Fourier e le onde del destino...

di Eugenio Montefusco

Due personaggi per questo articolo: i segnali e Jean Baptiste Joseph Fourier

Cominciamo dai segnali

Un segnale ondulatorio si dice *periodico* se si ripete dopo un certo lasso di tempo.
In termini matematici, a ogni segnale si può associare una legge f(t) che a ogni istante *t* fa corrispondere una qualche informazione numerica: se il segnale è periodico abbiamo che la funzione soddisfa la relazione f(t) = f(t + T) per ogni istante *t*.
Il valore T › 0, che chiameremo *periodo*, è l'intervallo temporale dopo il quale il segnale comincia a ripetere quanto già detto.
Una funzione associata a un segnale periodico viene denominata *funzione periodica*.
Si osservi che una funzione di periodo T ha anche periodo 2T, 3T,... e via discorrendo: la funzione sen(t), per esempio, ha periodo 2π, ma anche 4π o 24π. Tuttavia, quando si parla di periodo di una funzione *f* si intende il periodo minimo, cioè il più piccolo valore positivo T per cui vale f(t) = f(t + T).

Esempi ragionevolmente semplici di funzioni periodiche sono le funzioni trigonometriche elementari; vale, infatti, sen(t) = sen(t + 2π) e cos(t) = cos(t + 2π) e quindi sen(t) e cos(t) sono due funzioni periodiche di periodo 2π.
Si noti che, essendo

$$f(t) = \mathrm{sen}(\omega t) = \mathrm{sen}(\omega t + 2\pi) = \mathrm{sen}(\omega(t + 2\pi/\omega)) = f(t + 2\pi/\omega),$$

la funzione f(t) = sen(ωt) ha periodo 2π/ω. In generale possiamo costruire funzioni di periodo qualsiasi scegliendo opportunamente il numero ω › 0. L'inverso del periodo viene comunemente chiamato *frequenza* del segnale.

A questo punto possiamo introdurre il concetto di *polino-*

Jean Baptiste Joseph Fourier

(Auxerre 21 marzo 1768 Parigi 16 maggio 1830).
Orfano fin dal 1774, dopo aver studiato dai Benedettini e in una scuola militare, partecipò alla Rivoluzione francese, rischiando di essere ghigliottinato durante il periodo del Terrore. Successivamente entrò nella École Normale Supérieure, dove ebbe come docenti, tra gli altri, Joseph-Louis Lagrange e Pierre-Simon Laplace, al quale nel 1797 succedette nel ruolo di professore alla École Polytechnique.
Nel 1798 partecipò alla campagna d'Egitto guidata da Napoleone Bonaparte dove, in seguito, rimase per qualche anno svolgendo attività come diplomatico. Al suo ritorno in Francia, nel 1801, fu nominato da Napoleone prefetto dell'Isère. Fu quindi lì, nella città di Grenoble, che condusse quegli esperimenti sulla propagazione del calore che gli consentirono di modellizzare l'evoluzione della temperatura per mezzo di serie trigonometriche (le serie di Fourier appunto).
Questi lavori, pubblicati nel 1822 in *Teoria analitica del calore*, furono molto contestati, specialmente da Laplace e Lagrange, non per i contenuti ma perché le splendide idee non erano accompagnate da altrettanto rigore nelle dimostrazioni... Nel 1817, in piena Restaurazione, entrò a far parte del'Accademia delle Scienze, nonostante i suoi trascorsi rivoluzionari e le sue simpatie imperiali.

mio trigonometrico, che è semplicemente (per modo di dire!) una funzione definita nel seguente modo

$$p(t) = a_0 + a_1 \cos(t) + a_2 \cos(2t) + ... + a_k \cos(kt) + b_1 \operatorname{sen}(t) + b_2 \operatorname{sen}(2t) + ... + b_k \operatorname{sen}(kt),$$

dove k è un numero naturale (cioè intero e positivo).
La funzione p(t) è definita dalla somma di un certo numero di funzioni trigonometriche (precisamente 2k + 1).
Tutto sommato è abbastanza intuitivo il fatto che la somma precedente è ancora una legge periodica. Inoltre, visto che il periodo delle funzioni trigonometriche è noto, dalle osservazioni precedenti segue l'uguaglianza $p(t) = p(t + 2\pi)$, cioè segue il fatto che i polinomi trigonometrici (come li abbiamo definiti) sono funzioni periodiche con periodo 2π.

E ora veniamo a Fourier

A grandi linee, egli si convince che ogni funzione periodica di periodo 2π può essere approssimata con un polinomio trigonometrico del tipo descritto precedentemente, purché k sia un opportuno intero positivo e i coefficienti a_k e b_k (detti *coefficienti di Fourier*) siano scelti in maniera apposita.
Nonostante Fourier fosse interessato al problema della diffusione del calore, la sua idea si applica allo studio dei più disparati problemi. Probabilmente, l'esempio più calzante consiste nel considerare una corda vibrante: le oscillazioni della corda producono un suono, la cui complessità dipende da molti fattori e che può essere decomposto in diverse armoniche, rappresentate dai termini del polinomio trigonometrico che approssima il segnale acustico prodotto.
Questa idea si concretizza nella scelta delle funzioni trigonometriche come funzioni che descrivono le armoniche base del segnale e nella scelta dei loro coefficienti a_k e b_k, che devono soddisfare alcune precise identità integrali.

Qual è il vantaggio del rappresentare segnali periodici tramite polinomi trigonometrici? Da un primo punto di vista, lavorare con polinomi trigonometrici "semplifica" molti calcoli e permette di lavorare meglio rispetto a generiche funzioni periodiche; inoltre, se cerchiamo una funzione che descriva un fenomeno o un segnale periodico, potremo subito cercare una soluzione in forma di polinomio trigonometrico, spostando quindi la ricerca verso il calcolo dei coefficienti di Fourier.

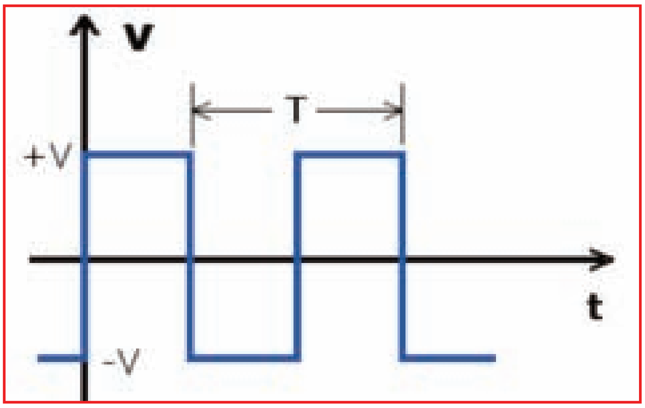

Figura 1

Per Illustrare i ragionamenti precedenti esaminiamo un caso molto particolare (anche se molto interessante). Si tratta delle onde quadre, un tipo di impulso molto usato nelle applicazioni elettrotecniche.

Un'onda quadra è descritta da una funzione con un grafico molto semplice, come si può vedere in Figura 1, in cui 2V è l'ampiezza dell'oscillazione e $T = 2\pi$ è il periodo del segnale.
In Figura 2 possiamo vedere il grafico di un'onda quadra e i polinomi trigonometrici che la approssimano, per diversi valori di k, cioè l'armonica fondamentale (vale a dire, il polinomio trigonometrico con k = 1), e i polinomi ottenuti sommando (rispettivamente) le prime 5 e le prime 11 armoniche.

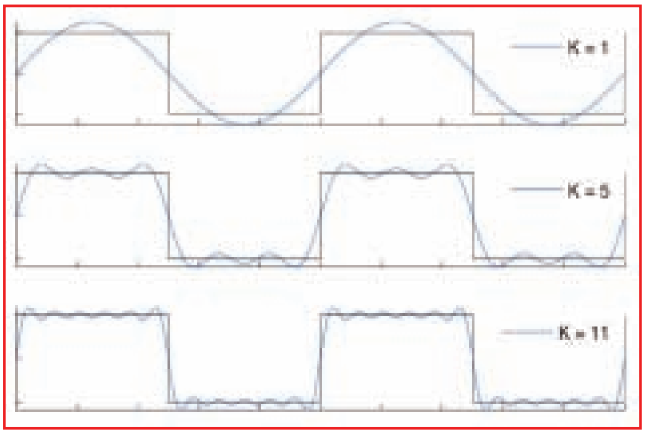

Figura 2

Questa serie di curve suggerisce che la bontà dell'approssimazione migliori al crescere del grado del polinomio trigonometrico, cioè dell'intero k. Ed effettivamente è così: si può provare che al tendere dell'intero k all'infinito, l'errore che si commette sostituendo il polinomio trigonometrico al segnale periodico tende a zero!
L'oggetto che si ottiene, mandando k all'infinito, si chiama *serie di Fourier*. Un teorema molto importante dimostra che due funzioni periodiche diverse hanno almeno un coefficiente di Fourier diverso e quindi che dai coefficienti si può ricostruire la funzione originaria!

Naturalmente, non abbiamo precisato (e nemmeno intendiamo farlo) in che senso l'errore diventi sempre più piccolo: per questa affermazione, rimandiamo a testi più qualificati il lettore interessato ad approfondire rigorosamente la matematica dell'analisi di Fourier.

Per saperne di più

E.T. Bell, *I Grandi Matematici*, Biblioteca Universale Sansoni, 1991.
C.B. Boyer, *Storia della matematica*, Oscar Mondadori, 1990.
G.B. Folland, *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadsworth & Brooks/Cole Books, 1992.

Eugenio Montefusco
Ricercatore di Analisi Matematica presso la Sapienza Università di Roma, si occupa di equazioni alle derivate parziali e delle loro applicazioni in vari ambiti, fra cui anche la medicina.
montefus@mat.uniroma1.it