomentazioni ed essere in grado di determinare se i risultati sono ragionevoli in quel contesto. Come vedremo dall'analisi seguente, le domande analizzate in questa ricerca si "posizionano" nelle diverse fasi del ciclo della matematizzazione e evidenziano difficoltà specifiche in relazione a esse.

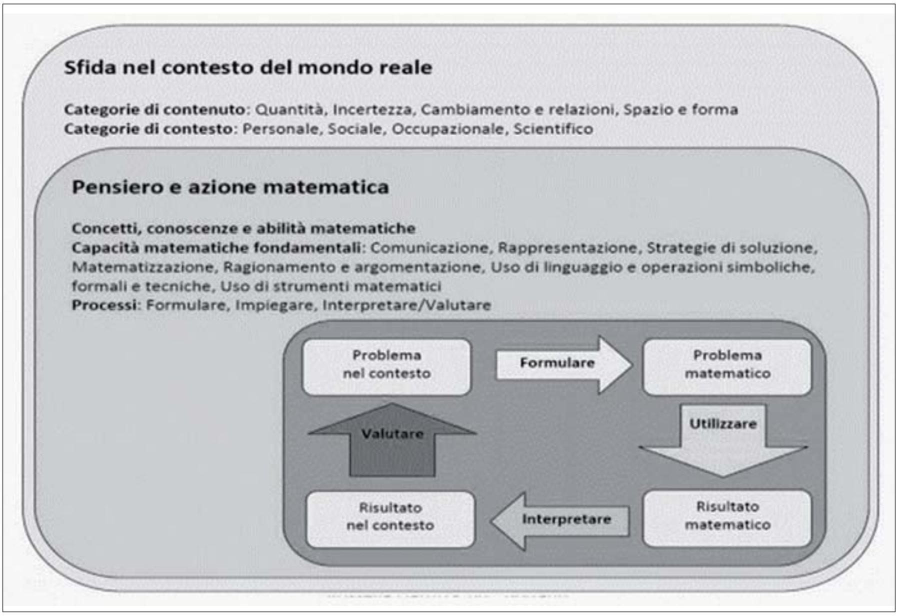


Fig. 1 – Il ciclo della matematizzazione

Fonte: OECD (2013)

4. Analisi di quesiti INVALSI

Il Servizio Nazionale di Valutazione dell'INVALSI è passato definitivamente, per il livello 10, da una valutazione degli apprendimenti su supporto cartaceo (PP) a una somministrata su supporto informatico (CBT). Ciò ha permesso di raccogliere, in maniera centralizzata, una mole di dati imponente, con protocolli dettagliati e già digitalizzati.

Per lo sviluppo di questa ricerca sono stati selezionati 3 quesiti a risposta aperta di grado 10 del *main study* 2018.

ISBN 9788835131045

Le ipotesi interpretative delle risposte errate più frequenti saranno successivamente da verificare con un'indagine qualitativa (interviste); è infatti in corso d'opera una ricerca qualitativa volta a indagare i processi, quindi le cause, degli errori più frequenti. Le tre domande analizzate nella nostra ricerca rientrano in tre ambiti differenti e precisamente in Numeri, Dati e previsioni e Spazio e figure e la loro dimensione è quella di Risolvere problemi e Argomentare.

Domanda

Anna ha speso:

- **presso un'edicola un quinto del denaro con cui è uscita da casa,**
- **in cartoleria la metà del denaro rimanente.**

Dopo i due acquisti le sono rimasti 20€.

Domanda 1/2

Qual è la quantità di denaro con cui Anna è uscita da casa?

Digita la risposta alla domanda.

Risposta: ☐ €

Fig. 2 – Quesito 1 – Domanda a risposta aperta univoca

Classificazione:
Ambito[1]: Numeri.
Dimensione: Risolvere problemi.
Traguardo: Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati.
Scopo della domanda: risolvere un problema di primo grado.

Per rispondere a questa domanda l'allievo/a deve individuare e utilizzare conoscenze di base (frazioni, percentuali) oppure un'equazione che consenta di risolvere il problema collegando fra loro le informazioni presenti nel testo e la loro rappresentazione (in particolare interpretando la frase "la metà del denaro rimanente").

Risposta corretta: **50**.

[1] Per brevità espositiva, per ogni domanda, esplicitiamo le principali caratteristiche anche in riferimento al Quadro di riferimento INVALSI.

ISBN 9788835131045

Numero di studenti del campione: 16.489.
Numero di risposte corrette: 6.459.
Numero di risposte mancanti: 1.391.
Numero di risposte errate: 8.639.
Percentuale di risposte corrette: 39,2%.
Percentuale di risposte errate: 52,4%.
Percentuale di risposte mancanti: 8,4%.
Risposte errate più frequenti (vedi tab. 1).

Tab. 1 – Frequenze delle risposte alla domanda 1

Frequenze	*Risposta*
2.342	200
670	100
534	48
525	40
358	60

Per risolvere il quesito in oggetto ci sono due possibili strategie, ognuna delle quali può portare a errori differenti:
– impostare e risolvere un'equazione;
– partire dal risultato e ripercorrere all'indietro la storia.

Nel primo caso, alcuni studenti hanno incontrato difficoltà a impostare l'equazione mentre altri l'hanno impostata correttamente ma hanno poi sbagliato a risolverla. Inquadrando le difficoltà nel ciclo della modellizzazione, nel primo caso l'errore si posiziona nel "formulare" mentre nel secondo caso è nell'"utilizzare" (OECD, 2013).

Questo task prevede una risposta aperta univoca; alcuni studenti hanno anche esplicitato il procedimento risolutivo ma nella maggior parte dei casi durante la correzione sono stati registrati solo prodotti, da cui i processi sono stati ipotizzati/dedotti.

Esaminiamo nel dettaglio le risposte errate più frequenti:
– 2.342 studenti, ossia il 14,2% sul totale (27,1% di coloro che sbagliano) rispondono 200.
  Questa risposta è stata la più frequente. Analizzando la risposta possiamo ipotizzare che gli studenti siano partiti dall'unico dato numerico in loro possesso, cioè 20 euro, e lo abbiano moltiplicato per 5 e poi ancora per 2 (oppure prima per 2 e poi per 5) ottenendo 200.
  In questa risposta c'è un evidente comportamento riconducibile al contratto didattico (Brousseau, 1988): lo studente pensa che per rispondere deve utilizzare (in qualche modo) esattamente i numeri del problema,

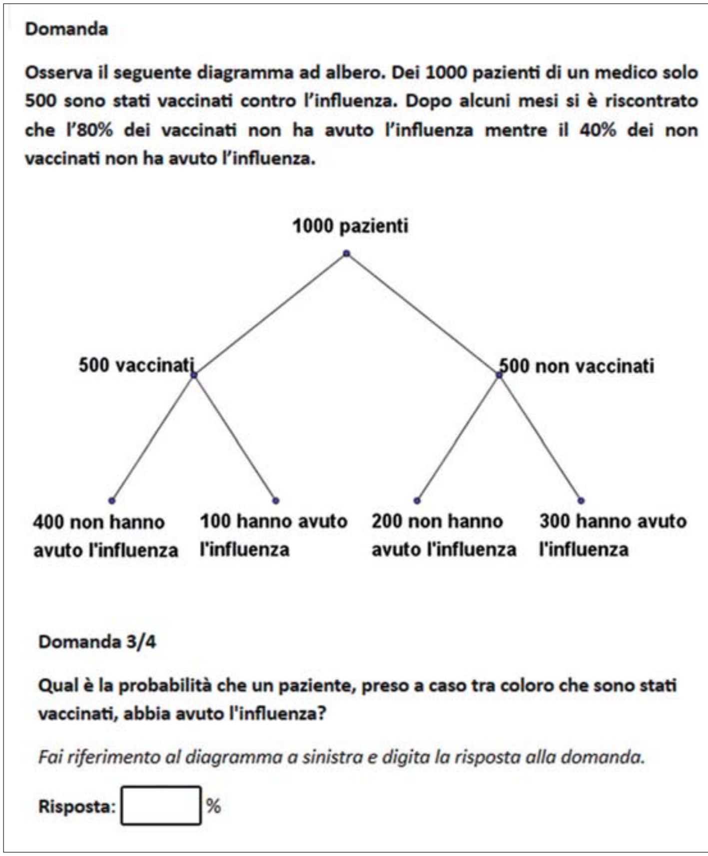
ISBN 9788835131045

senza preoccuparsi troppo del ruolo che questi hanno all'interno del problema;

– 670 studenti, ossia il 4,1% sul totale (7,8% di coloro che sbagliano) rispondono 100.
  Analizzando la risposta possiamo ipotizzare che in questo caso gli studenti abbiano moltiplicato 20 per 5;
– 525 studenti, ossia il 3,2% sul totale (6,1% di coloro che sbagliano) rispondono 40.
  Analizzando la risposta possiamo ipotizzare che in questo caso gli studenti abbiano moltiplicato 20 per 2.
  Questa risposta (come tutte quelle che portano a un risultato basso, inferiore a 40) è ovviamente assurda, perché 40 erano evidentemente gli euro dopo la prima spesa, quindi uscendo di casa Anna ne aveva sicuramente di più. In questo caso lo studente non si è preoccupato di verificare la verosimiglianza del proprio risultato e si è "affidato completamente al risultato" del calcolo che ha fatto; ciò è quello che, come abbiamo detto, viene detto *delega formale* ed è una clausola del contratto didattico (Brousseau, 1988);
– 358 studenti, ossia il 2,2% sul totale (4,1% di coloro che sbagliano) rispondono 60.
  Analizzando la risposta possiamo ipotizzare che in questo caso gli studenti abbiano moltiplicato 20 per 2 e poi abbiano aggiunto 20;
– 534 studenti, ossia il 3,2% sul totale (6,2% di coloro che sbagliano) rispondono 48.
  Cerchiamo di interpretare questo risultato. Dopo i due acquisti, ad Anna sono rimasti 20 €. In tabaccheria ne ha speso la metà, quindi ne aveva 40 (facile errore). All'edicola ha speso 1/5. 1/5 di 40 è 8, quindi ne aveva 48.
  Si tratta di un classico errore di concettualizzazione che si può tradurre in "Faccio la parte di un tutto, ma sbaglio a scegliere il tutto".

Osserviamo, inoltre, che in questo quesito gli studenti che sbagliano fanno operazioni (elementari) con i numeri a disposizione; tale comportamento si può ricondurre al noto effetto di contratto didattico "età del capitano" (D'Amore, 1999).

ISBN 9788835131045


Domanda

Osserva il seguente diagramma ad albero. Dei 1000 pazienti di un medico solo 500 sono stati vaccinati contro l'influenza. Dopo alcuni mesi si è riscontrato che l'80% dei vaccinati non ha avuto l'influenza mentre il 40% dei non vaccinati non ha avuto l'influenza.

Domanda 3/4

Qual è la probabilità che un paziente, preso a caso tra coloro che sono stati vaccinati, abbia avuto l'influenza?

Fai riferimento al diagramma a sinistra e digita la risposta alla domanda.

Risposta: ☐ %

Fig. 3 – Quesito 2 – Domanda a risposta aperta univoca

Ambito: Dati e previsioni.
Dimensione: Risolvere problemi.
Traguardo: Esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza. Esprime stime di probabilità di eventi composti a partire dalla conoscenza delle probabilità di eventi elementari.
Scopo della domanda: Calcolare una probabilità a partire dai dati ricavabili da un diagramma ad albero o dalla descrizione di una situazione effettuando un'elaborazione che richiede operazioni aritmetiche elementari.
Risposta corretta: **20**.
Numero di studenti del campione: 16.422.
Numero di risposte corrette: 8.005.
Numero di risposte mancanti: 616.
Numero di risposte errate: 7.801.

ISBN 9788835131045

Percentuale di risposte corrette: 48,7%.
Percentuale di risposte errate: 47,5%.
Percentuale di risposte mancanti: 3,8%.
Risposte errate più frequenti (vedi tab. 2).

Tab. 2 – Frequenze delle risposte alla domanda 2

Frequenze	*Risposta*
2.344	10
1.316	40
712	50
608	60
467	80

Anche in questo caso abbiamo risposte univoche; i processi messi in atto per la risoluzione li possiamo solo dedurre/ipotizzare. Esaminiamo nel dettaglio le risposte errate più frequenti:

– 2.344 studenti, ossia il 14,3% sul totale (30% di coloro che sbagliano) rispondono 10.
  Questa risposta errata è stata la più ricorrente. Possiamo ipotizzare che gli studenti, utilizzando i dati del diagramma ad albero, abbiano calcolato la percentuale richiesta in questo modo:
  P = 100 / 1.000 = 0,1 = 10%
  essendo 1.000 il totale degli individui della popolazione e 100 i pazienti vaccinati che hanno avuto l'influenza.
  Questi studenti dimenticano di riconsiderare lo spazio degli eventi. Non comprendono che la popolazione a cui far riferimento per rispondere alla domanda è solo quella dei vaccinati e non dei 1.000 pazienti;
– 1.316 studenti, ossia l'8% sul totale (16,9% di coloro che sbagliano) rispondono 40. In questo caso gli studenti utilizzano in modo errato l'informazione contenuta nel testo e scrivono come risposta il dato fornito nel testo che rappresenta invece la probabilità che un paziente non vaccinato non abbia avuto l'influenza;
– 712 studenti, ossia il 4,3% sul totale (9,1% di coloro che sbagliano) rispondono 50.
  Analizzando la risposta possiamo ipotizzare che gli studenti, utilizzando i dati del diagramma ad albero, abbiano calcolato la percentuale richiesta in questo modo:
  P = 500 / 1.000 = 0,5 = 50%
  essendo 1.000 i pazienti in totale e 500 i pazienti vaccinati.

ISBN 9788835131045

Calcolano così la probabilità che un individuo preso a caso dall'insieme dei 1000 pazienti abbia avuto l'influenza. Anche gli studenti che commettono questo errore dimostrano di non comprendere che la domanda è un problema di probabilità condizionata e che lo spazio degli eventi va ristretto ai soli pazienti che sono stati vaccinati;

– 608 studenti, ossia il 3,7% sul totale (7,8% di coloro che sbagliano) rispondono 10.
  Possiamo ipotizzare che gli studenti, utilizzando i dati del diagramma ad albero, abbiano calcolato la percentuale richiesta in questo modo:
  P = (500 + 100) / 1.000 = 600/1.000 = 0,6 = 60%
  essendo 1.000 i pazienti in totale, 500 i pazienti vaccinati e 100 i pazienti vaccinati che hanno avuto l'influenza;
– 467 studenti, ossia il 2,8% sul totale (6% di coloro che sbagliano) rispondono 80.
  Possiamo ipotizzare che gli studenti, utilizzando i dati del diagramma ad albero, abbiano calcolato la percentuale richiesta in questo modo:
  P = (500 + 300) / 1.000 = 800/1.000 = 0,8 = 80%
  essendo 1000 i pazienti in totale, 500 i pazienti vaccinati e 300 i pazienti non vaccinati che hanno avuto l'influenza.

In questa domanda si deve calcolare la probabilità di un evento in una situazione di probabilità condizionata, che richiede di individuare e riconsiderare lo spazio degli eventi in cui si opera. Se l'allievo/a leggesse con attenzione il testo ("l'80% dei vaccinati non ha avuto l'influenza") potrebbe immediatamente dare la risposta corretta: "il 20% dei vaccinati ha avuto l'influenza" senza la necessità di quantificare la cardinalità del nuovo spazio degli eventi.

La domanda risulta di livello di difficoltà elevato (essendo uguale a 47,5 la percentuale di risposte errate) probabilmente perché la maggior parte degli studenti cerca di ottenere la risposta riconsiderando i dati riportati sul diagramma ad albero e non riconosce che la popolazione a cui deve far riferimento è quella dei vaccinati, cioè 500 individui e non l'intera popolazione.

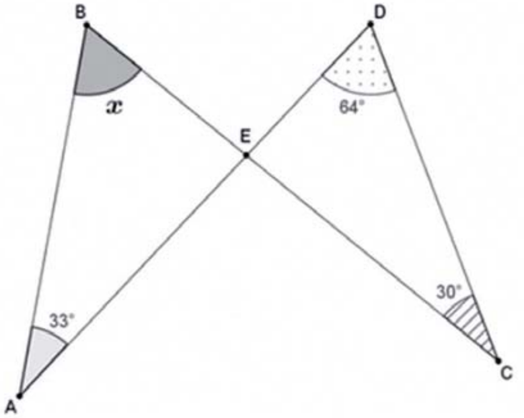
Osserviamo che la domanda chiedeva un'informazione che era contenuta esplicitamente nel testo, e che ovviamente poteva anche essere ricavata dal diagramma ad albero. La clausola del contratto didattico, nota come *Esigenza di giustificazione formale* (Bolondi e Fandiño Pinilla, 2012), fa sì che molti studenti non si accontentino di osservare che l'informazione è contenuta nel testo, ma ritengano di dover eseguire operazioni (in questo caso sul diagramma).

Questa strategia naturalmente comporta la possibilità di errori.

ISBN 9788835131045

Domanda

Osserva la figura.



Giulia afferma che l'ampiezza x dell'angolo $A\widehat{B}E$ è 61° .

Giulia ha ragione? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

Fai riferimento alla figura a sinistra e digita la risposta alla domanda nella casella corretta.

Giulia ha ragione, perché

Giulia non ha ragione, perché

Fig. 4 – Quesito 3 – Domanda a risposta aperta

ISBN 9788835131045

Ambito: Spazio e figure.

Dimensione: Argomentare.

Traguardo: Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.

Scopo della domanda: Produrre un'argomentazione per giustificare un'affermazione data, utilizzando conoscenze relative agli angoli e ai triangoli.

Risposta corretta: "Giulia ha ragione perché …

Accettabili tutte le risposte che utilizzino contemporaneamente le due seguenti informazioni:

– gli angoli DEC e BEA hanno stessa ampiezza perché sono angoli opposti al vertice;
– la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°".

(Corretta se risposta e giustificazione sono entrambe corrette).

Numero di studenti del campione: 15.223.

Numero di risposte corrette: 3.225.

Numero di risposte errate: 8.444.

Numero di risposte mancanti: 3.554.

Percentuale di risposte corrette: 21,2%.

Percentuale di risposte errate: 55,5%.

Percentuale di risposte mancanti: 23,3%.

Come si può osservare, è abbondantemente superiore la percentuale di studenti che sbagliano rispetto a quelli che rispondono correttamente.

Questo quesito si differenzia in particolar modo dagli altri due in quanto si chiede allo studente di *giustificare* un'argomentazione.

La domanda, in particolare, richiede di produrre una dimostrazione che coinvolge alcune conoscenze di geometria euclidea: la somma degli angoli interni di un triangolo e la congruenza degli angoli opposti al vertice. In questa domanda, quindi, non solo si richiede la conoscenza di fatti geometrici fondamentali, ma anche di produrre e articolare una dimostrazione esplicitando i diversi passi argomentativi.

In fase di correzione è stato comunque deciso di considerare accettabili le risposte in cui si utilizza come implicito il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo sia 180° o che gli angoli opposti al vertice siano congruenti.

Nei protocolli seguenti, sono mostrate alcune delle risposte errate più frequenti (vedi tab. 3).

ISBN 9788835131045

Tab. 3 – Risposte errate più frequenti

Si perché	La somma degli angoli di un triangolo è 180°
Si perché	L'angolo AEB è 86°
Si perché	61+33=94 ed è equivalente a 64+30=94
Si perché	64-33=31 e 30+31=61
Si perché	64-3=61
Si perché	ABE è 61
Si perché	Essendo un angolo acuto è sempre minore di 90°
Si perché	È un angolo acuto
Si perché	Giulia ha ragione perchè i due triangoli sono uguali
Si perché	L'angolo A è di 33 gradi
Si perché	Gli angoli opposti al vertice hanno la stessa ampiezza, quindi l'angolo in B deve essere per forza 61°
Si perché	Gli angoli ottusi e acuti dei triangoli hanno una differenza di 3°
Si perché	Gli angoli sono tutti uguali
Si perché	Il triangolo è rettangolo
Si perché	In tutti e due i triangoli la somma degli angoli è 184
No perchè	La somma degli angoli di un triangolo deve essere di 180°
No perché	La somma degli angoli interni supera 180°
No perché	Gli angoli sono diversi
No perché	I due triangoli sono uguali
No perché	L'ampiezza degli angolo è 57°
No perché	L'ampiezza è di 64°
No perché	180-33-90=57
No perché	61°+33°+90° > 180°

Dall'analisi delle risposte possiamo osservare che diversi allievi omettono di utilizzare o esplicitare entrambe le conoscenze coinvolte nella dimostrazione.

Di fronte a domande aperte articolate ci poniamo, allora, una domanda: quand'è che un'argomentazione è da considerarsi corretta e completa?

Durante il percorso scolastico, questo è un punto che evolve continuamente. Nel ventaglio amplissimo di risposte (circa 11.200 risposte diverse) che gli studenti hanno dato, si vede che loro decidono quali elementi esplicitare e quali sottintendere, quali ripetere e quali no: probabilmente, queste scelte dipendono da fattori "contrattuali" stabiliti all'interno delle loro classi. Questo rende particolarmente delicata la correzione omogenea di queste domande.

ISBN 9788835131045

5. Conclusioni e implicazioni didattiche

Come abbiamo visto nel presente contributo, dalla correzione dei quesiti INVALSI emergono vari macrofenomeni a livello nazionale, inquadrabili con alcuni costrutti di didattica della Matematica. Con la correzione centralizzata è stato possibile analizzare tutte le riposte fornite alle domande aperte da parte degli studenti italiani. Questa enorme mole di dati consente di analizzare in profondità i processi e non solo i prodotti, permettendo così di indagare caratteristiche e peculiaretà di difficoltà diffuse a livello nazionale. La maggior parte degli errori messi in luce dalla correzione centralizzata non sono strettamente collegati ai contenuti in gioco ma dipendono da clausole e effetti di contratto didattico e da difficoltà nel padroneggiare le competenze logico-argomentative. Da sempre, i risultati delle valutazioni standardizzate mettono in luce fenomeni didattici permettendone una quantificazione a livello nazionale; da quando le prove sono CBT è possibile analizzare in modo profondo le risposte, permettendo di ottenere informazioni decisive in termini di cause e difficoltà.

Riferimenti bibliografici

Baruk S. (1985), *L'âge du capitaine, De l'erreur en mathématiques*, Seuil, Paris.

Binanti L. (2005), *Sbagliando s'impara. Una rivalutazione dell'errore*, Armando-Università degli Studi di Lecce, Roma.

Bolondi G., Fandiño Pinilla M.I. (2012), *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*, Edises, Napoli.

Brousseau G. (1988), "Le contrat didactique: le milieu", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9, 3, pp. 309-336.

Brousseau G. (1986), "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, pp. 33-115.

Brousseau G. (1983), "Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques", *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2, pp. 165-198.

Brousseau G. (1980), "L'échec et le contrat", *Recherches en didactique des mathématiques*, 41, pp. 177-182.

Bussotti P. (2012), "Federigo Enriques e la didattica della matematica", *Euclide. Giornale di matematica per i giovani*, testo disponibile al sito: https://euclidescuola.org/, data di consultazione 26/01/2021.

D'Amore B. (2007), "Epistemologia, didattica della matematica e pratiche d'insegnamento", *La matematica e la sua didattica*, 21, 3, pp. 347-369.

D'Amore B. (2002), "La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica", *Scuola & Città*, 4, pp. 56-82.

D'Amore B. (1999), *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna.

ISBN 9788835131045

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008), *La didattica e le difficoltà in matematica*, Erickson, Trento.

Enriques F. (1936), *Il significato della storia del pensiero scientifico*, Zanichelli, Bologna.

Ferretti F., Giberti C., Lemmo A. (2018), "The Didactic Contract to interpret some statistical evidence in mathematics standardized assessment tests", *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14, 7, pp. 2895-2906.

INVALSI (2018), *Quadro di riferimento per la matematica*, testo disponibile al sito: https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf, data di consultazione 26/1/2021.

IREM Bordeaux (1978), "Étude de l'influence de l'interprétation des activités didactiques sur les échecs électifs de l'enfant en mathématiques. Project de Recherche CNRS, Enseignement élémentaire des mathématiques", *Cahier de l'IREM de Bordeaux*, I, 18, pp. 170-181.

OECD (2013), *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing, Paris.

Zan R. (2000), "Misconceptions e difficoltà in matematica", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 23A, 1, pp. 45-68.

Zan R. (2007), *Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire*, Springer, Milano.

ISBN 9788835131045

La competenza matematica, intesa come la "capacità di sviluppare e mettere in atto il pensiero matematico per trovare le soluzioni a vari problemi in situazioni quotidiane" (MIUR, 2012), è considerata come una delle abilità chiave per la realizzazione personale, la cittadinanza attiva, l'inclusione sociale e l'educazione permanente, sia in ambito nazionale che internazionale. Data la sua rilevanza nel processo di formazione di ogni individuo, il processo di insegnamento/apprendimento della Matematica è da sempre al centro di studi, ricerche e sperimentazioni volte non solo a evidenziare le buone pratiche messe in atto nelle scuole, ma anche a individuare eventuali criticità e possibili percorsi di miglioramento.

Il presente volume è incentrato proprio su questo ambito di studi e, nel raccogliere alcune ricerche di approfondimento presentate alla III edizione del Seminario "I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca" (Bari 26-28 ottobre 2018), intende mostrare come i dati prodotti dall'Istituto possano fornire un potente strumento per interrogarsi sui processi di apprendimento della Matematica e per migliorare l'attività didattica in classe, facendo anche emergere la produttività della collaborazione fra ricercatori e insegnanti.

Patrizia Falzetti è Responsabile del Servizio Statistico dell'INVALSI, che gestisce l'acquisizione, l'analisi e la restituzione dei dati riguardanti le rilevazioni nazionali e internazionali sugli apprendimenti alle singole istituzioni scolastiche, agli *stakeholders* e alla comunità scientifica.

FrancoAngeli
La passione per le conoscenze

Unione Europea
FONDI STRUTTURALI EUROPEI
PON 2014-2020
MIUR
PER LA SCUOLA - COMPETENZE E AMBIENTI PER L'APPRENDIMENTO (FSE-FESR)