in ricordo di Paolo

La logica e l'insegnamento della geometria

Claudio Bernardi e Marta Menghini
Dipartimento di Matematica, *Sapienza* Università di Roma

Sommario. - L'articolo si divide in due parti. Nella prima si osserva che la geometria costituisce un banco di prova per la logica: in momenti diversi, matematici come Euclide, Hilbert, Tarski hanno elaborato teorie per esprimere le nostre esperienze spaziali. I sistemi assiomatici proposti per la geometria presentano differenze sostanziali; per esempio Birkhoff e di Choquet assumono a priori la conoscenza dei numeri reali. Nell'ambito di un confronto fra teorie diverse si esamineranno sia la completezza logica, sia classici temi geometrici, come i problemi di costruzione e i problemi insolubili. Si parlerà più in dettaglio della teoria di Tarski. Saranno poi citate situazioni in cui, per dimostrare un enunciato, è necessario inquadrare quell'enunciato in un ambito diverso.
Nella seconda parte, legata più strettamente all'insegnamento, esamineremo molti esempi di dimostrazioni, con attenzione agli strumenti logici e alla struttura logica. Un punto fondamentale è che il ragionamento in geometria oscilla sempre fra intuizione spaziale e rigore deduttivo: una figura guida nel ragionamento ed ha valore euristico. Con altri esempi si confronteranno metodi algebrici e metodi geometrici, con un cenno alle dimostrazioni senza parole.
Vedremo poi casi delicati in cui anche esperti si possono trovare in difficoltà nello stabilire se un ragionamento inusuale è corretto. Dopo alcuni esempi di ragionamenti per "simmetria" e per "reciprocità", parleremo anche di trasformazioni e invarianti, che talvolta offrono un procedimento dimostrativo rapido perché permettono di passare da un caso particolare al caso generale.

parte I - Teorie logiche per la geometria

I-1. *More geometrico demonstrata*

Tanto a livello storico quanto a livello didattico, il legame fra logica e geometria è molto stretto.
Baruch Spinoza nel suo celebre trattato *Ethica more geometrico demonstrata* (pubblicato postumo nel 1677) prende la geometria come modello per un metodo di ragionamento rigoroso che non rinneghi l'intuizione. Nel 1821, all'inizio di un secolo in cui si sarebbe via via sviluppata l'esigenza di costruire fondamenti affidabili per la matematica, Augustin-Louis Cauchy comincia il *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* scrivendo che si propone di conferire ai metodi dell'analisi «*tutto il rigore che si esige in geometria*». In questo caso il metodo geometrico si contrappone a manipolazioni algebriche che non sempre sono adeguatamente giustificate.

I due esempi citati, pur diversi fra loro, testimoniano che la geometria è sempre stata vista, fin dai tempi di Euclide, come ambiente ideale per il ragionamento e per la logica. Addirittura la geometria costituisce un banco di prova per un'impostazione che si proponga di essere rigorosa: un sistema logico deve essere in grado di tradurre in una teoria deduttiva le nostre idee intuitive sullo spazio. Nel 1899 David Hilbert scrive *I fondamenti della geometria* anche per chiarire la sua posizione sul significato di assiomi ed enti primitivi e, nella seconda metà del Novecento, Alfred Tarski propone una formalizzazione in un senso logico moderno per la geometria euclidea (Tarski, 1959).
Torneremo nel seguito sulla teoria di Tarski, anche per discutere i *problemi insolubili*, cioè l'impossibilità di eseguire certe costruzioni geometriche: notiamo subito che, storicamente, la dimostrazione che quelle costruzioni *non* si riescono ad eseguire costituisce uno dei primi risultati relativi all'*impossibilità* di trovare qualcosa e con cui la matematica fissa i propri limiti; questi risultati sarebbero poi diventati un punto centrale nella logica del Novecento.

In campo didattico, quando si legge in un programma «concetti di assioma, definizione, teorema, dimostrazione», si pensa spontaneamente alla geometria; del resto le parole citate sono riprese proprio dall'inizio del tema *geometria* nelle *Indicazioni nazionali* per i Licei e nelle *Linee Guida* per gli Istituti Tecnici e Professionali (MIUR, 2010).
Il tema della *dimostrazione* ricopre giustamente un ruolo centrale nell'insegnamento: è uno dei temi ricorrenti nei laboratori del Piano Lauree Scientifiche ed è molto studiato dalla ricerca didattica. Numerose ricerche di didattica della matematica focalizzano l'attenzione sui processi dimostrativi, sulla produzione di congetture che precedono e accompagnano una dimostrazione, sull'ausilio offerto in questi settori dai software dinamici di geometria (si veda per esempio Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Baccaglini-Frank, Antonini, Leung & Mariotti, 2013; Soldano & Arzarello, 2016).
Invece, sembra che oggi ci sia meno interesse per la scelta di uno specifico *sistema assiomatico*. Nei decenni scorsi c'era chi, modificando gli assiomi usuali, parlava a scuola di geometrie finite, della geometria del taxi, delle geometrie non euclidee; questi argomenti sono oggi meno presenti nella pratica didattica. Eppure in alcuni casi, come vedremo, anche proposte teoriche possono avere ricadute didattiche.

I-2. Teorie geometriche diverse - la completezza logica

Nella storia della matematica e in campo didattico, numerose sono state le proposte per teorie assiomatiche che, a partire dalle nostre esperienze e dalle nostre percezioni spaziali, cercano di esprimerle con un opportuno linguaggio e con opportuni assiomi. In questo articolo faremo sempre riferimento alla geometria euclidea, ma le teorie di cui ci occuperemo differiscono notevolmente nelle dimostrazioni e addirittura in alcuni teoremi:

ovviamente la scelta degli assiomi per una teoria geometrica influenza i teoremi in essa dimostrabili e le relative catene dimostrative. Anche nell'ambito di una stessa teoria, le dimostrazioni cambiano a seconda dell'ordine in cui si decide di presentare i teoremi (Barbin & Menghini, 2014).
Vediamo subito un esempio significativo. Molte trattazioni, a cominciare da quella di Euclide, sono puramente geometriche, ma altri autori, come Birkhoff (Birkhoff, 1932) e Choquet (Choquet, 1964), introducono assiomi per la geometria che presuppongono la conoscenza dei numeri reali. In un contesto che contenga fin dall'inizio i reali è spontaneo cambiare molte cose: per esempio, la disuguaglianza triangolare, che in Euclide richiede un ragionamento piuttosto laborioso, nella teoria di Choquet diventa un assioma.

Ricordiamo che una teoria assiomatica è detta *completa* se, per ogni enunciato α, in quella teoria si ottiene come teorema α oppure la negazione di α; una teoria è invece *incompleta* se esiste un enunciato α tale che non sono teoremi né α né la sua negazione.
Può essere utile un'analogia con i sistemi di equazioni: le equazioni di un sistema si possono pensare come gli assiomi da cui, con le regole del calcolo algebrico, deduciamo le conseguenze (i teoremi). Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

Il sistema è completo, perché le informazioni che abbiamo permettono di individuare univocamente i valori di x, y, z. Ma se, invece, ci limitiamo ai primi due assiomi, abbiamo una teoria incompleta: in quest'ultima teoria possiamo stabilire, per esempio che «$z - x = 2$», ma non sappiamo rispondere a una domanda del tipo «$x = y$?».
Quando si parla di incompletezza, spesso si fa riferimento ai celebri teoremi di Gödel che riguardano teorie per i numeri naturali. Ma ... le teorie per la geometria sono complete o incomplete? La risposta non è semplice e, soprattutto, la domanda va precisata, come vedremo fra poco.

I-3. Le costruzioni impossibili

Consideriamo i classici problemi geometrici insolubili, che hanno dato vita a tanti studi matematici e che sono tuttora presentati nella didattica, nella formazione degli insegnanti e nella divulgazione: la costruzione dello spigolo di un cubo con volume doppio di quello di un cubo di spigolo noto, la costruzione del lato di un quadrato con la stessa area di un cerchio di raggio noto (equivalentemente la costruzione di un segmento della stessa lunghezza di una circonferenza di raggio noto), la trisezione di un angolo.

Sull'ultimo problema, a riprova della costante attualità dell'argomento, segnaliamo una curiosità. Terence Tao è uno dei matematici viventi più noti e brillanti (vincitore fra l'altro della Medaglia Fields); nel suo sito si trova un articolo molto dettagliato proprio su un problema insolubile, fra logica e geometria: *A geometric proof of the impossibility of angle trisection by straightedge and compass* (Tao, 2011).

Che cosa significa che un problema geometrico è "insolubile"? Quando non si conosce la soluzione di un problema, è più appropriato parlare di problema aperto. Ma nei casi prima citati *si dimostra* che non è possibile eseguire quelle costruzioni con l'uso di riga e compasso; naturalmente la situazione cambia se si accettano altri strumenti come il "trisettore" illustrato in Fig. 1, non troppo difficile da realizzare.

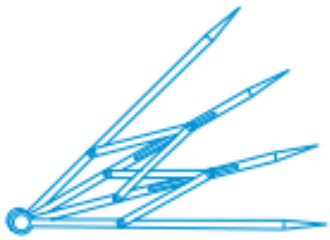


Figura 1. Trisettore di R. Isaac (tratto da Villani et al., 2012)

I problemi di costruzione sono strettamente legati ad assiomi e teoremi. In primo luogo osserviamo che, da un punto di vista formale, un problema di costruzione corrisponde ad un enunciato della forma $\forall x \ldots \exists y \ldots$: dati certi oggetti, se ne può trovare un altro; tuttavia, come vedremo meglio in seguito, non tutti gli enunciati di questa forma si possono leggere come costruzioni.
Inoltre, se da un lato certi assiomi garantiscono la possibilità di eseguire costruzioni, dall'altro non è sempre chiaro riconoscere quali assiomi corrispondano a costruzioni geometriche. Per esempio, tutti concordano nel dire che i primi assiomi di Euclide («si può condurre una retta da ogni punto ad ogni punto», «con ogni centro e raggio si può tracciare un cerchio») descrivono quello che si può fare con riga e compasso. Molto più delicata è la situazione relativa all'assioma delle parallele (se due rette formano con una retta da una stessa parte angoli la cui somma è minore di un angolo piatto, le due rette, prolungate, si incontrano da quella parte): è vero che a partire da rette (da intendersi come segmenti) che soddisfano certe condizioni si trova un punto, ma in questo caso l'assioma stabilisce solo l'esistenza del punto, senza dare alcuna informazione su dove si trovi il punto e senza precisare di quanto si debbano allungare i due segmenti iniziali.
Citiamo un assioma che si trova nella teoria di Tarski e che chiaramente corrisponde ad una costruzione di base: dati un segmento AB ed una semiretta di origine O, esiste un punto P della semiretta tale che OP è congruente ad AB.

Sempre nella teoria di Tarski troviamo un altro assioma che *forse* corrisponde ad una costruzione: se P e Q sono due punti che si trovano rispettivamente sui lati AB e BC di un triangolo, allora i segmenti AQ e CP si incontrano in un punto (Fig. 2 - si tratta di un enunciato equivalente all'assioma di Pasch). A differenza del caso delle parallele, qui ci sono due segmenti che s'incontrano, senza che sia necessario prolungarli.

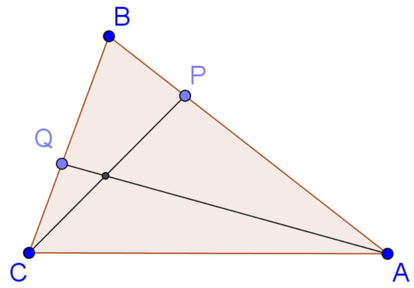


Figura 2. Un assioma di Tarski.

In questo articolo non ci occupiamo degli usuali software dinamici di geometria (*DGS*), che senz'altro offrono un valido aiuto in tutta la fase dimostrativa permettendo verifiche e favorendo la formulazione di congetture (rimandiamo in proposito alla bibliografia).
Qui ci interessa sottolineare che anche un comando di un software si può pensare come un assioma: si pensi al comando che traccia *la* retta per due punti distinti, o al comando che, dato un punto P e una retta r, traccia *la* parallela per P ad r. Naturalmente un software contiene molte costruzioni che si riescono ad ottenere a partire da altre, ma che sono fornite direttamente dallo stesso software per comodità dell'utente (per esempio, la costruzione di rette perpendicolari, o di un quadrato). In altre parole, mentre in una teoria si pone attenzione all'indipendenza degli assiomi, chi realizza un software si preoccupa di rendere l'uso semplice e maneggevole.

Il discorso si collega all'insieme dei *punti costruibili* con riga e compasso a partire da certi punti, in particolare dai due punti (0; 0) e (1; 0). Con semplici costruzioni troviamo tutti i punti con entrambe le coordinate razionali; ma troviamo facilmente anche altri punti, come ($\sqrt{2}$; 0). La teoria di Galois permette di caratterizzare i punti costruibili: un punto è costruibile con riga e compasso a partire da (0; 0) e (1; 0) se e solo se le sue coordinate appartengono al più piccolo campo ordinato che contiene i razionali e che, per ogni numero positivo, contiene una sua radice quadrata.
Dire che la trisezione di un angolo non è effettuabile con riga e compasso, significa che a partire da tre punti A, B, C, *non riusciamo in generale* a costruire un punto P tale che l'angolo ABP sia un terzo dell'angolo ABC.
In (Birkhoff, 1932) si usa il verbo *to embody* per indicare che una teoria codifica o incorpora certe costruzioni. Pensiamo in particolare ad una teoria T i cui assiomi codifichino esattamente le costruzioni con riga e compasso (si tratta degli assiomi di Euclide, con qualche opportuna modifica, più formale che sostanziale). Allora l'enunciato

α «comunque siano dati tre punti *A*, *B*, *C*, esiste un punto *P* tale che l'angolo *ABP* sia un terzo dell'angolo *ABC*» *non* è un teorema di T, ma nemmeno la negazione di α è un teorema di T. Di conseguenza, *la teoria T è incompleta*.
La situazione si può esprimere anche con riferimento ai modelli della teoria, dove per modello si intende una struttura in cui sono soddisfatti gli assiomi. Se una teoria è incompleta, allora ammette modelli che sono "diversi" fra loro, nel senso che soddisfano proprietà diverse. Nel nostro caso, un modello di T è l'usuale piano euclideo $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, ma anche il solo insieme dei punti costruibili del piano costituisce un modello di T. Nel primo modello α è un enunciato vero (pur non essendo un teorema della teoria T), nel secondo α è un enunciato falso.

I problemi insolubili diventano però risolubili in altre assiomatiche per la geometria euclidea. Si pensi agli assiomi di Birkhoff, il cui postulato 2 recita:
«le semirette *l*, *m* ... passanti per un qualunque punto *O* possono essere poste in corrispondenza biunivoca con i numeri reali *a* (modulo 2π) in modo che, se $A \neq O$ e $B \neq O$ sono punti di *l* e *m* rispettivamente, la differenza $a_m - a_l$ è [la misura del] l'angolo [orientato] *AOB*».
Ora, se abbiamo una misura che stabilisce una corrispondenza biunivoca fra ampiezza degli angoli e numeri reali, è lecito dividere per 3 un numero reale e quindi anche l'ampiezza (misura) di un angolo. Gli strumenti operativi incorporati nell'assiomatica di Birkhoff sono riga graduata e goniometro, invece che riga e compasso. Nella teoria di Birkhoff il precedente enunciato α è un teorema.

I-4. La teoria assiomatica di Tarski

Per inquadrare in modo più chiaro le questioni discusse fin qui, conviene far riferimento all'assiomatica proposta da Alfred Tarski nel 1959 per formalizzare la geometria euclidea (Tarski, 1959). Pensiamo ancora al piano, anche se questo non è rilevante.
C'è un'idea iniziale che può sembrare artificiosa: invece di considerare punti e rette, consideriamo *solo punti* e *relazioni fra punti*. Ogni enunciato riguarda quindi i punti. A livello intuitivo le cose sembrano complicarsi, ma, come abbiamo essenzialmente già visto, anche quando si parla di costruzioni la cosa più semplice, almeno sul piano teorico, è limitarsi a punti. E per la formalizzazione logica avere a che fare con un solo tipo di oggetti semplifica il discorso.
Tarski considera due relazioni fra punti, espresse dai predicati seguenti:
$\beta(x, y, z)$, che si riferisce a 3 punti, da interpretarsi come «*y* è allineato con *x* e *z*, ed è compreso fra essi» (si pensa a un ordine non stretto, dove cioè *y* può coincidere con *x* o con *z*);

$\delta(x, y, v, w)$, che si riferisce a 4 punti, da interpretarsi come «i segmenti xy e vw sono congruenti (uguali)»
Per esempio, l'enunciato secondo cui le tre mediane di un triangolo *abc* si incontrano in un punto g si può esprimere nel modo seguente (le lettere x, y, z indicano i punti medi dei lati e, all'inizio, sono sottintesi tutti i quantificatori universali $\forall a\ \forall x$ ...):
$[(\beta(a, x, b) \wedge \delta(a, x, x, b) \wedge \beta(b, y, c) \wedge \delta(b, y, y, c) \wedge \beta(c, z, a) \wedge \delta(c, z, z, a)] \rightarrow \exists g\ [(\beta(a, g, y) \wedge \beta(b, g, z) \wedge \beta(c, g, x)]$

Un vantaggio dell'impostazione di Tarski è che si possono scrivere tutti gli assiomi nella forma $\forall x$ ... $\exists y$ ... o in forma più semplice. Tuttavia, e questo è il punto, non tutti gli assiomi corrispondono a costruzioni (dati gli x si costruiscono gli y): in particolare l'assioma di continuità non è legato a una costruzione, se non altro perché si tratta di uno schema di assioma che contiene in realtà infiniti assiomi (e ha ben poco senso pensare a infiniti strumenti). La sua formulazione è piuttosto complicata e non la riportiamo qui.
La teoria di Tarski è completa e anche decidibile (nel senso che per ogni enunciato α siamo in grado di stabilire se α è o non è un teorema). Ma se ci restringiamo alla teoria senza assioma di continuità, allora la teoria non è più completa.

I-5. Estendere la teoria per dimostrare un teorema

Torniamo ora alla presenza di dimostrazioni diverse per uno stesso teorema, a partire da assiomatiche diverse.
Un caso interessante si presenta quando, per dimostrare un enunciato relativo ad un certo ambito, è necessario inquadrare quell'enunciato in un *altro* ambito con più proprietà. In logica si parla di *estensioni non conservative*, ma il punto è che gli esempi in geometria sono sorti ben prima che il discorso fosse studiato in logica.
Più precisamente, ci sono enunciati di geometria piana in cui si parla solo di incidenza fra punti e rette (cioè punti allineati e rette che passano per uno stesso punto), che non si riescono a dimostrare usando solo gli assiomi di incidenza del piano. Una dimostrazione si ottiene aggiungendo gli assiomi di congruenza (anche se nell'enunciato non si parla di congruenza), oppure gli assiomi di incidenza dello spazio a tre dimensioni (anche se l'enunciato si riferisce a una figura piana). Il caso più noto è legato al teorema di Desargues.
Se vogliamo dimostrare il teorema di Desargues per triangoli nello spazio, allora gli assiomi di incidenza sono sufficienti. Ma per triangoli di uno stesso piano il teorema di Desargues non si dimostra con gli assiomi di incidenza del piano: per la dimostrazione sono necessari gli assiomi di incidenza dello *spazio* (pensando cioè il piano immerso in uno spazio almeno tridimensionale), ovvero gli assiomi di *congruenza* nel piano. Questa circostanza è sottolineata da Hilbert nel quinto capitolo dei *Fondamenti della geometria*

(Hilbert, 1899/1970): per la dimostrazione del teorema di Desargues «occorrono necessariamente [oltre agli assiomi I 1-3, II, III 1-4, IV*, V] o gli assiomi dello spazio o l'assioma III.5 sulla congruenza dei triangoli».

Ma già Giulio Lazzeri e Anselmo Bassani presentavano, nel loro testo del 1891, esempi in cui lo spazio serve per dimostrare enunciati nel piano e dichiaravano di essere «riusciti a rendere indipendenti dalle teorie delle proporzioni e delle misure molte quistioni che prima sembravano dipendenti necessariamente da esse» (Lazzeri & Bassani, 1891, pag. XI). Ciò è possibile proprio perché in quel testo si ricorre al cosiddetto metodo *fusionista*, che si basa sull'uso simultaneo della geometria del piano e dello spazio. Gli autori dichiarano che sono stati aiutati da Rodolfo Bettazzi nella formulazione di nuovi sistemi di assiomi per la geometria euclidea del piano e dello spazio.
Vediamo come è dimostrato in quest'ambito il seguente teorema (ibid., paragrafo 144). Siano AB ed $O'O''$ due rette parallele; tracciamo i segmenti che congiungono i punti O' e O'' con A e con B; questi segmenti individuano su una terza retta r, parallela alle date, due segmenti $A'B'$ e $A''B''$. I due segmenti $A'B'$ e $A''B''$ sono congruenti (Fig. 3).

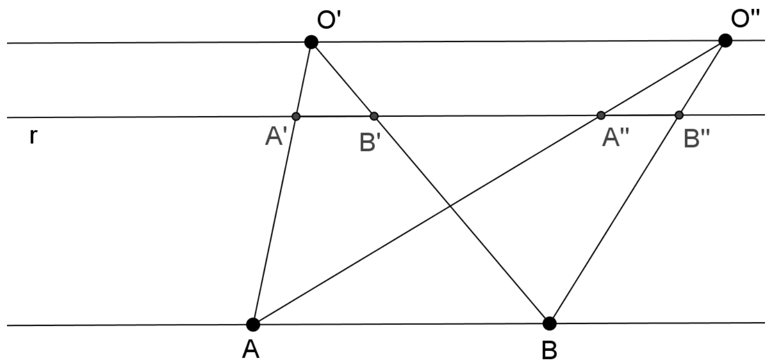


Figura 3. Una dimostrazione nello spazio di una proprietà di figure piane.

L'enunciato si dimostra usualmente applicando il teorema di Talete e la teoria della similitudine: abbiamo due coppie di triangoli simili e il rapporto di similitudine è lo stesso per il teorema di Talete. Il procedimento degli Autori si svolge invece nello spazio a tre dimensioni ed è legato solo a concetti e assiomi di carattere affine (ricordiamo che la congruenza di segmenti che giacciono su rette parallele è un concetto affine).
Da un postulato (il X) derivano direttamente che i lati opposti di un parallelogramma sono congruenti; inoltre hanno la proprietà transitiva della congruenza (che possiamo ancora limitare al caso di segmenti che giacciono su rette parallele). Detto V un punto che *non* giace nel piano della figura, si considerano i tetraedri $VO'AB$ e $VO''AB$ e il piano che contiene la retta r ed è parallelo al piano $VO'O''$: questo piano interseca il triangolo VAB (comune ai due tetraedri) secondo un segmento A_0B_0 . Ora, ricorrendo solo a proprietà di incidenza, si dimostra che $A'B'B_0A_0$ e $A''B''B_0A_0$ sono parallelogrammi: si conclude che $A'B'$ è congruente ad $A''B''$ perché entrambi sono congruenti a A_0B_0 .

Citiamo infine il *teorema di Sylvester-Gallai.* Sia X un insieme di punti nel piano tale che ogni retta che contiene almeno due punti distinti di X ne contiene anche un terzo. Per esempio, soddisfano a questa proprietà l'insieme dei punti del piano a coordinate intere e un qualunque sottoinsieme di una retta. Il teorema di Sylvester-Gallai afferma che ogni insieme X che soddisfa la proprietà enunciata è infinito oppure è formato da punti allineati.
Il teorema non si dimostra con i soli assiomi di incidenza: sono necessari anche gli assiomi di congruenza, oppure gli assiomi di ordinamento (anche se l'enunciato non parla né di congruenza né di ordinamento).

parte II - Esempi di argomentazione in geometria

II-1. Imparare a dimostrare

Se la dimostrazione è il ragionamento tipico della matematica, sul piano didattico il problema dimostrativo di geometria è uno dei momenti più interessanti in tutto il curriculum delle Superiori. Educare alla dimostrazione, come sanno bene gli insegnanti, è un processo lungo, che richiede tempo e attenzione. In questa seconda parte pensiamo ad un'usuale teoria per la geometria euclidea del piano, qual è la teoria assiomatica di Hilbert, e poniamo l'attenzione sugli strumenti logici che compaiono nelle dimostrazioni. Spesso le dimostrazioni di geometria elementare hanno una struttura logica interessante, non banale; e talvolta, come vedremo (II-3), possono nascondere insidie anche per esperti.

All'inizio (e non solo) molti studenti hanno difficoltà quando incontrano dimostrazioni per assurdo, teoremi di unicità, teoremi inversi. In particolare, è frequente che studenti facciano confusione fra un'implicazione e l'implicazione inversa; così, si afferma erroneamente che il triangolo con i lati di lunghezze 3, 4, 5 è rettangolo per il teorema di Pitagora.
D'altra parte, notiamo che nella dimostrazione di un "se e solo se", cioè di una condizione necessaria e sufficiente, è frequente che si usi un'implicazione per dimostrare l'altra. Vediamo rapidamente due esempi. Una volta dimostrato che in un triangolo a lato maggiore sta opposto angolo maggiore, cioè con le consuete notazioni $(a < b) \rightarrow (\alpha < \beta)$, si dimostra facilmente per assurdo il teorema inverso: se $\alpha < \beta$ non può essere $a > b$ perché ne seguirebbe $\alpha > \beta$ per il teorema diretto, né $a = b$.
E anche per dimostrare l'inverso del teorema di Pitagora si ricorre al teorema diretto; questo può forse in parte giustificare la confusione di alcuni studenti a cui facevamo cenno poco fa.

Procedendo nello studio della geometria, lo studente acquista familiarità con il metodo dimostrativo. Appoggiandosi a schizzi o ad immagini ottenute con software, fa congetture e capisce che cosa significa un controesempio. E, in maniera quasi inconsapevole, lo studente impara ad usare piccoli accorgimenti utili nel processo dimostrativo, accorgimenti ovvi per l'esperto ma non all'inizio del percorso. Per esempio, in vari teoremi in cui si stabilisce l'equivalenza di tre o più proprietà, la dimostrazione è presentata con una catena di implicazioni: per dimostrare che le condizioni (a), (b), (c) sono equivalenti fra loro, si dimostrano le implicazioni (a) → (b), (b) → (c), (c) → (a). Si trova un classico esempio nelle proprietà che caratterizzano i parallelogrammi fra i quadrilateri: avere un centro di simmetria, avere due coppie di lati opposti paralleli, avere due coppie di lati opposti congruenti, avere una coppia di lati opposti congruenti e paralleli, ecc.

Vediamo un altro esempio, un po' più complesso ma di un certo interesse. In Fig. 4 sono disegnati due triangoli, ABC e DEF inscritti nella stessa circonferenza; supponiamo che ABC sia acutangolo. Dimostrare che le tre proprietà seguenti (a), (b), (c) sono equivalenti fra loro.

(a) AD, BE, CF sono le altezze del triangolo ABC;

(b) DA, EB, FC sono le bisettrici del triangolo DEF;

(c) gli archi FA e AE sono congruenti, e così pure gli archi EC e CD, come anche DB e BF.

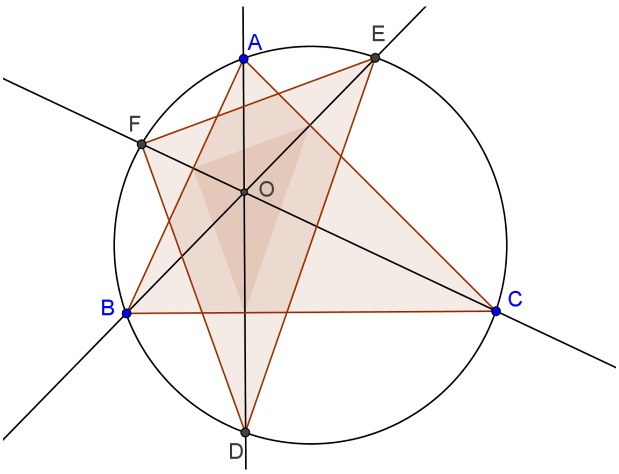


Figura 4. Il punto O è l'ortocentro di ABC e l'incentro di DEF.

Per l'implicazione (a) → (b) ricordiamo il teorema sugli angoli alla circonferenza; abbiamo le seguenti congruenze fra angoli: $FDA = FCA = \pi/2 - BAC = ABE = ADE$ e analogamente negli altri casi. Le condizioni (b) e (c) sono ovviamente equivalenti. Per dimostrare (c) → (a), si considera il triangolo AHC (dove H è il punto di incontro di AD con BC). Nell'ipotesi che valga (c) la somma degli archi corrispondenti agli angoli in A e in C, cioè la somma degli archi $DC + BF + FA$, è mezza circonferenza, quindi i due angoli in A e in C sono complementari, cioè $AHC = \pi/2$.

Per inciso, in Fig. 4 si trovano varie altre proprietà: per esempio *D*, *E*, *F* sono i punti simmetrici di *O* rispetto ai lati di *ABC*. La configurazione si collega anche al triangolo ortico su cui torneremo nel seguito.

II-2. Un'immagine per convincere

Un punto fondamentale è che il ragionamento in geometria oscilla sempre fra intuizione spaziale e rigore deduttivo: come osserva Felix Klein (Klein, 2016, pag. 10), alla deduzione in geometria si affianca l'intuizione che, a partire dalla figura, guida nel ragionamento ed ha un valore euristico: «*Intuition helps us to construct a proof and to gain an overview, it is, moreover, a source of inventions and new mental connections*».
La presenza di una figura, se adeguatamente capita, aiuta la memoria e rende più chiaro l'argomento. Un classico esempio è dato dal confronto fra *media aritmetica* e *media geometrica*. Per dimostrare che la media aritmetica di due numeri positivi *a*, *b* è sempre maggiore o uguale della loro media geometrica, possiamo seguire una via puramente algebrica, ma ci sono immagini più efficaci. In Fig. 5 è tracciata una semicirconferenza di diametro $a+b$: il confronto fra media aritmetica m_a e media geometrica m_g si riconduce al confronto fra raggio e metà di una corda di un cerchio (il triangolo inscritto è rettangolo e quindi m_g è la media geometrica di *a* e *b* per il II teorema di Euclide). E risulta anche chiaro che $m_a = m_g$ se e solo se $a = b$.

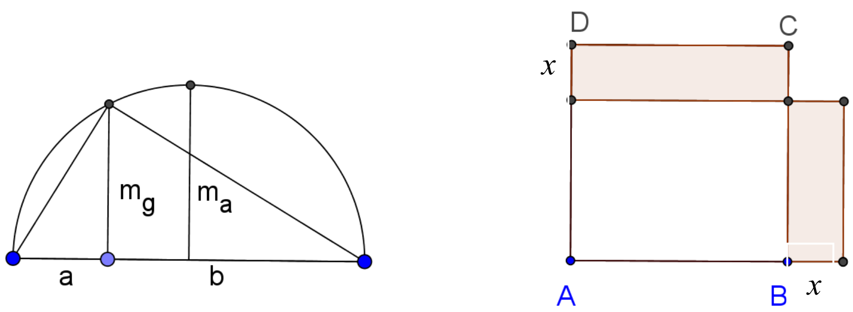


Figura 5. Media aritmetica e media geometrica

Possiamo arrivare allo stesso risultato con un'altra immagine, in cui, contrariamente al solito, si parte da un caso particolare. Sia *ABCD* un quadrato; la media aritmetica e la media geometrica delle lunghezze di *AB* e *AD* sono ovviamente uguali. Se allunghiamo *AB* di un segmento *x* e accorciamo *AD* dello stesso segmento *x*, otteniamo un rettangolo: rispetto al quadrato iniziale il perimetro (che possiamo pensare come il doppio della media aritmetica delle due dimensioni del rettangolo) rimane invariato, mentre l'area (quadrato della media geometrica degli stessi numeri) diminuisce di x^2.
Aggiungiamo qualche parola sul confronto fra metodo algebrico e metodo geometrico, metodi che talvolta, come nel caso precedente, rappresentano due vie diverse per di ottenere uno stesso risultato. Il procedimento algebrico è in genere più semplice da seguire

(i singoli passaggi sono quasi sempre facili); d'altra parte, la dimostrazione geometrica, se capita, è più "formativa" (fa capire meglio) ed è più facile da memorizzare.

A proposito del legame fra immagini e dimostrazioni segnaliamo la recente pubblicazione del terzo volume della serie *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking* (Nelsen, 2015).

II-3. Anche esperti si possono trovare in difficoltà

Come abbiamo accennato, vi sono situazioni delicate in cui anche esperti si possono trovare in difficoltà.
In primo luogo il disegno ha spesso un ruolo maggiore di quello che a rigore dovrebbe avere, nel senso che certe proprietà che appaiono ovvie dalla figura sono talvolta accettate direttamente. Per esempio: in un quadrilatero convesso le diagonali si incontrano in un punto interno; due altezze o due bisettrici di un triangolo non possono essere parallele. Del resto, anche i più noti ragionamenti geometrici che sembrano portare a conclusioni paradossali, ma in realtà contengono un errore (per un esempio si veda (Villani et al., 2012) pag. 26, 27), si basano su una figura disegnata in modo ingannevole.
In varie situazioni diamo per scontate certe proprietà. Per esempio, sia dato un cerchio γ di centro O; dopo aver dimostrato che la distanza da O del lato di un triangolo equilatero inscritto in γ è uguale alla metà del raggio, è spontaneo accettare che, se la distanza da O di una corda è uguale alla metà del raggio, allora quella corda è il lato di un triangolo equilatero inscritto in γ. Questa affermazione è corretta, anzi del tutto ovvia, al punto che *non si sente il bisogno* di dimostrarla.
D'altra parte, è altrettanto noto che due lati di un triangolo equilatero inscritto in γ formano un angolo alla circonferenza di 60°; ma ... è lecito concludere che due corde di γ che formano un angolo alla circonferenza di 60° sono lati di un triangolo equilatero inscritto? Ovviamente no. Che cosa rende superflua la dimostrazione nel primo caso? La fiducia nella nostra intuizione? Quando operiamo in matematica, non è solo la logica che ci permette di tenere la situazione sotto controllo.

In altri casi, al contrario, un ragionamento rigoroso può lasciare perplessi. Vediamo due esempi. Nel primo la dimostrazione, pur essendo breve, non è tuttavia immediata da capire, perché nei punti cruciali si fa riferimento alla figura in un modo indiretto.
All'interno di un quadrato $ABCD$, si disegni un triangolo isoscele QAB con gli angoli in A e in B di 15°; si dimostri che il triangolo QCD è equilatero (Fig. 6).

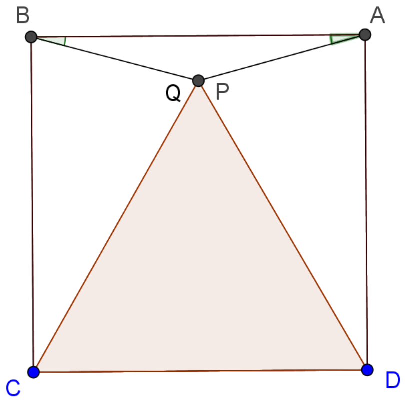


Figura 6. Un esercizio difficile

Il problema è posto in (Coxeter & Greitzer, 1967, esercizio n. 2 pag. 25), dove si suggeriscono due dimostrazioni, entrambe piuttosto elaborate. D'altra parte, è facile dimostrare il seguente enunciato, con riferimento alla "stessa" figura: se si disegna un triangolo equilatero *CDP* all'interno di un quadrato *ABCD*, l'ampiezza degli angoli *PAB* e *PBA* è 15°.
Pensiamo allora che la configurazione illustrata in figura sia stata costruita con riferimento a quest'ultimo enunciato, cioè considerando il terzo vertice *P* del triangolo equilatero *CDP*. Ora, c'è un solo punto *Q* interno al quadrato tale che il triangolo isoscele *QAB* abbia due angoli 15°; il punto *P* gode di questa proprietà e quindi *Q deve* coincidere con *P*.

Il secondo esempio è legato al *triangolo ortico*. Sia *ABC* un triangolo acutangolo e sia *HKL* il triangolo che ha per vertici i piedi delle altezze, detto triangolo ortico (Fig. 7); un noto teorema afferma che le altezze di *ABC* sono le bisettrici di *HKL* (si veda ancora, per esempio, Coxeter & Greitzer, 1967). La dimostrazione si basa sul fatto che i quattro angoli contrassegnati in figura con un archetto hanno ampiezza 90°−α: la cosa è chiara per gli angoli in *B* e in *C*; inoltre, il quadrilatero *BHPL* è inscrivibile in una circonferenza e quindi gli angoli in *LBP e LHP* sono congruenti; analogamente sono congruenti gli altri due angoli. Si trova in particolare che, dette al solito α, β, γ le ampiezze degli angoli di *ABC*, allora gli angoli δ, ε, θ di *HKL* hanno ampiezza 180°−2α, 180°−2β, 180°−2γ.

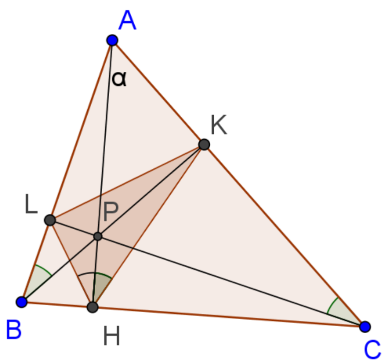


Figura 7. Il triangolo ortico

Vale il teorema inverso? Cioè, se si parte dal triangolo più piccolo *HKL* e si tracciano prima le bisettrici e poi le perpendicolari nei vertici alle bisettrici, si trova un triangolo *ABC*: è vero che le bisettrici iniziali sono le altezze del nuovo triangolo? Le bisettrici sono perpendicolari ai lati di *ABC* per costruzione, ma queste bisettrici passano per i vertici *A*, *B*, *C* del nuovo triangolo?
La risposta è affermativa (e, per inciso, *A*, *B*, *C* sono gli ex-centri di *HKL* - si veda Scimemi, 2012). Si ottiene una dimostrazione piuttosto breve ricordando il teorema diretto: detti δ, ε, θ gli angoli di *HKL*, dalle relazioni $\delta = 180-2\alpha$, $\varepsilon = 180-2\beta$, $\theta = 180-2\gamma$, riusciamo a determinare α, β, γ. Siccome $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, α, β, γ sono gli angoli di un triangolo T; costruiamo il triangolo ortico di T e applichiamo il teorema diretto. Troviamo che *HKL* è simile al triangolo ortico di T. Questo conclude la dimostrazione del teorema inverso.
Gli ultimi passaggi lasciano tuttavia insoddisfatti. Abbiamo davvero dimostrato che le bisettrici del triangolo *HKL* passano per i punti *A*, *B*, *C*? La risposta è affermativa, ma il ragionamento non si appoggia alla figura.

II-4. Ragionamenti per simmetria e per reciprocità

Parlando di *simmetria* non intendiamo riferirci in modo specifico alle usuali trasformazioni geometriche (riflessione intorno a una retta e rotazione di un angolo piatto intorno a un punto), ma a un principio generale che potremmo enunciare così: se non c'è alcun motivo per cui due oggetti siano diversi, allora quei due oggetti sono uguali.
Un tipico esempio è offerto dal celebre teorema secondo cui «*gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti (uguali)*».
Varie dimostrazioni sono discusse in (Bernardi, 2016). La Fig. 8 si riferisce alla classica dimostrazione di Euclide, che non dà per scontata l'esistenza della bisettrice (Euclide dimostrerà l'esistenza della bisettrice usando anche questo teorema). Si prolungano i lati congruenti *AB* e *AC* con due segmenti congruenti *BD* e *CE*, scelti a piacere. Dopo di che si dimostra la congruenza prima dei triangoli *ACD* e *ABE* e poi dei triangoli *DBC* ed *ECB*. Se ne deduce facilmente la congruenza degli angoli in *B* e in *C* del triangolo *ABC*.

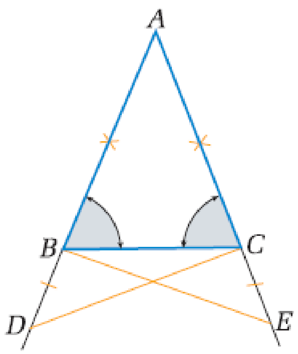


Figura 8. Una classica dimostrazione di Euclide

Pare risalga a Pappo di Alessandria (IV sec. d.C.) una dimostrazione molto più rapida. Si tratta del ragionamento di Euclide con *BD* e *CE* segmenti di lunghezza nulla: cioè si considerano i *due* triangoli *ABC* e *ACB*, in quest'ordine, che risultano congruenti per il primo criterio: la conclusione è immediata.
Per essere rigorosi, occorre enunciare il primo criterio di congruenza con riferimento a terne di punti, invece che a triangoli: date due *terne ordinate*, *A*, *B*, *C* e *A*', *B*', *C*', se sono congruenti i lati *AB* e *A*'*B*', i lati *CA* e *C*'*A*', e gli angoli in *A* e in *A*', allora sono ordinatamente congruenti anche le altre coppie di lati e di angoli.
Questa dimostrazione è indubbiamente più breve e più elegante delle precedente, ma, altrettanto indubbiamente, è troppo astratta per la maggioranza degli studenti dei primi anni delle Superiori.
Forse, tuttavia, potremmo renderla ancora più breve invocando un principio di simmetria: in un triangolo *ABC*, se *AB* = *AC* allora non vi è alcun motivo per cui l'angolo in *C* possa essere diverso dall'angolo in *B*.

Un altro esempio di ragionamento per simmetria è illustrato in Fig. 9. Se tracciamo le diagonali di un pentagono regolare, all'interno si forma un altro pentagono. Per simmetria, anche questo secondo pentagono è regolare (non vi è motivo per cui un lato o un angolo sia maggiore di un altro lato o rispettivamente di altro angolo).

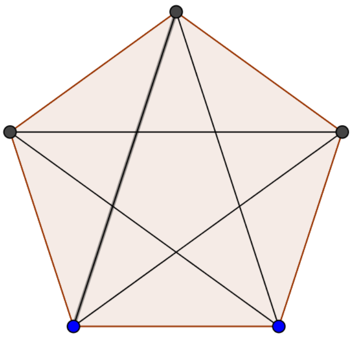


Figura 9. Ragionamento per simmetria

Nella geometria a tre dimensioni, una volta stabilito che esiste un poliedro i cui vertici hanno a due a due la stessa distanza (si tratta di un tetraedro regolare), possiamo senz'altro affermare che gli angoli diedri di quel poliedro hanno a due a due la stessa ampiezza.
Naturalmente, ragionamenti di questo tipo vanno usati con molta cautela.

Passiamo ad un esempio in cui si applica un procedimento che potremmo chiamare *per reciprocità*. Ci proponiamo di costruire un triangolo T note le tre altezze.
Il problema non è semplice perché, se si affronta direttamente la costruzione, ... non si sa da dove cominciare. Tuttavia, basta un'osservazione: i lati di un triangolo sono inversamente proporzionali alle altezze. Quindi, costruiamo prima un triangolo T* che ha le altezze note come lati: le altezze di questo triangolo T* sono proporzionali ai lati del

triangolo T. Siamo così in grado di costruire un triangolo simile al triangolo cercato: per ottenere T sarà sufficiente confrontare le altezze del triangolo ottenuto con quelle date.
Tuttavia il procedimento descritto non è sempre lecito: non è detto che le tre altezze siano i lati di un triangolo (basta pensare a triangolo isoscele con i lati congruenti molto maggiori della base). In generale, quindi, dobbiamo trovare i lati di T come segmenti inversamente proporzionali alle altezze note [1].

II-5. Strumenti dimostrativi in geometria - trasformazioni e invarianti

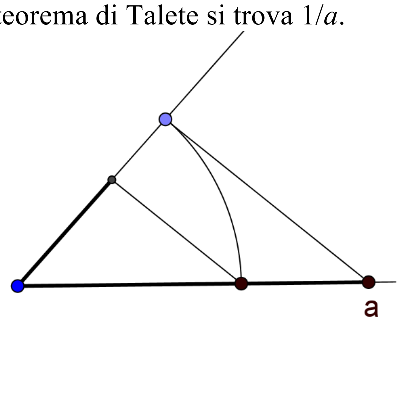
Forse nell'insegnamento scolastico non si sottolinea in modo adeguato che in geometria disponiamo di diversi strumenti (ambienti) dimostrativi: la geometria sintetica in primo luogo, ma anche la geometria analitica, e poi i vettori, e la trigonometria.
Per un esempio in cui metodi diversi sono applicati per ottenere uno stesso risultato (l'esistenza dell'ortocentro), rimandiamo a (Bernardi, 2009).

Accenniamo qui a un metodo legato alle trasformazioni che, quando si può applicare, è particolarmente rapido perché permette di passare da un caso particolare al caso generale.
Vediamo due esempi legati alle affinità. Una volta osservato che:

1) dati due qualunque triangoli c'è un'affinità che trasforma uno nell'altro,
2) ogni affinità conserva il punto medio di un segmento, il passaggio di tre rette per uno stesso punto e il rapporto fra le aree,

possiamo ragionare nel modo seguente.
In un triangolo equilatero T_e le tre mediane passano per uno stesso punto (è un tipico ragionamento per simmetria, si veda il punto II-4) e dividono il triangolo in sei parti a due a due congruenti. Un qualsiasi triangolo T è immagine di T_e in un'affinità, e in questa affinità le mediane di T_e hanno per immagini le mediane di T: quindi anche in T le tre mediane passano per uno stesso punto. Quanto alle parti in cui rimane scomposto T, queste non sono in genere congruenti (salvo casi particolari un'affinità non manda figure

[1] Per costruire un segmento di lunghezza $1/a$ (dove 1 è un segmento unitario, che nel nostro caso si può fissare a piacere), si considera un angolo e si riportano su un lato 1, a e sull'altro 1: applicando il teorema di Talete si trova $1/a$.



congruenti in figure congruenti) ma hanno sempre la stessa area (il rapporto fra le aree di due parti è sempre 1).
Analogamente, una volta osservato che due qualunque trapezi si corrispondono in un'affinità, possiamo affermare che in un qualunque trapezio i punti medi delle basi, il punto l'incontro delle diagonali e il punto d'incontro dei lati obliqui sono allineati: infatti, basta osservare che la proprietà enunciata è ovvia per un trapezio isoscele.

Un problema non troppo diverso si pone quando, affrontando un problema dimostrativo con la geometria analitica, scegliamo il riferimento in modo opportuno. Le proprietà coinvolte usualmente nei problemi sono invarianti per similitudini e, quindi, possiamo scegliere nel modo più conveniente l'origine, l'unità di misura e un asse cartesiano. Così, se abbiamo due punti P e Q distinti, invece di introdurre 4 parametri (x_P; y_P) e (x_Q; y_Q), li possiamo indicare semplicemente con (0; 0) e (1; 0). Se poi le proprietà di cui si parla sono invarianti per affinità, allora possiamo ridurre ulteriormente il numero dei parametri: in particolare, se si parla di tre punti non allineati, è lecito attribuire a questi punti le coordinate (0; 0), (0; 1), (0; 1).

II-6. Diversi gradi di convinzione

Per concludere, torniamo sui rapporti fra algebra e geometria già discussi al punto II-2, con un'osservazione storica.
Parliamo della celebre curva di Peano, una curva continua che passa per tutti i punti di un quadrato: la definizione formale si trova in (G. Peano 1890), mentre un'illustrazione geometrica è fornita un anno dopo da Hilbert in (D. Hilbert 1891).
È interessante che Peano abbia descritto la curva con una costruzione puramente algebrica e numerica. Forse anche per Peano, dovendo presentare una situazione paradossale, nettamente contraria all'intuizione, era preferibile una dimostrazione algebrica, più facile da tenere sotto controllo. Sta di fatto che, quando oggi si parla di curva di Peano, si fa invece sempre riferimento alla costruzione geometrica di Hilbert, che risulta molto più chiara e, in qualche misura, addirittura intuitiva.
In sostanza: per un controllo dei dettagli sembra più convincente un procedimento algebrico, mentre per la comprensione di un concetto o di una costruzione è decisamente più convincente una visualizzazione geometrica.

Bibliografia e sitografia

A. Baccaglini-Frank, M. A. Mariotti (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: the Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225-253.

A. Baccaglini-Frank, S. Antonini, A. Leung, M. A. Mariotti (2013). Reasoning by contradiction in dynamic geometry. *PNA 7*, No. 2, 63-73.

E. Barbin, M. Menghini (2014). History of teaching geometry. In *Handbook on the History of Mathematics Education*, Berlin/Heidelberg: Springer, 473-492.

C. Bernardi (2009). Un problema da discutere – L'ortocentro di un triangolo, *Archimede*, LXI, 28-34.

C. Bernardi (2015). Gli angoli alla base di un triangolo isoscele, *Archimede*, LXVII, 193-196.

G. D. Birkhoff (1932). A Set of Postulates for Plane Geometry, Based on Scale and Protractor, *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 33, No. 2 (Apr., 1932), 329-345.

G. Choquet (1964). *L'enseignement de la géométrie*. Paris: Hermann. Traduzione italiana (1967): *L'insegnamento della geometria*; introduzione di A. Pescarini. - Milano: Feltrinelli.

H.S.M. Coxeter, L. Greitzer (1967). *Geometry Revisited*, Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

D. Hilbert (1891). Über die stetige Abbildung einer Fläche auf ein Flächenstück, *Mathematische Annalen* Vol. 38, 459-460.

D. Hilbert (1970). *Fondamenti della geometria*. Milano: Feltrinelli. Edizione originale 1899.

F. Klein (2016). *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint 3: Precision Mathematics and Application Mathematics*. Berlin/Heidelberg: Springer.

G. Lazzeri, A. Bassani (1891). *Elementi di geometria*. Livorno: Giusti.

MIUR (2010). *Indicazioni Nazionali* e *Linee Guida*
http://nuovilicei.indire.it/content/index.php?action=lettura&id_m=7782&id_cnt=10497
http://www.indire.it/lucabas/lkmw_upload/nuovi_tecnici/dx_2/allegati.pdf

R.B. Nelsen (2015). *Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking (Classroom Resource Materials)*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

G. Peano (1890). Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane, *Mathematische Annalen* Vol. 36, 157-160.

B. Scimemi (2012). *Geometria sintetica*. Padova: CLEUP.

C. Soldano, F. Arzarello (2016). Learning with touchscreen devices: game strategies to improve geometric thinking, *Math. Educ. Res. J.* 28, No. 1, 9-30.

T. Tao (2011). A geometric proof of the impossibility of angle trisection by straightedge and compass.
https://terrytao.wordpress.com/2011/08/10/a-geometric-proof-of-the-impossibility-of-angle-trisection-by-straightedge-and-compass/

A. Tarski (1959). What is elementary geometry? In L. Henkin, P. Suppes, A. Tarski (eds.), *The Axiomatic Method: with Special Reference to Geometry and Physics*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 16–29.

V. Villani, C. Bernardi, R. Porcaro, S. Zoccante, (2012). *Non solo calcoli. Domande e risposte sui perché della matematica*. Collana Convergenze, Milano: Springer.

indirizzi e-mail degli autori
claudio.bernardi@uniroma1.it, marta.menghini@uniroma1.it