

UN MODELLO IPERELASTICO NON LINEARE ANISOTROPO PER LO STUDIO DELLA RISPOSTA REVERSIBILE DEI TERRENI

Fabio Rollo

Sapienza Università di Roma
fabio.rollo@uniroma1.it

Angelo Amorosi

Sapienza Università di Roma
angelo.amorosi@uniroma1.it

Sommario

In questa nota viene presentato un modello costitutivo iperelastico non lineare anisotropo concepito per descrivere la risposta reversibile dei terreni. Aspetti quali la dipendenza non lineare della rigidità elastica dallo stato di sforzo e il carattere anisotropo della rigidità assumono spesso un ruolo non trascurabile nella modellazione del comportamento meccanico dei terreni e nell'analisi di numerosi problemi geotecnici al finito. Il modello in oggetto è in grado di riprodurre in maniera termodinamicamente corretta sia l'effetto dell'anisotropia indotta dallo stato di sforzo/deformazione, sia gli effetti dell'anisotropia di struttura. Quest'ultima è descritta da un tensore di struttura del secondo ordine che è la rappresentazione macroscopica delle proprietà microstrutturali del materiale. La procedura di calibrazione dei parametri e le capacità previsionali del modello sono illustrate con riferimento a risultati di prove di laboratorio eseguite su provini di sabbia.

1. Introduzione

Il comportamento anisotropo dei terreni rappresenta una manifestazione macroscopica della microstruttura interna, caratterizzata da grani e particelle orientati, spesso combinati con la presenza di vuoti e in alcuni casi di fessure. Da un punto di vista della modellazione costitutiva, l'approccio adottato nel presente lavoro per legare queste caratteristiche microstrutturali al comportamento meccanico a livello macroscopico consiste nell'introdurre un tensore di struttura (*fabric tensor*) del secondo ordine simmetrico che sintetizzi le proprietà scalari e direzionali che competono all'anisotropia del materiale. L'impiego di un tensore del secondo ordine restringe la descrizione del carattere anisotropo del materiale al caso ortotropo. A partire dai teoremi di rappresentazione delle funzioni isotrope viene introdotta una funzione di energia libera che dipende da una serie di invarianti misti del tensore di deformazione e del tensore di struttura. La nuova formulazione proposta rappresenta la generalizzazione di un modello non lineare isotropo esistente (Houlsby et al, 2005) al caso anisotropo; infatti con un'opportuna scelta dei parametri è possibile tornare ai casi isotropo o lineare. Nel presente lavoro viene dapprima illustrata la nuova formulazione e in seguito sono mostrate le capacità previsionali del modello confrontando la risposta dello stesso con misure delle rigidità elastiche effettuate lungo diversi percorsi di carico nel contesto di prove di laboratorio su provini di sabbia.

Di seguito si adotta la convenzione dei segni geotecnica e tutte le tensioni sono da intendere come efficaci. I tensori sono riportati in grassetto, i vettori in grassetto corsivo. Indicando con $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l$ le basi cartesiane e con \mathbf{a} e \mathbf{b} due generici tensori del secondo ordine, si definiscono i prodotti $\mathbf{ab} = a_{ij}b_{jk}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_{ij}b_{kl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$ e $\mathbf{a} \bar{\otimes} \mathbf{b} = \frac{1}{2}(a_{ik}b_{jl} + a_{il}b_{jk})\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l$. La traccia di un tensore del

secondo ordine è $\text{tra} = a_{ij}\delta_{ij} = a_{ii}$ con δ_{ij} operatore di Kronecker e $\mathbf{I} = \delta_{ij}e_i e_j$ il tensore identità del secondo ordine. Il tensore di deformazione $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}'$ e quello di tensione $\boldsymbol{\sigma} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}'$ sono simmetrici, con l'apice che denota le parti deviatoriche.

2. Elasticità non lineare isotropa

Nel contesto dell'iperelasticità si assume che esista una funzione di energia $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon})$ tale che la relazione tra i tensori di tensione e deformazione sia univocamente definita da:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (1)$$

Per una formulazione incrementale, quale ad esempio quella adottata nell'elastoplasticità, è necessario definire il tensore di rigidezza elastico \mathbb{D} , che può essere ottenuto derivando ulteriormente l'eq. (1):

$$\mathbb{D} = \frac{\partial^2 \varphi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2)$$

In questo paragrafo si richiama il modello iperelastico proposto da Houlsby *et al.* (2005). L'esistenza di una funzione di energia libera e della corrispettiva energia complementare consentono di derivare l'intera risposta elastica in una forma termodinamicamente corretta. L'energia libera assume l'espressione:

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{p_a}{2-n} k^{\frac{n}{2-2n}} (1-n)^{\frac{2-n}{1-n}} \left[\left(k - \frac{2}{3} \frac{g}{1-n} \right) (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \frac{2g}{1-n} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^2 \right]^{\frac{2-n}{2-2n}} \quad (3)$$

dove p_a è la pressione atmosferica, mentre k e g sono parametri adimensionali determinati sperimentalmente. Il parametro adimensionale n controlla la dipendenza non lineare della rigidezza elastica dallo stato di sforzo/deformazione: dalle osservazioni sperimentali esso varia nel campo $0 \leq n < 1$. Per $n = 0$ l'eq. (3) assume la tipica forma quadratica che descrive l'elasticità lineare mentre per $n \rightarrow 1$ il materiale mostra una dipendenza lineare della sua rigidezza con lo stato di sforzo/deformazione.

3. Iperelasticità lineare anisotropa

Limitando l'attenzione all'elasticità, una possibile strategia per introdurre l'anisotropia nella risposta reversibile si basa sulla formulazione di una funzione di energia potenziale nella quale il tensore di deformazione è combinato a un tensore di struttura, attraverso l'applicazione dei teoremi di rappresentazione per funzioni scalari isotrope (Boehler 1987). In questo contesto il primo tentativo fu eseguito da Cowin (1985), introducendo un tensore di struttura del secondo ordine simmetrico all'interno del tensore di rigidezza elastico. Nel caso più generale di ortotropia devono essere definite nove costanti indipendenti, che si riducono a cinque e a due rispettivamente, nel caso di mezzo trasversalmente isotropo e isotropo.

Seguendo un approccio più euristico, Bigoni & Loret (1999) sostituiscono il tensore identità nel tensore di rigidezza elastico con il tensore di struttura del secondo ordine simmetrico \mathbf{B} , per ipotesi definito positivo, pervenendo all'espressione:

$$\mathbb{D} = \lambda \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + 2\mu \mathbf{B} \underline{\otimes} \mathbf{B} \quad (4)$$

con λ e μ le due costanti di Lamé. L'eq. (4) si può ricondurre al caso isotropo quando $\mathbf{B} = \mathbf{I}$. Affinché il paragone con il caso isotropo abbia senso, il tensore di struttura deve essere opportunamente normalizzato, ad esempio attraverso il vincolo $\text{tr}(\mathbf{B}) = 3$.

Sulla base di quanto effettuato da Bigoni & Loret, è possibile pervenire alla versione anisotropa della formulazione iperelastica lineare dell'eq. (3), sostituendo gli invarianti $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ e $\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})^2$ con $\text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})$ e $\text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})^2$, adottando lo stesso tensore simmetrico del secondo ordine \mathbf{B} per caratterizzare l'anisotropia

intrinseca dei terreni. In questo modo si perviene alla funzione di energia:

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{B}) = \frac{p_a}{2} \left[\left(k - \frac{2}{3} g \right) [\text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})]^2 + 2g \text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})^2 \right] \quad (5)$$

Derivando la funzione di energia potenziale rispetto alle deformazioni si ottiene il tensore della tensione:

$$\boldsymbol{\sigma} = p_a \left[\left(k - \frac{2}{3} g \right) \text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{B} + 2g \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{B} \right] \quad (6)$$

e derivando ulteriormente, il tensore di rigidezza:

$$\mathbb{D} = p_a \left(k - \frac{2}{3} g \right) \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + 2p_a g (\mathbf{B} \bar{\otimes} \mathbf{B}) \quad (7)$$

Confrontando quest'ultimo risultato con l'eq. (4) si perviene alla relazione tra le costanti elastiche g e k le due costanti di Lamé, tali che $\lambda = p_a \left(k - \frac{2}{3} g \right)$ and $\mu = p_a g$.

4. Iperelasticità non lineare anisotropa

In questa sezione si propone la formulazione iperelastica non lineare anisotropa. In maniera del tutto simile a quanto precedentemente illustrato, il comportamento anisotropo dei terreni, derivante dalle caratteristiche microstrutturali del materiale, è introdotto nel modello attraverso lo stesso tensore di struttura \mathbf{B} definito prima. In dettaglio, impiegando i due invarianti misti $\text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})$ e $\text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})^2$, è possibile modificare l'eq. (3) come segue:

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{B}) = \frac{p_a}{2-n} k^{\frac{n}{2-2n}} (1-n)^{\frac{2-n}{1-n}} \left[\left(k - \frac{2}{3} \frac{g}{1-n} \right) [\text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})]^2 + \frac{2g}{1-n} \text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})^2 \right]^{\frac{2-n}{2-2n}} \quad (8)$$

Il tensore della tensione si ottiene derivando la funzione di energia rispetto alle deformazioni:

$$\boldsymbol{\sigma} = p_a k^{\frac{n}{2-2n}} (1-n)^{\frac{1}{1-n}} \left[\left(k - \frac{2}{3} \frac{g}{1-n} \right) [\text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})]^2 + \frac{2g}{1-n} \text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})^2 \right]^{\frac{n}{2-2n}} \left[\left(k - \frac{2}{3} \frac{g}{1-n} \right) \text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{B} + \frac{2g}{1-n} \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{B} \right] \quad (9)$$

e derivando ulteriormente si ricava il tensore di rigidezza, che risulta:

$$\begin{aligned} \mathbb{D} = & p_a k^{\frac{n}{2-2n}} \left\{ (1-n)^{\frac{n}{1-n}} n \left[\left(k - \frac{2}{3} \frac{g}{1-n} \right) [\text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})]^2 + \frac{2g}{1-n} \text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})^2 \right]^{\frac{3n-2}{2-2n}} \left(k - \frac{2}{3} \frac{g}{1-n} \right)^2 [\text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})]^2 \right. \\ & \left. + (1-n)^{\frac{1}{1-n}} \left[\left(k - \frac{2}{3} \frac{g}{1-n} \right) [\text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})]^2 + \frac{2g}{1-n} \text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})^2 \right]^{\frac{n}{2-2n}} \left(k - \frac{2}{3} \frac{g}{1-n} \right) \right\} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \\ & + p_a k^{\frac{n}{2-2n}} (1-n)^{\frac{n}{1-n}} n \left[\left(k - \frac{2}{3} \frac{g}{1-n} \right) [\text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})]^2 + \frac{2g}{1-n} \text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})^2 \right]^{\frac{3n-2}{2-2n}} \\ & \left\{ \frac{4g^2}{(1-n)^2} \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{B} + \left[\frac{2g}{1-n} \left(k - \frac{2}{3} \frac{g}{1-n} \right) \text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}) \right] (\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{B}) \right\} + \\ & + 2p_a k^{\frac{n}{2-2n}} (1-n)^{\frac{1}{1-n}} \left[\left(k - \frac{2}{3} \frac{g}{1-n} \right) [\text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})]^2 + \frac{2g}{1-n} \text{tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon})^2 \right]^{\frac{n}{2-2n}} \frac{g}{1-n} (\mathbf{B} \bar{\otimes} \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (10)$$

È importante notare che la condizione sul tensore \mathbf{B} costante implica che l'anisotropia di struttura riprodotta dal modello non possiede alcun carattere evolutivo. In un caso più generale, ad esempio nel

caso di materiali elastoplastici, l'anisotropia può evolvere in funzione di variabili interne tensoriali, producendo una forma di accoppiamento elastoplastico che non è investigata nel presente lavoro. Ciononostante è significativo sottolineare che seguendo quanto asserito da Maier & Hueckel (1979) e da Collins & Houlsby (1997), l'eq. (10) descrive istantaneamente la rigidità reversibile dei terreni.

La nuova formulazione proposta è in grado di riprodurre non solo la dipendenza non lineare delle rigidità con lo stato di sforzo e la correlata evoluzione delle proprietà elastiche direzionali con lo stato di sforzo/deformazione corrente, ma consente anche di modellare le caratteristiche di anisotropia permanenti attraverso il tensore \mathbf{B} . Tutti questi aspetti sono arricchiti dal fatto che la formulazione è basata su un approccio energetico, che garantisce la compatibilità termodinamica del modello.

5. Calibrazione e validazione del modello

I parametri del modello consistono in tre quantità scalari g , k e n che influenzano direttamente l'intensità delle componenti del tensore di rigidità elastico e la loro dipendenza dallo stato di sforzo/deformazione corrente e dal tensore di struttura \mathbf{B} , che controlla l'anisotropia di struttura. Le prime tre costanti possono essere calibrate con riferimento all'evoluzione del modulo di taglio elastico G e del modulo di rigidità volumetrica K (o equivalentemente il modulo di Young E) con lo stato di sforzo per un materiale isotropo o secondo una specifico percorso radiale per un mezzo anisotropo. Il comportamento anisotropo intrinseco è controllato dal tensore \mathbf{B} , che si traduce, nel caso più generale, in sei parametri in più da dover calibrare. Tuttavia, assumendo che le direzioni principali di anisotropia siano coassiali con quelle dei tensori di deformazione o di tensione e restringendo ulteriormente lo studio al caso di isotropia trasversale, solo due termini del tensore di struttura devono essere definiti. Inoltre imponendo sul tensore di struttura il vincolo $\text{tr}(\mathbf{B}) = 3$, si riduce ancora di uno il numero dei parametri di anisotropia, da cui risulta che nel caso di anisotropia trasversale è necessario definire solo una componente del tensore di struttura.

La risposta anisotropa reversibile dei terreni può essere investigata sperimentalmente con riferimento a prove in sito o in laboratorio. La misura della velocità di propagazione delle onde di taglio propagate lungo differenti direzioni e polarizzate lungo tre piani ortogonali consente di determinare i tre moduli di taglio indipendenti. Questo può essere eseguito attraverso prove in sito quali *cross-hole* o prove di laboratorio accoppiate con *bender element*. Combinando questi ultimi con prove triassiali statiche o cicliche condotte per piccoli livelli di deformazione e assumendo che il materiale sia trasversalmente isotropo, è possibile determinare tutti i termini del tensore di rigidità elastico. Apparecchiature di laboratorio più sofisticate, quali l'*hollow cylinder*, consentono di stimare direttamente i cinque parametri indipendenti per un materiale trasversalmente isotropo.

Kuwano & Jardine (2002) hanno studiato il comportamento elastico anisotropo della sabbia di Ham River: si tratta di una sabbia quarzifera uniforme. Gli autori impiegano provini più grandi rispetto a quelli standard, di 100mm in diametro e 200mm in altezza, preparati per pluviazione e in seguito saturati. Essi hanno condotto una serie di prove triassiali adottando sensori ad alta risoluzione per gli spostamenti assiali e radiali (LVDT), accoppiati con *bender element* polarizzati lungo diverse direzioni.

p_a	100
n	0.47
k	1250
g	1050
B_{22}/B_{11}	0.85

Tabella 1. Parametri del modello

Come rappresentato in figura 1, da un iniziale stato di tensione isotropo di 30 kPa è stato applicato un

incremento del rapporto di sforzo fino a raggiungere la condizione $K_0 = 0.45$, seguita da una compressione anisotropa caratterizzata da un rapporto di sforzo costante. Nell'ipotesi di anisotropia trasversale, gli autori illustrano l'evoluzione della matrice di rigidità elastica con la pressione media efficace. In dettaglio ottengono il modulo di Young E_v e E_h lungo le direzioni verticale e orizzontale attraverso prove statiche e, per gli stessi stati, i moduli di taglio G_{hh} , G_{hv} and G_{vh} attraverso misure di *bender element*.

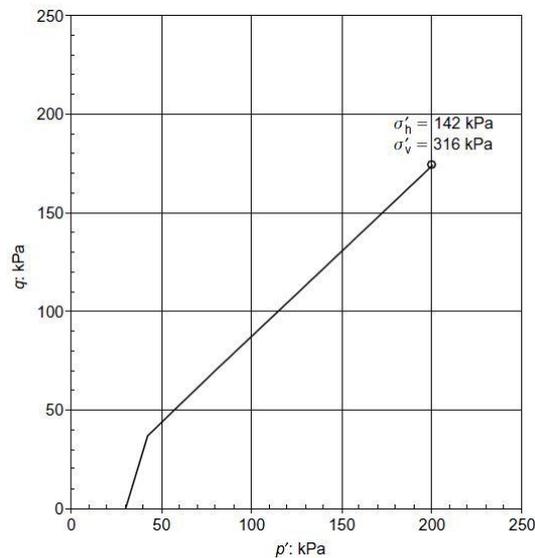


Fig 1. Percorso tensionale (da Kuwano & Jardine, 2002)

In figura 2 i dati sperimentali sono riportati con dei punti insieme alle simulazioni ottenute con il modello proposto. I parametri della formulazione iperelastica sono stati calibrati con riferimento ai dati sperimentali nell'ipotesi di mezzo trasversalmente isotropo. In particolare, in un sistema di riferimento principale assunto coassiale con quello principale delle tensioni e deformazioni, il tensore \mathbf{B} è diagonale con $B_{11} \neq B_{22} = B_{33}$, con la direzione principale 1 corrispondente a quella verticale e con il rapporto B_{22}/B_{11} uguale al rapporto tra i moduli di taglio G_{hh}/G_{vh} . I parametri del modello sono riportati nella tabella 1.

I risultati riportati in figura 2 mostrano che il modello è in grado di riprodurre l'evoluzione delle componenti della matrice di rigidità elastica osservata sperimentalmente. In particolare la formulazione proposta riesce a cogliere la dipendenza non lineare delle rigidità con la pressione media efficace ed è inoltre in grado di portare in conto, attraverso un'unica calibrazione, l'anisotropia di struttura non soltanto in termini dei due moduli di taglio G_{hh} e G_{vh} ma anche con riferimento ai moduli di Young E_v e E_h lungo le direzioni verticale e orizzontale.

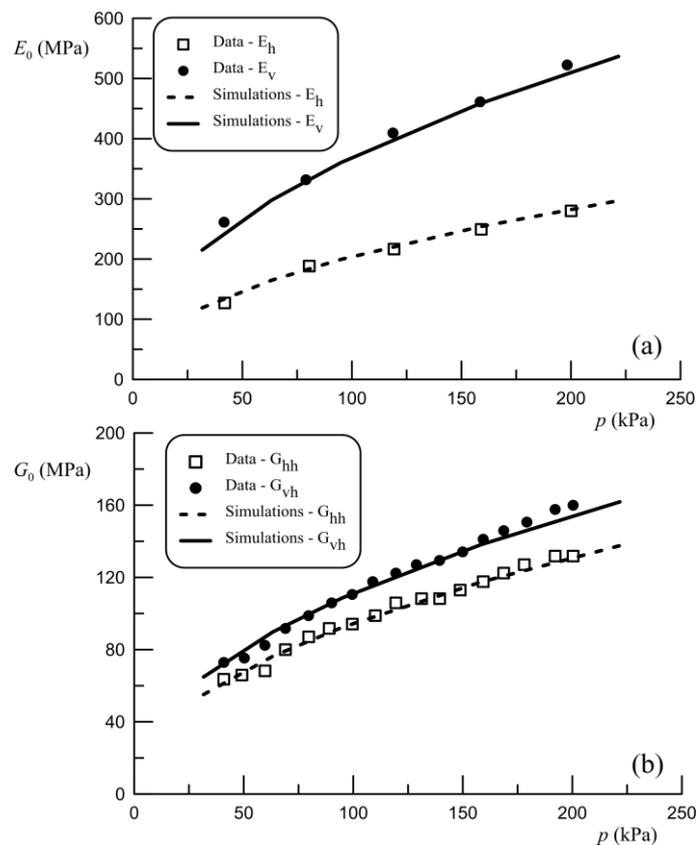


Fig 2. Evoluzione dei moduli di Young (a) e di taglio (b) durante la compressione anisotropa

6. Conclusioni

In questo lavoro è stato presentato un modello iperelastico non lineare anisotropo in grado di portare in conto, oltre alla dipendenza non lineare delle rigidzze elastiche con lo stato di sforzo e l'anisotropia indotta dallo stato di sforzo/deformazione, anche l'anisotropia di struttura nell'ambito della risposta reversibile dei terreni. La capacità previsionale del modello è stata verificata con riferimento a un insieme di accurati risultati sperimentali di laboratorio condotti su sabbia.

Bibliografia

- Houlsby, G. T., Amorosi, A., & Rojas, E. (2005). Elastic moduli of soils dependent on pressure: a hyperelastic formulation. *Géotechnique*, 55(5), 383-392.
- Bigoni, D., & Loret, B. (1999). Effects of elastic anisotropy on strain localization and flutter instability in plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47(7), 1409-1436.
- Boehler, J. P. (1987). *Applications of tensor functions in solid mechanics* (Vol. 292). J. P. Boehler (Ed.). New York: Springer
- Collins, I. F., & Houlsby, G. T. (1997, September). Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials. In *Proceedings of the royal society of London A: Mathematical, physical and engineering sciences* (Vol. 453, No. 1964, pp. 1975-2001). The Royal Society.
- Cowin, S. C. (1985). The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor. *Mechanics of Materials*, 4(2), 137-147.
- Kuwano, R., & Jardine, R. J. (2002). On the applicability of cross-anisotropic elasticity to granular materials at very small strains. *Géotechnique*, 52(10), 727-749.
- Maier, G., & Hueckel, T. (1979, April). Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials. In *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* (Vol. 16, No. 2, pp. 77-92). Pergamon.