
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ROBERTO CAPONE, ENRICO ROGORA, FRANCESCO SAVERIO
TORTORIELLO

La matematica come collante culturale nell'insegnamento

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 2
(2017), n.3, p. 293–304.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2017_1_2_3_293_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La matematica come collante culturale nell’insegnamento

ROBERTO CAPONE

Università di Salerno

E-mail: rcapone@unisa.it

ENRICO ROGORA

Università di Roma

E-mail: enrico.rogora@uniroma1.it

FRANCESCO SAVERIO TORTORIELLO

Università di Salerno

E-mail: fstortoriello@unisa.it

Sommario: *In questo lavoro presentiamo il progetto di ricerca dell’Università di Salerno che ha portato alla sperimentazione per tre anni del Liceo Matematico in 18 classi di Liceo Scientifico in Campania. Questa presentazione vuole essere un contributo al dibattito sui Licei Matematici che, in diverse forme, sono stati attivati nel 2016 anche in altre regioni d’Italia.*

Abstract: *In this paper, we discuss the research project of the University of Salerno whose outcome was a three-year experimentation, known as Liceo Matematico (Mathematical High School), in 18 classes of the scientific High Schools (Liceo Scientifico) in Campania. This presentation is a contribution to the debate about Liceo Matematico which, in different guises, have also been organized in other regions of Italy in 2016.*

Introduzione

Il Liceo Matematico nasce nel 2014 come progetto di ricerca del Dipartimento di Matematica dell’Università di Salerno. Per il suo carattere fortemente interdisciplinare, il progetto coinvolge immediatamente altri dipartimenti dello stesso Ateneo⁽¹⁾. Si è poi esteso ad altre sedi (tra cui Roma, Torino e Firenze) che condividono alcuni aspetti della proposta di Salerno ma che si differenziano nella filosofia generale

che sta alla base del progetto. Nel presente lavoro, vogliamo presentare questa filosofia per contribuire ad un utile confronto tra i diversi modelli.

I tre pilastri su cui si fonda il Liceo Matematico di Salerno sono: interdisciplinarietà; didattica laboratoriale; elaborazione di percorsi didattici in cui affrontare temi matematici che non hanno ancora trovato posto nel curriculum. Questi pilastri affondano le loro radici nella tradizione della didattica della matematica della scuola di Federigo Enriques, Guido Castelnuovo, Bruno de Finetti ed Emma Castelnuovo (De Marchis, Rogora; 2017). Suggestioni ed ispirazioni altrettanto importanti provengono dalla teoria della complessità di Edgar Morin, che ben si coniuga con il panorama didattico attuale della *scuola delle competenze* (Morin; 2000).

Accettato: il 25 novembre 2017.

⁽¹⁾ Ad oggi sono coinvolti i Dipartimenti di Matematica, Fisica, Chimica e Biologia, Informatica, Studi Umanistici, Scienze Umane, Filosofiche e della Formazione, Ingegneria Civile.

La struttura del Liceo Matematico si articola in corsi aggiuntivi, a carattere prevalentemente laboratoriale, di approfondimento dei normali corsi scolastici, tesi ad ampliare la formazione dell'allievo e finalizzati a svilupparne le capacità critiche, l'attitudine alla ricerca scientifica e a completare, in senso spiccatamente interdisciplinare, la sua formazione come cittadino e come persona. I corsi si avvalgono del contributo didattico e scientifico sia di docenti dell'Università di Salerno, afferenti a otto diversi dipartimenti, sia di studiosi di alto profilo scientifico sia di docenti ricercatori con una lunga esperienza di insegnamento negli Istituti Superiori. Nei corsi-laboratorio aggiuntivi, la matematica è il leitmotiv intorno a cui ruota l'azione didattica e fa da trait d'union tra la cultura umanistica e quella scientifica, senza porsi in posizione dominante ma piuttosto ponendosi in rapporto dialettico con le altre discipline. In particolare, si mettono in luce e si analizzano i rapporti della matematica con la letteratura, la storia, la filosofia, la fisica, la chimica e la biologia ecc., riscoprendo il ruolo che la matematica ha avuto nei secoli come linguaggio e modello del pensiero razionale. Lo scopo del Liceo Matematico è quello di offrire allo studente saperi e competenze matematiche e affini alla matematica, per orientarsi consapevolmente nei diversi contesti del mondo contemporaneo, sempre più collegati e sempre più complessi.

“La miope e autolesionista visione specialistica [della matematica] ci induce a vantare come un pregio la possibilità di presentare la matematica come un campo reso autonomo e staccato da ogni nesso colle altre scienze grazie alla completa astrattizzazione, mentre sarebbe essenziale superare questa visione ristretta e caricaturale, affermando la posizione della matematica nel tutto che è la scienza e quella della scienza nel più grande tutto unitario che sarebbe la cultura [...]. La situazione derivante da tale lacerazione della cultura, in umanistica contro scientifica, e poi perfino tra i vari campi della scienza, dovrebbe essere più generalmente sentita come fonte di angosciata preoccupazione”. (de Finetti; 1965, p. 120)

1. – La Filosofia del progetto

Il progetto educativo del Liceo Matematico si pone lo scopo di rispondere alle esigenze di una società complessa in cui la scienza e la tecnologia assumono un ruolo fondamentale ma, contemporaneamente, le pretese di “risolvere tutto con la ragione” appaiono inadeguate. Alle domande della società contemporanea è necessario che il sistema educativo cerchi di dare delle risposte, e noi crediamo che questo sia possibile solo cercando una sintesi tra cultura umanistica e cultura scientifica, una sintesi in cui,

il ruolo culturale del corpo calloso che collega i due emisferi è svolto dalla matematica, che è umanistica nei contenuti, perché descrive e inventa mondi possibili, ma scientifica nel metodo, perché usa la logica” (Odifreddi, 2000).

Nel Liceo Matematico si confronta il sapere umanistico, che affronta la riflessione sui fondamentali problemi umani e favorisce l'integrazione delle conoscenze, con la cultura tecnico-scientifica, che rischia altrimenti di diventare troppo settoriale facendo perdere la visione d'insieme. Il sapere è diventato accessibile ai soli specialisti indebolendo il senso di responsabilità, poiché ciascuno tende ad essere responsabile solo del proprio compito specializzato. L'informazione pervasiva che ci circonda è una materia informe che la conoscenza deve preventivamente rielaborare per poterla integrare e padroneggiare; la conoscenza deve essere costantemente rivisitata dal pensiero, che è il capitale più prezioso per l'individuo e per la società ma è anche più che mai confinato, altamente specializzato e sconnesso (Morin; 2000). Le finalità educative assumono quindi nel Liceo Matematico anche una rilevanza sociale: crediamo che una mente più aperta e più attenta a cogliere le connessioni tra matematica e applicazioni e tra matematica e cultura umanistica sia anche più pronta e matura ad affrontare l'impegno del “cittadino”.

La speranza è quella di un sistema di istruzione capace di abbattere le pareti che separano l'aula di matematica dallo studio teatrale, il laboratorio di scienze dall'aula di musica. Il progresso per la società avverrà attraverso il collegamento e la comunicazione tra aree diverse. (du Sautoy; 2015).

La didattica del Liceo Matematico si confronta con l'approccio della didattica per competenze, che mira a favorire un sistema coordinato di *conoscenze* e *abilità* mobilitate dal soggetto in relazione ad uno scopo.

Le competenze non possono ridursi ad una sola disciplina; esse suppongono e creano delle connessioni tra conoscenze e suggeriscono nuovi usi e nuove padronanze, il che significa che "le competenze generano competenze" (D'Amore, 2000).

La modalità principale di insegnamento, nelle ore aggiuntive previste nel Liceo Matematico, è quella laboratoriale (Anzellotti; 2007). Nelle ore aggiuntive, largo spazio viene dedicato al "problem posing" e al "problem solving" che non intendiamo però soltanto come pratica per ridurre e poi tentare di risolvere problemi della vita reale in termini matematici, ma anche per affrontare, motivare, rendere interessanti e stimolanti i problemi "interni" alla matematica, alle altre discipline scientifiche e addirittura a quelle umanistiche.

2. – Piano di studi

La proposta del Liceo Matematico mira al superamento del sapere parcellizzato. Nella programmazione didattica uno stesso argomento viene proposto dal punto di vista delle varie discipline attraverso una progettazione congiunta. Si cerca di promuovere, attraverso una didattica interdisciplinare, la comunicazione e il confronto delle idee, l'individuazione delle relazioni di interconnessione tra diverse strutture disciplinari, la reciproca integrazione dei concetti fondamentali.

Il piano degli studi del Liceo Matematico prevede l'aggiunta al monte ore curricolare di ore dedicate allo studio dei rapporti della Matematica con le altre discipline. Non si tratta di un potenziamento delle ore di matematica, ma di una aggiunta di ore dedicate all'approfondimento dei rapporti tra la matematica e le altre materie, con un preciso scopo culturale interdisciplinare.

Al momento non è riconosciuto alcun valore ufficiale ai corsi aggiuntivi del Liceo Matematico ma ai ragazzi che frequentano i corsi è garantita la possi-

bilità di ottenere il riconoscimento di crediti formativi, fino ad un massimo di sei, per il Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Salerno.

Le ore aggiuntive si articolano secondo il seguente quadro orario (Capone et al; 2016):

Riparto ore	1 anno	2 anno	3 anno	4 anno	5 anno
Matematica e Letteratura	0	5	7	8	10
Matematica	10	10	8	8	8
Matematica e Fisica	10	10	5	5	5
Matematica e Arte	0	0	5	5	5
Matematica e Filosofia	0	0	5	6	6
Matematica e Informatica	10	10	5	5	5
Matematica e Logica	10	10	5	5	5
Matematica e Storia	0	5	5	5	5
Matematica e Scienze	0	0	5	5	5
TOTALE	40	50	50	52	54

La lunga e approfondita riflessione sulle indicazioni programmatiche relative a queste interazioni interdisciplinari ha prodotto l'elaborazione di articolate progettazioni didattiche. Esse raccolgono le ricerche avviate ormai da tre anni e non vanno considerate come rigide norme. Piuttosto sono da intendersi come indicazioni analitiche per facilitare l'elaborazione di percorsi personalizzati e come immagine dettagliata della sperimentazione in atto, utile per coglierne le potenzialità, declinare gli obiettivi e riflettere sulle eventuali criticità. Riportiamo in questa sezione una breve sintesi delle caratteristiche dei diversi moduli, e alcune proposte di temi che possono essere sviluppati nei vari anni, dedicando la quarta sezione ad una esposizione più articolata di alcuni esempi già realizzati.

Il *modulo di Matematica*. Nel primo biennio questo modulo è rivolto al consolidamento delle conoscenze matematiche di base, con particolare riferimento alla geometria. Alcuni contenuti della geometria, come quelli collegati alle costruzioni con riga e compasso e alle costruzioni attraverso l'impiego di macchine matematiche, sono analizzati attraverso un'indagine storica e ricontestualizzati attraverso l'uso di software di geometria dinamica.

Nel triennio il modulo è finalizzato alla progettazione di percorsi che integrino i programmi tradizionali del Liceo Scientifico con argomenti che stanno assumendo un'importanza sempre maggiore nella scienza e nella tecnologia contemporanea, quali i

modelli probabilistici, le problematiche relative all'estrazione dell'informazione da grandi masse di dati, lo studio dei sistemi dinamici e del manifestarsi del caos deterministico, la modellizzazione discreta e differenziale, la combinatoria e le sue applicazioni all'informatica e alla biologia. Particolare attenzione si presta all'uso della matematica per costruire modelli deterministici e non deterministici, traendo vantaggio dalla potenza di calcolo dei calcolatori o delle calcolatrici grafiche programmabili per implementare in maniera efficace semplici modelli discreti, e illustrare, sempre attraverso simulazioni interattive, la transizione dalla modellizzazione discreta a quella differenziale.

Lo studio delle applicazioni della matematica alle scienze e alla vita reale viene affrontato in maniera critica, mettendo costantemente in evidenza la necessità di verificare l'affidabilità, di tenere in debito conto l'incertezza delle previsioni che si traggono dall'impiego dei modelli matematici e i limiti della loro applicabilità (Rogora; 2013).

Il *modulo di Fisica* prevede un approccio didattico fortemente interattivo e continui esperimenti, esempi concreti e virtuali, riferimenti alla realtà circostante, cosicché i ragazzi siano protagonisti di un processo di Ricerca-Azione. Le strategie didattiche sono tese a far mettere in campo le competenze e le conoscenze dei discenti. In particolare, si propone una didattica di tipo laboratoriale, con modalità "Inquiry Based Science Education (IBSE)", che è l'approccio pedagogico, basato sull'investigazione, promosso dalla Commissione Europea. Esso stimola la formulazione di domande e azioni per risolvere problemi e capire fenomeni: gli studenti osservano, guidati ma liberi di scegliere percorsi autonomi, il fenomeno in esame, si pongono domande, formulano ipotesi, le verificano attraverso esperimenti e ne discutono i risultati. In tal modo si "impara facendo". Non è necessario un laboratorio come spazio fisico, ma si fa uso di materiali didattici anche poveri, spesso recuperati dagli stessi alunni. Gli studenti, accompagnati dai tutor interni e dai docenti del Liceo Matematico, hanno la possibilità di visitare i principali laboratori di ricerca dell'Università di Salerno quali i laboratori di fisica della materia, l'Osservatorio Astronomico, la mostra interattiva di fisica "*Divertiesperi-*

menti" e svolgere attività didattiche integrative (Capone et al.; 2015).

Il *modulo di Filosofia* mira a mettere in luce la profondità del rapporto tra Matematica e Filosofia nella formazione del pensiero occidentale. A partire dalla considerazione, durante il terzo anno, del ruolo della matematica nella descrizione del mondo in Pitagora e dalle relazioni tra l'argomentazione matematica e quella filosofica in Platone e Aristotele si passa, al quarto anno, a considerare il rapporto tra matematica e filosofia nel pensiero di Galileo, Cartesio, Newton e Leibniz, i padri della scienza moderna, fino a giungere, al quinto anno, a riflettere sulle implicazioni filosofiche della crisi dei fondamenti della fisica che si apre con la teoria relatività di Einstein e con la meccanica quantistica.

Per il *modulo di Logica* sono previste, sin dal primo anno, ore aggiuntive di logica al fine di insegnare il modo di affrontare situazioni problematiche attraverso l'impiego di linguaggi formalizzati. Questo modulo ha lo scopo di abituare lo studente a vagliare la coerenza logica delle argomentazioni proprie e altrui in molteplici contesti. A tal fine si sfruttano le numerose potenzialità, grafiche e di calcolo, offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico. Entrando nello specifico dei contenuti per il primo anno si sono introdotti i principi fondamentali della logica classica, illustrando il significato e le proprietà formali delle operazioni logiche e delle rispettive tavole di verità analizzando le regole di deduzione e introducendo l'algebra di Boole e il metodo assiomatico.

Nel secondo e nel terzo anno sono previsti approfondimenti sulla teoria degli insiemi, dalle nozioni fondamentali ai teoremi di Cantor e di Hartogs, ai paradossi classici della teoria. Il quarto e quinto anno saranno dedicati anche a fornire agli studenti le competenze per affrontare i test di logica per l'accesso ai corsi di laurea a numero chiuso.

Il *modulo di Informatica* è rivolto non solo all'insegnamento, sviluppo e miglioramento dei linguaggi di programmazione e all'approfondimento delle relazioni tra informatica, logica e calcolabilità, ma propone spunti che possono aiutare a capire come pensiamo, come organizziamo il nostro sapere, come impariamo cose nuove, come condividiamo

quello che sappiamo⁽²⁾). Il pensiero computazionale viene applicato alla risoluzione di problemi, alla progettazione di sistemi, ai tentativi di comprendere alcuni aspetti dei comportamenti umani attraverso l'uso di concetti tipici della computer science.

In particolare, il primo e il secondo anno abbiamo cercato di introdurre i ragazzi al pensiero computazionale e al problem solving attraverso la progettazione e la realizzazione di semplici videogiochi usando il linguaggio di programmazione Scratch che implementa un paradigma di programmazione visuale a blocchi, particolarmente indicato come introduzione alla programmazione. Il terzo anno è previsto un approfondimento delle tecniche di programmazione visuale orientato allo sviluppo di "applicazioni mobile" utilizzando App Inventor, sviluppato con finalità educational dal MIT. Durante il quarto e quinto anno è prevista l'introduzione ai linguaggi di programmazione ad alto livello attraverso l'uso di Python per implementare alcuni algoritmi significativi di carattere matematico e informatico.

Il *modulo di Arte* non si occupa solamente di "cercare la matematica nell'arte" (e simmetricamente "l'arte nella matematica"), ma cerca anche, nel confronto tra il processo di interpretazione di un'opera d'arte e quello di risoluzione di un problema matematico, di fissare alcuni spunti didattici che aiutino, e motivino gli studenti nello svolgere entrambe le attività e forniscano ai docenti suggerimenti su come aiutare gli studenti ad affinare le capacità di "saper vedere in matematica" (Vassallo e al.; 2017).

Abbiamo progettato per il terzo anno un percorso parallelo sull'interpretazione di un'opera d'arte e sulla dimostrazione di una congettura geometrica, che metta in luce analogie e differenze di questi processi e l'utilità di riflettere sui reciproci legami;

⁽²⁾ Il quadro teorico di riferimento è quello del Costruzionismo di stampo papertiano (Papert; 1991) secondo cui è fondamentale la centralità dell'artefatto cognitivo come facilitatore per imparare e interagire con gli altri. Nell'ottica di Papert, l'apprendimento è un processo che avviene attraverso il ruolo attivo di chi impara: analizzare, costruire, scomporre, confrontare, presentare l'oggetto dell'apprendimento. Temi peraltro già presenti nella riflessione di Enriques (Enriques; 1921) e di Emma Castelnuovo (Castelnuovo; 2017).

per il quarto anno proponiamo un percorso alla ricerca della matematica nell'arte e dell'arte nella matematica, che ruota intorno alle idee fondamentali della geometria proiettiva; per il quinto anno, un percorso sulle tassellazioni euclidee e iperboliche, che collega l'opera artistica di Escher alla geometria iperbolica.

Il *modulo di Scienze* approfondisce alcuni dei temi affrontati nel modulo di matematica, applicando gli strumenti della modellizzazione probabilistica e la combinatoria alla teoria dell'evoluzione e all'analisi delle sequenze biologiche (Ciliberto, Rogora; 2011) e quelle relative alla modellizzazione dei sistemi complessi all'ecologia e alla meteorologia. In questo modulo sono anche previste attività relative alla misurazione di indicatori ambientali e di altre quantità di interesse bio-chimico e bio-medico alle quali applicare metodi di analisi dei dati per illustrare le tematiche relative all'estrazione dell'informazione da grandi masse di dati.

Abbiamo progettato, per il terzo anno un laboratorio sulla simulazione di modelli evolutivi; per il quarto anno un laboratorio sui modelli di generazione di sequenze simboliche e sulle applicazioni allo studio delle sequenze biologiche; per il quinto anno, un laboratorio sui modelli discreti e differenziali per la diffusione di un'epidemia e per la crescita di una popolazione.

Il *modulo di Storia* approfondisce lo stretto legame della matematica con la cultura e le più generali condizioni socio-politiche nelle varie epoche della storia del mondo, e mette in evidenza come questa disciplina (la più antica disciplina scientifica) abbia accompagnato lo sviluppo della civiltà, marcandone, almeno nel mondo occidentale, quasi tutti i più grandi progressi. Tra gli argomenti da svolgere possiamo indicare, per il terzo anno, l'affermarsi dell'algebra, dagli arabi a Cartesio, passando per gli algebristi italiani del rinascimento; per il quarto anno, la nascita del calcolo differenziale; per il quinto anno, le geometrie non euclidee e il legame con la teoria della relatività.

Il *modulo di Letteratura* illustra come

«le due equazioni matematica=calcolo e poesia=libertà sono false entrambe, e semmai si

mescolano tra loro e si sovrappongono, nel senso che la matematica, con le sue formule e i suoi teoremi, è spesso occasione di gioco e levità, e al contrario la poesia, con le sue rime e i suoi ritmi, così come la stessa prosa, è sovente esercizio di equilibrio e di rigore» (Maroscia et al.; 2016, p. XI).

L'aspetto che caratterizza il programma di matematica e letteratura del Liceo Matematico è l'importanza che assegniamo alla complementarità, dal punto di vista formativo, dello studio scientifico e letterario.

Nella progettazione del modulo di matematica e letteratura si è seguito nella maniera più compiuta il paradigma che il progetto si propone di seguire per tutti i moduli. La progettazione dei contenuti da svolgere nelle classi è stata preceduta infatti da una serie di convegni tematici in cui si sono offerti stimoli, strumenti e prospettive scientifiche e didattiche per tali progettazioni. Nei convegni tematici, i cui atti sono raccolti in (Maroscia et al.; 2016) e negli atti in preparazione del convegno del 2017, si è proposto un ventaglio di proposte da cui ogni scuola ha scelto o sceglierà quelle che le sembreranno più adeguate alla propria programmazione, senza naturalmente impedire percorsi totalmente o parzialmente nuovi.

3. – Metodo di lavoro

Le attività didattiche dei Licei Matematici vengono progettate da gruppi di lavoro costituiti da docenti della Scuola secondaria di II grado, docenti ricercatori e docenti dell'Università, che si riuniscono in incontri settimanali. Durante questi incontri, oltre a progettare le attività, i gruppi monitorano, attraverso la condivisione sinergica tra Scuola e Università, tutto il processo didattico-educativo all'interno del Liceo Matematico, dalla formazione degli studenti all'analisi dell'efficacia degli interventi didattici. Ai gruppi di lavoro partecipano i componenti dei gruppi di ricerca in didattica della diverse discipline e i "docenti-ricercatori" dei Licei Matematici incaricati dalla scuola sede del Liceo a seguire la fase di progettazione. La costituzione e l'inizio dei lavori di questi gruppi sono stati gli aspetti più

delicati del progetto. Per far confluire le esperienze di ricercatori e insegnanti di dipartimenti diversi si è dovuto vincere una certa diffidenza iniziale, che però si è presto tramutata in attiva collaborazione. Il collante che ha tenuto insieme un gruppo così numeroso di insegnanti, ricercatori, assegnisti di ricerca e dottorandi è la constatazione che il superamento delle divisioni disciplinari apre un nuovo orizzonte culturale e di ricerca didattica in grado di offrire nuovi stimoli alla ricerca e forti motivazioni all'insegnamento dei docenti e al coinvolgimento dei ragazzi.

Una volta progettati i percorsi didattici si passa alla loro sperimentazione nelle classi. Nella fase iniziale la sperimentazione è stata portata avanti dai ricercatori dell'Università, per coinvolgere successivamente i docenti di scuola che hanno condiviso la progettazione del percorso. Questa collaborazione recupera per molti aspetti l'idea dei nuclei di ricerca didattica di Giovanni Prodi e la figura del docente-ricercatore, di importanza fondamentale per il collegamento tra Scuola e Università, non solo per la matematica ma anche per le altre discipline e soprattutto per la didattica interdisciplinare, caratteristica fondamentale del Liceo Matematico di Salerno.

Nel Liceo Matematico, gli studenti apprendono attraverso un costante dialogo interdisciplinare tra loro e con i loro insegnanti. Si presta particolare attenzione a far emergere il ruolo della matematica come collante tra le varie discipline.

L'insegnamento della matematica appare ostico ed arido alla maggior parte dei giovani (e purtroppo tale rimane nel loro ricordo e nel giudizio quando divengono adulti) proprio perché non si cerca, ma anzi si evita, di far comprendere il senso della matematica come strumento che «fa presa sulle cose», anziché come insulso sproloquio per costruire perfetti arzigogoli nel vuoto. Quale migliore rimedio che far constatare ai ragazzi che qualunque discorso incidentalmente avviato col professore di matematica (sulla fisica o l'economia, la biologia o la statistica, e via dicendo) avrà un tono di consistenza e di penetrazione diverso (anche senza un grado di conoscenza troppo esteso in ogni specifico campo) che riveli l'apporto della visione matematica? (de Finetti; 1964, p. 35)

Il Liceo Matematico si pone lo scopo ambizioso ma irrinunciabile di formare cittadini che siano consapevoli degli strumenti necessari per migliorare la comprensione della realtà ed intervenire su di essa, e sappiano anche valutare criticamente i limiti di tali strumenti. Il Liceo Matematico cerca di attuare ciò ampliando le conoscenze matematiche dei ragazzi al fine di renderli capaci di comprendere e valutare criticamente l'utilità della modellizzazione matematica, in costante rapporto dialettico con le altre discipline ma senza dimenticare gli aspetti teorici interni alla matematica.

4. – Esempi

In questo paragrafo presentiamo tre delle attività svolte nei Licei matematici, cercando di mettere in evidenza i contenuti e le metodologie didattiche utilizzate. Abbiamo scelto tre esempi dove l'importanza e il ruolo dei tre pilastri fondamentali del progetto risultasse particolarmente evidente. Nel primo esempio, descriviamo un percorso alla scoperta di argomenti matematici non tradizionali ma a nostro avviso ormai irrinunciabili nella preparazione scientifica di un giovane. Nel secondo, cerchiamo di mettere in luce alcune delle caratteristiche della didattica laboratoriale proposta nei Licei Matematici mentre nel terzo si articola una proposta didattica fortemente interdisciplinare.

4.1 – *Modelli probabilistici per la generazione di sequenze di dati*

Il laboratorio sui modelli probabilistici per la generazione di sequenze di dati offre un'introduzione concreta ad alcuni semplici meccanismi stocastici per la generazione di dati, in particolare per la generazione di sequenze biologiche (Ciliberto, Rogora; 2011). Si parte dall'estrazione con reimpulso da un'urna contenente palline di quattro diversi colori corrispondenti alle quattro basi azotate che formano i nucleotidi dell'acido desossiribonucleico (DNA). In questa maniera, si ottengono sequenze analoghe a quelle del DNA ma di contenuto informativo nettamente inferiore e quindi inadeguate a modellizzare utilmente tali sequenze. È già possibile però, anche in questa prima fase così

elementare, affrontare con la classe due problemi fondamentali. Il primo è quello di determinare, nell'ipotesi che una data sequenza sia prodotta con il modello appena descritto, i parametri incogniti del modello che meglio si accordano ai dati, cioè i rapporti tra le palline di diverso colore. Il secondo è quello di misurare la fiducia che possiamo assegnare all'ipotesi che una data sequenza sia prodotta da questo modello. Inizialmente, per misurare questa fiducia, si è discusso il test del chi quadro, usando una simulazione fatta con una calcolatrice grafica per giustificare la distribuzione teorica prevista degli scarti quadratici tra i dati osservati e quelli attesi.

Il secondo esperimento prevede l'uso di due urne per la generazione di una sequenza, con l'accortezza di pescare dalla prima le prime n osservazioni e dalla seconda le successive n . Per questo modello si discutono i seguenti problemi: quali sono e come determinare i parametri da cui dipende; come scegliere, data una sequenza prodotta con il primo o con il secondo modello, quello che più verosimilmente l'ha prodotta; come misurare la nostra fiducia nella verosimiglianza della nostra scelta; come modificare il test del chi quadro per aumentare la nostra fiducia nella possibilità di discriminare tra i due modelli.

Il terzo esperimento prevede di costruire un ulteriore modello ottenuto lanciando ad ogni estrazione dalla prima urna una moneta e modificando l'urna da cui si estrae dopo che viene osservato un numero k di teste fissato a priori (k è un nuovo parametro del modello). Per questo terzo modello si ridiscutono i problemi già visti per il secondo.

Nella quarta fase del laboratorio si permette ai ragazzi di elaborare nuovi modelli con urne, dadi e monete truccate. Al termine di questa fase "creativa" si discute come implementare i modelli elaborati attraverso l'uso di un calcolatore o di una calcolatrice programmabile, utilizzando un generatore casuale di numeri aleatori uniformemente distribuiti. Si arriva quindi a guidare la classe all'implementazione di un modello di generazione basato su una catena di Markov a stati nascosti, si insegna agli studenti a contare e a stimare i parametri del modello e si discute infine come testare la verosimiglianza del modello rispetto ai dati.

In questo laboratorio viene prestata particolare attenzione a trasmettere agli studenti l'idea di come,

grazie alle potenza di calcolo dei moderni strumenti di calcolo elettronico, sia possibile combinare semplici idee per costruire meccanismi complessi per la simulazione di situazioni reali.

In ultima analisi si cerca di sviluppare un atteggiamento equilibrato nel considerare le immense potenzialità della modellizzazione matematica assistita dal calcolo automatico e il senso critico necessario per controllare tale potenza.

4.2 – *Il disco di Newton 3.0: un'esperienza didattica con Arduino*

Questa esperienza è stata condotta nell'anno scolastico 2015-16 presso il Liceo Mancini di Avellino e si articola secondo una progettazione comune a molti laboratori del modulo di Fisica del Liceo Matematico e ha come focus didattico l'ottica geometrica. Dal punto di vista metodologico, agli studenti viene posto un problema tratto dall'osservazione della realtà e gli si chiede di identificarlo formulando delle ipotesi. In seguito essi devono pianificare l'indagine esplorando le variabili, conducono l'indagine singolarmente o in gruppo documentando i risultati; poi, insieme al docente, che, in tutta l'attività, si limita a fornire aiuto agli studenti sulla base delle loro sollecitazioni, vengono interpretati i risultati che forniscono il successivo punto di partenza per nuovi problemi. Questo percorso di investigazione della realtà, favorisce lo sviluppo delle capacità di problem posing e problem solving e attraverso il lavoro di gruppo accresce la capacità di ragionamento critico.

Nel laboratorio sul disco di Newton, l'approccio allo studio dell'ottica, in ogni lezione, avviene in maniera informale: agli studenti vengono mostrati semplici exhibit⁽³⁾ realizzati con materiali poveri e gli studenti vengono invitati a realizzarne a casa altri da mostrare all'inizio della lezione successiva. L'approccio informale ha permesso di introdurre contenuti disciplinari partendo dalle loro esperienze con-

⁽³⁾ Il termine exhibit ha, in didattica della fisica, un significato che va oltre la sua traduzione letterale di "mostra". Si tratta della rappresentazione fisica di uno specifico concetto scientifico, ricostruito attraverso una o più esperienze di laboratorio. Questo sapere generalmente costituisce il focus dell'attività didattica che si sta svolgendo.

crete, dai loro concetti e a volte dalle loro misconcezioni. Prendere sul serio le idee sbagliate dei ragazzi (Viennot; 2003) significa non solo indagare la logica interna del ragionamento spontaneo per capirne la resistenza e la struttura in termini di modelli mentali (Gilbert, Boulter; 1998), ma anche analizzare l'evoluzione dinamica esplorando in modo operativo, nelle sperimentazioni in classe ed in contesti ludici ed informali, le idee interpretative spontanee.

Al termine del percorso didattico è stato proposto agli studenti, suddivisi in gruppi, la realizzazione di un prodotto di intervento. Uno dei prodotti realizzati è stato il disco di PePaMa⁽⁴⁾, così denominato dagli studenti stessi. È la rivisitazione, in chiave moderna, del disco tramite il quale Newton riuscì a spiegare come la luce naturale sia bianca in quanto combinazione dei sette colori dell'arcobaleno. Il disco di PePaMa qui proposto viene integrato con il sistema Arduino, implementato con linguaggio C++, che consente di attivare il dispositivo tramite uno smartphone e tre semplici comandi.

Il lavoro prodotto è stato inviato ad un concorso bandito da Città della Scienza e valutato molto positivamente. Così, durante la manifestazione Smart Education & Technology days - 3 Giorni per la Scuola 2016, gli studenti hanno avuto modo di esibire il loro prodotto, spiegare come hanno realizzato il disco di Newton in versione 3.0, spiegare gli scopi didattici del progetto. Essi hanno anche mostrato come illustrare i principi basilari dell'ottica, allestendo uno stand e mostrando il funzionamento del disco ad altri studenti.

4.3 – *Dall'arte della persuasione alla dimostrazione matematica*

Il laboratorio, pensato per una qualsiasi classe del Liceo Matematico, è stato presentato agli alunni e agli insegnanti dei Licei Matematici di Avellino e Mirabella, agli studenti della prima classe del Liceo Matematico Colonna di Roma, agli studenti della prima e seconda classe dei Licei De Sanctis e Galileo di Roma e ai partecipanti alla seconda palestra estiva di Filosofia, Nusco 10-14 luglio 2017.

⁽⁴⁾ L'acronimo fa riferimento ai nomi dei tre studenti Peppe, Pasquale e Mattia che hanno prodotto l'artefatto.

Nel laboratorio si analizza il percorso che porta dalla matematica non argomentativa dell'Egitto e della Mesopotamia alla matematica ellenica ed ellenistica in cui si afferma l'esigenza di dimostrare, collocando questo percorso nel contesto della rivoluzione culturale compiuta dalla civiltà greca.

Il percorso mette in evidenza come l'esigenza di dimostrare nasca con l'affermarsi della civiltà delle città nella Grecia del VI sec. a.C. e mostra come la ragione del manifestarsi di tale esigenza sia figlia della necessità di argomentare per convincere, cioè del confronto democratico. La dimostrazione matematica è quindi un'evoluzione della retorica, della dialettica e della logica. Il percorso ripercorre la storia di questa evoluzione per comprendere le ragioni che portano a introdurre le dimostrazioni nella matematica. Crediamo che andare alla ricerca delle motivazioni e non dare per scontato che "bisogna dimostrare" possa rispondere in maniera convincente alle perplessità degli studenti sull'importanza di imparare a fare dimostrazioni; faccia comprendere la portata rivoluzionaria di questa matematica meno naturale e più difficile; faccia nascere la curiosità di provare a dimostrare e l'apprezzamento che l'allenamento alla dimostrazione è una componente importante e molto potente per un allenamento più generale all'argomentazione e come tale ha un valore formativo che trascende di gran lunga la matematica.

Il percorso si pone anche l'obiettivo di far nascere negli studenti l'apprezzamento delle capacità argomentative proponendo, con la collaborazione dell'insegnante di italiano, alcuni esercizi di retorica e precisamente l'organizzazione di spazi di dibattito su argomenti di interesse scientifico, etico o politico tra piccoli gruppi di studenti contrapposti.

Si sono poi percorse le tappe principali dell'evoluzione dalla retorica alla dialettica. Questo processo è stato illustrato in classe con la lettura di brani tratti dai dialoghi platonici (Eutrifone, Menone, Repubblica) e dalle opere di Aristotele, mettendo in luce il profondo legame di questa evoluzione con l'evoluzione della matematica greca. La lettura in classe del Menone è stata utilizzata come spunto per illustrare il carattere delle dimostrazioni platoniche, che procedono "a ritroso", da un problema non evidente fino a raggiungere proprietà evidenti che "spiegano" la verità del problema in oggetto. L'esperienza di

lettura del Menone è stata utilizzata anche come sperimentazione del metodo maieutico nell'insegnamento della matematica (Polya: 1954) (Lakatos; 1979).

Al termine del percorso si sono prese in considerazione le caratteristiche rivoluzionarie dell'approccio euclideo alla dimostrazione, rispetto a quello platonico. La dimostrazione euclidea porta alle estreme conseguenze l'approccio convenzionalista di Aristotele alla dialettica e al ragionamento e procede, a differenza della dimostrazione platonica, "in avanti". Come esempio della differenza tra le dimostrazioni platoniche e quelle euclidee si sono discusse diverse dimostrazioni del teorema di Pitagora, mettendo in rilievo, in particolare, la rete di connessioni che bisogna percorrere per giungere alla dimostrazione a partire dagli assiomi euclidei. Si è discusso infine come il convenzionalismo aristotelico ed euclideo, lungi dal condurre ad un relativismo improduttivo, è alla radice della modellizzazione scientifica e della progettazione tecnologica (Russo; 2015 e 2016).

5. – Altre attività del Liceo Matematico

5.1 – *Formazione degli insegnanti*

Il Liceo Matematico è nato e si è sviluppato come progetto di ricerca in didattica della matematica. Dopo tre anni di ricerca, di sperimentazione nelle scuole, di riflessione con gli insegnanti e di confronto con la comunità scientifica nell'ambito di numerosi congressi nazionali e internazionali, si è accumulato un bagaglio di materiali ed esperienze che ha permesso di iniziare una seconda fase del progetto, che prevede la possibilità di coinvolgere le scuole attraverso percorsi formativi rivolti agli insegnanti interessati. Un liceo può quindi attivare una classe di Liceo Matematico inserendo i propri insegnanti in un percorso formativo in cui si presentano e si discutono le modalità di attuazione di laboratori già sperimentati e si progettano nuovi laboratori e nuove attività, che non vengono però seguite direttamente dai ricercatori universitari dell'Ateneo salernitano. Quest'ultimo offre supporto agli insegnanti nella realizzazione dei loro laboratori e prevede incontri di riflessione e di confronto sulle esperienze in atto.

5.2 – *Convegni tematici*

I convegni annuali tematici coinvolgono diverse sedi universitarie. Le attività del Liceo Matematico vengono progettate tenendo particolare conto del dibattito scientifico che emerge dai congressi tematici.

Il convegno “Matematica e Letteratura”, ormai alla terza edizione, si tiene ogni anno per tre giorni nella prima settimana di aprile presso il Dipartimento di Matematica dell’Università di Salerno. Scopo del convegno è la ricerca delle radici culturali comuni di matematica e linguaggio al fine di favorire il dialogo tra le “due culture”. Il successo delle edizioni passate è stato molto ampio con la presenza mediamente di oltre 300 tra studenti e docenti, molti dei quali provenienti anche da fuori regione Campania. L’attivazione di un collegamento in streaming con numerosi licei di tutta Italia ha consentito a centinaia di studenti di altre scuole di seguire i lavori. La discussione sugli spunti delle conferenze è stata approfondita successivamente nel lavoro di molte classi coinvolgendo sia i docenti di matematica che di lettere. Per l’anno scolastico 2017-18 è prevista anche l’organizzazione di un convegno tematico su Matematica e Fisica (Mirabella (AV), 1-3 settembre) e su Matematica e Arte (Roma, 11 - 12 maggio).

Nei convegni tematici si approfondiscono, grazie al contributo di studiosi e ricercatori di alto profilo scientifico, gli snodi fondamentali di contatto tra la matematica e le altre discipline che possono ispirare il lavoro di progettazione dei gruppi di ricerca.

5.3 – *Le palestre estive*

Le palestre estive sono concepite come momento di incontro e confronto dei diversi licei che partecipano al progetto del Liceo Matematico, dove si possono sperimentare proposte didattiche già consolidate o innovative.

La “*Palestra estiva di Filosofia*”, alla seconda edizione, ha lo scopo di esemplificare, approfondire e confrontare metodologie e forme del ragionare e argomentare. Gli studenti sono sollecitati e spronati allo sviluppo progressivo della dimensione critica del proprio pensiero creando un’occasione per sostenere le capacità argomentative e di ragionamento

corretto. Gli studenti sono coinvolti in analisi di testi, lezioni frontali, lavori di gruppo e workshop. Di particolare importanza è la realizzazione da parte degli studenti di esercizi argomentativi e dimostrativi su testi di argomento filosofico - matematico, con lavoro in piccoli gruppi.

La “*Palestra estiva di Matematica*”, ormai alla quarta edizione, è rivolta agli alunni del Liceo Matematico che desiderano cimentarsi con le gare matematiche. La palestra, della durata di una settimana è organizzata in due fasi, la mattina sono previsti corsi di scacchi, giochi di società, lezioni per l’utilizzo di ausili informatici per il calcolo delle probabilità e la statistica, visite guidate a laboratori scientifici. Il pomeriggio è dedicato a laboratori di approfondimento con docenti provenienti anche da altri atenei.

La “*Palestra sull’uso delle calcolatrici grafiche*”, organizzata per la prima volta quest’anno in Irpinia (Bologna et al.; 2017), mira a fornire a studenti e insegnanti le competenze fondamentali nell’utilizzo degli strumenti di calcolo numerico e di visualizzazione grafica, indispensabili nelle applicazioni scientifiche e tecnologiche. In questa palestra si traspongono in percorsi laboratoriali le ricerche didattiche che da anni vengono svolte, in collaborazione con gli insegnanti, sull’impatto degli strumenti di calcolo sull’apprendimento della matematica e delle scienze e sul perfezionamento delle modalità di utilizzo in classe.

6. – **Conclusioni**

Il progetto di ricerca del Liceo Matematico è un progetto quinquennale del Dipartimento di Matematica dell’Università di Salerno ancora in corso di svolgimento. Una valutazione complessiva del progetto è prematura ma il gradimento degli studenti e degli insegnanti coinvolti è molto elevato. Risultati parziali alle rilevazioni INVALSI hanno dato esito molto positivo e le richieste dei Licei di entrare a far parte del progetto sono in continua crescita.

Iniziative analoghe si sono propagate velocemente in numerose regioni d’Italia. Dal 21 al 23 Settembre 2017 si è svolto presso l’Università di Salerno il

primo seminario nazionale di confronto tra le diverse iniziative avviate sul territorio nazionale. Si è registrata un'ampia convergenza sui temi dell'interdisciplinarietà e della didattica laboratoriale, due dei punti cardine del progetto salernitano. Nel corso del seminario si è chiesto all'Unione Matematica Italiana di prendere contatto con il MIUR perché si affronti il problema di un riconoscimento formale di queste attività e si favoriscano le Scuole che hanno iniziato percorsi di questo genere assicurando un organico potenziato per portare avanti le sperimentazioni.

Ringraziamenti

Gli autori desiderano ringraziare la redazione della rivista e il referee per i numerosi e utili suggerimenti.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] ANZELLOTTI G., *Il laboratorio è utile per fare e imparare una matematica che significhi qualcosa per noi*, Lettera in Notiziario UMI, Dicembre 2007, 48-55.
- [2] BOLOGNA F., ROGORA E., TORTORIELLO S., *Scuola estiva di introduzione all'uso delle calcolatrici grafiche*, Tuttoscuola, 2017.
<https://www.tuttoscuola.com/scuola-estiva-introduzione-alluso-delle-calcolatrici-grafiche/>
- [3] CAPONE R., D'ACUNTO I., DEL SORBO M. R., DEL REGNO F., TORTORIELLO F. S., *Action research: a new perspective in math and science education*, Libreria Italia, Firenze 2015.
- [4] CAPONE R., DELLO IACONO U., TORTORIELLO F. S., Vincenzi G., *Math high school: a teaching proposal*. In *Proceedings of the conference History and Pedagogy of Mathematics*. Montpellier, 2016.
- [5] CASTELNUOVO E., *Didattica della matematica*, UTET, Torino, 2017.
- [6] CILIBERTO C., ROGORA E., *Applicazioni della matematica alla filogenetica*. In CILIBERTO C., LUCCHETTI R., *Un mondo di idee*. Springer, Milano, 201-229, 2011.
- [7] D'AMORE B., *La Didattica della Matematica alla svolta del millennio: radici, collegamenti e interessi*. *La matematica e la sua didattica*, 3, 407-422., 2000.
- [8] DE FINETTI, *Preparazione universitaria degli insegnanti di matematica nelle scuole secondarie*, Archimede, 16, nn. 1-2, 34-36, 1964.
- [9] DE FINETTI, *Programmi e criteri per l'insegnamento della matematica alla luce delle diverse esigenze*, *Periodico di Matematiche*, (IV), 43 n. 2, 119-143, 1965
- [10] DE FINETTI, *La riforma della scuola*, *La riforma della scuola*, 4, 1969, 11-17.
- [11] DE MARCHIS M., ROGORA E., *Attualità delle riflessioni di Guido Castelnuovo sulla formazione dell'insegnante di matematica*, *Periodico di matematiche*, S. 13, v. 9 (2), 2017
- [12] DU SAUTOY M., *La Matematica: un ponte tra le due culture*, Fondazione Bruno Kessler, Trento, 2015.
- [13] ENRIQUES F., *Insegnamento dinamico*, *Periodico di Matematiche*, S. 4, v. 1, pp. 6-16, 1921.
- [14] GILBERT J. K., BOULTER C., *Learning science through models and modelling*. In FRASER B.J., TOBIN K.G. (eds.) *International Handbook of Science Education*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 53-66, 1998.
- [15] LAKATOS I., *Dimostrazioni e confutazioni*, Feltrinelli, Milano, 1979.
- [16] MAROSCIA P., TOFFALORI C., TORTORIELLO F. S., VINCENZI G. (Curatori), *Matematica e letteratura, analogie e convergenze*, UTET, Torino, 2016.
- [17] MORIN E., *La testa ben fatta, riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero nel tempo della globalizzazione*, Raffaello Cortina Editore, Milano, 2000.
- [18] ODIFREDDI P.G., *Il computer di Dio. Pensieri di un matematico impertinente*, Raffaello Cortina, Milano, 2000.
- [19] PAPERT, HAREL, *Situating constructionism*, *Constructionism*, 36 (2), 1-11, 1991.
- [20] POLYA G., *Mathematics and plausible reasonings, 2 voll.*, Oxford University Press, London, 1954.
- [21] ROGORA E., *Valutare e scegliere, il ruolo della matematica*, *Lettera Matematica Pristem* 87, 4-7, 2013.
- [22] RUSSO L., *Stelle, atomi e velieri*, Mondadori Università, Milano, 2015.
- [23] RUSSO L., *Euclide*, Grandangolo, Milano, 2016.
- [24] DU SAUTOY M., *La Matematica: un ponte tra le due culture*, Fondazione Bruno Kessler, 2015.
- [25] VASSALLO V., DI MONTE M., PEDONE S., REGOLIOSI L., ROGORA E., SORCE F., *Educare lo sguardo*, <https://educarelosguardo.wordpress.com>, 2017.
- [26] VIENNOT L., *Teaching physics*, Springer Science & Business Media, Dordrecht, 2003.



Roberto Capone

Roberto Capone è assegnista di ricerca del settore MAT04 presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Salerno. Copre gli insegnamenti di Didattica della Matematica e Analisi Matematica. I suoi maggiori interessi di ricerca riguardano la didattica per competenze, l'interdisciplinarietà e le metodologie didattiche innovative per l'insegnamento della matematica e della fisica.



Enrico Rogora

Enrico Rogora insegna storia della matematica alla Sapienza, Università di Roma. I suoi attuali campi di interesse riguardano la storia della Geometria algebrica e della teoria dei gruppi di trasformazioni, con particolare attenzione al contributo dei matematici italiani. Si occupa anche dei problemi dell'insegnamento della Matematica nei Paesi dell'Africa e del Sudamerica e delle critiche alle metodologie per l'analisi statistica dei test a risposta multipla. Dal 2011 è membro della "Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica" dell'Unione Matematica Italiana. Ha svolto ricerche anche in Geometria algebrica, teoria degli invarianti, omogeneizzazione, processi stocastici non stazionari, Statistica e Filogenetica. Fa parte della redazione di Lettera Matematica PRISTEM.



Francesco Saverio
Tortoreillo

Francesco Saverio Tortoreillo è Ricercatore presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Salerno. I suoi interessi di ricerca riguardano la didattica della matematica e i fondamenti della matematica, in particolare lo studio del rapporto tra le due culture. È tra i responsabili scientifici del Progetto Liceo Matematico.