



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

## Studio dell'Inerter come dispositivo innovativo nel controllo delle vibrazioni

Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica

Dottorato di Ricerca in Ingegneria Strutturale e Geotecnica – XXXI Ciclo

Candidato

Dott. Daniele Pietrosanti

Supervisore

Prof. Maurizio De Angelis

Anno Accademico 2017/2018

Tesi discussa il 26 febbraio 2019  
di fronte a una commissione esaminatrice composta da:  
Prof. Luciano Rosati (presidente)  
Prof. Giuseppe Brandonisio  
Prof. Claudio Giulio Di Prisco

---

**Studio dell’Inerter come dispositivo innovativo nel controllo delle vibrazioni**  
Tesi di dottorato. Sapienza – Università di Roma

© 2019 Dott. Daniele Pietrosanti. Tutti i diritti riservati

Email dell’autore: [daniele.pietrosanti@uniroma1.it](mailto:daniele.pietrosanti@uniroma1.it)

*Dedicata ai  
miei genitori*



*Quelli che s'innamoran di pratica senza scienza son  
come 'l nocchier ch'entra in navilio senza timone o  
bussola, che mai ha la certezza dove si vada.*

— Leonardo da Vinci (1452-1519)



## Sommario

In questa tesi si è contribuito all'avanzamento delle conoscenze sull'utilizzo di un innovativo dispositivo chiamato Inerter nel controllo delle vibrazioni di strutture tipiche dell'Ingegneria civile.

L'Inerter, nel caso ideale, è in grado di generare una forza proporzionale alla differenza di accelerazione tra i due suoi terminali e a una massa inerziale, chiamata inertanza. La principale caratteristica del dispositivo risiede nel fatto che la massa inerziale può essere anche ordini di grandezza maggiore rispetto a quella gravitazionale. Questo dispositivo è stato sviluppato per migliorare le prestazioni delle sospensioni nelle auto da corsa in Formula 1 e quindi per applicazioni tipiche dell'Ingegneria meccanica. Solo recentemente diversi autori ne hanno proposto l'utilizzo anche nell'Ingegneria civile che, a differenza di quella meccanica, è caratterizzata da sistemi di grandi dimensioni, con masse elevate.

In questa tesi in particolare, è stato studiato l'utilizzo dell'Inerter in strutture civili soggette ad azioni indirette alla base come quelle indotte dai terremoti. Il disaccoppiamento tra massa inerziale e massa gravitazione legato all'Inerter, infatti, risulta particolarmente interessante nel caso di azioni inerziali come quelle sismiche. Lo studio ha affrontato questo tema nella prima parte da un punto di vista teorico e nella seconda parte da un punto di vista sperimentale.

Nella prima parte, dal punto di vista teorico l'Inerter è stato studiato come elemento aggiuntivo ai tradizionali sistemi per il controllo delle vibrazioni al fine di migliorarne le prestazioni in termini di efficacia e robustezza. In particolare sono state studiate tre diverse configurazioni strutturali per le quali i tradizionali sistemi di controllo possono presentare degli inconvenienti e/o prestazioni non elevate, ovvero strutture multipiano a base fissa, strutture multipiano isolate alla base e strutture adiacenti.

Nel caso di strutture multipiano a base fissa è stato proposto l'utilizzo del dispositivo Inerter (massa gravitazionale piccola, ma inerziale elevata) insieme ai tradizionali sistemi Tuned Mass Damper (TMD) di tipo convenzionale (massa gravitazionale piccola) nella configurazione definita in letteratura come Tuned Mass Damper Inerter, TMDI. In letteratura sono presenti numerosi studi che dimostrano, sia da un punto di vista teorico sia sperimentale, come per avere sistemi TMD efficaci e robusti è necessaria un'elevata massa inerziale che si traduce in una massa gravitazionale elevata (TMD non convenzionale). Quindi attraverso l'utilizzo dell'Inerter è possibile ottenere un innovativo sistema a massa accordata, il TMDI, che risulta leggero, ma anche robusto ed efficace a seguito dell'elevato rapporto di massa inerziale. In questa configurazione, lo studio ha affrontato, attraverso la definizione di un sistema ridotto, il tema dell'allocazione ottimale, della progettazione ottimale e della valutazione delle prestazioni sia con azioni semplificate (rumore bianco) sia con azioni più realistiche (terremoti far-field e near-fault).

Nel caso di strutture multipiano isolate alla base (BIS) si propone l'utilizzo del sistema TMDI al fine di limitare gli spostamenti laterali del basamento senza incrementarne in modo significativo le accelerazioni. Lo studio ha affrontato i temi della progettazione ottimale e della valutazione delle prestazioni sia nel caso di azioni di tipo stocastico (rumore bianco e rumore bianco colorato) che nel caso di

accelerogrammi naturali (relativi a terremoti di tipo far-field e near-fault). L'attenzione è stata in inoltre rivolta all'influenza sia dello smorzamento del BIS sia delle caratteristiche dinamiche della sovrastruttura.

Infine, è stato studiato l'Inerter come elemento di collegamento di strutture adiacenti. In particolare è stata valutata l'influenza che tale dispositivo ha sulle caratteristiche dinamiche del sistema nel caso sia posto in parallelo a una connessione viscoelastica. L'attenzione è stata anche rivolta allo studio da un punto di vista analitico di sistemi difettivi, ovvero sistemi caratterizzati dalla coalescenza degli autovalori. Questi sistemi godono di proprietà dinamiche particolarmente interessanti al fine del controllo strutturale.

Nella seconda parte, sulla base degli studi teorici condotti, sono stati presentati i risultati legati a due diverse sperimentazioni dinamiche. In letteratura infatti le evidenze sperimentali legate all'utilizzo dell'Inerter per applicazioni tipiche dell'Ingegneria civile risultano limitate.

La prima sperimentazione è stata orientata alla caratterizzazione di un prototipo in scala di Inerter a pignone e cremagliera mediante test a spostamento armonico imposto. Sono stati indagati range di ampiezze e frequenze tipiche dell'Ingegneria civile al fine di poter valutare in che modo il comportamento meccanico del dispositivo si allontana rispetto a quello ideale.

La finalità della seconda sperimentazione su tavola vibrante è stata invece quella di valutare l'applicabilità, la fattibilità, la robustezza e l'efficacia del sistema di controllo TMDI nel ridurre lo spostamento di un sistema isolato senza incrementarne le accelerazioni. Il sistema di controllo è stato testato in diverse configurazioni e con diverse forzanti sia al fine di studiarne la risposta dinamica che di valutare l'influenza dei parametri inerziali.

Per entrambe le sperimentazioni sono stati definiti modelli numerici non lineari interpretativi e predittivi delle evidenze sperimentali.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Il controllo strutturale . . . . .	1
1.2	Sistemi di controllo passivo . . . . .	2
1.2.1	Sistemi di isolamento . . . . .	3
1.2.2	Dissipazione di energia . . . . .	4
1.2.3	Sistemi Tuned Mass Damper (TMD) . . . . .	5
1.3	Il dispositivo Inerter . . . . .	6
1.4	I sistemi di controllo basati sull’Inerter . . . . .	8
<b>I</b>	<b>Studi Teorici</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Configurazioni strutturali, metodi di analisi e progettazione ottimale di sistemi basati sull’Inerter</b>	<b>13</b>
2.1	Premessa . . . . .	13
2.2	Metodi di analisi . . . . .	15
2.2.1	Formulazione nello spazio di stato e analisi modale complessa	15
2.2.2	Modelli dell’azione sismica e risposta del sistema . . . . .	15
2.2.3	Valutazione dell’efficacia sismica dei sistemi di controllo . . .	17
2.3	Metodologie di progettazione ottimale del sistema di controllo . . . .	18
<b>3</b>	<b>Strutture multipiano a base fissa dotate di TMDI</b>	<b>21</b>
3.1	Premessa . . . . .	21
3.2	Definizione di un sistema ridotto generalizzato a 2-GDL . . . . .	21
3.2.1	Equazioni del moto . . . . .	21
3.2.2	Allocazione ottimale del sistema di controllo . . . . .	25
3.3	Progettazione ottimale del sistema di controllo . . . . .	26
3.3.1	Minimizzazione della varianza dello spostamento del sistema primario . . . . .	26
3.3.2	Minimizzazione della varianza dell’accelerazione del sistema primario . . . . .	28
3.3.3	Massimizzazione dell’Indice di Dissipazione di Energia (EDI)	29
3.4	Discussione dei risultati . . . . .	30
3.4.1	Confronto tra diverse metodologie di progettazione ottimale .	30
3.4.2	Valutazione delle prestazioni rispetto ai tradizionali sistemi TMD . . . . .	32
3.4.3	Analisi di sensitività . . . . .	35

3.5	Valutazione dell'efficacia sismica . . . . .	38
3.5.1	Terremoti far-field . . . . .	40
3.5.2	Terremoti near-fault . . . . .	44
3.6	Influenza dell'allocazione del sistema di controllo . . . . .	45
3.6.1	Indice di progetto e parametri ottimali . . . . .	46
3.6.2	Risposte del sistema primario e di controllo . . . . .	48
3.7	Conclusioni . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Strutture multipiano isolate alla base dotate di TMDI</b>	<b>53</b>
4.1	Premessa . . . . .	53
4.2	Definizione di sistemi ridotti generalizzati . . . . .	53
4.2.1	Sistema ridotto a $n+1+1$ gdl . . . . .	55
4.2.2	Sistema ridotto a $1+1+1$ gdl . . . . .	56
4.2.3	Sistema ridotto a $1+1$ gdl . . . . .	60
4.3	Progettazione ottimale e valutazione delle prestazioni di sistemi ad $1+1$ gdl soggetti ad eccitazioni tipo rumore bianco . . . . .	62
4.3.1	Progettazione ottimale basata sull'EDI di sistemi TMDI per i BIS . . . . .	62
4.3.2	Valutazione delle prestazioni al variare delle proprietà inerziali del TMDI . . . . .	65
4.3.3	Valutazione delle prestazioni al variare dello smorzamento del BIS . . . . .	68
4.4	Valutazione delle prestazioni di sistemi ad $1+1$ gdl progettati in modo ottimale e sottoposti ad azioni diverse dal rumore bianco . . . . .	70
4.4.1	Eccitazione stocastica di tipo rumore colorato . . . . .	71
4.4.2	Eccitazione deterministica con accelerogrammi naturali . . . . .	75
4.5	Progettazione ottimale e valutazione delle prestazioni di sistemi ad $1+1+1$ gdl soggetti ad eccitazioni di tipo rumore bianco . . . . .	78
4.5.1	Progettazione ottimale basata sull'EDI di sistemi TMDI per i BIS . . . . .	80
4.5.2	Valutazione delle prestazioni al variare della massa della sovrastruttura . . . . .	83
4.5.3	Valutazione delle prestazioni al variare della frequenza della sovrastruttura . . . . .	87
4.6	Conclusioni . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Strutture adiacenti collegate con connessioni basate sull'Inerter</b>	<b>95</b>
5.1	Premessa . . . . .	95
5.2	Posizione del problema ed equazioni del moto . . . . .	96
5.3	Analisi modale . . . . .	98
5.3.1	Connessione conservativa . . . . .	98
5.3.2	Connessione non conservativa . . . . .	100
5.4	Risultati dell'analisi modale con connessione conservativa . . . . .	101
5.4.1	Connessione con l'elemento Spring (SE) . . . . .	101
5.4.2	Connessione con l'elemento Inerter (IE) . . . . .	102
5.4.3	Connessione con gli elementi Spring-Inerter (SIE) . . . . .	104
5.5	Risultati dell'analisi modale con connessione non conservativa . . . . .	109

5.6	Analisi modale e parametri della connessione di sistemi difettivi . . .	115
5.7	Applicazioni . . . . .	122
5.7.1	Risultati delle oscillazioni libere . . . . .	123
5.7.2	Risultati delle oscillazioni forzate con eccitazione armonica alla base . . . . .	127
5.8	Conclusioni . . . . .	130
<b>II</b>	<b>Studi Sperimentali</b>	<b>135</b>
<b>6</b>	<b>Premessa</b>	<b>137</b>
<b>7</b>	<b>Prototipo di dispositivo Inerter</b>	<b>139</b>
7.1	Premessa . . . . .	139
7.2	Test sperimentali . . . . .	139
7.2.1	Modello sperimentale . . . . .	139
7.2.2	Setup sperimentale . . . . .	142
7.3	Analisi dei risultati . . . . .	144
7.3.1	Analisi parametrica sperimentale . . . . .	144
7.3.2	Definizione degli effetti non lineari nel prototipo . . . . .	152
7.4	Definizione di un modello numerico . . . . .	153
7.4.1	Modello dell'Inerter con gioco e componente dissipativa . . .	153
7.4.2	Identificazione dei parametri del modello . . . . .	155
7.5	Conclusioni . . . . .	157
<b>8</b>	<b>Sistema isolato a un grado di libertà dotato di TMDI</b>	<b>161</b>
8.1	Premessa . . . . .	161
8.2	Test su tavola vibrante . . . . .	161
8.2.1	Modello sperimentale . . . . .	161
8.2.2	Setup sperimentale . . . . .	163
8.3	Studio della risposta dinamica . . . . .	167
8.3.1	Influenza dell'ampiezza dell'azione e non linearità del sistema	167
8.3.2	Influenza delle proprietà inerziali del sistema di controllo . . .	176
8.4	Valutazione dell'efficacia sismica . . . . .	180
8.4.1	Azione di tipo rumore bianco casuale . . . . .	181
8.4.2	Accelerogrammi naturali . . . . .	182
8.5	Definizione di un modello numerico . . . . .	189
8.5.1	Modello numerico ed equazioni del moto . . . . .	190
8.5.2	Identificazione dei parametri e confronto numerico-sperimentale	191
8.6	Conclusioni . . . . .	192
<b>9</b>	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>	<b>195</b>



# Elenco delle figure

Figura 1.1.	Schema del sistema con controllo passivo. . . . .	1
Figura 1.2.	Schema del sistema con controllo attivo. . . . .	2
Figura 1.3.	Schema del sistema con controllo semi-attivo. . . . .	2
Figura 1.4.	Schema dei tradizionali sistemi di controllo passivo: (a) Isolamento alla base, (b) TMD convenzionale, (c) TMD non convenzionale, (d) controventi dissipativi e (e) strutture adiacenti.	3
Figura 1.5.	Rappresentazione schematica del dispositivo Inerter. . . . .	6
Figura 1.6.	Inerter meccanico a pignone e cremagliera: Schema (a sinistra) e foto del prototipo (a destra) [Papageorgiou et al., 2009]. . . . .	7
Figura 1.7.	Inerter meccanico a vite a ricircolo di sfere: Schema (a sinistra) e foto del prototipo (a destra) [Papageorgiou et al., 2009]. . . . .	7
Figura 1.8.	Inerter meccanico a volano planetario: Sezione (in alto) e foto del prototipo (in basso) [Ge e W. Wang, 2018]. . . . .	8
Figura 1.9.	Sistemi di controllo basati sull’Inerter: (a) Tuned Viscous Mass Damper (TVMD e Viscous Mass Damper, VMD, per $k_T \rightarrow \infty$ ) e (b) Tuned Mass Damper Inerter (TMDI e Tuned Inerter Damper, TID, per $m_T = 0$ ). . . . .	9
Figura 2.1.	Configurazioni strutturali dotate di sistemi di controllo basati sull’Inerter: (a) strutture multipiano a base fissa, (b) strutture multipiano isolate alla base, (c) strutture multipiano adiacenti. . . . .	14
Figura 3.1.	Struttura multipiano a N livelli dotata di sistema di controllo TMDI. . . . .	22
Figura 3.2.	Sistema generalizzato ad 1-GDL dotato di sistema di controllo TMDI. . . . .	23
Figura 3.3.	Casi particolari (a) $\phi_k = 0$ e (b) $\phi_k = 0$ del sistema generalizzato ad 1-GDL dotato di sistema di controllo TMDI. . . . .	26
Figura 3.4.	Progettazione ottimale del sistema di controllo con $OF = d_I$ al variare del parametro $\beta$ e per diversi valori del rapporto di massa $\mu$ : (a) valore minimo della $OF$ raggiunto $J_1$ e parametri di progetto ottimali (b) $\nu_{opt}$ e (c) $\xi_{Topt}$ . . . . .	27

Figura 3.5.	Progettazione ottimale del sistema di controllo con $OF = a_I$ al variare del parametro $\beta$ e per diversi valori del rapporto di massa $\mu$ : (a) valore minimo della $OF$ raggiunto $J_2$ e parametri di progetto ottimali (b) $\nu_{opt}$ e (c) $\xi_{Topt}$ . . . . .	28
Figura 3.6.	Progettazione ottimale del sistema di controllo con $OF = EDI$ al variare del parametro $\beta$ e per diversi valori del rapporto di massa $\mu$ : (a) valore minimo della $OF$ raggiunto $J_2$ e parametri di progetto ottimali (b) $\nu_{opt}$ e (c) $\xi_{Topt}$ . . . . .	29
Figura 3.7.	Varianza dello spostamento $d_I$ (a) e dell'accelerazione $a_I$ del sistema primario e varianza degli spostamenti relativi $d_{TI}$ (c) e $d_T$ (d) del sistema di controllo al variare del parametro $\beta$ e per diversi valori del rapporto di massa $\mu$ . . . . .	33
Figura 3.8.	Varianza dello spostamento del sistema primario $d_I$ al variare dei parametri di progetto $\nu$ e $\xi_T$ per diverse coppie dei parametri $\mu$ e $\beta$ . . . . .	36
Figura 3.9.	Varianza dell'accelerazione del sistema primario $a_I$ al variare dei parametri di progetto $\nu$ e $\xi_T$ per diverse coppie dei parametri $\mu$ e $\beta$ . . . . .	37
Figura 3.10.	Varianza dello spostamento relativo del sistema di controllo rispetto al suolo $d_T$ al variare dei parametri di progetto $\nu$ e $\xi_T$ per diverse coppie dei parametri $\mu$ e $\beta$ . . . . .	38
Figura 3.11.	Varianza dello spostamento relativo del sistema di controllo rispetto al sistema primario $d_{TI}$ al variare dei parametri di progetto $\nu$ e $\xi_T$ per diverse coppie dei parametri $\mu$ e $\beta$ . . . . .	39
Figura 3.12.	Indice di dissipazione di energia (EDI) al sistema primario $d_{TI}$ al variare dei parametri di progetto $\nu$ e $\xi_T$ per diverse coppie dei parametri $\mu$ e $\beta$ . . . . .	40
Figura 3.13.	Accelerogramma di Imperial Valley-El Centro. Storie temporali delle risposte del sistema primario in termini di spostamento $q_I$ (a) e accelerazione $\ddot{q}_I^{(tot)}$ (b) per vari valori dei parametri $\mu$ e $\beta$ . . . . .	43
Figura 3.14.	Accelerogramma di Tokachi-Oki-Hachinohe. Storie temporali delle risposte del sistema primario in termini di spostamento $q_I$ (a) e accelerazione $\ddot{q}_I^{(tot)}$ (b) per vari valori dei parametri $\mu$ e $\beta$ . . . . .	43
Figura 3.15.	Accelerogramma di Tokachi-Oki-Hachinohe. Storie temporali delle risposte del sistema di controllo in termini di spostamento $q_T$ (a) e $q_{TI}$ (b) per vari valori dei parametri $\mu$ e $\beta$ . . . . .	44
Figura 3.16.	Accelerogramma di Northridge-Sylmar-Olive View. Storie temporali delle risposte del sistema primario in termini di spostamento $q_I$ (a) e accelerazione $\ddot{q}_I^{(tot)}$ (b) per vari valori dei parametri $\mu$ e $\beta$ . . . . .	45
Figura 3.17.	Accelerogramma di Kobe-KJMA. Storie temporali delle risposte del sistema primario in termini di spostamento $q_I$ (a) e accelerazione $\ddot{q}_I^{(tot)}$ (b) per vari valori dei parametri $\mu$ e $\beta$ . . . . .	45

Figura 3.18. Accelerogramma di Kobe-KJMA. Storie temporali delle risposte del sistema di controllo in termini di spostamento $q_T$ (a) e $q_{TI}$ (b) per vari valori dei parametri $\mu$ e $\beta$ . . . . .	46
Figura 3.19. Indice di dissipazione di energia ( $EDI$ ) e parametri ottimali $\nu_{opt}$ e $\xi_{T,opt}$ al variare di $\beta$ e per diversi valori di $\phi_k$ e $\mu$ . . . . .	47
Figura 3.20. Quantità di risposta del sistema primario, $d_I$ e $a_I$ , e del sistema di controllo, $d_T$ e $d_{TI}$ , al variare di $\beta$ e per diversi valori di $\phi_k$ e $\mu$ . . . . .	48
Figura 4.1. Struttura multipiano a N livelli isolata alla base e dotata di sistema di controllo TMDI. . . . .	54
Figura 4.2. Sistema ridotto generalizzato a 1 + 1 + 1 gdl. . . . .	57
Figura 4.3. Sistema ridotto generalizzato a 1 + 1 gdl. . . . .	60
Figura 4.4. Illustrazione della convessità della funzione obiettivo EDI: (a) curve di livello e sezioni trasversali in corrispondenza dei parametri ottimali (b) $\xi_{T,opt}$ e (c) $\nu_{opt}$ ( $\xi_I = 0.15$ , $\mu = 0.05$ e $\beta = 0.2$ ). . . . .	63
Figura 4.5. Curve di livello degli indici di prestazione, Eq. 4.15, del BIS+TMDI nel piano $\nu - \xi_T$ ( $\xi_I = 0.15$ , $\mu = 0.05$ e $\beta = 0.2$ ). . . . .	64
Figura 4.6. Curve di livello del massimo valore dell'EDI nel piano di progetto inerziale $\mu - \beta$ per il sistema BIS+TMDI eccitato da azione di tipo rumore bianco ( $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	65
Figura 4.7. Curve di livello dei parametri ottimali, rapporto di frequenza $\nu_{opt}$ (a) e rapporto di smorzamento $\xi_{T,opt}$ (b), sul piano di progetto inerziale $\mu - \beta$ per il sistema BIS+TMDI eccitato da azione di tipo rumore bianco ( $\xi_I = 0.15$ ). Le curve di iso- $EDI$ di Fig. 4.6 sono sovrapposte. . . . .	66
Figura 4.8. Curve di livello degli indici di prestazione nel piano di progetto inerziale $\mu - \beta$ per il sistema BIS+TMDI eccitato da azione di tipo rumore bianco ( $\xi_I = 0.15$ ). Le curve di iso- $EDI$ di Fig. 4.6 sono sovrapposte. . . . .	67
Figura 4.9. Prestazioni di BIS+TMDI progettati secondo l'EDI soggetti ad azione di tipo rumore bianco al variare del rapporto di inertanza $\beta$ e per vari rapporti di smorzamento del BIS $\xi_I$ e rapporti di massa $\mu$ . . . . .	69
Figura 4.10. Spettri Kanai-Tajimi delle azioni di tipo HF-CN e LF-CN con indicazione delle pulsazioni naturali del BIS in assenza e presenza dei sistemi di controllo definiti in Fig. 4.6 per (a) $T_I = 1.5 s$ e (b) $T_I = 3 s$ ( $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	71
Figura 4.11. Curve di livello degli indici di prestazione, Eq. 4.15, nel piano inerziale $\mu - \beta$ per BIS+TMDI, progettati secondo l'EDI per azione di tipo rumore bianco, soggetti agli spettri Kanai-Tajimi di Fig. 4.10 con $T_I = 1.5 s$ (colonna di sinistra) e $T_I = 3 s$ (colonna di destra) ( $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	73

Figura 4.12. Prestazioni di BIS+TMDI, progettati secondo l'EDI per input rumore bianco, soggetti ad eccitazione alla base di tipo LF-CN al variare del rapporto di inertanza $\beta$ e per vari rapporti di smorzamento del BIS $\xi_I$ e rapporti di massa $\mu$ ( $T_I = 3 s$ ). . . . .	74
Figura 4.13. Imperial Valley-El Centro GM: Storie temporali dello spostamento relativo (a) e dell'accelerazione assoluta (b) del BIS, e degli spostamenti relativi della massa secondaria sia rispetto al suolo (c) che rispetto alla massa del BIS (d) ( $T_I = 3 s$ e $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	76
Figura 4.14. Tokachi-Oki-Hachinohe GM: Storie temporali dello spostamento relativo (a) e dell'accelerazione assoluta (b) del BIS, e degli spostamenti relativi della massa secondaria sia rispetto al suolo (c) che rispetto alla massa del BIS (d) ( $T_I = 3 s$ e $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	77
Figura 4.15. Irpinia-Sturno GM: Storie temporali dello spostamento relativo (a) e dell'accelerazione assoluta (b) del BIS, e degli spostamenti relativi della massa secondaria sia rispetto al suolo (c) che rispetto alla massa del BIS (d) ( $T_I = 3 s$ e $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	78
Figura 4.16. Kobe-KJMA GM: Storie temporali dello spostamento relativo (a) e dell'accelerazione assoluta (b) del BIS, e degli spostamenti relativi della massa secondaria sia rispetto al suolo (c) che rispetto alla massa del BIS (d) ( $T_I = 3 s$ e $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	79
Figura 4.17. Valore massimo dell'EDI al variare del rapporto di inertanza $\beta$ e per fissati valori del rapporto di massa $\mu$ ( $\mu_S = 1.5$ , $\nu_S = 3$ , $\xi_S = 0.02$ e $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	80
Figura 4.18. Parametri ottimali, (a) rapporto di frequenze $\nu_{opt}$ e (b) rapporto di smorzamento $\xi_{T,opt}$ , al variare del rapporto di inertanza $\beta$ e per fissati valori del rapporto di massa $\mu$ ( $\mu_S = 1.5$ , $\nu_S = 3$ , $\xi_S = 0.02$ e $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	81
Figura 4.19. Indici di prestazione cinematica in termini di (a) spostamento $d_I$ e (b) accelerazione $a_I$ del BIS al variare del rapporto di inertanza $\beta$ e per fissati valori del rapporto di massa $\mu$ ( $\mu_S = 1.5$ , $\nu_S = 3$ , $\xi_S = 0.02$ e $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	81
Figura 4.20. Indici di prestazione cinematica in termini di (a) spostamento $d_R$ e (b) accelerazione $a_S$ della sovrastruttura al variare del rapporto di inertanza $\beta$ e per fissati valori del rapporto di massa $\mu$ ( $\mu_S = 1.5$ , $\nu_S = 3$ , $\xi_S = 0.02$ e $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	82
Figura 4.21. Indici di prestazione cinematica in termini di spostamento (a) $d_T$ e (b) $d_{TI}$ della massa del sistema di controllo al variare del rapporto di inertanza $\beta$ e per fissati valori del rapporto di massa $\mu$ ( $\mu_S = 1.5$ , $\nu_S = 3$ , $\xi_S = 0.02$ e $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	83
Figura 4.22. Valore massimo dell'EDI e parametri ottimali $\nu_{opt}$ e $\xi_{T,opt}$ al variare del rapporto di inertanza $\beta$ e per fissati valori del rapporto di massa della sovrastruttura $\mu_S$ e del sistema di controllo $\mu$ ( $\nu_S = 3$ , $\xi_S = 0.02$ e $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	84

Figura 4.23. Indici di prestazione cinematica definiti nell'Eq. 4.10 al variare del rapporto di inertanza $\beta$ e per fissati valori del rapporto di massa della sovrastruttura $\mu_S$ e del sistema di controllo $\mu$ ( $\nu_S = 3$ , $\xi_S = 0.02$ e $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	86
Figura 4.24. Valore massimo dell'EDI e parametri ottimali $\nu_{opt}$ e $\xi_{T,opt}$ al variare del rapporto di inertanza $\beta$ e per fissati valori del rapporto di frequenze della sovrastruttura $\nu_S$ e del rapporto di masse $\mu$ ( $\mu_S = 1.5$ , $\xi_S = 0.02$ e $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	88
Figura 4.25. Indici di prestazione cinematica definiti nell'Eq. 4.10 al variare del rapporto di inertanza $\beta$ e per fissati valori del rapporto di frequenze della sovrastruttura $\nu_S$ e del rapporto di masse $\mu$ ( $\mu_S = 1.5$ , $\xi_S = 0.02$ e $\xi_I = 0.15$ ). . . . .	90
Figura 5.1. Modello meccanico - Connessione con elementi Spring-Dashpot-Inerter (SDIE). . . . .	96
Figura 5.2. Connessione con Spring Element (SE). Dominio (a) $\gamma_1 - \nu$ e (b) $\gamma_2 - \nu$ al variare di $\lambda$ e tipici modi naturali (c) $\phi_1$ e (d) $\phi_2$ ( $\mu = 0.2$ ). Le frecce nere indicano la tendenza delle curve all'aumentare di $\mu$ . . . . .	101
Figura 5.3. Connessione con Inerter Element (IE). Dominio (a) $\gamma_1 - \nu$ e (b) $\gamma_2 - \nu$ al variare di $\beta$ e tipici modi naturali (c) $\phi_1$ e (d) $\phi_2$ ( $\mu = 0.2$ ). Le frecce nere indicano la tendenza delle curve all'aumentare di $\mu$ . . . . .	103
Figura 5.4. Connessione con Spring-Inerter Elements (SIE). Regioni <i>I</i> – <i>III</i> per un fissato valore di $\mu$ nei domini (a) $\gamma_1 - \nu$ e (b) $\gamma_2 - \nu$ ( $\mu = 0.2$ e $\beta = 1$ ). Le frecce nere indicano l'andamento delle curve all'aumentare di $\mu$ . . . . .	104
Figura 5.5. Connessione con Spring-Inerter Elements (SIE). (a) Frequenze al variare del rapporto $\beta/\lambda$ per diversi valori di $\beta = 0.5, 1.0, 10.0$ e (b) modi naturali ( $\nu = 2$ e $\mu = 0.2$ ). Lo spessore delle linee aumenta con il rapporto di inertanza $\beta$ . . . . .	107
Figura 5.6. Connessione con Spring-Dashpot-Inerter Elements (SDIE). (a) Pseudo-frequenze e (b) fattori pseudo-smorzanti al variare del rapporto $\beta/\lambda$ . ( $\nu = 2$ , $\mu = 0.2$ , $\beta = 0.5$ e $\xi = 0, 0.15, 0.30, 0.6$ ). Lo spessore delle linee aumenta all'aumentare del rapporto di smorzamento $\xi$ . . . . .	110
Figura 5.7. (a) Rapporto $(\beta/\lambda)^*$ e rapporto di smorzamento $\xi^*$ , (b) pseudo-frequenze e (c) pseudo-smorzamenti al variare di $\beta$ ( $\nu = 2$ e $\mu = 0.2$ ). . . . .	114
Figura 5.8. Parametri della connessione (a) $\beta_0$ , (b) $\lambda_0$ , (c) $\xi_0$ al variare dei parametri $\nu_0$ e $\mu_0$ che realizzano un sistema difettivo. . . . .	118
Figura 5.9. Parametri modali (a) frequenze naturali, (b) fattori di smorzamento e (c) frequenze smorzate al variare di $\nu_0$ e $\mu_0$ in corrispondenza dei parametri della connessione di Fig. 5.8. . . . .	119

Figura 5.10.	Mappa dei sistemi difettivi realizzabili per fissati parametri strutturali $\mu_0$ e $\nu_0$ assumendo la massimizzazione del fattore di smorzamento modale come criterio per la scelta dei parametri della connessione. N.A.: non ammissibile. . . . .	121
Figura 5.11.	Storie temporali degli spostamenti del sistema in oscillazioni libere. (a) $\xi = 0$ , (b) $\xi < \xi^*$ , (c) $\xi = \xi^*$ e (d) $\xi > \xi^*$ . ( $\nu = 2$ , $\mu = 0.2$ , $\beta = 0.5$ e $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^* = 0.9$ , $\xi = 0, 0.15, 0.3, 0.6$ e $\xi^* = 0.3$ ). . . . .	124
Figura 5.12.	Storie temporali degli spostamenti del sistema in oscillazioni libere. (a) $\beta < \beta_{min}$ , (b) $\beta = \beta_{min}$ e (c) $\beta > \beta_{min}$ . ( $\nu = 2$ , $\mu = 0.2$ , $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^*$ , $\xi = \xi^*$ , $\beta = 0.05, 0.13, 0.5$ e $\beta_{min} = 0.13$ ). . . . .	125
Figura 5.13.	Storie temporali degli spostamenti del sistema in oscillazioni libere per $\nu_0 = 0.5$ . (a) Connessione DE ( $\mu_0 = 2$ ), (b) connessione SDE ( $\mu_0 = 0.2$ ), (c) connessione IDE ( $\mu_0 = 5$ ). . . . .	126
Figura 5.14.	Storie temporali degli spostamenti del sistema in oscillazioni libere per $\nu_0 = 2$ . (a) Connessione DE ( $\mu_0 = 0.5$ ), (b) connessione SDE ( $\mu_0 = 5$ ), (c) connessione IDE ( $\mu_0 = .2$ ). . . . .	127
Figura 5.15.	Funzioni di risposta in frequenza in termini di spostamento per il (a) primo e (b) secondo oscillatore al variare di $\xi$ ( $\nu = 2$ , $\mu = 0.2$ , $\beta = 0.5$ e $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^* = 0.9$ , $\xi = 0, 0.15, 0.3, 0.6$ e $\xi^* = 0.3$ ). . . . .	128
Figura 5.16.	Funzioni di risposta in frequenza in termini di spostamento per il (a) primo e (b) secondo oscillatore al variare di $\beta$ : $\beta < \beta_{min}$ , $\beta = \beta_{min}$ e $\beta > \beta_{min}$ . ( $\nu = 2$ , $\mu = 0.2$ , $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^*$ , $\xi = \xi^*$ , $\beta = 0.05, 0.13, 0.5$ e $\beta_{min} = 0.13$ ). . . . .	129
Figura 5.17.	Ampiezza delle funzioni di risposta in frequenza in termini di spostamento per $\nu_0 = 0.5$ . (a) Connessione DE ( $\mu_0 = 2$ ), (b) connessione SDE ( $\mu_0 = 0.2$ ), (c) connessione IDE ( $\mu_0 = 5$ ). . . . .	129
Figura 5.18.	Ampiezza delle funzioni di risposta in frequenza in termini di spostamento per $\nu_0 = 2$ . (a) Connessione DE ( $\mu_0 = 0.5$ ), (b) connessione SDE ( $\mu_0 = 5$ ), (c) connessione IDE ( $\mu_0 = 0.2$ ). . . . .	130
Figura 7.1.	Foto del prototipo di Inerter a pignone e cremagliera. . . . .	140
Figura 7.2.	Esploso del prototipo di Inerter a pignone e cremagliera. . . . .	140
Figura 7.3.	Schema dell'Inerter a pignone e cremagliera. . . . .	141
Figura 7.4.	Foto del setup sperimentale e disposizione sensori di misura. . . . .	143
Figura 7.5.	Schema del setup sperimentale e disposizione sensori di misura. . . . .	144
Figura 7.6.	Vista del setup sperimentale. . . . .	145
Figura 7.7.	Forza $f_B$ (a-c), spostamento $u_T$ (d-f) e accelerazione $\ddot{u}_T$ (g-h) al variare della frequenza $f$ dell'azione ( $b_2 = 47.9 kg$ e $A = 20 mm$ ). . . . .	146
Figura 7.8.	Legame costitutivo nel piano $f_B - u_T$ (a-c) e nel piano $f_B - \ddot{u}_T$ (d-f) al variare della frequenza $f$ dell'azione ( $b_2 = 47.9 kg$ e $A = 20 mm$ ). . . . .	147
Figura 7.9.	Forza $f_B$ (a-c), spostamento $u_T$ (d-f) e accelerazione $\ddot{u}_T$ (g-h) al variare dell'ampiezza $A$ dell'azione ( $b_2 = 47.9 kg$ e $f = 1 Hz$ ). . . . .	148

Figura 7.10. Legame costitutivo nel piano $f_B - u_T$ (a-c) e nel piano $f_B - \ddot{u}_T$ (d-f) al variare dell'ampiezza $A$ dell'azione ( $b_2 = 47.9 \text{ kg}$ e $f = 1 \text{ Hz}$ ). . . . .	149
Figura 7.11. Forza $f_B$ (a-c), spostamento $u_T$ (d-f) e accelerazione $\ddot{u}_T$ (g-h) al variare dell'inertanza del prototipo ( $f = 1 \text{ Hz}$ e $A = 20 \text{ mm}$ ). . . . .	150
Figura 7.12. Legame costitutivo nel piano $f_B - u_T$ (a-c) e nel piano $f_B - \ddot{u}_T$ (d-f) al variare dell'inertanza del prototipo ( $f = 1 \text{ Hz}$ e $A = 20 \text{ mm}$ ). . . . .	151
Figura 7.13. Confronto tra la curva di ammettenza ideale e quella sperimentale del prototipo testato nelle configurazioni (a) $b_2 = 47.9 \text{ kg}$ e (b) $b_3 = 95.6 \text{ kg}$ e per diverse ampiezze dell'azione ( $A = 10, 20, 30 \text{ mm}$ ). . . . .	152
Figura 7.14. Confronto teorico sperimentale tra la forza $f_B$ versus il tempo $t$ e lo spostamento $u_T$ per le configurazioni (a,c) $b_0 = 0 \text{ kg}$ e (b,d) $b_1 = 0.1 \text{ kg}$ soggette ad uno spostamento imposto di tipo armonico con onda triangolare ( $f = 1 \text{ Hz}$ e $A = 20 \text{ mm}$ ). . . . .	153
Figura 7.15. Modello numerico dell'Inerter. . . . .	154
Figura 7.16. Confronto tra la forza sperimentale $f_{B,exp}$ e quella teorica $f_{B,th}$ trasmessa da prototipo di Inerter nel caso di uno spostamento armonico sinusoidale imposto ( $f = 1 \text{ Hz}$ , $A = 20 \text{ mm}$ e configurazione $b_2 = 47.9 \text{ kg}$ ). . . . .	155
Figura 7.17. Storie temporali delle componenti alla forza $f_{B,th}$ di Fig. 7.16: (a) forza dell'Inerter $f_P$ e (b) forza d'attrito della guida della cremagliera $f_F$ ( $f = 1 \text{ Hz}$ , $A = 20 \text{ mm}$ e configurazione $b_2 = 47.9 \text{ kg}$ ). . . . .	156
Figura 7.18. Storie temporali della componente (a) elastica $T_{ES}$ e (b) viscosa $T_{DS}$ del momento torcente $T_P$ corrispondente alla forza $f_{B,th}$ di Fig. 7.16 ( $f = 1 \text{ Hz}$ , $A = 20 \text{ mm}$ e configurazione $b_2 = 47.9 \text{ kg}$ ). . . . .	157
Figura 7.19. Storie temporali della componente (a) inerziale $T_{BB}$ e (b) viscosa $T_{DB}$ del momento torcente $T_G$ corrispondente alla forza $f_{B,th}$ di Fig. 7.16 ( $f = 1 \text{ Hz}$ , $A = 20 \text{ mm}$ e configurazione $b_2 = 47.9 \text{ kg}$ ). . . . .	157
Figura 7.20. Storie temporali (a) del momento torcente $T_P$ e (b) dell'angolo di <i>backlash</i> $\theta_G - \theta_S$ corrispondente alla forza $f_{B,th}$ di Fig. 7.16 ( $f = 1 \text{ Hz}$ , $A = 20 \text{ mm}$ e configurazione $b_2 = 47.9 \text{ kg}$ ). . . . .	158
Figura 8.1. Modello fisico del sistema isolato alla base (BIS) dotato di TMDI: (a) Foto ed (b) esploso. . . . .	162
Figura 8.2. Isolatore in gomma ad alto smorzamento: (a) Pianta e (b) sezione A-A. . . . .	163
Figura 8.3. Foto del setup sperimentale e disposizione dei sensori di misura. . . . .	165
Figura 8.4. Schema del setup sperimentale e disposizione dei sensori di misura. . . . .	166
Figura 8.5. Vista del setup sperimentale. . . . .	167

Figura 8.6.	Sine sweep lineare. Storie temporali dello spostamento del BIS $u_I$ dell'andata e del ritorno al variare dell'ampiezza dell'azione ( $PGA = 0.05, 0.10, 0.15 g$ ) nelle configurazioni: (a-c) BIS e (d-f) BIS+TDMI ( $\beta_2 = 0.383$ e $\mu_2 = 0.080$ ). . . . .	168
Figura 8.7.	Sine sweep lineare. Curve di risposta in frequenza relative allo spostamento del BIS $u_I$ dell'andata e del ritorno al variare dell'ampiezza dell'azione ( $PGA = 0.05, 0.10, 0.15 g$ ) nelle configurazioni: (a-c) BIS e (d-f) BIS+TDMI ( $\beta_2 = 0.383$ e $\mu_2 = 0.080$ ). . . . .	169
Figura 8.8.	Sine sweep lineare. Storie temporali delle grandezze di risposta (a) spostamento $u_I$ , (b) accelerazione $\ddot{u}_I^{(tot)}$ e (c) forza $f_I$ del BIS nel caso non controllato al variare dell'ampiezza dell'azione. . . . .	170
Figura 8.9.	Sine sweep lineare. Storie temporali delle grandezze di risposta del BIS dotato del sistema TMDI nella configurazione di riferimento ( $\beta_2 = 0.383$ e $\mu_2 = 0.080$ ) al variare dell'ampiezza dell'azione. . . . .	171
Figura 8.10.	Sine sweep a blocchi. Curve di risposta in frequenza delle grandezze di risposta del sistema isolato con e senza sistema controllo TMDI di riferimento ( $\beta_2 = 0.383$ e $\mu_2 = 0.080$ ) al variare dell'ampiezza dell'azione (a-c) $PGA = 0.05 g$ e (d-f) $PGA = 0.10 g$ . . . . .	172
Figura 8.11.	Sine sweep a blocchi. Legami forza-spostamento, $f_I - u_I$ , in corrispondenza delle frequenze $f_1, f_0$ e $f_2$ nelle configurazioni con e senza TMDI ( $\beta_2 = 0.383$ e $\mu_2 = 0.080$ ) al variare dell'ampiezza dell'azione (a-c) $PGA = 0.05 g$ e (d-f) $PGA = 0.10 g$ . . . . .	173
Figura 8.12.	Sine sweep a blocchi. Legami forza-spostamento (a) $f_T - u_{TI}$ e (b) $f_B - u_T$ nella configurazione BIS+TMDI ( $\beta_2 = 0.383$ e $\mu_2 = 0.080$ ) in corrispondenza della frequenza dell'azione $f_1, f_0$ e $f_2$ ( $PGA = 0.10 g$ ). . . . .	174
Figura 8.13.	Sine sweep a blocchi. Spostamenti normalizzati $d_i(\bar{t})$ , con $i = I, T$ , dei gdl del BIS+TMDI ( $\beta_2 = 0.383$ e $\mu_2 = 0.080$ ) in corrispondenza delle frequenze (a) $f_1$ , (b) $f_0$ e (c) $f_2$ al variare del PGA dell'azione ( $PGA = 0.05, 0.10 g$ ). . . . .	175
Figura 8.14.	Sine sweep a blocchi. Curve di risposte in frequenze delle grandezze di risposta per diverse configurazioni testate al variare dell'inertanza ( $PGA = 0.10 g$ e $\mu_2 = 0.080$ ). . . . .	177
Figura 8.15.	Sine sweep a blocchi. Legami forza-spostamento (a) $f_I - u_I$ , (b) $f_T - u_{TI}$ e (c) $f_B - u_T$ , e forza-accelerazione (d) $f_B - \ddot{u}_T$ per diverse configurazioni testate al variare dell'inertanza ( $PGA = 0.10 g, f_0 = 2.35 Hz$ e $\mu_2 = 0.080$ ). . . . .	178
Figura 8.16.	Sine sweep a blocchi. Curve di risposte in frequenze delle grandezze di risposta per diverse configurazioni testate al variare della massa del sistema di controllo ( $PGA = 0.10 g$ e $\beta_2 = 0.383$ ). . . . .	179

Figura 8.17. Sine sweep a blocchi. Legami forza-spostamento (a)  $f_I - u_I$ , (b)  $f_T - u_{TI}$  e (c)  $f_B - u_T$ , e forza-accelerazione (d)  $f_B - \ddot{u}_T$  per diverse configurazioni testate al variare della massa del sistema di controllo ( $PGA = 0.10 g$ ,  $f_0 = 2.35 Hz$  e  $\beta_2 = 0.383$ ). . . . . 180

Figura 8.18. Rumore bianco casuale. Indici di prestazione in termini di varianza al variare del rapporto di inertanza  $\beta$  e per diversi valori del rapporto di massa  $\mu$  ( $\sigma_{\ddot{u}_G}^2 = 1.648 m^2/s^4$ ). . . . . 182

Figura 8.19. Accelerogrammi di Irpinia-Sturno (IRP) e Cape Mendocino-Petrolia (CAP). Indici di prestazione in termini di valore quadratico medio al variare del rapporto di inertanza  $\beta$  ( $\mu_2 = 0.080$  e  $PGA$  dell'azione riportato tra parentesi in legenda). 183

Figura 8.20. Accelerogrammi di Northridge-Sylmar-Olive View (NOR) e Kobe-KJMA (KOB). Indici di prestazione in termini di valore quadratico medio al variare del rapporto di inertanza  $\beta$  ( $\mu_2 = 0.080$  e  $PGA$  dell'azione riportato tra parentesi in legenda). . . . . 184

Figura 8.21. Accelerogrammi di Irpinia-Sturno (IRP) e Cape Mendocino-Petrolia (CAP). Indici di prestazione in termini di valore di picco al variare del rapporto di inertanza  $\beta$  ( $\mu_2 = 0.080$  e  $PGA$  dell'azione riportato tra parentesi in legenda). . . . . 185

Figura 8.22. Accelerogrammi di Northridge-Sylmar-Olive View (NOR) e Kobe-KJMA (KOB). Indici di prestazione in termini di valore di picco al variare del rapporto di inertanza  $\beta$  ( $\mu_2 = 0.080$  e  $PGA$  dell'azione riportato tra parentesi in legenda). . . . . 186

Figura 8.23. Accelerogramma di Kobe-KJMA. Storie temporali in termini di (a) spostamento  $u_I$ , (b) accelerazione  $\ddot{u}_I^{tot}$  e (c) forza  $f_I$  del BIS con e senza sistema di controllo TMDI ( $PGA = 0.24 g$ ,  $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ). . . . . 186

Figura 8.24. Accelerogramma di Irpinia-Sturno. Storie temporali in termini di (a) spostamento  $u_I$ , (b) accelerazione  $\ddot{u}_I^{tot}$  e (c) forza  $f_I$  del BIS con e senza sistema di controllo TMDI ( $PGA = 0.39 g$ ,  $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ). . . . . 187

Figura 8.25. Accelerogrammi di Imperial Valley-El Centro (ELC) e Tokachi-Oki-Hachinohe (HAC). Indici di prestazione in termini di valore quadratico medio al variare del rapporto di inertanza  $\beta$  ( $\mu_2 = 0.080$  e  $PGA$  dell'azione riportato tra parentesi in legenda). . . . . 188

Figura 8.26. Accelerogrammi di Imperial Valley-El Centro (ELC) e Tokachi-Oki-Hachinohe (HAC). Indici di prestazione in termini di valore di picco al variare del rapporto di inertanza  $\beta$  ( $\mu_2 = 0.080$  e  $PGA$  dell'azione riportato tra parentesi in legenda). 189

Figura 8.27. Accelerogramma di Imperial Valley-El Centro. Storie temporali in termini di (a) spostamento  $u_I$ , (b) accelerazione  $\ddot{u}_I^{tot}$  e (c) forza  $f_I$  del BIS con e senza sistema di controllo TMDI ( $PGA = 1.10 g$ ,  $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ). . . . . 189

- 
- Figura 8.28. Modello numerico a 2 gdl interpretativo delle evidenze sperimentali del sistema isolato dotato di TMDI di Fig. 8.1. . . . 190
- Figura 8.29. Confronto tra le curve di risposta in frequenza sperimentali e numeriche nel caso di azione di tipo sine sweep a blocchi per il sistema di controllo nella configurazione di riferimento ( $PGA = 0.10 g$ ,  $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ). . . . . 192

# Elenco delle tabelle

Tabella 2.1. Lista degli accelerogrammi registrati durante i <i>ground motions</i> (GMs) utilizzati al fine di valutare l'efficacia sismica dei sistemi di controllo. . . . .	17
Tabella 3.1. Proprietà e grandezze di risposta del sistema generalizzato ad 1-GDL+TMDI . . . . .	23
Tabella 3.2. Parametri ottimali per diversi valori delle coppie $\mu$ e $\beta$ . Tra parentesi sono riportati, rispettivamente i corrispondenti valori dei parametri $\tilde{\nu}_{opt}$ e $\tilde{\xi}_{Topt}$ . . . . .	32
Tabella 3.3. Quantità di risposta del sistema primario e di controllo e indici EDI per diverse metodologie di progetto e per diversi valori delle coppie $\mu$ e $\beta$ . . . . .	34
Tabella 3.4. Indici di prestazione $\hat{I}_1 - \hat{I}_4$ delle risposte in termini di valore quadratico medio per diversi valori delle coppie $\mu$ e $\beta$ . . . . .	41
Tabella 3.5. Indici di prestazione $I_1 - I_4$ delle risposte in termini di valore di picco per diversi valori delle coppie $\mu$ e $\beta$ . . . . .	42
Tabella 4.1. Definizione dei parametri del sistema ridotto generalizzato al variare del numero $n$ di modi di vibrare della sovrastruttura considerati. . . . .	56
Tabella 5.1. Parametri del sistema e della connessione, $i = 1, 2$ . . . . .	96
Tabella 5.2. Relazioni di dualità per i parametri del sistema e della connessione, $i = 1, 2$ . . . . .	98
Tabella 5.3. Espressioni analitiche delle frequenze e dei modi naturali per le connessioni con gli elementi Spring-Inerter (SIE), con l'elemento Spring (SE) e con l'elemento Inerter (IE). . . . .	99
Tabella 5.4. Quantità modali. . . . .	100
Tabella 5.5. Parametri modali per diversi rapporti di smorzamento $\xi$ ( $\nu = 2$ , $\mu = 0.2$ , $\beta = 0.5$ e $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^* = 0.9$ ), $i = 1, 2$ . . . . .	112
Tabella 5.6. Parametri della connessione $(\beta/\lambda)^*$ e $\xi^*$ e quantità modali del sistema per diverse coppie dei parametri strutturali ( $\beta = 0.5$ ), $i = 1, 2$ . . . . .	113
Tabella 5.7. Parametri modali per diversi valori di $\beta$ ( $\nu = 2$ e $\mu = 0.2$ ), $i = 1, 2$ . . . . .	114
Tabella 5.8. Espressioni in forma chiusa per i parametri della connessione, selezionando il minimo valore ammissibile del rapporto di inerzia. . . . .	118

Tabella 5.9. Casi studio: valori assunti per i parametri del sistema e corrispondenti quantità modali. . . . .	123
Tabella 7.1. Caratteristiche geometriche e meccaniche dei componenti che costituiscono il prototipo di Inerter ( $n$ è il numero di ingranaggi utilizzati per realizzare il volano). . . . .	141
Tabella 8.1. Lista delle configurazioni testate. . . . .	163

# Capitolo 1

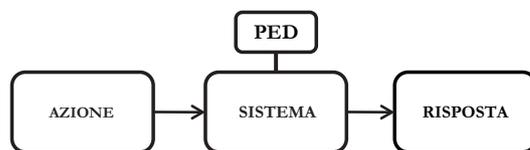
## Introduzione

### 1.1 Il controllo strutturale

Negli ultimi decenni, il tema del controllo strutturale sta suscitando sempre maggiore interesse nello studio di sistemi in grado di ridurre la risposta dinamica di edifici e ponti soggetti ad azioni esterne come il vento e i terremoti. Inoltre, gli sforzi intrapresi al fine di far diventare questi sistemi di controllo una tecnologia praticabile ne hanno permesso una notevole diffusione in un'ampia varietà di strutture. La nuova filosofia progettuale infatti si sta orientando sempre di più all'utilizzo di sistemi di controllo strutturale e non più all'affidamento esclusivo delle prestazioni dei materiali costruttivi come invece avveniva in passato.

Il controllo strutturale prevede l'utilizzo di sistemi in grado di ridurre la risposta dinamica di strutture soggette ad azioni come ad esempio quella sismica. Anche se la suddivisione tra le diverse tecnologie di controllo strutturale non è univoca [Symans e Constantinou, 1999 e Soong e Spencer, 2002], generalmente i sistemi di controllo strutturale vengono classificati in sistemi di controllo passivo, attivo, ibido e semi-attivo.

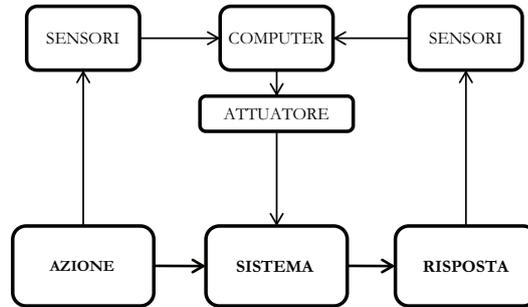
I sistemi per il controllo passivo, opportunamente allocati nella struttura, non richiedono una sorgente di energia esterna per il loro funzionamento, ma sviluppano forze di controllo utilizzando esclusivamente il movimento relativo tra le parti in cui è posizionato prodotte dal moto della struttura. In Fig. 1.1 si riporta lo schema di un sistema dotato di un generico sistema passivo di dissipazione di energia (Passive Energy Dissipation, PDE).



**Figura 1.1.** Schema del sistema con controllo passivo.

I sistemi per il controllo attivo, Fig. 1.2, invece richiedono una significativa sorgente di potenza esterna per il loro funzionamento. L'energia viene utilizzata per applicare alla struttura forze di controllo variabili nel tempo al fine di contrastare le forze derivanti dall'azione esterna e quindi ottenerne riduzioni sostanziali della

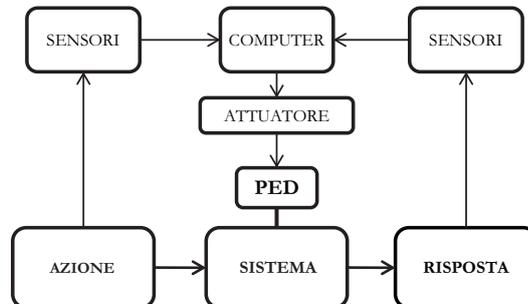
risposta dinamica. Le forze di controllo sono generate da un sistema di attuatori comandati da un algoritmo di controllo le cui decisioni si basano sul *feedback* proveniente da un sistema di sensori che misurano in tempo reale la risposta della struttura e/o sulle informazioni *feedforward* provenienti dalla misura dell'eccitazione. Il sistema è complesso e richiede notevoli erogazioni di potenza durante l'azione di controllo.



**Figura 1.2.** Schema del sistema con controllo attivo.

I sistemi di controllo ibrido sono generalmente sistemi che utilizzano in maniera combinata sistemi di controllo attivo e passivo.

Infine i sistemi di controllo semi-attivo, Fig. 1.3, richiedono per operare piccole sorgenti di potenza esterna (ordini di grandezza più basse rispetto a quelle che si usano nel controllo attivo) necessarie per regolare nel tempo le caratteristiche meccaniche dei dispositivi che lo compongono e quindi la corrispondente forza di controllo. Resta quindi necessario l'algoritmo di controllo, il *feedback* proveniente dal sistema di sensori che misurano in tempo reale la risposta della struttura e/o le informazioni *feedforward* provenienti dalla misura dell'eccitazione.



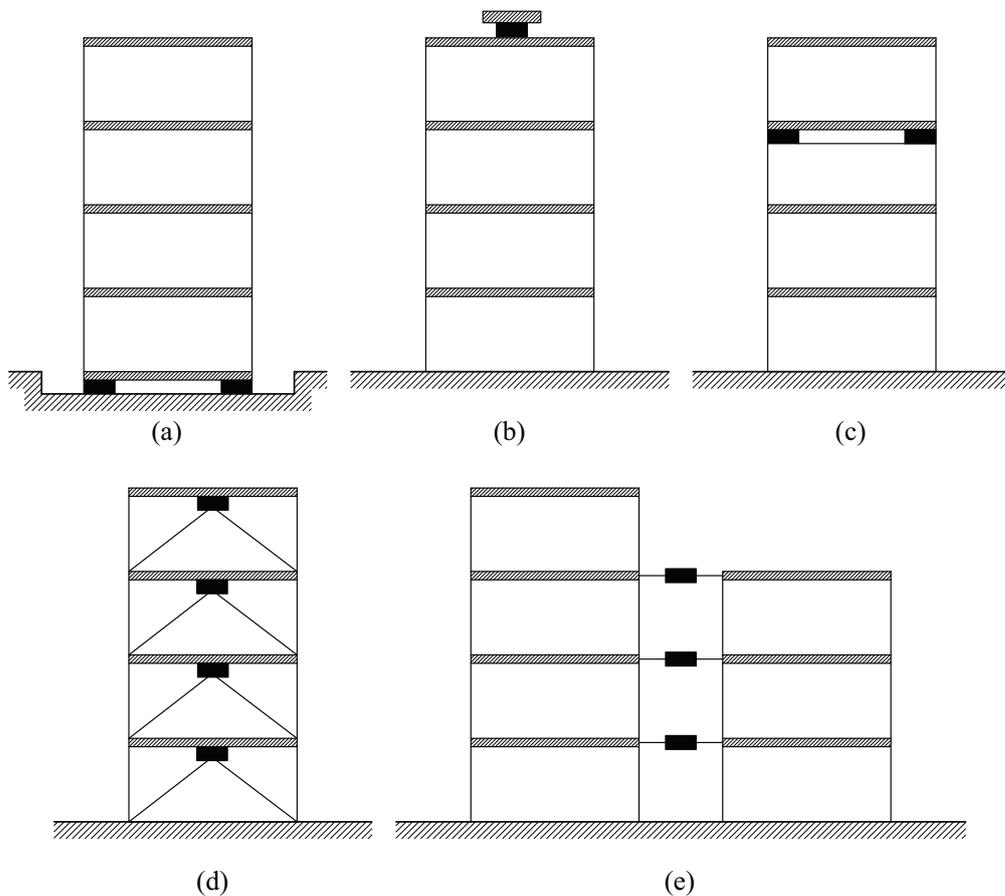
**Figura 1.3.** Schema del sistema con controllo semi-attivo.

## 1.2 Sistemi di controllo passivo

Per applicazioni tipiche dell'Ingegneria civile, risultano tipicamente praticabili i soli sistemi di controllo passivo e semi-attivo. Nel seguito si farà riferimento solo ai sistemi passivi, lasciando da parte quelli semi-attivi che, a fronte del vantaggio di richiedere piccole erogazioni di potenza, mantengono comunque una elevata complessità di gestione e manutenzione.

Le tecnologie di controllo passivo si possono dividere in:

- sistemi di isolamento [Soong e Costantinou, 2014, Basili e De Angelis, 2014, Reggio e De Angelis, 2013 e Reggio e De Angelis, 2014];
- dissipazione di energia [Basili e De Angelis, 2007b, Basili e De Angelis, 2007a, Basili, De Angelis e Fraraccio, 2013, Symans, Charney et al., 2008 e Ciampi et al., 1995];
- sistemi a massa accordata (o Tuned Mass Damper, TMD) [Housner et al., 1997 e Soong e Costantinou, 2014].



**Figura 1.4.** Schema dei tradizionali sistemi di controllo passivo: (a) Isolamento alla base, (b) TMD convenzionale, (c) TMD non convenzionale, (d) controventi dissipativi e (e) strutture adiacenti.

### 1.2.1 Sistemi di isolamento

Negli ultimi tre decenni, l'isolamento alla base è diventata una strategia di controllo delle vibrazioni passiva ampiamente diffusa per proteggere i ponti (ad es. [Kunde e Jangid, 2003]), gli edifici (ad es. [Warn e Ryan, 2012 e Reggio e De Angelis,

2015), strutture strategiche (ad es. [De Angelis, Giannini et al., 2010, Paolacci et al., 2013 e Whittaker e Kumar, 2014]) e componenti sensibili secondari posizionati all'interno di strutture (ad es. [Reggio e De Angelis, 2013 e Reggio e De Angelis, 2014]) da vibrazioni orizzontali indotte dal terremoto. Si basa sulla disconnessione mediante isolatori elastomerici e/o a scorrimento tra la struttura/oggetto da proteggere (sovrastuttura) e il suo basamento/fondazione al fine di limitare il trasferimento dell'energia di input sulla sovrastuttura, Fig. 1.4 (a). Questa disposizione realizza un sistema isolato alla base (BIS) con un periodo naturale fondamentale significativamente più grande rispetto alla struttura a base fissa (cioè non isolata). Di conseguenza, il BIS, rispetto a strutture non isolate, risulta eccitato da azioni sismiche/inerziali sensibilmente inferiori con valori massimi delle accelerazioni notevolmente ridotte nel caso delle tipiche eccitazioni indotte dai terremoti. Inoltre, il lungo periodo fondamentale di vibrare tipico dei BIS comporta che il sistema isolamento e struttura si comportino come un unico corpo rigido, riducendo quindi anche le deformazioni nella sovrastuttura (ad esempio, i drift di interpiano negli edifici). Tuttavia, tutti questi vantaggi di cui sopra comportano considerevoli spostamenti del basamento che possono essere dannosi per la stabilità degli isolatori e per l'integrità generale dei BIS.

Questi elevati spostamenti del basamento possono risultare critici nel caso di terremoti caratterizzati da un elevato contenuto energetico alle basse frequenze che possono entrare in risonanza con il periodo fondamentale del BIS (ad esempio, [Jangid e Kelly, 2001]), mentre l'uso di un supplementare smorzatore viscoso per mitigare questi spostamenti eccessivi comporta un incremento dell'accelerazione massima sulla sovrastuttura [Kelly, 1999]. Una maggiore risposta in accelerazione, infatti, è dannosa per le apparecchiature secondarie (sensibili) ospitate in edifici isolati dalla base, per i veicoli che viaggiano sui ponti durante gli eventi sismici e per le risposte di oggetti isolati dalla base. L'isolamento alla base, quindi, è una strategia ben nota e matura per ridurre le vibrazioni di edifici multipiano, ma può incontrare, in pratica, importanti limitazioni tecniche come la larghezza del giunto sismico necessario per consentire i grandi spostamenti laterali e l'impraticabilità nel caso di edifici medio-alti a causa della loro flessibilità [Naeim e Kelly, 1999].

### 1.2.2 Dissipazione di energia

I sistemi di controllo basati sulla dissipazione di energia convogliano l'energia di input in specifici dispositivi (denominati dissipatori o smorzatori), opportunamente collocati nella struttura, al fine di essere dissipata in modo stabile ed efficace anche per piccole ampiezze di vibrazione. Infatti l'incremento artificiale delle capacità dissipative della struttura ha tipicamente un effetto favorevole di riduzione della risposta strutturale.

In particolare i dissipatori possono essere inseriti all'interno della stessa struttura o fra strutture contigue (ovvero parti strutturalmente indipendenti della stessa struttura, ma caratterizzate da proprietà dinamiche diverse). Relativamente alla prima situazione i dissipatori sono collegati in opportune posizioni della struttura al fine di essere sottoposti a spostamenti e velocità relative (il caso più tipico è quello dei cosiddetti controventi dissipativi, Fig. 1.4 (d), in cui i dissipatori sono inseriti in sistemi di controvento e dissipano energia nello spostamento relativo fra

due piani successivi di una struttura intelaiata [Ciampi et al., 1995]). Nella seconda situazione i dissipatori sono inseriti in modo tale da dissipare energia nel moto relativo tra le due strutture (i casi più tipici sono le connessioni di strutture adiacenti [Basili e De Angelis, 2007b], Fig. 1.4 (e)).

L'idea di accoppiare strutture adiacenti con dispositivi in grado di ridurre la loro risposta dinamica nel caso di eccitazioni esterne è ampiamente diffusa nella teoria del controllo. In questo contesto, diversi autori affrontano il problema con modelli completi, [Zhu et al., 2011, Bigdeli et al., 2016, Basili, De Angelis e Fraccacio, 2013, Palacios-Quinonero et al., 2014 e Basili e De Angelis, 2017] mentre altri assumono modelli ridotti [Basili e De Angelis, 2007b e Greco e Marano, 2016]. La connessione è generalmente descritta con modelli reologici in grado di simulare il comportamento reale dei dispositivi industriali. In genere, in caso di dispositivi passivi, il collegamento è studiato con elementi molla e smorzatore, con comportamento lineare o non lineare [Vittozzi et al., 2017, Reggio e De Angelis, 2013 e Zhang e Xu, 2000].

### 1.2.3 Sistemi Tuned Mass Damper (TMD)

Il Tuned Mass Damper (TMD), tipicamente lineare e realizzato attraverso una massa ausiliaria, una molla e uno smorzatore viscoso, permette di convertire l'energia di input in energia cinetica legata al movimento della massa ausiliaria e/o in energia dissipata dallo smorzatore viscoso. Questo sistema di controllo ha ricevuto, nel corso degli anni, una notevole attenzione, grazie agli indiscutibili vantaggi che offre, come il funzionamento e la manutenzione, l'affidabilità e l'efficacia, e i bassi costi di implementazione [Soong e Constantinou, 2014]. Frahm ha proposto la prima applicazione di un sistema TMD [Frahm, 1909]: una massa secondaria collegata con una molla lineare a un sistema ad un grado di libertà eccitato armonicamente. Con l'opportuna accordatura, tale sistema è stato in grado di ridurre le vibrazioni di un oscillatore elementare anche se in una banda di frequenze molto ristretta. Per superare questo inconveniente, Ormondroyd e Den Hartog [Ormondroyd e Den Hartog, 1946] hanno proposto di collegare la massa secondaria al sistema ad un grado di libertà mediante una connessione in parallelo di una molla e di uno smorzatore viscoso e in questo caso il TMD è risultato efficace in una banda di frequenze maggiore. Tra le diverse metodologie per l'accordatura e la progettazione ottimale di una TMD, una delle più comuni è quella basata sulla teoria dei punti fissi [Den Hartog, 1985]. Per un fissato valore della massa secondaria, i parametri meccanici della molla e dello smorzatore sono accordati riducendo al minimo lo spostamento della struttura primaria, schematizzata come un oscillatore elementare, eccitata armonicamente. Di conseguenza, le funzioni di risposta in frequenza dello spostamento sono caratterizzate da due punti fissi la cui posizione è indipendente dallo smorzamento. Nel 2002, Nishihara e Asami [Nishihara e Asami, 2002] determinano una soluzione in forma chiusa dei parametri ottimali del TMD per la metodologia di accordatura ottimale basata sulla teoria dei punti fissi.

Per estendere il concetto del TMD alle applicazioni dell'Ingegneria civile, è stato necessario sviluppare metodologie di progettazione ottimale che tengano in conto la natura non deterministica e multifrequenza delle azioni esterne come quelle ambientali, il vento e il terremoto. In questi casi, di solito per la progettazione ottimale si

ipotizza che l'input sia di tipo rumore bianco e si minimizza una funzione obiettivo di tipo statistico (varianza, valore quadratico medio, ecc...) relativa ad una grandezza di risposta della struttura primaria (spostamento, accelerazione). Soluzioni a forma chiusa in caso di sistemi primari non smorzati possono essere trovati in [Warburton, 1982]. Invece, esistono teorie diverse in merito all'efficacia dei sistemi TMD nel ridurre la risposta nel caso di azioni sismiche. Gli autori indicano tre importanti limitazioni in merito all'efficacia sismica della TMD: (i) la mancanza di robustezza nel caso di variazioni dei parametri di progetto [Soto-Brito e Ruiz, 1999]; (ii) l'elevata dipendenza dal contenuto di frequenza dei terremoti [C. Lin et al., 2001]; e (iii) la natura impulsiva dei terremoti [Song e Dargush, 1997].

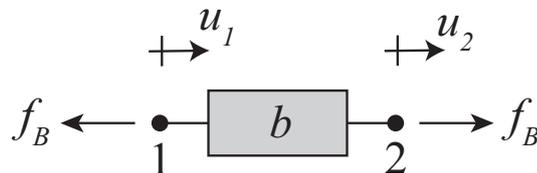
In letteratura i sistemi a massa accordata possono essere distinti in TMD convenzionali e non convenzionali. Diversamente da un TMD convenzionale, che consiste nell'aggiunta di una piccola massa ausiliaria, Fig. 1.4 (b), un TMD non convenzionale è realizzato utilizzando o convertendo masse già presenti sulla struttura (ad esempio sistemi a tetto scorrevole [Tian et al., 2008 e Tronci et al., 2017], piani superiori segmentati [Ziyaeifar e Noguchi, 1998]) in masse accordate [De Angelis, Perno et al., 2012 e Reggio e De Angelis, 2015], Fig. 1.4 (c). Un TMD non convenzionale è in grado di raggiungere elevati valori di rapporto massa, valori che è stato dimostrato essere in grado di aumentare l'efficacia e la robustezza del TMD in ambito sismico; risulta, infatti, particolarmente robusto alle variazioni dei parametri di progetto e alle variazioni del contenuto in frequenza del terremoto [De Angelis, Perno et al., 2012 e Reggio e De Angelis, 2015].

### 1.3 Il dispositivo Inerter

Recentemente è stato proposto un nuovo dispositivo meccanico a due terminali, Fig. 1.5, chiamato Inerter [Smith, 2002]. Nel caso ideale, l'Inerter è in grado di generare una forza  $f_B$  proporzionale alla differenza di accelerazione tra i due suoi terminali e ad una massa inerziale, chiamata inertanza  $b$ :

$$f_B = b(\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1) \quad (1.1)$$

dove  $u_1$  e  $u_2$  sono le coordinate di spostamento dei due terminali e il punto sopra il simbolo indica la differenziazione rispetto al tempo  $t$ . La principale caratteristica del dispositivo risiede nel fatto che la massa inerziale può essere anche ordini di grandezza maggiore rispetto a quella gravitazionale.



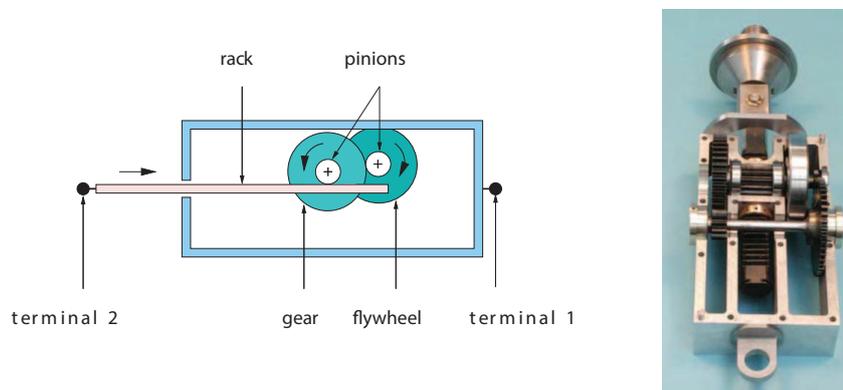
**Figura 1.5.** Rappresentazione schematica del dispositivo Inerter.

Dal punto di vista tecnologico i prototipi di Inerter si possono dividere in dispositivi passivi e semi-attivi. Alla categoria dei dispositivi passivi appartengono

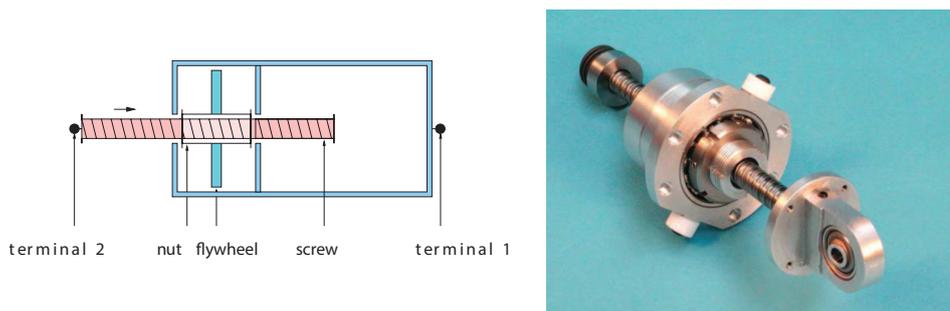
gli Inerter meccanici (a pignone e cremagliera [Papageorgiou et al., 2009], a vite a ricircolo di sfere [F. Wang et al., 2009 e Papageorgiou et al., 2009] e a volano planetario [Ge e W. Wang, 2018]), mentre a quella dei dispositivi semi-attivi appartengono quelli elettro-idraulici [Li e Liang, 2012 e Gartner e Smith, 2013] e gli Inerter elettro-magnetici [Nakamura et al., 2014].

Nell'Ingegneria Civile risultano attrattivi gli Inerter meccanici di tipo passivo, dal momento che non richiedono l'apporto di energia esterna per il loro funzionamento.

Nel caso di Inerter meccanici a pignone e cremagliera, Fig. 1.6, e a vite a ricircolo di sfere 1.7, l'inertanza è ottenuta dalla rotazione di un volano. Nel primo caso la traslazione relativa tra i terminali viene convertita in una rotazione del volano utilizzando un meccanismo a pignone e cremagliera, mentre nel secondo caso mediante una vite a ricircolo di sfere.

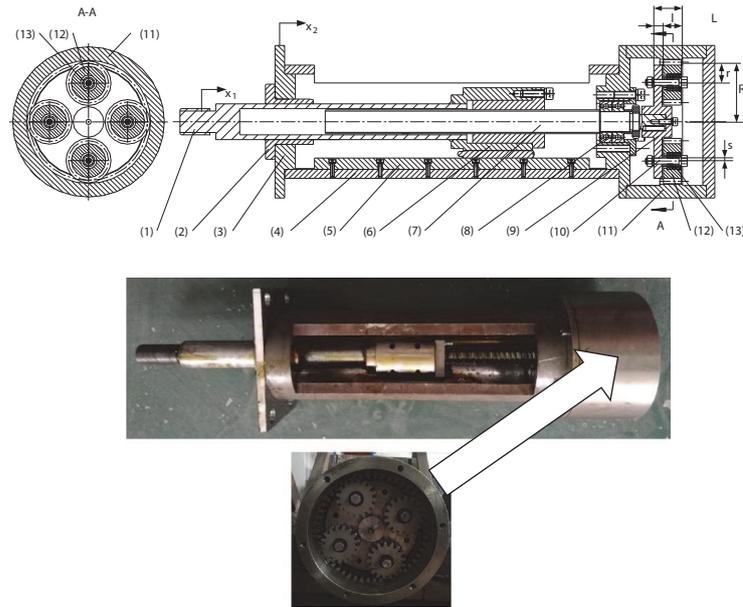


**Figura 1.6.** Inerter meccanico a pignone e cremagliera: Schema (a sinistra) e foto del prototipo (a destra) [Papageorgiou et al., 2009].



**Figura 1.7.** Inerter meccanico a vite a ricircolo di sfere: Schema (a sinistra) e foto del prototipo (a destra) [Papageorgiou et al., 2009].

Invece, l'Inerter meccanico a volano planetario, Fig. 1.8, è composto da una serie di ingranaggi planetari montati sull'asse del volano. Quando l'asse del volano ruota, guidato dal sistema a vite e a ricircolo di sfere, ogni ingranaggio planetario genera una forza legata al moto di rotazione e rivoluzione dello stesso che risulta proporzionale alla differenza di accelerazione tra i due terminali del dispositivo.



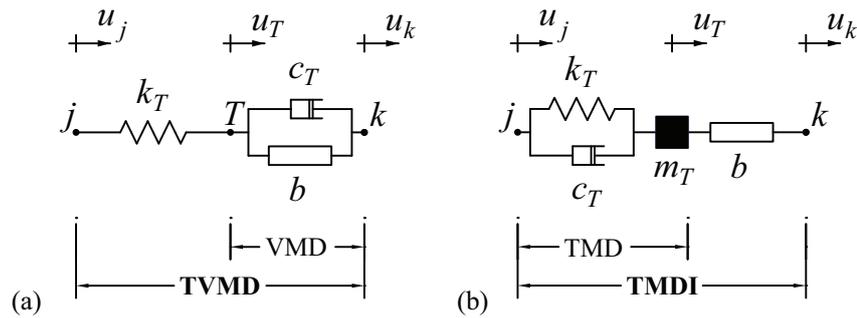
**Figura 1.8.** Inerter meccanico a volano planetario: Sezione (in alto) e foto del prototipo (in basso) [Ge e W. Wang, 2018].

## 1.4 I sistemi di controllo basati sull’Inerter

Le potenzialità del dispositivo Inerter lo rendono particolarmente interessante nel controllo delle vibrazioni insieme a sistemi a masse accordate.

Infatti, nel 2012, Ikago et al. [Ikago et al., 2012] hanno proposto il sistema di controllo Tuned Viscous Mass Damper (TVMD), Fig. 1.9 (a), per a una struttura ad un grado di libertà soggetta ad un’eccitazione armonica alla base, ottenendo una soluzione in forma chiusa per la progettazione ottimale del sistema di controllo. Nel 2013, Garrido et al. [Garrido et al., 2013] hanno proposto il Rotational Inertia Double-Tuned Mass Damper (RIDTMD) per un sistema ad un grado di libertà con forzante armonica, ricavando numericamente i parametri di progetto ottimale del sistema. Nel 2014, Lazar et al. [Lazar et al., 2014] ha proposto il Tuner Inerter Damper (TID), Fig. 1.9 (b) con  $m_T = 0$ , all’interno di un edificio multipiano. Infine, aggiungendo ad un TMD convenzionale (massa ausiliaria gravitazione piccola e uguale a quella inerziale) un dispositivo Inerter (massa gravitazionale piccola, ma inerziale elevata) è possibile ottenere un sistema di controllo leggero, denominato in letteratura Tuned Mass Damper Inerter, TMDI [Marian e Giaralis, 2014 e Pietrosanti et al., 2017], Fig. 1.9 (b), ad elevato rapporto di massa inerziale, robusto e con prestazioni superiori a quelle dei sistemi TMD non convenzionali.

Al momento da un punto di vista teorico, le principali applicazioni dei sistemi di controllo basati sull’Inerter, sono: (i) strutture multipiano soggette ad azioni sismiche a base fissa [Lazar et al., 2014 e Giaralis e Taflanidis, 2018] e isolata [De Domenico e Ricciardi, 2018], (ii) controllo delle vibrazioni di strutture adiacenti [Basili, De Angelis e Pietrosanti, 2017 e Basili, De Angelis e Pietrosanti, 2018], (iii) edifici alti soggetti ad azioni del vento [Giaralis e Petrini, 2017], (iv) controllo delle vibrazioni di stralli di ponti strallati [Lazar et al., 2016] e (iv) protezione sismica di



**Figura 1.9.** Sistemi di controllo basati sull'Inerter: (a) Tuned Viscous Mass Damper (TVMD e Viscous Mass Damper, VMD, per  $k_T \rightarrow \infty$ ) e (b) Tuned Mass Damper Inerter (TMDI e Tuned Inerter Damper, TID, per  $m_T = 0$ ).

statue [Siami et al., 2018].

Dal momento che l'utilizzo del dispositivo Inerter per applicazioni tipiche l'Ingegneria civile è stato solo recentemente proposto, lo stato dell'arte su sperimentazioni di prototipi di Inerter o sistemi di controllo basati sull'Inerter orientati a questo genere di applicazioni è abbastanza limitato. Infatti sono presenti evidenti sperimentali su prototipi di Inerter per applicazioni tipiche l'Ingegneria meccanica che però risulta caratterizzata da dimensioni dei dispositivi, range di frequenza e ampiezze dell'azione molto diverse.

L'obiettivo di questa tesi è quello di contribuire all'avanzamento delle conoscenze sull'utilizzo dell'Inerter nelle tradizionali tecniche passive per il controllo delle vibrazioni, ovvero i sistemi TMD, l'isolamento alla base e la dissipazione di energia nelle strutture adiacenti. In particolare nella Parte I verranno trattati gli aspetti teorici legati a questi tre diversi sistemi di controllo, mentre nella Parte II verranno presentati i risultati dei sperimentazioni condotte al fine di validare i risultati teorici, dal momento che le evidenze sperimentali orientate all'utilizzo dell'Inerter per applicazioni tipiche dell'Ingegneria civile sono limitate.



Parte I  
Studi Teorici



## Capitolo 2

# Configurazioni strutturali, metodi di analisi e progettazione ottimale di sistemi basati sull’Inerter

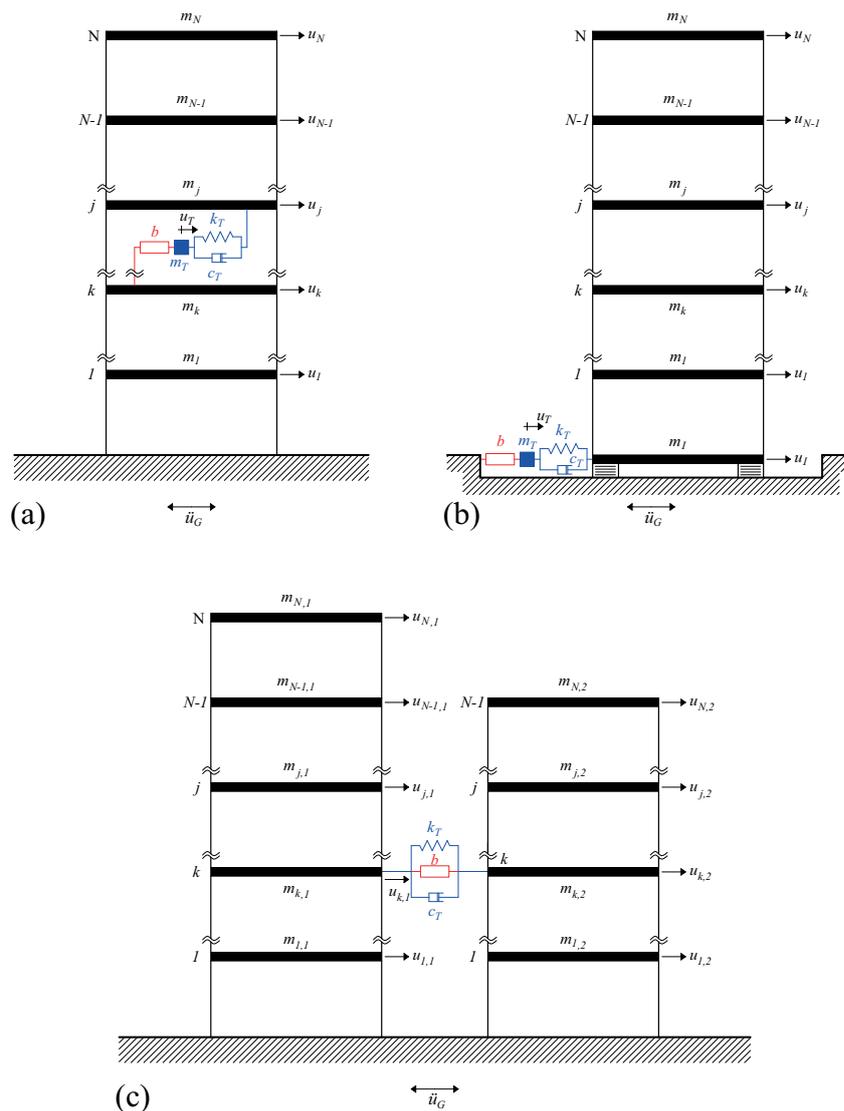
### 2.1 Premessa

Nella prima parte della tesi si riportano i risultati relativi agli studi teorici condotti sull’utilizzo dell’Inerter, insieme ai tradizionali sistemi per il controllo strutturale, al fine di ridurre la risposta di strutture eccitate alla base. Infatti, il disaccoppiamento tra la massa inerziale e quella gravitazionale legata all’utilizzo dell’Inerter rendono questo dispositivo particolarmente attrattivo nel caso di azioni indirette come quelle sismiche. In particolare è stato studiato l’utilizzo dell’Inerter nelle tre diverse configurazioni strutturali riportate in Figura 2.1.

Nelle prime due configurazioni studiate, ovvero strutture multipiano a base fissa e isolate alla base, Figg. 2.1 (a-b), si propone l’aggiunta del dispositivo Inerter a un tradizionale sistema TMD al fine di realizzare un sistema di controllo TMDI caratterizzato da un elevato rapporto di massa inerziale e un modesto rapporto di massa gravitazionale.

A differenza dei tradizionali sistemi a massa accordata, il TMDI è caratterizzato da due terminali esterni e uno interno nel quale è presente una massa ausiliaria (se la massa tende a zero il sistema di controllo degenera nel sistema noto in letteratura come Tuned Inerter Damper, TID) che possono essere collegati in modo opportuno nella struttura da proteggere. In questo studio, nel caso di strutture a base fissa il TMDI è collegato tra due diversi piani della struttura da proteggere, mentre nel caso di strutture isolate alla base il sistema di controllo è collegato tra il basamento e con un terminale dell’Inerter collegato a terra.

Nel caso di strutture multipiano a base fissa (presentata nel Capitolo 3), Fig. 2.1 (a), l’obiettivo che si vuole perseguire è quello di ridurre la risposta dinamica mediante l’utilizzo di sistemi a masse accordate innovati e basati sull’Inerter (come il TMDI o il TID) che, rispetto ai tradizionali sistemi TMD, risultano leggeri, efficaci e robusti. Invece, nel caso di strutture multipiano isolate alla base (presentata nel



**Figura 2.1.** Configurazioni strutturali dotate di sistemi di controllo basati sull’Inerter: (a) strutture multipiano a base fissa, (b) strutture multipiano isolate alla base, (c) strutture multipiano adiacenti.

Capitolo 4), Fig. 2.1 (b), l’obiettivo è quello di ridurre gli spostamenti laterali del basamento che in alcune situazioni possono risultare eccessive.

Infine, la terza configurazione (presentata nel Capitolo 5), Fig. 2.1 (c), si riferisce al caso di strutture adiacenti nelle quali al fine di ridurne la risposta dinamica si propone il collegamento mediante il dispositivo Inerter posto in parallelo ad una tradizionale connessione viscoelastica.

Nel seguito, prima di procedere alla trattazione dei temi in precedenza descritti, sono state riassunte le metodologie di analisi e di progettazione ottimale del sistema di controllo che risultano comuni a questa prima parte.

## 2.2 Metodi di analisi

### 2.2.1 Formulazione nello spazio di stato e analisi modale complessa

Le equazioni del moto di un sistema dinamico lineare stazionario, anche detto sistema lineare tempo-invariante possono essere formulate nello spazio di stato nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}e(t) \\ \boldsymbol{\theta}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}e(t)\end{aligned}\quad (2.1)$$

dove  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  sono rispettivamente la matrice di stato, il vettore degli input, la matrice degli output e il vettore di legame diretto input-output (in questi problemi tipicamente nullo),  $\mathbf{z}(t)$  e  $\boldsymbol{\theta}(t)$  sono rispettivamente il vettore di stato e il vettore degli output e  $e(t)$  è l'azione applicata al sistema.

I sistemi dinamici studiati nei successivi capitoli generalmente risultano essere sistemi non classicamente smorzati. Per tali sistemi per ottenere le proprietà modali, si è ricorsi all'analisi modale complessa attraverso la formulazione al primo ordine in precedenza descritto, definita come:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) \quad (2.2)$$

che ammette soluzione in forma esponenziale  $\mathbf{z}(t) = \boldsymbol{\psi}e^{st}$ . La soluzione del problema agli autovalori è:

$$(\mathbf{A} - s\mathbf{I})\boldsymbol{\psi} = 0 \quad (2.3)$$

dove  $s_i, \bar{s}_i = \alpha_i \pm j\delta_i$  e  $\boldsymbol{\psi}_i, \bar{\boldsymbol{\psi}}_i = \boldsymbol{\phi}_i \pm j\boldsymbol{\chi}_i$  sono rispettivamente l'autovalore e l'autovettore definiti come in [Chopra, 2015], con  $i = 1, \dots, N$ , dove  $N$  corrisponde al numero di gdl del sistema, e con  $j$  l'unità immaginaria ( $j = \sqrt{-1}$ ). A partire dagli autovalori è possibile ricavare le pseudo-frequenze naturali  $\gamma_i$  e gli pseudo-fattori di smorzamento  $\eta_i$  associate all' $i$ -esimo modo di vibrare, valutate come  $\gamma_i = \sqrt{s_i\bar{s}_i}$  e  $\eta_i = -\text{Re}(s_i)/\sqrt{s_i\bar{s}_i}$ .

Le pseudo-frequenze naturali, nel seguito chiamate frequenze naturali per brevità, sono ordinate dalla più piccola alla più grande e gli pseudo-fattori di smorzamento, chiamati fattori di smorzamento, sono ordinati in accordo alle frequenze naturali.

### 2.2.2 Modelli dell'azione sismica e risposta del sistema

In alcune situazioni, modellare l'accelerazione al suolo  $\ddot{u}_g$  come un processo stocastico stazionario di rumore Gaussiano bianco (white noise, WN) a media nulla, caratterizzato da una densità spettrale di potenza costante e pari a  $S_{\ddot{u}_g} = S_0$ , può fornire importanti indicazioni sull'influenza dei parametri del sistema, oltre ad essere ritenuto un input adeguato per la fase di progettazione del sistema di controllo [Reggio e De Angelis, 2015].

Se il processo di input è stazionario e ha media nulla come in questo caso, e, se le condizioni iniziali sono nulle, il vettore di risposta  $\mathbf{z}(t)$  associato al processo Gaussiano è completamente descritto dalla matrice di covarianza  $\mathbf{G}_{\mathbf{z}\mathbf{z}} = E[\mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t)^T]$ , dove il simbolo  $E[\cdot]$  è l'operatore valore atteso. Concentrandosi sulla risposta allo stazionario, la matrice di covarianza soddisfa l'equazione di Lyapunov [Y. Lin, 1967]

$$\mathbf{A}\mathbf{G}_{\mathbf{z}\mathbf{z}} + \mathbf{G}_{\mathbf{z}\mathbf{z}}\mathbf{A}^T + 2\pi S_0\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

Risolviendo numericamente l'Eq. 2.4, è possibile valutare la matrice di covarianza  $\mathbf{G}_{zz}$  dalla quale è possibile ricavare le varianze  $\sigma_{\theta_j}^2$  della j-esima variabile di output contenuta nel vettore  $\boldsymbol{\theta}(t)$  attraverso la seguente relazione:

$$\sigma_{\theta_j}^2 = \mathbf{n}_j \mathbf{C} \mathbf{G}_{zz} \mathbf{C}^T \mathbf{n}_j^T \quad (2.5)$$

dove  $\mathbf{n}_j$  è un vettore riga di zeri ad eccezione del j-esimo elemento che invece risulta pari ad uno.

Modellare l'azione come rumore bianco tiene in conto la natura probabilistica di un terremoto, ma trascura la dipendenza dall'eccitazione dal contenuto in frequenza, quindi al fine di valutare le prestazioni dei sistemi di controllo progettati con l'azione di tipo rumore bianco, si può ricorrere ad input più realistici ovvero si può modellare l'azione come un processo stocastico stazionario di rumore Gaussiano colorato (colored noise, CN) a media nulla. Nel seguito la funzione densità spettrale di potenza del rumore colorato, nel dominio della frequenza circolare  $\omega$  è espressa come:

$$S_g(\omega) = S_{KT}(\omega) S_{CP}(\omega) S_0 \quad (2.6)$$

dove  $S_{KT}(\omega)$  e  $S_{CP}(\omega)$  sono rispettivamente i filtri Kanai-Tajimi [Kanai, 1957 e Tajimi, 1960] e Clough-Penzier [Clough e Penzien, 1993] definiti dalle seguenti relazioni:

$$S_{KT}(\omega) = \frac{\omega_g^4 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \quad ; \quad S_{CP}(\omega) = \frac{\omega^4}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_f^2 \omega_f^2 \omega^2} \quad (2.7)$$

Nella precedente equazione i parametri del filtro Kanai-Tajimi  $\omega_g$  e  $\zeta_g$  rappresentano rispettivamente la frequenza circolare di risonanza e il fattore di smorzamento dello strato di suolo, modellato come un oscillatore ad 1 gdl lineare smorzato, sottoposto ad un'azione, ipotizzata di tipo rumore bianco con intensità spettrale  $S_0$ , proveniente dallo strato roccioso sottostante. Inoltre, i parametri del filtro Clough-Penzier  $\omega_f$  e  $\zeta_f$  controllano la frequenza di taglio e la "pendenza" del filtro passa alto utilizzato per sopprimere il contenuto a bassa frequenza presente nel filtro Kanai-Tajimi che risulta non realistico per le azioni sismiche. Il modello di eccitazione nell'Eq. 2.6 può essere scritto nello spazio di stato come:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_g \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_g w(t) \\ \ddot{q}_g(t) &= \mathbf{C}_g \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

dove  $\mathbf{x}(t) = [x_g \quad x_f \quad \dot{x}_g \quad \dot{x}_f]^T$  è il vettore di stato del modello di azione del suolo con  $x_g$  la risposta/uscita del primo filtro (Kanai-Tajimi) e  $x_f$  la risposta/uscita del secondo filtro (Clough-Penzier),  $w(t)$  è l'azione di tipo rumore Gaussiano bianco dello strato roccioso a varianza unitaria e a media nulla, e

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_g^2 & -2\zeta_g \omega_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_g^2 & -2\zeta_g \omega_g & -\omega_f^2 & -2\zeta_f \omega_f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

e  $\mathbf{C}_g = S_0/g^2[-\omega_g^2 \quad -2\zeta_g \omega_g \quad \omega_f^2 \quad 2\zeta_f \omega_f]$ .

I precedenti modelli del sistema e di azione del suolo, definiti rispettivamente dalle Equazioni 2.1 e 2.8, possono essere facilmente combinati nello spazio di stato in un unico modello definito delle seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{y}(t) + \mathbf{B}_c w(t) \\ \boldsymbol{\varphi}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{y}(t)\end{aligned}\quad (2.10)$$

dove  $\mathbf{y}(t) = [\mathbf{z}^T(t) \quad \mathbf{x}(t)^T]^T$  è il vettore di stato del sistema con il modello di azione del suolo definito nell'eq. (2.6),  $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\theta}(t)$  è il vettore di output e

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{C}_g \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D}\mathbf{C}_g \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Il modello combinato definito nell'equazione (2.10) risulta eccitato da un'azione di tipo rumore bianco e per questo, la corrispondente matrice di covarianza,  $\mathbf{G}_{\mathbf{yy}} = E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^T]^T$ , soddisfa la seguente equazione di Lyapunov nel caso di condizioni iniziali nulle

$$\mathbf{A}_c \mathbf{G}_{\mathbf{yy}} + \mathbf{G}_{\mathbf{yy}} \mathbf{A}_c^T + 2\pi S_0 \mathbf{B}_c \mathbf{B}_c^T = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

L'ultima equazione può essere risolta numericamente al fine di calcolare  $\mathbf{G}_{\mathbf{yy}}$  e la varianza  $\sigma_{\varphi_j}^2$  relativa alla  $j$ -esima variabile di output di interesse può essere calcolata come

$$\sigma_{\varphi_j}^2 = \mathbf{m}_j \mathbf{C}_c \mathbf{G}_{\mathbf{yy}} \mathbf{C}_c^T \mathbf{m}_j^T \quad (2.13)$$

nello stesso modo descritto in precedenza per l'azione di tipo rumore bianco, dove  $\mathbf{m}_j$  è un vettore riga di zeri ad eccezione del  $j$ -esimo elemento che invece risulta pari ad uno.

### 2.2.3 Valutazione dell'efficacia sismica dei sistemi di controllo

Nel seguito l'efficacia sismica dei sistema di controllo sono state valutate non solo con azioni stocastiche di tipo rumore bianco o colorato, ma anche attraverso accelerogrammi naturali registrati durante i *ground motions* (GMs). La lista degli accelerogrammi registrati è riportata in Tabella 2.1.

Evento	Magnitudo	Stazione di registrazione	PGA	Tipologia GM
Irpinia, Italy (1980)	6.9	Sturno	0.232	Near-fault
Cape Mendocino, CA (1992)	7.0	Petrolia	0.615	Near-fault
Northridge, CA (1994)	6.7	Sylmar - Olive View	0.568	Near-fault
Kobe, Japan (1995)	6.9	KJMA	0.345	Near-fault
Imperial Valley, CA (1940)	7.0	El Centro Array # 9	0.315	Far-field
Tokachi-Oki, Japan (1968)	7.9	Hachinohe	0.229	Far-field

**Tabella 2.1.** Lista degli accelerogrammi registrati durante i *ground motions* (GMs) utilizzati al fine di valutare l'efficacia sismica dei sistemi di controllo.

### 2.3 Metodologie di progettazione ottimale del sistema di controllo

In questo paragrafo verrà discussa la metodologia di progettazione ottimale del sistema di controllo (TMDI, TID e TMD) al fine di mitigare la risposta dinamica del sistema primario da proteggere soggetto ad una azione alla base. Nei successivi capitoli la progettazione del sistema di controllo è condotta su modelli ridotti ed eccitati da azioni stocastiche stazionarie a media nulla di tipo rumore bianco. Come tipicamente fatto in letteratura, si assumono che i parametri del sistema da proteggere risultino noti, mentre quelli relativi al sistema di controllo assumono il significato di parametri di progetto. In particolare, facendo riferimento al sistema di controllo più generale TMDI, il problema di progettazione ottimale coinvolge quattro parametri di progettazione tra loro indipendenti, ovvero il rapporto di frequenza e il fattore di smorzamento raggruppati nel vettore  $\mathbf{u}_1 = [\nu, \xi_T]^T$ , e i rapporti di massa e di inerzia raggruppati nel vettore  $\mathbf{u}_2 = [\mu, \beta]^T$ . Il problema di ottimizzazione consiste nel determinare i parametri di progettazione ottimale  $\mathbf{u}_1$  che minimizzano/massimizzano una determinata funzione obiettivo (objective function, OF) per fissati valori dei parametri  $\mathbf{u}_2$ . Da un punto di vista matematico questo problema di ottimizzazione può essere formulato nel seguente modo:

$$\underset{\mathbf{u}_1}{\text{find min/max}} [OF(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2)] \quad \text{con} \quad \mathbf{u}_1^{\min} \leq \mathbf{u}_1 \leq \mathbf{u}_1^{\max} \quad (2.14)$$

ed è stato risolto numericamente, utilizzando algoritmi di ricerca numerica implementati in MATLAB® [The MathWorks Inc., 2019], per determinare i parametri di progettazione ottimali in  $\mathbf{u}_1$  delimitati all'interno di un intervallo di ricerca predefinito  $[\mathbf{u}_1^{\min}, \mathbf{u}_1^{\max}]$  per diversi valori dati dei parametri in  $\mathbf{u}_2$ .

Nel seguito, sono state considerate tre diverse metodologie di progettazione ottimale, definite da un criterio di minimizzazione/massimizzazione di una determinata funzione obiettivo (OF) nello spazio dei parametri  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$ . Gli indici di ciascuna metodologia di progettazione ottimale possono essere formulati in forma sintetica nel seguente modo:

$$J_j = \text{min/max} [OF_j(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2)] \quad \text{con} \quad j = 1 - 3 \quad (2.15)$$

In particolare sono state utilizzate le seguenti tre funzioni obiettivo:

- (a) Varianza dello spostamento relativo del sistema primario,  $OF_1 = d_I$

La prima metodologia minimizza la varianza dello spostamento relativo del sistema primario che significa ridurre gli sforzi nel sistema. I parametri ottimali sono selezionati minimizzando  $d_I$ :

$$J_1 = \text{min} [OF_1(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2)] \quad (2.16)$$

- (b) Varianza dell'accelerazione assoluta del sistema primario,  $OF_2 = a_I$

La seconda metodologia minimizza la varianza dell'accelerazione assoluta del sistema primario, che ha come obiettivo incrementare i livelli di confort nella struttura. I parametri ottimali sono selezionati minimizzando  $a_I$ :

$$J_2 = \text{min} [OF_2(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2)] \quad (2.17)$$

(c) Indice di dissipazione di energia (Energy dissipation index),  $OF_3 = EDI$

La terza metodologia è ispirata su un criterio di tipo energetico [Reggio e De Angelis, 2015]. L'idea è quella che le performance del sistema si controllo risultano le migliori se questo riesce a dissipare la maggiore energia rispetto all'energia totale di input indotta dall'azione dinamica. I parametri ottimali sono selezionati massimizzando l'indice  $EDI$ :

$$J_3 = \max [OF_3(\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2)] \quad (2.18)$$

dove l'indice  $EDI$  risulta quindi definito come:

$$EDI = \frac{ED_T}{ED} \leq 1 \quad (2.19)$$

dove  $ED$  è l'energia totale di input, mentre  $ED_T$  è l'energia dissipata nel sistema di controllo.



## Capitolo 3

# Strutture multipiano a base fissa dotate di TMDI

### 3.1 Premessa

In questo capitolo è presentato lo studio sull'utilizzo dell'innovativo sistema di controllo TMDI al fine di mitigare la risposta dinamica di strutture civili come edifici multipiano a base fissa soggetti ad accelerazioni applicate alla base (sisma).

Nello studio è stato definito un sistema ridotto generalizzato a due gradi di libertà attraverso il quale è stato possibile definire una procedura per l'allocazione ottimale e la progettazione ottimale del sistema di controllo mediante tre metodologie di progettazione ottimale (due di letteratura ed una di tipo energetico). Le prestazioni del sistema TMDI sono state confrontate con quelle dei tradizionali sistemi TMD sia convenzionali e non convenzionali.

Tale ricerca ha prodotto il seguente lavoro che è stato pubblicato sulla rivista internazionale *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* [Pietrosanti et al., 2017]<sup>1</sup>.

### 3.2 Definizione di un sistema ridotto generalizzato a 2-GDL

#### 3.2.1 Equazioni del moto

Al fine di controllare la risposta dinamica della struttura multipiano a N livelli, Fig. 3.1, si propone l'inserimento del sistema di controllo TMDI collegato al  $j$ -esimo livello della struttura attraverso una molla e uno smorzatore lineare e collegato al  $k$ -esimo livello della struttura attraverso un Inerter lineare.

Le equazioni del moto, considerando solo la componente di traslazione orizzontale, relative alla struttura multipiano (ipotizzata piana, di tipo shear-type e con masse concentrate ai livelli) dotata di TMDI e soggetta ad una accelerazione alla base  $\ddot{u}_g$  possono essere scritte nel seguente modo:

---

<sup>1</sup>D. Pietrosanti, M. De Angelis and M. Basili, Optimal design and performance evaluation of systems with Tuned Mass Damper Inerter (TMDI), *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* (2017); 46 (8): 1367–1388. DOI: 10.1002/eqe.2861.

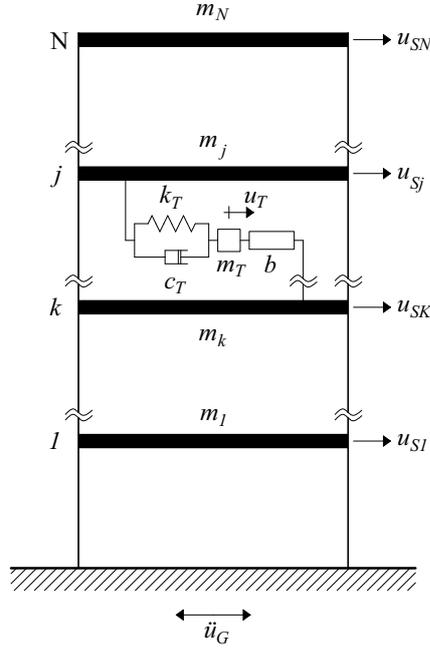


Figura 3.1. Struttura multipiano a N livelli dotata di sistema di controllo TMDI.

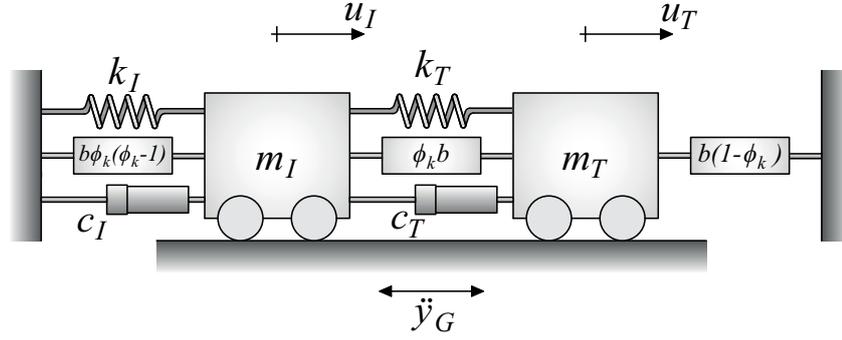
$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{u}}_S + \mathbf{L}_S \dot{\mathbf{u}}_S + \mathbf{K}_S \mathbf{u}_S &= -\mathbf{M}_S \boldsymbol{\tau}_S \ddot{u}_g + \mathbf{B}_k f_B + \mathbf{B}_j f_T \\
 m_T \ddot{u}_T &= -m_T \ddot{u}_g - f_B - f_T \\
 f_B &= b(\ddot{u}_T - \ddot{u}_k) \quad f_T = c_T(\dot{u}_T - \dot{u}_j) + k_T(u_T - u_j)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

dove per la struttura  $\mathbf{M}_S$ ,  $\mathbf{L}_S$  e  $\mathbf{K}_S$  indicano rispettivamente le matrici ( $N \times N$ ) di massa, smorzamento e rigidità e  $\mathbf{u}_S$  è il vettore ( $N \times 1$ ) degli spostamenti relativi al suolo. Invece  $b$ ,  $m_T$ ,  $c_T$  e  $k_T$  sono rispettivamente l'inertanza, la massa, il coefficiente di smorzamento e la rigidità del sistema di controllo TMDI e  $u_T(t)$  indica lo spostamento relativo della massa  $m_T$  rispetto al suolo. Inoltre,  $\boldsymbol{\tau}_S$  è il vettore ( $N \times 1$ ) di trascinarsi i cui elementi in questo caso sono tutti unitari,  $f_B(t)$  è la forza trasmessa dal dispositivo Interter sul  $k$ -esimo grado di libertà della struttura,  $f_T(t)$  è la forza trasmessa dalla connessione visco-elastica sul  $j$ -esimo grado di libertà della struttura e  $\mathbf{B}_k$  e  $\mathbf{B}_j$  sono i corrispondenti vettori ( $N \times 1$ ) di allocazione. Il punto sopra i simboli indica la derivata rispetto al tempo  $t$ .

Assumendo che la struttura sia classicamente smorzata e che il vettore dello spostamento della struttura possa essere approssimato come  $\mathbf{u}_S = (\boldsymbol{\phi}_{Si}/\phi_{Si_j})u_{Sj}(t)$ , dove  $\boldsymbol{\phi}_{Si}$  è l' $i$ -esimo modo di vibrare della struttura normalizzato rispetto il suo  $j$ -esimo elemento  $\phi_{Si_j}$  e  $u_{Sj}$  è lo spostamento del  $j$ -esimo grado di libertà della struttura, è possibile ottenere il sistema generalizzato a 2 gdl riportato in Fig. 3.2 del sistema a  $N$  gdl dotato del TMDI.

Le equazioni del moto per un tale sistema possono essere scritte come:

$$\begin{aligned}
 m_I \ddot{u}_I + c_I \dot{u}_I + k_I u_I &= -m_I \ddot{u}_g + \phi_k f_B + f_T \\
 m_T \ddot{u}_T &= -m_T \ddot{u}_g - f_B - f_T \\
 f_B &= b(\ddot{u}_T - \phi_k \ddot{u}_I) \quad f_T = c_T(\dot{u}_T - \dot{u}_I) + k_T(u_T - u_I)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$



**Figura 3.2.** Sistema generalizzato ad 1-GDL dotato di sistema di controllo TMDI.

dove  $\phi_k = \phi_{Sik}/\phi_{Sij}$  è il k-esimo elemento dell'autovettore  $\phi_{Si}$ , mentre le proprietà e le grandezze di risposta del sistema generalizzato a 2 gdl sono legate a quelle del sistema a N gdl con TMDI attraverso le relazioni riportate in Tabella 3.1.

Parametro generalizzato	Sistema N-GDL+TMDI	Sistema 1-GDL+TMDI
massa	$(\phi_{Si}^T \mathbf{M}_S \phi_{Si}) / \phi_{Sij}^2$	$m_I$
coefficiente di smorzamento	$(\phi_{Si}^T \mathbf{L}_S \phi_{Si}) / \phi_{Sij}^2$	$c_I$
rigidezza	$(\phi_{Si}^T \mathbf{K}_S \phi_{Si}) / \phi_{Sij}^2$	$k_I$
spostamento	$u_{Sj}$	$u_I$
accelerazione alla base	$\phi_{Sij} (\phi_{Si}^T \mathbf{M}_S \tau_S) \ddot{u}_g / (\phi_{Si}^T \mathbf{M}_S \phi_{Si})$	$\ddot{y}_g$

**Tabella 3.1.** Proprietà e grandezze di risposta del sistema generalizzato ad 1-GDL+TMDI

Definendo  $\omega_I = \sqrt{k_I/m_I}$  e  $\omega_T = \sqrt{k_T/(m_T + b)}$  rispettivamente le pulsazioni naturali del sistema ad 1-GDL e del TMDI disaccoppiati, le equazioni dimensionali 3.2 possono essere scritte in forma adimensionale nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_I + 2\xi_I \dot{q}_I + q_I &= -\ddot{q}_g + \phi_k \frac{f_B}{m_I g} + \frac{f_T}{m_I g} \\
 \mu \ddot{q}_T &= -\mu \ddot{q}_g - \frac{f_B}{m_I g} - \frac{f_T}{m_I g} \\
 \frac{f_B}{m_I g} &= \beta (\ddot{q}_T - \phi_k \ddot{q}_I) \quad \frac{f_T}{m_I g} = 2\xi_T \nu \mu_E (\dot{q}_T - \dot{q}_I) + \nu^2 \mu_E (q_T - q_I)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

in termini delle adimensionali coordinate di spostamento  $\mathbf{q} = \mathbf{u}/(g/\omega_I^2)$ , velocità  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{u}}/(g/\omega_I)$  e accelerazione  $\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{u}}/g$  relative al suolo, con  $\mathbf{u} = [u_I \ u_T]^T$ , e l'accelerazione alla base normalizzata  $\ddot{q}_g = \ddot{y}_g/g$ , dove  $g$  è l'accelerazione di gravità. Nelle precedenti equazioni, i fattori di smorzamento  $\xi_I$  e  $\xi_T$  rispettivamente della struttura primaria e del TMDI, il rapporto di frequenze  $\nu$ , il rapporto di massa  $\mu$ , il rapporto di

inertanza  $\beta$ , sono stati definiti come:

$$\xi_I = \frac{c_I}{2m_I\omega_I} \quad \xi_T = \frac{c_T}{2(m_T + b)\omega_T} \quad \nu = \frac{\omega_T}{\omega_I} \quad \mu = \frac{m_T}{m_I} \quad \beta = \frac{b}{m_I} \quad (3.4)$$

e con  $\mu_E = \mu + \beta$  il rapporto di massa equivalente.

### Definizione degli indici di prestazione

Le prestazioni del sistema TMDI, nel sistema ridotto generalizzato ad 2 gdl soggetto ad azione di tipo rumore bianco, sono state valutate attraverso i seguenti indici di prestazione cinematica:

$$d_I = \frac{\sigma_{q_I}^2}{\sigma_{q_{I0}}^2}, \quad a_I = \frac{\sigma_{\ddot{q}_I^{(tot)}}^2}{\sigma_{\ddot{q}_{I0}^{(tot)}}^2}, \quad d_T = \frac{\sigma_{q_T}^2}{\sigma_{q_{I0}}^2}, \quad d_{TI} = \frac{\sigma_{q_{TI}}^2}{\sigma_{q_{I0}}^2} \quad (3.5)$$

dove  $\sigma_{q_{I0}}^2$  e  $\ddot{q}_{I0}^{(tot)}$  sono rispettivamente le varianze dello spostamento relativo e dell'accelerazione assoluta del sistema non controllato. Inoltre, l'indice di dissipazione di energia EDI risulta pari a:

$$EDI = \frac{ED_T}{ED_I + ED_T} \leq 1 \quad (3.6)$$

con  $ED_I$  e  $ED_T$  i valori attesi dell'energia dissipata nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  dagli smorzatori viscosi rispettivamente del BIS e del TMDI definiti come:

$$ED_I = 2\xi_I\sigma_{\dot{q}_I}^2\Delta t, \quad ED_T = 2\mu_E\xi_T\nu_T\sigma_{\dot{q}_{TI}}^2\Delta t \quad (3.7)$$

Gli indici di prestazione riportati nelle Eq. 3.5 e 3.6 sono stati valutati per l'eccitazione di tipo rumore bianco attraverso l'Eq. 2.5. È importante sottolineare che sono indipendenti dall'intensità dell'azione e non dipendono dal contenuto in frequenza dell'eccitazione. Inoltre gli indici di prestazione cinematica definiti nell'Eq. 3.5 permettono di valutare le prestazioni del sistema di controllo. Infine, l'EDI definito nell'Eq. 3.6 quantifica la quota parte di energia che viene dissipata dal TMDI rispetto all'energia totale di input (cioè,  $ED = ED_I + ED_T$ ).

L'efficacia sismica è valutata con due gruppi di indici di prestazione  $\hat{I}_i$  e  $I_i$ , con  $i = 1 - 4$ , relativi rispettivamente ai valori quadratici medi (*rms*) e di picco e definiti come:

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{q}_I}{\hat{q}_{I0}} \quad \hat{I}_2 = \frac{\hat{\ddot{q}}_I^{(tot)}}{\hat{\ddot{q}}_{I0}^{(tot)}} \quad \hat{I}_3 = \frac{\hat{q}_T}{\hat{q}_{I0}} \quad \hat{I}_4 = \frac{\hat{q}_{TI}}{\hat{q}_{I0}} \quad (3.8)$$

$$I_1 = \frac{q_{I,max}}{\hat{q}_{I0,max}} \quad I_2 = \frac{\ddot{q}_{I,max}^{(tot)}}{\ddot{q}_{I0,max}^{(tot)}} \quad I_3 = \frac{q_{T,max}}{q_{I0,max}} \quad I_4 = \frac{q_{TI,max}}{q_{I0,max}} \quad (3.9)$$

dove  $q_{I0}$  e  $\ddot{q}_{I0}^{(tot)}$  sono rispettivamente lo spostamento relativo e l'accelerazione assoluta del sistema primario in assenza di sistema di controllo, e le quantità con l'apice  $\wedge$  indicano i valori quadratici medi (*rms*), mentre quelle con il pedice *max* indicano

i valori di picco. Si noti che, se gli indici  $\hat{I}_1 - \hat{I}_4$  e  $I_1 - I_4$  assumono valori inferiori all'unità, il sistema di controllo è efficace nel ridurre la risposta strutturale rispettivamente in termini di valori quadratici medi e di picco. I risultati sono stati ottenuti ipotizzando per la struttura primaria una pulsazione naturale  $\omega_I = 6.28 \text{ rad/s}$  e un rapporto di smorzamento  $\xi_I = 0.02$ .

### 3.2.2 Allocazione ottimale del sistema di controllo

In questo sottoparagrafo si descrive la procedura necessaria per l'allocazione ottimale del sistema di controllo all'interno di una struttura multipiano basata sia sulle precedenti equazioni sia sulle indicazioni fornite dai successivi risultati numerici. Una volta fissata una forma di vibrare che si vuole controllare, infatti, è possibile definire l'allocazione ottimale del sistema di controllo senza la necessità di svolgere analisi. L'allocazione ottimale consiste nella opportuna scelta della posizione dei terminali ( $j$  e  $k$  nel caso di sistemi TMDI e TID e  $j$  nel caso di sistemi TMD) in modo tale da massimizzare le prestazioni del sistema di controllo.

Osservando l'equazione del moto, Eq. 3.3, e i parametri del sistema generalizzato ad 1-GDL, Tab. 3.1, si evince come la posizione del terminale  $j$  del sistema di controllo, governata dal parametro  $\phi_{Sij}$ , influenza esclusivamente l'accelerazione alla base normalizzata  $\ddot{q}_g$  e i rapporti di massa e inertanza  $\mu$  e  $\beta$  (ovvero il rapporto di massa equivalente  $\mu_E$ ). In particolare l'accelerazione alla base risulta direttamente proporzionale all'autovettore  $\phi_{Sij}$  (vedere Tab. 3.1), mentre il rapporto di massa equivalente  $\mu_E = \phi_{Sij}^2(m_T + b)/(\phi_{Si}^T \mathbf{M}_S \phi_{Si})$  è direttamente proporzionale al quadrato dell'autovettore. Per tale ragione, uno dei modi per incrementare il rapporto di massa equivalente  $\mu_E$ , che come si vedrà nelle successive sezioni incrementa le prestazioni del sistema di controllo (TMDI, TID e TMD), è necessario allocarne il terminale  $j$  in corrispondenza del massimo valore assoluto della forma di vibrare da controllare.

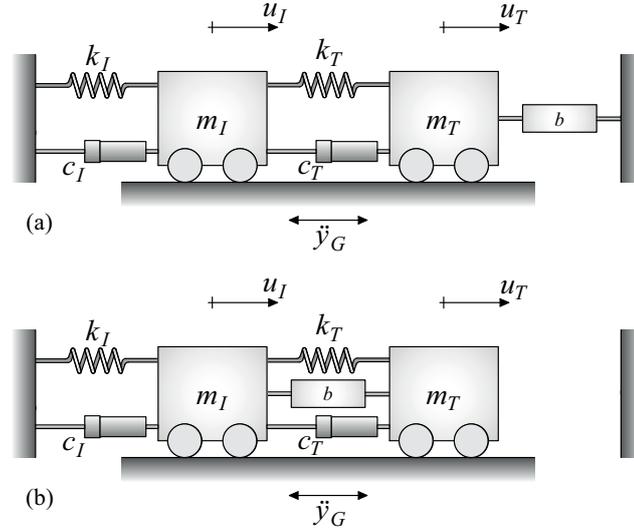
Una volta definita la posizione del terminale  $j$ , nel caso dei sistemi di controllo a due terminali come il TMDI e il TID, è necessario definire in che modo scegliere l'allocazione ottimale del terminale  $k$ . In questo caso al fine di migliorare le prestazioni del sistema di controllo, come si vedrà nel Paragrafo 3.6, la scelta deve essere fatta in modo tale che la differenza di forma modale tra i due terminali  $\Delta\phi_{Si} = \phi_{Sij} - \phi_{Sik}$  risulti massima (ovvero il parametro  $\phi_k$  risulti il più piccolo possibile).

In conclusione, sulla base delle precedenti considerazioni, al fine di allocare in modo ottimale un sistema di controllo (TMDI, TID e TMD) su una struttura multipiano, i terminali ( $j$  ed eventualmente  $k$ ) devono essere scelti in modo tale che:

$$\begin{cases} \max\{\mu_E\} \longrightarrow \max\{|\phi_{Sij}|\} \\ \max\{\Delta\phi_{Si}\} \longrightarrow \min\{\phi_k\} \end{cases} \quad (3.10)$$

Infine al variare del parametro  $\phi_k$  il sistema ridotto generalizzato a 2 gdl può degenerare in due casi particolari: il caso di sistema TMDI collegato a terra o in un nodo in cui la forma di vibrare è nulla  $\phi_k = 0$ , Fig. 3.3 (a), e il caso in cui i due terminali sono collegati allo stesso nodo, o nodi con la stessa forma di vibrare  $\phi_k = 1$ , Fig. 3.3 (b).

Nel seguito per il caso particolare, ma di notevole interesse, di sistema ridotto ( $\phi_k = 0$ ) è stata prima studiata la progettazione ottimale del sistema di controllo,



**Figura 3.3.** Casi particolari (a)  $\phi_k = 0$  e (b)  $\phi_k = 0$  del sistema generalizzato ad 1-GDL dotato di sistema di controllo TMDI.

Paragrafo 3.3, poi è stata valutata l'efficacia e la robustezza del sistema di controllo nel caso di azione di tipo rumore bianco, Paragrafo 3.4 e, infine, sono state valutate le prestazioni del sistema di controllo nel caso di accelerogrammi naturali, Paragrafo 3.5. Successivamente, è stata valutata l'influenza sia sulla progettazione ottimale che sulle prestazioni dell'allocazione del sistema di controllo, Paragrafo 3.6.

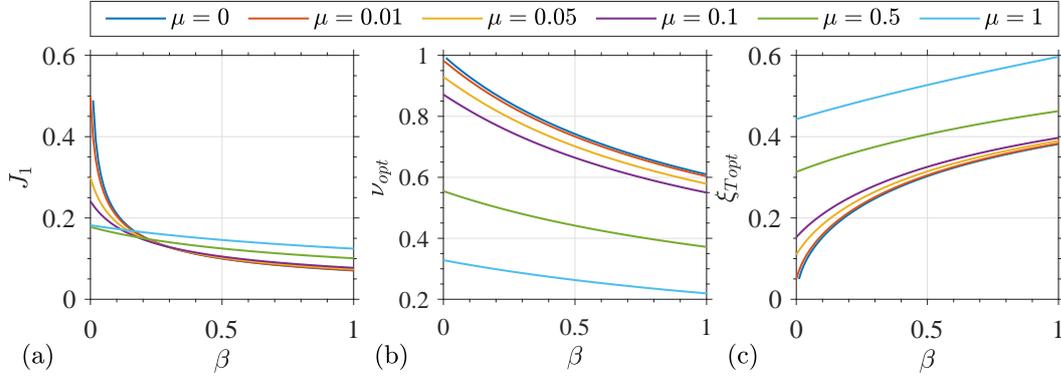
### 3.3 Progettazione ottimale del sistema di controllo

In questo paragrafo, saranno discussi in dettaglio i risultati della progettazione ottimale eseguita per le tre metodologie di progettazione ottimale, definite nel Paragrafo 2.3, allo scopo di valutare come la progettazione ottimale dei sistemi TMDI cambia al variare della metodologia utilizzata. In tutti i casi si ottengono i parametri ottimali  $\mathbf{u}_1 = [\nu, \xi_T]^T$  avendo assunto per le altre grandezze i valori:  $\phi_k = 0$ ,  $\xi_I = 0.02$  e i rapporti di massa e inerzia  $\mathbf{u}_2 = [\mu, \beta]^T$  compresi nell'intervallo  $\mathbf{u}_2^{min} = [0, 0]^T$  e  $\mathbf{u}_2^{max} = [1, 1]^T$ , dove il sistema TMDI quando  $\beta = 0$  degenera nel sistema TMD e quando  $\mu = 0$  degenera nel sistema TID. Al fine di confronto con i tradizionali sistemi TMD, nel seguito si intendono per TMD convenzionali e non convenzionali sistemi di controllo TMD caratterizzati rispettivamente da rapporti di massa relativamente bassi ( $\mu < 0.10$ ) e relativamente elevati ( $\mu \geq 0.10$ ).

#### 3.3.1 Minimizzazione della varianza dello spostamento del sistema primario

La Figura 3.4(a) riporta l'indice  $J_1$ , definito nel Paragrafo 2.3, al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  per diversi valori del rapporto di massa  $\mu$ , mentre le Figg. 3.4(b-c) riportano rispettivamente per ciascuna coppia  $\mu - \beta$  i valori dei parametri ottimali di progetto, ovvero il rapporto di frequenza  $\nu_{opt}$  e il fattore di smorzamento

$\xi_{T_{opt}}$ . L'indice  $J_1$  è normalizzato rispetto al sistema non controllato, quindi valori inferiori dell'unità significano che il sistema di controllo è efficace nella riduzione dello spostamento.



**Figura 3.4.** Progettazione ottimale del sistema di controllo con  $OF = d_I$  al variare del parametro  $\beta$  e per diversi valori del rapporto di massa  $\mu$ : (a) valore minimo della  $OF$  raggiunto  $J_1$  e parametri di progetto ottimali (b)  $\nu_{opt}$  e (c)  $\xi_{T_{opt}}$ .

I grafici riportati nelle Figg. 3.4(a-c) possono essere utilizzati nel seguente modo: (i) dal grafico di Fig. 3.4(a) si definisce un livello di efficacia del sistema TMDI, (ii) si seleziona una coppia, non unica, dei parametri  $\mathbf{u}_2 = [\mu, \beta]^T$  e (iii) per la coppia di parametri  $\mathbf{u}_1$  dalle Figg. 3.4(b-c) si ricavano i parametri ottimali  $\mathbf{u}_{1opt} = [\nu_{opt}, \xi_{T_{opt}}]^T$ . Un modo alternativo per utilizzare i precedenti grafici è quello di: (i) si assume un rapporto di massa  $\mu$  e per un determinato livello di efficacia del sistema TMDI, (ii) si ricava il corrispondente valore del rapporto di inerzia  $\beta$  e poi si procede in modo analogo con il passaggio (iii) sopra descritto.

L'indice di progetto  $J_1$ , Fig. 3.4(a), per ogni coppia  $\mu - \beta$  è sempre inferiore all'unità, questo a dimostrazione di come i sistemi TMDI (e i rispettivi casi particolari TMD e TID) risultano efficaci nel ridurre lo spostamento del sistema primario. Quando  $\beta = 0$ , ovvero assenza del dispositivo Inerter, è possibile osservare le prestazioni di un TMD tradizionale e si nota come l'efficacia aumenta con il rapporto di massa  $\mu$ . Questo significa che un TMD non convenzionale risulta più efficace di un TMD convenzionale; questi risultati sono confermati anche da studi di letteratura [De Angelis, Perno et al., 2012 e Reggio e De Angelis, 2015]. Quando  $\beta > 0$  e  $\mu \neq 0$ , si può notare come, all'aumentare di  $\beta$ , il TMDI è più efficace nel ridurre lo spostamento della struttura primaria rispetto ai tradizionali TMD con lo stesso rapporto  $\mu$ . L'aggiunta del dispositivo Inerter ai tradizionali sistemi TMD, produce forti riduzioni in termini di spostamento, soprattutto quando i rapporti di massa  $\mu$  sono piccoli. Infine, quando  $\beta = 0$ , ovvero assenza di massa ausiliaria, è possibile osservare le prestazioni del sistema TID e si nota come il sistema risulta più efficace all'aumentare del rapporto di inerzia  $\beta$ .

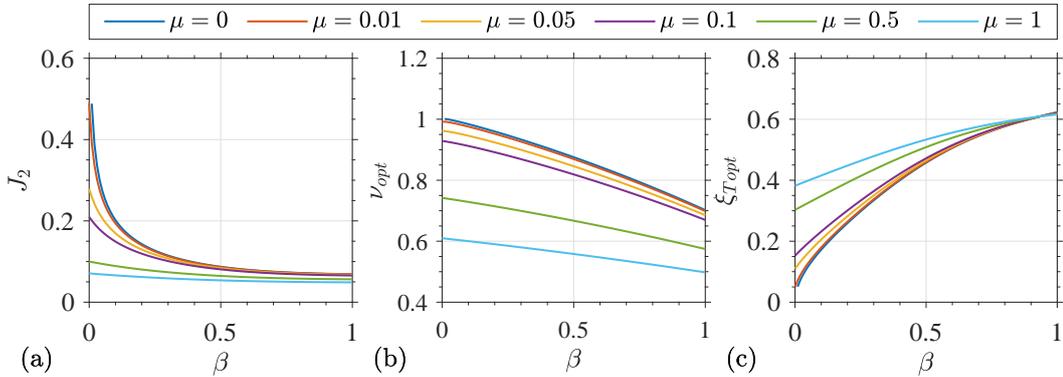
Per valori piccoli di inerzia, le migliori prestazioni si ottengono con rapporti di massa  $\mu$  relativamente elevati (tipici dei sistemi  $TMD_{NC}$ ), mentre per valori elevati dell'inerzia, il sistema di controllo risulta più efficace quando rapporti di massa  $\mu$  sono relativamente piccoli (tipici del  $TMD_C$ ). Quindi il TMDI risulta più performante del TID quando il rapporto di inerzia è relativamente piccolo, mentre

quando  $\beta$  assume valori elevati, l'aggiunta di massa secondaria risulta peggiorativa e quindi il TID risulta più efficace, nel ridurre lo spostamento della struttura primaria, rispetto al TMDI. Questo cambiamento di tendenza si verifica per  $\beta \cong 0.2$ , dove l'indice  $J_1$  è quasi indipendente sul rapporto di massa  $\mu$ . Le maggiori riduzioni dell'indice  $J_1$  si hanno per  $\mu$  piccoli o al limite zero (sistema TID) e  $\beta > 0.2$ . Quindi, l'aggiunta di un dispositivo Inerter in un sistema di controllo TMD risulta più vantaggioso quando i valori del rapporto di massa  $\mu$  risultano relativamente piccoli. Questo risultato è stato osservato anche in [Marian e Giaralis, 2014] e comporta che, attraverso l'aggiunta del dispositivo Inerter, è possibile ridurre la massa secondaria di un sistema TMD, e ottenere un sistema di controllo (TMDI o al limite TID) più leggero ma con prestazioni addirittura superiori.

Osservando i parametri ottimali riportanti nelle Figg. 3.4(b-c), si può notare come  $\nu_{opt}$  diminuisce all'aumentare dei rapporti di inerzia e massa  $\beta$  e  $\mu$ , viceversa  $\xi_{T_{opt}}$  aumentano all'aumentare di  $\beta$  e di  $\mu$ . Inoltre a parità di  $\beta$ , quando i valori del rapporto di massa risultano piccoli  $\mu \leq 0.01$ , i parametri ottimali non variano significativamente rispetto a quelli del sistema di controllo TID.

### 3.3.2 Minimizzazione della varianza dell'accelerazione del sistema primario

Valori inferiori all'unità dell'indice  $J_2$ , definito nel Paragrafo 2.3, indicano che il sistema di controllo risulta efficace nella riduzione dell'accelerazione del sistema primario. La Figura 3.5(a) riporta l'indice  $J_2$  al variare di  $\beta$  e per diversi valori del rapporto di massa  $\mu$ , mentre le Figg. 3.5(b-c) riportano rispettivamente i corrispondenti valori ottimali del rapporto di frequenza  $\nu_{opt}$  e il rapporto di smorzamento  $\xi_{T_{opt}}$ .



**Figura 3.5.** Progettazione ottimale del sistema di controllo con  $OF = a_I$  al variare del parametro  $\beta$  e per diversi valori del rapporto di massa  $\mu$ : (a) valore minimo della  $OF$  raggiunto  $J_2$  e parametri di progetto ottimali (b)  $\nu_{opt}$  e (c)  $\xi_{T_{opt}}$ .

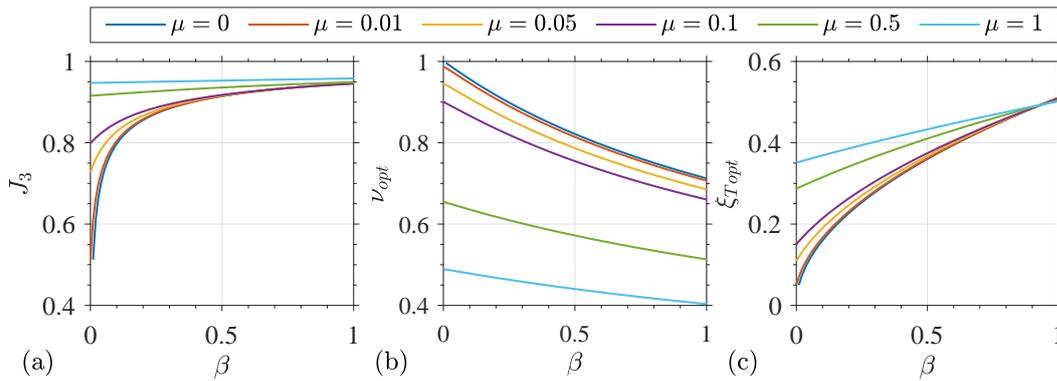
L'uso di questi grafici di progettazione è analogo a quello presentato nel precedente sottoparagrafo. Osservando la Figura 3.5(a) si nota come l'indice di progetto  $J_2$  per ogni coppia  $\mu - \beta$  è sempre inferiore all'unità, a dimostrazione del fatto che il sistema di controllo risulta efficace nel ridurre l'accelerazione del sistema primario. Quando  $\beta = 0$  (TMD tradizionale), le prestazioni del sistema di controllo aumentano con il rapporto di massa  $\mu$ . Inoltre, se ad un sistema TMD si inserisce un

dispositivo Inerter,  $\beta > 0$ , il sistema TMDI risultante risulta sempre più efficace rispetto al corrispondente sistema TMD con lo stesso rapporto di massa  $\mu$ . L'efficacia del sistema TMDI aumenta all'aumentare di  $\beta$  fino a un valore limite ( $\beta = 0.6$ ) oltre al quale l'incremento delle prestazioni risulta poco significativo. Inoltre a parità di  $\beta$ , l'efficacia dei sistemi di controllo TMDI aumentano all'aumentare del rapporto di massa  $\mu$  e quindi, per questa metodologia di progetto, il TMDI risulta più performante del TID nel ridurre l'accelerazione del sistema primario. Questi aspetti non sono stati osservati nel caso la metodologia di progetto scelta è stata quella di minimizzazione della varianza dello spostamento del sistema primario.

Per i parametri ottimali  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{T_{opt}}$ , Figg. 3.5(b-c), possono essere fatti analoghi commenti a quelli riportati per la metodologia di minimizzazione della varianza dello spostamento del sistema primario in quanto le tendenze risultano simili a quelle osservate in precedenza. La differenza principale è legata al fatto che, a fissato rapporto di massa  $\mu$ , le curve  $\nu_{opt} - \beta$ , nel caso precedente risultano convesse, Fig. 3.4(b), mentre in questo caso risultano concave, Fig. 3.5(b). Inoltre si può notare come, per elevati valori del rapporto di inerzia  $\beta \geq 0.8$ , i valori ottimali del rapporto di smorzamento  $\xi_{T_{opt}}$  risultano circa indipendenti dal rapporto di massa  $\mu$ .

### 3.3.3 Massimizzazione dell'Indice di Dissipazione di Energia (EDI)

L'indice  $J_3 = EDI$ , Eq. 3.6, per definizione può variare tra zero e l'unità e aumenta all'aumentare delle capacità dissipative del sistema di controllo. La Figura 3.6(a) riporta l'indice  $J_3$  al variare di  $\beta$ , per diversi valori del rapporto di massa  $\mu$ , mentre le Figg. 3.6(b-c) riportano rispettivamente i corrispondenti valori ottimali del rapporto di frequenza  $\nu_{opt}$  e del rapporto di smorzamento  $\xi_{T_{opt}}$ .



**Figura 3.6.** Progettazione ottimale del sistema di controllo con  $OF = EDI$  al variare del parametro  $\beta$  e per diversi valori del rapporto di massa  $\mu$ : (a) valore minimo della  $OF$  raggiunto  $J_2$  e parametri di progetto ottimali (b)  $\nu_{opt}$  e (c)  $\xi_{T_{opt}}$ .

I grafici di progettazione, Fig. 3.6, hanno un significato analogo a quelli descritti nelle precedenti Figg. 3.4 e 3.5, e quindi può esserne fatto lo stesso uso. La Figura 3.6(a) mostra come l'indice  $J_3$  risulti sempre maggiore di zero, a dimostrazione dell'efficacia del sistema di controllo. Quando  $\beta = 0$ , si nota come un tradizionale TMD è efficace nel dissipare l'energia totale di input e le sue prestazioni risultano

migliori se si assume un valore più elevato del rapporto di massa  $\mu$ . Infatti, assumendo valori molto piccoli di  $\mu$  si hanno piccole capacità di dissipazione di energia da parte del sistema di controllo.

Se il dispositivo Inerter è utilizzato in combinazione con il sistema TMD, le prestazioni aumentano notevolmente quando i rapporti di massa  $\mu$  sono piccoli (al limite zero, TID). L'indice  $J_3$  aumenta con  $\mu$ , ma per valori di massa elevati, l'aggiunta dell'Inerter non produce significativi incrementi in termini di prestazioni (le curve non variano significativamente con  $\beta$ ). Tutte le curve tendono a un valore limite  $<1$  crescente  $\beta$ . Quindi come nei casi precedenti, si evince come l'incorporazione di un dispositivo Inerter in un sistema TMD risulta più vantaggiosa per valori relativamente più piccoli del rapporto di massa  $\mu$ , mentre risulta poco significativa quando questi ultimi assumono valori elevati. Al fine di avere un sistema di controllo efficace e leggero, una buona scelta dei rapporti di massa e ineranza, che sfruttano le potenzialità dell'Inerter, possono essere quelle di scegliere  $\beta \cong 0.4$  e un piccolo valore di  $\mu$  (al limite  $\mu = 0$ , TID). La performance di un TMD classico è quindi completamente migliorata, più che raddoppiata.

Le Figure 3.6(b-c) riportano rispettivamente i parametri ottimali  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{Topt}$  assumendo l'indice  $J_3$  come funzione obiettivo. Si può notare come, anche in questo caso, non si hanno sostanziali differenze rispetto alle metodologie di progetto in precedenza analizzate; infatti, le curve di Figg. 3.4(b-c), 3.5(b-c) e 3.6(b-c) risultano molto simili. In particolare per ciascuna coppia di parametri  $\mu$  e  $\beta$ , i parametri ottimali ottenuti massimizzando l'indice di dissipazione di energia EDI risultano intermedi a quelli ottenuti rispettivamente minimizzando la varianza dello spostamento (generalmente più piccoli) e dell'accelerazione (generalmente più grandi) della struttura primaria.

### 3.4 Discussione dei risultati

In questo paragrafo verranno discussi e confrontati i risultati ottenuti per le tre metodologie di progettazione ottimale in precedenza presentate. Inoltre, verranno confrontate le prestazioni ottenute con i sistemi di controllo TMDI rispetto ai convenzionali e non convenzionali sistemi TMD. L'attenzione è stata focalizzata non solo sulle quantità di risposta del sistema primario, ma anche sulle principali quantità di risposta del sistema secondario di controllo.

#### 3.4.1 Confronto tra diverse metodologie di progettazione ottimale

Per le tre metodologie di progetto studiate, i parametri ottimali, rapporto di frequenza  $\nu_{opt}$  e rapporto di smorzamento  $\xi_{Topt}$ , risultano abbastanza simili come osservato nelle Figg. 3.4(b-c), 3.5(b-c) e 3.6(b-c). La principale differenza osservata è nella scelta dei parametri  $\mu$  e  $\beta$  che possono essere diversi a seconda della metodologia di progettazione ottimale selezionata e del livello di prestazione desiderato, Figg. 3.4(a), 3.5(a) e 3.6(a). In generale, il sistema di controllo è risultato più efficace quando il rapporto di massa  $\mu$  risulta relativamente piccolo (al limite zero, TID) e il rapporto di ineranza  $\beta$  compreso nell'intervallo 0.2 - 0.4. Quindi, con un dispositivo Inerter, è possibile incrementare in modo significativo le prestazioni di

un sistema TMD addirittura riducendo la massa del sistema di controllo. Indipendentemente dalla metodologia di progetto adottata, si è visto che, il TMDI è sempre più efficace del tradizionale TMD con lo stesso rapporto di massa  $\mu$ . Inoltre, è stato osservato che un  $\text{TMD}_{\text{NC}}$  risulta sempre più efficace di un  $\text{TMD}_{\text{C}}$ .

Tuttavia, confrontando in dettaglio i risultati tra le diverse metodologie di progettazione ottimale, alcuni ulteriori aspetti possono essere indagati. La Tabella 3.2 riporta i valori dei parametri ottimali per sette casi esemplificativi che rappresentano situazioni di un sistema TMD convenzionale,  $\mu = 0.01$ , di tre sistemi TMD non convenzionali,  $\mu = 0.1, 0.2$  e  $0.5$ , e di tre sistemi TMDI caratterizzati dallo stesso rapporto di massa equivalente  $\mu_E$  dei sistemi  $\text{TMD}_{\text{NC}}$ , mantenendo costante il rapporto di massa  $\mu = 0.01$  e variando il rapporto di inertanza  $\beta$ .

Confrontando le tre metodologie di progettazione, si osserva come i valori dei parametri ottimali per l'indice  $J_1$  risultano tipicamente i più piccoli, quelli per l'indice  $J_2$  risultano tipicamente i più grandi, mentre quelli per l'indice  $J_3$  risultano generalmente intermedi tra quelli ottenuti per le altre due metodologie. La metodologia basata sull'indice  $J_3$ , essendo di tipo energetico, non privilegia quantità di risposta locali come gli spostamenti o le accelerazioni, ma quantità di risposta globali e quindi sembra essere un buon compromesso rispetto alle altre due. Per questo motivo, salvo diversa indicazione, nel seguito sarà utilizzata questa metodologia per la progettazione ottimale del sistema di controllo.

Nel caso dei sistemi TMD tradizionali, le diverse metodologie di progettazione conducono a valori dei parametri sostanzialmente coincidenti quando i rapporti di massa  $\mu$  risultano piccoli. All'aumentare di questo parametro, i valori ottimali del rapporto di frequenze  $\nu_{opt}$  tendono a differenziarsi, mentre quelli relativi al rapporto di smorzamento  $\xi_{T_{opt}}$  rimangono abbastanza simili. In particolare per  $\mu = 0.5$ , il valore del rapporto di frequenze per  $J_1$  risulta più piccolo del 25% rispetto alla metodologia che ha  $J_2$  come funzione obiettivo. Nel caso dei sistemi TMDI, le diverse metodologie di progettazione portano a parametri ottimali più diversi, dove le differenze risultano maggiormente evidenti per i rapporti di smorzamento  $\xi_{T_{opt}}$  rispetto ai rapporti di frequenze  $\nu_{opt}$  e aumentano con  $\mu_E$ . Infatti tra i casi riportati, si ha per  $\mu_E = 0.5$  una riduzione dei valori dei parametri ottimali  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{T_{opt}}$  rispettivamente del 15% e 33% per la metodologia che ha come funzione obiettivo  $J_1$  rispetto a  $J_2$ .

In Tabella 3.2 si riportano tra parentesi e per il sistema TMDI i valori dei parametri ottimali che rispetto alla definizione riportata nel Paragrafo 3.2.1 risultano definiti come:  $\tilde{\nu} = \tilde{\omega}_T/\omega_I$  e  $\tilde{\xi}_T = c_T/(2m_T\tilde{\omega}_T)$ , dove  $\tilde{\omega}_T = \sqrt{k_T/m_T}$  e si può facilmente dimostrare come le due definizioni sono legate dalle seguenti relazioni:  $\tilde{\nu} = \nu\sqrt{\mu_E/\mu}$  e  $\tilde{\xi}_T = \xi_T\sqrt{\mu_E/\mu}$ . Quindi i valori dei parametri ottimali ottenuti con questa definizione risultano maggiori rispetto alla precedente per i sistemi TMDI ( $\mu_E > \mu$ ), mentre risultano coincidenti per i sistemi tradizionali TMD ( $\mu_E = \mu$ ). Inoltre, si è preferita la precedente definizione perchè quest'ultima non permette di studiare il sistema di controllo TID ( $\mu = 0$ ). Infine sono state condotte ulteriori analisi, qui non riportate per brevità, che hanno evidenziato come i parametri ottimali  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{T_{opt}}$  non sono influenzati dal rapporto di smorzamento del sistema primario  $\xi_I$ , mentre l'efficacia del sistema di controllo si riduce all'aumentare di questo parametro.

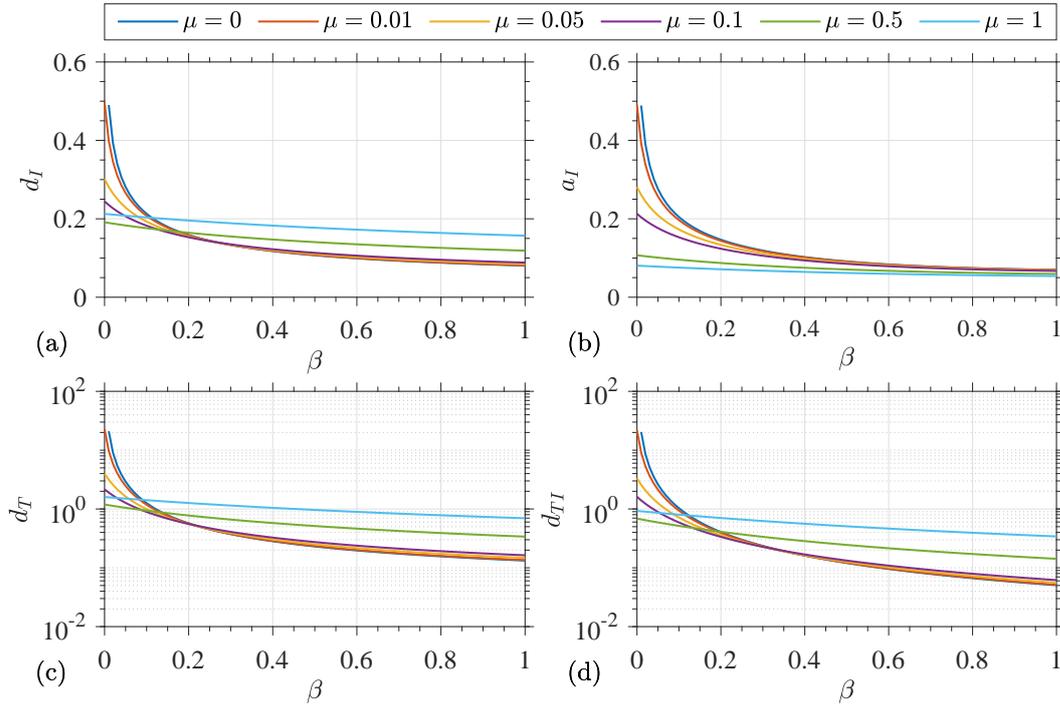
Caso				Parametri ottimali	
$\mu$	$\beta$	$\mu_E$	Criterio	$\nu_{opt}$	$\xi_{Topt}$
0.01	0	0.01	$J_1$	0.9819	0.0498
			$J_2$	0.9916	0.0498
			$J_3$	0.9868	0.0497
0.01	0.09	0.10	$J_1$	0.9228 (2.9181)	0.1526 (0.4824)
			$J_2$	0.9780 (3.0926)	0.1702 (0.5382)
			$J_3$	0.9507 (3.0063)	0.1586 (0.5017)
0.10	0	0.10	$J_1$	0.8714	0.1528
			$J_2$	0.9289	0.1526
			$J_3$	0.9006	0.1503
0.01	0.19	0.20	$J_1$	0.8653 (3.8695)	0.2088 (0.9336)
			$J_2$	0.9547 (4.2698)	0.2565 (1.1469)
			$J_3$	0.9116 (4.0766)	0.2252 (1.0069)
0.20	0	0.20	$J_1$	0.7721	0.2099
			$J_2$	0.8709	0.2087
			$J_3$	0.8229	0.2033
0.01	0.49	0.50	$J_1$	0.7371 (5.2124)	0.3029 (2.1421)
			$J_2$	0.8724 (6.1688)	0.4539 (3.2096)
			$J_3$	0.8170 (5.7768)	0.3579 (2.5310)
0.50	0	0.50	$J_1$	0.5548	0.3133
			$J_2$	0.7422	0.3028
			$J_3$	0.6550	0.2870

**Tabella 3.2.** Parametri ottimali per diversi valori delle coppie  $\mu$  e  $\beta$ . Tra parentesi sono riportati, rispettivamente i corrispondenti valori dei parametri  $\tilde{\nu}_{opt}$  e  $\tilde{\xi}_{Topt}$ .

### 3.4.2 Valutazione delle prestazioni rispetto ai tradizionali sistemi TMD

In questo sottoparagrafo si è investigata l'efficacia del sistema TMDI, progettato massimizzando l'indice EDI, osservando le quantità di risposta del sistema primario e secondario. La Figura 3.7 (a-b) riporta rispettivamente la varianza dello spostamento relativo  $d_I$  e la varianza dell'accelerazione assoluta  $a_I$  del sistema primario, mentre la Figura 3.7 (c-d) riporta rispettivamente la varianza degli spostamenti relativi del sistema di controllo rispetto al suolo  $d_T$  e tra il sistema primario e quello di controllo  $d_{TI}$ . Le precedenti quantità di risposta sono normalizzate rispetto a quelle del sistema primario non controllato, quindi il sistema di controllo risulta efficace se i valori delle risposte sono inferiori all'unità.

Un sistema TMDI, progettato secondo la metodologia in precedenza descritta, risulta sempre efficace nel ridurre lo spostamento e l'accelerazione del sistema primario rispetto alla situazione in assenza di controllo. Inoltre, le risposte risultano notevolmente ridotte anche rispetto ai tradizionali sistemi TMD, infatti, a parità di  $\mu$ , il sistema TMDI è sempre di più efficace del sistema TMD. Se, ad esempio, si



**Figura 3.7.** Varianza dello spostamento  $d_I$  (a) e dell'accelerazione  $a_I$  del sistema primario e varianza degli spostamenti relativi  $d_{TI}$  (c) e  $d_T$  (d) del sistema di controllo al variare del parametro  $\beta$  e per diversi valori del rapporto di massa  $\mu$ .

assume un piccolo rapporto di massa,  $\mu=0.01$ , e il rapporto di inerzia è assunto pari a  $\beta=0.19$ , Fig. 3.7 (a-b), lo spostamento e l'accelerazione sono entrambi ridotti circa dell'85% rispetto al caso non controllato, e tali risposte sono ridotte circa del 70% rispetto al corrispondente sistema TMD con uguale rapporto di massa  $\mu$ .

Inoltre, un sistema TMDI progettato in modo ottimale risulta anche efficace nel controllare le risposte del sistema di controllo  $d_T$  e  $d_{TI}$ , se si assume un rapporto di inerzia  $\beta > 0.15$ , indipendentemente dal rapporto di massa  $\mu$ , Fig. 3.7 (c-d). In alternativa, per valori del parametro  $\beta$  inferiore a 0.15, dovrebbe essere scelto un rapporto di massa elevato ( $\mu \geq 0.5$ ). Con riferimento agli stessi valori assunti in precedenza,  $\mu = 0.01$  e  $\beta = 0.19$ , si osserva una riduzione intorno al 60% di entrambe le risposte relative al sistema di controllo rispetto al caso non controllato. Diversamente, un TMD tradizionale non è sempre in grado di controllare la risposta della massa del sistema di controllo. Infatti, per controllare le risposte  $d_T$  e  $d_{TI}$ , deve essere assunto un rapporto di massa  $\mu$  elevato ( $\mu \geq 0.5$ ). Di conseguenza, solo per i sistemi TMD non convenzionali è possibile ottenere riduzioni delle risposte paragonabili a quelli ottenuti con sistemi TMDI progettati in modo ottimale.

I grafici degli spostamenti  $d_I$ ,  $d_T$  e  $d_{TI}$ , Figg. 3.7 (a, c e d), possono essere divisi in due parti dalla retta  $\beta = 0.15$ , identificando due regioni caratterizzate da un diverso comportamento che varia con  $\mu$ . Per  $\beta < 0.15$ , le risposte diminuiscono all'aumentare del rapporto di massa  $\mu$ , mentre per  $\beta > 0.15$  le risposte diminuiscono al diminuire di  $\mu$ . L'unica eccezione a questa tendenza è il caso  $\mu = 1$ . Per  $\beta = 0.15$ , lo spostamento del sistema primario  $d_I$ , lo spostamento del sistema di controllo  $d_T$

e lo spostamento relativo tra la massa del sistema di controllo e quello primario  $d_{TI}$  sono quasi indipendenti da  $\mu$ . Diversamente, per l'accelerazione assoluta del sistema primario  $a_I$ , Fig. 3.7 (b), le migliori prestazioni si ottengono sempre aumentando il rapporto di massa  $\mu$ , indipendentemente dal rapporto di inertanza  $\beta$ .

Al fine di valutare l'efficacia del sistema TMDI, in Tabella 3.3 sono sintetizzate le quantità di risposta del sistema primario e di controllo per le tre metodologie di progettazione ottimale. A scopo di confronto, è stato riportato anche il valore dell'indice EDI, calcolato per i valori dei parametri ottimali ottenuti con le tre metodologie di progetto. La Tabella 3.3 riporta, come la Tabella 3.2, i sette casi scelti al fine di confrontare i sistemi TMDI con i sistemi TMD convenzionali e non convenzionali.

Caso				Sistema primario		Sistema di controllo		EDI
$\mu$	$\beta$	$\mu_E$	OF	$d_I$	$a_I$	$d_T$	$d_{TI}$	
0.01	0	0.01	$J_1$	0.496	0.492	22.714	21.839	0.512
			$J_2$	0.499	0.489	22.961	21.499	0.512
			$J_3$	0.497	0.490	22.921	21.751	0.513
0.01	0.09	0.10	$J_1$	0.213	0.213	1.283	1.148	0.793
			$J_2$	0.224	0.203	1.315	0.958	0.793
			$J_3$	0.216	0.205	1.321	1.068	0.796
0.10	0	0.10	$J_1$	0.241	0.221	2.057	1.653	0.796
			$J_2$	0.254	0.210	2.198	1.513	0.796
			$J_3$	0.244	0.213	2.159	1.609	0.799
0.01	0.19	0.20	$J_1$	0.157	0.158	0.566	0.478	0.851
			$J_2$	0.173	0.144	0.595	0.346	0.851
			$J_3$	0.161	0.147	0.596	0.419	0.854
0.20	0	0.20	$J_1$	0.201	0.171	1.319	0.971	0.853
			$J_2$	0.223	0.155	1.414	0.815	0.853
			$J_3$	0.207	0.159	1.396	0.914	0.857
0.01	0.49	0.50	$J_1$	0.102	0.106	0.215	0.165	0.908
			$J_2$	0.124	0.087	0.244	0.090	0.909
			$J_3$	0.109	0.092	0.239	0.125	0.914
0.50	0	0.50	$J_1$	0.178	0.126	1.199	0.850	0.909
			$J_2$	0.226	0.100	1.137	0.522	0.910
			$J_3$	0.191	0.107	1.189	0.686	0.916

**Tabella 3.3.** Quantità di risposta del sistema primario e di controllo e indice EDI per diverse metodologie di progetto e per diversi valori delle coppie  $\mu$  e  $\beta$ .

Osservando i casi relativi al sistema TMDI, si può osservare come il sistema di controllo riduce in modo significativo le risposte del sistema primario con riduzioni che variano, in base al rapporto di inertanza  $\beta$  ipotizzato, tra l'80 e il 90% rispetto al caso non controllato.

Generalmente, le prestazioni di termini di accelerazione risultano migliori rispetto a quelle in termini di spostamento, e le risposte si riducono all'aumentare di  $\beta$ .

Inoltre, anche le risposte del sistema di controllo sono generalmente ben controllate, con valori inferiori all'unità, soprattutto se si assume  $\beta > 0.15$ , come già osservato in Fig. 3.7. I valori dell'indice EDI sono generalmente elevati e aumentano all'aumentare di  $\beta$ . Inoltre, la metodologia di progettazione ( $J_1$ ,  $J_2$  o  $J_3$ ) non sembra influenzarne in modo significativo il valore.

Considerando i sistemi TMD tradizionali progettati in modo ottimale, si nota come un TMD<sub>C</sub> è in grado di ridurre la risposta del sistema primario, con riduzioni intorno al 50% rispetto al caso non controllato, ma di contro le risposte del sistema di controllo risultano notevolmente amplificate. Inoltre, la metodologia di progettazione ottimale non influisce sulle risposte o sull'indice EDI.

Un sistema TMD<sub>NC</sub> invece, se si assume un valore piuttosto elevato del rapporto di massa  $\mu$  ( $\mu \geq 0.2$ ), consente di controllare in modo efficace sia le risposte del sistema primario che di controllo. All'aumentare di  $\mu$ , le risposte e l'indice EDI vengono maggiormente influenzati dalla metodologia di progettazione ottimale.

In tutti i casi, tuttavia, un sistema di controllo TMDI ha sempre prestazioni superiori se confrontato con il corrispondente TMD tradizionale con uguale rapporto di massa  $\mu_E$ . Gli incrementi di riduzione in percentuale possono raggiungere oltre il 40% per il sistema primario e oltre l'80% per il sistema di controllo.

### 3.4.3 Analisi di sensitività

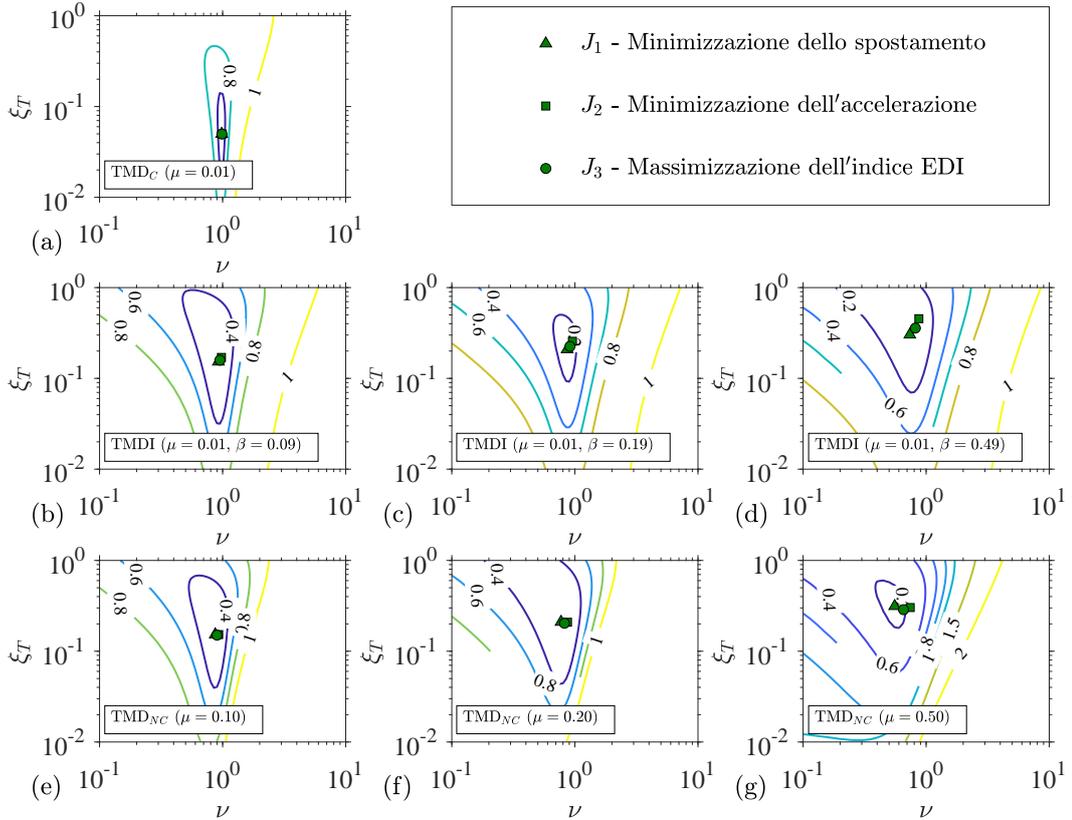
Gli obiettivi principali dell'analisi di sensitività sono la valutazione della robustezza del sistema di controllo TMDI a variazioni dei parametri di progetto  $\nu$  e  $\xi_T$  e il confronto rispetto ai sistemi TMD convenzionali e non convenzionali. L'attenzione è focalizzata sia sul sistema primario che su quello di controllo. Un sistema di controllo è definito robusto quando anche significative variazioni dei parametri di progetto rispetto a quelli ottimali non producono significative variazioni sulla risposta.

La Figura 3.8 (a-g) mostra le curve di livello della varianza di spostamento del sistema primario  $d_I$  al variare dei parametri  $\nu$  e  $\xi_T$  in un ampio intervallo, per i sette casi esemplificativi descritti nel Sottoparagrafo 3.4.1 (Tabelle 3.2 e 3.3).

Curve di livello analoghe per le varianze dell'accelerazione del sistema primario  $a_I$ , dello spostamento relativo al suolo del sistema di controllo  $d_T$  e dello spostamento relativo tra sistema di controllo e sistema primario  $d_{TI}$ , e per l'indice EDI sono mostrati rispettivamente nelle Figg. 3.9-3.12. In ogni grafico, i simboli triangolo, quadrato e cerchio indicano la coppia dei parametri ottimali  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{Topt}$  progettati con le metodologie di progetto  $J_i$ ,  $i = 1 - 3$ .

La Fig. 3.8 (a) relativa a  $d_I$  per il sistema TMD<sub>C</sub> evidenzia come la superficie descritta dalle curve di livello presenta un minimo confinato all'interno di una valle molto stretta e i parametri ottimali relativi alle tre metodologie di progetto vi cadono all'interno. Di conseguenza, piccole perturbazioni nell'intorno dei parametri ottimali, producono rapidi incrementi in termini di spostamento, in particolare per variazioni del rapporto di frequenza  $\nu$ , e quindi un sistema TMD con un piccolo rapporto di massa non è robusto.

All'aumentare del rapporto di massa del sistema TMD, Fig. 3.8 (e-g), l'area delle curve di livello che contiene il minimo aumenta e la superficie in corrispondenza dei parametri ottimali diventa più piatta, e anche le prestazioni del sistema di controllo risultano migliori; quindi, un TMD<sub>NC</sub> è più robusto ed efficace rispetto a quello



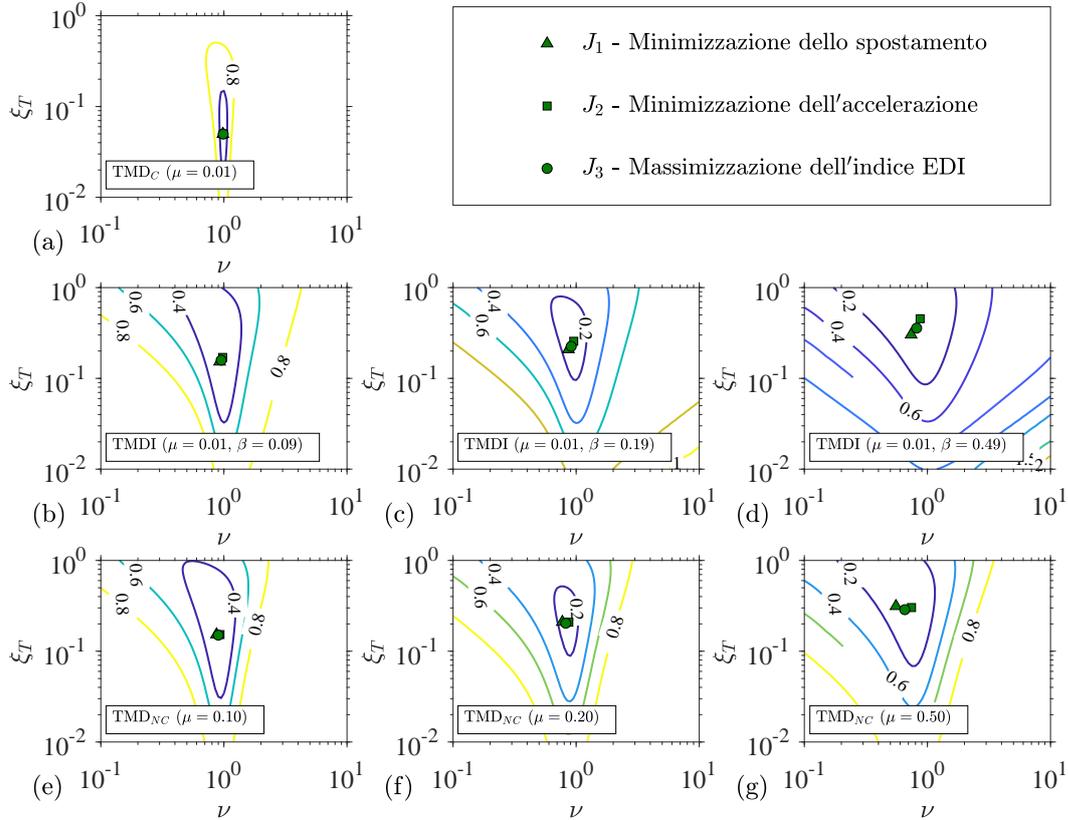
**Figura 3.8.** Varianza dello spostamento del sistema primario  $d_T$  al variare dei parametri di progetto  $\nu$  e  $\xi_T$  per diverse coppie dei parametri  $\mu$  e  $\beta$ .

convenzionale. Tuttavia, nel range di variazione dei parametri di progetto studiato, la risposta può assumere anche valori maggiori dell'unità.

Per i sistemi TMDI, Figura 3.8 (b-d), anche perturbazioni dei parametri di progetto in range piuttosto ampio non producono variazioni significative della risposta in termini di spostamento. Inoltre, nel range di variazione dei parametri di progetto, la risposta è sempre inferiore all'unità. Per queste ragioni questo sistema di controllo tra quelli analizzati può essere considerato il più robusto.

Di conseguenza, un sistema TMDI risulta essere più efficace e robustezza rispetto ai tradizionali TMD che richiedono solo una piccola massa fisica. Commenti simili possono essere fatti per le curve di livello relative alla varianza dell'accelerazione del sistema primario, Fig. 3.9 (a-g). L'unica differenza è che, nell'intero range di variazione dei parametri  $\nu$  e  $\xi_T$ , l'accelerazione è sempre inferiore all'unità.

Per quanto riguarda le risposte del sistema di controllo, le Figure 3.10 (a) e 3.11 (a) mostrano come il sistema TMD<sub>C</sub> progettato in modo ottimale non risulta efficace nella riduzione degli spostamenti relativi della massa ausiliaria  $d_T$  e  $d_{TI}$ , come già osservato nella Tabella 3.3. Generalmente, queste risposte nel caso del sistema TMD<sub>C</sub> sono circa un ordine di grandezza superiore rispetto a quelle corrispondenti ai casi di sistemi TMD<sub>NC</sub>, Figg. 3.10 (e-g) e 3.11 (e-g). Invece, un sistema TMDI progettato in modo ottimale è in grado di controllare anche le risposte del sistema di controllo, Figg. 3.10 (b-d) e 3.11 (b-d)), anche per variazioni significative dei

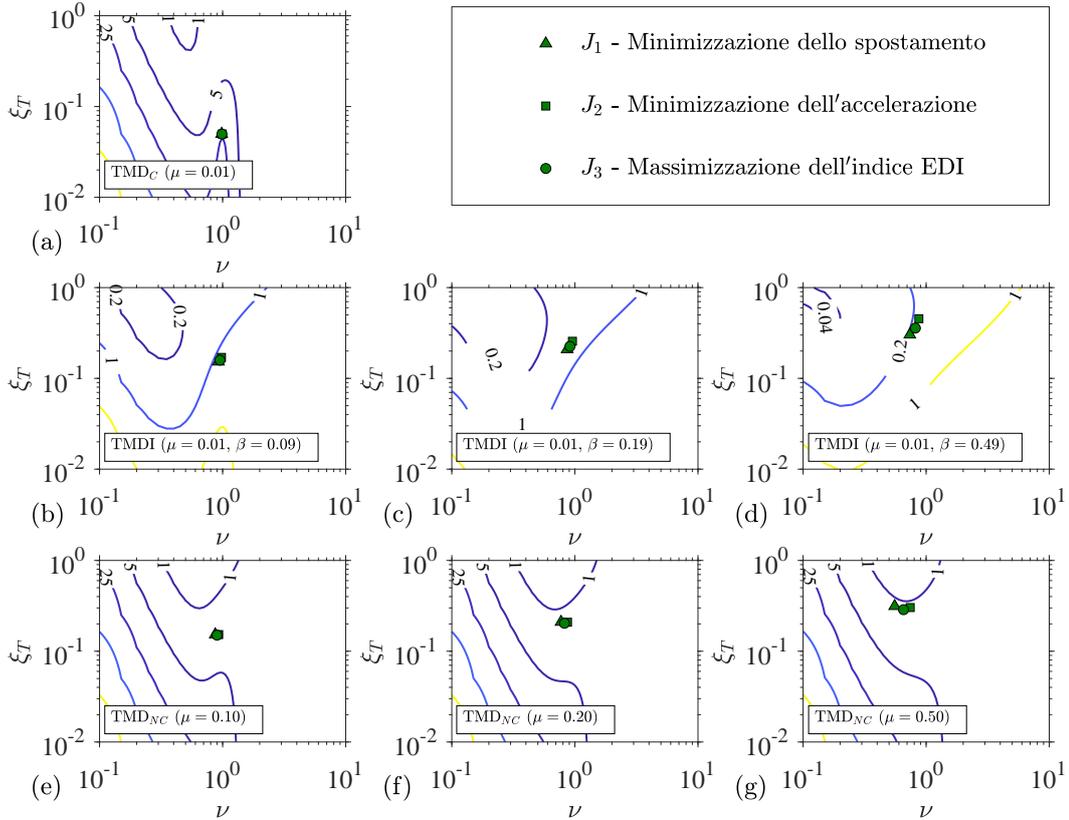


**Figura 3.9.** Varianza dell'accelerazione del sistema primario  $a_T$  al variare dei parametri di progetto  $\nu$  e  $\xi_T$  per diverse coppie dei parametri  $\mu$  e  $\beta$ .

parametri di progetto  $\nu$  e  $\xi_T$ . Infatti, soprattutto per valori relativamente elevati di  $\beta$  ( $\beta \geq 0.2$ ), queste risposte risultano ben controllate e raggiungono valori notevolmente inferiori rispetto a quelli raggiunti con i sistemi TMD tradizionali.

Infine, è interessante osservare le curve di livello dell'indice EDI al variare dei parametri di progetto  $\nu$  e  $\xi_T$ , Fig. 3.12. Questo indice di energia fornisce informazioni simili a quelle osservate per lo spostamento e l'accelerazione del sistema primario. Un TMD<sub>C</sub> non risulta robusto nella variazione dei parametri di progetto, Fig. 3.12 (a); inoltre, i valori dell'indice EDI sono molto piccoli e diminuiscono molto rapidamente se ci si allontana dalla coppia ottimale  $\nu_{opt} - \xi_{T,opt}$ , in particolare variando il rapporto di frequenza  $\nu$ . Invece, i TMD<sub>NC</sub> risultano essere sia più robusti che efficaci rispetto a quelli convenzionali, e le prestazioni aumentano con il rapporto di massa  $\mu$ . Tuttavia, l'efficacia diminuisce abbastanza rapidamente per grandi variazioni dei parametri di progetto. I sistemi TMDI, invece, presentano un'efficacia pari, e in alcuni casi superiore, rispetto ai sistemi TMD non convenzionali senza richiedere una elevata massa gravitazionale, e inoltre risultano più robusti perché le prestazioni diminuiscono abbastanza lentamente al variare della coppia  $\nu - \xi_T$ .

In conclusione, l'utilizzo dell'indice di dissipazione di energia (EDI) per la valutazione della robustezza del sistema di controllo è una valida alternativa rispetto alle quantità di risposta come lo spostamento o l'accelerazione, ed è in grado di indicare, in modo sintetico, il livello di protezione dell'intero sistema (sistema primario e di



**Figura 3.10.** Varianza dello spostamento relativo del sistema di controllo rispetto al suolo  $d_T$  al variare dei parametri di progetto  $\nu$  e  $\xi_T$  per diverse coppie dei parametri  $\mu$  e  $\beta$ .

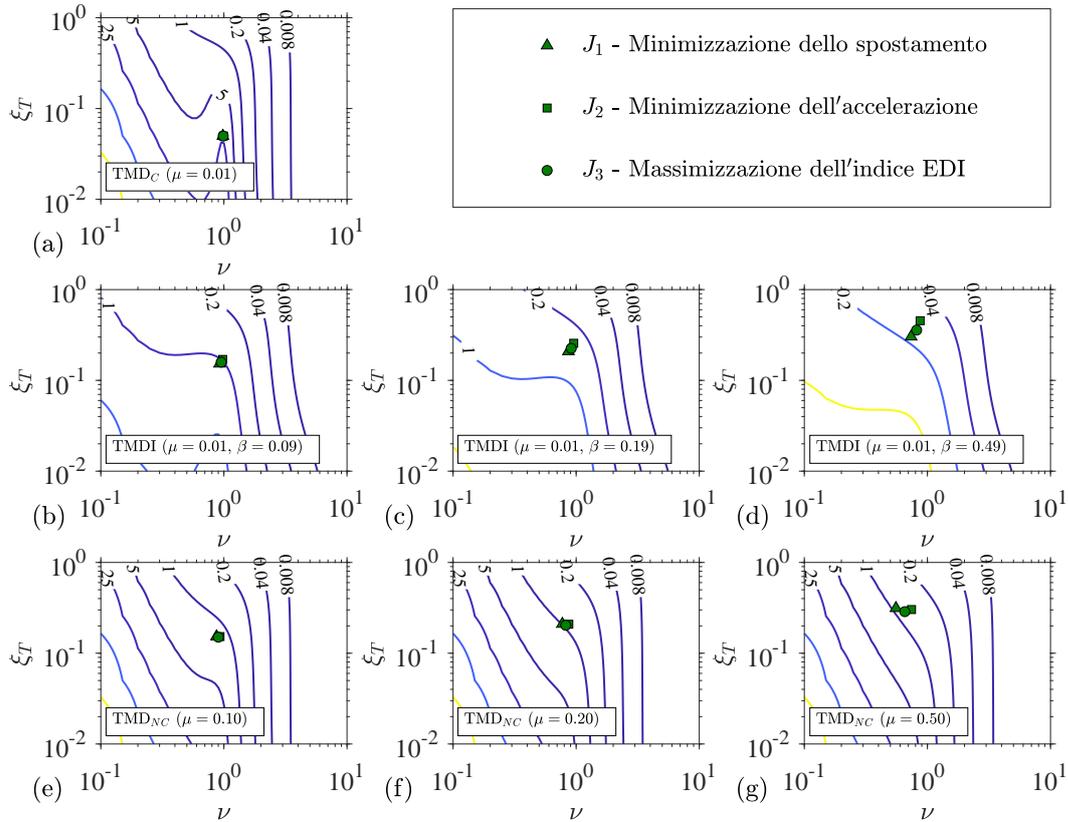
controllo).

### 3.5 Valutazione dell'efficacia sismica

In questo paragrafo viene valutata l'efficacia del sistema di controllo TMDI nel caso di eccitazione sismica alla base. Sono state condotte analisi nel dominio del tempo considerando quattro accelerogrammi naturali, riportati in Tab. 2.1, relativi ai terremoti di Imperial Valley-El Centro e Tokachi-Oki-Hachinohe, esempi terremoti di tipo far-field, e Northridge-Sylmar-Olive View e Kobe-KJMA, esempi terremoti near-fault. Dalle storie temporali delle risposte è possibile osservare il tempo richiesto, in termini di numero di oscillazioni, affinché il sistema di controllo diventi efficace. Ai fini di confronto vengono inoltre riportate le risposte dinamiche dei sistemi TMD tradizionali.

Le Tabelle 3.4 e 3.5 riportano rispettivamente gli indici di prestazione  $\hat{I}_1 - \hat{I}_4$  (definiti nell'Eq. 3.8) e  $I_1 - I_4$  (definiti nell'Eq. 3.9) per i sette casi esemplificativi presi in considerazione, relativi ai sistemi di controllo TMDI e TMD, e per i quattro terremoti considerati.

Per ciascun sistema di controllo e terremoto, sono stati utilizzati i parametri di progetto ottimale riportati in Tabella 3.2 determinati, nel caso di azione rumore

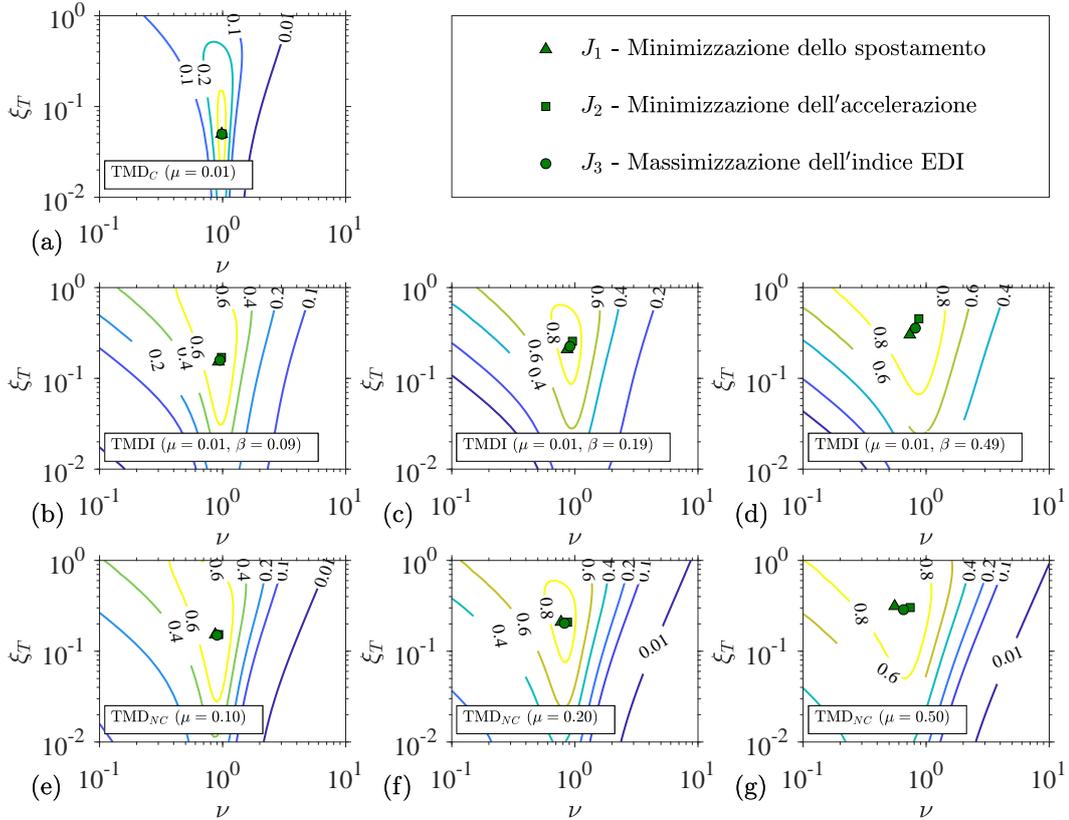


**Figura 3.11.** Varianza dello spostamento relativo del sistema di controllo rispetto al sistema primario  $d_{TI}$  al variare dei parametri di progetto  $\nu$  e  $\xi_T$  per diverse coppie dei parametri  $\mu$  e  $\beta$ .

bianco, utilizzando come funzione obiettivo l'indice di dissipazione di energia EDI ( $J_3$ ).

Per ciascun terremoto, sulla base degli indici sia in termini di valore quadratico medio sia di picco, Tab. 3.4 e 3.5, possono essere fatte le seguenti considerazioni di carattere generale.

- Un sistema TMDI è sempre efficace nella riduzione della risposta del sistema primario rispetto alla situazione di assenza di controllo e l'efficacia generalmente aumenta all'aumentare di  $\beta$ . Questo risultato è stato già osservato nel caso di azione rumore bianco;
- Se si assume  $\beta \geq 0.2$ , il sistema di controllo è in grado di controllare efficacemente anche le risposte del sistema secondario;
- Il sistema TMDI risulta tipicamente più efficace rispetto al TMD caratterizzato dallo stesso rapporto di massa equivalente  $\mu_E$ . La maggiore efficacia è evidente non solo per il sistema primario, ma soprattutto per quello di controllo;
- Per quanto riguarda i sistemi TMD, l'efficacia con TMD non convenzionali è maggiore rispetto a quella dei sistemi TMD convenzionali: infatti, le risposte



**Figura 3.12.** Indice di dissipazione di energia (EDI) al sistema primario  $d_{TI}$  al variare dei parametri di progetto  $\nu$  e  $\xi_T$  per diverse coppie dei parametri  $\mu$  e  $\beta$ .

del sistema primario sono ridotte in misura maggiore. Per quanto riguarda le risposte del sistema di controllo, invece, sono controllate solo per alcuni terremoti e per elevati rapporti di massa. Tuttavia, a differenza di quanto osservato nel caso di rumore bianco, l'aumento del rapporto di masse  $\mu$  non sempre ha come risultato l'incremento delle prestazioni in termini di riduzioni della risposta del sistema primario (vedere casi di Imperial Valley-El Centro, Northridge-Sylmar-Olive View e Kobe-KJMA).

Indipendentemente dal sistema di controllo considerato, la percentuale di riduzione delle risposte del sistema primario sono più elevate in termini di valori quadratici medi rispetto ai valori di picco; inoltre, solo per gli indici in termini di valori quadratici medi, la quantità di risposta maggiormente ridotta risulta essere l'accelerazione (ad eccezione del terremoto di Northridge-Sylmar-Olive View). Nel seguito, verranno discussi nel dettaglio gli aspetti caratteristici emersi sia per i terremoti di tipo far-field che per quelli near-fault.

### 3.5.1 Terremoti far-field

Le migliori prestazioni del sistema TMDI in termini di riduzione delle risposte del sistema primario si osservano per il terremoto di Tokachi-Oki-Hachinohe (64% - 79% in termini di valori quadratici medi e 38% - 64% in termini di valori di picco).

Terremoto	Caso				Sist. primario		Sist. di controllo	
	Tipo	$\mu$	$\beta$	$\mu_E$	$\hat{I}_1$	$\hat{I}_2$	$\hat{I}_3$	$\hat{I}_4$
Imperial Valley (El Centro) $\hat{q}_0 = 0.072$ $\hat{q}_0^{(tot)} = 0.072$	TMD <sub>C</sub>	0.01	0	0.01	0.945	0.925	5.991	5.593
	TMDI	0.01	0.09	0.10	0.673	0.650	1.685	1.487
	TMD <sub>NC</sub>	0.10	0	0.10	0.687	0.634	2.082	1.779
	TMDI	0.01	0.19	0.20	0.569	0.554	1.066	0.919
	TMD <sub>NC</sub>	0.20	0	0.20	0.628	0.554	1.597	1.288
	TMDI	0.01	0.49	0.50	0.473	0.448	0.681	0.505
Tokachi-Oki (Hachinohe) $\hat{q}_0 = 0.178$ $\hat{q}_0^{(tot)} = 0.178$	TMD <sub>NC</sub>	0.50	0	0.50	0.655	0.480	1.660	1.249
	TMD <sub>C</sub>	0.01	0	0.01	0.710	0.706	5.117	5.014
	TMDI	0.01	0.09	0.10	0.361	0.360	0.962	0.921
	TMD <sub>NC</sub>	0.10	0	0.10	0.379	0.371	1.100	1.033
	TMDI	0.01	0.19	0.20	0.282	0.282	0.544	0.511
	TMD <sub>NC</sub>	0.20	0	0.20	0.323	0.307	0.747	0.663
Northridge (Sylmar-Olive View) $\hat{q}_0 = 0.127$ $\hat{q}_0^{(tot)} = 0.128$	TMDI	0.01	0.49	0.50	0.216	0.212	0.298	0.241
	TMD <sub>NC</sub>	0.50	0	0.50	0.318	0.254	0.737	0.564
	TMD <sub>C</sub>	0.01	0	0.01	0.862	0.862	4.886	4.812
	TMDI	0.01	0.09	0.10	0.652	0.695	1.279	1.410
	TMD <sub>NC</sub>	0.10	0	0.10	0.682	0.688	1.482	1.412
	TMDI	0.01	0.19	0.20	0.562	0.597	0.891	0.917
Kobe (KJMA) $\hat{q}_0 = 0.174$ $\hat{q}_0^{(tot)} = 0.174$	TMD <sub>NC</sub>	0.20	0	0.20	0.659	0.626	1.410	1.186
	TMDI	0.01	0.49	0.50	0.467	0.456	0.663	0.526
	TMD <sub>NC</sub>	0.50	0	0.50	0.618	0.507	1.403	1.106
	TMD <sub>C</sub>	0.01	0	0.01	0.698	0.672	5.810	5.439
	TMDI	0.01	0.09	0.10	0.370	0.346	1.029	0.889
	TMD <sub>NC</sub>	0.10	0	0.10	0.381	0.345	1.256	1.081
	TMDI	0.01	0.19	0.20	0.314	0.290	0.631	0.506
	TMD <sub>NC</sub>	0.20	0	0.20	0.375	0.311	1.042	0.819
	TMDI	0.01	0.49	0.50	0.311	0.256	0.493	0.308
	TMD <sub>NC</sub>	0.50	0	0.50	0.446	0.286	1.251	0.955

**Tabella 3.4.** Indici di prestazione  $\hat{I}_1 - \hat{I}_4$  delle risposte in termini di valore quadratico medio per diversi valori delle coppie  $\mu$  e  $\beta$ .

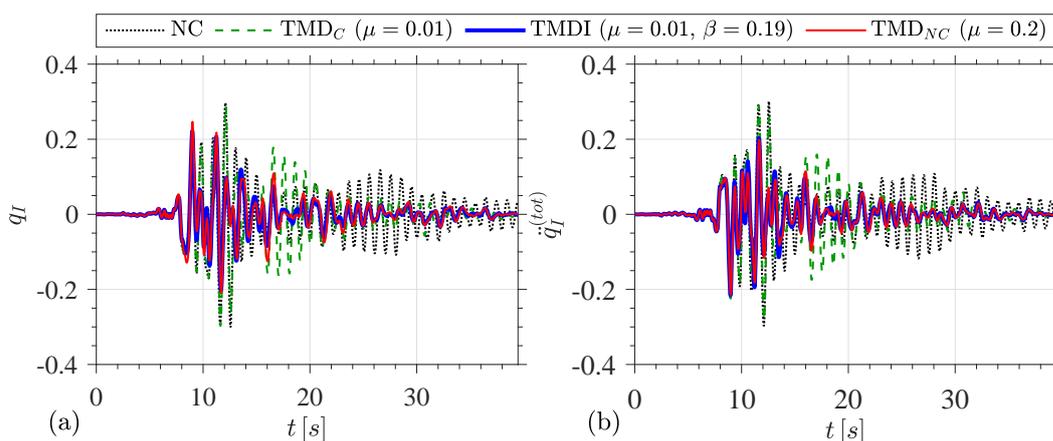
Le prestazioni peggiori si osservano, invece, per il terremoto di Imperial Valley-El Centro (33% - 55% in termini di valori quadratici medi e 14% - 40% in termini di valori di picco). Tale aspetto può essere spiegato osservando le storie temporali dello spostamento relativo e dell'accelerazione assoluta del sistema primario, raffigurati nelle Figg. 3.13 e 3.14, rispettivamente per l'accelerogramma di Imperial Valley-El Centro e di Tokachi-Oki-Hachinohe. A scopo di confronto, in ciascun grafico, oltre al caso in assenza di controllo (NC), sono riportate le risposte del sistema TMDI ( $\mu = 0.01$  e  $\beta = 0.19$ ) insieme a quelle dei sistemi TMD<sub>C</sub> ( $\mu = 0.01$ ) e TMD<sub>NC</sub> ( $\mu = 0.2$ ).

Terremoto	Tipo	Caso			Sist. primario		Sist. di controllo	
		$\mu$	$\beta$	$\mu_E$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$
Imperial Valley (El Centro) $\hat{q}_0 = 0.301$ $\hat{q}_0^{(tot)} = 0.301$	TMD <sub>C</sub>	0.01	0	0.01	0.991	0.963	5.100	4.801
	TMDI	0.01	0.09	0.10	0.856	0.830	1.888	1.786
	TMD <sub>NC</sub>	0.10	0	0.10	0.838	0.780	2.203	2.012
	TMDI	0.01	0.19	0.20	0.738	0.716	1.256	1.194
	TMD <sub>NC</sub>	0.20	0	0.20	0.820	0.712	1.694	1.445
	TMDI	0.01	0.49	0.50	0.613	0.601	0.789	0.646
	TMD <sub>NC</sub>	0.50	0	0.50	0.882	0.605	1.914	1.534
	TMDI	0.01	0.09	0.10	0.599	0.617	1.177	1.148
Tokachi-Oki (Hachinohe) $\hat{q}_0 = 0.531$ $\hat{q}_0^{(tot)} = 0.531$	TMD <sub>C</sub>	0.01	0	0.01	0.685	0.685	5.037	4.798
	TMDI	0.01	0.09	0.10	0.599	0.617	1.177	1.148
	TMD <sub>NC</sub>	0.10	0	0.10	0.618	0.608	1.345	1.313
	TMDI	0.01	0.19	0.20	0.503	0.532	0.730	0.686
	TMD <sub>NC</sub>	0.20	0	0.20	0.547	0.534	0.940	0.878
	TMDI	0.01	0.49	0.50	0.362	0.406	0.387	0.336
	TMD <sub>NC</sub>	0.50	0	0.50	0.509	0.456	0.812	0.710
	TMDI	0.01	0.09	0.10	0.776	0.812	1.549	1.680
Northridge (Sylmar-Olive View) $\hat{q}_0 = 0.625$ $\hat{q}_0^{(tot)} = 0.625$	TMD <sub>C</sub>	0.01	0	0.01	0.944	0.952	3.119	3.283
	TMDI	0.01	0.09	0.10	0.776	0.812	1.549	1.680
	TMD <sub>NC</sub>	0.10	0	0.10	0.829	0.815	1.775	1.750
	TMDI	0.01	0.19	0.20	0.645	0.693	1.136	1.116
	TMD <sub>NC</sub>	0.20	0	0.20	0.755	0.720	1.593	1.474
	TMDI	0.01	0.49	0.50	0.518	0.492	0.691	0.643
	TMD <sub>NC</sub>	0.50	0	0.50	0.795	0.603	1.387	1.148
	TMDI	0.01	0.09	0.10	0.492	0.457	1.328	1.224
Kobe (KJMA) $\hat{q}_0 = 0.517$ $\hat{q}_0^{(tot)} = 0.518$	TMD <sub>C</sub>	0.01	0	0.01	0.815	0.781	5.931	5.408
	TMDI	0.01	0.09	0.10	0.492	0.457	1.328	1.224
	TMD <sub>NC</sub>	0.10	0	0.10	0.503	0.456	1.681	1.408
	TMDI	0.01	0.19	0.20	0.438	0.419	0.868	0.721
	TMD <sub>NC</sub>	0.20	0	0.20	0.507	0.425	1.373	1.142
	TMDI	0.01	0.49	0.50	0.415	0.358	0.636	0.488
	TMD <sub>NC</sub>	0.50	0	0.50	0.557	0.387	1.580	1.254

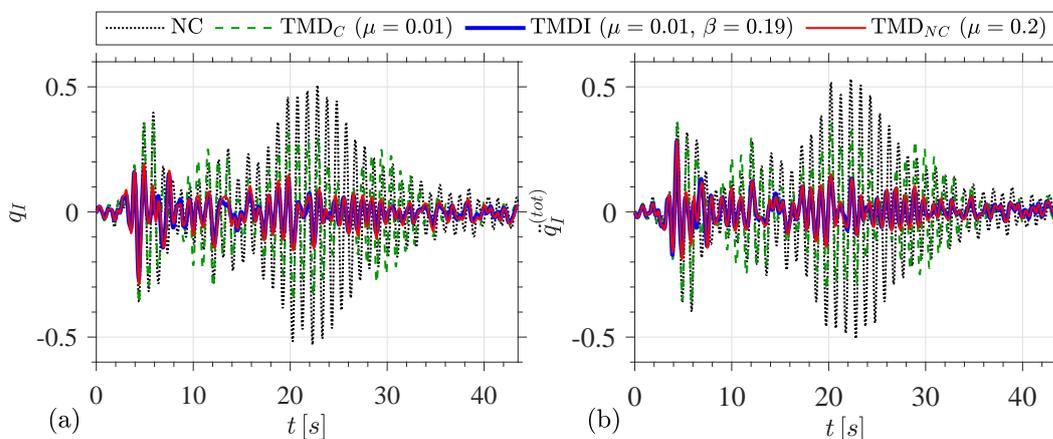
**Tabella 3.5.** Indici di prestazione  $I_1 - I_4$  delle risposte in termini di valore di picco per diversi valori delle coppie  $\mu$  e  $\beta$ .

La parte più significativa del terremoto di Imperial Valley-El Centro è concentrata all'inizio del segnale e per questo motivo i sistemi di controllo, inizialmente soggetti solo a piccole oscillazioni, non risultano ancora completamente attivati; per tale ragione i diversi sistemi di controllo risultano poco efficaci soprattutto in termini di valori di picco perché le risposte del sistema primario nella parte iniziale, caratterizzata dalle maggiori amplificazioni, risultano solo leggermente ridotte penalizzando gli indici di prestazione  $I_1 - I_2$ . Invece, i sistemi di controllo TMDI e TMD sono maggiormente efficaci nel caso del terremoto di Tokachi-Oki-Hachinohe perché la parte più significativa del segnale è concentrata nella parte centrale e

quindi i sistemi di controllo hanno avuto il tempo necessario per attivarsi ed andare a regime. Le storie temporali delle risposte del sistema primario relative ai sistemi TMDI e TMD<sub>NC</sub> sono simili, infatti gli indici di prestazione in termini di valori di picco  $I_1 - I_2$  sono simili; tuttavia, il sistema TMDI ha raggiunto prestazioni migliori per l'intera durata dell'evento (i picchi secondari erano sempre inferiori, come dimostrato osservando anche gli indici  $\hat{I}_1 - \hat{I}_2$ ).



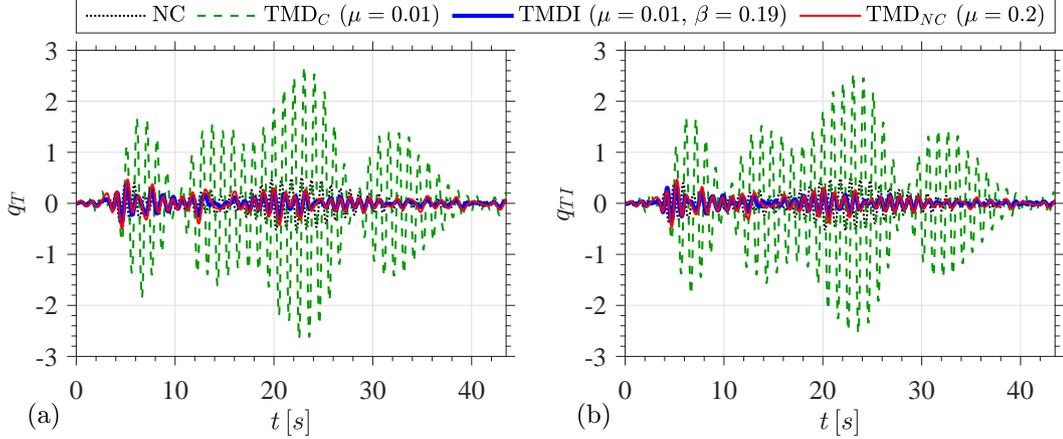
**Figura 3.13.** Accelerogramma di Imperial Valley-El Centro. Storie temporali delle risposte del sistema primario in termini di spostamento  $q_I$  (a) e accelerazione  $\ddot{q}_I^{(tot)}$  (b) per vari valori dei parametri  $\mu$  e  $\beta$ .



**Figura 3.14.** Accelerogramma di Tokachi-Oki-Hachinohe. Storie temporali delle risposte del sistema primario in termini di spostamento  $q_I$  (a) e accelerazione  $\ddot{q}_I^{(tot)}$  (b) per vari valori dei parametri  $\mu$  e  $\beta$ .

A titolo esemplificativo, la Fig. 3.15 riporta le storie temporali delle risposte del sistema di controllo nel caso del terremoto di Tokachi-Oki-Hachinohe per gli stessi sistemi TMDI e TMD sopra analizzati. Il tempo di attivazione più basso necessario per l'attivazione del sistema TMDI permette di controllare in modo più efficiente anche gli spostamenti della massa ausiliaria, conferendo prestazioni migliori rispetto ai sistemi TMD<sub>C</sub> e TMD<sub>NC</sub>. L'efficacia del sistema TMDI è in questo caso superiore

rispetto a quella del  $\text{TMD}_{\text{NC}}$  come confermato dagli indici di prestazione in termini di valore quadratico medio  $\hat{I}_3 - \hat{I}_4$  e di picco  $I_3 - I_4$ .



**Figura 3.15.** Accelerogramma di Tokachi-Oki-Hachinohe. Storie temporali delle risposte del sistema di controllo in termini di spostamento  $q_T$  (a) e  $q_{TI}$  (b) per vari valori dei parametri  $\mu$  e  $\beta$ .

### 3.5.2 Terremoti near-fault

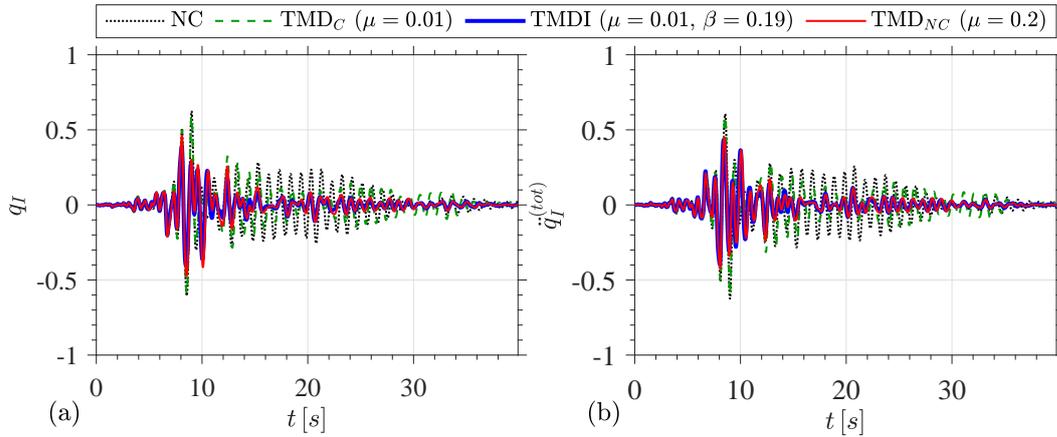
Per i terremoti di tipo near-fault, le prestazioni dei sistemi di controllo sono strettamente correlate al contenuto in frequenza dei terremoti, tipicamente limitati in una banda ristretta. L'efficacia sismica dipende fortemente dalle frequenze del sistema primario accoppiato con il sistema di controllo e della loro posizione rispetto all'intervallo di frequenza dell'azione. Le prestazioni ottenute con il sistema TMDI nel caso del terremoto di Kobe-KJMA (63% - 74% in termini di valori quadratici medi e 51% - 64% in termini di valori di picco) sono migliori rispetto a quelle ottenute per il terremoto di Northridge-Sylmar-Olive View (31% - 54% in termini di valori quadratici medi, 16% - 50% in termini di valori di picco).

Osservando le storie temporali delle quantità di risposta del sistema primario per il terremoto di Northridge-Sylmar-Olive View, Fig. 3.16, si può notare come la principale componente di tipo impulsivo dell'azione è concentrata nella parte iniziale del segnale e di conseguenza i sistemi di controllo, non ancora completamente attivati, non riescono a ridurre in modo efficace i picchi delle risposte.

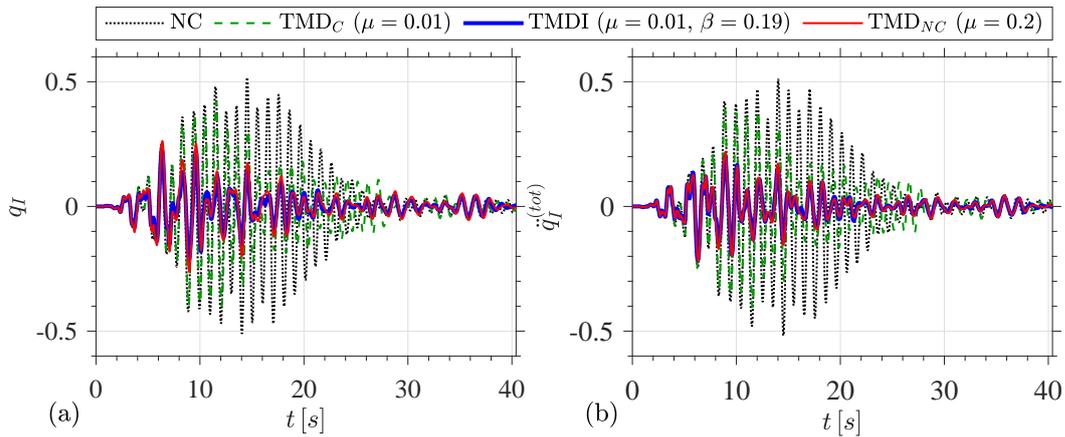
Questo fenomeno non è evidente per il terremoto di Kobe-KJMA, Fig. 3.17, dove le componenti impulsive non sono concentrate nella parte iniziale del segnale e quindi i sistemi TMDI e TMD hanno avuto abbastanza tempo per attivarsi ed essere efficaci.

Le storie temporali dei sistemi TMDI e  $\text{TMD}_{\text{NC}}$  sono simili, ma il sistema TMDI garantisce una riduzione dei picchi per l'intera durata dell'evento; inoltre il tempo di attivazione di questi due sistemi è inferiore rispetto a quello del  $\text{TMD}_C$ .

Dalla Fig. 3.18, è possibile osservare le risposte del sistema di controllo per il terremoto di Kobe-KJMA dove, come già osservato nel caso di terremoti far-field, le migliori prestazioni del sistema TMDI rispetto ai tradizionali sistemi TMD sono evidenti. Infatti, il minore tempo necessario per l'attivazione del sistema TMDI



**Figura 3.16.** Accelerogramma di Northridge-Sylmar-Olive View. Storie temporali delle risposte del sistema primario in termini di spostamento  $q_I$  (a) e accelerazione  $\ddot{q}_I^{(tot)}$  (b) per vari valori dei parametri  $\mu$  e  $\beta$ .

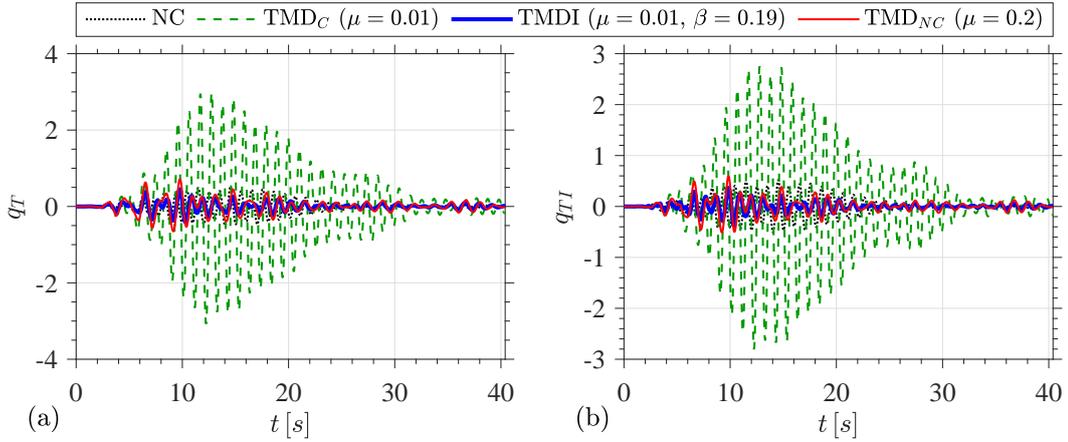


**Figura 3.17.** Accelerogramma di Kobe-KJMA. Storie temporali delle risposte del sistema primario in termini di spostamento  $q_I$  (a) e accelerazione  $\ddot{q}_I^{(tot)}$  (b) per vari valori dei parametri  $\mu$  e  $\beta$ .

permette inoltre di controllare in modo più efficace gli spostamenti  $d_T$  e  $d_{TI}$  della massa ausiliaria.

### 3.6 Influenza dell'allocazione del sistema di controllo

L'obiettivo di questo paragrafo è quello di valutare l'influenza del parametro di allocazione  $\phi_k$  sia sulla progettazione ottimale, Sottoparagrafo 3.6.1, sia sull'efficacia del sistema di controllo, Sottoparagrafo 3.6.2. In particolare, verrà assunto come metodologia di progettazione ottimale, quella relativa alla massimizzazione dell'indice di dissipazione di energia (EDI).



**Figura 3.18.** Accelerogramma di Kobe-KJMA. Storie temporali delle risposte del sistema di controllo in termini di spostamento  $q_T$  (a) e  $q_{TI}$  (b) per vari valori dei parametri  $\mu$  e  $\beta$ .

### 3.6.1 Indice di progetto e parametri ottimali

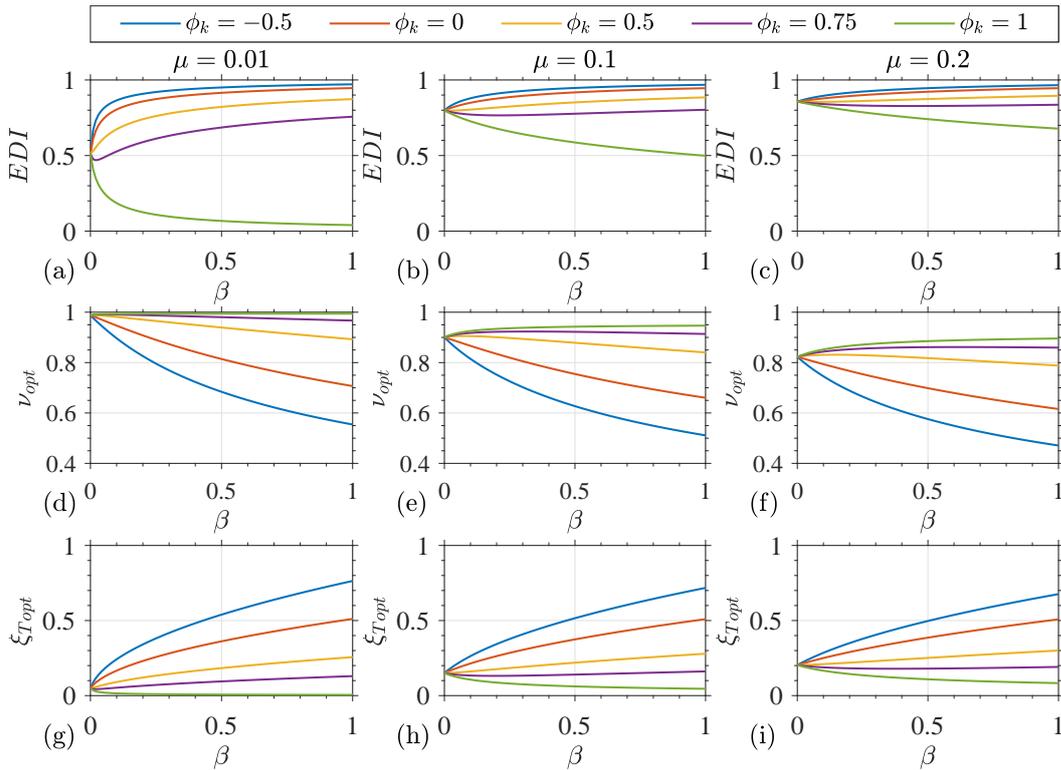
In questo sottoparagrafo si vuole valutare l'influenza dell'allocazione del sistema di controllo sull'indice di progetto e sui parametri di progetto ottimale.

Le Figure 3.19 (a-i) sono disposte in una matrice 3x3, dove lungo le righe si riportano rispettivamente l'indice di progetto  $EDI$  e i parametri ottimali  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{T_{opt}}$  per tre diversi valori del rapporto di massa  $\mu$  ( $\mu = 0.01, 0.1, 0.2$ ) riportati invece lungo le colonne, al variare del rapporto di inertanza  $\beta$  e per diversi valori del parametro  $\phi_k$  ( $\phi_k = -0.5, 0, 0.5, 0.75, 1$ ). I sistemi di controllo TMD ( $\beta = 0$ ), a differenza dei sistemi TMDI (o al limite TID per  $\mu = 0$ ) che hanno due terminali, hanno un unico terminale e per questo risulta indipendente dal parametro  $\phi_k$ . Inoltre quando  $\phi_k = 0$  si ricade nel caso in precedenza studiato di sistema di controllo TMDI (o TID) collegato a terra o in un punto in cui la forma modale è nulla, mentre quando  $\phi_k = 1$  si ricade nel caso di sistema TMDI (o TID) ad unico terminale.

Osservando le Figg. 3.19 (a-c) si nota come per  $\beta = 0$  (sistema di controllo TMD) tutte le curve passano per lo stesso punto la cui ordinata aumenta all'aumentare del rapporto di massa  $\mu$ . Al variare del parametro  $\phi_k$  si possono avere diverse situazioni nelle quali il sistema TMDI può avere valori dell'indice EDI maggiori, inferiori o pari a quelle del sistema TMD caratterizzato dallo stesso rapporto di massa. In particolare se la funzione che definisce l'indice EDI al variare di  $\beta$  è monotona crescente allora il sistema TMDI risulta più performante del sistema TMD, viceversa se è monotona decrescente risulta meno performante.

Infatti, per piccoli valori di  $\mu$  ( $\mu = 0.01$ ), Fig. 3.19 (a), la funzione che descrive l'indice EDI al variare di  $\beta$  risulta essere, per  $\phi_k = 1$  monotona decrescente, per  $\phi_k = 0.75$  prima decrescente e poi crescente con un minimo per  $\beta \cong 0.02$ , mentre per  $\phi_k \geq 0.5$  monotona crescente. Inoltre l'influenza del parametro  $\phi_k$  risulta maggiormente significativa per valori elevati del rapporto di inertanza.

Per valori più elevati del rapporto di massa ( $\mu = 0.1, 0.2$ ), Figg. 3.19 (b-c), possono essere fatte le stesse considerazioni, ma si può notare come all'aumentare



**Figura 3.19.** Indice di dissipazione di energia ( $EDI$ ) e parametri ottimali  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{Topt}$  al variare di  $\beta$  e per diversi valori di  $\phi_k$  e  $\mu$ .

del parametro  $\mu$  l'influenza del parametro  $\phi_k$  risulta meno significativa. Tuttavia, a fissata coppia  $\mu - \beta$  al diminuire del parametro  $\phi_k$  l'indice di dissipazione di energia ( $EDI$ ) aumenta sempre.

Per quanto riguarda i parametri ottimali  $\nu_{opt}$  (Figg. 3.19 (d-f)) e  $\xi_{Topt}$  (Figg. 3.19 (g-h)), si nota come tutte le curve convergono ai valori dei parametri ottimali del sistema TMD ( $\beta = 0$ ) ed in particolare all'aumentare del rapporto di massa i valori del rapporto di frequenze ottimale del sistema TMD diminuiscono, mentre quelli relativi al rapporto di smorzamento ottimale aumentano.

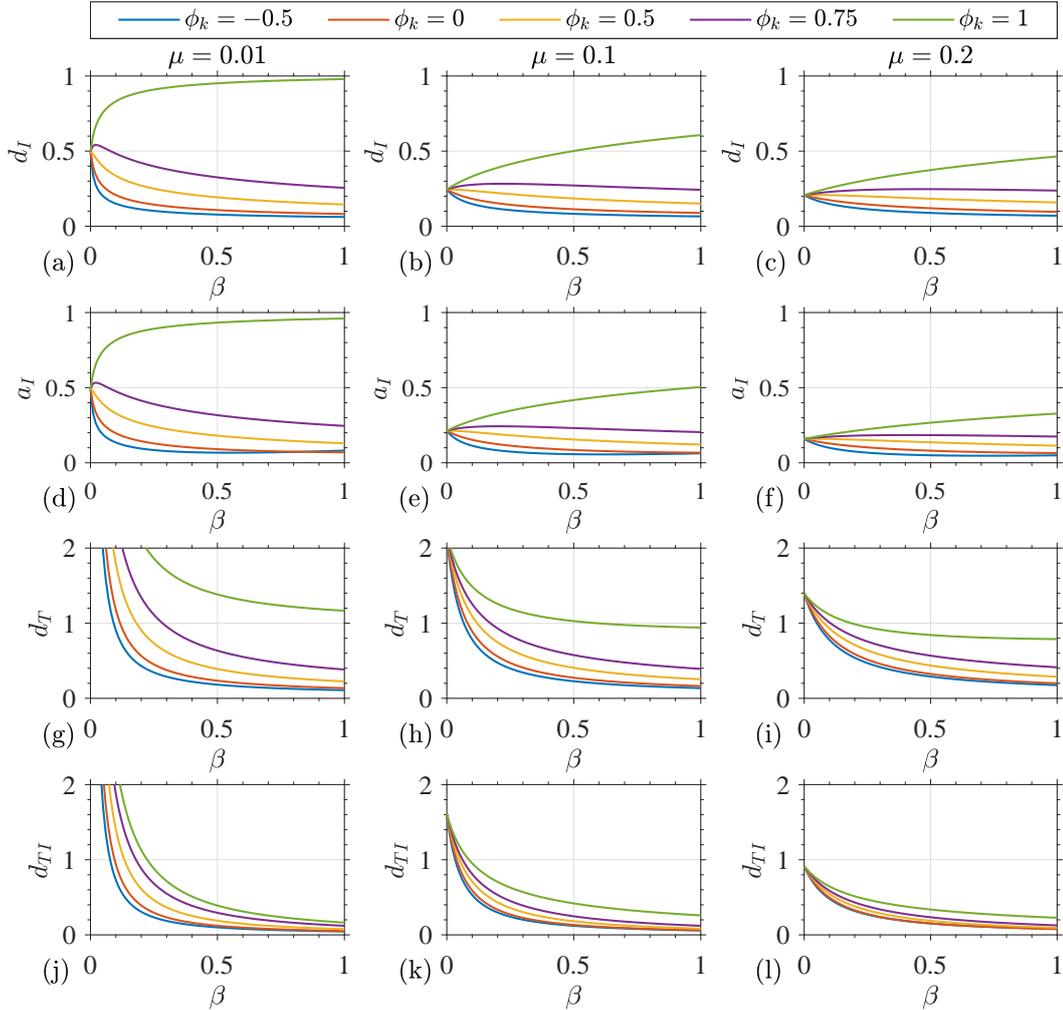
Si nota come al diminuire del parametro  $\phi_k$ , la funzione che descrive il rapporto di frequenze ottimale  $\nu_{opt}$  al variare di  $\beta$  risulta essere: i) sempre crescente ( $\phi_k = 1$ ), ii) prima crescente e poi decrescente ( $\phi_k = 0.50, 0.75$ ) e iii) sempre decrescente ( $\phi_k = -0.5, 0$ ); invece la funzione del rapporto di smorzamento ottimale  $\xi_{Topt}$  al variare del rapporto di inerzia risulta essere: i) sempre decrescente ( $\phi_k = 1$ ), ii) prima decrescente e poi crescente ( $\phi_k = 0.75$ ) e iii) sempre crescente ( $\phi_k = -0.5, 0, 0.5$ ).

L'allocazione del sistema di controllo modifica in modo significativo i parametri di progetto indipendentemente dal valore del rapporto di massa  $\mu$ , mentre la variazione risulta maggiormente significativa quando il rapporto di inerzia  $\beta$  è elevato. Infine a parità di  $\mu$  e  $\beta$  e al diminuire del parametro  $\phi_k$ , il rapporto di frequenze ottimale diminuisce sempre, mentre il rapporto di smorzamento aumenta.

### 3.6.2 Risposte del sistema primario e di controllo

In questo sottoparagrafo si vuole valutare l'influenza dell'allocation del sistema di controllo sull'efficacia nella riduzione delle risposte del sistema primario e di controllo.

Nella Figura 3.20 si riportano, in analogia alla Fig. 3.19, rispettivamente le quantità di risposta del sistema primario,  $d_I$  e  $a_I$ , e del sistema di controllo,  $d_T$  e  $d_{TI}$ , per gli stessi valori del rapporto di massa  $\mu$  e del parametro  $\phi_k$ , al variare del rapporto di inerzia  $\beta$ .



**Figura 3.20.** Quantità di risposta del sistema primario,  $d_I$  e  $a_I$ , e del sistema di controllo,  $d_T$  e  $d_{TI}$ , al variare di  $\beta$  e per diversi valori di  $\phi_k$  e  $\mu$ .

Al variare del parametro  $\phi_k$  si possono avere diverse situazioni nelle quali il sistema TMDI può avere valori delle risposte maggiori, inferiori o pari a quelle del sistema TMD caratterizzato dallo stesso rapporto di massa. In particolare se la funzione che definisce la risposta al variare di  $\beta$  è monotona decrescente allora il sistema TMDI risulta più performante del sistema TMD, viceversa se è monotona crescente risulta meno performante.

Per quanto riguarda lo spostamento relativo al suolo, Figg. 3.20 (a-c), e l'accelerazione assoluta, Figg. 3.20 (d-f), del sistema primario possono essere fatte le analoghe considerazioni discusse in precedenza per l'indice EDI. L'unica differenza è legata grafici dell'accelerazione  $a_I$ , dove nel caso  $\phi_k = -0.5$  e per i tre valori di  $\mu$  riportati, la funzione, al variare del rapporto di inertanza, inizialmente decresce e poi cresce e presenta un minimo in corrispondenza di un valore di  $\beta$  che aumenta con  $\mu$ .

Le funzioni relative agli spostamenti della massa ausiliaria rispetto al suolo, Figg. 3.20 (g-i) e rispetto alla massa del sistema primario, 3.20 (j-l), sono tutte monotone decrescenti. Quindi, indipendentemente dall'allocazione, l'aggiunta del dispositivo Inerter ad un sistema TMD riduce sempre la risposta del sistema di controllo. Nel caso dei sistemi TMD ( $\beta = 0$ ) all'aumentare di  $\mu$  le risposte del sistema di controllo diminuiscono, mentre a parità della coppia  $\mu - \beta$ , le riduzioni delle risposte  $d_T$  e  $d_{TI}$  aumentano al diminuire del parametro  $\phi_k$ .

### 3.7 Conclusioni

In questo capitolo, è stato affrontato il tema della progettazione ottimale, dell'allocazione ottimale e della valutazione delle prestazioni di sistemi innovativi TMDI nel mitigare la risposta dinamica di strutture multipiano a base fissa. Le prestazioni di questi sistemi di controllo sono state confrontate con quelle di altri sistemi a massa accordata che sono casi particolari del TMDI, ovvero il TID e i sistemi tradizionali TMD sia convenzionali che non convenzionali.

Il sistema a  $N+1$  gdl è stato studiato attraverso la definizione di un modello ridotto generalizzato a 2 gdl che nonostante sia stato ricavato per strutture multipiano a base fissa, può essere esteso a numerose altre situazioni strutturali (ponti, passerelle pedonali, ecc...).

I sistemi di controllo TMDI e TID, rispetto ai TMD (singolo terminale  $j$ ), sono caratterizzati da due terminali ( $j$  e  $k$ ) che tipicamente sono collegati a gdl diversi della struttura da controllare. Attraverso il modello ridotto è stato possibile definire una procedura per l'allocazione ottimale di entrambi i terminali del sistema di controllo all'interno della struttura basata sulla sola analisi della forma di vibrare della struttura da controllare. Per allocare in modo ottimale il sistema di controllo, infatti, il terminale  $j$  (corrispondente alla connessione viscoelastica) deve essere collegato in corrispondenza del massimo valore assoluto della forma di vibrare, mentre il terminale  $k$  (corrispondente al dispositivo Inerter) deve essere collegato in modo che la differenza modale tra i due terminali risulti massima.

Inizialmente è stato studiato un caso particolare (ma di notevole interesse) del sistema ridotto, ovvero il caso in cui il terminale  $k$  sia collegato a terra o in un punto nullo del modo da controllare. Successivamente è stata invece valutata l'influenza sia sulla progettazione ottimale che sull'efficacia dell'allocazione del sistema di controllo.

Sono state proposte tre diverse metodologie di progettazione ottimale del TMDI nel caso di eccitazione alla base di tipo rumore bianco. Le prime due metodologie sono basate sulla minimizzazione di quantità cinematiche della struttura primaria (in particolare lo spostamento relativo e l'accelerazione assoluta), mentre la terza è

basata sulla massimizzazione dell'indice EDI che massimizza l'energia dissipata nel sistema di controllo rispetto a quella di input.

I risultati hanno evidenziato come le curve di progetto dei parametri ottimali ottenute con le tre metodologie sono molto simili. I parametri di progetto ottimale selezionati con l'indice di energia sono intermedi rispetto alle altre due metodologie; per questo motivo, questa metodologia è stata scelta perché risulta un buon compromesso tra la minimizzazione degli spostamenti e la minimizzazione delle accelerazioni.

Si è osservato che, il TMDI è sempre più efficace di un TMD tradizionale con lo stesso rapporto di massa. Attraverso l'opportuna scelta delle coppie  $\mu - \beta$ , è possibile ottenere il livello di prestazioni desiderato. Quando il rapporto di massa non è elevato ( $\mu \leq 0.1$ ), il sistema di controllo TMDI, rispetto al TID, risulta più efficace nel ridurre la risposta del sistema primario quando i valori del rapporto di inerzia sono relativamente piccoli ( $\beta < 0.2$ ), mentre presentano prestazioni comparabili per  $\beta \geq 0.2$  (ovvero la presenza della massa ausiliaria è trascurabile).

Le analisi di sensitività perturbando i parametri di progetto in un range di variazione molto ampio ha mostrato che il TMDI è un sistema di controllo robusto, con prestazioni superiori al sistema TMD con lo stesso rapporto di massa equivalente  $\mu_E$ , nonostante risulta leggero perché richiede solo una piccola massa ausiliaria. Il TMDI, inoltre a differenza dei TMD tradizionali, è in grado di ridurre in modo significativo le risposte della massa ausiliaria.

L'efficacia del sistema TMDI progettato in modo ottimale è stata anche valutata nel caso di eccitazione alla base con accelerogrammi naturali sia di tipo near-fault che di tipo far-field. Le analoghe indicazioni sulla possibile scelta delle coppie  $\mu - \beta$  ottenute con l'azione stocastica di tipo rumore bianco sono state confermate anche nel caso di input sismici. Il sistema TMDI ha prestazioni superiori rispetto ai  $TMD_C$  e  $TMD_{NC}$  sia in termini di valori quadratici medi che di picco e sia per la risposta del sistema primario che di controllo. Questi risultati sono evidenti anche guardando le storie temporali delle risposte. Un aspetto da considerare nel caso di azioni multifrequenza come nel caso di terremoti è il tempo di attivazione necessario al sistema a masse accordate per iniziare ridurre in modo efficace la risposta del sistema da controllare. Questo aspetto è correlato al contenuto di frequenza del segnale che può deteriorare l'efficacia del sistema di controllo se l'accelerogramma ha un alto contenuto impulsivo nei primi istanti del segnale.

Infine, è stata valutata l'influenza dell'allocazione sistema di controllo (definita nel modello ridotto attraverso il parametro  $\phi_k$ ) rispetto al caso particolare inizialmente studiato ( $\phi_k = 0$ ). Si è visto come all'aumentare di  $\phi_k$  (ovvero al diminuire della differenza modale tra i due terminali) l'efficacia del sistema di controllo diminuisce in modo più o meno significativo, mentre per  $\phi_k < 0$  le prestazioni risultano addirittura superiori.

I risultati hanno dimostrato che un TMDI è efficace nel ridurre la risposta dinamica e l'utilizzo del dispositivo Inerter permette di avere un sistema di controllo leggero, con prestazioni e robustezza superiori rispetto ai tradizionali TMD. Attraverso l'Inerter è quindi possibile ottenere sistemi a masse accordate che uniscono la leggerezza dei  $TMD_C$  all'efficacia e alla robustezza dei  $TMD_{NC}$ . Sembra particolarmente applicabile, infatti, nel campo dell'ingegneria civile quando si tratta di

nuove costruzioni ma anche in quelle già esistenti, senza aggiungere un importante quantitativo di massa ausiliaria.

Per tutti questi motivi, un TMDI rappresenta una valida alternativa ad altre tecniche di controllo passivo e può essere implementata con successo in altre configurazioni strutturali come quella proposta nel successivo Capitolo 4, ovvero a strutture multipiano isolate alla base per le quali, sulla base dei risultati ottenuti in questo capitolo, risulta naturale la scelta di collegare il sistema di controllo tra la massa del basamento e il suolo.



## Capitolo 4

# Strutture multipiano isolate alla base dotate di TMDI

### 4.1 Premessa

In questo capitolo sono presentati i risultati relativi allo studio di strutture multipiano a N gdl isolate alla base e dotate di TMDI.

Nel precedente capitolo, infatti, è stato studiato l'utilizzo dell'innovativo TMDI come sistema di controllo per mitigare la risposta dinamica di strutture multipiano a base fissa. Sulla base dei precedenti risultati, la ricerca è quindi proseguita nello studio del sistema TMDI al fine di ridurre gli spostamenti laterali in strutture isolate alla base (BIS) che in alcune situazioni possono risultare eccessivi.

Le prestazioni del sistema di controllo, progettato in modo ottimale sulla base dell'indice energetico EDI, sono state valutate su sistemi ridotti sia con input stocastici di tipo rumore bianco e colorato, sia con accelerogrammi naturali. Inoltre, è stata valutata l'influenza della sovrastruttura e l'attenzione è stata in particolare rivolta all'efficacia del TMDI nel caso di BIS caratterizzati da sovrastrutture flessibili.

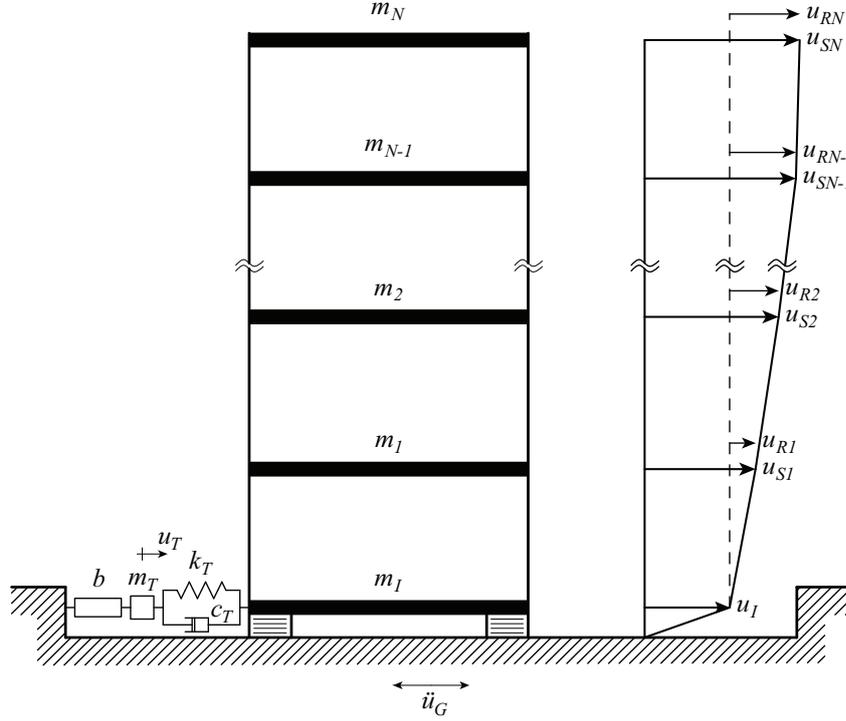
I risultati di tale studio sono stati pubblicati sulla rivista internazionale *Engineering Structures* [De Angelis, Giaralis et al., 2019]<sup>1</sup>.

### 4.2 Definizione di sistemi ridotti generalizzati

Al fine di limitare lo spostamento laterale della struttura multipiano a N livelli isolata alla base, Fig. 4.1, si propone l'inserimento del sistema di controllo TMDI. La struttura multipiano, nel seguito sovrastruttura, è dotata sia di un sistema di isolamento alla base (base isolation system, BIS), definito da una rigidità  $k_I$  e un coefficiente di smorzamento  $c_I$ , sia da un sistema TMDI la cui massa  $m_T$  è collegata alla massa  $m_I$  del BIS attraverso una molla e uno smorzatore lineare, rispettivamente di rigidità  $k_T$  e coefficiente di smorzamento  $c_T$ , e al suolo attraverso un Inerter lineare di inertanza  $b$ .

---

<sup>1</sup>M. De Angelis, A. Giaralis, F. Petrini and D. Pietrosanti, Optimal tuning and assessment of inertial dampers with grounded inerter for vibration control of seismically excited base-isolated systems, *Engineering Structures* (2019); 196: 109250. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.05.091.



**Figura 4.1.** Struttura multipiano a  $N$  livelli isolata alla base e dotata di sistema di controllo TMDI.

Le equazioni del moto, considerando solo la componente di traslazione orizzontale, relative alla sovrastruttura (ipotizzata piana, di tipo shear-type e con masse concentrate ai livelli) dotata di un BIS e un sistema TMDI e soggetta ad una accelerazione alla base  $\ddot{u}_g(t)$  possono essere scritte in forma matriciale nel seguente modo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{L}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\tilde{\mathbf{M}}\boldsymbol{\tau}\ddot{u}_g(t) \quad (4.1)$$

con

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & \mathbf{M}_S\boldsymbol{\tau}_S & \mathbf{0} \\ (\mathbf{M}_S\boldsymbol{\tau}_S)^T & m_{S,tot} + m_I & 0 \\ \mathbf{0}^T & 0 & m_T + b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & c_I + c_T & -c_T \\ \mathbf{0}^T & -c_T & c_T \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & k_I + k_T & -k_T \\ \mathbf{0}^T & -k_T & k_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_R(t) \\ u_I(t) \\ u_T(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}|_{b=0}$$

dove  $\mathbf{M}_S$ ,  $\mathbf{L}_S$  e  $\mathbf{K}_S$  sono rispettivamente le  $N \times N$  matrici di massa, smorzamento e rigidità della sovrastruttura come se fosse a base fissa,  $\boldsymbol{\tau}_S$  è il vettore di trasciamento  $N \times 1$ ,  $\mathbf{0}$  è il vettore nullo  $N \times 1$  e  $m_{S,tot} = \boldsymbol{\tau}_S^T \mathbf{M}_S \boldsymbol{\tau}_S$  è la massa totale della sovrastruttura. Il vettore  $\mathbf{u}_R(t) = [u_{R1}(t), u_{R2}(t), \dots, u_{RN}(t)]^T$  raccoglie gli spostamenti delle masse  $m_{S_i}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) della sovrastruttura rispetto al basamento del BIS, mentre  $u_I$  e  $u_T$  sono gli spostamenti relativi al suolo rispettivamente

della massa del BIS e del sistema TMDI. Inoltre gli spostamenti della sovrastruttura rispetto al suolo possono essere valutati come  $\mathbf{u}_S(t) = \mathbf{u}_R(t) + \boldsymbol{\tau}_S u_I(t)$ .

La sovrastruttura può essere realisticamente ipotizzata come un sistema a  $N$ -gdl classicamente smorzato ed è quindi possibile condurre un'analisi modale classica,  $\mathbf{K}_S \boldsymbol{\Phi}_S = \mathbf{M}_S \boldsymbol{\Phi}_S \boldsymbol{\Omega}_S^2$ , al fine di determinarne frequenze naturali  $\omega_{S_i}$  e modi naturali di vibrare  $\boldsymbol{\phi}_{S_i}$  che possono essere rispettivamente raccolti nella matrice spettrale  $\boldsymbol{\Omega}_S^2 = \text{diag}\{\omega_{S_1}^2, \dots, \omega_{S_N}^2\}$  e nella matrice modale  $\boldsymbol{\Phi}_S = [\boldsymbol{\phi}_{S_1}, \dots, \boldsymbol{\phi}_{S_N}]$ . Per i successivi sviluppi analitici risulta conveniente normalizzare gli autovettori in modo tale che  $\boldsymbol{\Phi}_S^T \mathbf{M}_S \boldsymbol{\Phi}_S = \mathbf{I}$ , dove  $\mathbf{I}$  è la matrice identità  $N \times N$ .

A questo punto, al fine di disaccoppiare le equazioni del moto della sovrastruttura, gli spostamenti  $\mathbf{u}_R$  possono essere determinati attraverso il metodo di sovrapposizione degli spostamenti modali nel seguente modo:

$$\mathbf{u}_R = \boldsymbol{\Phi}_S^T \boldsymbol{\Gamma}_S \mathbf{w}_R \quad (4.3)$$

dove  $\boldsymbol{\Gamma}_S = \boldsymbol{\Phi}_S^T \mathbf{M}_S \boldsymbol{\tau}_S$  è la matrice  $N \times N$  lungo la cui diagonale sono raccolti i coefficienti di partecipazione modale degli  $N$  modi di vibrare della sovrastruttura e  $\mathbf{w}_R$  è il vettore  $N \times 1$  che raccoglie le coordinate modali rispetto al BIS degli  $N$  oscillatori elementari in cui è stata decomposta la sovrastruttura. Avendo inoltre ipotizzato la sovrastruttura come un sistema classicamente smorzato si ha che i modi naturali di vibrare sono ortogonali alla matrice di smorzamento  $\mathbf{L}_S$  e quindi  $\boldsymbol{\Xi}_S = \boldsymbol{\Phi}_S^T \mathbf{L}_S \boldsymbol{\Phi}_S = \text{diag}\{2\xi_{S_i} \omega_{S_i}\}$  dove  $\xi_{S_i}$  è il rapporto di smorzamento dell' $i$ -esimo modo di vibrare della sovrastruttura.

Le matrici e i vettori dell'Eq. 4.2, avendo disaccoppiato le equazioni del moto della sovrastruttura, Eq. 4.3, possono essere riscritte nel seguente modo:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_S^2 & \boldsymbol{\Gamma}_S^2 \boldsymbol{\tau}_S & \mathbf{0} \\ (\boldsymbol{\Gamma}_S^2 \boldsymbol{\tau}_S)^T & m_{S,tot} + m_I & 0 \\ \mathbf{0}^T & 0 & m_T + b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_S^2 \boldsymbol{\Xi}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & c_I + c_T & -c_T \\ \mathbf{0}^T & -c_T & c_T \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_S^2 \boldsymbol{\Omega}_S^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & k_I + k_T & -k_T \\ \mathbf{0}^T & -k_T & k_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_R(t) \\ u_I(t) \\ u_T(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}|_{b=0}.$$

La progettazione ottimale del sistema di controllo TMDI e lo studio del comportamento dinamico del sistema completo a  $N + 1 + 1$  gdl definito dalle Eqq. 4.1 e 4.4 può risultare complesso e quindi, in analogia al Capitolo 3 per le strutture multipiano a base fissa, si è definito un modello ridotto generalizzato. Nel successivo Sottoparagrafo 4.2.1, verranno definite le equazioni del moto per il sistema ridotto a  $n+1+1$  gdl che può degenerare in due casi particolari: sistema ridotto a  $1+1+1$  gdl (Sottoparagrafo 4.2.2) e sistema ridotto a  $1+1$  gdl (Sottoparagrafo 4.2.2).

### 4.2.1 Sistema ridotto a $n+1+1$ gdl

A partire dalle Eqq. 4.1 e 4.4, se si considerano solamente gli  $n$  modi di vibrare maggiormente significativi della sovrastruttura mentre i restanti  $N - n$  modi di vibrare vengono considerati solamente in termini di masse modali ipotizzate collegate

rigidamente al basamento del BIS è possibile formulare il seguente sistema ridotto a  $n + 1 + 1$  gdl con  $0 \leq n \leq N$ .

Le equazioni del moto dei possibili  $N + 1$  sistemi ridotti generalizzati possono essere scritte in forma matriciale nel seguente modo:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{u}}^*(t) + \mathbf{L}^* \dot{\mathbf{u}}^*(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{u}^*(t) = -\tilde{\mathbf{M}}^* \boldsymbol{\tau}^* \ddot{u}_g(t) \quad (4.5)$$

con

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S^* & \mathbf{M}_S^* \boldsymbol{\tau}_S^* & \mathbf{0} \\ (\mathbf{M}_S^* \boldsymbol{\tau}_S^*)^T & m_S^* + m_I^* & 0 \\ \mathbf{0}^T & 0 & m_T + b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_S^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & c_I + c_T & -c_T \\ \mathbf{0}^T & -c_T & c_T \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S^* & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & k_I + k_T & -k_T \\ \mathbf{0}^T & -k_T & k_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_R(t) \\ u_I(t) \\ u_T(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\mathbf{M}}^* = \mathbf{M}^*|_{b=0}$$

dove  $\mathbf{M}_S^*$ ,  $\mathbf{L}_S^*$  e  $\mathbf{K}_S^*$  sono rispettivamente le matrici diagonali che contengono le masse modali  $m_{S_i}^*$ , i coefficienti di smorzamento modale  $c_{S_i}^*$  e le rigidezze modali  $k_{S_i}^*$  degli  $i$ -esimi modi di vibrare della sovrastruttura considerati,  $m_S^*$  è la massa modale totale degli  $n$  modi di vibrare considerati,  $m_I^*$  è la massa del basamento alla quale si ipotizzano collegate rigidamente le masse modali degli  $N - n$  modi di vibrare non considerati e  $\boldsymbol{\tau}_S^*$  è il vettore di trascinarsi di dimensioni  $n \times 1$ .

In Tab. 4.1 sono riportate le equazioni dei precedenti parametri sia per generico  $n$ , ovvero il numero di modi di vibrare della sovrastruttura considerati nel modello ridotto, sia per tre casi particolari  $n = N, 1, 0$ .

Parametro	$n = N$ ( $N + 1 + 1$ gdl)	$n = 1$ ( $1 + 1 + 1$ gdl)	$n = 0$ ( $1 + 1$ gdl)
$\mathbf{M}_S^* = \text{diag}\{m_{S_i}^*\}$	$\boldsymbol{\Gamma}_S^2$	$m_{S1}^*$	0
$\mathbf{L}_S^* = \text{diag}\{c_{S_i}^*\}$	$\boldsymbol{\Gamma}_S^2 \boldsymbol{\Xi}_S$	$c_{S1}^*$	0
$\mathbf{K}_S^* = \text{diag}\{k_{S_i}^*\}$	$\boldsymbol{\Gamma}_S^2 \boldsymbol{\Omega}_S^2$	$k_{S1}^*$	0
$m_S^* = \boldsymbol{\tau}_S^{*T} \mathbf{M}_S^* \boldsymbol{\tau}_S^*$	$m_{S,tot}$	$m_{S1}^*$	0
$m_I^* = m_I + m_{S,tot} - m_S^*$	$m_I$	$m_I + m_{S,tot} - m_{S1}^*$	$m_I + m_{S,tot}$
$\boldsymbol{\tau}_S^*$	$\boldsymbol{\tau}_S$	1	0

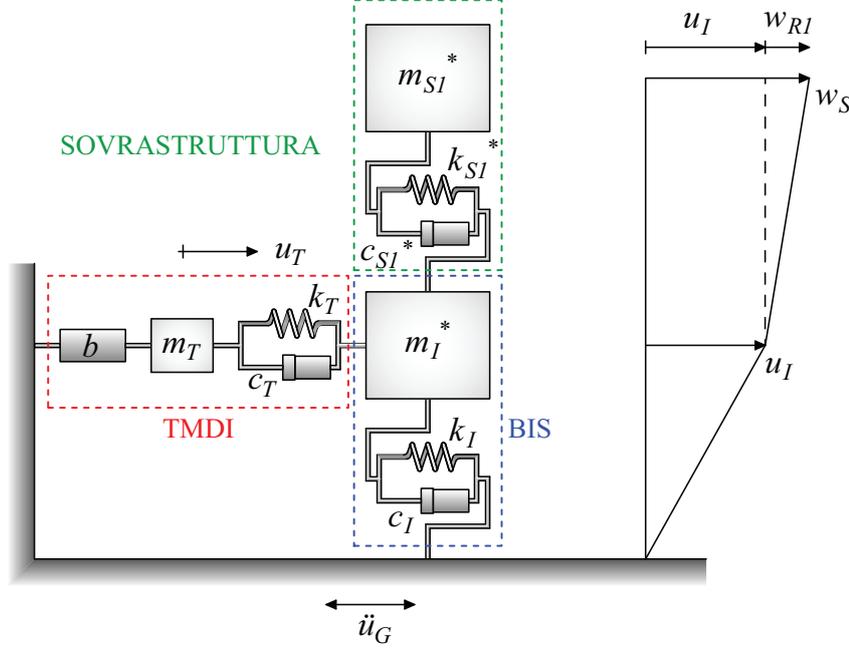
**Tabella 4.1.** Definizione dei parametri del sistema ridotto generalizzato al variare del numero  $n$  di modi di vibrare della sovrastruttura considerati.

Nel caso in cui  $n = N$ , ovvero il modello ridotto tiene in conto di tutti i modi di vibrare della sovrastruttura, le equazioni del sistema ridotto generalizzato, Eqq. 4.5 e 4.6, coincidono con quelle del sistema completo, Eqq. 4.1 e 4.4.

#### 4.2.2 Sistema ridotto a 1+1+1 gdl

Nel caso in cui si considera solo un modo di vibrare della sovrastruttura (tipicamente il primo),  $n = 1$ , il modello ridotto generalizzato definito nel Sottoparagrafo 4.2.1

degenera in un sistema a 3 gdl costituito da una sovrastruttura ad 1 gdl isolata alla base e dotata di TMDI. Le equazioni del moto in termini dimensionali del sistema ridotto a 1+1+1 gdl (sovrastruttura + BIS + TMDI), Fig. 4.2, possono essere ricavate sostituendo le definizioni riportate nella Tab. 4.1 nell'Eqq. 4.5 e 4.6.



**Figura 4.2.** Sistema ridotto generalizzato a 1 + 1 + 1 gdl.

Definendo  $\omega_{S1}^* = \sqrt{k_{S1}^*/m_{S1}^*}$ ,  $\omega_I^* = \sqrt{k_I/m_I^*}$  e  $\omega_T = \sqrt{k_T/(m_T + b)}$  le pulsazioni naturali dei tre sistemi disaccoppiati ad 1 gdl relativi alla sovrastruttura, al BIS e al TMDI, le equazioni del moto del sistema ridotto a 3 gdl possono essere scritte in forma adimensionale nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 \mu_S(\ddot{q}_R + \ddot{q}_I) + \frac{f_S}{m_I^*g} &= -\mu_S\ddot{q}_G \\
 \ddot{q}_I + 2\xi_I\dot{q}_I + q_I &= -\ddot{q}_G + \frac{f_S}{m_I^*g} + \frac{f_T}{m_I^*g} \\
 \mu\ddot{q}_T &= -\mu\ddot{q}_G - \frac{f_B}{m_I^*g} - \frac{f_T}{m_I^*g} \\
 \frac{f_S}{m_I^*g} &= 2\xi_S\nu_S\mu_S\dot{q}_R + \nu_S^2\mu_Sq_R \\
 \frac{f_B}{m_I^*g} &= \beta(\ddot{q}_T - \phi_k\ddot{q}_I) \quad \frac{f_T}{m_I^*g} = 2\xi_T\nu\mu_E(\dot{q}_T - \dot{q}_I) + \nu^2\mu_E(q_T - q_I)
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

in termini delle adimensionali coordinate di spostamento  $\mathbf{q} = \mathbf{u}^*/(g/\omega_I^{*2})$ , velocità  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{u}}^*/(g/\omega_I^*)$  e accelerazione  $\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{u}}^*/g$  relative al suolo, con  $\mathbf{u}^* = [w_{R1}, u_I, u_T]^T$ , e l'accelerazione alla base normalizzata  $\ddot{q}_g = \ddot{u}_g/g$ , dove  $g$  è l'accelerazione di gravità. Nelle precedenti equazioni, i fattori di smorzamento  $\xi_S$ ,  $\xi_I$  e  $\xi_T$  rispettivamente

della sovrastruttura, del BIS e del TMDD, i rapporti di frequenze  $\nu_S$  e  $\nu$  e i rapporti di massa  $\mu_S$  e  $\mu$  rispettivamente della sovrastruttura e del TMDD, il rapporto di inerzia  $\beta$ , sono stati definiti come:

$$\begin{aligned} \xi_S &= \frac{c_{S1}^*}{2m_{S1}^*\omega_{S1}^*} & \xi_I &= \frac{c_I}{2m_I^*\omega_I^*} & \xi_T &= \frac{c_T}{2(m_T+b)\omega_T} \\ \nu_S &= \frac{\omega_{S1}^*}{\omega_I^*} & \nu &= \frac{\omega_T}{\omega_I^*} & \mu_S &= \frac{m_{S1}^*}{m_I^*} & \mu &= \frac{m_T}{m_I^*} & \beta &= \frac{b}{m_I^*} \end{aligned} \quad (4.8)$$

e con  $\mu_E = \mu + \beta$  il rapporto di massa equivalente.

### Formulazione nello spazio di stato e analisi modale complessa

Le equazioni del moto del sistema ridotto generalizzato a 1+1+1 gdl, Eq. 4.7, possono essere riscritte secondo la formulazione nello spazio di stato, Eq. 2.1, dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\nu_S^2(\mu_S+1) & \mu_E\nu^2+1 & -\mu_E\nu^2 & -2\nu_S\xi_S(\mu_S+1) & 2(\xi_I+\mu_E\nu\xi_T) & -2\mu_E\nu\xi_T \\ \mu_S\nu_S^2 & -\mu_E\nu^2-1 & \mu_E\nu^2 & 2\mu_S\nu_S\xi_S & -2(\xi_I+\mu_E\nu\xi_T) & 2\mu_E\nu\xi_T \\ 0 & \nu^2 & -\nu^2 & 0 & 2\nu\xi_T & -2\nu\xi_T \end{bmatrix}$$

è la matrice di stato,  $\mathbf{B} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -\mu/\mu_E]^T$  è il vettore degli input,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -\nu_S^2(\mu_S+1) & \mu_E\nu^2+1 & -\mu_E\nu^2 & -2\nu_S\xi_S(\mu_S+1) & 2(\xi_I+\mu_E\nu\xi_T) & -2\mu_E\nu\xi_T \\ \mu_S\nu_S^2 & -\mu_E\nu^2-1 & \mu_E\nu^2 & 2\mu_S\nu_S\xi_S & -2(\xi_I+\mu_E\nu\xi_T) & 2\mu_E\nu\xi_T \end{bmatrix}$$

è la matrice degli output,  $\mathbf{D}$  è il vettore nullo  $9 \times 1$ ,  $\mathbf{z}(t) = [q_R \ q_I \ q_T \ \dot{q}_R \ \dot{q}_I \ \dot{q}_T]^T$  e  $\boldsymbol{\theta}(t) = [q_R \ q_I \ q_T \ \dot{q}_R \ \dot{q}_I \ q_{TI} \ \dot{q}_{TI} \ \ddot{q}_R^{(tot)} \ \ddot{q}_I^{(tot)}]^T$  sono rispettivamente il vettore di stato e il vettore degli output e  $e(t) = \ddot{q}_G$  è l'azione applicata. Inoltre, con  $q_{TI} = q_T - q_I$  è indicato lo spostamento relativo della massa secondaria rispetto alla massa del BIS, mentre con  $\ddot{q}_R^{(tot)}$  e  $\ddot{q}_I^{(tot)}$  sono indicate rispettivamente le accelerazioni assolute della sovrastruttura e del BIS.

Le proprietà modali del sistema sono state determinate attraverso l'analisi modale complessa dal momento che il sistema dinamico considerato è non classicamente smorzato. In particolare, risolvendo il problema agli autovalori, Eq. 2.3, si ottiene la seguente equazione caratteristica:

$$s^6 + a_1s^5 + a_2s^4 + a_3s^3 + a_4s^2 + a_5s + a_6 = 0 \quad (4.9)$$

dove

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2(\xi_I + \nu\xi_T(1 + \mu_E) + \nu_S\xi_S(1 + \mu_S)) \\
a_2 &= \nu^2(1 + \mu_E) + \nu_S^2(1 + \mu_S) + 4(\nu\xi_I\xi_T + \nu_S\xi_I\xi_S + \nu\nu_S\xi_S\xi_T(1 + \mu_E + \mu_S)) + 1 \\
a_3 &= 2(\nu\xi_T + \nu_S\xi_S + \xi_I(\nu^2 + \nu_S^2) + \nu\nu_S((\nu\xi_S + \nu_S\xi_T)(1 + \mu_E + \mu_S) + 4\xi_I\xi_S\xi_T)) \\
a_4 &= \nu^2 + \nu_S^2 + \nu\nu_S(\nu\nu_S(1 + \mu_E + \mu_S) + 4(\xi_S\xi_T + \nu\xi_I\xi_S + \nu_S\xi_I\xi_T)) \\
a_5 &= 2\nu\nu_S(\nu\nu_S\xi_I + \nu\xi_S + \nu_S\xi_T) \\
a_6 &= \nu^2\nu_S^2
\end{aligned}$$

L'Eq. 4.9 ammette soluzioni complesse coniugate attraverso le quali è possibile determinare le frequenze naturali  $\gamma_i$  e i fattori di smorzamento  $\eta_i$ , con  $i = 1 - 3$ , dei modi di vibrare del sistema così come descritto nel Sottoparagrafo 2.2.1.

### Definizione degli indici di prestazione

Le prestazioni del sistema TMDI, nel sistema ridotto generalizzato ad 1+1+1 gdl soggetto ad azione di tipo rumore bianco, sono state valutate attraverso i seguenti indici di prestazione cinematica:

$$d_I = \frac{\sigma_{q_I}^2}{\sigma_{q_{I_r}}^2}, \quad a_I = \frac{\sigma_{\ddot{q}_I^{(tot)}}^2}{\sigma_{\ddot{q}_{I_r}^{(tot)}}^2}, \quad d_R = \frac{\sigma_{q_R}^2}{\sigma_{q_{I_r}}^2}, \quad a_S = \frac{\sigma_{\ddot{q}_R^{(tot)}}^2}{\sigma_{\ddot{q}_{I_r}^{(tot)}}^2}, \quad d_T = \frac{\sigma_{q_T}^2}{\sigma_{q_{I_r}}^2}, \quad d_{TI} = \frac{\sigma_{q_{TI}}^2}{\sigma_{q_{I_r}}^2} \quad (4.10)$$

dove  $\sigma_{q_{I_r}}^2$  e  $\sigma_{\ddot{q}_{I_r}^{(tot)}}^2$  sono rispettivamente le varianze dello spostamento relativo e dell'accelerazione assoluta del BIS del sistema sovrastruttura+BIS non controllato di riferimento con  $\mu_S = 1.5$ ,  $\nu_S = 3$ ,  $\xi_S = 0.02$  e  $\xi_I = 0.15$ . Inoltre, l'indice di dissipazione di energia EDI risulta pari a:

$$EDI = \frac{ED_T}{ED_S + ED_I + ED_T} \leq 1 \quad (4.11)$$

con  $ED_S$ ,  $ED_I$  e  $ED_T$  i valori attesi dell'energia dissipata nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  dagli smorzatori viscosi rispettivamente della sovrastruttura, del BIS e del TMDI definiti come:

$$ED_S = 2\xi_S\mu_S\nu_S\sigma_{q_R}^2\Delta t, \quad ED_I = 2\xi_I\sigma_{q_I}^2\Delta t, \quad ED_T = 2\mu_E\xi_T\nu_T\sigma_{q_{TI}}^2\Delta t \quad (4.12)$$

Gli indici di prestazione riportati nelle Eqq. 4.10 e 4.11 sono stati valutati per l'eccitazione di tipo rumore bianco attraverso l'Eq. 2.5. È importante sottolineare che per il rumore bianco tali indici sono indipendenti dall'intensità e dal contenuto in frequenza dell'azione. Inoltre, permettono di valutare le prestazioni relative del sistema sovrastruttura+BIS+TMDI rispetto ad un sistema non controllato di riferimento costituito da un BIS con una capacità dissipativa medio-grande ( $\xi_I = 0.15$ ) e una sovrastruttura relativamente rigida ( $\nu_S = 3$ ) caratterizzata da una piccola capacità dissipativa ( $\xi_S = 0.02$ ) e una massa media ( $\mu_S = 1.5$ ) rispetto al BIS. Infatti, gli indici  $d_I$  e  $a_I$  misurano il potenziale miglioramento delle prestazioni che l'introduzione del sistema TMDI ha sullo spostamento relativo e sull'accelerazione assoluta di sistemi sovrastruttura+BIS caratterizzati da proprietà anche diverse da

quelle del sistema non controllato di riferimento. Gli indici  $d_R$  e  $a_S$  misurano lo spostamento relativo al BIS e l'accelerazione assoluta della sovrastruttura rispettivamente rispetto allo spostamento e all'accelerazione del BIS non controllato di riferimento (sovrastuttura+BIS). Questi due indici forniscono indicazioni, rispetto la risposta del BIS di riferimento, rispettivamente sul livello di sforzi e di confort sulla sovrastruttura. Inoltre, gli indici  $d_T$  e  $d_{TI}$ , normalizzati rispetto lo spostamento del BIS non controllato di riferimento, permettono di valutare lo spostamento della massa secondaria rispettivamente rispetto al suolo e rispetto alla massa del BIS. Gli ultimi due indici permettono di avere informazioni sullo spostamento richiesto rispettivamente al dispositivo Inerter e allo smorzatore viscoso. Infine, l'EDI definito nell'Eq. 4.11 dipende dalle proprietà del sistema sovrastruttura+BIS+TMDI, ma non è correlato a nessun sistema di riferimento; infatti quantifica la quota parte di energia che viene dissipata dal TMDI rispetto all'energia totale di input (cioè,  $ED = ED_S + ED_I + ED_T$ ).

### 4.2.3 Sistema ridotto a 1+1 gdl

Se non si tiene in considerazione nessun modo di vibrare della sovrastruttura,  $n = 0$ , il modello ridotto generalizzato, Sottoparagrafo 4.2.1, degenera in un sistema a 2 gdl, Figura 4.3, in cui l'intera massa della sovrastruttura è ipotizzata collegata rigidamente al basamento. Questa assunzione, come si vedrà in seguito, risulta lecita nel caso in cui la sovrastruttura è molto più rigida del sistema di isolamento.

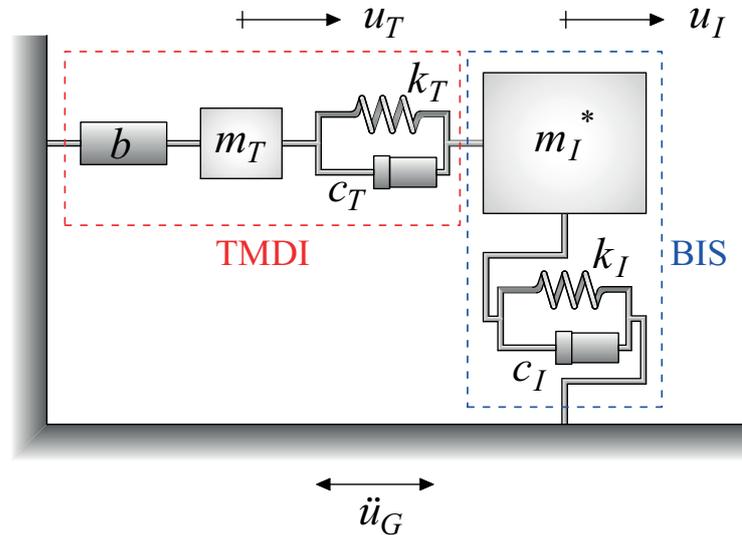


Figura 4.3. Sistema ridotto generalizzato a 1 + 1 gdl.

Definendo  $\omega_I^* = \sqrt{k_I/m_I^*}$  e  $\omega_T = \sqrt{k_T/(m_T + b)}$  le pulsazioni naturali rispettivamente del BIS e del TDMI, le equazioni del moto del sistema ridotto a 2 gdl possono essere scritte in forma adimensionale nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_I + 2\xi_I \dot{q}_I + q_I &= -\ddot{q}_G + \frac{f_T}{m_I^* g} \\
\mu \ddot{q}_T &= -\mu \ddot{q}_G - \frac{f_B}{m_I^* g} - \frac{f_T}{m_I^* g} \\
\frac{f_B}{m_I^* g} &= \beta \ddot{q}_T \quad \frac{f_T}{m_I^* g} = 2\xi_T \nu \mu_E (\dot{q}_T - \dot{q}_I) + \nu^2 \mu_E (q_T - q_I)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

in termini delle adimensionali coordinate di spostamento  $\mathbf{q} = \mathbf{u}^*/(g/\omega_I^{*2})$ , velocità  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{u}}^*/(g/\omega_I^*)$  e accelerazione  $\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{u}}^*/g$  relative al suolo, con  $\mathbf{u}^* = [u_I, u_T]^T$ , e l'accelerazione alla base normalizzata  $\ddot{q}_g = \ddot{u}_g/g$ , dove  $g$  è l'accelerazione di gravità. Nelle precedenti equazioni, i fattori di smorzamento  $\xi_I$  e  $\xi_T$  rispettivamente del BIS e del TDMI, il rapporto di frequenza  $\nu$  e il rapporto di massa  $\mu$ , il rapporto di inerzia  $\beta$ , sono gli stessi definiti nell'Eq. 4.8.

### Formulazione nello spazio di stato e analisi modale complessa

Le equazioni del moto del sistema ridotto generalizzato a 1+1 gdl, Eq. 4.13, possono essere riscritte secondo la formulazione nello spazio di stato, Eq. 2.1, dove:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\mu_E \nu^2 - 1 & \mu_E \nu^2 & -2(\xi_I + \mu_E \nu \xi_T) & 2\mu_E \nu \xi_T \\ \nu^2 & -\nu^2 & 2\nu \xi_T & -2\nu \xi_T \end{bmatrix}$$

è la matrice di stato,  $\mathbf{B} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -\mu/\mu_E]^T$  è il vettore degli input,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -\mu_E \nu^2 - 1 & \mu_E \nu^2 & -2(\xi_I + \mu_E \nu \xi_T) & 2\mu_E \nu \xi_T \end{bmatrix}$$

è la matrice degli output,  $\mathbf{D}$  è il vettore nullo  $6 \times 1$ ,  $\mathbf{z}(t) = [q_I \ q_T \ \dot{q}_I \ \dot{q}_T]^T$  e  $\boldsymbol{\theta}(t) = [q_I \ q_T \ \dot{q}_I \ q_{TI} \ \dot{q}_{TI} \ \ddot{q}_I^{(tot)}]^T$  sono rispettivamente il vettore di stato e il vettore degli output e  $e(t) = \ddot{q}_G$  è l'azione applicata.

In analogia al sistema ridotto a 1+1+1 gdl, risolvendo il problema agli autovalori, Eq. 2.3, si ottiene la seguente equazione caratteristica:

$$s^4 + 2(\xi_I + \nu \xi_T (1 + \mu_E)) s^3 + (1 + \nu^2 (1 + \mu_E) + 4\nu \xi_I \xi_T) s^2 + 2\nu(\nu \xi_I + \xi_T) s + \nu^2 = 0 \tag{4.14}$$

L'Eq. 4.14 ammette soluzioni complesse coniugate attraverso le quali è possibile determinare le frequenze naturali  $\gamma_i$  e i fattori di smorzamento  $\eta_i$ , con  $i = 1, 2$ , dei modi di vibrare del sistema così come descritto nel Sottoparagrafo 2.2.1.

### Definizione degli indici di prestazione per le azioni di tipo stocastico

Le prestazioni del sistema TMDI, nel sistema ridotto generalizzato ad 1+1 gdl soggetto ad azione di tipo rumore bianco o rumore colorato, sono state valutate attraverso i seguenti indici di prestazione cinematica:

$$d_I = \frac{\sigma_{q_I}^2}{\sigma_{q_{Ir}}^2}, \quad a_I = \frac{\sigma_{\ddot{q}_I}^{(tot)}}{\sigma_{\ddot{q}_{Ir}}^{(tot)}}, \quad d_T = \frac{\sigma_{q_T}^2}{\sigma_{q_{Ir}}^2}, \quad d_{TI} = \frac{\sigma_{q_{TI}}^2}{\sigma_{q_{Ir}}^2} \quad (4.15)$$

dove  $\sigma_{q_{Ir}}^2$  e  $\ddot{q}_{Ir}^{(tot)}$  sono rispettivamente le varianze dello spostamento relativo e dell'accelerazione assoluta del BIS non controllato di riferimento con  $\xi_I = 0.15$ . Inoltre, l'indice di dissipazione di energia EDI risulta pari a:

$$EDI = \frac{ED_T}{ED_I + ED_T} \leq 1 \quad (4.16)$$

con  $ED_I$  e  $ED_T$  i valori attesi dell'energia dissipata nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  dagli smorzatori viscosi rispettivamente del BIS e del TMDI definiti come:

$$ED_I = 2\xi_I \sigma_{\dot{q}_I}^2 \Delta t, \quad ED_T = 2\mu_E \xi_T \nu_T \sigma_{\dot{q}_{TI}}^2 \Delta t \quad (4.17)$$

Gli indici di prestazione riportati nelle Eqq. 4.15 e 4.16 sono stati valutati per l'eccitazione di tipo rumore bianco e rumore colorato rispettivamente attraverso le Eqq. 2.5 e 2.13. È importante sottolineare che sono indipendenti dall'intensità dell'azione e dipendono dal contenuto in frequenza dell'eccitazione solo nel caso di rumore colorato. Inoltre a parità di azione, gli indici di prestazione cinematica definiti nell'Eq. 4.15 permettono di valutare le prestazioni relative di BIS+TMDI rispetto ad un BIS non controllato di riferimento caratterizzato da una capacità dissipativa medio-grande, definita attraverso il rapporto di smorzamento  $\xi_I = 0.15$ . Infine, l'EDI definito nell'Eq. 4.16, dipende dalle proprietà del BIS+TMDI, ma non è correlato a nessun BIS di riferimento; infatti quantifica la quota parte di energia che viene dissipata dal TMDI rispetto all'energia totale di input (cioè,  $ED = ED_I + ED_T$ ).

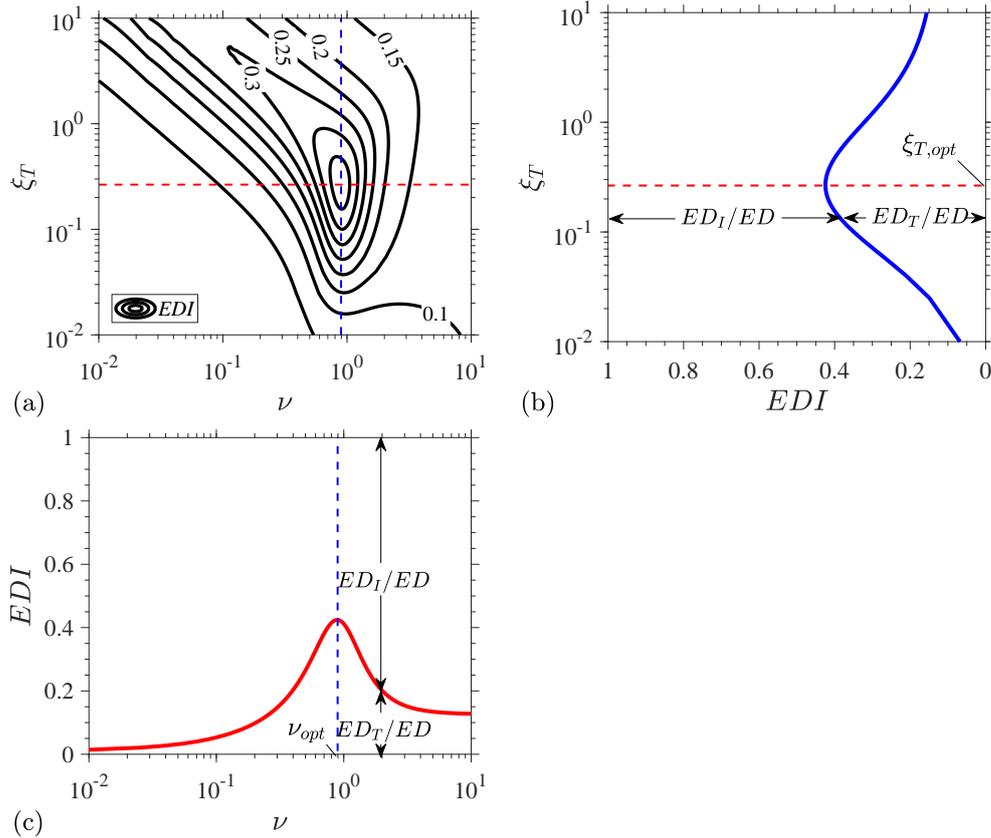
Nei successivi paragrafi prima si studierà il sistema ridotto a 1+1 gdl, ipotizzando che la sovrastruttura risulti molto più rigida del BIS, e successivamente verrà studiata l'influenza della sovrastruttura attraverso l'utilizzo del modello ridotto a 1+1+1 gdl.

## 4.3 Progettazione ottimale e valutazione delle prestazioni di sistemi ad 1+1 gdl soggetti ad eccitazioni tipo rumore bianco

### 4.3.1 Progettazione ottimale basata sull'EDI di sistemi TMDI per i BIS

Da un punto di vista computazionale, la funzione che definisce l'indice di dissipazione di energia (EDI) sul piano  $\nu - \xi_T$  risulta essere convessa con un massimo molto evidente per tutti i casi di progettazione ottimale del TMDI per il BIS considerati.

A titolo esemplificativo della convessità della funzione EDI e della robustezza del sistema di controllo al variare dei parametri di progetto, in Fig. 4.4 (a) si riportano le curve di livello della superficie che descrive l'indice EDI sul piano dei parametri di progetto  $\nu - \xi_T$  per un sistema BIS+TMDI arbitrariamente selezionato, mentre nelle Figg. 4.4 (b) e (c) si riportano rispettivamente le sezioni della funzione EDI lungo le linee tratteggiate della Fig. 4.4 (a) che corrispondono rispettivamente al rapporto di frequenze e di smorzamento ottimale.

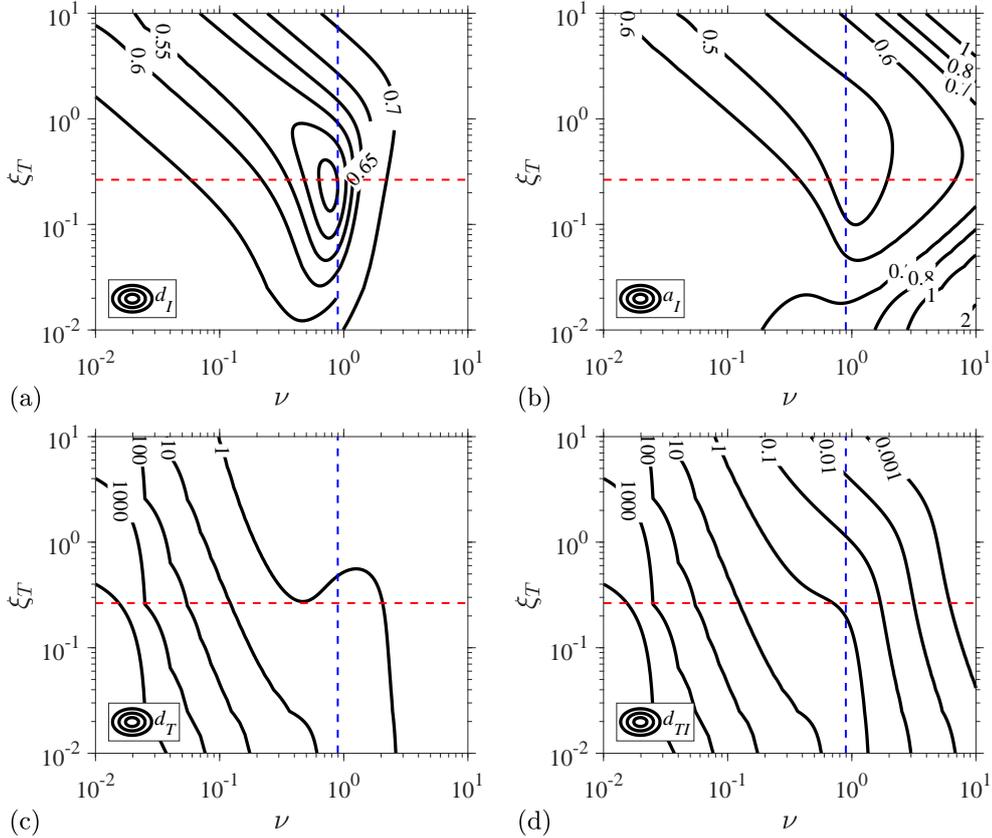


**Figura 4.4.** Illustrazione della convessità della funzione obiettivo EDI: (a) curve di livello e sezioni trasversali in corrispondenza dei parametri ottimali (b)  $\xi_{T,opt}$  e (c)  $\nu_{opt}$  ( $\xi_I = 0.15$ ,  $\mu = 0.05$  e  $\beta = 0.2$ ).

Da un punto di vista della dinamica strutturale, l'ottimizzazione basata sull'EDI massimizza la porzione di energia dissipata dal sistema di controllo TMDI,  $ED_T$ , rispetto all'energia totale assorbita dal BIS+TMDI sottoposto ad un'eccitazione di rumore bianco,  $ED = ED_I + ED_T$ , in un determinato intervallo di tempo. Ad esempio dalla Fig. 4.4 si evince come, in corrispondenza del valore di picco dell'EDI, il 42% dell'energia totale assorbita dall'intero sistema è dissipata dal TMDI,  $ED_T$ , mentre la restante parte, ovvero il 58%, viene dissipata dal BIS,  $ED_I$ . Per ogni coppia dei parametri di progettazione non ottimali ( $\nu$ ,  $\xi_T$ ), l'energia totale assorbita dal sistema viene dissipata dal TMDI in misura inferiore del 42% come mostrato nelle Figg. 4.4 (b) e (c).

Ulteriori considerazioni sulle prestazioni del BIS dotato di sistema TMDI, pro-

gettato in modo ottimale massimizzando l'EDI, possono essere fatte esaminando le curve di livello degli indici di prestazione, definiti nell'Eq. 4.15, sul piano  $\nu - \xi_T$  e riportati in Fig. 4.5 in cui la posizione dei parametri di progettazione ottimale è indicata dalle linee tratteggiate.



**Figura 4.5.** Curve di livello degli indici di prestazione, Eq. 4.15, del BIS+TMDI nel piano  $\nu - \xi_T$  ( $\xi_I = 0.15$ ,  $\mu = 0.05$  e  $\beta = 0.2$ ).

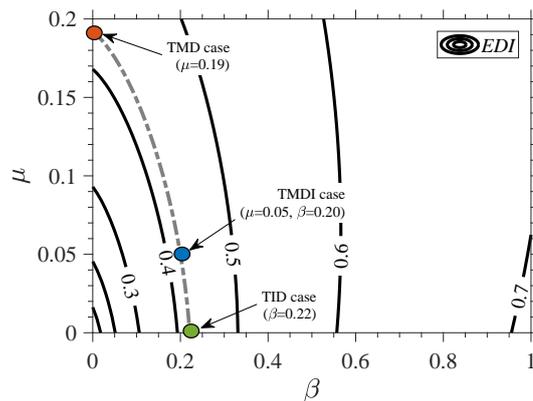
Le Figure 4.5 (a) e (b) mostrano come né lo spostamento  $d_I$  né l'accelerazione  $a_I$  del BIS risultano minimizzati, anche se i parametri  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{T,opt}$  ottimali per l'EDI risultano intermedi e vicini a quelli che minimizzano lo spostamento  $d_I$  e l'accelerazione  $a_I$ . Pertanto, la progettazione basata sull'EDI risulta essere un buon compromesso allo scopo di ridurre contemporaneamente sia lo spostamento relativo che l'accelerazione assoluta del BIS. Questo risultato è in accordo con quello ottenuto nel Capitolo 3 per strutture a base fissa eccitate da azioni di rumore bianco leggermente smorzate (cioè non isolate).

Tuttavia, le funzioni che definiscono le risposte  $d_T$  e  $d_{TI}$  del TMDI, Figg. 4.5 (c) e (d), non mostrano nessun minimo definito nel piano  $\nu - \xi_T$ : diminuiscono monotonicamente all'aumentare del rapporto di frequenza e smorzamento del TMDI con una pendenza relativamente elevata (specialmente lo spostamento relativo  $d_{TI}$ ). Quest'ultima osservazione suggerisce che nell'implementazione da un punto di vista tecnologico di BIS dotati di TMDI è necessario prestare particolare attenzione alla risposta della massa secondaria a seguito di eventuali variazioni dei parametri di

progetto rispetto a quelli ottimali.

### 4.3.2 Valutazione delle prestazioni al variare delle proprietà inerziali del TMDI

In questo sottoparagrafo vengono presentate e discusse le prestazioni del sistema TMDI, progettato secondo la metodologia basata sull'EDI, al variare delle proprietà inerziali del sistema di controllo per un BIS di riferimento caratterizzato da un rapporto di smorzamento  $\xi_I = 0.15$ . I rapporti di massa e di inertanza sono stati fatti variare nei seguenti range  $\mu = [0, 0.2]$  e  $\beta = [0, 1]$  sia per includere i casi limite di BIS+TMD ( $\mathbf{u}_2 = [\mu, 0]^T$ ) e di BIS+TID ( $\mathbf{u}_2 = [0, \beta]^T$ ) sia per comprendere i BIS caratterizzati da masse relativamente piccole, come ad esempio attrezzature strategiche e manufatti alloggiati negli edifici, per i quali il limite superiore di  $\mu = 0.2$  e/o  $\beta = 1$  è praticamente fattibile. Per facilitare il confronto tra gli effetti delle proprietà inerziali  $\mu$  e  $\beta$  nei sistemi progettati secondo l'EDI, i risultati vengono riportati come curve di iso-prestazione nel piano di progetto inerziale  $\mu - \beta$ , Figg. 4.6 - 4.8. In queste figure, l'origine corrisponde al BIS di riferimento non controllato, l'asse  $y$  ai sistemi BIS+TMD ( $\beta = 0$ ), l'asse  $x$  ai sistemi BIS+TID ( $\mu = 0$ ) e qualsiasi altro punto ai sistemi BIS+TMDI.

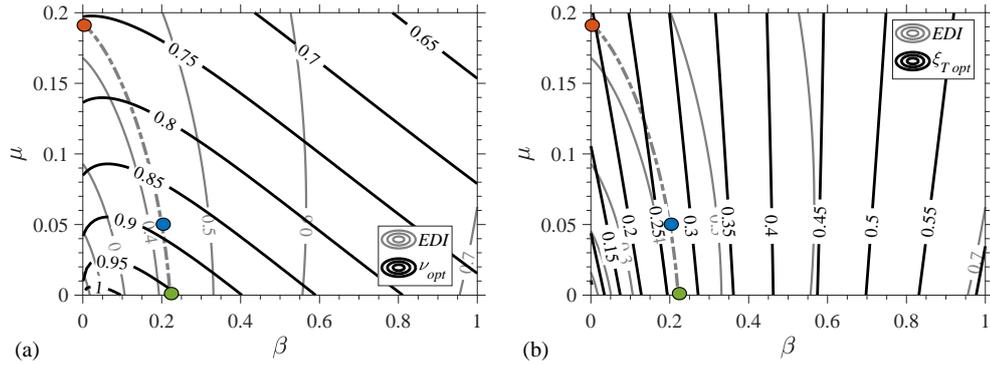


**Figura 4.6.** Curve di livello del massimo valore dell'EDI nel piano di progetto inerziale  $\mu - \beta$  per il sistema BIS+TMDI eccitato da azione di tipo rumore bianco ( $\xi_I = 0.15$ ).

La Figura 4.6 riporta il massimo valore dell'EDI sul piano  $\mu - \beta$ . Si osserva che, a fissato rapporto di massa, l'EDI aumenta monotonicamente con  $\beta$  a dimostrazione che, indipendentemente da  $\mu$ , all'aumentare del rapporto di inertanza aumenta la quota parte di energia dissipata dal sistema di controllo TMDI rispetto al BIS. In particolare per valori relativamente elevati di  $\beta$  ( $\beta \geq 0.5$ ), l'energia dissipata dal sistema TMDI risulta essere il 60-70% dell'energia in ingresso. Tuttavia, l'incremento dell'EDI con  $\beta$  satura velocemente a dimostrazione che, già per valori relativamente piccoli del rapporto di inertanza, si ha un'elevata efficacia nel trasferire la dissipazione di energia dal BIS al TMDI. D'altra parte, si vede che l'EDI aumenta in modo significativo con  $\mu$  solo per valori del rapporto di inertanza relativamente piccoli, cioè  $0 < \beta < 0.3$ . Per valori di  $\beta$  più elevati, l'EDI diventa meno sensibile all'aumento del rapporto di massa (le curve a iso-EDI, ovvero a iso-prestazione energetica, sono quasi parallele all'asse  $y$ ), mentre per  $\beta > 0.8$  l'aumento di  $\mu$  riduce l'EDI.

Da un punto di vista del *performance-based design*, le curve a iso-*EDI* suggeriscono che a parità di prestazione energetica l'aggiunta di un dispositivo Inerter collegato a terra a un BIS dotato di TMD permette la definizione di sistemi a masse accordate con una massa gravitazionale significativamente più piccola. L'Inerter, infatti, in questa configurazione permette di incrementare la massa inerziale del sistema di controllo senza incrementare la massa gravitazionale e quindi l'azione sulla massa secondaria. Si osserva come a parità di prestazione energetica, ovvero stessa curva di iso-*EDI*, all'aumentare di  $\beta$  è possibile ottenere sistemi di controllo caratterizzati da rapporti di massa  $\mu$  ordini di grandezza più piccoli rispetto ai tradizionali sistemi TMD fino ad arrivare al caso limite di sistemi TID, cioè sistemi di controllo teoricamente privi di massa gravitazionale, ma ad elevata massa inerziale.

Per approfondire questo importante aspetto tre diversi sistemi di controllo, caratterizzati dallo stesso  $EDI = 0.42$ , sono stati considerati come indicato nella Fig. 4.6: un TMD non convenzionale  $\mu = 0.19$ , un TID con rapporto di inertanza relativamente elevato  $\beta = 0.22$  e un TMDI con rapporto di inertanza  $\beta = 0.20$  e un modesto rapporto di massa  $\mu = 0.05$ , di cui la progettazione ottimale basata sull'*EDI* è stata precedentemente discussa in dettaglio, Figg. 4.4 e 4.5.

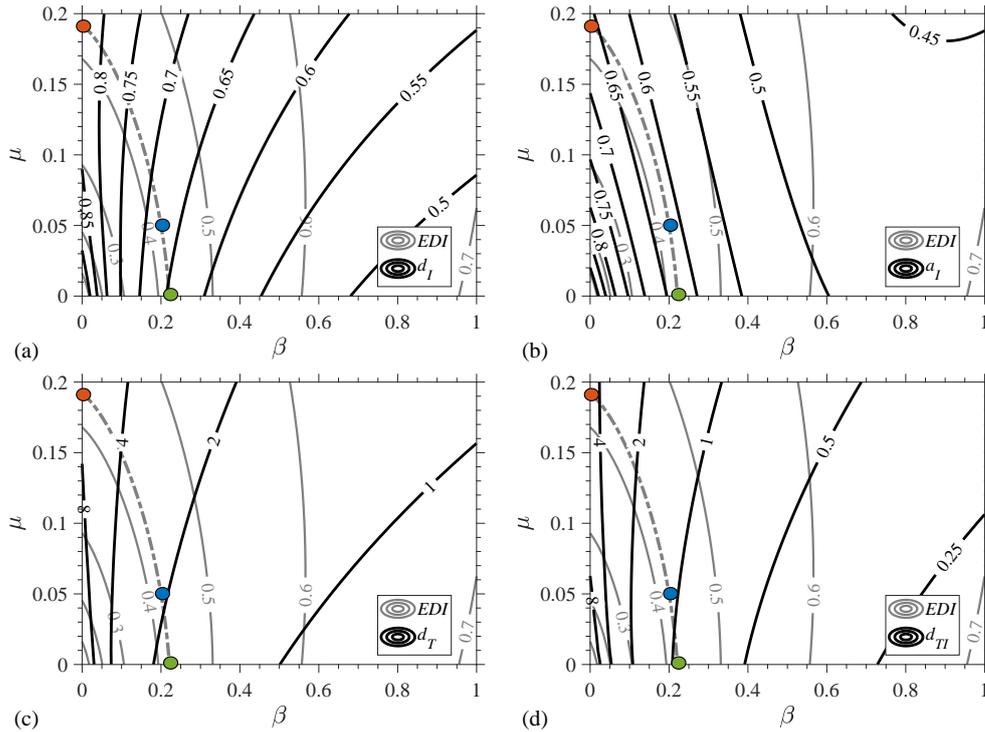


**Figura 4.7.** Curve di livello dei parametri ottimali, rapporto di frequenza  $\nu_{opt}$  (a) e rapporto di smorzamento  $\xi_{T,opt}$  (b), sul piano di progetto inerziale  $\mu - \beta$  per il sistema BIS+TMDI eccitato da azione di tipo rumore bianco ( $\xi_I = 0.15$ ). Le curve di iso-*EDI* di Fig. 4.6 sono sovrapposte.

La Figura 4.7 riporta le curve di livello dei parametri ottimali, rapporto di frequenza  $\nu_{opt}$  e rapporto di smorzamento  $\xi_{T,opt}$ , necessari per ottenere i valori massimi dell'*EDI*, sovrapposti alle curve di iso-prestazione energetica riportate nella Fig. 4.6.

La Figura 4.7 (a) mostra la bassa correlazione tra le curve di livello dell'*EDI* e del parametro ottimale  $\nu_{opt}$ : le curve di livello delle due superfici si intersecano formando grandi angoli. L'*EDI* e il rapporto di smorzamento ottimale  $\xi_{T,opt}$ , Fig. 4.7 (b), invece, risultano maggiormente correlate specialmente quando i rapporti di inertanza sono relativamente elevati (cioè  $\beta > 0.5$ ) nel quale le curve di livello sono circa parallele. Questa osservazione suggerisce che al fine di incrementare la prestazione energetica del sistema di controllo, ovvero dell'*EDI*, è necessario il contemporaneo incremento del rapporto di inertanza e di smorzamento del TMDI, mentre il parametro ottimale  $\xi_{T,opt}$  è poco sensibile alle variazioni del parametro  $\mu$ .

Concentrandosi sui tre sistemi di controllo in precedenza discussi e caratterizzati dallo stesso indice di prestazione energetica ( $EDI = 0.42$ ), si nota che il valore del rapporto di frequenze ottimale  $\nu_{opt}$  nel caso del TMDI risulta intermedio rispetto agli altri due sistemi per i quali i valori risultano essere rispettivamente l'8% più grande (TID) e il 15% più piccolo (TMD), mentre il valore del rapporto di smorzamento ottimale  $\xi_{T,opt}$  nel caso del TID è circa lo stesso del TMDI, mentre nel caso del TMD è il 28% più piccolo rispetto sempre il caso TMDI.



**Figura 4.8.** Curve di livello degli indici di prestazione nel piano di progetto inerziale  $\mu - \beta$  per il sistema BIS+TMDI eccitato da azione di tipo rumore bianco ( $\xi_T = 0.15$ ). Le curve di iso-EDI di Fig. 4.6 sono sovrapposte.

Le curve di livello degli indici di prestazione cinematica, Eq. 4.15, sono riportati nella Fig. 4.8 sovrapposte alle curve di iso-prestazione energetica di Fig. 4.6. Le curve di livello dell'EDI e quelle degli indici  $d_I$  e  $a_I$ , Figg. 4.8 (a) e (b), presentano delle discrepanze di andamento, ma in ogni caso si osservano tendenze simili per la maggior parte dell'intervallo del rapporto di inerzia considerato ( $\beta < 0.7$ ). In particolare, in analogia all'EDI, lo spostamento e l'accelerazione del BIS diminuiscono monotonicamente all'aumentare di  $\beta$  per ogni valore di  $\mu$  fissato.

All'aumentare di  $\beta$  e per qualsiasi valore di  $\mu$ , la riduzione è ancora maggiormente significativa per le quantità di risposta del sistema di controllo, ovvero lo spostamento della massa secondaria rispetto al suolo e, soprattutto, rispetto alla massa del BIS, come si evince rispettivamente nelle Figure 4.8 (c) e (d). I sistemi di controllo TMD progettati sulla base dell'indice EDI possono avere spostamenti della massa secondaria  $d_T$  e  $d_{TI}$  fino a 8 volte maggiore rispetto a quelle del BIS non controllato, Figg. 4.8 (c) e (d) (vedere anche [Taniguchi et al., 2008]), e per tale

ragione le riduzioni di queste quantità di risposta prodotte dall'aggiunta dell'Inerter collegato a terra a sistemi TMD risultano di fondamentale importanza.

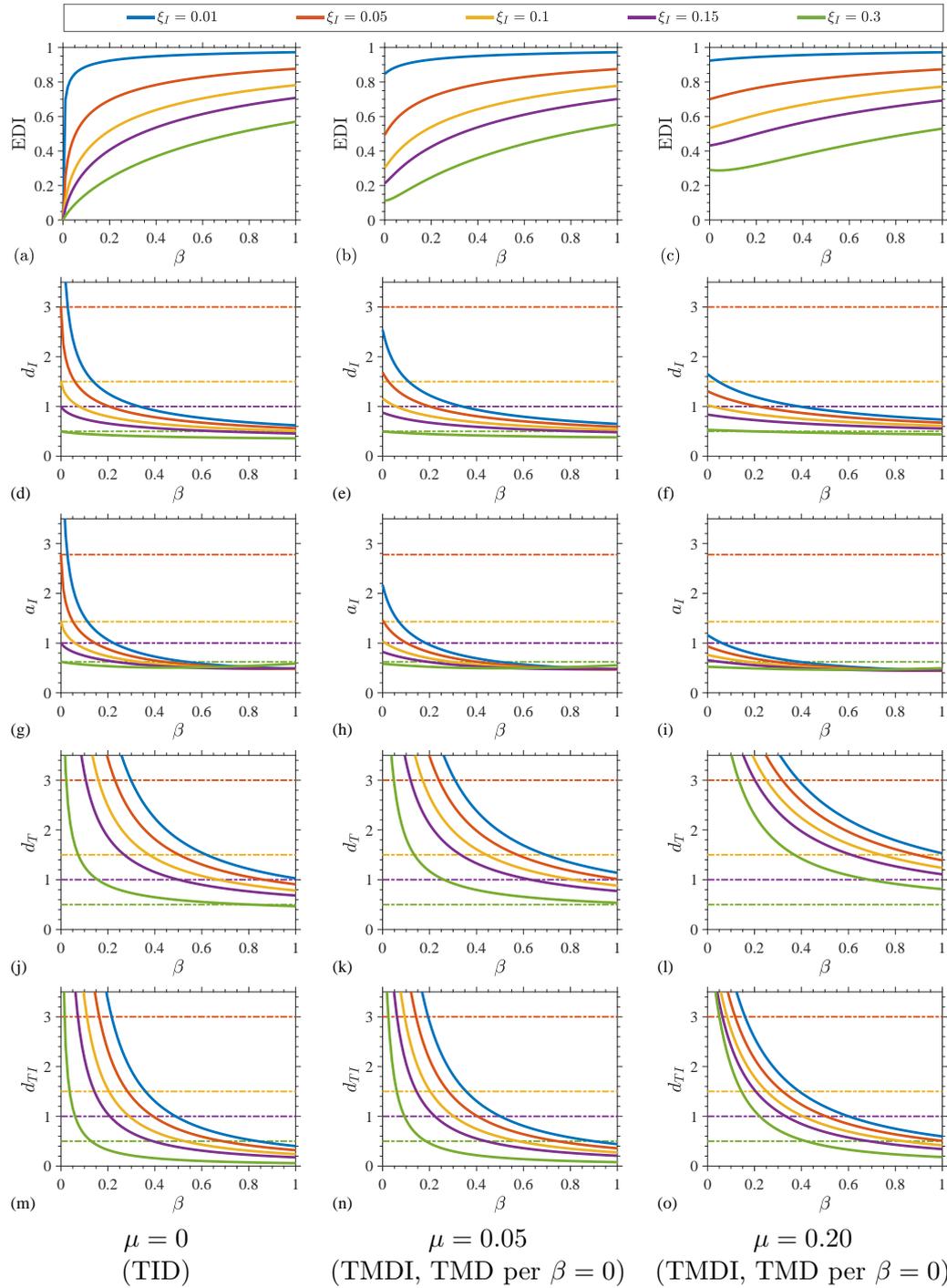
In generale, per tutti e quattro gli indici di prestazione cinematica esaminati, Fig 4.8, le prestazioni del sistema di controllo TMDI (al limite TID o TMD) progettato secondo l'EDI migliorano all'aumentare del rapporto di masse equivalente  $\mu_E$  ed in particolare le curve di livello si addensano lungo l'asse  $x$  e nelle vicinanze dell'origine; inoltre a fissato  $\mu$ , all'aumentare del rapporto di inerzia gli indici di prestazione migliorano sempre fino a saturare. L'incremento del rapporto di masse  $\mu$ , invece, per fissato  $\beta > 0.1$  (ovvero considerando sistemi TMDI relativamente pesanti con fissato rapporto di inerzia) è dannoso per tutti gli indici di prestazione ad eccezione dell'accelerazione totale del BIS. In particolare, tendenze simili sulle prestazioni del sistema di controllo TMDI nel caso di azione di tipo rumore bianco sono emerse anche nel Capitolo 3 per le strutture a base fissa.

Ulteriori considerazioni a riguardo possono essere fatte esaminando le prestazioni dei tre sistemi di controllo TMDI, TID e TMD caratterizzati dalla stessa prestazione energetica,  $EDI = 0.42$ , in precedenza considerati e indicati anche nella Figura 4.8. Il TID raggiunge significativi miglioramenti delle prestazioni rispetto al TMD non convenzionale in termini di spostamento del BIS (miglioramento superiore al 20%), spostamento della massa secondaria rispetto al suolo (più di 4 volte inferiore) e spostamento relativo tra le due masse (più di 5 volte inferiore). Riduce inoltre rispetto al TMDI lo spostamento del BIS del 4% e gli spostamenti della massa secondaria di circa il 15%. In ogni caso, in termini di accelerazione assoluta del BIS, il TID presenta riduzioni maggiori di circa il 5% rispetto al TMD non convenzionale, mentre il TMDI risulta più performante del TID di circa il 2%.

### 4.3.3 Valutazione delle prestazioni al variare dello smorzamento del BIS

In questo sottoparagrafo sono esaminate le prestazioni di BIS+TMDI progettati secondo l'EDI soggetti ad azione di tipo rumore bianco per diversi valori del fattore di smorzamento del BIS,  $\xi_I = 0.01 - 0.05$  (BIS con dispositivi a basso smorzamento),  $\xi_I = 0.1 - 0.15$  (BIS con dispositivi ad alto smorzamento, sistema primario di riferimento) e  $\xi_I = 0.30$  (BIS con dispositivi ad altissimo smorzamento). La Figura 4.9 riporta gli indici di prestazione, Eqq. 4.15 e 4.16, per i valori di  $\xi_I$  sopra riportati al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  e per tre diversi valori del rapporto di massa:  $\mu = 0$  (TID),  $\mu = 0.05$  (TMD<sub>C</sub>/TMDI) e  $\mu = 0.20$  (TMD<sub>NC</sub>/TMDI). In Figura 4.9 le prestazioni riportate sugli assi  $y$  ( $\beta = 0$ ) corrispondono rispettivamente per la colonna di sinistra ai casi BIS non controllati, mentre per le altre due colonne ai casi BIS+TMD con  $\mu = 0.05$  e  $\mu = 0.20$ .

Le curve relative all'EDI, riportate nella prima riga della Figura 4.9, permettono di valutare la percentuale di energia dissipata dal sistema di controllo rispetto alla complementare dissipata dal BIS e confermano, come osservato in precedenza, che all'aumentare del rapporto di inerzia aumenta la dissipazione di energia nel sistema di controllo. Nello specifico, a fissato rapporto di inerzia, l'EDI diminuisce monotonicamente all'aumentare di  $\xi_I$  e quindi significa che una maggiore parte dell'energia totale di input viene dissipata dal BIS rispetto al sistema di controllo. Inoltre, piccoli valori del rapporto di smorzamento  $\xi_I$  comportano, all'aumentare di



**Figura 4.9.** Prestazioni di BIS+TMDI progettati secondo l'EDI soggetti ad azione di tipo rumore bianco al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  e per vari rapporti di smorzamento del BIS  $\xi_I$  e rapporti di massa  $\mu$ .

$\beta$ , una più rapida saturazione e valori più elevati dell'EDI. Infine, per elevati valori rapporto di smorzamento del BIS  $\xi_I$ , l'influenza sull'EDI del rapporto di massa  $\mu$

risulta maggiormente significativa nella regione caratterizzata da bassi rapporti di inertanza, mentre risulta poco significativa per relativamente grandi valori di  $\beta$ .

Lo spostamento relativo  $d_I$  e l'accelerazione assoluta  $a_I$  del BIS, riportati rispettivamente nella seconda e terza riga di Fig. 4.9, mostrano tendenze simili. Le risposte del BIS si riducono monotonicamente all'aumentare di  $\beta$  e/o  $\xi_I$  ma con gradienti sempre più piccoli: l'aggiunta di un Inerter collegato a terra è più efficace nel ridurre lo spostamento e l'accelerazione del BIS quando sia i rapporti di inertanza che i rapporti di smorzamento del BIS sono piccoli. In effetti, nel caso di BIS con elevati rapporti di smorzamento ( $\xi_I = 0.3$ ) si osserva solo un marginale miglioramento nel ridurre lo spostamento  $d_I$  e, persino, un lieve peggioramento delle prestazioni in termini di accelerazione  $a_i$  per  $\beta > 0.4$ . L'influenza del rapporto di masse  $\mu$  nel ridurre lo spostamento e l'accelerazione del BIS risulta maggiormente significativo per valori del rapporto di inertanza e di smorzamento del BIS relativamente piccoli, infatti il suo effetto benefico si satura all'aumentare di  $\beta$  e/o  $\xi_I$ . Infine all'aumentare di  $\beta$ , le curve relative alle risposte  $d_I$  e  $a_I$  tendono asintoticamente allo stesso valore e quindi per elevati valori del rapporto di inertanza le risposte del BIS risultano poco influenzate dal parametro  $\xi_I$ .

Rivolgendo l'attenzione alle risposte della massa secondaria, riportate nelle ultime due righe della Fig. 4.9, si osserva come all'aumentare di  $\beta$  la presenza di un Inerter collegato a terra riduce drasticamente entrambi gli spostamenti della massa secondaria,  $d_T$  e  $d_{TI}$ . Queste riduzioni sono più significative ma saturano più velocemente all'aumentare del rapporto di smorzamento del BIS  $\xi_I$ . Inoltre, per i casi di BIS+TMDI progettati secondo l'EDI e caratterizzati da diversi valori di  $\xi_I$ , le risposte della massa secondaria  $d_T$  e  $d_{TI}$  non coincidono, in analogia alle risposte del BIS  $d_I$  e  $a_I$ , ma piuttosto assumono valori minori all'aumentare del rapporto di smorzamento del BIS. Infine, l'aumento del rapporto di massa  $\mu$  è dannoso per  $d_T$  e  $d_{TI}$  soprattutto per valori del rapporto di inertanza  $\beta$  piccoli.

Complessivamente, i risultati numerici di Figura 4.9 suggeriscono che  $\xi_I$  può essere scambiato con  $\beta$  e viceversa al fine di soddisfare qualsiasi fissato requisito di prestazione del BIS+TMDI progettato in modo ottimale secondo l'EDI.

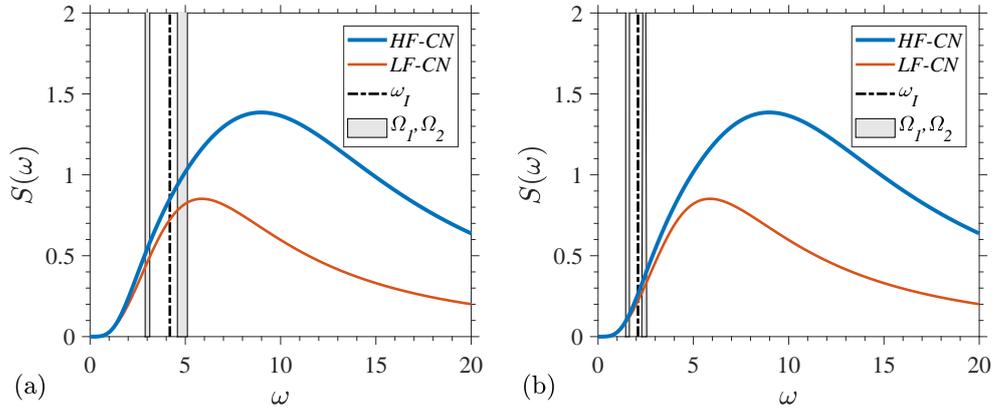
#### 4.4 Valutazione delle prestazioni di sistemi ad 1+1 gdl progettati in modo ottimale e sottoposti ad azioni diverse dal rumore bianco

Nel paragrafo precedente, l'azione per la progettazione ottimale del sistema di controllo TMDI basata sull'EDI è stata assunta di tipo rumore bianco dal momento che è considerata sufficiente per progettare BIS dotati di TMD [Hoang et al., 2008]. Tuttavia, il contenuto in frequenza dell'azione sismica che agisce sui BIS non è costante su tutte le frequenze come nel caso del rumore bianco: il contenuto in frequenza dell'azione sismica nei BIS collegati a terra dipende fortemente dalla risposta sismica locale del sito, mentre per i BIS collocati all'interno di strutture dipende dalle proprietà dinamiche della struttura in cui sono collocati. Per questo motivo in questo paragrafo si vogliono valutare le prestazioni di BIS+TMDI, progettati secondo l'EDI per input di tipo rumore bianco, soggetti a eccitazioni sto-

castiche di tipo rumore colorato (colored noise, CN) e a eccitazioni deterministiche con accelerogrammi naturali.

#### 4.4.1 Eccitazione stocastica di tipo rumore colorato

Le prestazioni del BIS+TMDI sono state valutate per due diverse eccitazioni alla base di tipo rumore colorato il cui contenuto in frequenza è rispettivamente caratterizzato da alte frequenze (high frequency colored noise, HF-CN) e basse frequenze (low frequency colored noise, LF-CN). I due spettri dell'azione, Fig. 4.10, sono stati modellati mediante il filtro Kanai-Tajimi, Eqq. 2.6 e 2.7, con  $\omega_g = 10.73 \text{ rad/s}$ ,  $\zeta_g = 0.78$ ,  $\omega_f = 2.33 \text{ rad/s}$  e  $\zeta_f = 0.90$  per l'azione di tipo HF-CN e  $\omega_g = 5.34 \text{ rad/s}$ ,  $\zeta_g = 0.88$ ,  $\omega_f = 2.12 \text{ rad/s}$  e  $\zeta_f = 1.17$  per l'azione di tipo LF-CN. I parametri sono stati derivati in [Giaralis e Spanos, 2012] adattando lo spettro Kanai-Tajimi, Eqq. 2.6 e 2.7, agli spettri di risposta elastici di norma usati per la progettazione sismica di strutture fondate su sabbia rigida (azione caratterizzata da alte frequenze) e su argilla tenera (azione caratterizzata da basse frequenze).



**Figura 4.10.** Spettri Kanai-Tajimi delle azioni di tipo HF-CN e LF-CN con indicazione delle pulsazioni naturali del BIS in assenza e presenza dei sistemi di controllo definiti in Fig. 4.6 per (a)  $T_I = 1.5 \text{ s}$  e (b)  $T_I = 3 \text{ s}$  ( $\xi_I = 0.15$ ).

La Figura 4.11 riporta le curve di livello nel piano inerziale  $\mu - \beta$  dell'EDI e dei quattro indici di prestazione cinematica, Eq. 4.15, ottenuti per BIS+TMDI, progettati secondo l'EDI per azioni di tipo rumore bianco, soggetti ad azioni di tipo rumore colorato secondo gli spettri Kanai-Tajimi di Figura 4.10. Nella colonna di sinistra e di destra della Fig. 4.11 si riportano, rispettivamente, i risultati relativi a un BIS rigido con  $T_I = 1.5 \text{ s}$  (cioè,  $\omega_I = 4.19 \text{ rad/s}$ ) e al BIS flessibile di riferimento con  $T_I = 3.0 \text{ s}$  (cioè,  $\omega_I = 2.09 \text{ rad/s}$ ) entrambi caratterizzati da un rapporto di smorzamento  $\xi_I = 0.15$ . Inoltre, in Fig. 4.11 le curve di livello relative all'eccitazione di tipo rumore colorato sono sovrapposte a quelle relative al rumore bianco per consentirne il confronto.

Il contenuto in frequenza del rumore colorato ha un effetto trascurabile sull'EDI nel caso di BIS flessibile dotata di TMDI, Fig. 4.11 (a), mentre influenza in modo maggiormente significativo i valori dell'EDI nel caso di BIS rigido dotata di TMDI, in particolare nella regione di  $\beta < 0.4$ , Fig. 4.11 (b). Inoltre, a parità di  $\beta$  e nel caso di rumore colorato, l'aumento del rapporto di massa  $\mu$  è sempre dannoso all'EDI

ad eccezione della regione  $\beta < 0.05$  e per l'azione di tipo LF-CN dove invece la presenza della massa secondaria risulta favorevole.

Tuttavia nella regione  $\beta < 0.4$ , l'aumento di  $\mu$  riduce l'indice di spostamento  $d_I$  per entrambe le eccitazioni di tipo rumore colorato considerate, Figg. 4.11 (c-d). Per i rapporti  $\mu$  e  $\beta$  considerati, il TMDI, ottimizzato secondo l'EDI con input rumore bianco, è più efficace nel controllare lo spostamento del BIS soprattutto nel caso di eccitazione di tipo LF-CN rispetto quella di tipo HF-CN. In particolare, tra i due BIS considerati dotati di TMDI, per  $\beta < 0.4$  quello più flessibile risulta più efficace nel ridurre lo spostamento  $d_I$ , mentre per  $\beta > 0.4$  è quello più rigido ad essere più efficace. Questi comportamenti sono legati al modo in cui si relazionano le pulsazioni naturali del BIS in assenza e presenza del sistema di controllo rispetto allo spettro dell'azione di tipo rumore colorato, come mostrato in Fig. 4.10 per i tre sistemi di controllo definiti in Fig. 4.6 al variare del periodo del BIS.

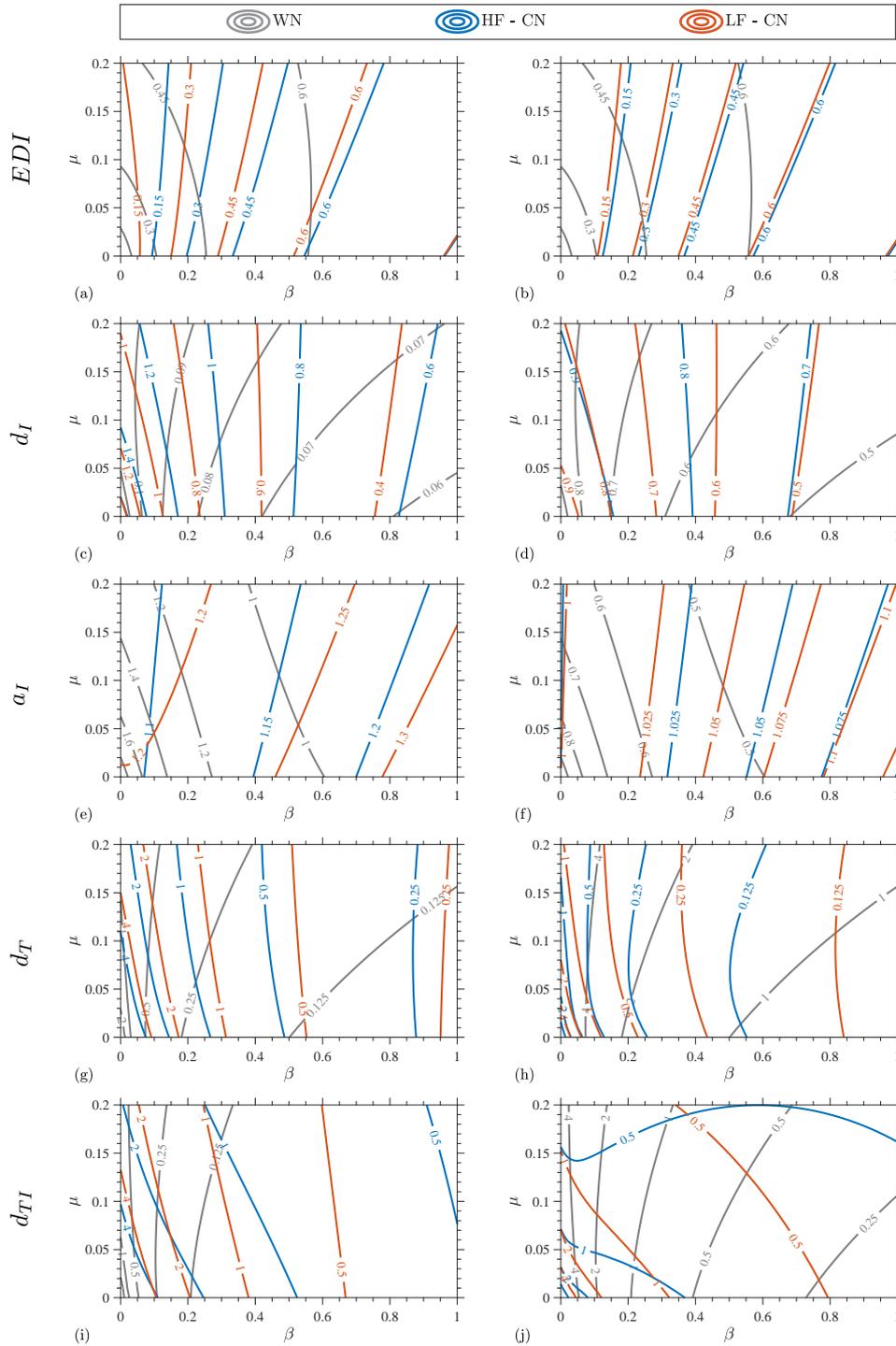
Risulta quindi evidente come i TMDI con relativamente elevati rapporti di inerzia, progettati secondo l'EDI con l'input rumore bianco, sono più efficaci nel controllare lo spostamento del BIS quando la pulsazione principale dell'azione si avvicina alla pulsazione naturale del BIS non controllato. Questo è un risultato abbastanza positivo da un punto di vista tecnologico, in quanto riduce i problemi legati all'implementazione di BIS flessibili o rigidi su supporti altrettanto flessibili o rigidi.

Un ulteriore esame delle curve di livello mostra che, come visto già per il rumore bianco, lo spostamento del BIS a fissati valori di  $\mu$  si riduce monotonicamente e in modo significativo all'aumentare di  $\beta$  per entrambe le eccitazioni di rumore colorato considerate. Invece, l'accelerazione assoluta del BIS  $a_I$ , Figg. 4.11 (e-f), aumenta all'aumentare di  $\beta$  e gli incrementi sono maggiormente evidenti per il BIS rigido dotato di TMDI soggetto al LF-CN.

Rivolgendo l'attenzione allo spostamento relativo al suolo della massa secondaria  $d_T$ , Fig. 4.11 (g-h), si notano tendenze simili sia per le due eccitazioni di rumore colorato, sia per i due BIS considerati: l'aumento del rapporto di inerzia  $\beta$  è vantaggioso per qualsiasi fissato rapporto di massa  $\mu$ , mentre i BIS+TMDI con piccoli rapporti di massa  $\mu < 0.05$  presentano prestazioni leggermente migliori rispetto ai corrispondenti BIS+TID con stesso rapporto di inerzia.

Infine, per quanto riguarda lo spostamento relativo della massa secondaria rispetto a quella del BIS  $d_{TI}$  e per entrambi gli spettri del rumore colorato, il valore dell'indice di prestazione nel caso di BIS rigido, Fig. 4.11 (i), si riduce significativamente all'aumentare di  $\beta$  per qualsiasi valore fissato di  $\mu$ ; inoltre, contrariamente a quanto avviene per il rumore bianco, all'aumentare di  $\mu$  diminuisce lo spostamento  $d_{TI}$ . Tuttavia, l'indice di prestazione  $d_{TI}$  per il BIS flessibile, Fig. 4.11 (j), è sensibile allo spettro del rumore colorato quando i sistemi di controllo sono relativamente pesanti mentre per sistemi di controllo leggeri ( $\mu < 0.05$ ), all'aumentare del rapporto di massa  $\mu$  e di inerzia  $\beta$  si riduce lo spostamento  $d_{TI}$  a prescindere dal contenuto in frequenza dell'azione.

La Figura 4.12 riporta l'EDI e gli indici di prestazione cinematica per BIS di riferimento ( $T_I = 3$  s) soggetto al LF-CN al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  e per gli stessi rapporti di smorzamento del BIS  $\xi_I$  e rapporti di massa  $\mu$  in precedenza considerati in Fig. 4.9. Nel complesso, si è visto che, ad eccezione dell'accelerazione del BIS  $a_I$ , gli indici di prestazione seguono le stesse tendenze positive all'aumentare



**Figura 4.11.** Curve di livello degli indici di prestazione, Eq. 4.15, nel piano inerziale  $\mu - \beta$  per BIS+TMDI, progettati secondo l'EDI per azione di tipo rumore bianco, soggetti agli spettri Kanai-Tajimi di Fig. 4.10 con  $T_I = 1.5 s$  (colonna di sinistra) e  $T_I = 3 s$  (colonna di destra) ( $\xi_I = 0.15$ ).



di  $\beta$  come nel caso di eccitazione di tipo rumore bianco, Figura 4.9. In particolare, per l'eccitazione di tipo CN, l'aumento del rapporto di inertanza e di smorzamento del BIS sono dannosi per l'accelerazione del BIS, anche se tuttavia questi incrementi di accelerazione sono insignificanti per BIS leggermente smorzati e TMDI a relativamente piccola massa inerziale rispetto alle riduzioni di spostamento del BIS che si ottengono all'aumentare di  $\beta$ .

Infine, le stesse tendenze di Figura 4.12 sono state trovate anche per il HF-CN e per il BIS rigido e quindi in questo sottoparagrafo risultando ridondanti si è deciso di non includere gli ulteriori risultati numerici.

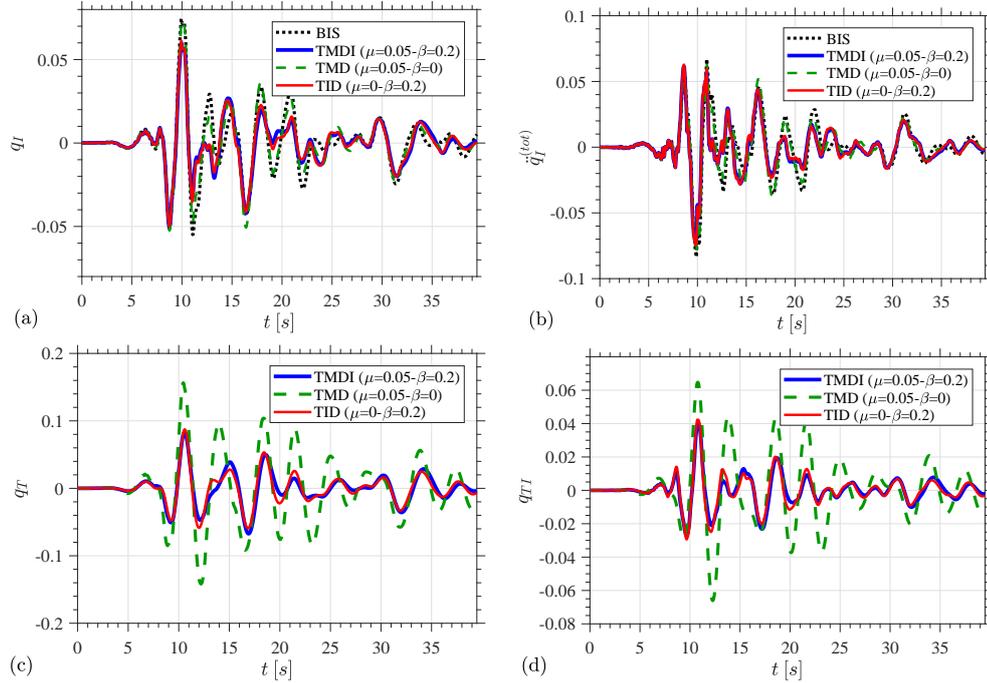
#### 4.4.2 Eccitazione deterministica con accelerogrammi naturali

Gli accelerogrammi naturali dei *ground motions* (GMs) registrati durante gli eventi sismici storici presentano ampiezza e contenuto di frequenza variabili nel tempo. Queste caratteristiche non stazionarie dell'azione possono influenzare l'efficacia dei sistemi TMD per il controllo delle vibrazioni dei BIS, specialmente in termini di valori di picco della risposta, dal momento che il sistema di controllo potrebbe non avere il tempo necessario, in termini di cicli di risposta, per attivarsi, ovvero per trasferire l'energia cinetica dal BIS flessibile alla massa secondaria (vedere ad es. [Tsai, 1995, Palazzo et al., 1997 e Hoang et al., 2008]). Pertanto, è importante valutare anche le prestazioni dei diversi BIS dotati di TMDI soggetti ad GMs con caratteristiche variabili nel tempo.

Quattro GMs tra quelli elencati in Tabella 2.1 (Imperial Valley-El Centro, Tokachi-Oki-Hachinohe, Irpinia-Sturmo e Kobe-KJMA) sono stati selezionati per condurre analisi nel dominio del tempo al fine di confrontare le risposte tra il BIS di riferimento non controllato ( $T_I = 3$  s e  $\xi_I = 0.15$ ) e precedentemente esaminato e lo stesso BIS dotato dei tre diversi sistemi di controllo progettati secondo l'EDI per un'azione stazionaria di tipo rumore bianco: il TMDI indicato in Figura 4.6 con  $\mu = 0.05$  e  $\beta = 0.2$ , un TMD convenzionale con lo stesso rapporto di masse  $\mu = 0.05$  del TMDI e un TID con lo stesso rapporto di inertanza  $\beta = 0.2$  del TMDI. L'attenzione è concentrata sulla valutazione dell'influenza che l'aggiunta di un Inerter collegato a terra ha su un BIS dotato di TMD e sull'effetto che la massa secondaria ha nei BIS+TMDI per gli accelerogrammi naturali relativi ai GM selezionati, Tab. 2.1.

Nelle Figure 4.13-4.16 si riportano, per i quattro GMs considerati e per i sistemi in precedenza descritti, le storie temporali delle quattro risposte normalizzate considerate: spostamento relativo  $q_I$  e accelerazione assoluta  $\ddot{q}_I^{(tot)}$  del BIS e gli spostamenti relativi  $q_T$  e  $q_{TI}$  della massa secondaria.

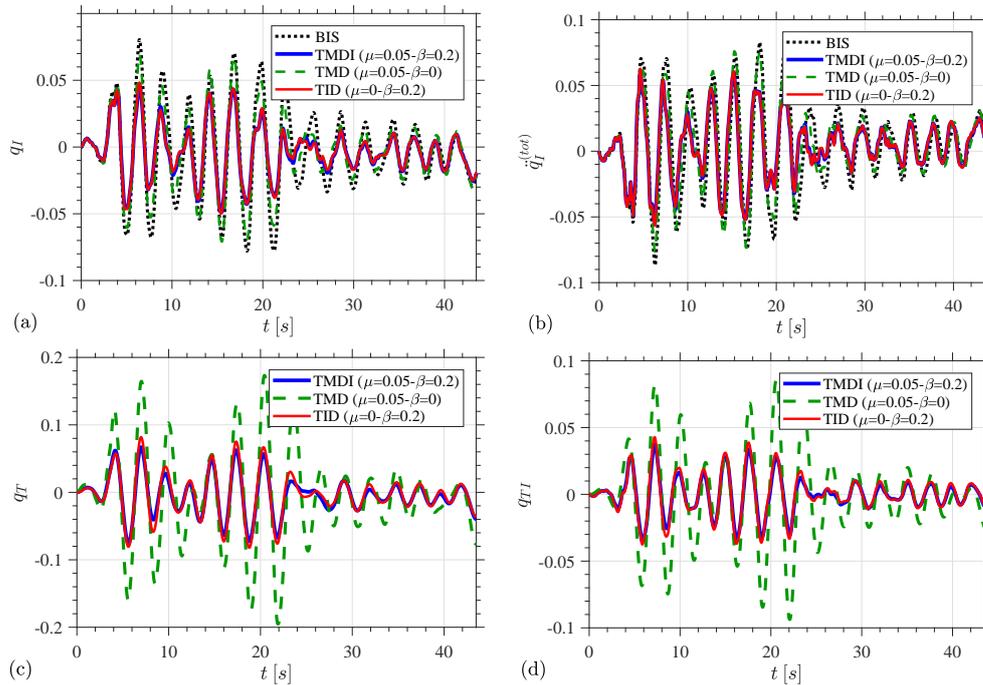
Il contenuto in frequenza dell'accelerogramma di Imperial Valley-El Centro presenta frequenze principali del segnale concentrate in una banda dello spettro lontana dalle frequenze naturali dei sistemi considerati. Le Figg. 4.13 (a-b) mostrano come l'aggiunta dell'Inerter collegato a terra permette di ridurre sia lo spostamento che l'accelerazione del BIS rispetto al BIS non controllato e al BIS+TMD. Si noti che questo non è il caso in cui per HF-CN l'accelerazione del BIS aumentata all'aumentare del rapporto di inertanza  $\beta$  (vedere Fig. 4.11). Inoltre, si ottengono riduzioni significative in termini di spostamento della massa secondaria, Figg. 4.13 (c-d).



**Figura 4.13.** Imperial Valley-El Centro GM: Storie temporali dello spostamento relativo (a) e dell'accelerazione assoluta (b) del BIS, e degli spostamenti relativi della massa secondaria sia rispetto al suolo (c) che rispetto alla massa del BIS (d) ( $T_I = 3$  s e  $\xi_I = 0.15$ ).

Il terremoto di Tokachi-Oki-Hachinohe è un tipico GM di tipo far-field caratterizzato da una spettro a banda larga ed è utilizzato per la valutazione del *benchmark* di strutture controllate [Ohtori et al., 2004]. Le frequenze dei sistemi considerati sono lontane dalle frequenze del GM a contenuto energetico più elevato, mentre, essendo la banda di frequenze abbastanza ampia, sono prossime alle frequenze del GM a contenuto energetico inferiore. La presenza nel segnale di queste frequenze a contenuto energetico inferiore producono risposte con ampiezze relativamente significative per il BIS non controllato, mentre, essendo concentrate anche nella parte iniziale del segnale, permettono ai sistemi a masse accordate di attivarsi e risultare efficaci fin dalle prime oscillazioni. Dalle Figg. 4.14 (a-b), si evince come i sistemi TMDI (o TID) hanno tempi di attivazione inferiori e sono molto più efficienti nel ridurre lo spostamento e l'accelerazione del BIS rispetto al TMD convenzionale. Inoltre, i sistemi di controllo basati sull'Inerter riducono anche di oltre la metà i picchi degli spostamenti relativi della massa secondaria rispetto al TMD<sub>C</sub>, Figg. 4.14 (a-b).

L'accelerogramma di Irpinia-Sturno è stato selezionato come rappresentante dei terremoti di tipo impulsivo (*pulse-like near-fault GM*) così come classificato in [Baker, 2007] avendo un periodo di impulso vicino al periodo naturale del BIS. La componente impulsiva a bassa frequenza (lungo periodo) viene rilasciata nel tempo dopo che le componenti ad alte frequenze (periodi più piccoli) sono state già in parte rilasciate. Il rilascio relativamente tardivo della componente impulsiva, tipico dei GM impulsivi caratterizzati da una elevata direttività (vedere [ibid.] e i riferimenti

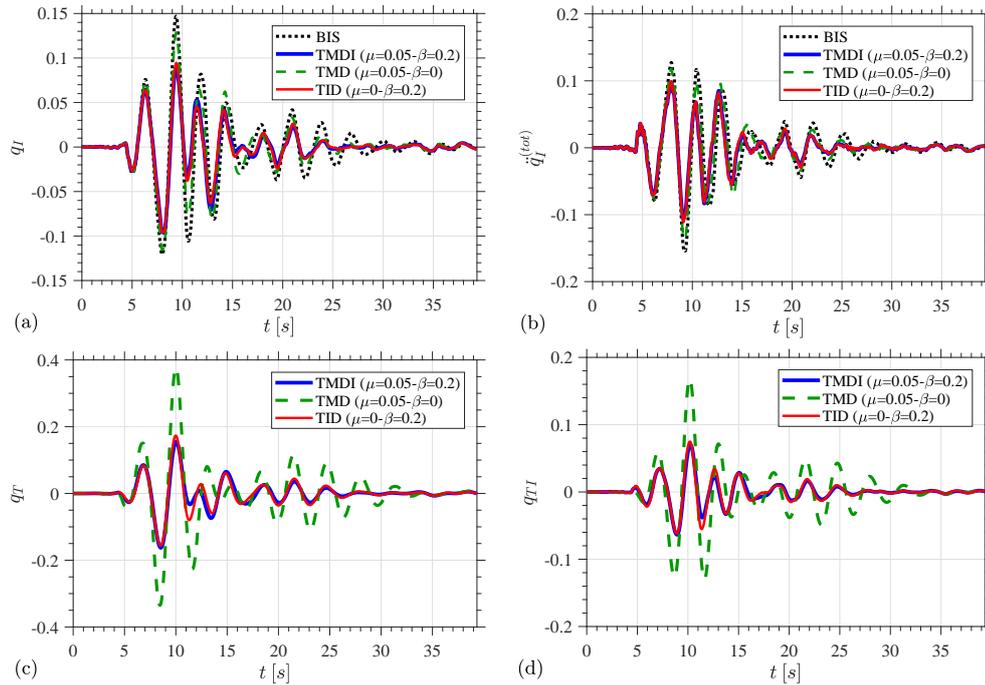


**Figura 4.14.** Tokachi-Oki-Hachinohe GM: Storie temporali dello spostamento relativo (a) e dell’accelerazione assoluta (b) del BIS, e degli spostamenti relativi della massa secondaria sia rispetto al suolo (c) che rispetto alla massa del BIS (d) ( $T_I = 3$  s e  $\xi_I = 0.15$ ).

in esso contenuti), consentono ai sistemi a masse accordate di avere tempo necessario per l’attivazione e quindi risultare efficaci nella riduzione della risposta del BIS nonostante la natura impulsiva del GM. A questo proposito, il sistema TMD riduce sia lo spostamento che l’accelerazione del BIS, Figg. 4.15 (a-b), ma queste riduzioni diventano molto più significative nel caso dei sistemi di controllo basati sull’Inerter (TMDI e TID) che, come prima, riducono in modo evidente anche gli spostamenti della massa secondaria, Figg. 4.15 (c-d), sia in termine di valore di picco che in termine di valore quadratico medio.

Infine, l’accelerogramma registrato presso la stazione KJMA, durante il terremoto di Kobe (1995) a una distanza inferiore di 1 km dalla faglia, risulta essere la forma d’onda di eccitazione meno favorevole in quanto caratterizzata dalla presenza di impulsi a relativamente bassa frequenza nella parte iniziale del segnale (vedere [Hoang et al., 2008] in cui è stato considerato lo stesso GM per la valutazione delle prestazioni di BIS+TMD). Per questo particolare GM, tutti i sistemi a massa accordata risultano inefficaci nel ridurre la risposta del BIS, anche se l’aggiunta dell’Inerter collegato a terra permette una piccola riduzione dello spostamento del BIS in termini di valore quadratico medio. Inoltre, i sistemi a massa accordata incrementano l’accelerazione del BIS e l’inclusione dell’Inerter è peggiorativa come visto prima per il CN, Figura 4.11. In ogni caso, l’incremento delle accelerazioni risulta trascurabile mentre, allo stesso tempo, l’Inerter collegato a terra permette una significativa riduzione della risposta della massa secondaria.

In conclusione, i risultati forniti nelle Figg. 4.13-4.16 dimostrano che, ad ecce-



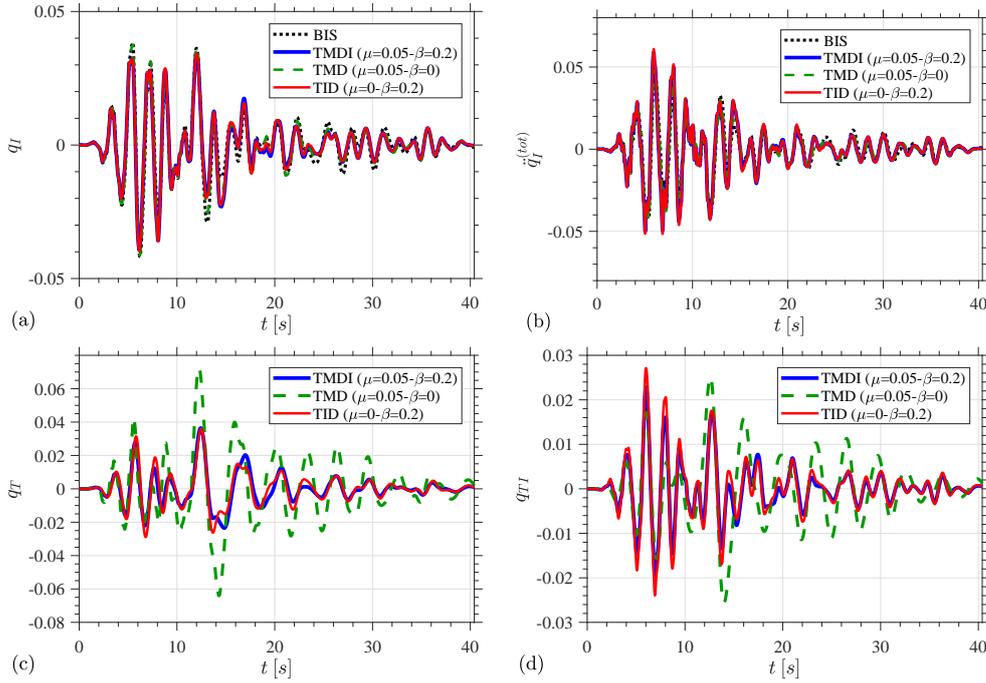
**Figura 4.15.** Irpinia-Sturmo GM: Storie temporali dello spostamento relativo (a) e dell'accelerazione assoluta (b) del BIS, e degli spostamenti relativi della massa secondaria sia rispetto al suolo (c) che rispetto alla massa del BIS (d) ( $T_I = 3$  s e  $\xi_I = 0.15$ ).

zione di alcuni particolari ambienti sismogenetici che favoriscono forme d'onda con significative componenti impulsive a bassa frequenza nella parte iniziale del segnale, i sistemi di controllo con l'Inerter collegato a terra, progettati secondo l'EDI per l'eccitazione di tipo rumore bianco, riducono in modo significativo sia lo spostamento che l'accelerazione del BIS per GMs sia di tipo near-fault che di tipo far-field.

Inoltre, dal momento che le differenze tra le prestazioni del TMDI rispetto al TID risultano trascurabili, i risultati suggeriscono che il TID è preferibile essendo privo di massa e che da un punto di vista tecnologico l'inevitabile presenza di una certa massa nel sistema di controllo (il TID è solo idealmente senza massa) non produce peggioramenti alle prestazioni a condizione che l'eventuale massa sia tenuta in conto nella progettazione ottimale basata sull'EDI.

#### 4.5 Progettazione ottimale e valutazione delle prestazioni di sistemi ad 1+1+1 gdl soggetti ad eccitazioni di tipo rumore bianco

Nei precedenti paragrafi prima di tutto è stata approfondita la progettazione ottimale di BIS dotati di TMDI e successivamente si sono valutate le prestazioni del sistema di controllo nel ridurre lo spostamento del BIS senza incrementarne le accelerazioni sia nel caso di eccitazioni di tipo rumore bianco, Paragrafo 4.3, che nel caso di azioni di tipo rumore colorato e terremoti, Paragrafo 4.4. I precedenti risultati sono stati ottenuti ipotizzando che la sovrastruttura sia relativamente più rigida



**Figura 4.16.** Kobe-KJMA GM: Storie temporali dello spostamento relativo (a) e dell'accelerazione assoluta (b) del BIS, e degli spostamenti relativi della massa secondaria sia rispetto al suolo (c) che rispetto alla massa del BIS (d) ( $T_I = 3$  s e  $\xi_I = 0.15$ ).

del BIS e quindi l'intero sistema sovrastruttura+BIS+TMDI può essere studiato attraverso il sistema ridotto a 1+1 gdl definito nel Sottoparagrafo 4.2.3.

In questo paragrafo, invece, si vuole indagare l'influenza della sovrastruttura, non più ipotizzata relativamente più rigida del BIS, sia sulla progettazione ottimale che sulle prestazioni del sistema di controllo TMDI nel caso di azione di tipo rumore bianco. Per raggiungere questo obiettivo le analisi sono state condotte su un sistema ridotto a 1+1+1 gdl, definito nel Sottoparagrafo 4.2.2, che permette rispetto a quello precedente di analizzare anche il caso di sovrastruttura relativamente flessibile.

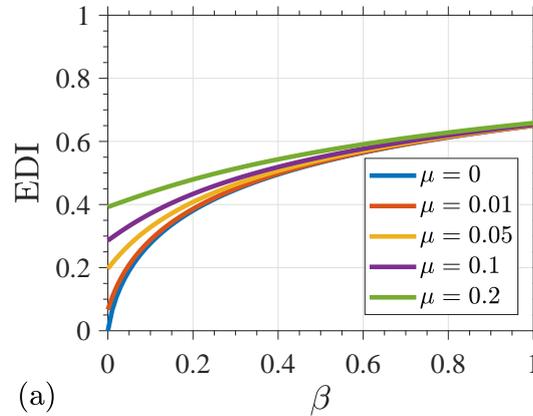
Nel sistema a 1+1+1 gdl la sovrastruttura è definita dal rapporto di masse  $\mu_S$ , di frequenze  $\nu_S$  e di smorzamento  $\xi_S$ , il BIS è definito dal rapporto di smorzamento  $\xi_I$  e il sistema TMDI è definito dal rapporto di massa  $\mu$ , di inertanza  $\beta$ , di frequenze  $\nu$  e di smorzamento  $\xi_T$ . Per la progettazione del sistema TMDI, in analogia al sistema a 1+1 gdl, sono stati fissati i parametri relativi alla sovrastruttura e al BIS da controllare e per ciascuna coppia dei parametri  $\mathbf{u}_2 = [\mu, \beta]^T$  si determinano i parametri ottimali di progetto  $\mathbf{u}_1 = [\nu, \xi_T]^T$ . Inoltre, anche in questo caso per la progettazione ottimale è stata scelta metodologia basata sulla massimizzazione dell'EDI ipotizzando un'eccitazione stocastica stazionaria di tipo rumore bianco.

Nella Sottosezione 4.5.1, per la sovrastruttura+BIS di riferimento, si riportano i risultati relativi alla progettazione ottimale e ai relativi indici di prestazione, definiti nella Sottosezione 4.2.2, al variare del rapporto di massa  $\mu$  e di inertanza  $\beta$  del sistema di controllo progettati in modo ottimale. Successivamente, per fissati rapporti di smorzamento  $\xi_S = 0.02$  e  $\xi_I = 0.15$ , è stata valutata l'influenza del rapporto di massa  $\mu_S$ , Sottosezione 4.5.2, e del rapporto di frequenze  $\nu_S$ , Sottosezione

4.5.3, della sovrastruttura per diversi sistemi di controllo definiti dalle coppie  $\mu - \beta$  progettati in modo ottimale.

#### 4.5.1 Progettazione ottimale basata sull'EDI di sistemi TMDI per i BIS

In questa sottosezione si vuole indagare l'influenza del sistema di controllo, progettato in modo ottimale sul sistema ridotto generalizzato a 1+1+1 gdl, sull'indice di progetto EDI, Fig. 4.17, sui parametri ottimali, Fig. 4.18, e sugli indici di prestazione cinematica, Figg. 4.19-4.21, relativi rispettivamente al BIS, alla sovrastruttura e al sistema di controllo. In particolare i successivi risultati sono riferiti al sistema sovrastruttura+BIS di riferimento, ovvero caratterizzata dai seguenti parametri adimensionali  $\mu_S = 1.5$ ,  $\nu_S = 3$ ,  $\xi_S = 0.02$  e  $\xi_I = 0.15$ .

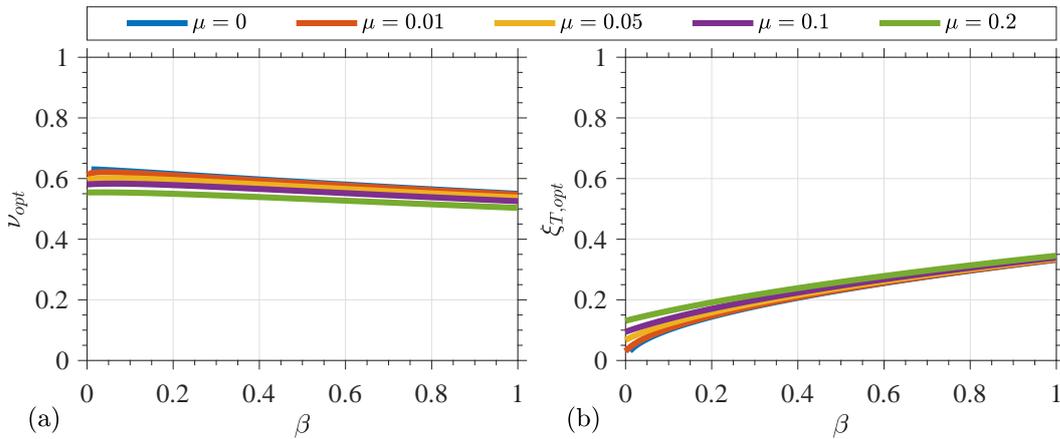


**Figura 4.17.** Valore massimo dell'EDI al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  e per fissati valori del rapporto di massa  $\mu$  ( $\mu_S = 1.5$ ,  $\nu_S = 3$ ,  $\xi_S = 0.02$  e  $\xi_I = 0.15$ ).

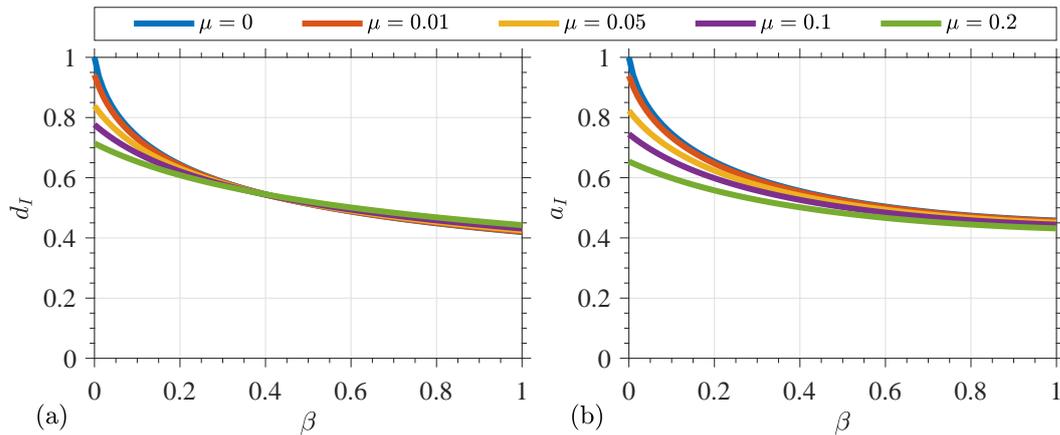
A fissato valore di  $\mu$ , l'indice di progetto EDI, Figura 4.17, è una funzione monotona crescente di  $\beta$  (ovvero il TMDI ha sempre una prestazione energetica maggiore rispetto al TMD con lo stesso valore rapporto di massa) e tende a saturare per relativamente elevati valori del rapporto di inerzia. All'aumentare di  $\mu$ , invece, l'EDI aumenta con incrementi maggiormente significativi quando i valori di  $\beta$  sono relativamente piccoli (il che significa che il TMDI e il TMD<sub>NC</sub> sono rispettivamente più performanti del TID e del TMD<sub>C</sub>) rispetto a valori relativamente elevati di  $\beta$  dove l'EDI è quasi indipendente dal valore di  $\mu$  (ovvero il TID e il TMDI hanno prestazioni energetiche comparabili).

Anche se i parametri di progetto ottimale  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{T,opt}$ , rispettivamente Figg. 4.18 (a-b), sono poco sensibili alle variazioni del rapporto di massa del sistema di controllo, si osserva come, a fissato rapporto di inerzia, all'aumentare di  $\mu$  il rapporto di frequenze diminuisce, mentre il rapporto di smorzamento aumenta. Inoltre, all'aumentare di  $\beta$ , il parametro di progetto  $\nu_{opt}$  diminuisce ma con variazioni poco significative, mentre il parametro  $\xi_{T,opt}$  aumenta con variazioni maggiormente significative.

Nelle Figg. 4.19 (a-b) si riportano rispettivamente gli indici di prestazione cinematica in termini di spostamento e accelerazione del BIS per diversi sistemi di



**Figura 4.18.** Parametri ottimali, (a) rapporto di frequenze  $\nu_{opt}$  e (b) rapporto di smorzamento  $\xi_{T,opt}$ , al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  e per fissati valori del rapporto di massa  $\mu$  ( $\mu_S = 1.5$ ,  $\nu_S = 3$ ,  $\xi_S = 0.02$  e  $\xi_I = 0.15$ ).



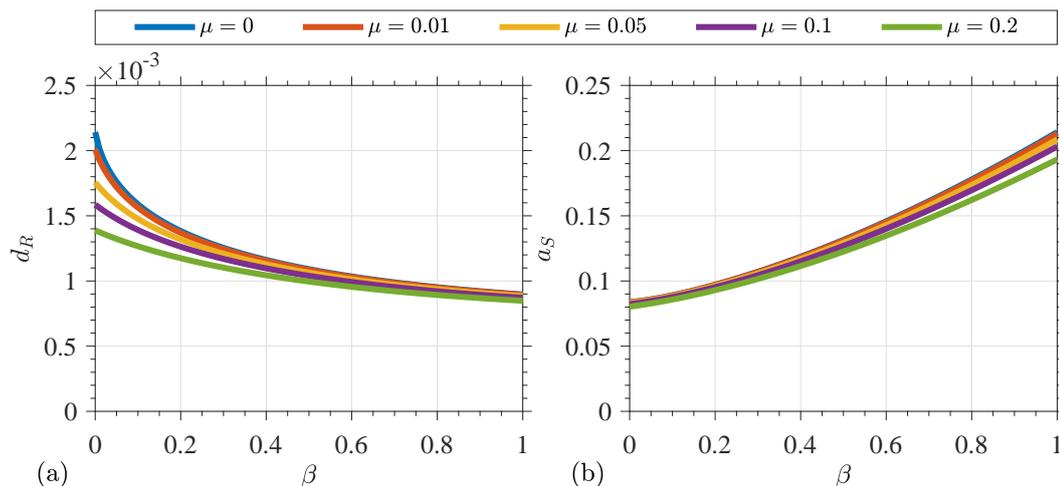
**Figura 4.19.** Indici di prestazione cinematica in termini di (a) spostamento  $d_I$  e (b) accelerazione  $a_I$  del BIS al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  e per fissati valori del rapporto di massa  $\mu$  ( $\mu_S = 1.5$ ,  $\nu_S = 3$ ,  $\xi_S = 0.02$  e  $\xi_I = 0.15$ ).

controllo progettati in modo ottimale. Si osserva come, a fissato valore del rapporto di masse del sistema di controllo, lo spostamento del BIS è una funzione monotona decrescente a dimostrazione che, come già visto per l'EDI, il TMDI risulta sempre maggiormente performante del TMD caratterizzato dallo stesso valore di  $\mu$ . Inoltre, al variare del rapporto di inerzia, la Fig. 4.19 (a) può essere divisa in due parti, delimitate da  $\beta = 0.4$  in cui la risposta non è influenzata dal rapporto di massa del sistema di controllo, caratterizzate da tendenze diverse al variare di  $\mu$ . Per  $\beta < 0.4$ , infatti, l'indice  $d_I$  diminuisce all'aumentare di  $\mu$  e quindi il TMDI risulta più performante del TID; viceversa per  $\beta > 0.4$  le curve risultano poco influenzate dal rapporto di masse del sistema di controllo, ma il TID risulta più performante del TMDI nel ridurre lo spostamento del BIS.

Invece, l'accelerazione del BIS, Fig. 4.19 (b), diminuisce all'aumentare sia del rapporto di masse  $\mu$  che del rapporto di inerzia  $\beta$ . Inoltre, indipendentemente

dal valore di  $\mu$  e per  $\beta$  relativamente elevati, tutte le curve tendono allo stesso valore  $a_I = 0.45$ .

Quindi come già visto in precedenza per il sistema a 1+1 gdl, la presenza di una massa nel sistema di controllo per rapporti di inerzia  $\beta$  inferiori ad uno specifico valore è favorevole nel ridurre entrambe le risposte del BIS, mentre superato tale valore risulta sfavorevole per gli spostamenti  $d_I$  ma rimane favorevole per le accelerazioni  $a_I$ .

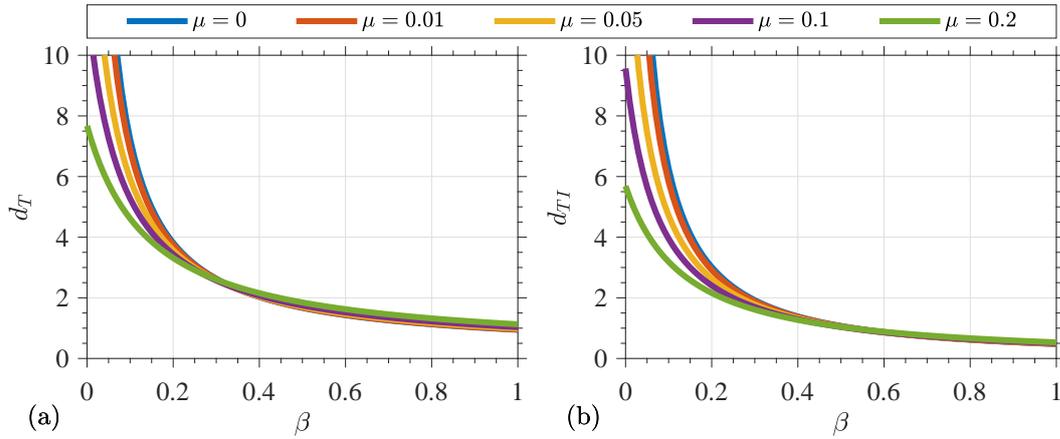


**Figura 4.20.** Indici di prestazione cinematica in termini di (a) spostamento  $d_R$  e (b) accelerazione  $a_S$  della sovrastruttura al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  e per fissati valori del rapporto di massa  $\mu$  ( $\mu_S = 1.5$ ,  $\nu_S = 3$ ,  $\xi_S = 0.02$  e  $\xi_I = 0.15$ ).

Gli indici di prestazione cinematica  $d_R$  e  $a_S$  relativi alla sovrastruttura sono riportati rispettivamente nelle Figg. 4.20(a-b) al variare dei parametri  $\mu$  e  $\beta$  del sistema di controllo progettato in modo ottimale. A fissato rapporto di massa, si osserva come all'aumentare di  $\beta$  gli spostamenti relativi della sovrastruttura rispetto al basamento  $d_R$  diminuiscono, mentre le accelerazioni assolute aumentano. All'aumentare di  $\mu$ , invece, entrambi gli indici di prestazione cinematica relativi alla sovrastruttura diminuiscono. L'incremento delle prestazioni legate al rapporto di massa del sistema di controllo per l'indice  $d_I$  risulta essere significativo solo per valori  $\beta$  relativamente piccoli, mentre per  $\beta > 0.4$  risulta essere trascurabile. Per quanto riguarda l'indice relativo all'accelerazione assoluta della sovrastruttura  $a_S$ , l'influenza di  $\mu$  risulta essere poco significativa in particolare per valori del rapporto di inerzia piccoli.

Infine, le Figure 4.21 (a-b) riportano rispettivamente gli indici di prestazione cinematica in termini di spostamento della massa del sistema di controllo sia rispetto al suolo  $d_T$  che rispetto alla massa del basamento  $d_{TI}$  per diverse coppie dei parametri  $\mu - \beta$ .

Come già visto per il sistema ridotto a 1+1 gdl, gli spostamenti  $d_T$  e  $d_{TI}$  sono funzioni monotone decrescenti al variare di  $\beta$  e tendono a saturare per valori relativamente elevati del rapporto di inerzia. Inoltre, per valori di  $\beta$  relativamente piccoli la presenza di una massa nel sistema di controllo permette di ridurre in modo



**Figura 4.21.** Indici di prestazione cinematica in termini di spostamento (a)  $d_T$  e (b)  $d_{TI}$  della massa del sistema di controllo al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  e per fissati valori del rapporto di massa  $\mu$  ( $\mu_S = 1.5$ ,  $\nu_S = 3$ ,  $\xi_S = 0.02$  e  $\xi_I = 0.15$ ).

significativo la risposta del sistema di controllo, mentre per rapporti di inerzia relativamente elevati il rapporto di massa  $\mu$  risulta essere ininfluenza.

La risposta del sistema di controllo può essere un importante vincolo progettuale principalmente nel caso di sistemi caratterizzati da piccole masse inerziali (ovvero valori relativamente piccoli dei rapporti  $\mu_E$  per il TMDI,  $\mu$  per il TMD e  $\beta$  per il TID).

In conclusione, ad eccezione dell'accelerazione della sovrastruttura  $a_S$  che ha un andamento diverso rispetto agli altri indici di prestazione, le indicazioni ottenute per il sistema ridotto a 1+1 gdl sono state confermate anche dal modello a 1+1+1 gdl nel caso di sovrastruttura relativamente più rigida del BIS. Infatti risulta evidente come, a parità del rapporto di masse  $\mu$ , il sistema TMDI risulta sempre più performante del TMD. Inoltre, per valori di  $\beta$  relativamente elevati le prestazioni dei sistemi di controllo non sono influenzati dalla presenza di una massa ausiliaria e quindi il TID risulta preferibile rispetto al TMDI, mentre per rapporti di inerzia relativamente piccoli la presenza di una massa nel sistema di controllo risulta favorevole tale da preferire il TMDI sia rispetto al TID che al TMD.

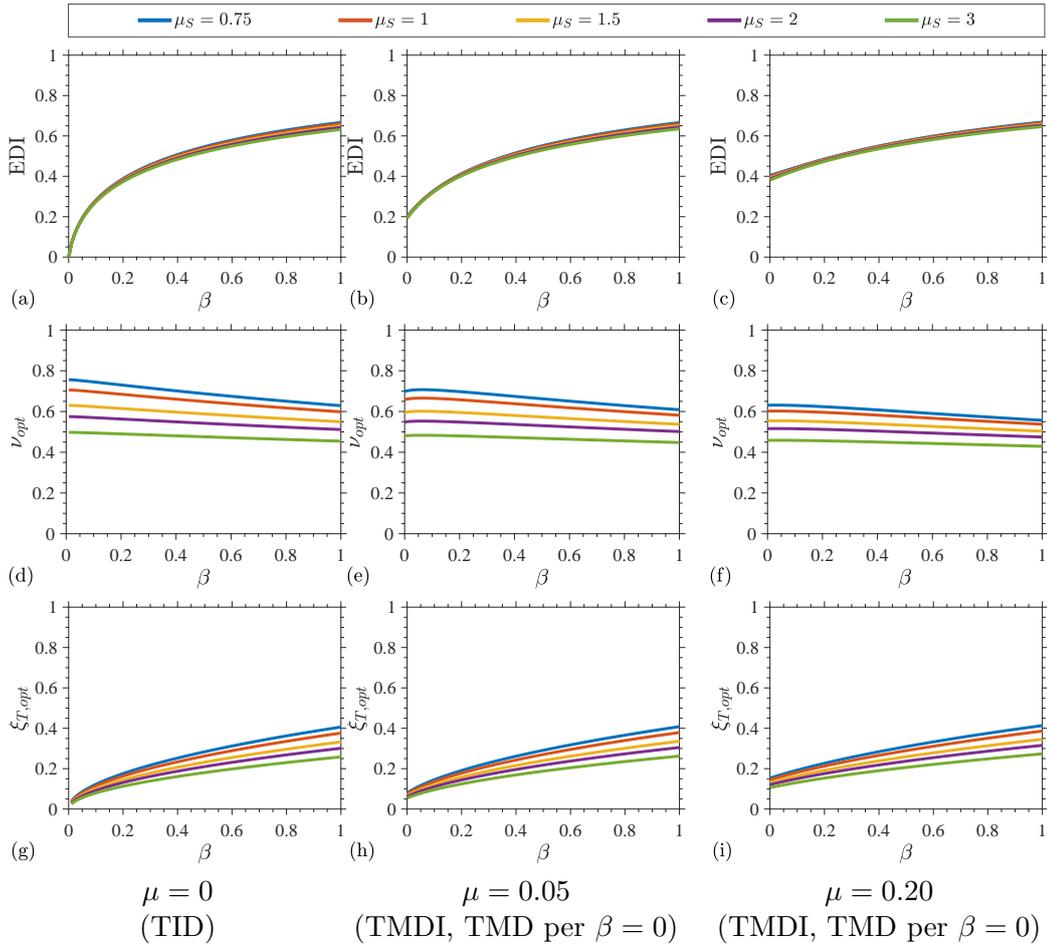
#### 4.5.2 Valutazione delle prestazioni al variare della massa della sovrastruttura

In questa sottoparagrafo si vuole indagare l'influenza della massa della sovrastruttura, rappresentata dal parametro  $\mu_S$ , sia sull'indice e i parametri di progetto, Fig. 4.22, che sugli indici di prestazione cinematica definiti nell'Eq. 4.10, Fig. 4.23.

I seguenti risultati sono stati ottenuti fissando il rapporto di smorzamento  $\xi_S = 0.02$  e di frequenze  $\nu_S = 3$  della sovrastruttura e il rapporto di smorzamento del BIS  $\xi_I = 0.15$ , e per ciascuna tripletta di valori dei parametri  $\mu_S - \mu - \beta$  sono stati determinati i valori dei parametri ottimali  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{T,opt}$  che massimizzano l'indice di progetto EDI definito nell'Eq 4.11.

Nelle righe di Figura 4.22 si riportano rispettivamente l'indice EDI e i parametri di progetto  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{T,opt}$  al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  e per cinque diversi

valori del rapporto di masse della sovrastruttura ( $\mu_S = 0.75, 1, 1.5, 2, 3$ ). Nelle colonne, invece, sono stati considerati tre diversi valori del rapporto di masse  $\mu$ , rispettivamente  $\mu = 0, 0.05, 0.2$  al fine di confrontare le diverse sovrastrutture+BIS sia in assenza ( $\mu = 0$  e  $\beta = 0$ ) che in presenza di sistemi di controllo: TID ( $\mu = 0$  e  $\beta \neq 0$ ), TMD<sub>C</sub> ( $\mu = 0.05$  e  $\beta = 0$ ), TMD<sub>NC</sub> ( $\mu = 0.20$  e  $\beta = 0$ ) e TMDI (in tutti gli altri casi).



**Figura 4.22.** Valore massimo dell'EDI e parametri ottimali  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{T,opt}$  al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  e per fissati valori del rapporto di massa della sovrastruttura  $\mu_S$  e del sistema di controllo  $\mu$  ( $\nu_S = 3$ ,  $\xi_S = 0.02$  e  $\xi_I = 0.15$ ).

Per tutte le coppie  $\mu - \beta$  considerate, l'influenza del rapporto di masse della sovrastruttura  $\mu_S$  sull'indice di progetto EDI, Figg. 4.22 (a-c), risulta trascurabile. In ogni caso si osserva come, a fissato valore di  $\mu$ , l'EDI è una funzione monotona crescente di  $\beta$  e satura per valori relativamente elevati del rapporto di inerzia. L'indice di progetto aumenta all'aumentare del rapporto di massa del sistema di controllo  $\mu$ , ma gli incrementi della prestazione energetica risultano particolarmente significativi solo quando i valori di  $\beta$  sono relativamente piccoli.

Tuttavia, nonostante l'EDI non varia in modo significativo al variare di  $\mu_S$ , i parametri di progetto ottimali che realizzano quella determinata prestazione ener-

getica ne risultano maggiormente influenzati. Il rapporto di frequenze del sistema di controllo, Figg. 4.22 (d-f), generalmente diminuisce all'aumentare di  $\beta$ , anche se le riduzioni sono poco significative. All'aumentare dei rapporti di masse della sovrastruttura e del sistema di controllo il parametro di progetto  $\nu_{opt}$  diminuisce, inoltre le riduzioni all'aumentare di  $\mu_S$  risultano maggiori quando i valori di  $\mu$  sono piccoli.

Il rapporto di smorzamento del sistema di controllo, Figg. 4.22 (g-i), è una funzione monotona crescente di  $\beta$  e diminuisce all'aumentare di  $\mu$  anche se per rapporti di inerzia relativamente elevati tutte le curve saturano per valori simili indipendentemente dal rapporto di masse del sistema di controllo. Inoltre il parametro di progetto  $\xi_{T,opt}$ , rispetto a  $\nu_{opt}$ , risulta meno sensibile alle variazioni del parametro  $\mu_S$  anche se diminuisce all'aumentare del rapporto di masse della sovrastruttura e le riduzioni sono maggiormente significative per  $\beta$  relativamente elevati.

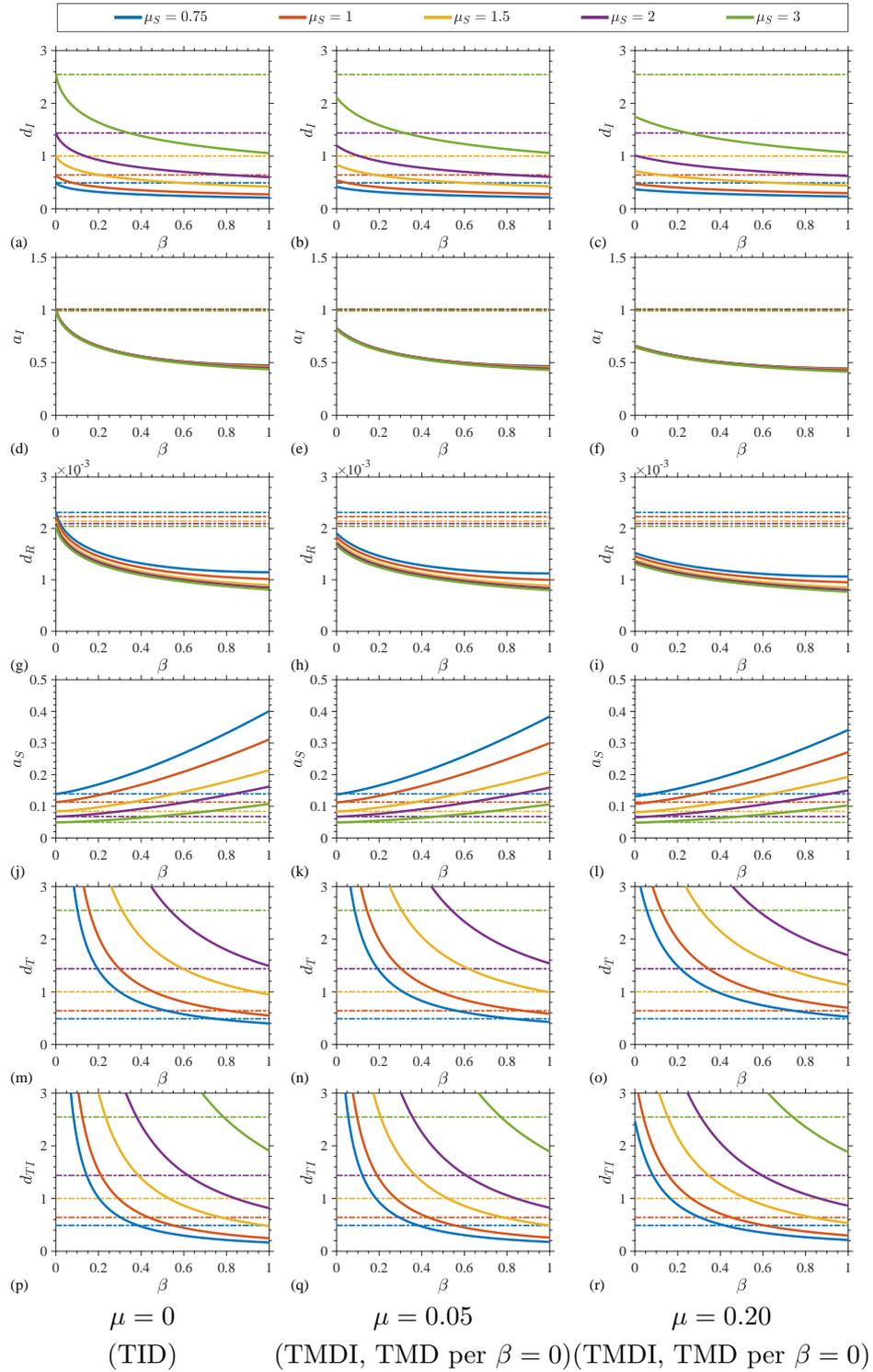
Nelle righe di Fig. 4.23 si riportano i sei indici di prestazione cinematica definiti nell'Eq. 4.10 per i corrispondenti casi riportati nella Fig. 4.22.

Nella Fig. 4.23 (a) si osserva come nei casi di sola sovrastruttura+BIS ( $\mu = 0$  e  $\beta = 0$ ) lo spostamento del basamento diminuisce al diminuire del rapporto di masse della sovrastruttura. A fissato valore di  $\mu_S$ , l'indice  $d_I$  diminuisce sempre all'aumentare di  $\beta$  (ovvero attraverso l'introduzione del sistema di controllo TID) fino a saturare per valori relativamente elevati del rapporto di inerzia. L'introduzione del TID produce maggiori riduzioni in termini di spostamento del basamento nel caso di sovrastrutture relativamente massive (ovvero  $\mu_S$  relativamente grandi) e all'aumentare di  $\beta$  i maggiori incrementi di prestazione si ottengono per rapporti di inerzia relativamente piccoli.

All'aumentare del rapporto di masse del sistema di controllo, Figg. 4.23 (b-c) si osserva come nel caso di sistemi TMD ( $\beta = 0$ ) si hanno livelli di efficacia sempre maggiori in termini di spostamento del basamento (il TMD<sub>NC</sub> è più efficace del TMD<sub>C</sub>) soprattutto per sovrastrutture caratterizzate da relativamente grandi rapporti di masse. All'aumentare di  $\beta$  (ovvero sistemi TMDI) i livelli di efficacia aumentano all'aumentare di  $\mu_S$  e i maggiori incrementi di prestazione si ottengono per  $\beta$  relativamente piccoli; infatti, quando i rapporti di inerzia sono relativamente elevati la presenza di una massa nel sistema di controllo risulta ininfluente (quindi è preferibile l'utilizzo di un sistema TID rispetto ad un TMDI). Quindi, attraverso l'utilizzo di sistemi di controllo basati sull'Inerter (TMDI o TID) è possibile ottenere anche nel caso di sovrastrutture caratterizzate da rapporti di masse elevati livelli di prestazione in termini di spostamento del basamento paragonabili a quelli di sovrastrutture più leggere.

L'accelerazione del basamento, Figg. 4.23 (d-f), non risulta influenzata dal rapporto di massa della sovrastruttura, ma diminuisce all'aumentare sia del rapporto di masse  $\mu$  che di inerzia  $\beta$  e pertanto l'indice di prestazione  $a_I$ , per i casi analizzati, assume valori inferiori all'unità.

Per quanto riguarda le risposte della sovrastruttura, si osserva come lo spostamento relativo  $d_R$ , Figg. 4.23 (g-i) diminuisce all'aumentare del rapporto di inerzia fino a saturare per valori relativamente elevati di  $\beta$  e diminuisce all'aumentare del rapporto di massa  $\mu$  soprattutto per  $\beta$  relativamente piccoli. Invece, l'accelerazione  $a_S$ , Figg. 4.23 (j-l), è una funzione monotona crescente di  $\beta$  e diminuisce all'aumentare di  $\mu$  soprattutto per rapporti di inerzia relativamente elevati; infatti, la



**Figura 4.23.** Indici di prestazione cinematica definiti nell'Eq. 4.10 al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  e per fissati valori del rapporto di massa della sovrastruttura  $\mu_S$  e del sistema di controllo  $\mu$  ( $\nu_S = 3$ ,  $\xi_S = 0.02$  e  $\xi_I = 0.15$ ).

presenza di una massa nel sistema di controllo risulta trascurabile quando i valori di  $\beta$  sono piccoli.

Gli spostamenti relativi del sistema di controllo  $d_T$  e  $d_{TI}$  nel caso del TID, rispettivamente Figg. 4.23 (m) e (p), si riducono in modo significativo all'aumentare di  $\beta$ , mentre aumentano all'aumentare della massa della sovrastruttura. Quindi, al fine di raggiungere lo stesso indice di prestazione cinematica nel sistema di controllo all'aumentare del rapporto di masse  $\mu_S$  è necessario incrementare il rapporto di inertanza. Nelle Figg. 4.23 (n-o) e (q-r) si osserva come la presenza di una massa nel sistema di controllo permette di incrementare l'efficacia nel ridurre le risposte  $d_T$  e  $d_{TI}$  quando i rapporti di inertanza sono piccoli, mentre diventa trascurabile per  $\beta$  relativamente elevati.

In conclusione, gli spostamenti del basamento aumentano all'aumentare del rapporto di massa della sovrastruttura, ma possono essere ridotti anche in modo significativo attraverso l'utilizzo di un sistema di controllo a masse accordate. Questi sistemi di controllo, infatti, risultano maggiormente efficaci nel caso di sovrastrutture caratterizzate da rapporti di masse elevati e per tale ragione consentono di raggiungere livelli di prestazione comparabili se non superiori a quelle ottenute nel caso di BIS non controllati con sovrastrutture leggere. Nel caso sovrastrutture caratterizzate da elevati valori del rapporto di massa i sistemi di controllo TMD permettono riduzioni anche significative dell'indice  $d_I$ , ma gli spostamenti della massa ausiliaria possono risultare eccessivi. I sistemi di controllo basati sull'Inerter (cioè il TMDI e il TID), invece, permettono di limitare questo vincolo progettuale dal momento che sono in grado di ridurre in modo significativo sia gli spostamenti del basamento che quelli del sistema di controllo. Inoltre, la presenza di una massa nel sistema di controllo è trascurabile quando i  $\beta$  sono relativamente elevati (l'utilizzo del TID è preferibile), mentre è essenziale quando i valori piccoli del rapporto di inertanza (l'utilizzo del TMDI è preferibile) al fine di ottenere risposte del sistema di controllo ammissibili.

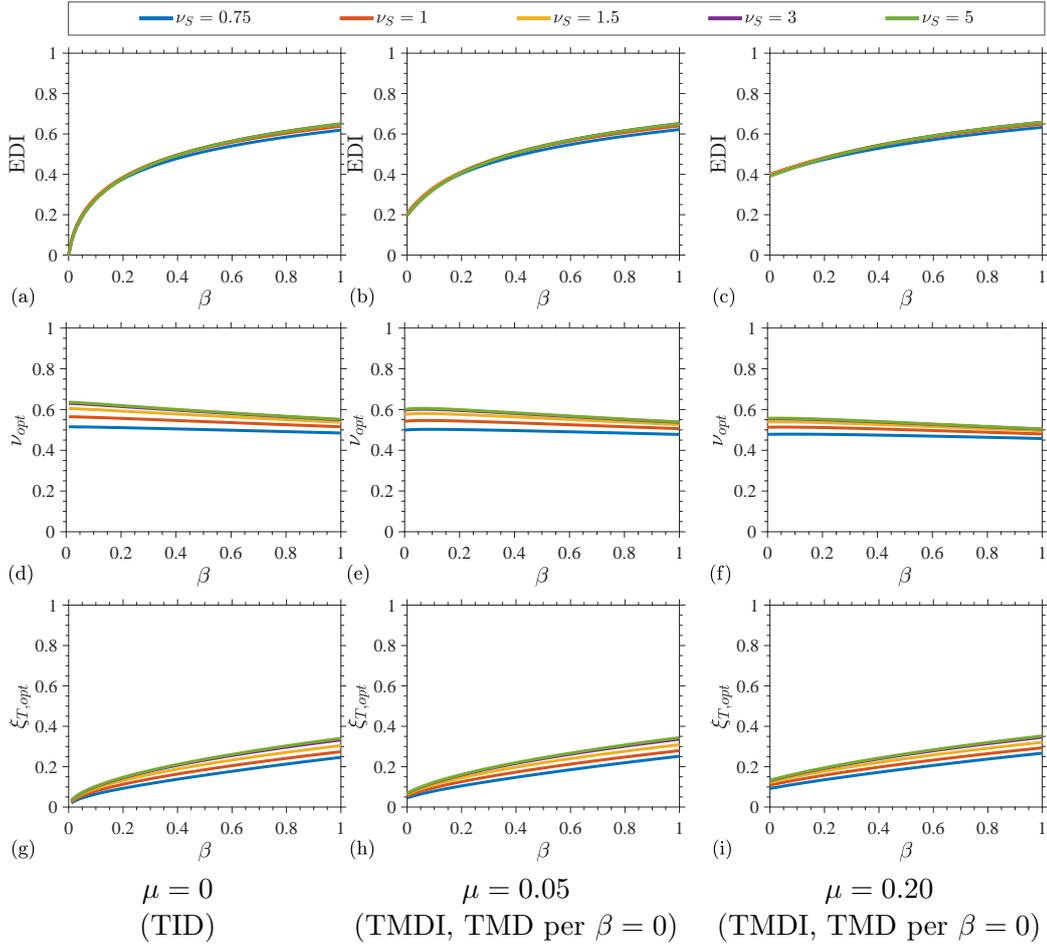
### 4.5.3 Valutazione delle prestazioni al variare della frequenza della sovrastruttura

In questa sottosezione si vuole indagare l'influenza del rapporto di frequenze della sovrastruttura  $\nu_S$  sia sull'indice e i parametri di progetto, Fig. 4.24, che sugli indici di prestazione cinematica relativi al BIS, alla sovrastruttura e al sistema di controllo, Fig. 4.25.

I seguenti risultati sono stati ottenuti fissando il rapporto di smorzamento  $\xi_S = 0.02$  e di massa  $\mu_S = 1.5$  della sovrastruttura e il rapporto di smorzamento del BIS  $\xi_I = 0.15$ , e per ciascuna tripletta di valori dei parametri  $\nu_S - \mu - \beta$  sono stati ottimizzati i valori dei parametri  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{T,opt}$  sulla base dell'EDI.

In analogia alla Fig. 4.22, in Figura 4.24 si riportano rispettivamente l'indice EDI e i parametri di progetto  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{T,opt}$  al variare del rapporto di inertanza  $\beta$  e per cinque diversi valori del rapporto di frequenze della sovrastruttura ( $\nu_S = 0.75, 1, 1.5, 3, 5$ ) e per tre diversi valori del rapporto di masse del sistema di controllo ( $\mu = 0, 0.05, 0.2$ ).

L'indice di progetto EDI, Figg. 4.24 (a-c), non è influenzato in modo significativo dal rapporto di frequenze della sovrastruttura  $\nu_S$ , mentre, a fissato valore di  $\mu$ ,



**Figura 4.24.** Valore massimo dell'EDI e parametri ottimali  $\nu_{opt}$  e  $\xi_{T,opt}$  al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  e per fissati valori del rapporto di frequenze della sovrastruttura  $\nu_S$  e del rapporto di masse  $\mu$  ( $\mu_S = 1.5$ ,  $\xi_S = 0.02$  e  $\xi_I = 0.15$ ).

aumenta all'aumentare di  $\beta$  per poi saturare per valori del rapporto di inerzia relativamente elevati. La prestazione energetica, inoltre, aumenta con il rapporto di massa del sistema di controllo e gli incrementi dell'EDI sono maggiori quando i valori di  $\beta$  sono relativamente piccoli.

I parametri di progetto ottimali che realizzano quella determinata prestazione energetica risultano poco influenzati dal parametro  $\nu_S$  soprattutto quando la sovrastruttura è relativamente più rigida del BIS ( $\nu_S \geq 3$ ).

Il rapporto di frequenze del sistema di controllo, Figg. 4.24 (d-f), generalmente diminuisce anche se in modo poco significativo all'aumentare sia di  $\beta$  che di  $\mu$ . All'aumentare del rapporto di frequenze della sovrastruttura, il parametro di progetto  $\nu_{opt}$  aumenta fino a saturare per valori di  $\nu_S \geq 3$  e gli incrementi risultano maggiori quando i valori del rapporto di massa del sistema di controllo sono piccoli.

Il rapporto di smorzamento del sistema di controllo, Figg. 4.24 (g-i), è una funzione monotona crescente di  $\beta$  e aumenta all'aumentare di  $\mu$  con incrementi maggiori quando il rapporto di inerzia è relativamente piccolo. Il parametro

di progetto  $\xi_{T,opt}$ , inoltre, aumenta con  $\nu_S$  anche se le variazioni risultano poco significative per sovrastrutture relativamente più rigide del BIS ( $\nu_S \geq 3$ ).

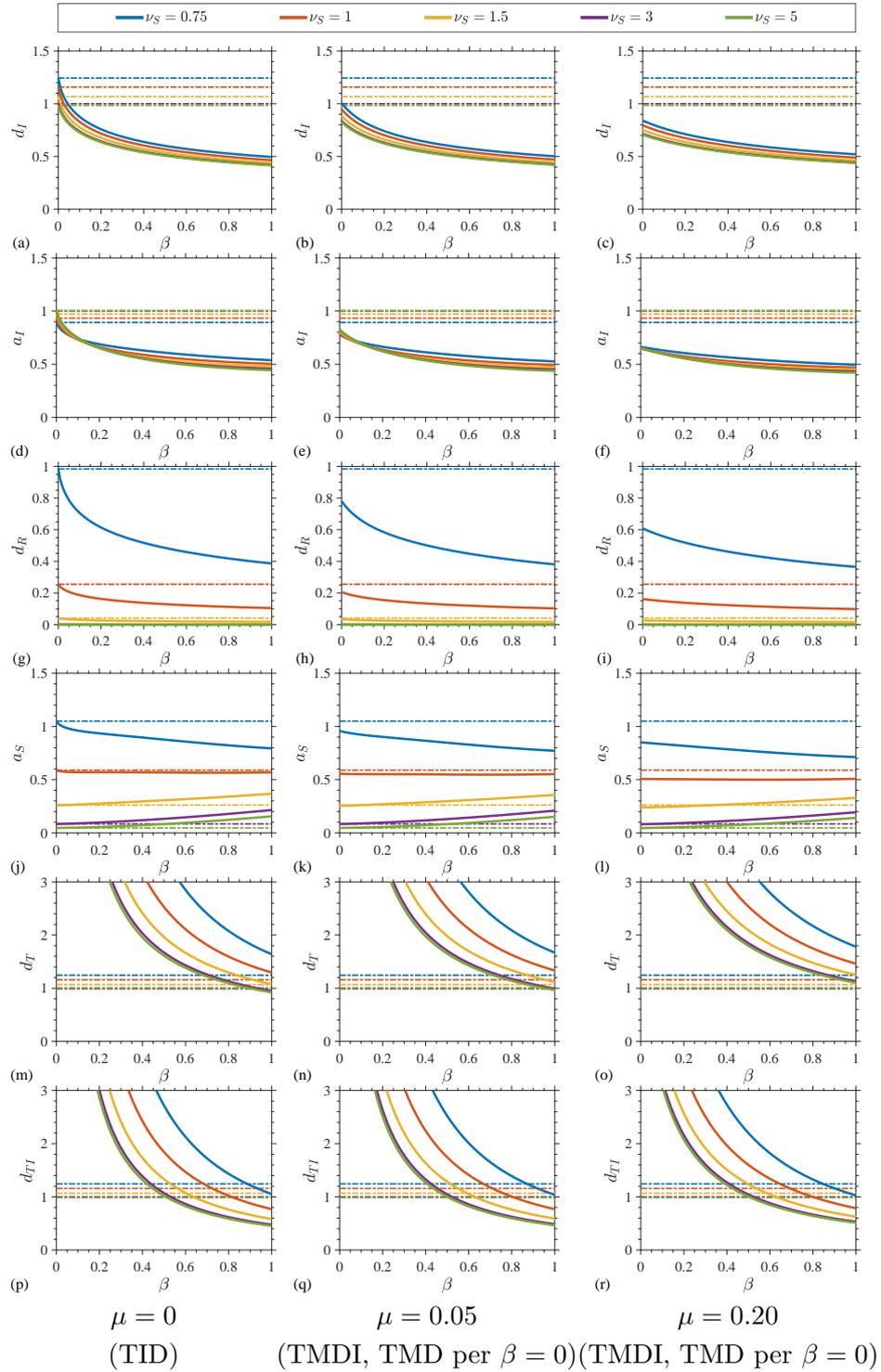
In analogia alla Fig. 4.23, in Figura 4.25 si riportano i sei indici di prestazione cinematica definiti nell'Eq. 4.10 per i corrispondenti casi riportati nella Fig. 4.24.

Nella Fig. 4.25 (a) si osserva come nei casi di sola sovrastruttura+BIS ( $\mu = 0$  e  $\beta = 0$ ) lo spostamento del basamento si riduce all'aumentare della rigidità della sovrastruttura fino ad arrivare a rapporti di frequenze  $\nu_S \geq 3$  oltre ai quali non si hanno ulteriori significative riduzioni. A fissato valore di  $\nu_S$ , l'indice  $d_I$  diminuisce sempre all'aumentare di  $\beta$  (ovvero attraverso l'introduzione del sistema di controllo TID) con riduzioni maggiori per rapporti di inerzia relativamente piccoli; inoltre ad eccezione di valori molto piccoli di  $\beta$  l'indice di prestazione è sempre inferiore all'unità.

All'aumentare del rapporto di masse del sistema di controllo, Figg. 4.25 (b-c) si osserva come nel caso di sistemi TMD ( $\beta = 0$ ) si hanno livelli di efficacia sempre maggiori ( $d_I \leq 1$ ) in termini di spostamento del basamento (il TMD<sub>NC</sub> è più efficace del TMD<sub>C</sub>). All'aumentare di  $\beta$  (ovvero sistemi TMDI) i livelli di efficacia aumentano sempre fino a tendere a valori analoghi di quelli ottenuti con il sistema TID per rapporti di inerzia relativamente elevati (quindi la presenza di una massa nel sistema di controllo risulta ininfluenza). Il rapporto di frequenze della sovrastruttura non influenza in modo significativo l'efficacia dei sistemi a masse accordate nel ridurre lo spostamento del basamento (le diverse curve al variare di  $\nu_S$  sono abbastanza raggruppate) e quindi, attraverso l'utilizzo di sistemi di controllo è possibile ottenere anche nel caso di sovrastrutture relativamente flessibili spostamenti del basamento inferiori a quelli di BIS con sovrastrutture relativamente rigide (l'indice di prestazione è tipicamente più piccolo dell'unità).

L'accelerazione del basamento nel caso di sola sovrastruttura+BIS, asse delle ordinate di Fig. 4.25 (d), diminuisce al diminuire del rapporto di frequenze  $\nu_S$  anche se i valori sono abbastanza raggruppati. Aggiungendo un sistema di controllo TID ( $\beta > 0$ ), l'indice di prestazione  $a_I$  si riduce sempre con valori inferiori all'unità fino a saturare per valori relativamente elevati del rapporto di inerzia. Nonostante le prestazioni del TID non variano in modo significativo al variare del rapporto di frequenze della sovrastruttura, si osservano due tendenze diverse delimitate dal rapporto di inerzia  $\beta = 0.12$  in cui l'indice  $a_I$  è indipendente da  $\nu_S$ . L'accelerazione del basamento all'aumentare del rapporto di frequenze della sovrastruttura per  $\beta < 0.12$  aumenta, mentre per  $\beta > 0.12$  diminuisce.

All'aumentare di  $\mu$ , si osserva come anche nel caso di sistemi TMD<sub>C</sub>, asse delle ordinate di Fig. 4.25 (e), si hanno riduzioni dell'indice  $a_I$  e queste risultano maggiori nel caso di TMD<sub>NC</sub>, asse delle ordinate di Fig. 4.25 (f). L'aggiunta del dispositivo Inerter collegato ad un sistema TMD realizza il sistema di controllo TMDI, che è in grado di ridurre anche l'accelerazione del basamento e le prestazioni sono comparabili a quelle ottenute con il sistema TID nel caso di  $\beta$  relativamente elevati (la massa nel sistema di controllo è ininfluenza). Per  $\mu = 0.05$ , Fig. 4.25 (e), si osservano nuovamente le due tendenze al variare di  $\nu_S$  anche se il rapporto di inerzia che delimita i due comportamenti questa volta è inferiore rispetto a quello precedente. Invece, per  $\mu = 0.2$  e  $\beta$  fissato (sistema TMDI), Fig. 4.25 (f), all'aumentare del rapporto di frequenze della sovrastruttura l'indice di prestazione cinematica  $a_I$  si riduce sempre.



**Figura 4.25.** Indici di prestazione cinematica definiti nell'Eq. 4.10 al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  e per fissati valori del rapporto di frequenze della sovrastruttura  $\nu_S$  e del rapporto di masse  $\mu$  ( $\mu_S = 1.5$ ,  $\xi_S = 0.02$  e  $\xi_I = 0.15$ ).

Le Figg. 4.25 (g-i) riportano l'indice di prestazione cinematica  $d_R$  (ovvero lo spostamento relativo tra la sovrastruttura e il basamento) al variare del rapporto di inerzia e per diversi valori del rapporto di masse del sistema di controllo e del rapporto di frequenze della sovrastruttura. Per  $\mu = 0$ , Fig. 4.25 (g), si osserva come, a fissato  $\nu_S$ , lo spostamento si riduce all'aumentare di  $\beta$ , ovvero attraverso l'utilizzo del TID, e il sistema di controllo risulta maggiormente efficace nel caso di sovrastrutture flessibili. Lo spostamento  $d_R$  si riduce in modo significativo per  $\beta$  relativamente piccoli per poi saturare all'aumentare del rapporto di inerzia. L'aggiunta di un sistema TMD, asse delle ordinate delle Figg. 4.25 (h-i), permette di ridurre anche in modo significativo lo spostamento relativo  $d_R$  soprattutto per sovrastrutture relativamente flessibili ( $\nu_S < 1.5$ ) e l'efficacia aumenta all'aumentare del rapporto di massa  $\mu$ . Nel caso di sistemi TMDI ( $\mu > 0$  e  $\beta > 0$ ), lo spostamento relativo della sovrastruttura si riduce all'aumentare del rapporto di inerzia per poi saturare a valori analoghi del sistema TID per  $\beta$  relativamente elevati (la massa nel sistema di controllo è ininfluente).

Per quanto riguarda l'indice di prestazione cinematica  $a_S$  relativo all'accelerazione assoluta della sovrastruttura, 4.25 (j-l), nel caso di sistemi di controllo basati sull'Inerter (TMDI e TID), si osservano tendenze diverse a seconda del rapporto di frequenza  $\nu_S$ . All'aumentare di  $\beta$ , infatti, l'indice  $a_S$  diminuisce per  $\nu_S < 1$  (sovrastrutture più flessibili del BIS), rimane circa costante per  $\nu_S = 1$  (sovrastrutture e BIS caratterizzati dalla stessa frequenza) e aumenta per  $\nu_S > 1$  (sovrastrutture più rigide del BIS). In questo caso, indipendentemente dal rapporto di inerzia (quindi anche  $\beta = 0$ , TMD), all'aumentare del rapporto di masse  $\mu$  aumenta l'efficacia in termini di riduzione dell'accelerazione della sovrastruttura soprattutto per sovrastrutture relativamente più flessibili rispetto al BIS.

Infine si osserva che, per tutti i casi analizzati, l'indice di prestazione  $d_T$ , Figg. 4.25 (m-o), è sempre maggiore rispetto all'indice  $d_{TI}$ , Figg. 4.25 (p-r). All'aumentare di  $\beta$  gli spostamenti relativi del sistema di controllo diminuiscono in modo significativo per poi saturare a valori simili per rapporti di inerzia relativamente elevati. Al fine di contenere le risposte del sistema di controllo, la presenza di una massa ausiliaria ( $\mu > 0$ ) risulta fondamentale per sistemi TMDI caratterizzati da  $\beta$  relativamente piccoli, mentre risulta trascurabile quando i rapporti di inerzia risultano relativamente elevati (è preferibile l'utilizzo di sistemi TID). Nel caso di sistemi di controllo TMD gli spostamenti del sistema di controllo, invece, possono essere un importante vincolo progettuale. All'aumentare del rapporto di frequenze  $\nu_S$  gli indici  $d_T$  e  $d_{TI}$  si riducono sempre per poi saturare nel caso di sovrastrutture relativamente rigide ( $\nu_S \geq 3$ ).

In conclusione, i sistemi di controllo a masse accordate sono in grado di ridurre in modo significativo la risposta del basamento anche nel caso di sovrastrutture relativamente più flessibili del BIS. In particolare a parità di rapporto di masse, l'efficacia dei sistemi TMDI risulta sempre superiore rispetto ai TMD, mentre il TMDI è più efficace del TID quando i rapporti di inerzia sono piccoli e ha prestazioni simili per  $\beta$  relativamente elevati (ovvero la massa ausiliaria risulta trascurabile). Inoltre, i sistemi di controllo risultano particolarmente efficaci nel ridurre lo spostamento e l'accelerazione quando la sovrastruttura risulta relativamente flessibile. Infine, gli spostamenti del sistema di controllo risultano essere un vincolo progettuale soprattutto nel caso di sovrastrutture relativamente flessibili, in quanto può

essere anche più di tre volte maggiore rispetto allo spostamento del sistema sovrastruttura+BIS di riferimento. In ogni caso all'aumentare dell'inertanza del sistema di controllo (TMDI o TID) le risposte  $d_T$  e  $d_{TI}$  si riducono in modo significativo fino a raggiungere valori prossimi allo spostamento del sistema di riferimento.

## 4.6 Conclusioni

In questo capitolo, è stata investigata l'efficacia di sistemi a masse accordate innovativi basati sull'Inerter (TMDI e TID), anche rispetto ai tradizionali sistemi TMD, nel ridurre lo spostamento laterale di sistemi isolati di base (BIS) senza incrementarne in modo significativo le accelerazioni. L'attenzione è stata rivolta a strutture multipiano isolate alla base, ma le tendenze osservate e le seguenti conclusioni possono essere estese a molte strutture dell'ingegneria civile (campate dei ponti, ecc...) dotate di sistemi di isolamento oltre che a oggetti d'arte contenuti nei musei (statue, vasi, ecc...) e ad apparecchiature strategiche (elettromedicali, elettroniche, CED, ecc...) contenute all'interno di strutture edilizie.

Il sistema a N+1+1 gdl è stato studiato inizialmente attraverso un sistema ridotto generalizzato a 1+1 gdl (ipotizzando la sovrastruttura relativamente più rigida del BIS) e poi attraverso un modello ridotto generalizzato a 1+1+1 gdl (al fine di valutare l'influenza della sovrastruttura). Attraverso un'ampia gamma di valori dei parametri considerati relativi alla massa e all'inertanza del sistema di controllo, è stato possibile confrontare le prestazioni di sistemi tradizionali TMD rispetto a sistemi innovativi basati sull'Inerter (TMDI e TID), progettati in modo ottimale massimizzando l'indice energetico EDI, soggetti ad eccitazioni di tipo rumore bianco (WN) e rumore bianco colorato (CWN) oltre che ad accelerogrammi naturali dei *ground motions* (GMs) registrati.

Come ci si aspettava, i due sistemi ridotti generalizzati conducono agli stessi risultati nel caso di sovrastruttura relativamente più rigida del BIS (ovvero con un rapporto tra la frequenza della sovrastruttura e del BIS  $\nu_S \geq 3$ ). Nel caso di eccitazione di tipo rumore bianco i risultati hanno dimostrato che i sistemi di controllo basati sull'Inerter (TMDI e TID) collegati a terra permettono di ridurre in modo significativo sia lo spostamento sia l'accelerazione del basamento sia le risposte della massa secondaria che, nel caso di sistemi TMD possono essere un importante vincolo progettuale. A fissati rapporti di inertanza  $\beta$ , i sistemi di controllo TMDI e TID hanno prestazioni comparabili: in particolare, per  $\beta$  relativamente piccoli il TMDI risulta più efficace del TID nel ridurre lo spostamento del BIS (ovvero la presenza di una massa nel sistema di controllo è favorevole), mentre per  $\beta$  relativamente elevati il TID risulta più efficace (ovvero la presenza di una massa nel sistema di controllo è sfavorevole).

L'efficacia dei sistemi di controllo considerati (TMD, TMDI e TID) nel ridurre la risposta del BIS diminuisce gradualmente all'aumentare del rapporto di smorzamento del BIS fino a un valore limite di  $\xi_I = 0.3$ , oltre al quale il BIS non controllato (fortemente smorzato) ha risposte simili sia in presenza che assenza di sistemi di controllo a masse accordate. Per tale ragione nel caso di BIS debolmente smorzati, attraverso l'utilizzo di sistemi TMDI o TID è possibile raggiungere livelli di pre-

stazione comparabili se non superiori a quelli ottenuti con solo BIS maggiormente smorzati.

Nel caso di eccitazione alla base di tipo CWN, le tendenze sopra riportate per l'eccitazione di tipo WN sono state confermate: i sistemi di controllo basati sull'Inerter (TMDI e TID) consentono di ridurre in modo significativo, e soprattutto nel caso di BIS poco smorzati, lo spostamento del basamento incrementandone in modo poco significativo l'accelerazione. Inoltre, si è osservato come, a parità di inertanza, la presenza di una massa secondaria (ovvero TMDI rispetto al TID) permette di ridurre in modo significativo la risposta del sistema di controllo.

Nel caso di sistemi eccitati da accelerogrammi naturali, tutte le precedenti osservazioni relative alle eccitazioni di tipo WN e CWN sono confermate sia per i terremoti di tipo near-fault che per quelli di tipo far-field. In particolare, i sistemi a massa accordata basati sull'Inerter risultano particolarmente efficaci nel ridurre anche la risposta cinematica del sistema di controllo nel caso di terremoti di tipo near-fault caratterizzati da un elevato contenuto energetico alle basse frequenze nella parte iniziale della storia temporale, anche se, per quest'ultimo particolare tipo di eccitazione, lo spostamento e l'accelerazione del basamento risultano poco ridotte rispetto al solo BIS.

Lo studio del sistema a 1+1+1 gdl ha permesso inoltre di valutare l'influenza della sovrastruttura in termini di rapporti di masse e di frequenza. Infatti, nel caso di BIS privi di sistemi di controllo gli spostamenti del basamento aumentano all'aumentare del rapporto di massa della sovrastruttura, ma possono essere ridotti anche in modo significativo attraverso l'utilizzo di sistemi a masse accordate basate sull'Inerter. I sistemi TMDI e TID, infatti, risultano maggiormente efficaci soprattutto nel caso di sovrastrutture caratterizzate da rapporti di masse elevati e per tale ragione consentono di raggiungere livelli di prestazione comparabili se non superiori a quelle ottenute nel caso di BIS non controllati con sovrastrutture leggere. I sistemi di controllo basati sull'Inerter sono in grado di ridurre in modo significativo la risposta del basamento anche nel caso di sovrastrutture relativamente più flessibili del BIS. In particolare, i sistemi TMDI e TID risultano particolarmente efficaci nel ridurre anche lo spostamento relativo della sovrastruttura soprattutto quando le sovrastrutture risultano relativamente flessibili.

In definitiva, l'aggiunta di sistemi a massa accordata a BIS permettono di ridurre in modo significativo gli spostamenti sia del basamento che della sovrastruttura senza incrementarne le accelerazioni; inoltre i sistemi di controllo basati sull'Inerter e collegati a terra riducono in modo significativo anche la risposta della massa secondaria che nei sistemi TMD a seguito dell'eccessivo spostamento rispetto al basamento può essere un importante vincolo progettuale. Per queste ragioni il TMDI e il TID consentono sia di incrementare le prestazioni di BIS, soprattutto debolmente smorzati e con sovrastrutture relativamente rigide che di isolare sovrastrutture relativamente flessibili e caratterizzate da rapporti di masse relativamente elevati.



## Capitolo 5

# Strutture adiacenti collegate con connessioni basate sull’Inerter

### 5.1 Premessa

Oltre allo studio del sistema di controllo TMDI in strutture multipiano a base fissa e isolata, in questo capitolo è stato studiato l’Inerter come elemento di collegamento di strutture adiacenti. In particolare è stata valutata l’influenza che tale dispositivo ha sulle caratteristiche dinamiche del sistema nel caso sia posto in parallelo ad una connessione viscoelastica. Questa configurazione strutturale non è mai stata studiata in letteratura, e per questo motivo è stato studiato prima il sistema conservativo e poi quello non conservativo.

Nel caso di connessione non conservativa, una parte dello studio è stata concentrata sulla formulazione analitica di sistemi difettivi, ovvero sistemi in cui si ha la coalescenza degli autovalori; infatti questi sistemi sono caratterizzati da importanti proprietà dinamiche che li rendono particolarmente interessanti ai fini del controllo strutturale.

I risultati di questo studio sono stati pubblicati negli atti del congresso *EURO-DYN 2017* [Basili, De Angelis e Pietrosanti, 2017]<sup>1</sup> e sulla rivista internazionale *Engineering Structures* [Basili, De Angelis e Pietrosanti, 2018 e Basili, De Angelis e Pietrosanti, 2019]<sup>2,3</sup>.

---

<sup>1</sup>M. Basili, M. De Angelis and D. Pietrosanti, Dynamic response of a viscously damped two adjacent degree of freedom system linked by inerter subjected to base harmonic excitation, *Procedia Engineering* (2017); 199: 1586–1591. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.062.

<sup>2</sup>M. Basili, M. De Angelis and D. Pietrosanti, Modal analysis and dynamic response of a two adjacent single degree of freedom systems linked by spring-dashpot-inerter elements, *Engineering Structures* (2018); 174: 736-752. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.07.048.

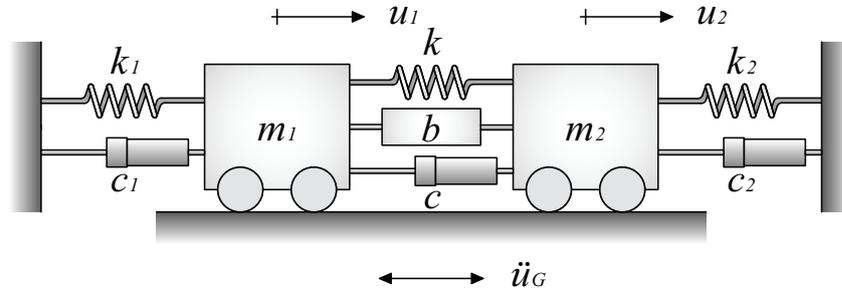
<sup>3</sup>M. Basili, De Angelis and D. Pietrosanti, Defective two adjacent single degree of freedom systems linked by spring-dashpot-inerter for vibration control, *Engineering Structures* (2019); 188: 480-492. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.03.030.

Parametro	Simbolo	Descrizione
Sistemi ad 1 gdl	$\omega_i = \sqrt{k_i/m_i}$	Frequenze naturali
	$\xi_i = c_i/(2m_i\omega_i)$	Fattori di smorzamento
Sistema a 2 gdl	$\mu = m_2/m_1$	Rapporto di massa
	$\nu = \omega_2/\omega_1$	Rapporto di frequenza
	$\lambda = k/k_1$	Rapporto di rigidità
Connessione	$\xi = c/(2m_1\omega_1)$	Fattore di smorzamento
	$\beta = b/m_1$	Rapporto di inerzia

**Tabella 5.1.** Parametri del sistema e della connessione,  $i = 1, 2$ .

## 5.2 Posizione del problema ed equazioni del moto

Si consideri un sistema a 2 gdl smorzato viscosamente, costituito da 2 oscillatori elementari adiacenti (2-ASDOF) collegati da elementi Spring-Dashpot-Inerter (SDIE) disposti in parallelo, Fig. 5.1. Ogni oscillatore elementare è definito da una rigidità  $k_i$ , una massa  $m_i$  e un coefficiente di smorzamento viscoso  $c_i$  ( $i = 1, 2$ ), mentre gli elementi della connessione sono definiti da una rigidità  $k$ , un coefficiente di smorzamento viscoso  $c$  e inerzia  $b$ .



**Figura 5.1.** Modello meccanico - Connessione con elementi Spring-Dashpot-Inerter (SDIE).

I parametri adimensionali del sistema meccanico sono riportati nella Tabella 5.1.

Le equazioni del moto relative al sistema soggetto ad eccitazione alla base sono scritte come:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{L}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = -\tilde{\mathbf{M}}\tau e(t) \quad (5.1)$$

dove  $\ddot{\mathbf{q}}(t) = \ddot{\mathbf{u}}(t)/g$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t)/(g/\omega_1)$  e  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{u}(t)/(g/\omega_1^2)$  sono i parametri cinematici adimensionali,  $\mathbf{u} = [u_1(t) \ u_2(t)]^T$  è il vettore degli spostamenti,  $\dot{\mathbf{u}}$  e  $\ddot{\mathbf{u}}$  sono rispettivamente la derivata prima e seconda di  $\mathbf{u}$  e  $g$  è l'accelerazione di gravità. Inoltre, le matrici di massa  $\mathbf{M}$  e  $\tilde{\mathbf{M}}$ , di smorzamento  $\mathbf{L}$  e di rigidità  $\mathbf{K}$  sono:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \beta & -\beta \\ \beta & \mu + \beta \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \\
\mathbf{L} &= \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\xi_1 + \xi) & -2\xi \\ -2\xi & 2(\xi_2\nu\mu + \xi) \end{bmatrix} \\
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \lambda & -\lambda \\ -\lambda & \nu^2\mu + \lambda \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$e(t) = \ddot{u}_G/g = A \sin(\omega_f t)$  è l'azione armonica applicata definita dall'ampiezza  $A$  e dalla pulsazione  $\omega_f$ , e  $\tau = [1 \ 1]^T$  è il vettore di trascinamento.

Le equazioni del moto del sistema, Eq. 5.1, possono essere riscritte secondo la formulazione nello spazio di stato, Eq. 2.1, dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\beta + \mu + \lambda\mu}{\beta + \mu + \beta\mu} & \frac{\mu(\lambda - \beta\nu^2)}{\beta + \mu + \beta\mu} & -\frac{2(\xi_1(\beta + \mu) + \mu\xi)}{\beta + \mu + \beta\mu} & \frac{2\mu(\xi - \beta\nu\xi_2)}{\beta + \mu + \beta\mu} \\ -\frac{\beta - \lambda}{\beta + \mu + \beta\mu} & -\frac{\lambda + \mu\nu^2(1 + \beta)}{\beta + \mu + \beta\mu} & \frac{2(\xi - \beta\xi_1)}{\beta + \mu + \beta\mu} & -\frac{2(\xi + \mu\nu\xi_2(1 + \beta))}{\beta + \mu + \beta\mu} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

è la matrice di stato,  $\mathbf{B} = [0 \ 0 \ -1 \ -1]^T$  è il vettore degli input.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\beta + \mu + \lambda\mu}{\beta + \mu + \beta\mu} & \frac{\mu(\lambda - \beta\nu^2)}{\beta + \mu + \beta\mu} & -\frac{2(\xi_1(\beta + \mu) + \mu\xi)}{\beta + \mu + \beta\mu} & \frac{2\mu(\xi - \beta\nu\xi_2)}{\beta + \mu + \beta\mu} \\ -\frac{\beta - \lambda}{\beta + \mu + \beta\mu} & -\frac{\lambda + \mu\nu^2(1 + \beta)}{\beta + \mu + \beta\mu} & \frac{2(\xi - \beta\xi_1)}{\beta + \mu + \beta\mu} & -\frac{2(\xi + \mu\nu\xi_2(1 + \beta))}{\beta + \mu + \beta\mu} \end{bmatrix}$$

è la matrice degli output,  $\mathbf{D}$  è il vettore nullo  $5 \times 1$ ,  $\mathbf{z}(t) = [q_1 \ q_2 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T$  e  $\boldsymbol{\theta}(t) = [q_1 \ q_2 \ q_{21} \ \ddot{q}_1^{(tot)} \ \ddot{q}_2^{(tot)}]^T$  sono rispettivamente il vettore di stato e il vettore degli output. Inoltre, con  $q_{21} = q_2 - q_1$  è indicato lo spostamento relativo tra i due oscillatori, mentre con  $\ddot{q}_1^{(tot)}$  e  $\ddot{q}_2^{(tot)}$  sono indicate rispettivamente le accelerazioni assolute dei due oscillatori.

Si noti che, a causa della struttura della matrice di smorzamento, il sistema studiato è un sistema non classicamente smorzato.

In questo studio, si assume che i due oscillatori sono non smorzati ( $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ) e che lo smorzamento è localizzato solo nella connessione; inoltre sono stati considerati sia casi di connessione conservativa e non conservativa. Nel caso di sistema conservativo sono state considerate connessioni con solo elemento Spring (SE), con solo elemento Inerter (IE) e con elementi Spring-Inerter (SIE), caratterizzate dai parametri  $\lambda$  e  $\beta$ , rispettivamente per il rapporto di rigidità e di inerzia. Nel caso di una connessione non conservativa, è stato considerato un sistema SDIE, descritto attraverso i parametri  $\lambda$ ,  $\beta$  e  $\xi$  (rapporto di smorzamento). La dinamica del sistema costituito da 2-ASDOF è completamente descritta dal rapporto di massa  $\mu$  e di frequenza  $\nu$ . I parametri del sistema sono raccolti nel vettore  $\boldsymbol{\kappa} = (\mu, \nu, \lambda, \beta, \xi)$ .

Per completezza di trattazione, lo studio è stato effettuato considerando il rapporto di frequenza  $\nu$  nei due intervalli, rispettivamente  $0 < \nu \leq 1$  e  $\nu > 1$ . Tuttavia,

Parametro	Riferimento	Duale
Rapporto di frequenze	$\nu$	$\bar{\nu} = 1/\nu$
Rapporto di massa	$\mu$	$\bar{\mu} = 1/\mu$
Rapporto di rigidità	$\lambda$	$\bar{\lambda} = \lambda/(\mu\nu^2)$
Rapporto di inerzia	$\beta$	$\bar{\beta} = \beta/\mu$
Frequenze naturali	$\gamma_i$	$\bar{\gamma}_i = \gamma_i\nu$

**Tabella 5.2.** Relazioni di dualità per i parametri del sistema e della connessione,  $i = 1, 2$ .

può essere dimostrato analiticamente che, a causa della simmetria del sistema studiato, esistono relazioni di dualità per i parametri tra i due intervalli del rapporto di frequenza  $\nu$ . La Tabella 5.2 riporta le relazioni di dualità per i parametri del sistema e della connessione nei due intervalli.

## 5.3 Analisi modale

### 5.3.1 Connessione conservativa

Lo studio del problema agli autovalori del sistema costituito da 2-ASDOF collegati con SIE, Eq. 5.1, in assenza di forze di smorzamento e forzanti, si riduce a:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

Risolvendo il problema agli autovalori associato  $\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = s\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}$ , è possibile ricavare le frequenze naturali  $\gamma_i$ , essendo  $s_i = \gamma_i^2$ , e i modi di vibrare  $\boldsymbol{\phi}_i$  del sistema ( $i = 1, 2$ ):

$$\begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 - 4 \left( \frac{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}{\sigma_2} \right)}} \quad (5.5)$$

con  $\sigma_1 = k_{22}m_{11} + k_{11}m_{22} - 2k_{12}m_{12}$  e  $\sigma_2 = m_{11}m_{22} - m_{12}^2$  e

$$\boldsymbol{\phi}_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

I rapporti  $\phi_{21}/\phi_{11}$  e  $\phi_{22}/\phi_{12}$  determinano il profilo della forma dello spostamento assunto dal sistema quando oscilla alla frequenza  $\gamma_1$  o  $\gamma_2$ , e sono governati dalle equazioni:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}} = -\frac{k_{11} - \gamma_1^2 m_{11}}{k_{12} - \gamma_1^2 m_{12}} = -\frac{k_{21} - \gamma_1^2 m_{21}}{k_{22} - \gamma_1^2 m_{22}} \\ v_2 &= \frac{\phi_{22}}{\phi_{12}} = -\frac{k_{11} - \gamma_2^2 m_{11}}{k_{12} - \gamma_2^2 m_{12}} = -\frac{k_{21} - \gamma_2^2 m_{21}}{k_{22} - \gamma_2^2 m_{22}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Impostando correttamente i parametri del sistema e della connessione, il modello qui presentato degenera nelle stesse soluzioni analitiche riportate in [Meirovitch,

2010] e in [Chen et al., 2014] per un sistema a 2-DOF non smorzato collegato rispettivamente con un elemento Spring e un elemento Inerter.

Le espressioni analitiche delle frequenze e dei rapporti tra i modi naturali rapporti  $v_1$  e  $v_2$  per le tre diverse connessioni considerate sono riassunti in Tabella 5.3.

Connessione	Frequenze naturali	Modi naturali
Spring-Inerter Elements (SIE) ( $\lambda \neq 0, \beta \neq 0$ )	$\gamma_1^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sqrt{\sigma_1^2 - 4(\lambda + \mu\nu^2(\lambda + 1))\sigma_2}}{2\sigma_2} \right)$ $\gamma_2^2 = \left( \frac{\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1^2 - 4(\lambda + \mu\nu^2(\lambda + 1))\sigma_2}}{2\sigma_2} \right)$ $\sigma_1 = \mu(1 + \nu^2) + \lambda(1 + \mu) + \beta(1 + \mu\nu^2)$ $\sigma_2 = \mu + \beta(1 + \mu)$	$v_1 = \frac{\lambda - \beta\gamma_1^2}{\lambda - \beta\gamma_1^2 - \mu\gamma_1^2 + \mu\nu^2}$ $v_2 = \frac{\lambda - \beta\gamma_2^2}{\lambda - \beta\gamma_2^2 - \mu\gamma_2^2 + \mu\nu^2}$
Spring Element (SE) ( $\lambda \neq 0$ )	$\gamma_1^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sqrt{\sigma_1^2 - 4(\lambda + \mu\nu^2(\lambda + 1))\sigma_2}}{2\sigma_2} \right)$ $\gamma_2^2 = \left( \frac{\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1^2 - 4(\lambda + \mu\nu^2(\lambda + 1))\sigma_2}}{2\sigma_2} \right)$ $\sigma_1 = \mu(1 + \nu^2) + \lambda(1 + \mu)$ $\sigma_2 = \mu$	$v_1 = \frac{\lambda}{\lambda - \mu\gamma_1^2 + \mu\nu^2}$ $v_2 = \frac{\lambda}{\lambda - \mu\gamma_2^2 + \mu\nu^2}$
Inerter Element (IE) ( $\beta \neq 0$ )	$\gamma_1^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sqrt{\sigma_1^2 - 4\mu\nu^2\sigma_2}}{2\sigma_2} \right)$ $\gamma_2^2 = \left( \frac{\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1^2 - 4\mu\nu^2\sigma_2}}{2\sigma_2} \right)$ $\sigma_1 = \mu(1 + \nu^2) + \beta(1 + \mu\nu^2)$ $\sigma_2 = \mu + \beta(1 + \mu)$	$v_1 = \frac{\beta\gamma_1^2}{\beta\gamma_1^2 + \mu\gamma_1^2 - \mu\nu^2}$ $v_2 = \frac{\beta\gamma_2^2}{\beta\gamma_2^2 + \mu\gamma_2^2 - \mu\nu^2}$

**Tabella 5.3.** Espressioni analitiche delle frequenze e dei modi naturali per le connessioni con gli elementi Spring-Inerter (SIE), con l'elemento Spring (SE) e con l'elemento Inerter (IE).

Si può osservare come una connessione conservativa ammette soluzioni in forma chiusa per il problema degli autovalori.

Alcuni importanti casi limite per i parametri strutturali, che schematizzano diverse soluzioni strutturali, sono:  $\nu \rightarrow 0$  e  $\nu \rightarrow \infty$ ,  $\mu \rightarrow 0$  e  $\mu \rightarrow \infty$ . La situazione particolare  $\nu = 1$  e  $\mu = 1$ , invece, rappresenta il caso di due sistemi oscillatori elementari identici. Nel seguito si assume che il rapporto di massa sia sempre strettamente positivo,  $\mu > 0$ .

Avendo normalizzato rispetto la massa  $m_1$  e la pulsazione  $\omega_1$ ,  $\gamma_i = 1$  significa che la  $i$ -esima frequenza del sistema accoppiato è uguale a quella del primo oscillatore disaccoppiato e  $\gamma_i = \nu$  significa che la  $i$ -esima frequenza del sistema accoppiato è uguale a quella del secondo oscillatore disaccoppiato.

Pseudo-frequenze naturali	$\gamma_1 = \sqrt{s_1 s_2} = \sqrt{\alpha_1^2 + \delta_1^2}$	$\gamma_2 = \sqrt{s_3 s_4} = \sqrt{\alpha_2^2 + \delta_2^2}$
Pseudo-fattori di smorzamento	$\eta_1 = -\frac{s_1 + s_2}{2\sqrt{s_1 s_2}} = \frac{-\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \delta_1^2}}$	$\eta_2 = -\frac{s_3 + s_4}{2\sqrt{s_3 s_4}} = \frac{-\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \delta_2^2}}$

Tabella 5.4. Quantità modali.

### 5.3.2 Connessione non conservativa

Nel caso di connessione non conservativa, le proprietà modali del sistema sono state determinate attraverso l'analisi modale complessa dal momento che il sistema dinamico considerato è non classicamente smorzato. Risolvendo il problema agli autovalori, Eq. 2.3, è possibile determinare autovalori  $s$  e autovettori  $\boldsymbol{\psi}$  così come definito in [Chopra, 2015]:

$$\begin{aligned} s_1, s_2 &= \alpha_1 \pm j\delta_1, \quad s_3, s_4 = \alpha_2 \pm j\delta_2 \quad (j = \sqrt{-1}) \\ \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2 &= \boldsymbol{\phi}_1 \pm j\chi_1, \quad \boldsymbol{\psi}_3, \boldsymbol{\psi}_4 = \boldsymbol{\phi}_2 \pm j\chi_2 \quad (j = \sqrt{-1}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Il termine  $\alpha_i$  è assunto sempre reale negativo al fine di avere stabilità asintotica (il caso  $\alpha_i = 0$  si ha nel caso in cui non si ha presenza delle forze di smorzamento), mentre il termine  $\delta_i$  può essere sia reale che complesso. A seconda della soluzione, si possono avere tre diverse situazioni: i) se gli autovalori risultano complessi e coniugati, allora il modo risulta essere sottosmorzato, ii) se risultano reali coincidenti (ovvero  $\delta_i = 0$ ) allora il modo risulta essere criticamente smorzato e iii) se risultano reali e distinti, allora il modo è sovrasmorzato.

Dagli autovalori associati all' $i$ -esimo modo di vibrare è possibile valutare frequenze  $\gamma_i$  e fattori di smorzamento modale  $\eta_i$  come riportato nella Tabella 5.4.

In particolare, dalla matrice di stato  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\kappa})$ , Eq. 5.3, risolvendo il problema agli autovalori, si ottiene la seguente equazione caratteristica:

$$s^4 + a_1(\boldsymbol{\kappa})s^3 + a_2(\boldsymbol{\kappa})s^2 + a_3(\boldsymbol{\kappa})s + a_4(\boldsymbol{\kappa}) = 0 \quad (5.9)$$

dove

$$\begin{aligned} a_1(\boldsymbol{\kappa}) &= \frac{2\xi(1 + \mu)}{\beta + \mu + \beta\mu} \\ a_2(\boldsymbol{\kappa}) &= \frac{\beta + \lambda + \mu((1 + \lambda) + \nu^2(1 + \beta))}{\beta + \mu + \beta\mu} \\ a_3(\boldsymbol{\kappa}) &= \frac{2\xi(\mu\nu^2 + 1)}{\beta + \mu + \beta\mu} \\ a_4(\boldsymbol{\kappa}) &= \frac{\lambda + \mu\nu^2 + \lambda\mu\nu^2}{\beta + \mu + \beta\mu} \end{aligned}$$

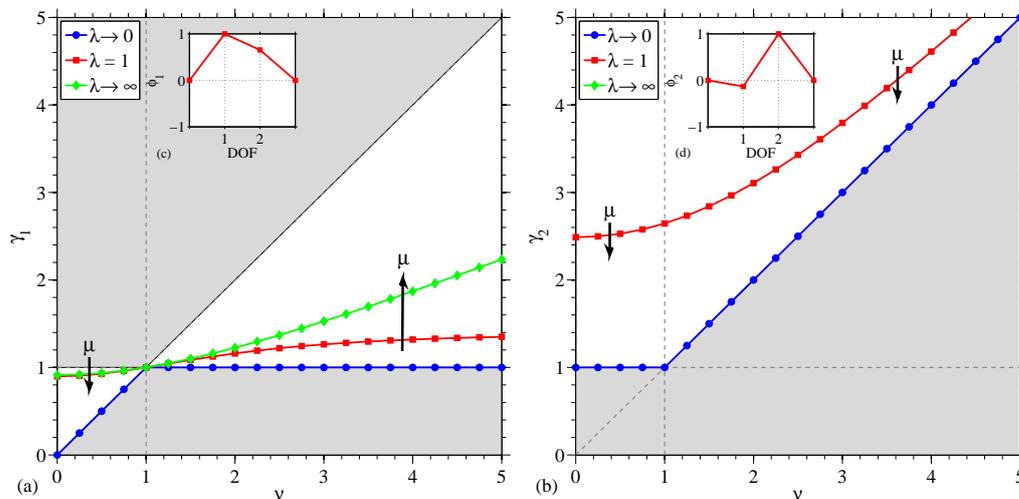
## 5.4 Risultati dell'analisi modale con connessione conservativa

Nelle Figg. 5.2-5.5 si riportano, sulla base delle espressioni analitiche riportate nella Tabella 5.3, le mappe delle frequenze, rappresentate nei piani  $\gamma_i - \nu$  e/o  $\gamma_i - (\beta/\lambda)$ , e i corrispondenti modi naturali per i tre casi considerati di connessione conservativa. In ogni mappa delle frequenze nel piano  $\gamma_i - \nu$  a seconda del tipo di connessione sono indicate le zone ammissibili e non ammissibili ed è stata indagata l'influenza dei parametri della connessione ( $\lambda$ ,  $\beta$ ) e del sistema ( $\nu$ ,  $\mu$ ) nella modifica di queste zone.

Inoltre, al fine di indagare l'influenza dell'Inerter, sono state prima di tutto analizzate le due connessioni con SE e IE e alla fine è stato studiato il caso generale di connessione con SIE che è stato confrontato con i due casi particolari in precedenza considerati.

### 5.4.1 Connessione con l'elemento Spring (SE)

Le mappe delle frequenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  al variare del rapporto di frequenza  $\nu$  sono mostrate rispettivamente nelle Figg. 5.2 (a) e (b) per un fissato valore del rapporto di massa ( $\mu = 0.2$ ) e alcuni valori del rapporto di rigidezza  $\lambda$ .



**Figura 5.2.** Connessione con Spring Element (SE). Dominio (a)  $\gamma_1 - \nu$  e (b)  $\gamma_2 - \nu$  al variare di  $\lambda$  e tipici modi naturali (c)  $\phi_1$  e (d)  $\phi_2$  ( $\mu = 0.2$ ). Le frecce nere indicano la tendenza delle curve all'aumentare di  $\mu$ .

In ogni grafico, le regioni del piano con sfondo grigio rappresentano le zone non ammissibili per le frequenze (valori di frequenza non realizzabili con la connessione SE), mentre quelle con sfondo bianco rappresentano le zone ammissibili. La definizione delle zone ammissibili e non ammissibili per le frequenze dipende solo da  $\nu$  e non è influenzata da  $\mu$  e  $\lambda$ . Per indagare l'influenza del rapporto di rigidezza  $\lambda$ , sono stati presi in considerazione tre valori:  $\rightarrow 0$ ,  $1$ ,  $\rightarrow \infty$ .

Per entrambe le frequenze, il più piccolo valore ammissibile per frequenze si ottiene per  $\lambda \rightarrow 0$ , mentre il più grande valore ammissibile per la seconda frequenza si ottiene per  $\lambda \rightarrow \infty$ . Inoltre, si osserva che entrambe le frequenze aumentano all'aumentare di  $\lambda$ . Poiché nell'intervallo  $0 < \nu < 1$  si ha che  $\gamma_1 > \nu$  e  $\gamma_2 > 1$  e nell'intervallo  $\nu > 1$  si ha che  $\gamma_1 > 1$  e  $\gamma_2 > \nu$ , è possibile fare le seguenti osservazioni.

**Osservazione 1.** In un sistema costituito da 2-ASDOF collegati da una connessione SE le frequenze naturali sono sempre maggiori a quelle dei due oscillatori disaccoppiati.

**Osservazione 2.** In un sistema costituito da 2-ASDOF collegati da una connessione SE, quando  $\nu = 1$ , la prima frequenza è sempre uguale e la seconda frequenza è maggiore di quella dei due oscillatori disaccoppiati.

Tipici modi naturali di vibrare,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , sono riportati rispettivamente nelle Figg. 5.2 (c) e (d). In ascissa, i numeri 1 e 2 indicano rispettivamente il primo e il secondo grado di libertà, mentre nelle ordinate viene indicata l'intensità dell'autovettore.

**Osservazione 3.** In un sistema costituito da 2-ASDOF collegati da una connessione SE le due masse oscillano in fase nel primo modo di vibrare e in opposizione di fase nel secondo modo di vibrare.

Infatti, si può osservare dalle espressioni analitiche riportate nella Tabella 5.3 che il primo rapporto,  $v_1$ , relativo al primo modo naturale, è sempre una quantità positiva, mentre il secondo rapporto,  $v_2$ , relativo al secondo modo naturale, è sempre una quantità negativa.

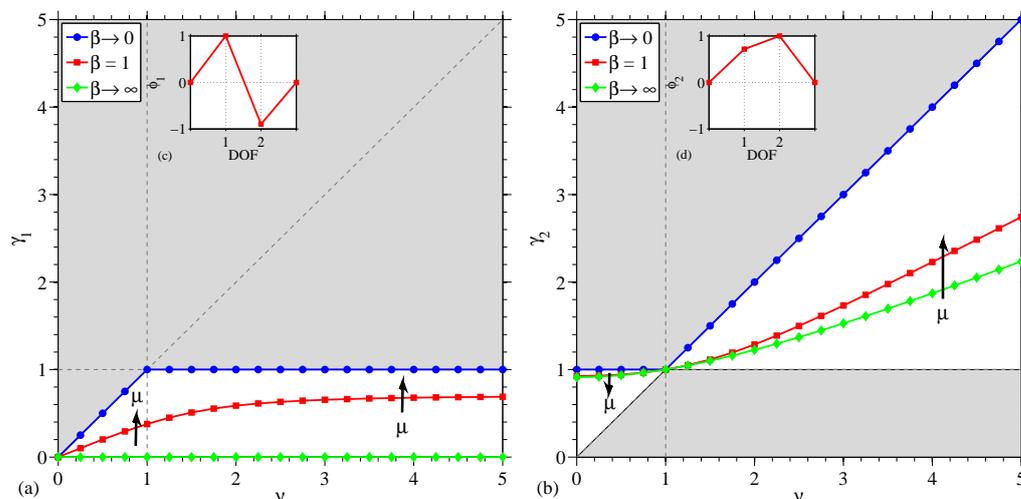
Ulteriori osservazioni possono essere delineate relativamente al primo modo naturale di vibrare attraverso il rapporto  $v_1$ .

Sostituendo i valori di  $\nu$  nell'espressione di  $v_1$  riportata in Tabella 5.3, si può dimostrare che  $v_1 > 1$  se  $0 < \nu < 1$ , ovvero l'ampiezza del primo modo naturale relativo alla seconda massa è maggiore rispetto a quello relativo alla prima, mentre  $v_1 < 1$  se  $\nu > 1$ , ovvero l'ampiezza del primo modo naturale relativo alla seconda massa è inferiore rispetto a quello relativo alla prima. Inoltre,  $v_1 = 1$  quando  $\nu = 1$  indipendentemente da  $\mu$  e  $\lambda$ , cioè il primo modo naturale di vibrare è caratterizzato da ampiezze uguali per entrambe le masse.

Al fine di indagare l'influenza sulle frequenze del rapporto di massa  $\mu$ , nelle Figg. 5.2 (a) e (b) è stato indicato attraverso le frecce nere la tendenza delle frequenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  all'aumentare di  $\mu$ . Si può dimostrare che, per un valore finito di  $\lambda$  e all'aumentare di  $\mu$ , entrambe le frequenze diminuiscono quando  $0 < \nu < 1$  (frecce rivolte verso il basso nelle Figg. 5.2 (a) e (b)), mentre  $\gamma_1$  aumenta e  $\gamma_2$  diminuisce quando  $\nu > 1$  (rispettivamente freccia rivolta verso l'alto in Fig. 5.2 (a) e verso il basso in Fig. 5.2 (b)).

#### 5.4.2 Connessione con l'elemento Inerter (IE)

Le mappe delle frequenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  al variare del rapporto di frequenza  $\nu$  sono riportate rispettivamente nelle Figg. 5.3 (a) e (b) per un fissato valore del rapporto di massa ( $\mu = 0.2$ ) e per diversi valori del rapporto di inerzia  $\beta$ .



**Figura 5.3.** Connessione con Inerter Element (IE). Dominio (a)  $\gamma_1 - \nu$  e (b)  $\gamma_2 - \nu$  al variare di  $\beta$  e tipici modi naturali (c)  $\phi_1$  e (d)  $\phi_2$  ( $\mu = 0.2$ ). Le frecce nere indicano la tendenza delle curve all'aumentare di  $\mu$ .

In ogni grafico, le regioni del piano con sfondo grigio rappresentano le zone non ammissibili per le frequenze (valori di frequenza non realizzabili con la connessione IE), mentre quelle con sfondo bianco rappresentano le zone ammissibili. La definizione delle zone ammissibili e non ammissibili dipende solo da  $\nu$  e non è influenzata di  $\mu$  e  $\beta$ . Per indagare l'influenza del rapporto di inerzia  $\beta$ , sono stati presi in considerazione tre valori:  $\rightarrow 0$ ,  $1$ ,  $\rightarrow \infty$ . Per entrambe le frequenze, il più grande valore ammissibile per le frequenze si ottiene per  $\beta \rightarrow 0$ , mentre il più piccolo valore ammissibile per la prima frequenza si ottiene per  $\beta \rightarrow \infty$ . Inoltre, si osserva che entrambe le frequenze diminuiscono all'aumentare di  $\beta$ . Poiché nell'intervallo  $0 < \nu < 1$  si ha che  $\gamma_1 < \nu$  e  $\gamma_2 < 1$  e nell'intervallo  $\nu > 1$  si ha che  $\gamma_1 < 1$  e  $\gamma_2 < \nu$ , è possibile fare le seguenti osservazioni.

**Osservazione 4.** In un sistema costituito da 2-ASDOF collegati da una connessione IE le frequenze naturali sono sempre inferiori a quelle dei due oscillatori disaccoppiati.

**Osservazione 5.** In un sistema costituito da 2-ASDOF collegati da una connessione IE, quando  $\nu = 1$ , la prima frequenza è sempre inferiore e la seconda frequenza è uguale a quella dei due oscillatori disaccoppiati.

Tipici modi naturali,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , sono riportati rispettivamente nelle Figg. 5.3 (c) e (d).

**Osservazione 6.** In un sistema costituito da 2-ASDOF collegati da una connessione IE le due masse oscillano in opposizione di fase nel primo modo di vibrare e in fase nel secondo modo di vibrare.

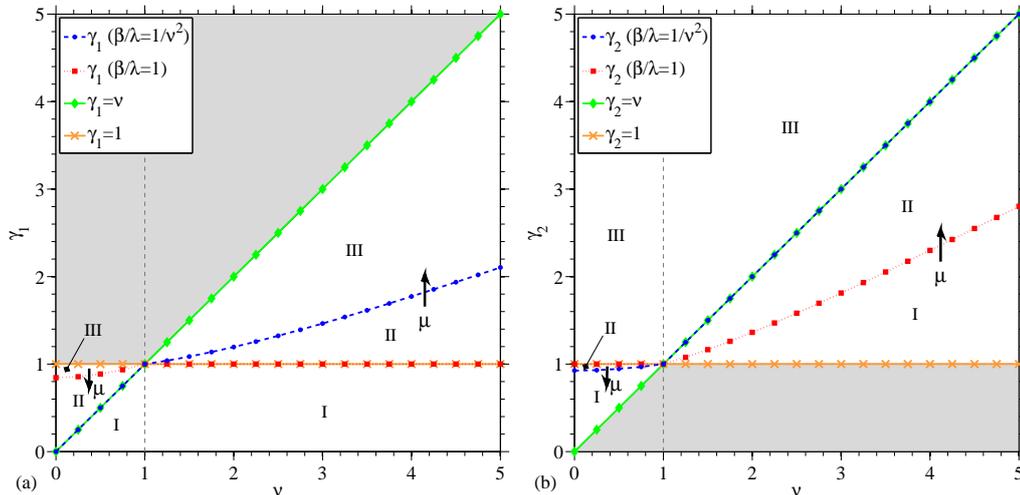
Infatti, il primo rapporto,  $v_1$ , relativo al primo modo naturale, è sempre una quantità negativa, mentre il secondo rapporto,  $v_2$ , relativo al secondo modo naturale, è sempre una quantità positiva, Tabella 5.3.

Ulteriori osservazioni possono essere delineate relativamente al secondo modo naturale di vibrare attraverso il rapporto  $v_2$ . Sostituendo i valori di  $\nu$  nell'espressione di  $v_2$ , Tab. 5.3, si può dimostrare che  $v_2 < 1$  se  $0 < \nu < 1$ , ovvero l'ampiezza del secondo modo naturale relativo alla prima massa è maggiore rispetto a quello relativo alla seconda, mentre  $v_2 > 1$  se  $\nu > 1$ , ovvero l'ampiezza del secondo modo naturale relativo alla prima massa è inferiore rispetto a quello relativo alla seconda. Inoltre,  $v_2 = 1$  quando  $\nu = 1$  indipendentemente da  $\mu$  e  $\beta$ , cioè il secondo modo naturale di vibrare è caratterizzato da ampiezze uguali per entrambe le masse.

Al fine di indagare l'influenza sulle frequenze del rapporto di massa  $\mu$ , nelle Figg. 5.3 (a) e (b) è stato indicato attraverso le frecce nere la tendenza delle frequenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  all'aumentare di  $\mu$ . Si può dimostrare che, per un valore finito di  $\beta$  e all'aumentare di  $\mu$ ,  $\gamma_1$  aumenta e  $\gamma_2$  diminuisce quando  $0 < \nu < 1$  (rispettivamente freccia rivolta verso l'alto in Fig. 5.3 (a) e verso il basso in Fig. 5.3 (b)), mentre entrambe le frequenze aumentano quando  $\nu > 1$  (frecce rivolte verso l'alto nelle Figg. 5.3 (a) e (b)).

### 5.4.3 Connessione con gli elementi Spring-Inerter (SIE)

Le mappe delle frequenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  al variare del rapporto di frequenza  $\nu$  sono riportate rispettivamente nelle Figg. 5.4 (a) e (b) per un fissato valore del rapporto di massa ( $\mu = 0.2$ ) e valori caratteristici del rapporto  $\beta/\lambda$  (avendo assunto tra i parametri della connessione per esempio  $\beta = 1$ ).



**Figura 5.4.** Connessione con Spring-Inerter Elements (SIE). Regioni *I–III* per un fissato valore di  $\mu$  nei domini (a)  $\gamma_1 - \nu$  e (b)  $\gamma_2 - \nu$  ( $\mu = 0.2$  e  $\beta = 1$ ). Le frecce nere indicano l'andamento delle curve all'aumentare di  $\mu$ .

In ogni grafico, le regioni del piano con sfondo grigio rappresentano le zone non ammissibili per le frequenze (valori di frequenza non realizzabili con la connessione

SIE) che dipendono solo da  $\nu$  e non sono influenzate da  $\mu$ ,  $\lambda$  e  $\beta$ . Queste zone coincidono alle regioni comuni non ammissibili per i due casi particolari di connessione con SE e IE (Sottosezioni 5.4.1 e 5.4.2). Le regioni del piano con sfondo bianco rappresentano le zone ammissibili che invece risultano l'unione delle corrispondenti zone ammissibili ottenute per i due casi particolari di connessione con SE e IE (Figg. 5.2 e 5.3). In queste regioni, il dominio ammissibile della connessione SE dal dominio ammissibile della connessione IE è separata, nell'intervallo  $0 < \nu < 1$  dalle rette  $\gamma_1 = \nu$  nel piano  $\gamma_1 - \nu$  e  $\gamma_2 = 1$  nel piano  $\gamma_2 - \nu$ , mentre nell'intervallo  $\nu > 1$  dalle rette  $\gamma_1 = 1$  nel piano  $\gamma_1 - \nu$  e  $\gamma_2 = \nu$  nel piano  $\gamma_2 - \nu$ .

Selezionando opportunamente il rapporto  $\beta/\lambda$ , rispettivamente pari a  $\beta/\lambda = 1/\nu^2$  e  $\beta/\lambda = 1$ , è possibile ottenere soluzioni particolari per le frequenze come mostrato in Fig. 5.4 rispettivamente con le linee blu e rosse: queste linee nel seguito sono state definite come confini delle regioni.

I confini dividono le zone ammissibili in tre regioni, indicate come I, II e III. Si noti che ogni regione (I-III) per la prima frequenza  $\gamma_1$  (Fig. 5.4 (a)) è associata a quella relativa alla seconda frequenza  $\gamma_2$  (Fig. 5.4 (b)).

Nel seguito, dopo aver definito i confini verranno descritte nel dettaglio le tre regioni.

*Intervallo di frequenza  $0 < \nu \leq 1$*

I confini delle regioni sono ottenuti per:

1.  $\beta/\lambda = 1/\nu^2$ . Questa curva non varia nel piano  $\gamma_1 - \nu$ , è indipendente da  $\beta$ , e corrisponde alla bisettrice del piano  $\gamma_1 = \nu$ , mentre varia nel piano  $\gamma_2 - \nu$  al variare del rapporto di inerzia (tuttavia, è sempre posizionata sotto la retta  $\gamma_2 = 1$ ). Quindi, la regione I è fissa per  $\gamma_1$  e variabile per  $\gamma_2$ . La prima frequenza è uguale alla più piccola frequenza del sistema non accoppiato e la seconda è intermedia tra quelle dei due oscillatori disaccoppiati.
2.  $\beta/\lambda = 1$ . Questa curva varia nel piano  $\gamma_1 - \nu$  al variare di  $\beta$ , tuttavia è sempre posizionata al di sopra della bisettrice del piano  $\gamma_1 = \nu$ , mentre è fissa nel piano  $\gamma_2 - \nu$ , è indipendente da  $\beta$  e corrisponde a  $\gamma_2 = 1$ . Di conseguenza, la regione III è variabile per  $\gamma_1$  e fissa per  $\gamma_2$ . La prima frequenza è intermedia tra le frequenze dei due oscillatori disaccoppiati e la seconda è uguale alla più grande del sistema disaccoppiato.

Regione I,  $\beta/\lambda > 1/\nu^2$ . Si osserva che in questa regione entrambe le frequenze sono inferiori alle frequenze dei due oscillatori non accoppiati. Questo comportamento è anche tipico di sistemi costituiti da 2-ADSOF collegati da connessioni con IE (vedi Fig. 5.3).

Regione II,  $1 < \beta/\lambda < 1/\nu^2$ . Si osserva che in questa regione entrambe le frequenze sono intermedie a quelle dei due oscillatori non accoppiati. Questo comportamento è esclusivamente tipico di sistemi costituiti da 2-ADSOF collegati da connessioni con SIE.

Regione III,  $\beta/\lambda < 1$ . Si osserva che in questa regione entrambe le frequenze sono maggiori delle frequenze dei due oscillatori non accoppiati. Questo comportamento è anche tipico di sistemi costituiti da 2-ADSOF collegati da connessioni con

IE (vedi Fig. 5.2).

*Intervallo di frequenza  $\nu \geq 1$*

I confini delle regioni sono ottenuti per:

1.  $\beta/\lambda = 1$ . Questa curva è fissa nel piano  $\gamma_1 - \nu$ , è indipendente da  $\beta$  e corrisponde a  $\gamma_1 = 1$ , mentre varia nel piano  $\gamma_2 - \nu$  al variare di  $\beta$ , ma è sempre posizionata sotto la bisettrice del piano  $\gamma_2 = \nu$ . Di conseguenza, la regione I è fissa per  $\gamma_1$  e varia per  $\gamma_2$ . La prima frequenza è uguale alla più piccola del sistema disaccoppiato e la seconda è intermedia tra quelle dei due oscillatori disaccoppiati.
2.  $\beta/\lambda = 1/\nu^2$ . Questa curva varia nel grafico  $\gamma_1 - \nu$  al variare di  $\beta$ , ma è sempre posizionata sopra la retta  $\gamma_1 = 1$ . La curva, invece, nel piano  $\gamma_2 - \nu$  è fissa, risulta indipendente da  $\beta$ , e corrisponde alla bisettrice del piano  $\gamma_2 = \nu$ . Di conseguenza, la regione III è variabile per  $\gamma_1$  e fissa per  $\gamma_2$ . La prima frequenza è intermedia tra quelle dei due oscillatori non accoppiati e la seconda è uguale a quella più grande del sistema disaccoppiato.

Regione I,  $\beta/\lambda > 1$ . Si osserva che in questa regione entrambe le frequenze sono inferiori alle frequenze dei due oscillatori non accoppiati. Questo comportamento è anche tipico di sistemi costituiti da 2-ADSOF collegati da connessioni con IE (vedi Fig. 5.3).

Regione II,  $1/\nu^2 < \beta/\lambda < 1$ . Si osserva che in questa regione entrambe le frequenze sono intermedie alle frequenze dei due oscillatori non accoppiati. Questo comportamento è esclusivamente tipico di sistemi costituiti da 2-ADSOF collegati da connessioni con SIE.

Regione III,  $\beta/\lambda < 1/\nu^2$ . Si osserva che in questa regione entrambe le frequenze sono maggiori alle frequenze dei due oscillatori non accoppiati. Questo comportamento è anche tipico di sistemi costituiti da 2-ADSOF collegati da connessioni con SE (vedi Fig. 5.2).

E' possibile sintetizzare che:

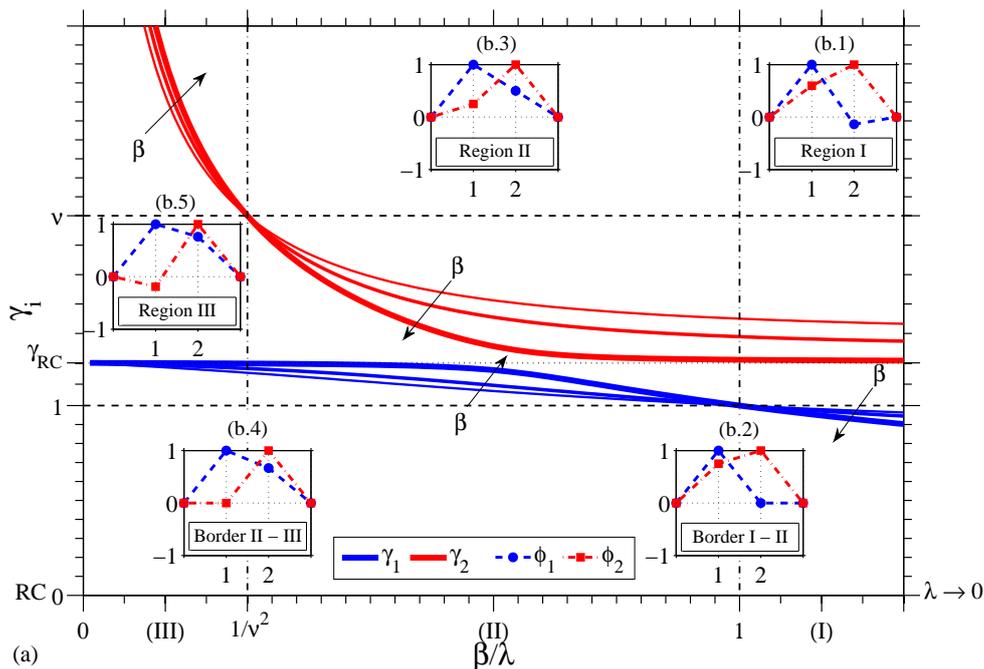
**Osservazione 7.** In un sistema costituito da 2-ASDOF collegati da una connessione SIE le frequenze naturali possono essere maggiori, inferiori o intermedie a quelle del sistema disaccoppiato a seconda del rapporto  $\beta/\lambda$  dei parametri della connessione.

**Osservazione 8.** In un sistema costituito da 2-ASDOF collegati da una connessione SIE, quando  $\nu = 1$  e  $\beta/\lambda = 1$  entrambe le frequenze sono uguali a quelle dei due oscillatori disaccoppiati. Questo significa che nessun accoppiamento è possibile con questa scelta di parametri.

Al fine di indagare l'influenza del rapporto di massa, in Fig. 5.4 (a-b) si indicano mediante delle frecce nere la variazione delle frequenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  all'aumentare di  $\mu$ . Nelle figure e negli intervalli di frequenza esaminati, solo una curva si modifica, mentre tutte le altre rimangono invariate. Di conseguenza, le tre regioni in precedenza descritte modificano la loro estensione nel seguente modo:

- *Intervallo di frequenza  $0 < \nu \leq 1$* : all'aumentare di  $\mu$ , si può dimostrare che: per la frequenza  $\gamma_1$ , la regione I non si modifica, la regione II diminuisce la propria estensione e la regione III aumenta la propria estensione (la curva  $\beta/\lambda = 1$ , di colore rosso in Fig. 5.4 (a), si sposta verso il basso), mentre per la frequenza  $\gamma_2$ , la regione I diminuisce la propria estensione, la regione II aumenta la propria estensione e la regione III rimane invariata (la curva  $\beta/\lambda = 1/\nu^2$ , di colore blu in Fig. 5.4 (b), si sposta verso il basso).
- *Intervallo di frequenza  $\nu > 1$* : all'aumentare di  $\mu$ , si può dimostrare che: per la frequenza  $\gamma_1$ , la regione I non si modifica, la regione II aumenta la propria estensione e la regione III diminuisce la propria estensione (la curva  $\beta/\lambda = 1/\nu^2$ , di colore blu in Fig. 5.4 (a), si sposta verso l'alto), mentre per la frequenza  $\gamma_2$ , la regione I aumenta la propria estensione, la regione II diminuisce la propria estensione e la regione III rimane invariata (la curva  $\beta/\lambda = 1$ , di colore rosso in Fig. 5.4 (b), si sposta verso l'alto).

Al fine di approfondire l'influenza dei parametri della connessione, può risultare interessante riportare l'andamento delle frequenze lungo una sezione verticale (ovvero a  $\nu$  costante) delle mappe di frequenza di Fig. 5.4 al variare del rapporto  $\beta/\lambda$ .



**Figura 5.5.** Connessione con Spring-Inerter Elements (SIE). (a) Frequenze al variare del rapporto  $\beta/\lambda$  per diversi valori di  $\beta = 0.5, 1.0, 10.0$  e (b) modi naturali ( $\nu = 2$  e  $\mu = 0.2$ ). Lo spessore delle linee aumenta con il rapporto di inerzia  $\beta$ .

La Figura 5.5 (a) riporta le frequenze  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  per una fissata coppia dei parametri del sistema  $\mu - \nu$  ( $\mu = 0.2$ ,  $\nu = 2$ ) al variare del rapporto  $\beta/\lambda$ , avendo assunto tre valori del rapporto di inerzia ( $\beta = 0.5, 1.0, 10.0$ ). Lo spessore delle linee aumenta

all'aumentare del rapporto di inertanza  $\beta$ . In ascissa è possibile identificare le tre regioni definite nella Fig. 5.4. Le curve relative alle frequenze  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) diminuiscono all'aumentare del rapporto  $\beta/\lambda$ , indipendentemente dal valore di  $\beta$ . Si osserva la presenza di due punti fissi:  $\gamma_2 = \nu$  per  $\beta/\lambda = 1/\nu^2$  e  $\gamma_1 = 1$  per  $\beta/\lambda = 1$ . La frequenza in corrispondenza del primo punto fisso è pari a quella più grande del sistema non accoppiato, mentre quella in corrispondenza del secondo punto fisso è pari alla più piccola del sistema disaccoppiato.

A sinistra del primo punto fisso ( $0 < \beta/\lambda < 1/\nu^2$ ) si trova la regione III: entrambe le frequenze sono maggiori delle frequenze dei due oscillatori non accoppiati e aumentano all'aumentare di  $\beta$ . All'interno dei due punti fissi ( $1/\nu^2 < \beta/\lambda < 1$ ) si trova la regione II: entrambe le frequenze sono intermedie delle frequenze dei due oscillatori non accoppiati e si avvicinano all'aumentare di  $\beta$ . A destra del secondo punto fisso ( $\beta/\lambda > 1$ ) si trova la regione I: entrambe le frequenze sono inferiori alle frequenze dei due oscillatori non accoppiati e diminuiscono all'aumentare di  $\beta$ .

Nel caso in cui il rapporto  $\beta/\lambda$  assume i valori limite  $\beta/\lambda \rightarrow 0$  e  $\beta/\lambda \rightarrow \infty$ , si osserva che la connessione funziona rispettivamente come una connessione rigida (asse delle ordinate sul lato sinistro) e come una connessione con IE (asse delle ordinate sul lato destro). Nel primo caso, una frequenza tende a quella dei due oscillatori collegati rigidamente  $\gamma_{RC}$  e l'altra tende all'infinito. Nel secondo caso, entrambe le frequenze assumono valori finiti, la prima frequenza è inferiore alla frequenza del primo oscillatore disaccoppiato e, se  $\beta$  è grande, la seconda tende alla  $\gamma_{RC}$ .

Come succede per le frequenze, anche i modi naturali dipendono dai valori assunti dai parametri della connessione. Modi di vibrare tipici  $\phi_1$  e  $\phi_2$  sono riportati in Fig. 5.5 (b) per una fissata coppia  $\mu - \nu$  ( $\mu = 0.2$ ,  $\nu = 2$ ) e selezionando il rapporto  $\beta/\lambda$  in modo tale da ricadere in una delle tre regioni o in uno dei due confini.

**Osservazione 9.** Un sistema costituito da 2-ASDOF collegati da una connessione SIE le due masse possono vibrare per un modo in opposizione di fase e per l'altro in fase o per entrambi i modi in fase, a seconda del rapporto  $\beta/\lambda$  tra i parametri della connessione.

Indipendentemente dai parametri del sistema  $(\mu, \nu)$ , è possibile distinguere tre diversi modi di vibrare associati alle regioni I-III:

Nella regione I, le masse nel primo modo vibrano in opposizione di fase, mentre nel secondo modo vibrano in fase. I modi naturali di vibrare sono tipici di sistemi costituiti da 2-ASDOF collegati da connessioni con IE.

Nella regione II, in entrambi i modi le masse vibrano in fase. I modi naturali di vibrare sono esclusivi di sistemi costituiti da 2-ASDOF collegati da connessioni con SIE.

Nella regione III, le masse nel primo modo vibrano in fase, mentre nel secondo modo vibrano in opposizione di fase. I modi naturali di vibrare sono tipici di sistemi costituiti da 2-ASDOF collegati da connessioni con SE.

Inoltre, se il rapporto  $\beta/\lambda$  è assunto rispettivamente pari a  $1/\nu^2$  o 1 si possono avere due diversi modi naturali:

1. Sul confine tra le regioni I-II, il primo modo è caratterizzato da uno spostamento modale nullo relativamente alla seconda massa, mentre nel secondo modo le due masse vibrano in fase.
2. Sul confine tra le regioni II-III, nel primo modo le due masse vibrano in fase, mentre il secondo è caratterizzato da uno spostamento modale nullo della prima massa.

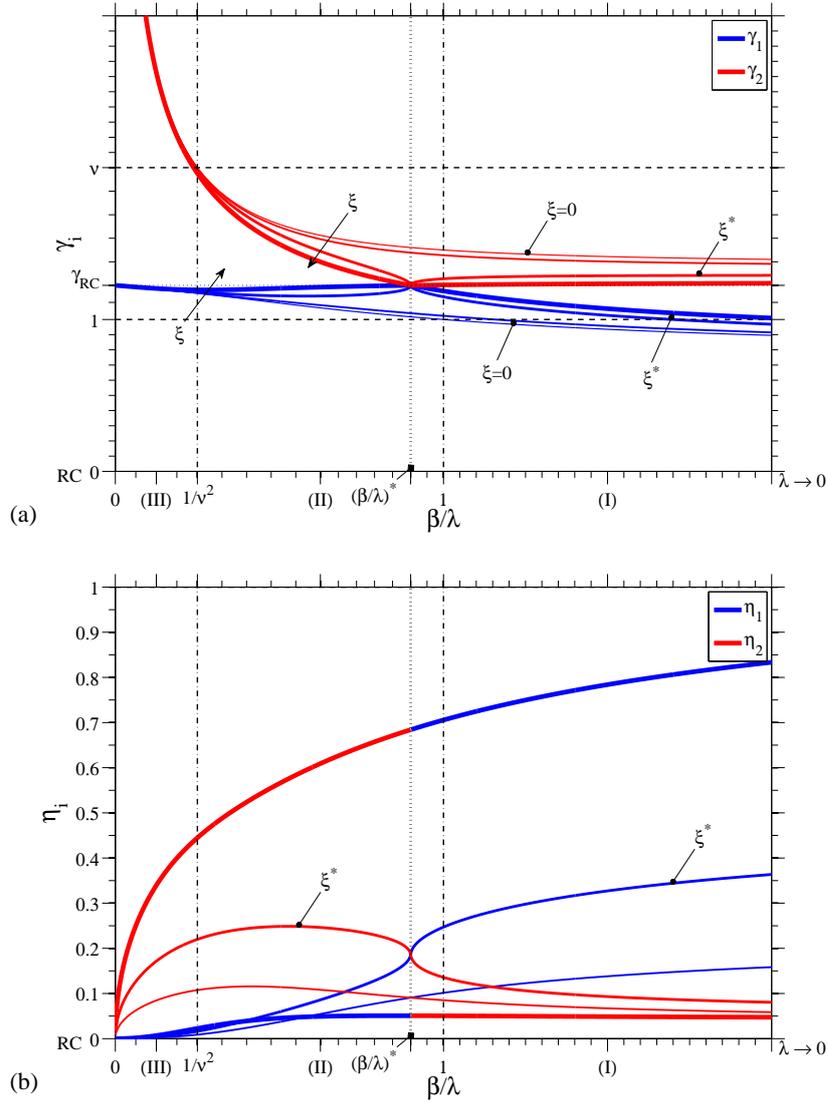
I risultati ottenuti per le frequenze naturali sono analoghi a quelli ottenuti per i modi naturali. In conclusione, quando un sistema composto da 2-ASDOF collegati da una connessione con SIE è possibile ottenere tre diversi scenari per le frequenze naturali e i modi naturali, a seconda del rapporto  $\beta/\lambda$  tra i parametri della connessione:

- Un sistema accoppiato con entrambe le frequenze maggiori delle frequenze dei due oscillatori disaccoppiati e caratterizzato dalle masse che nel primo modo naturale vibrano in fase e nel secondo modo vibrano in opposizione di fase. (Questo comportamento è anche tipico di un sistema composto da 2-ADSOF collegati da connessioni con SE);
- Un sistema accoppiato con entrambe le frequenze inferiori alle frequenze dei due oscillatori disaccoppiati e caratterizzato dalle masse che nel primo modo naturale vibrano in opposizione di fase e nel secondo modo vibrano in fase. (Questo comportamento è anche tipico di un sistema composto da 2-ADSOF collegati da connessioni con IE);
- Un sistema accoppiato con entrambe le frequenze intermedie a quelle dei due oscillatori disaccoppiati e caratterizzato da entrambi i modi naturali in cui le masse vibrano in fase. (Questo comportamento è solo tipico di un sistema composto da 2-ADSOF collegati da connessioni con SIE).

## 5.5 Risultati dell'analisi modale con connessione non conservativa

Quando uno smorzatore viscoso (viscous dashpot) viene aggiunto al collegamento spring-Inerter, la connessione diventa non conservativa per la presenza di forze di smorzamento. In questa sezione si vuole studiare l'influenza dello smorzamento viscoso sulle proprietà modali del sistema accoppiato. In particolare, si vuole valutare se e in che modo si modificano i tre scenari tipici associati alle tre regioni definite nella Sezione 5.4.

A tale scopo, per gli stessi parametri del sistema selezionati nel caso precedente ( $\mu = 0.2$  e  $\nu = 2$ ) sono state valutate le frequenze naturali al variare del rapporto  $\beta/\lambda$  per un fissato valore del rapporto di inerzia ( $\beta = 0.5$ ) e per quattro valori del rapporto di smorzamento ( $\xi = 0, 0.15, 0.30, 0.60$ ), Fig. 5.6 (a). Lo spessore delle linee aumenta all'aumentare del rapporto di smorzamento  $\xi$ . A fine di confronto è stato riportato anche il caso  $\xi = 0$  relativo alla situazione di connessione conservativa.



**Figura 5.6.** Connessione con Spring-Dashpot-Inerter Elements (SDIE). (a) Pseudo-frequenze e (b) fattori pseudo-smorzanti al variare del rapporto  $\beta/\lambda$ . ( $\nu = 2$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\beta = 0.5$  e  $\xi = 0, 0.15, 0.30, 0.6$ ). Lo spessore delle linee aumenta all'aumentare del rapporto di smorzamento  $\xi$ .

La Figura 5.6 (a) mostra che le frequenze del sistema accoppiato  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ), per valori relativamente bassi del rapporto di smorzamento  $\xi$ , diminuiscono all'aumentare del rapporto  $\beta/\lambda$ . Nell'ascissa è possibile definire nuovamente le regioni I, II e III introdotte nella Sottosezione 5.4.3 anche se i valori del rapporto  $\beta/\lambda$  che le delimitano sono diversi rispetto al caso di connessione conservativa. Infatti, la curva  $\gamma_2$  interseca la retta orizzontale  $\gamma_2 = \nu$  all'ascissa  $\beta/\lambda < 1/\nu^2$ , (nel caso precedente l'intersezione si aveva per  $\beta/\lambda = 1/\nu^2$ ), mentre la curva  $\gamma_1$  interseca la retta orizzontale  $\gamma_1 = 1$  all'ascissa  $\beta/\lambda > 1$  (nel caso conservativo l'intersezione si aveva per  $\beta/\lambda = 1$ ). Quindi come risultato si ha che l'estensione della regione II, definita

come la regione in cui entrambe le frequenze accoppiate sono intermedie a quelle dei due oscillatori non accoppiati, aumenta. Lo smorzamento nella connessione ha l'effetto di aumentare la prima frequenza accoppiata e diminuire la seconda. All'aumentare di  $\xi$ , le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si avvicinano, ma non si toccano fino a quando il rapporto di smorzamento non assume il valore  $\xi = \xi^*(\mu, \nu, \beta, \beta/\lambda)$ . Per questo valore del rapporto di smorzamento, le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono tangenti e si toccano in corrispondenza dell'ascissa  $(\beta/\lambda)^*$ : le frequenze accoppiate coincidono e assumono il valore della frequenza del sistema accoppiato nel caso di connessione rigida  $\gamma_{RC}$ . Nell'autospazio, il punto in cui  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  coincidono, rappresenta un punto difettivo [Luongo, 1995], che è caratterizzato da un doppio autovalore, con molteplicità algebrica 2, e un singolo autovettore, con molteplicità geometrica 1. L'associato sistema strutturale è chiamato sistema difettivo che verrà approfondito nel dettaglio nel Paragrafo 5.6.

Per  $\xi > \xi^*$  (ma sempre inferiore al valore critico) le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si intersecano nel punto  $(\beta/\lambda)^* - \gamma_{RC}$ .

Si osserva che, dopo l'ascissa  $(\beta/\lambda)^*$  e per valori del rapporto di smorzamento  $\xi \geq \xi^*$ , i due autovalori complessi invertono qualitativamente il loro comportamento. Infatti, la frequenza corrispondente al modo più flessibile (indicato convenzionalmente con  $\gamma_1$ ) diventa gradualmente più rigido, al contrario, la frequenza corrispondente al modo più rigido ( $\gamma_2$ ) diventa progressivamente più flessibile. Di conseguenza, i due modi invertono l'ordine delle due frequenze.

Quando il rapporto  $\beta/\lambda$  assume i valori limite ( $\beta/\lambda \rightarrow 0$ ) e ( $\beta/\lambda \rightarrow \infty$ ), la connessione funziona rispettivamente come un elemento rigido (asse sinistro delle ordinate) e come una connessione con elementi dashpot-Inerter, DIE (asse destro delle ordinate).

La Figura 5.6 (b) mostra i fattori di smorzamento modale  $\eta_1$  e  $\eta_2$  al variare del rapporto  $\beta/\lambda$ , per tre valori del rapporto di smorzamento  $\xi$  (0.15, 0.30, 0.6) e per fissati valori dei parametri  $\mu = 0.2$ ,  $\nu = 2$  e  $\beta = 0.5$ . Lo spessore delle linee aumenta all'aumentare del rapporto di smorzamento  $\xi$ . In generale, le curve  $\eta_i$  ( $i = 1, 2$ ) dipendono significativamente da  $\beta/\lambda$  e  $\xi$ . All'ascissa  $(\beta/\lambda)^*$ , come per le frequenze, si osserva un comportamento particolare al variare dei fattori di smorzamento:

1. Le due curve  $\eta_i$  si incrociano per  $\xi < \xi^*$ ; per  $\beta/\lambda < (\beta/\lambda)^*$  il secondo modo è quello più smorzato, mentre per  $\beta/\lambda > (\beta/\lambda)^*$  è il primo modo a diventare quello con fattore di smorzamento modale maggiore.
2. Le due curve  $\eta_i$  si intersecano per  $\xi = \xi^*$ ; per  $\beta/\lambda < (\beta/\lambda)^*$  il secondo modo è quello più smorzato, mentre per  $\beta/\lambda > (\beta/\lambda)^*$  è il primo modo a diventare quello con fattore di smorzamento modale maggiore.
3. Le due curve  $\eta_i$  si invertono per  $\xi > \xi^*$ . In analogia a quanto osservato per le frequenze, i due modi si invertono di ordine dopo l'ascissa  $(\beta/\lambda)^*$ .

All'aumentare del rapporto di smorzamento  $\xi$ , il modo con fattore di smorzamento modale inferiore è poco influenzato dal rapporto  $\beta/\lambda$ , mentre l'altro, caratterizzato da un fattore di smorzamento modale maggiore, aumenta all'aumentare di  $\beta/\lambda$ .

La Tabella 5.5 riporta, per il set di parametri analizzati in Fig. 5.6, gli autovalori e autovettori con corrispondenti frequenze, fattori di smorzamento e modi complessi, nel caso  $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^*$  e per diversi valori di  $\xi$  ( $\xi = 0$ ,  $\xi < \xi^*$ ,  $\xi = \xi^*$  e  $\xi > \xi^*$ ). Gli autovettori sono stati normalizzati in modo tale da avere la prima componente con parte reale unitaria e parte immaginaria nulla.

Caso	$\xi$	$s_i, \bar{s}_i$	$\gamma_i$	$\eta_i$	$\psi_i, \bar{\psi}_i$	$ \psi_i $	$\arg(\psi_i)$
$\xi = 0$	0.00	$0.000 \pm 1.474i$	1.018	0.000	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
					$0.060 \pm 0.000i$	0.060	0.000
		$0.000 \pm 1.018i$	1.474	0.000	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
$\xi < \xi^*$	0.15	$-0.131 \pm 1.434i$	1.041	0.091	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
					$0.091 \pm 0.340i$	0.352	1.309
		$-0.094 \pm 1.037i$	1.440	0.091	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
$\xi = \xi^*$	0.30	$-0.228 \pm 1.203i$	1.225	0.186	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
					$0.515 \pm 1.163i$	1.272	1.154
		$-0.228 \pm 1.203i$	1.225	0.186	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
$\xi > \xi^*$	0.60	$-0.838 \pm 0.893i$	1.225	0.051	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
					$0.960 \pm 0.361i$	1.025	0.360
		$-0.062 \pm 1.223i$	1.225	0.684	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
				$-1.650 \pm 1.284i$	2.091	2.480	

**Tabella 5.5.** Parametri modali per diversi rapporti di smorzamento  $\xi$  ( $\nu = 2$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\beta = 0.5$  e  $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^* = 0.9$ ),  $i = 1, 2$ .

Per il caso conservativo ( $\xi = 0$ ), gli autovalori sono due distinti numeri complessi con solo parte immaginaria a cui corrispondono due diverse frequenze naturali. I fattori di smorzamento modale sono nulli e i modi naturali sono numeri reali distinti. Ci aspettiamo che in questo caso la risposta del sistema non decada nel tempo.

Nel caso non conservativo ( $\xi > 0$ ) sia gli autovalori che gli autovettori sono generalmente numeri complessi distinti. Inoltre, si può osservare che quando:

- $\xi < \xi^*$ , autovalori, frequenze e autovettori sono distinti, ma i fattori di smorzamento modale sono coincidenti;
- $\xi = \xi^*$ , autovalori (quindi anche frequenze e fattori di smorzamento) e autovettori sono coincidenti;
- $\xi > \xi^*$ , autovalori, fattori di smorzamento e autovettori sono distinti, ma le frequenze sono coincidenti.

**Osservazione 10.** Un sistema costituito da 2-ASDOF collegati da una connessione con SDIE è caratterizzato da frequenze e fattori di smorzamento variabili con i parametri della connessione. Per un dato set di parametri ( $\mu, \nu, \beta$ ) esiste una coppia di parametri della connessione  $(\beta/\lambda)^* - \xi^*$  per i quali il sistema risulta caratterizzato da frequenze, fattori di smorzamento e modi complessi coincidenti. Per  $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^*$ , se il rapporto di smorzamento  $\xi < \xi^*$ , il sistema ha frequenze distinte e

fattori di smorzamento uguali, mentre se  $\xi > \xi^*$  il sistema ha frequenze uguali e fattori di smorzamento diversi.

L'estensione delle tre regioni definite in Fig. 5.6 varia al variare dei parametri strutturali, ma la loro definizione è sempre possibile. Il punto  $(\beta/\lambda)^*$  e il rapporto di smorzamento associato  $\xi^*$  che realizzano il sistema difettivo, sono sempre situati nella regione II.

La Tabella 5.6 riporta, per diverse coppie dei parametri strutturali  $\mu - \nu$  e per  $\beta = 0.5$ , i parametri della connessione  $(\beta/\lambda)^* - \xi^*$  (determinati numericamente) che realizzano il sistema difettivo e i corrispondenti autovalori (con corrispondenti frequenze e fattori di smorzamento modale) e autovettori (con corrispondente modulo e fase).

Parametri strutturali	Parametri connessione		Quantità modali					
	$(\beta/\lambda)^*$	$\xi^*$	$s_i, \bar{s}_i$	$\gamma_i$	$\eta_i$	$\psi_i, \bar{\psi}_i$	$ \psi_i $	$\arg(\psi_i)$
$\mu = 0.2$ $\nu = 2$	0.90	0.30	$-0.228 \pm 1.203i$	1.225	0.186	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
			$0.515 \pm 1.163i$			$0.515 \pm 1.163i$	1.272	1.154
			$-0.228 \pm 1.203i$	1.225	0.186	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
			$0.515 \pm 1.163i$			$0.515 \pm 1.163i$	1.272	1.154
$\mu = 0.4$ $\nu = 2$	0.59	0.47	$-0.300 \pm 1.329i$	1.363	0.220	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
			$0.389 \pm 0.992i$			$0.389 \pm 0.992i$	1.065	1.197
			$-0.300 \pm 1.329i$	1.363	0.220	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
			$0.389 \pm 0.992i$			$0.389 \pm 0.992i$	1.065	1.197
$\mu = 2$ $\nu = 0.5$	2.00	0.44	$-0.189 \pm 0.681i$	0.707	0.267	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
			$0.182 \mp 0.983i$			$0.182 \mp 0.983i$	1.000	-1.388
			$-0.189 \pm 0.681i$	0.707	0.267	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
			$0.182 \mp 0.983i$			$0.182 \mp 0.983i$	1.000	-1.388
$\mu = 4$ $\nu = 0.5$	25.00	0.48	$-0.186 \pm 0.604i$	0.632	0.294	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
			$0.015 \mp 0.738i$			$0.015 \mp 0.738i$	0.739	-1.550
			$-0.186 \pm 0.604i$	0.632	0.294	$1.000 + 0.000i$	1.000	0.000
			$0.015 \mp 0.738i$			$0.015 \mp 0.738i$	0.739	-1.550

**Tabella 5.6.** Parametri della connessione  $(\beta/\lambda)^*$  e  $\xi^*$  e quantità modali del sistema per diverse coppie dei parametri strutturali ( $\beta = 0.5$ ),  $i = 1, 2$ .

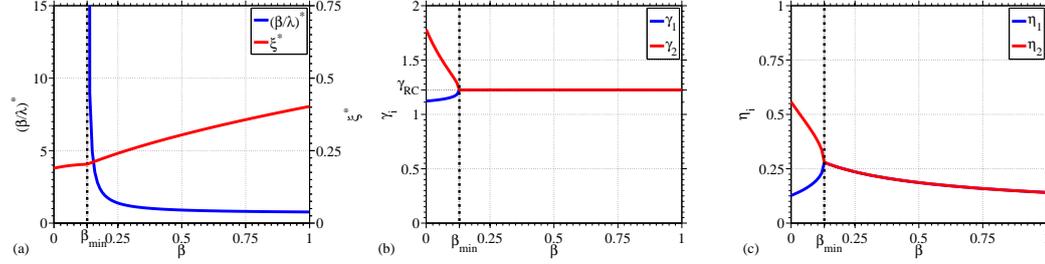
Se il rapporto di frequenza è  $0 < \nu \leq 1$ , si osserva che aumentando  $\mu$ , il punto  $(\beta/\lambda)^*$  si sposta a destra e il rapporto di smorzamento  $\xi^*$  aumenta. Invece, se il rapporto di frequenza è  $\nu > 1$ , aumentando  $\mu$ , si osserva che il punto  $(\beta/\lambda)^*$  si sposta a sinistra e il valore del rapporto di smorzamento  $\xi^*$  aumenta.

È interessante indagare, per una data coppia di oscillatori  $(\mu, \nu)$ , valutare in che modo variano le coppie  $(\beta/\lambda)^* - \xi^*$  al variare del rapporto di inerzia  $\beta$ . A tale scopo, è stato formulato un problema di ottimizzazione definendo la seguente funzione obiettivo:

$$OF(\mu, \nu, \beta, \lambda, \xi) = \left\| \begin{matrix} \gamma_1 - \gamma_2 \\ \eta_1 - \eta_2 \end{matrix} \right\| \quad (5.10)$$

da minimizzare nello spazio dei parametri strutturali e della connessione. Per una fissata coppia dei parametri strutturali  $(\mu, \nu)$ , si trovano, al variare del rapporto di inerzia  $\beta$ , le coppie  $\lambda^*$  (cioè  $(\beta/\lambda)^*$ ) e  $\xi^*$  che minimizzano la OF, definita nell'Eq. 5.10, nel range  $0 \leq \lambda^* \leq 1$  e  $0.01 \leq \xi^* \leq 1$ .

Per risolvere il problema di ottimizzazione è stata utilizzata la funzione *fmincon* di MATLAB® [The MathWorks Inc., 2019], che trova il minimo di funzioni multivariable non lineari vincolate utilizzando l'algoritmo sequenziale *sequential quadratic programming*.



**Figura 5.7.** (a) Rapporto  $(\beta/\lambda)^*$  e rapporto di smorzamento  $\xi^*$ , (b) pseudo-frequenze e (c) pseudo-smorzamenti al variare di  $\beta$  ( $\nu = 2$  e  $\mu = 0.2$ ).

In accordo con il problema di ottimizzazione, la Figura 5.7 (a) mostra le coppie di parametri  $(\beta/\lambda)^*$  e  $\xi^*$  al variare di  $\beta$  per una fissata coppia  $\mu - \nu$ . Le Figg. 5.7 (b) e (c) mostrano rispettivamente le frequenze e i fattori di smorzamento al variare di  $\beta$  per i parametri della connessione riportati nella Fig. 5.7 (a). Si può notare che sia  $(\beta/\lambda)^*$  che  $\xi^*$  variano con  $\beta$ : il rapporto  $(\beta/\lambda)^*$  aumenta monotonicamente al diminuire di  $\beta$  fino ad un valore minimo del rapporto di inerzia, nel seguito indicato come  $\beta_{min}$ , mentre il rapporto di smorzamento  $\xi^*$  aumenta monotonicamente con  $\beta$ . Osservando le frequenze e i fattori di smorzamento al variare del rapporto di inerzia, Fig. 5.7 (b) e (c), si nota che  $\beta_{min}$  è il valore minimo di  $\beta$  che realizza la condizione di uguali frequenze e fattori di smorzamento, ovvero di sistema difettivo; al di sotto di questo valore il sistema è sempre caratterizzato da due distinte frequenze e due distinti fattori di smorzamento. Inoltre, si osserva che la condizione  $\beta = \beta_{min}$  realizza il sistema difettivo con il più grande fattore di smorzamento possibile, Fig. 5.7 (c).

$\beta$	$(\beta/\lambda)^*$	$\xi^*$	$s_i, \bar{s}_i$	$\gamma_i$	$\eta_i$	$\psi_i, \bar{\psi}_i$	$ \psi_i $	$\arg(\psi_i)$
$\beta < \beta_{min}$ 0.05	$\infty$	0.20	$-0.734 \pm 1.360i$	1.135	0.155	$1.000 + 0.000i$ $0.301 \pm 0.751i$	1.000 0.809	0.000 1.190
			$-0.175 \pm 1.121i$	1.546	0.475	$1.000 + 0.000i$ $-1.406 \pm 2.671i$	1.000 3.018	0.000 2.055
$\beta = \beta_{min}$ 0.13	$\infty$	0.20	$-0.342 \pm 1.176i$	1.225	0.279	$1.000 + 0.000i$ $0.049 \pm 1.486i$	1.000 1.487	0.000 1.537
			$-0.342 \pm 1.176i$	1.225	0.279	$1.000 + 0.000i$ $0.049 \pm 1.486i$	1.000 1.487	0.000 1.537
$\beta > \beta_{min}$ 0.50	0.90	0.30	$-0.228 \pm 1.203i$	1.225	0.186	$1.000 + 0.000i$ $0.515 \pm 1.163i$	1.000 1.272	0.000 1.154
			$-0.228 \pm 1.203i$	1.225	0.186	$1.000 + 0.000i$ $0.515 \pm 1.163i$	1.000 1.272	0.000 1.154

**Tabella 5.7.** Parametri modali per diversi valori di  $\beta$  ( $\nu = 2$  e  $\mu = 0.2$ ),  $i = 1, 2$ .

La Tabella 5.7 riporta autovalori (con corrispondenti frequenze e fattori di

smorzamento) e autovettori, per i parametri investigati in Fig. 5.7, nel caso di  $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^*$ ,  $\xi^*$  e per tre diversi valori assunti di  $\beta$  ( $\beta < \beta_{min}$ ,  $\beta = \beta_{min}$  e  $\beta > \beta_{min}$ ). Quando  $\beta < \beta_{min}$  si osserva che gli autovalori e gli autovettori sono numeri complessi distinti, invece quando  $\beta \geq \beta_{min}$  entrambi gli autovalori e autovettori sono numeri complessi approssimativamente coincidenti. In questi ultimi casi, le frequenze sono uguali alla frequenza del sistema accoppiato con connessione rigida  $\gamma_{RC}$ .

Si fa notare come il caso  $\beta = \beta_{min}$  realizza il sistema difettivo con massimo fattore di smorzamento modale e l'autovettore ha il massimo sfasamento tra i due oscillatori (intorno a  $\pi/2$ , vedi Tabella 5.7).

Si sottolinea che per raggiungere l'obiettivo riportato nell'Eq. 5.10, l'ottimizzazione numerica è risultata difficile, soprattutto quando  $\beta = \beta_{min}$ .

**Osservazione 11.** Per un sistema costituito da 2-ASDOF collegati da una connessione con SDIE è possibile selezionare una tripletta ottimale dei parametri della connessione  $\beta_{min}$ ,  $(\beta_{min}/\lambda)^*$  e  $\xi^*$  a cui corrisponde un sistema difettivo con il più alto fattore di smorzamento modale.

## 5.6 Analisi modale e parametri della connessione di sistemi difettivi

Dal momento che lo studio dei sistemi difettivi per via numerica risulta difficile, in questo paragrafo si vuole studiare il problema per via analitica. Tra tutti i sistemi dinamici descritti dal set di parametri  $\boldsymbol{\kappa}$ , quindi, in questo paragrafo si vuole studiare in particolare il set di parametri  $\boldsymbol{\kappa}_0 = [\mu_0, \nu_0, \lambda_0, \beta_0, \xi_0]$  che rendono la matrice del sistema  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(\boldsymbol{\kappa}_0)$  ad avere autovalori  $s_{om}$  con molteplicità algebrica  $m > 1$  e molteplicità geometrica  $n$  con  $n < M$ . Questi sistemi sono chiamati difettivi, [Luongo, 1995].

Applicando le formule di Cardano-Vieta [Hazewinkel, 2013], quattro equazioni relative ai coefficienti dell'equazione caratteristica del sistema, Eq. 5.9, con le somme e i prodotti delle quattro radici possono essere scritte:

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 + s_4 &= -a_1(\boldsymbol{\kappa}) \\ s_1s_2 + s_1s_3 + s_1s_4 + s_2s_3 + s_2s_4 + s_3s_4 &= a_2(\boldsymbol{\kappa}) \\ s_1s_2s_3 + s_1s_2s_4 + s_1s_3s_4 + s_2s_3s_4 &= -a_3(\boldsymbol{\kappa}) \\ s_1s_2s_3s_4 &= a_4(\boldsymbol{\kappa}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Per ottenere la soluzione che rende difettivo il sistema dinamico, si impone la coincidenza di due radici:

$$\begin{aligned} s_1 = s_3 = s_{01} &= \alpha_0 + j\delta_0 \\ s_2 = s_4 = s_{02} &= \alpha_0 - j\delta_0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

Questo significa che  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$  e  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_0$ . Imponendo queste condizioni, il sistema di equazioni 5.11 può essere scritto come:

$$\begin{aligned}
4\alpha_0 &= -\frac{2\xi_0(1+\mu_0)}{\beta_0+\mu_0+\beta_0\mu_0} \\
6\alpha_0^2+2\delta_0^2 &= \frac{\beta_0+\lambda_0+\mu_0((1+\lambda_0)+\nu_0^2(1+\beta_0))}{\beta_0+\mu_0+\beta_0\mu_0} \\
4\alpha_0(\alpha_0^2+\delta_0^2) &= -\frac{2\xi_0(\mu_0\nu_0^2+1)}{\beta_0+\mu_0+\beta_0\mu_0} \\
(\alpha_0^2+\delta_0^2)^2 &= \frac{\lambda_0+\mu_0\nu_0^2+\lambda_0\mu\nu_0^2}{\beta_0+\mu_0+\beta_0\mu_0}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

L'Equazione 5.13 rappresenta un sistema di quattro equazioni in sette incognite raccolte nel vettore  $\mathbf{x}_0 = [\alpha_0, \delta_0, \mu_0, \nu_0, \beta_0]$ , come risultato è possibile avere  $\infty^3$  soluzioni di parametri che realizzano un sistema difettivo.

Riscrivendo le equazioni come funzioni di tre parametri, che in questo caso sono  $\mu_0, \nu_0$  e  $\beta_0$ , (oppure  $\lambda_0$ ), manipolando le Eq. 5.13, si ottiene la seguente soluzione:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \pm \sqrt{\frac{\mu_0^2(\nu_0^2-1)^2}{4(1+\mu_0\nu_0^2)(1+\mu_0)(\beta_0+\mu_0+\beta_0\mu_0)}} \\
\delta_0 &= \pm \sqrt{\frac{4(1+\mu_0\nu_0^2)^2(\beta_0+\mu_0+\beta_0\mu_0) - \mu_0^2(\nu_0^2-1)^2}{4(1+\mu_0\nu_0^2)(1+\mu_0)(\beta_0+\mu_0+\beta_0\mu_0)}} \\
\lambda_0 &= \frac{(1+\mu_0\nu_0^2)^2(\beta_0+\mu_0+\beta_0\mu_0) - \mu_0\nu_0^2(1+\mu_0)^2}{(1+\mu_0)^2(1+\mu_0\nu_0^2)} \\
\xi_0 &= \mu_0 |\nu_0^2-1| \sqrt{\frac{\beta_0+\mu_0+\beta_0\mu_0}{(1+\mu_0\nu_0^2)(1+\mu_0)^3}}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Si osserva che la soluzione dipende solo dai parametri strutturali  $\mu_0, \nu_0$  e dal parametro della connessione  $\beta$ . Inoltre, quando il sistema è sottosmorzato è possibile stimare la frequenza smorzata  $\gamma_{oD}$ , che risulta pari al termine positivo di  $\delta_0$ . La frequenza naturale di vibrare del sistema difettivo è ottenuta come:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_0 = \sqrt{s_0\bar{s}_0} = \sqrt{\alpha_0^2 + \delta_0^2} = \sqrt{\frac{1+\mu_0\nu_0^2}{1+\mu_0}} = \gamma_{RC} \tag{5.15}$$

Il fattore di smorzamento modale del sistema difettivo, invece, è ottenuto come:

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_0 = -\frac{\alpha_0}{\gamma_0} = \frac{\mu_0 |\nu_0^2-1|}{2(1+\mu_0\nu_0^2)} \sqrt{\frac{1}{\beta_0+\mu_0+\beta_0\mu_0}} \tag{5.16}$$

Si noti che  $\gamma_0$  dipende solo dai parametri degli oscillatori  $\mu_0$  e  $\nu_0$ , e non è influenzato dai parametri della connessione. Si può riconoscere, come già visto numericamente nel precedente paragrafo, che l'espressione riportata nell'Eq. 5.15 è uguale all'espressione che definisce la frequenza relativa alla connessione rigida,  $\gamma_{RC}$ , ovvero la frequenza di un sistema a 2 gdl collegato mediante un collegamento rigido. Inoltre, secondo la classificazione utilizzata nelle precedenti mappe di frequenza, Fig. 5.6, si osserva che un sistema difettivo cade sempre nella cosiddetta regione II, definita come la regione in cui entrambe le frequenze del sistema accoppiato sono all'interno di quelle dei due oscillatori disaccoppiati.

Se gli oscillatori sono considerati noti (ovvero  $\mu_0, \nu_0$  fissati), risulta possibile realizzare  $\infty^1$  sistemi difettivi con connessione Spring-Dashpot-Inerter al variare del rapporto di inerzia  $\beta_0$ .

I parametri della connessione, tuttavia, devono rispettare anche delle condizioni fisiche. Queste condizioni possono essere definite in forma matematica attraverso le seguenti disuguaglianze:

$$\xi_0 > 0, \lambda_0 \geq 0, \beta \geq 0 \quad (5.17)$$

La prima condizione fisica ( $\xi_0 > 0$ ) impone che nell'Eq. 5.14 deve essere presa solo la radice negativa di  $\alpha_0$ . Questa condizione garantisce anche la stabilità asintotica. La seconda condizione fisica ( $\lambda_0 \geq 0$ ) applicata all'espressione  $\lambda_0$ , Eq. 5.14), si traduce in un'altra disuguaglianza per il rapporto di inerzia:

$$\beta_0 \geq \frac{\mu_0 (\nu_0^2 - 1) (1 - \mu_0^2 \nu_0^2)}{(1 + \mu_0) (1 + \mu_0 \nu_0^2)^2} \quad (5.18)$$

Quest'ultima disuguaglianza si applica al rapporto di inerzia insieme alla terza condizione fisica dell'Eq. 5.17.

Questo significa che quando il termine fornito dall'Eq. 5.18 è negativo, il valore minimo per il rapporto di inerzia deve essere rispettato dall'Eq. 5.17 ( $\beta \geq 0$ ), mentre quando il termine fornito dall'Eq. 5.18 è positivo, il più piccolo valore di  $\beta_0$  è proprio quello fornito dall'Eq. 5.18.

Osservando l'Eq. 5.16 si nota che, per ottenere il massimo fattore di smorzamento modale, il valore di  $\beta_0$  deve essere scelto come il più piccolo possibile.

Quindi sulla base della precedente osservazione, tra gli infiniti valori ammissibili rispetto le Eqq. 5.17 e 5.18, si propone di scegliere come rapporto di inerzia  $\beta_0$  il valore minimo possibile. Questa scelta garantisce, come già visto numericamente nel precedente paragrafo, la realizzazione di un sistema difettivo caratterizzato dal massimo fattore di smorzamento modale.

La Tabella 5.8 fornisce le espressioni in forma chiusa dei parametri della connessione che realizzano un sistema difettivo a partire dai parametri strutturali  $\mu_0$  e  $\nu_0$ , rispettando le condizioni fisiche per i parametri della connessione (Eqq. 5.17 e 5.18) e avendo assunto il rapporto di inerzia in modo tale da ottenere il massimo fattore di smorzamento, Eq. 5.16.

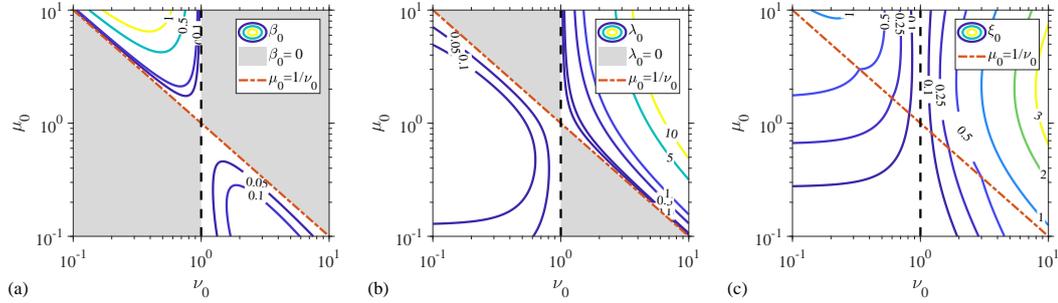
Per maggiore chiarezza, sulla base della Tabella 5.8, in Fig. 5.8, si riportano le mappe dei parametri della connessione. Le espressioni della Tabella 5.8 e le mappe di Figura 5.8 rappresentano le formule/mappe di progettazione da utilizzare per definire un sistema difettivo con una connessione che realizza il massimo fattore di smorzamento modale.

Si noti che le espressioni ottenute nei casi  $0 < \nu < 1$  e  $\nu > 1$  sono legate attraverso le relazioni di dualità riportate nella Tabella 5.2.

Osservando la Tabella 5.8, per un fissato rapporto di frequenza  $\nu_0$ , si possono distinguere tre comportamenti per la connessione se il rapporto di massa  $\mu_0$  è assunto rispettivamente inferiore, uguale o maggiore dell'inverso di  $\nu_0$ . Nel primo caso il sistema difettivo è realizzato con elementi Spring-Dashpot (vedere anche Fig. 5.8(b)) o con elementi Inerter-Dashpot (vedere anche Fig. 5.8 (a)) rispettivamente

	$0 < \nu_0 < 1$	$\nu_0 > 1$
	$\beta_0 = 0$	$\beta_0 = \frac{\mu_0(\nu_0^2 - 1)(1 - \mu_0^2 \nu_0^2)}{(1 + \mu_0)(1 + \mu_0 \nu_0^2)^2}$
$\mu_0 < 1/\nu_0$	$\lambda_0 = \frac{\mu_0(1 - \nu_0^2)(1 - \mu_0^2 \nu_0^2)}{(1 + \mu_0)^2(1 + \mu_0 \nu_0^2)}$	$\lambda_0 = 0$
	$\xi_0 = (1 - \nu_0^2) \sqrt{\frac{\mu_0^3}{(1 + \mu_0 \nu_0^2)(1 + \mu_0)^3}}$	$\xi_0 = (\nu_0^2 - 1) \sqrt{\frac{\mu_0^3 \nu_0^2}{(1 + \mu_0 \nu_0^2)^3(1 + \mu_0)}}$
	$\beta_0 = 0$	$\beta_0 = 0$
$\mu_0 = 1/\nu_0$	$\lambda_0 = 0$	$\lambda_0 = 0$
	$\xi_0 = \frac{1 - \nu_0}{1 + \nu_0}$	$\xi_0 = \frac{\nu_0 - 1}{1 + \nu_0}$
	$\beta_0 = \frac{\mu_0(\nu_0^2 - 1)(1 - \mu_0^2 \nu_0^2)}{(1 + \mu_0)(1 + \mu_0 \nu_0^2)^2}$	$\beta_0 = 0$
$\mu_0 > 1/\nu_0$	$\lambda_0 = 0$	$\lambda_0 = \frac{\mu_0(1 - \nu_0^2)(1 - \mu_0^2 \nu_0^2)}{(1 + \mu_0)^2(1 + \mu_0 \nu_0^2)}$
	$\xi_0 = (1 - \nu_0^2) \sqrt{\frac{\mu_0^3 \nu_0^2}{(1 + \mu_0 \nu_0^2)^3(1 + \mu_0)}}$	$\xi_0 = (\nu_0^2 - 1) \sqrt{\frac{\mu_0^3}{(1 + \mu_0 \nu_0^2)(1 + \mu_0)^3}}$

**Tabella 5.8.** Espressioni in forma chiusa per i parametri della connessione, selezionando il minimo valore ammissibile del rapporto di inerzia.



**Figura 5.8.** Parametri della connessione (a)  $\beta_0$ , (b)  $\lambda_0$ , (c)  $\xi_0$  al variare dei parametri  $\nu_0$  e  $\mu_0$  che realizzano un sistema difettivo.

se  $0 < \nu < 1$  o  $\nu > 1$ . Nel secondo caso, il sistema difettivo è realizzato con connessione solo Dashpot, indipendentemente da  $\nu_0$ . Nel terzo caso il sistema difettivo è realizzato connessione Inerter-Dashpot (vedere anche Fig. 5.8 (a)) o con connessione Spring-Dashpot (vedere anche Fig. 5.8(b)) rispettivamente se  $0 < \nu < 1$  o  $\nu > 1$ . Solo quando  $\nu_0 = 1$ , il sistema degenera in due oscillatori identici disaccoppiati, cioè un sistema non efficace. In Fig. 5.8 (a) si nota che  $\beta_0 = 0$  (zona campita di grigio) nelle regioni in cui il sistema difettivo è realizzato con connessione Spring-Dashpot, mentre in Fig. 5.8(b)  $\lambda_0 = 0$  (zona campita in grigio) nelle regioni in cui il sistema difettivo è realizzato con connessione Inerter-Dashpot.

Per un fissato rapporto di frequenza  $\nu_0$  compreso tra  $0 < \nu_0 < 1$ , all'aumentare

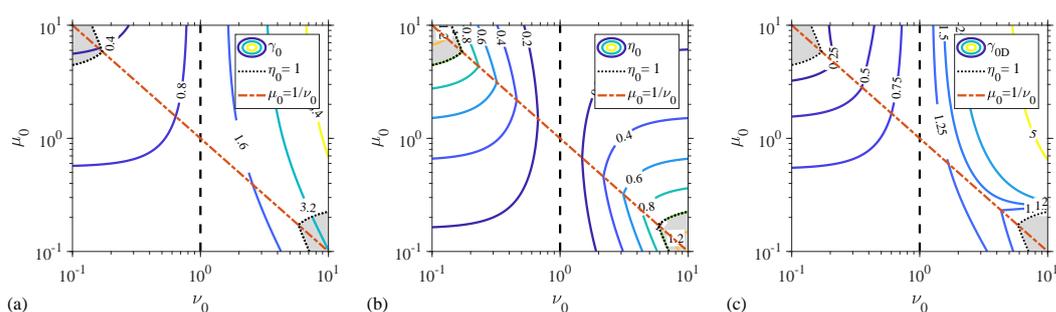
del rapporto di massa  $\mu_0$ , quando la connessione è realizzata con elementi Inerter-Dashpot, aumenta il rapporto di inertanza  $\beta_0$ , Fig. 5.8 (a), mentre generalmente sono necessari valori relativamente piccoli del rapporto di rigidezza quando la connessione è costituita da elementi Sping-Dashpot, Fig. 5.8 (b). Invece, per un fissato rapporto di frequenza  $\nu_0$  nell'intervallo  $\nu_0 > 1$ , all'aumentare del rapporto di massa  $\mu$ , quando la connessione è costituita da elementi Inerter-Dashpot, diminuisce il rapporto di inertanza, Fig. 5.8 (a), mentre valori relativamente più elevati del rapporto di rigidezza sono necessari quando la connessione è costituita da elementi Spring-Dashpot, Fig. 5.8 (b).

Il coefficiente di smorzamento assume sempre valori strettamente positivi, Fig. 5.8 (c), confermando che per realizzare un sistema difettivo è sempre necessaria una connessione con uno smorzatore viscoso che realizza forze di smorzamento non proporzionali, mentre la molla e l'Inerter sono complementari. La diagonale del diagramma di Fig. 5.8 (c) definita dall'equazione  $\mu_0 = 1/\nu_0$  si osserva che il rapporto di smorzamento aumenta per elevati  $\nu_0$  e piccoli  $\mu_0$ , oppure per piccoli  $\nu_0$  ed elevati  $\mu_0$ . Generalmente, raggiunge valori più piccoli nella regione in cui lo smorzatore interagisce con l'Inerter (compreso nel range 0.1-1) e valori più elevati nella regione in cui lo smorzatore interagisce con la molla (compreso nel range 0.1-3).

La Figure 5.9 (a-c) riportano rispettivamente il valore della frequenza naturale, del fattore di smorzamento modale e della frequenza smorzata del sistema difettivo per fissate coppie dei parametri strutturali  $\mu_0 - \nu_0$  e per i valori dei parametri della connessione riportati nelle Figg. 5.8 (a-c).

La Fig. 5.9 (a) diagramma l'Eq. 5.15, la Fig. 5.9 (b) diagramma l'Eq. 5.16 e la Fig. 5.9 (c) diagramma il termine positivo di  $\delta_0$  (Eq. 5.14).

La frequenza naturale del sistema difettivo, Fig. 5.9 (a), aumenta all'aumentare del rapporto di frequenza  $\nu_0$ ; è inferiore all'unità per  $\nu_0 < 1$ , mentre è maggiore all'unità quando  $\nu_0 > 1$ . Inoltre, è poco influenzata dal rapporto di massa tranne diminuire per valori di  $\mu_0$  relativamente elevati e rapporti di frequenza  $\nu_0$  relativamente piccoli.



**Figura 5.9.** Parametri modali (a) frequenze naturali, (b) fattori di smorzamento e (c) frequenze smorzate al variare di  $\nu_0$  e  $\mu_0$  in corrispondenza dei parametri della connessione di Fig. 5.8.

Osservando il fattore di smorzamento modale, Fig. 5.9 (b), si può notare che, variando i parametri del sistema, il sistema difettivo può essere:

1. Sottosmorzato,  $\eta_0 < 1$ , con radici che sono uguali a coppia e sono una coppia

di numeri complessi e coniugati (molteplicità algebrica  $m = 2$ , molteplicità geometrica  $n = 1$ );

2. Criticamente smorzato,  $\eta_0 = 1$ , con quattro radici coincidenti rappresentate da un numero reale negativo (molteplicità algebrica  $m = 4$ , molteplicità geometrica  $n = 1$ );
3. Sovrasmorzato,  $\eta_0 > 1$ , con radici che sono uguali a coppia e sono due numeri reali distinti (molteplicità algebrica  $m = 2$ , molteplicità geometrica  $n = 1$ ).

Le curve di livello in Fig. 5.9 (b) hanno simmetria polare con  $\nu_0$ . La curva  $\eta_0 = 1$  separa i sistemi sottosmorzati da quelli sovrasmorzati. In Fig. 5.9 (a-c) le regioni dove il sistema è sovrasmorzato sono campite in grigio. Per il sistema criticamente smorzato, le espressioni analitiche delle curve  $\nu_0 = f(\mu_0)$  sono le seguenti:

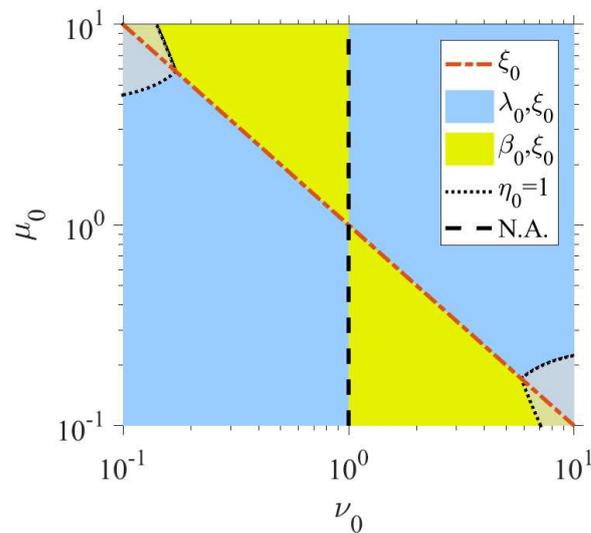
$$\begin{aligned}
 \nu_0 &= \sqrt{\frac{2\mu_0^2 + 5\mu_0 + 2 + 2(1 + \mu_0)\sqrt{\mu_0^2 + 3\mu_0 + 1}}{\mu_0}} \quad \text{per } \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} > \mu_0 > 0 \\
 \nu_0 &= 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{per } \mu_0 = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} \\
 \nu_0 &= \sqrt{-\frac{\sqrt{\mu_0} + 2}{2\mu_0 - \sqrt{\mu_0}}} \quad \text{per } \frac{1}{4} > \mu_0 > \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} \\
 \nu_0 &= \sqrt{\frac{\sqrt{\mu_0} - 2}{2\mu_0 + \sqrt{\mu_0}}} \quad \text{per } \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} > \mu_0 > 4 \\
 \nu_0 &= 3 - 2\sqrt{2} \quad \text{per } \mu_0 = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} \\
 \nu_0 &= \sqrt{\frac{2\mu_0^2 + 5\mu_0 + 2 - 2(1 + \mu_0)\sqrt{\mu_0^2 + 3\mu_0 + 1}}{\mu_0}} \quad \text{per } \mu_0 > \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Si osserva che, una volta fissati i parametri strutturali  $\mu_0, \nu_0$  è sempre possibile ottenere un sistema sottosmorzato anche se si ricade nella regione sovrasmorzata, variando opportunamente il rapporto di ineranza (o di rigidezza). Ad esempio, se nella regione corrispondente a una connessione a Spring-Dashpot, con parametri della connessione che realizzano un sistema sovrasmorzato, si aumenta il rapporto di ineranza da zero a un valore positivo (ricavato dall'Eq. 5.16) è possibile ottenere un fattore di smorzamento modale inferiore all'unità, ovvero è possibile realizzare un sistema sottosmorzato. Le condizioni di ammissibilità fisica dei parametri che definiscono il sistema difettivo non risultano violate, anche se il sistema difettivo non è caratterizzato dal massimo fattore di smorzamento modale.

La frequenza smorzata in Fig. 5.9 (c) è definita solo nelle regioni in cui il sistema è sottosmorzato  $\eta_0 < 1$ , mentre per  $\eta_0 \geq 1$  non è definita (nella figura indicate dalle zone campite in grigio). Per fissati  $\mu_0, \nu_0$ , è ovviamente inferiore alla corrispondente frequenza naturale. Per un fissato rapporto di massa  $\mu$ , aumenta con  $\nu_0$ , mentre per un fissato rapporto di frequenza  $\nu_0$  essa diminuisce in modo poco significativo con  $\mu_0$  nell'intervallo  $0 < \nu_0 < 1$  e aumenta in modo modesto per  $\nu_0 > 1$ .

In sintesi, la Fig. 5.10 riassume, per fissate coppie  $\mu_0, \nu_0$ , le possibilità di realizzare un sistema difettivo con il massimo fattore di smorzamento modale, Eq. 5.16,

da una connessione con elementi Spring-Dashpot-Inerter. Le tre diverse tipologie di connessione, spiegate in dettaglio nella Tabella 5.8 e nelle Figg. 5.8 (a-c), sono indicate con colori diversi. La linea  $\mu_0 = 1/\nu_0$  indica il luogo in cui il sistema difettivo è realizzato attraverso una connessione con solo lo smorzatore; nelle altre regioni della mappa, delimitate dalle due linee  $\nu_0 = 1$  e  $\mu_0 = 1/\nu_0$ , lo smorzatore è collegato in parallelo con l'elemento molla  $\lambda_0 \neq 0, \beta_0 = 0, \xi_0 \neq 0$  (regioni campite in blu), o con l'elemento Inerter  $\lambda_0 = 0, \beta_0 \neq 0, \xi_0 \neq 0$  (regioni campite in giallo). Di conseguenza, il ruolo dell'elemento molla e dell'Inerter è complementare per realizzare il sistema difettivo con il massimo fattore di smorzamento. La figura riporta con linee tratteggiate viola la soluzione in cui il sistema è smorzato criticamente.



**Figura 5.10.** Mappa dei sistemi difettivi realizzabili per fissati parametri strutturali  $\mu_0$  e  $\nu_0$  assumendo la massimizzazione del fattore di smorzamento modale come criterio per la scelta dei parametri della connessione. N.A.: non ammissibile.

*Confronti con la letteratura.* La mappa di Fig. 5.10 include alcuni risultati di letteratura ottenuti nel caso di connessione viscosa e connessione visco-elastica. Luongo, [Luongo, 1995], realizza un sistema difettivo da due oscillatori accoppiati attraverso uno smorzatore viscoso e ricava le espressioni del rapporto di smorzamento  $\xi_0$  in funzione dei parametri strutturali  $\mu_0, \nu_0$ . Per tale sistema, è possibile ottenere una famiglia di sistemi difettivi ad un parametro, tuttavia le soluzioni sono possibili solo se  $\mu_0$  e  $\nu_0$  rispettavano l'equazione  $\nu_0 = 1/\mu_0$  (retta  $\xi_0$ , Fig. 5.10). Gattulli et al., [Gattulli et al., 2013], realizzano un sistema difettivo da due oscillatori accoppiati mediante una connessione viscoelastica e ricavano le espressioni della coppia dei parametri di connessione  $\lambda_0, \xi_0$  in funzione dei parametri strutturali  $\mu_0, \nu_0$  (regioni campite in blu, Fig. 5.10). Per tale sistema, è possibile ottenere una famiglia di sistemi difettivi a due parametri, tuttavia le soluzioni fisicamente ammissibili sono possibili solo per valori specifici dei parametri strutturali  $\mu_0, \nu_0$ . Il presente lavoro ha invece dimostrato che, aggiungendo un elemento Inerter ad una connessione viscosa o viscoelastica, è sempre possibile realizzare un sistema difettivo a prescindere dalla coppia di oscillatori  $\mu_0, \nu_0$ . Generalmente, ci sono  $\infty^1$  scelte dei parametri

ammissibili  $\lambda_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\xi_0$  per realizzare la connessione Spring-Dashpot-Inerter. Per la progettazione della connessione, è stato assunto come variabile indipendente il rapporto di inertanza dell'Inerter. Tra le possibili  $\infty^1$ , è stata selezionata la tripletta di valori che assumendo il minimo rapporto di inertanza (tra i possibili valori fisicamente ammissibili) massimizza il fattore di smorzamento modale, Eq. 5.16.

Nel seguito, sulla base dei risultati ottenuti nei precedenti paragrafi, si confronteranno, al variare dei parametri della connessione e del sistema, i risultati relativi ad analisi dinamiche a condizioni iniziali imposte (oscillazioni libere) e a eccitazione armonica alla base.

## 5.7 Applicazioni

In questo paragrafo, verranno confrontate le risposte, nel caso di oscillazioni libere a condizioni iniziali imposte (Sottoparagrafo 5.7.1) che forzate con eccitazione armonica alla base (Sottoparagrafo 5.7.2), di diversi sistemi costituiti da 2-ASDOF connessi con elementi Spring-Dashpot-Inerter.

Inizialmente, per fissati valori del sistema ( $\mu = 0.2$  e  $\nu = 2$ ), verrà indagata l'influenza sulle risposte dei parametri della connessione  $\beta$  e  $\xi$ .

Successivamente verranno confrontate le risposte tra sistemi difettivi che realizzano il fattore di smorzamento modale massimo ottenute per diverse coppie di parametri strutturali  $\mu_0$  e  $\nu_0$ .

In riferimento ai sistemi difettivi, si osserva come da un punto di vista applicativo, la maggior parte delle strutture adiacenti ha rapporti di massa  $\mu_0$  e frequenza  $\nu_0$  che ricadono nella regione in cui i sistemi risultano sottosmorzati. Per questo motivo, nei casi di studio selezionati, si farà riferimento solo a sistemi sottosmorzati.

Due rapporti di frequenza sono scelti nell'intervallo  $0 < \nu_0 < 1$  e  $\nu_0 > 1$ :  $\nu_0 = 0.5, 2$ . Per il primo rapporto di frequenza, sono stati scelti tre valori del rapporto di massa  $\mu_0 = 0.2, 2, 5$ , per il secondo, invece, sono stati scelti i valori  $\mu_0 = 0.2, .5, 5$ . La scelta degli oscillatori (coppie  $\mu_0, \nu_0$ ) è stata fatta al fine di avere sistemi duali, secondo la Tabella 5.2. I parametri della connessione sono stati selezionati in modo da massimizzare il fattore di smorzamento modale, secondo la procedura illustrata nel Paragrafo 5.6 usando le Eqq. 5.14 e 5.18.

Come riportato in Fig. 5.10, sono possibili tre diverse situazioni per la connessione, a seconda della fissata coppia di oscillatori ( $\mu_0, \nu_0$ ):

- Connessione con elemento Dashpot, DE
- Connessione con elementi Spring-Dashpot, SDE
- Connessione con elementi Inerter-Dashpot, IDE

Si noti che i rapporti di massa sono stati selezionati in modo da avere le tre situazioni per la connessione per ogni fissato rapporto di frequenza ( $\nu_0 = 0.5, 2$ ).

La Tabella 5.9 riassume, per i casi studio in precedenza descritti, i valori dei parametri della connessione, degli autovalori, delle frequenze naturali, dei fattori di smorzamento modale e delle frequenze smorzate, stimati attraverso le espressioni analitiche riportate nel Paragrafo 5.6. Nella stessa tabella si riporta anche lo sfasamento tra gli autovettori destri. Si noti che i sistemi tra loro duali sono legati

$\mu_0$	$\nu_0$	Connessione	$\beta_0$	$\lambda_0$	$\xi_0$	$s_0, \bar{s}_0$	$\gamma_0$	$\eta_0$	$\gamma_{0D}$	$\arg(\psi_{1,2} - \psi_{1,1})$
2.0	0.5	DE	0.00	0.00	0.33	$-0.250 \pm 0.661i$	0.707	0.354	0.661	$+0.54 \pi$
0.2	0.5	SDE	0.00	0.10	0.05	$-0.149 \pm 0.923i$	0.935	0.160	0.923	$+0.47 \pi$
5.0	0.5	IDE	0.65	0.00	0.50	$-0.171 \pm 0.588i$	0.612	0.280	0.588	$+0.49 \pi$
0.5	2.0	DE	0.00	0.00	0.33	$-0.500 \pm 1.323i$	1.414	0.354	1.323	$-0.54 \pi$
5.0	2.0	SDE	0.00	1.96	0.50	$-0.299 \pm 1.847i$	1.871	0.160	1.847	$-0.47 \pi$
0.2	2.0	IDE	0.13	0.00	0.20	$-0.342 \pm 1.176i$	1.225	0.280	1.176	$-0.49 \pi$

**Tabella 5.9.** Casi studio: valori assunti per i parametri del sistema e corrispondenti quantità modali.

attraverso le relazioni riportate nella Tabella 5.2 e in questo caso sia le frequenze naturali  $\gamma_0$  che le frequenze smorzate  $\gamma_{0D}$  tra i due sistemi duali sono una doppia dell'altra, mentre i fattori di smorzamento modale  $\eta_0$  sono gli stessi. Il modulo della fase relativa, nel caso di sistemi duali, è sempre la stessa (valori circa pari a  $\pi/2$ ) ma cambia segno dal momento che i due oscillatori sono invertiti.

### 5.7.1 Risultati delle oscillazioni libere

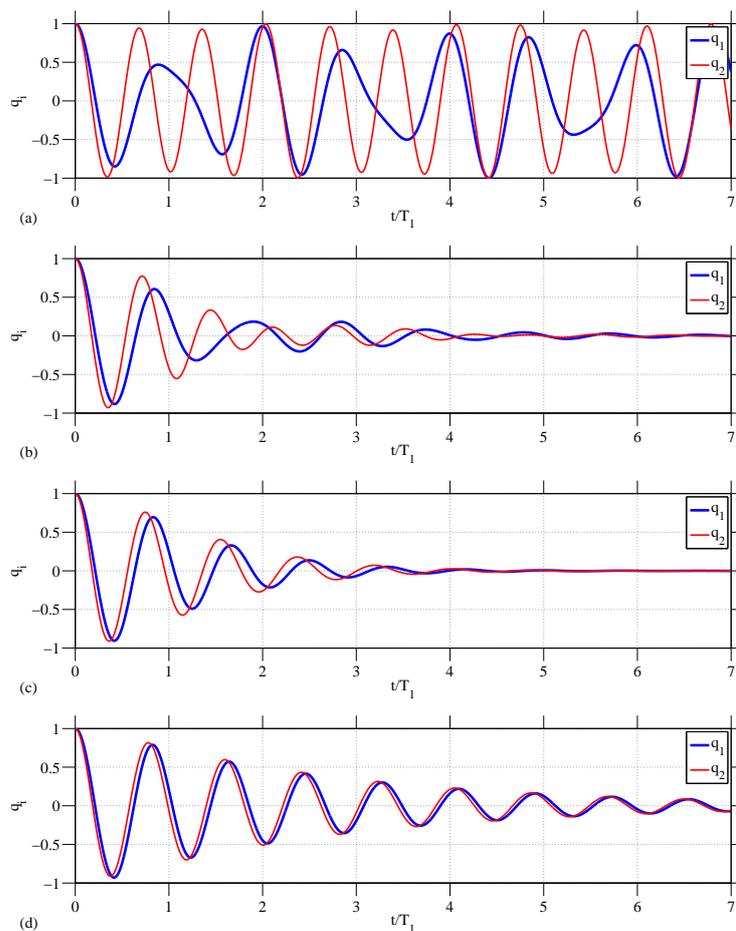
In questo sottoparagrafo si illustrano le risposte del sistema costituito da 2-ASDOF collegato con diversi tipi di connessione (conservativa e non conservativa) in oscillazioni libere a seguito di determinate condizioni iniziali imposte. Nelle oscillazioni libere, l'equazione del moto Eq. 5.1 ha il termine noto nullo. Sono state ipotizzate le seguenti condizioni iniziali:  $\mathbf{u}(0) = [1 \ 1]^T$ . Inoltre, nell'asse delle ascisse, una variabile non dimensionale  $t/T_1$  è stata introdotta, dove  $T_1$  è il periodo naturale del primo oscillatore disaccoppiato.

### Influenza dei parametri della connessione

In relazione al Paragrafo 5.5, i risultati relativi a un sistema costituito da 2-ASDOF con rapporto di massa  $\mu = 0.2$  e rapporto di frequenza  $\nu = 2$  sono discussi nel seguito.

Fig. 5.11 (a) mostra la risposta in termini di spostamento del sistema costituito da 2-ASDOF collegamento con una connessione conservativa costituita da SIE ( $\beta = 0.5$ ,  $\lambda = 0.55$ ). Si osserva che i due gdl oscillano con una dinamica diversa, caratterizzata da un'ampiezza dello spostamento che non decade nell'intervallo di tempo normalizzato. Dal momento che il sistema è non smorzato, i due gdl continuano ad oscillare all'infinito. Le Figg. 5.11 (b-d) mostrano la risposta in termini di spostamento del sistema in caso di connessione non conservativa con SDIE. I parametri assunti sono  $\beta = 0.5$ ,  $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^* = 0.9$  (ovvero  $\lambda = 0.55$ ) e  $\xi = 0.15, 0.30, 0.60$ , rispettivamente più piccoli, uguali e maggiori del rapporto di smorzamento  $\xi^*$ .

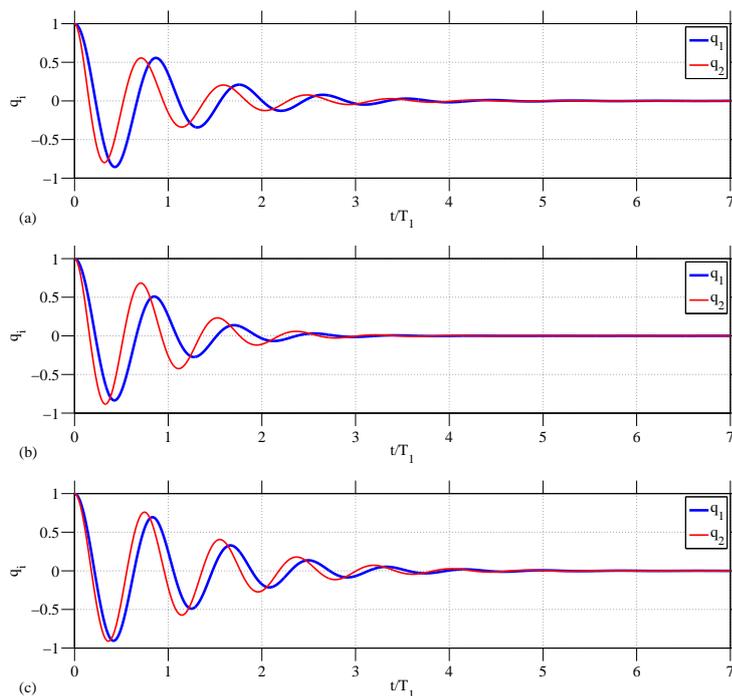
In tutti i casi la risposta è caratterizzato da oscillazioni che decadono nel tempo, tipiche dei sistemi sottosmorzati. Quando  $\xi < \xi^*$ , Fig. 5.11 (b), la dinamica dei due gdl è abbastanza diversa, caratterizzata da diverse frequenze di vibrazione,



**Figura 5.11.** Storie temporali degli spostamenti del sistema in oscillazioni libere. (a)  $\xi = 0$ , (b)  $\xi < \xi^*$ , (c)  $\xi = \xi^*$  e (d)  $\xi > \xi^*$ . ( $\nu = 2$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\beta = 0.5$  e  $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^* = 0.9$ ,  $\xi = 0, 0.15, 0.3, 0.6$  e  $\xi^* = 0.3$ ).

ma il decadimento della risposta nell'intervallo di tempo normalizzato è uguale. Dai risultati dell'analisi modale (Tabella 5.5), infatti, si è visto che nel caso  $\xi = 0.15$  il sistema è caratterizzato da frequenze di vibrare diverse, ma da fattori di smorzamento modale uguali. Quando  $\xi = \xi^*$ , Fig. 5.11 (c), i due gdl vibrano con la stessa frequenza e i due modi sono caratterizzati dallo stesso fattore di smorzamento modale, come osservato anche nella tabella 5.5, caso  $\xi = 0.30$ . La dinamica dei due gdl è simile con uno shift in fase tra i due segnali. Dopo pochi cicli le risposte tendono a zero. Quando  $\xi > \xi^*$ , Fig. 5.11 (d), il sistema vibra con la stessa frequenza, uno sfasamento si osserva nei primi cicli e le risposte decadono meno rapidamente rispetto al caso precedente. Tra le tre situazioni analizzate, le oscillazioni decadono più rapidamente nel caso  $\xi = \xi^*$ . Questo valore del rapporto di smorzamento sembra essere la scelta ottimale per far tendere la risposta a zero più rapidamente.

La Figura 5.12 (a-c) mostra le storie temporali della risposta in termini di spostamento per il rapporto  $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^*$ ,  $\xi = \xi^*$  e assumendo tre valori del rapporto di inerzia  $\beta$  (0.05, 0.13, 0.5), rispettivamente  $\beta < \beta_{min}$ ,  $\beta = \beta_{min}$ ,  $\beta > \beta_{min}$ . Nel caso in cui  $\beta < \beta_{min}$ , Fig. 5.12 (a), i due gdl oscillano con frequenze di vibrazione



**Figura 5.12.** Storie temporali degli spostamenti del sistema in oscillazioni libere. (a)  $\beta < \beta_{min}$ , (b)  $\beta = \beta_{min}$  e (c)  $\beta > \beta_{min}$ . ( $\nu = 2$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^*$ ,  $\xi = \xi^*$ ,  $\beta = 0.05, 0.13, 0.5$  e  $\beta_{min} = 0.13$ ).

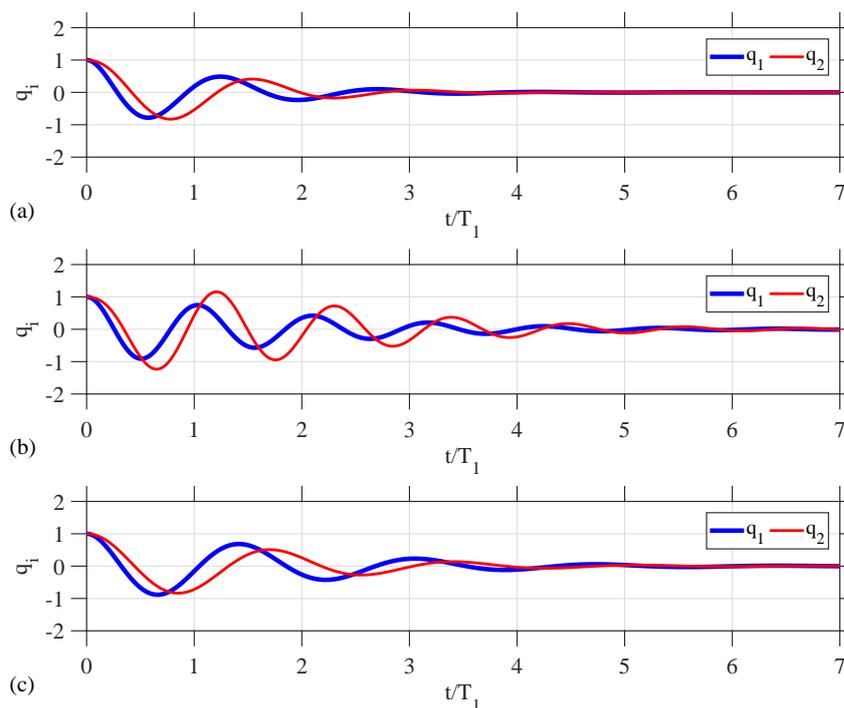
diverse, mentre essi oscillano con la stessa frequenza di vibrazione quando Figg. 5.12 (b-c).

Si osserva che le oscillazioni del sistema tendono a zero più rapidamente quando il rapporto di inerzia è pari a  $\beta = \beta_{min}$ . Infatti, come si è già visto dai risultati dell'analisi modale riportati nella Tabella 5.7 e come è stato dimostrato nel Paragrafo 5.6, in questo caso il sistema è caratterizzato dal più elevato fattore di smorzamento modale. Di conseguenza, questo è il valore che si suggerisce di selezionare per il rapporto di inerzia per avere il più rapido decadimento della risposta nel tempo.

**Osservazione 12.** Per un sistema costituito da 2-ASDOF collegati da una connessione con SDIE in oscillazioni libere a seguito di condizioni iniziali imposte, è possibile selezionare una tripletta ottimale di parametri della connessione  $\beta_{min} - (\beta_{min}/\lambda)^* - \xi^*$  (ovvero  $\beta_0 - \lambda_0 - \xi_0$  come definiti nel Paragrafo 5.6) in modo da avere il decadimento più rapido delle risposte strutturali.

### Influenza dei parametri strutturali nel caso di sistemi difettivi

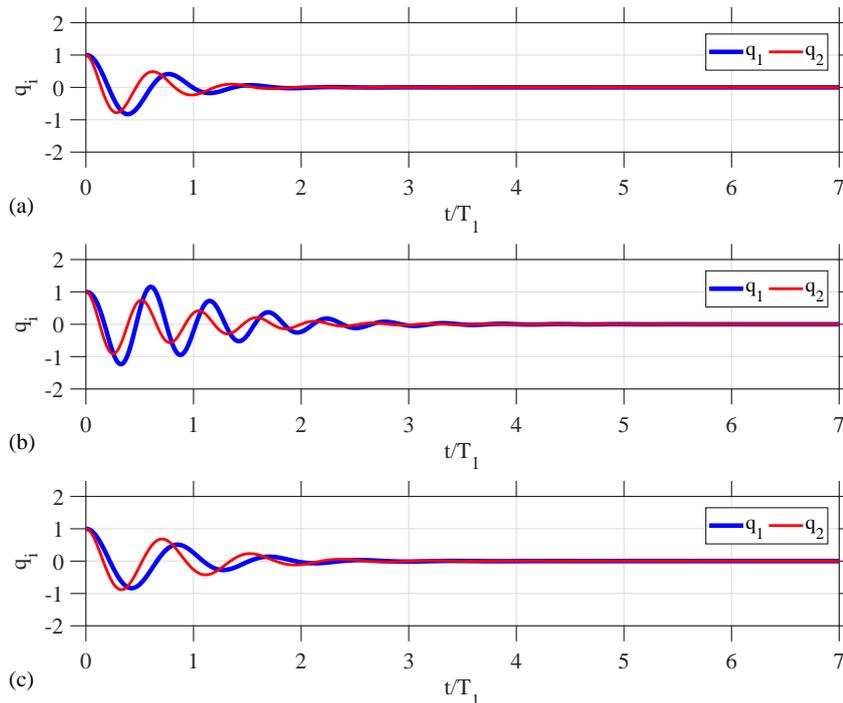
In riferimento al Paragrafo 5.6, le Figg. 5.13 (a-c) e 5.14 (a-c) mostrano le storie temporali delle risposte in oscillazione libera e in termini di spostamento per i casi riportati in Tabella 5.9. In particolari sono state studiate le tre tipologie di connessione rispettivamente per  $\nu_0 = 0.5$  e  $\nu_0 = 2$ .



**Figura 5.13.** Storie temporali degli spostamenti del sistema in oscillazioni libere per  $\nu_0 = 0.5$ . (a) Connessione DE ( $\mu_0 = 2$ ), (b) connessione SDE ( $\mu_0 = 0.2$ ), (c) connessione IDE ( $\mu_0 = 5$ ).

Seguono alcuni commenti generali.

- In tutti i casi, ogni gdl oscilla con un'ampiezza che decade nel tempo, essendo tutti sistemi sottosmorzati.
- In ogni figura, essendo i sistemi difettivi, entrambi i gdl oscillano con la stessa frequenza di vibrazione, che è la frequenza smorzata.
- Si osserva che le risposte dei due gdl risultano sfasate. Indipendentemente dal tipo di connessione, per  $\nu_0 = 0.5$ , il primo gdl (linea blu) ha i massimi prima del secondo (linea rossa), sfasamento positivo, invece per  $\nu_0 = 2$  il secondo gdl (linea rossa) ha i massimi prima del primo (linea blu), sfasamento negativo, (vedere anche Tabella 5.9).
- Per la connessione DE e la connessione IDE, entrambe le risposte dei due gdl sono smorzate in modo simile, con massimi che decadono con forma esponenziale comparabile e la risposta tende a zero dopo un modesto numero di oscillazioni.
- Per la connessione SDE, solo il gdl corrispondente all'oscillatore con frequenza più bassa ha una risposta smorzata dal primo ciclo di vibrazione, mentre l'altra prima si amplifica, con un massimo maggiore dello spostamento iniziale imposto, per poi decrescere dopo il primo ciclo.



**Figura 5.14.** Storie temporali degli spostamenti del sistema in oscillazioni libere per  $\nu_0 = 2$ . (a) Connessione DE ( $\mu_0 = 0.5$ ), (b) connessione SDE ( $\mu_0 = 5$ ), (c) connessione IDE ( $\mu_0 = .2$ ).

### 5.7.2 Risultati delle oscillazioni forzate con eccitazione armonica alla base

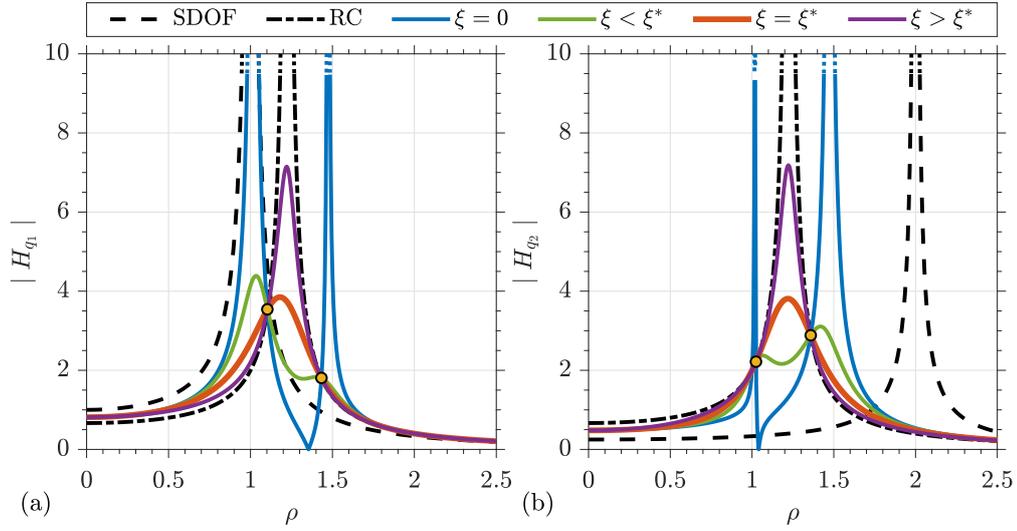
Quando il sistema è soggetto ad una eccitazione armonica alla base, è possibile per rappresentare la risposta nel dominio della frequenza per mezzo della funzione di risposta in frequenza (FRF). L'attenzione è focalizzata sugli spostamenti relativi dei due gdl  $|H_{q_1}|$  e  $|H_{q_2}|$  e le FRF sono rappresentate in funzioni del rapporto di frequenza della forzante  $\rho$ , definito come  $\rho = \omega_f/\omega_1$ . Inoltre, ai fini di confronto si riportano le FRF dei due oscillatori non accoppiati (SDOF) e nel caso di accoppiamento con una connessione rigida (RC).

#### Influenza dei parametri della connessione

In relazione al Paragrafo 5.5, i risultati relativi a un sistema costituito da 2-ASDOF con rapporto di massa  $\mu = 0.2$  e rapporto di frequenza  $\nu = 2$  sono discussi nel seguito.

In Fig. 5.15 (a-b), rispettivamente per il primo e secondo oscillatore, si riportano le FRF avendo fissato  $\beta = 0.5$ ,  $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^* = 0.9$  (ovvero  $\lambda = 0.55$ ) e  $\xi = 0.15, 0.30, 0.60$ , rispettivamente più piccoli, uguali e maggiori del rapporto di smorzamento  $\xi^*$ .

Osservando le figure, si osserva che nel caso di accoppiamento le FRF hanno sempre due punti fissi che sono invarianti rispetto il rapporto di smorzamento. Una connessione con SIE ha sempre due amplificazioni dinamiche e un punto di anti-



**Figura 5.15.** Funzioni di risposta in frequenza in termini di spostamento per il (a) primo e (b) secondo oscillatore al variare di  $\xi$  ( $\nu = 2$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\beta = 0.5$  e  $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^* = 0.9$ ,  $\xi = 0, 0.15, 0.3, 0.6$  e  $\xi^* = 0.3$ ).

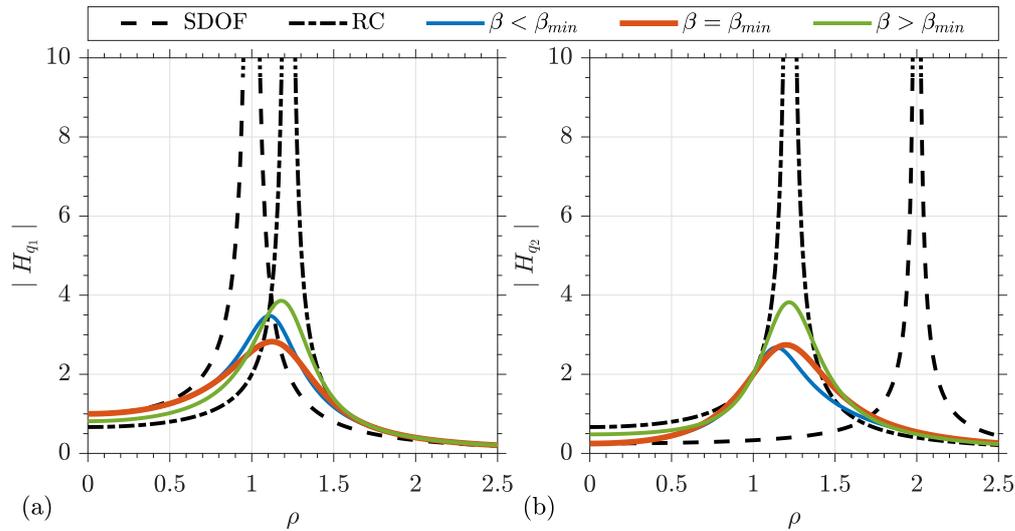
risonanza. È possibile selezionare opportunamente i parametri della connessione per avere l'antirisonanza in corrispondenza della frequenza del sistema disaccoppiato. In [Basili, De Angelis e Pietrosanti, 2017] viene fornita l'espressione analitica per selezionare i parametri del collegamento al fine di ottenere il punto di antirisonanza in corrispondenza della frequenza del primo oscillatore disaccoppiato (in questo caso indicato come 1). Una connessione con SDIE può avere due amplificazioni dinamiche quando  $\xi < \xi^*$ , o una sola amplificazione dinamica quando  $\xi \geq \xi^*$ . L'amplificazione dinamica, in corrispondenza della frequenza del caso RC, ha il suo minimo valore per  $\xi = \xi^*$  per il primo oscillatore (Fig. 5.15 (a)). Si può notare che quando  $\xi = \xi^*$ , l'amplificazione dinamica è lontana dalle frequenze di risonanze dei due oscillatori disaccoppiati.

In Fig. 5.16, è possibile osservare, per gli stessi parametri indagati nelle oscillazioni libere in Fig. 5.12, l'influenza del rapporto di inerzia  $\beta$  sulle funzioni in risposta in frequenza. Come già osservato in precedenza, anche in caso di eccitazione armonica alla base la scelta migliore per il rapporto di inerzia  $\beta$  sembra essere quello al suo valore minimo, secondo la Fig. 5.7. Con questa scelta, le risposte di entrambi gli oscillatori hanno un'unica minima amplificazione dinamica.

Appare quindi evidente che la scelta di selezionare i parametri della connessione in modo da realizzare un sistema difettivo con massimo fattore di smorzamento modale risulta essere un criterio di progettazione ottimale ottenere la risposta minima in entrambi gli oscillatori.

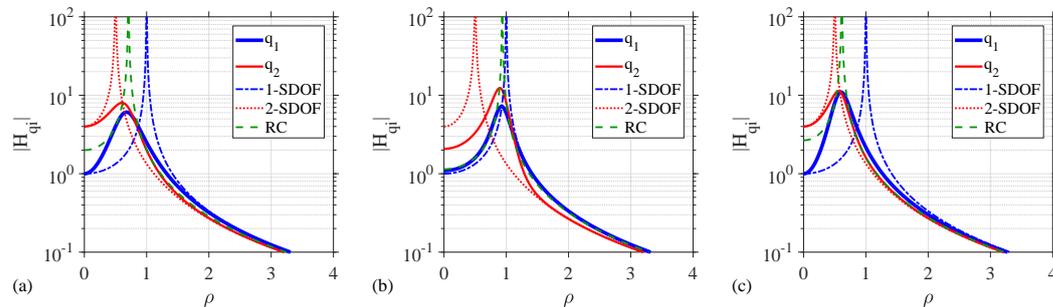
### Influenza dei parametri strutturali nel caso di sistemi difettivi

In riferimento al Paragrafo 5.6, le Figg. 5.17 (a-c) e 5.18 (a-c) mostrano le funzioni di risposta in frequenza in termini di spostamento per i casi riportati in Tabella 5.9.



**Figura 5.16.** Funzioni di risposta in frequenza in termini di spostamento per il (a) primo e (b) secondo oscillatore al variare di  $\beta$ :  $\beta < \beta_{min}$ ,  $\beta = \beta_{min}$  e  $\beta > \beta_{min}$ . ( $\nu = 2$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\beta/\lambda = (\beta/\lambda)^*$ ,  $\xi = \xi^*$ ,  $\beta = 0.05, 0.13, 0.5$  e  $\beta_{min} = 0.13$ ).

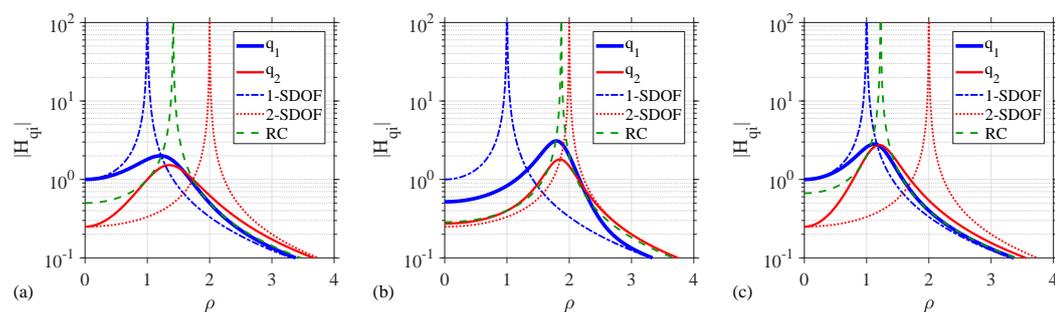
In particolari sono state studiate le tre tipologie di connessione rispettivamente per  $\nu_0 = 0.5$  e  $\nu_0 = 2$ .



**Figura 5.17.** Ampiezza delle funzioni di risposta in frequenza in termini di spostamento per  $\nu_0 = 0.5$ . (a) Connessione DE ( $\mu_0 = 2$ ), (b) connessione SDE ( $\mu_0 = 0.2$ ), (c) connessione IDE ( $\mu_0 = 5$ ).

Seguono alcuni commenti generali.

- Entrambi i gdl hanno un'unica amplificazione dinamica, poiché tutti i sistemi sono difettivi. La frequenza di risonanza, ovvero la frequenza smorzata, è molto vicina alla frequenza di risonanza del caso RC che è sempre intermedia rispetto alle due frequenze disaccoppiate.
- Per i casi analizzati, l'amplificazione dinamica è sempre limitata, di conseguenza i tre tipi di connessione sono efficaci per il controllo delle vibrazioni.
- Indipendentemente dal rapporto di frequenza  $\nu_0$  fissato, per le connessioni DE o IDE (Figg. 5.17 (a,c) e 5.18 (a,c)) le riduzioni maggiori si ottengono per



**Figura 5.18.** Ampiezza delle funzioni di risposta in frequenza in termini di spostamento per  $\nu_0 = 2$ . (a) Connessione DE ( $\mu_0 = 0.5$ ), (b) connessione SDE ( $\mu_0 = 5$ ), (c) connessione IDE ( $\mu_0 = 0.2$ ).

la massa corrispondente all'oscillatore con frequenza più elevata, invece, per le connessioni SDE (Figg. 5.17 (b) e 5.18 (b)) per la massa corrispondente all'oscillatore con frequenza più piccola.

- Solo nel caso di connessione DIE, si può osservare che per entrambi i gdl si ottiene un'unica amplificazione dinamica in corrispondenza della stessa frequenza, Figg. 5.17 (c) e 5.18 (c). Questo non si verifica nei casi di connessione DE o SDE.
- Quando l'azione della forzante diventa statica, cioè  $\rho \rightarrow 0$ , per le connessioni DE e IDE (Figg. 5.17 (a,c) e 5.18 (a,c)) le FRF assumono i corrispondenti valori ottenuti nel caso di assenza di accoppiamento. Questo non si verifica nel caso di connessione SDE (Figg. 5.17 (b) e 5.18 (b)).

## 5.8 Conclusioni

In questo capitolo è stato studiato il comportamento dinamico di una nuova configurazione strutturale costituita da 2-ASDOF accoppiato da una connessione con elementi spring-dashpot-Inerter disposti in parallelo.

All'inizio è stata eseguita l'analisi modale del sistema accoppiato considerando diverse situazioni di collegamento: connessione di tipo conservativo (elementi spring-Inerter) e non conservativa (elementi spring-dashpot-Inerter). Nel caso di connessione conservativa, le frequenze naturali e i modi di vibrare sono stati derivati analiticamente ed è stato dimostrato che il problema agli autovalori ammette soluzione in forma chiusa. Nel caso di connessione non conservativa, è stata adottata la formulazione nello spazio di stato e, attraverso l'analisi modale complessa, sono state derivate pseudo-frequenze, pseudo-fattori di smorzamento e modi complessi.

La tipologia di connessione influenza i parametri modali del sistema accoppiato. I principali risultati ottenuti dall'analisi modale sono riassunti nel seguito.

Generalmente, quando un sistema costituito da 2-ASDOF è collegato attraverso un connessione conservativa con elementi spring-Inerter, è possibile avere tre diversi

scenari per le frequenze e i modi naturali, a seconda del fissato rapporto  $\beta/\lambda$  tra i parametri della connessione:

1. Un sistema accoppiato con entrambe le frequenze maggiori delle frequenze dei due oscillatori disaccoppiati e caratterizzato dal primo modo naturale in fase e dal secondo in opposizione di fase.
2. Un sistema accoppiato con entrambe le frequenze inferiori delle frequenze dei due oscillatori disaccoppiati e caratterizzato dal primo modo naturale in opposizione di fase e dal secondo in fase.
3. Un sistema accoppiato con entrambe le frequenze all'interno delle frequenze dei due oscillatori disaccoppiati e caratterizzato entrambi i modi naturali in fase.

Quest'ultimo comportamento è unico di una connessione con gli elementi spring-Inerter. In particolare, l'effetto dell'Inerter è sempre quello di ridurre entrambe le frequenze del sistema accoppiato.

Quando un sistema costituito da 2-ASDOF è collegato da una connessione non conservativa con elementi spring-dashpot-Inerter, è ancora possibile definire il tre scenari per le frequenze ma sono ottenuti per rapporti  $\beta/\lambda$  diversi dal caso di connessione conservativa; inoltre, l'estensione di ciascuna regione dipende anche dal rapporto di smorzamento  $\xi$ . In questo caso, associati ad ogni situazione, si ottengono i corrispondenti fattori di smorzamento modale e modi complessi. Lo smorzamento ha l'effetto di aumentare la prima frequenza e diminuire la seconda, inoltre influenza fortemente il fattore di smorzamento modale.

Comportamenti peculiari, particolarmente vantaggiosi ai fini del controllo, sono emersi quando i parametri della connessione assumono valori specifici. Inizialmente per via numerica, è stato osservato che, per un dato sistema strutturale, esistono alcune particolari triplette di parametri della connessione  $(\beta/\lambda)^* - \xi^*$  per cui il sistema è caratterizzato da frequenze (coincidenti con la frequenza nel caso di connessione rigida), fattori di smorzamento e modi complessi uguali per entrambi i modi. Sistemi che godono di tali proprietà in letteratura sono definiti difettivi. Inoltre, esiste un valore minimo ottimale del rapporto di inertanza  $\beta_{min}$  per il quale il sistema difettivo risulta caratterizzato dal più alto fattore di smorzamento modale.

Nel seguito la complessità della ricerca per via numerica dei parametri della connessione che realizzavano un sistema difettivo è stata successivamente risolta affrontato il problema analiticamente.

In particolare la trattazione è stata effettuata per completezza considerando il rapporto di frequenza  $\nu$  nei due intervalli,  $0 < \nu \leq 1$  e  $\nu > 1$ . Tuttavia, a causa della simmetria del sistema studiato, esistono relazioni di dualità per i parametri tra i due problemi studiati come riportato all'inizio del capitolo.

Relativamente allo studio analitico dei sistemi difettivi, i principali risultati sono riassunti nel seguito.

- Le espressioni di autovalori, fattore di smorzamento e parametri della connessione per realizzare sistemi difettivi sono stati forniti per fissate coppie di oscillatori.

- E’ stato dimostrato che, indipendentemente dai fissati parametri strutturali, è sempre possibile realizzare sistemi difettivi nel caso di una connessione con elementi spring-dashpot-Inerter. Per una coppia di oscillatori (noto  $\mu_0, \nu_0$ ) è generalmente possibile realizzare  $\infty^1$  sistemi difettivi variando opportunamente i parametri della connessione  $\lambda_0, \beta_0, \xi_0$ . Tra le  $\infty^1$  possibili scelte dei parametri è stato assunto il rapporto di inertanza  $\beta$  come variabile indipendente ed è stato proposto un criterio di progettazione della connessione che massimizza il fattore di smorzamento modale.
- Sono state fornite le espressioni in forma chiusa per progettare la connessione al fine di realizzare un sistema difettivo caratterizzato dal massimo fattore di smorzamento modale.
- E’ stata costruita una mappa che, per fissati valori dei parametri strutturali ( $\mu_0, \nu_0$ ), indica il tipo di connessione necessaria per realizzare un sistema difettivo con massimo fattore di smorzamento modale. Si è inoltre dimostrato che al fine di realizzare un sistema difettivo è sempre necessaria la presenza di uno smorzatore viscoso. Inoltre, quando il rapporto tra il rapporto di masse e di frequenze rispetta l’uguaglianza  $\nu_0 = 1/\mu_0$ , il dashpot è l’unico elemento che costituisce la connessione; nelle altre parti della mappa, il dashpot è collegato in parallelo con l’elemento spring o con l’elemento Inerter. Di conseguenza, il ruolo della spring e dell’Inerter risultano complementari al fine di realizzare il sistema difettivo con il massimo fattore di smorzamento. Sono state infine indicate le regioni in cui il sistema è sottosmorzato, criticamente smorzato e sovrasmorzato.
- Oltre alle espressioni analitiche, sono state costruite anche le mappe della frequenza naturale, del fattore di smorzamento e della frequenza smorzata del sistema difettivo.

Sulla base dei precedenti risultati ottenuti mediante l’analisi modale, nella seconda parte del capitolo è stata studiata la dinamica del sistema in oscillazioni libere a seguito di condizioni cinematiche imposte e successivamente nel caso di forzante armonica imposta alla base.

Le analisi sono state eseguite sia per la connessione conservativa che non conservativa, prima impostando i parametri della connessione secondo diversi criteri e poi valutando l’influenza che i parametri strutturali hanno nel caso di sistemi difettivi caratterizzati dal massimo fattore di smorzamento modale.

Per quanto riguarda la prima parte di analisi, in linea con quanto ottenuto dall’analisi modale è emerso che è possibile selezionare correttamente i parametri della connessione (cioè  $\beta_{min} - (\beta_{min}/\lambda)^* - \xi^*$ ) per raggiungere: i) il più rapido decadimento della risposta strutturale in caso di oscillazioni libere e ii) la minima amplificazione dinamica per entrambi gli oscillatori nel caso di forzante armonica. In questo modo, è stato suggerito un criterio di progettazione per la connessione in grado di controllare le vibrazioni di entrambi gli oscillatori adiacenti.

Successivamente, la risposta sia in oscillazioni libere che nel caso di forzante armonica alla base per diversi sistemi difettivi sottosmorzati è stata studiata nel caso di connessione progettata massimizzando il fattore di smorzamento modale.

- Dalle oscillazioni libere, è stato osservato che, la risposta decade sempre nel tempo ed entrambi i gdl oscillano alla stessa frequenza. A parità di condizioni iniziali, generalmente la risposta di entrambi i gdl nel caso di connessione solo dashpot e dashpot-Inerter, rispetto a quella spring-dashpot, raggiunge lo zero in modo simile e per un inferiore numero di oscillazioni. Per quest'ultima connessione invece, solo l'oscillatore caratterizzato dalla frequenza più bassa ha una risposta smorzata dal primo ciclo di vibrazione, mentre la risposta dell'altro inizialmente aumentata, con valore di picco maggiore rispetto allo spostamento iniziale imposto, per poi decrescere dopo il primo ciclo.
- Nel caso di forzante armonica alla base, le FRF in termini di spostamento hanno mostrato che entrambi i gdl hanno sempre un'unica limitata amplificazione dinamica, posizionata all'interno delle due frequenze disaccoppiate. Per tutte le tipologie di connessione analizzate, l'amplificazione dinamica risulta sempre limitata, a dimostrazione che esse sono efficaci a fini di controllo. In generale, quando la connessione è di tipo puramente viscosa o con elementi dashpot-Inerter, sono state osservate riduzioni importanti per l'oscillatore caratterizzato dalla frequenza maggiore. Invece, quando la connessione è viscoelastica, le più significative riduzioni sono ottenute per l'oscillatore caratterizzato dalla frequenza più bassa. Solo nel caso di connessioni con elementi di dashpot-inerter, è stato osservato che il massimo dell'amplificazione in termini di spostamento è stata raggiunta alla stessa frequenza per entrambi i gdl. A differenza della connessione viscoelastica, le connessioni puramente viscoso o con elementi dashpot-Inerter non reagiscono nel caso di azioni statiche ( $\rho \rightarrow 0$ ).

In questo capitolo è stato dimostrato che i sistemi difettivi possiedono proprietà interessanti e sono applicabili ai fini del controllo. È sempre possibile utilizzare una connessione con elementi spring-dashpot-inerter per realizzare sistemi difettivi.



**Parte II**  
**Studi Sperimentali**



## Capitolo 6

# Premessa

In questa seconda parte, sulla base degli studi condotti nella Parte I della tesi, si riportano i risultati relativi a due diverse sperimentazioni condotte con specifici obiettivi anche legati dalla limitata letteratura relativa all'utilizzo dell'Inerter in applicazioni tipiche dell'Ingegneria civile.

La prima sperimentazione, Capitolo 7, ha avuto come finalità la caratterizzazione di un prototipo in scala di Inerter a pignone e cremagliera mediante test a spostamento armonico imposto. Si è voluto infatti valutare in che modo il comportamento meccanico del dispositivo si allontana rispetto a quello ideale nel caso di azioni caratterizzate da range di ampiezze e frequenze tipiche dell'Ingegneria civile.

La seconda sperimentazione su tavola vibrante, Capitolo 8, ha avuto come obiettivo la valutazione della fattibilità, applicabilità, robustezza ed efficacia del sistema di controllo TMDI nel controllare la risposta di un sistema isolato alla base eccitato con diverse tipologie di azione. Si è inoltre voluto indagare da un punto di vista sperimentale l'influenza dei parametri inerziali del sistema di controllo (massa inerziale e gravitazionale) al fine di supportare i risultati numerici riportati nella parte teorica.



## Capitolo 7

# Prototipo di dispositivo Inerter

### 7.1 Premessa

In questo capitolo si vuole caratterizzare un prototipo in scala di Inerter a pignone e cremagliera testato in range di ampiezze e frequenze tipiche dell'Ingegneria Civile per i quali evidenze sperimentali risultano limitate. L'obiettivo è sia quello di valutare in che modo il comportamento reale del prototipo si discosta rispetto a quello ideale, sia di definire un modello numerico interpretativo dei risultati sperimentali e predittivo del comportamento del dispositivo in relazione alle successive analisi.

### 7.2 Test sperimentali

#### 7.2.1 Modello sperimentale

Il prototipo in scala di Inerter a pignone e cremagliera, Fig. 7.1, è stato progettato e realizzato sulla base delle specificità richieste dalla successiva sperimentazione condotta e descritta nel Capitolo 8. Il principio di funzionamento è quello di convertire la traslazione relativa dei suoi due terminali (ovvero la cremagliera e lo *chassis*) in rotazione del volano mediante gli elementi che lo compongono, ovvero la cremagliera, il pignone e gli ingranaggi. Il dispositivo in questione è costituito da componenti commerciali "*off-the-shelf*", mentre lo *chassis* è stato realizzato "*in-house*" al fine di permetterne una maggiore versatilità anche per le future sperimentazioni.

Il prototipo di Inerter, Fig. 7.2, è composto dai seguenti componenti: (i) una cremagliera con sezione quadrata (dimensioni sezione: 20 mm×20 mm, lunghezza: 300 mm, modulo: 2.0 e angolo di pressione: 20°), (ii) un pignone realizzato attraverso un ingranaggio cilindrico (diametro di riferimento: 36 mm, modulo: 2.0, angolo di pressione: 20°, larghezza del dente: 25 mm e diametro del foro: 15mm), (iii) un moltiplicatore di marcia ad angolo retto con rapporto di trasmissione 2:1 e (iv) un volano che può essere composto da uno o due ingranaggi cilindrici (diametro di riferimento: 120 mm, massa: 2,15 kg, modulo: 2.0, angolo di pressione: 20°, larghezza del dente: 25 mm e diametro del foro: 15 mm). La traslazione della cremagliera, montata su una guida lineare con  $\pm 55$  mm di corsa massima, provoca la rotazione del pignone montato sull'albero di ingresso del moltiplicatore di marcia, mentre il

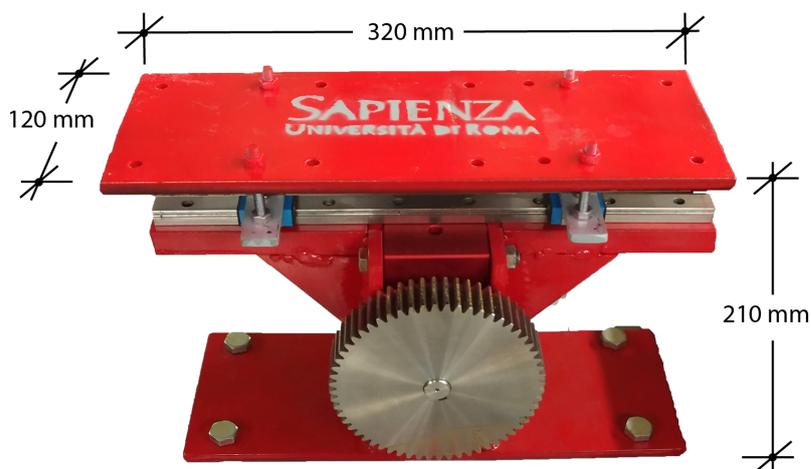


Figura 7.1. Foto del prototipo di Inerter a pignone e cremagliera.

volano è montato sull'albero di uscita del moltiplicatore di marcia e ruota con il doppio rispetto la velocità del pignone.

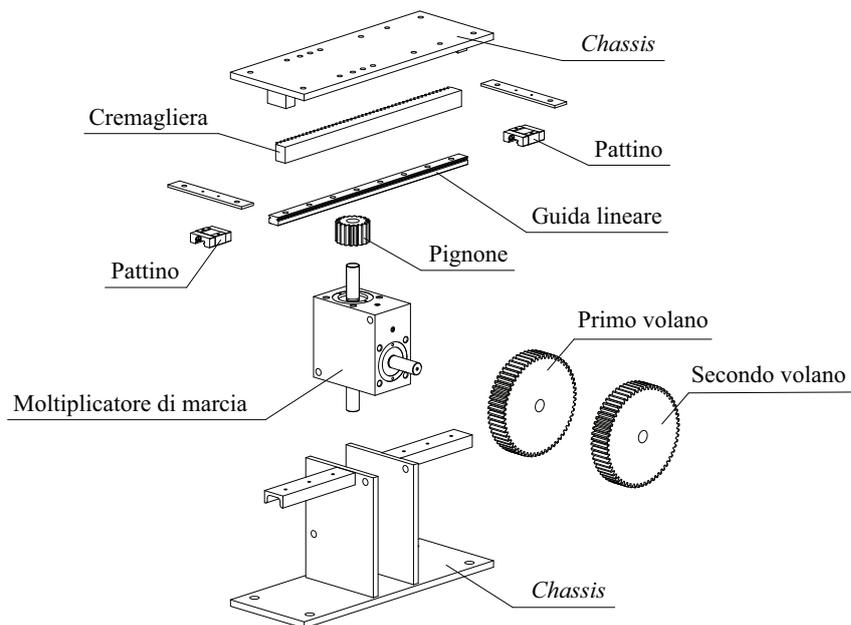


Figura 7.2. Esploso del prototipo di Inerter a pignone e cremagliera.

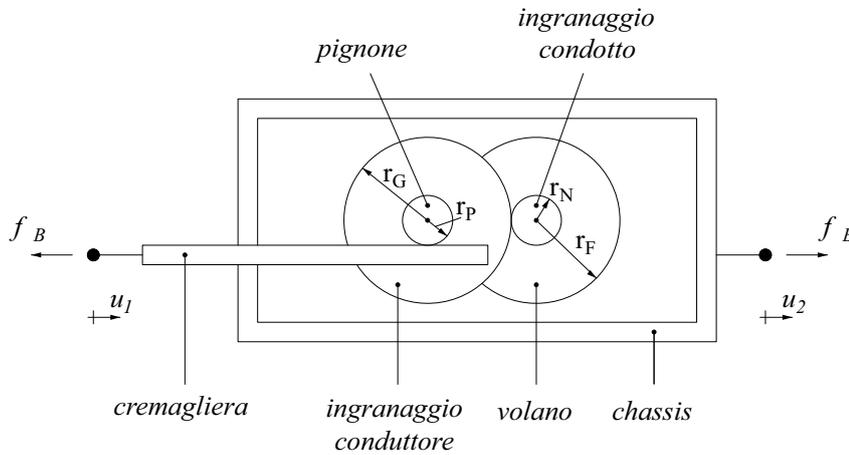
Il dispositivo è stato testato in tre diverse configurazioni: (i) Inerter senza volano (nel seguito no flywheel, NF), (ii) Inerter con volano composto da un solo ingranaggio cilindrico (nel seguito intermediate flywheel, IF) e (iii) Inerter con volano composto da entrambi gli ingranaggi cilindrici (nel seguito large flywheel, LF). Inoltre è stato testato anche il prototipo in assenza dell'Inerter al fine di valutare l'influenza della particolare realizzazione del dispositivo (nel seguito no Inerter, NI).

### Modello ideale di Inerter a pignone e cremagliera

L'inertanza nominale  $b_{nom}$  per un Inerter meccanico a pignone e cremagliera, schematizzato in Fig. 7.3, può essere ricavata, trascurando la massa della cremagliera e dello *chassis*, usando le equazioni fornite in [Madhamshetty e Manimala, 2018] come:

$$b_{nom} = \frac{\left(\frac{m_n r_n^2}{2} + m_f \rho^2\right) r_g^2}{r_p^2 r_n^2} + \frac{\left(m_p r_p^2 + m_g r_g^2\right)}{2r_p^2} \quad (7.1)$$

dove  $m_j$  e  $r_j$ , con  $j = p, g, n, f$ , sono rispettivamente le masse e i raggi del pignone della cremagliera (pedice  $p$ ), dell'ingranaggio conduttore (pedice  $g$ ) e dell'ingranaggio condotto (pedice  $n$ ) della moltiplica e del volano (pedice  $f$ ) e  $\rho$  è il raggio giratore del volano.



**Figura 7.3.** Schema dell'Inerter a pignone e cremagliera.

In Tabella 7.1 si riportano le caratteristiche geometriche e meccaniche dei componenti che costituiscono il dispositivo testato e in questo caso si può notare come le masse relative al pignone e agli ingranaggi risultano assolutamente trascurabili rispetto a quella del volano.

Componente	$m_j$ [kg]	$r_j$ [mm]	$\rho$ [mm]
Pignone (p)	0.15	18	-
Ingranaggio conduttore (g)	0.05	15	-
Ingranaggio condotto (n)	0.02	7.5	-
Volano (f)	$n \times 2.15$	60	42.4

**Tabella 7.1.** Caratteristiche geometriche e meccaniche dei componenti che costituiscono il prototipo di Inerter ( $n$  è il numero di ingranaggi utilizzati per realizzare il volano).

Sostituendo i valori riportati in Tab. 7.1 nell'Eq. 7.1 è possibile ricavare le  $b_{nom}$  per le quattro diverse configurazioni testate al variare del numero  $n$  di ingranaggi utilizzati per realizzare il volano. In particolare si ottengono le seguenti inertanze nominali:

- Configurazione NI ( $n = -$ ):  $b_{0,nom} = 0 \text{ kg}$
- Configurazione NF ( $n = 0$ ):  $b_{1,nom} = 0.1 \text{ kg}$
- Configurazione IF ( $n = 1$ ):  $b_{2,nom} = 47.9 \text{ kg}$
- Configurazione LF ( $n = 2$ ):  $b_{3,nom} = 95.6 \text{ kg}$

Si sottolinea che i precedenti valori di ineranza ricavati fanno riferimento al caso di un Inerter ideale nel quale vengono trascurati gli effetti legati alla presenza di eventuali componenti dissipative, di attriti, di giochi tra i vari componenti meccanici, ecc... Questi effetti verranno indagati nei successivi paragrafi.

### 7.2.2 Setup sperimentale

I test sono stati condotti su una tavola vibrante ad un grado di libertà nel Laboratorio Materiali e Strutture del Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica della Sapienza, Università degli studi di Roma. La tavola vibrante, di dimensioni  $1.5 \text{ m} \times 1.5 \text{ m}$ , prodotta dalla Moog Inc. e controllata attraverso il software Moog Replication, ha le seguenti caratteristiche: massima frequenza di operatività  $20 \text{ Hz}$ ; accelerazione massima  $> \pm 1 \text{ g}$ , dove  $g$  è l'accelerazione di gravità; velocità massima  $> \pm 1 \text{ m/s}$ ; spostamento massimo  $\pm 0.2 \text{ m}$ ; massima massa  $2 \text{ t}$ .

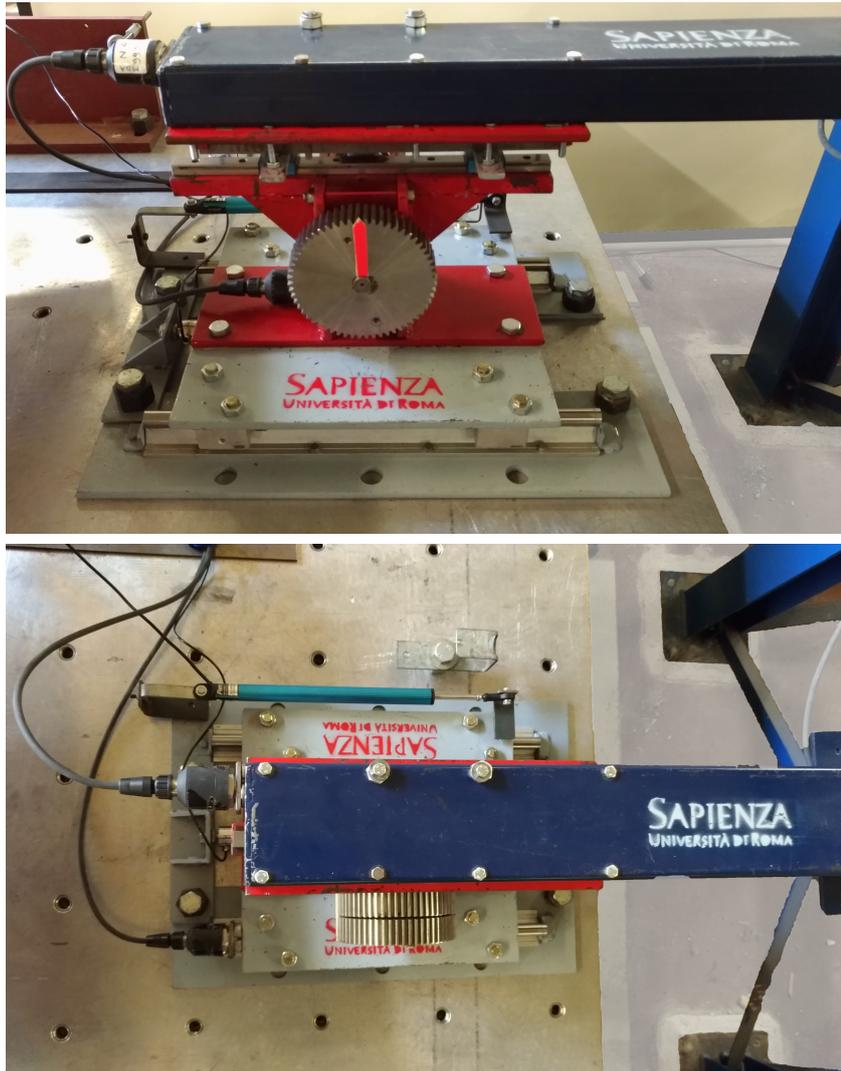
Un terminale del prototipo (ovvero lo *chassis*), come mostrato nelle Figg. 7.4, 7.5 e 7.6, è stato collegato alla tavola vibrante mediante una slitta al fine di poter ricavare la forza generata dall'Inerter, mentre il secondo terminale (ovvero la cremagliera) è stato collegato ad un contrasto esterno la tavola.

Il modello è stato equipaggiato con i seguenti sensori di misura:

- n. 3 accelerometri piezoelettrici ICP®, modello 393A03 e prodotti dalla PCB Piezotronic e così ripartiti: uno sulla tavola vibrante ( $a_0$ ) e due rispettivamente sui due terminali del prototipo (lo *chassis*,  $a_B$ , e la cremagliera,  $a_T$ );
- n.2 trasduttori di spostamento lineari, modello SLS 190 e prodotti dalla Penny e Giles, al fine di misurare gli spostamenti relativi tra la massa della tavola vibrante e il suolo ( $u_0$ ) e tra la slitta e la massa della tavola vibrante ( $u_B$ );
- n.1 cella di carico, modello U9B e prodotta dalla HBM, al fine di misurare la reazione trasmessa dal prototipo alla tavola vibrante ( $f_R$ ).

I dati sperimentali sono stati acquisiti, con una frequenza di campionamento pari a  $500 \text{ Hz}$ , attraverso n. 2 sistemi di acquisizione dati (Data acquisition system, DAQ), modello Krypton 3xSTG prodotti dalla DEWESoft, e gestiti dal software DEWESoft.

La forza generata dall'Inerter  $f_B$  è stata calcolata come differenza tra la reazione  $f_R$  e la forza d'inerzia legata alla massa del prototipo + slitta  $m_i$ , con  $i = 0 - 3$ , e all'accelerazione della slitta  $a_B$ . In particolare, la massa del prototipo + slitta nelle quattro configurazioni assume i seguenti valori  $m_0 = 16.7 \text{ kg}$ ,  $m_1 = 16.7 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 18.8 \text{ kg}$  e  $m_3 = 20.9 \text{ kg}$ . Inoltre, con  $u_T = u_0 + u_B$  e con  $\ddot{u}_T = a_B - a_T$  verranno indicati rispettivamente lo spostamento e l'accelerazione imposta tra i due



**Figura 7.4.** Foto del setup sperimentale e disposizione sensori di misura.

terminali del prototipo. Infine, la velocità  $\dot{u}_T$  tra i terminali dell’Inerter è stata calcolata per differenziazione nel tempo dello spostamento  $u_T$ .

Attraverso l’attuatore, le quattro diverse configurazioni del prototipo sono state soggette ad uno spostamento armonico imposto caratterizzato da una forma d’onda, un’ampiezza, una frequenza e un numero di cicli (pari a 50 per tutte le prove). In particolare le configurazioni di Inerter sono state soggette a

- n. 2 forme di onda (sinusoidale e triangolare),
- n. 3 ampiezze (10, 20 e 30 mm),
- n. 7 frequenze (0.5, 0.75, 1, 1.5, 2, 3 e 4 Hz).

La scelta di utilizzare una tavola vibrante come attuatore è stata legata alla particolare relazione tra ampiezze e frequenze dell’azione; infatti l’obiettivo di questa

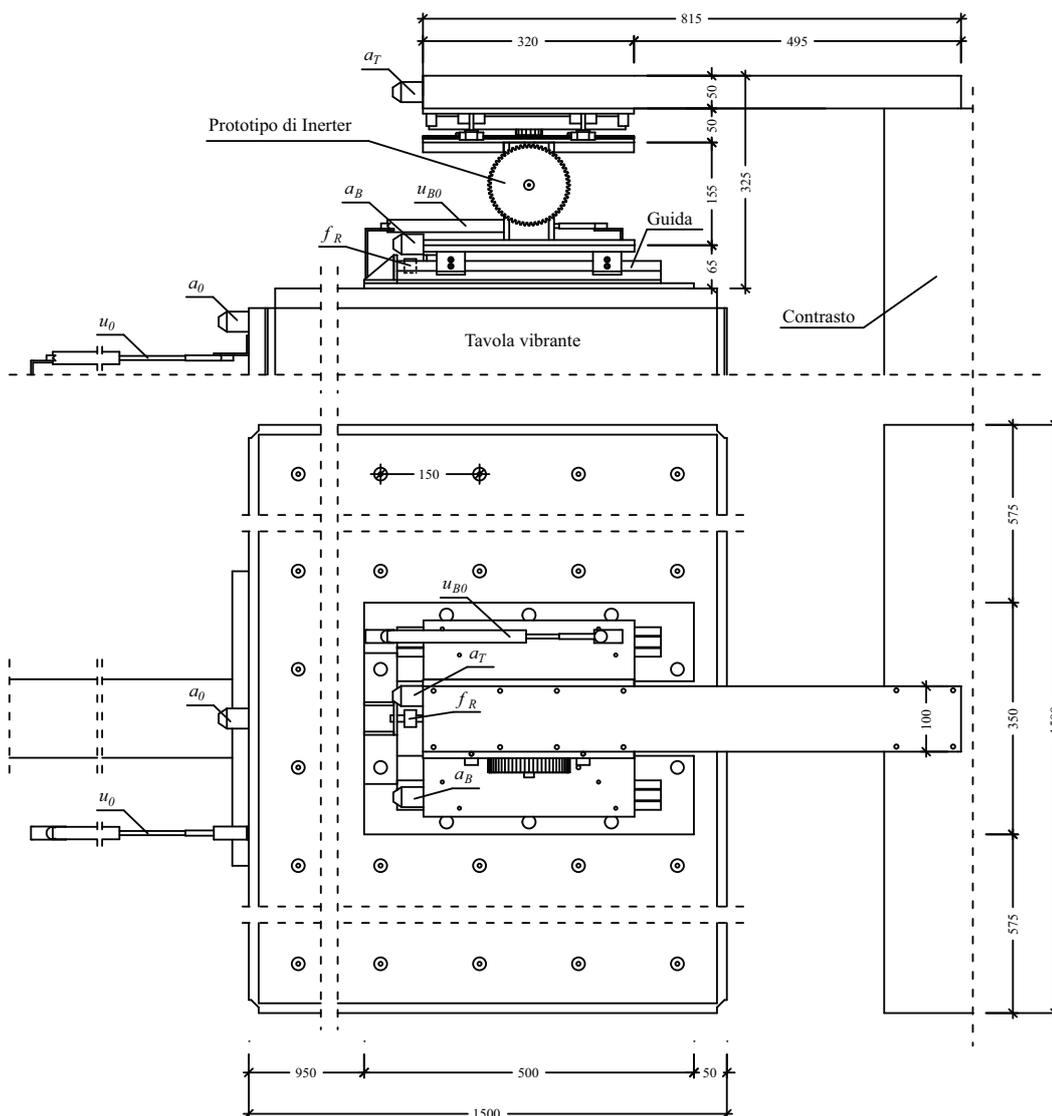


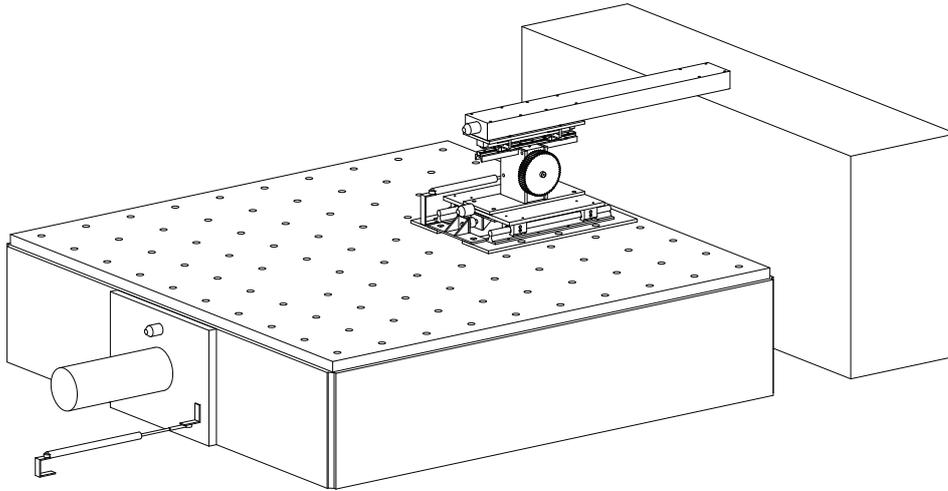
Figura 7.5. Schema del setup sperimentale e disposizione sensori di misura.

sperimentazione è legata alla caratterizzazione di un dispositivo Inerter meccanico in scala in un range di ampiezze e frequenze tipiche dell'Ingegneria Civile.

## 7.3 Analisi dei risultati

### 7.3.1 Analisi parametrica sperimentale

In questo sottoparagrafo si riportano i risultati relativi all'analisi parametrica sperimentale il cui obiettivo è quello di valutare da un punto di vista sperimentale l'influenza, sul comportamento del prototipo di Inerter, rispettivamente della frequenza e dell'ampiezza dell'azione, e dell'inertanza del dispositivo. Al fine di tenere in conto anche le componenti inerziali del dispositivo è stata scelta la forma d'onda sinusoidale e i parametri sono stati variati sperimentalmente rispetto al caso di ri-



**Figura 7.6.** Vista del setup sperimentale.

ferimento in cui il prototipo è testato nella configurazione IF,  $b_{2,nom} = 47.9 \text{ kg}$ , con una frequenza  $f = 1 \text{ Hz}$  e un'ampiezza  $A = 20 \text{ mm}$  dell'azione. Inoltre i risultati sperimentali sono stati confrontati con quelli del modello di Inerter ideale descritto in precedenza al fine di poter valutare quanto il comportamento sperimentale si discosta da quello ideale. In particolare nel caso ideale, la forza generata dal dispositivo nel caso di spostamento armonico imposto  $u_T(t) = A \sin(2\pi ft)$  risulta pari a:

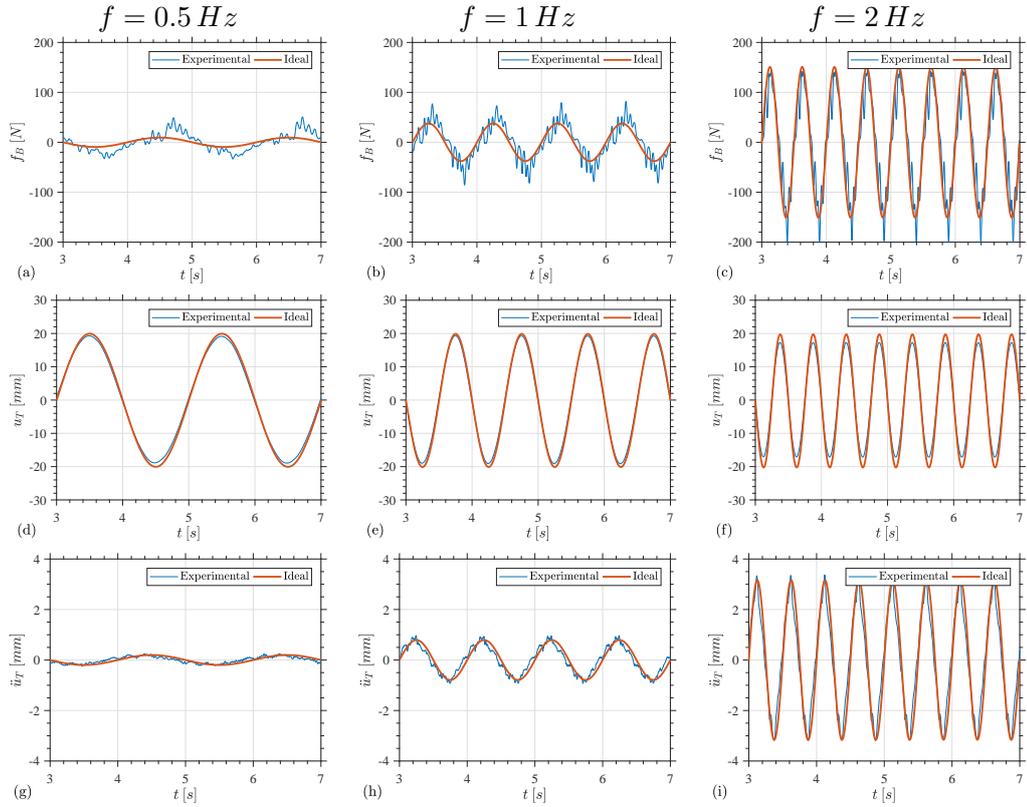
$$f_b(t) = -bA(2\pi f)^2 \sin(2\pi ft) \quad (7.2)$$

La forza dell'Inerter, quindi è direttamente proporzionale all'inertanza  $b$ , all'ampiezza  $A$  e al quadrato della frequenza  $f$ . Nel seguito, salvo diversa indicazione, i segnali sono stati filtrati prima con un filtro Butterworth passa alto del primo ordine con frequenza di taglio  $0.16 \text{ Hz}$  e poi con un filtro Butterworth passa basso del primo ordine con frequenza di taglio  $20 \text{ Hz}$ .

### Influenza della frequenza dell'azione

La Fig. 7.7 mostra l'influenza della frequenza  $f$  dell'azione sulla grandezza dinamica forza generata dal prototipo  $f_B$  (Figg. 7.7 (a-c)) e sulle grandezze cinematiche spostamento  $u_T$  (Figg. 7.7 (d-f)) e accelerazione  $\ddot{u}_T$  (Figg. 7.7 (g-i)). La colonna al centro si riferisce al caso di riferimento, mentre in quella di sinistra e di destra si riportano i casi in cui è stata variata la frequenza dell'azione, rispettivamente  $f = 0.5 \text{ Hz}$  e  $f = 2 \text{ Hz}$ . In ciascun grafico al risultato sperimentale (curva blu) è stato sovrapposto il risultato ottenuto nel caso di Inerter ideale (curva rossa) ottenuto secondo l'Eq. 7.2.

Per quanto riguarda la forza  $f_B$ , Figg. 7.7 (a-c), c'è un buon accordo tra i risultati sperimentali e quelli relativi all'Inerter ideale soprattutto per frequenze dell'azione  $f$  relativamente elevate ( $f = 2 \text{ Hz}$ ) dove anche l'ampiezza della forza è maggiore (come si è già visto in precedenza aumenta con il quadrato della frequenza). Per frequenze relativamente basse ( $f = 0.5 \text{ Hz}$ ), dove anche le forze sono



**Figura 7.7.** Forza  $f_B$  (a-c), spostamento  $u_T$  (d-f) e accelerazione  $\ddot{u}_T$  (g-h) al variare della frequenza  $f$  dell'azione ( $b_2 = 47.9 \text{ kg}$  e  $A = 20 \text{ mm}$ ).

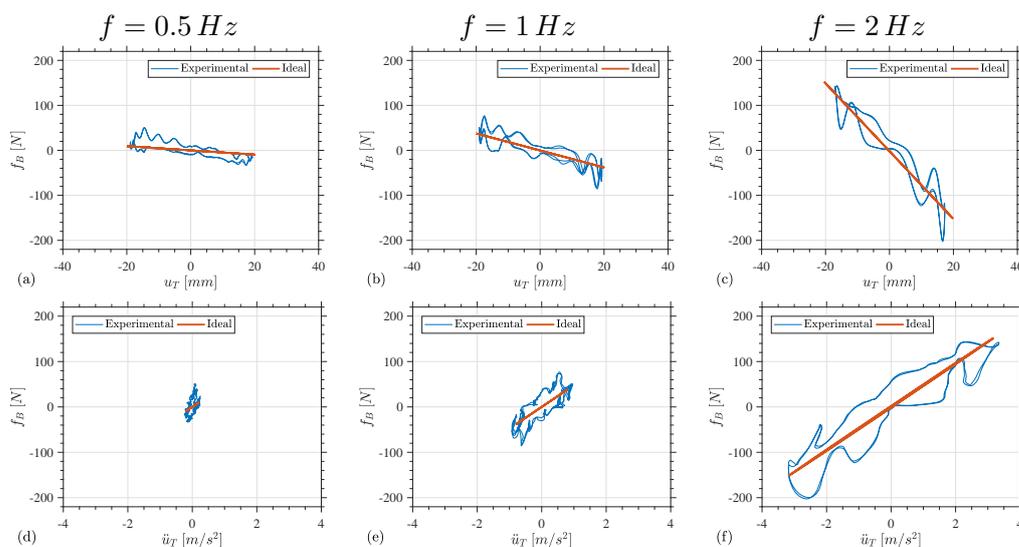
relativamente piccole, il modello ideale si discosta maggiormente rispetto a quello sperimentale. Infatti nel segnale si osservano ulteriori oscillazioni che come si vedrà in seguito sono legate a non linearità del dispositivo.

Per quanto riguarda lo spostamento  $u_T$ , Figg. 7.7 (d-f), si può notare come, nonostante le relativamente elevate ampiezze  $A = 20 \text{ mm}$ , la tavola vibrante è in grado di imporre un input al dispositivo da testare molto vicino a quello ideale, con maggiori differenze nel caso di frequenze relativamente elevate ( $f = 2 \text{ Hz}$ ) legate ai limiti dell'attuatore.

Le accelerazioni  $\ddot{u}_T$ , Figg. 7.7 (d-f), come noto aumentano con il quadrato della frequenza, ma a differenza degli spostamenti si discostano maggiormente rispetto al caso ideale. Questo è legato al fatto le accelerazioni misurate nei due terminali dell'Inerter risultano influenzate da fenomeni locali legati al prototipo testato (come gli urti legati a giochi interni al dispositivo).

La Fig. 7.8 mostra rispettivamente il legame costitutivo nel piano  $f_B - u_T$  (prima riga) e nel piano  $f_B - \ddot{u}_T$  (seconda) per gli analoghi casi riportati in Fig. 7.7.

Nel piano  $f_B - u_T$ , Figg. 7.8 (a-c), si osserva che il dispositivo Inerter è caratterizzato da una rigidezza negativa che aumenta all'aumentare della frequenza dell'azione. Inoltre si può notare come rispetto al caso ideale, il cui legame costitutivo è caratterizzato da una retta con pendenza pari a  $-b(2\pi f)^2$ , il dispositivo reale



**Figura 7.8.** Legame costitutivo nel piano  $f_B - u_T$  (a-c) e nel piano  $f_B - \ddot{u}_T$  (d-f) al variare della frequenza  $f$  dell'azione ( $b_2 = 47.9 \text{ kg}$  e  $A = 20 \text{ mm}$ ).

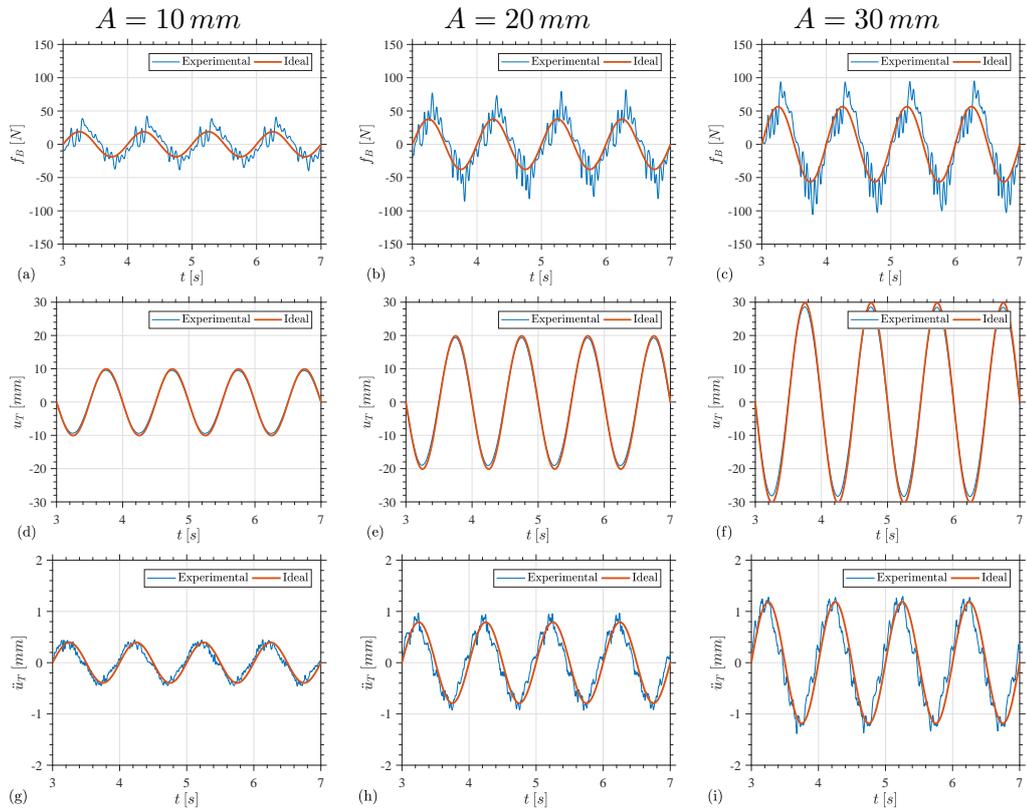
presenta anche una componente dissipativa.

La lettura del legame costituito nel piano  $f_B - \ddot{u}_T$ , Figg. 7.8 (d-f), risulta più complessa dal momento che, come visto dalle storie temporali, l'accelerazione  $\ddot{u}_T$  risulta influenzata da effetti locali legati dal dispositivo, che ne modificano il segnale. In ogni caso si può riconoscere un'inertanza  $b$  (corrispondente alla pendenza della retta) abbastanza costante al variare della frequenza, con maggiori differenze nel caso  $f = 0.5 \text{ Hz}$ , ovvero frequenze più basse. In questo caso infatti la forza  $f_B$  generata dal prototipo è modesta e quindi risulta maggiormente influenzata dagli effetti secondari legati alle non linearità del dispositivo testato.

### Influenza dell'ampiezza dell'azione

La Fig. 7.9, in analogia alla Fig. 7.7, mostra l'influenza dell'ampiezza  $A$  dell'azione sulla grandezza dinamica forza generata dal prototipo  $f_B$  (Figg. 7.9 (a-c)) e sulle grandezze cinematiche spostamento  $u_T$  (Figg. 7.9 (d-f)) e accelerazione  $\ddot{u}_T$  (Figg. 7.9 (g-i)). La colonna al centro si riferisce al caso di riferimento ( $A = 20 \text{ mm}$ ), mentre in quella di sinistra e di destra si riportano i casi in cui è stata variata l'ampiezza dell'azione, rispettivamente  $A = 10 \text{ mm}$  e  $A = 30 \text{ mm}$ .

Le Figg. 7.9 (a-c) mostrano come la forza generata dal prototipo aumenta all'aumentare dell'ampiezza dell'azione e il modello ideale (nel quale la  $f_B$  è direttamente proporzionale all'ampiezza  $A$ ) è in grado di descrivere la componente fondamentale della forza, ma trascura gli effetti secondari legati al comportamento reale dell'Inerter. Infatti dalle storie temporali della forza nel caso del prototipo di Inerter si possono osservare la presenza di ulteriori oscillazioni che ne allontanano in modo più o meno significativo il comportamento rispetto a quello ideale. Inoltre, questi effetti secondari a parità di prototipo e di frequenza dall'azione aumentano in maniera quasi proporzionale all'aumentare dell'ampiezza dell'azione.



**Figura 7.9.** Forza  $f_B$  (a-c), spostamento  $u_T$  (d-f) e accelerazione  $\ddot{u}_T$  (g-h) al variare dell'ampiezza  $A$  dell'azione ( $b_2 = 47.9\text{ kg}$  e  $f = 1\text{ Hz}$ ).

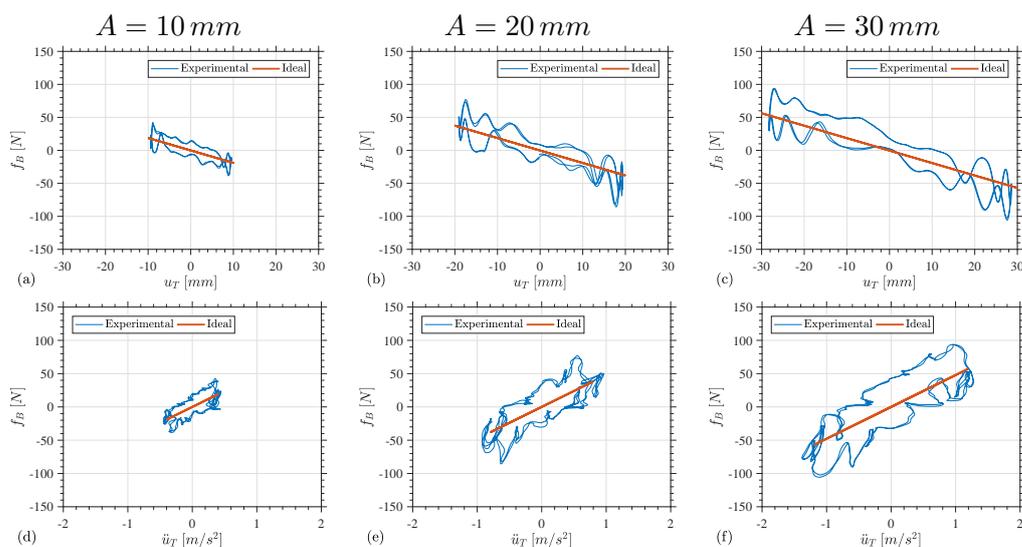
Nelle Figg. 7.9 (d-f), si può osservare come, a parità di frequenza  $f = 1\text{ Hz}$ , la tavola vibrante è in grado di imporre al prototipo da testare uno spostamento  $u_T$  molto vicino a quello ideale, a anche se a causa dei limiti dell'attuatore, le differenze aumentano all'aumentare dell'ampiezza dell'azione.

Le accelerazioni  $\ddot{u}_T$ , Figg. 7.9 (d-f), come noto aumentano linearmente con l'ampiezza, ma risultano influenzate da effetti secondari (es. urti legati ai giochi) caratterizzati da frequenza superiori a quelli dell'azione e generati dal prototipo testato che si manifestano maggiormente in termini di accelerazione tra i terminali dell'Inerter rispetto agli spostamenti.

La Fig. 7.10 mostra rispettivamente il legame costitutivo nel piano  $f_B - u_T$  (prima riga) e nel piano  $f_B - \ddot{u}_T$  (seconda) per gli analoghi casi riportati in Fig. 7.9.

Un'interessante lettura delle precedenti grandezze dinamiche e cinematiche può essere fatta nel piano  $f_B - u_T$ , Figg. 7.10 (a-c), che definisce il legame costitutive del prototipo testato. Come in precedenza, si osserva la rigidezza negativa del dispositivo, che non varia con l'ampiezza dell'azione. Rispetto al caso ideale, dove il cui legame costitutivo è rappresentato da una retta nel II e IV quadrante del piano, il prototipo testato è caratterizzato anche una componente dissipativa che aumenta all'aumentare dell'ampiezza.

Una lettura duale del legame costituito può essere fatta anche nel piano  $f_B - \ddot{u}_T$ ,



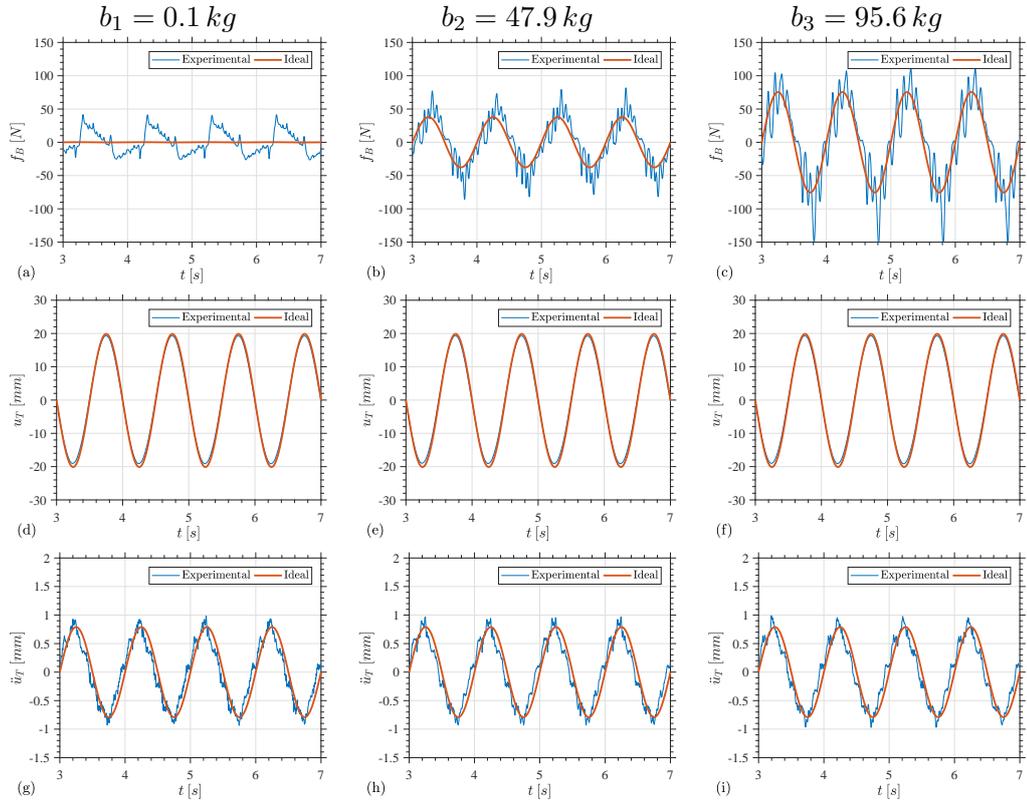
**Figura 7.10.** Legame costitutivo nel piano  $f_B - u_T$  (a-c) e nel piano  $f_B - \ddot{u}_T$  (d-f) al variare dell'ampiezza  $A$  dell'azione ( $b_2 = 47.9 \text{ kg}$  e  $f = 1 \text{ Hz}$ ).

Fig. 7.10 (d-f), ma questa risulta maggiormente complessa per gli stessi motivi discussi per le Figg. 7.8 (d-f). In ogni caso il legame costitutivo è nel I e III quadrante del piano e si può identificare un'inertanza  $b$  abbastanza costante al variare dell'ampiezza dell'azione. Le maggiori differenze si hanno nel caso  $A = 10 \text{ mm}$  dove la forza  $f_B$  generata dal prototipo è inferiore rispetto agli altri casi e quindi risulta maggiormente influenzata dagli effetti secondari legati per esempio alle non linearità del dispositivo testato.

### Influenza dell'inertanza del prototipo

La Fig. 7.11, in analogia alle precedenti Figg. 7.7 e 7.9, mostra l'influenza dell'inertanza del prototipo sulla grandezza dinamica forza  $f_B$  (Figg. 7.11 (a-c)) e sulle grandezze cinematiche spostamento  $u_T$  (Figg. 7.11 (d-f)) e accelerazione  $\ddot{u}_T$  (Figg. 7.11 (g-i)). La colonna centrale si riferisce al prototipo di riferimento con singolo volano,  $b_2 = 47.9 \text{ kg}$ , mentre in quella di sinistra e di destra si riportano i casi in cui è stata variata l'inertanza agendo sul volano, rispettivamente in assenza di volano,  $b_1 = 0.1 \text{ kg}$ , e con doppio volano,  $b_3 = 95.6 \text{ kg}$ .

Nelle configurazioni IF e LF ( $b_2$  e  $b_3$ ), si può osservare come per la forza  $f_B$ , Figg. 7.11 (b-c), c'è un buon accordo tra i risultati sperimentali e quelli relativi al modello ideale di Inerter. La forza generata dall'Inerter è direttamente proporzionale all'inertanza e dai risultati sperimentali si osserva come le non linearità non vengono amplificate all'aumentare della  $b$  del dispositivo; infatti il modello ideale è in grado di descrivere la portante del segnale sperimentale, ma trascura i contributi legati agli effetti secondari. Discorso diverso per il caso in assenza di volano (configurazione  $b_1 = 0.1 \text{ kg}$ ), dove la forza  $f_B$  legata all'inertanza è circa nulla, Fig. 7.11 (a), e i contributi legati alle non linearità (come attriti, giochi, ecc...) risultano essere preponderanti.



**Figura 7.11.** Forza  $f_B$  (a-c), spostamento  $u_T$  (d-f) e accelerazione  $\ddot{u}_T$  (g-h) al variare dell'inertanza del prototipo ( $f = 1 \text{ Hz}$  e  $A = 20 \text{ mm}$ ).

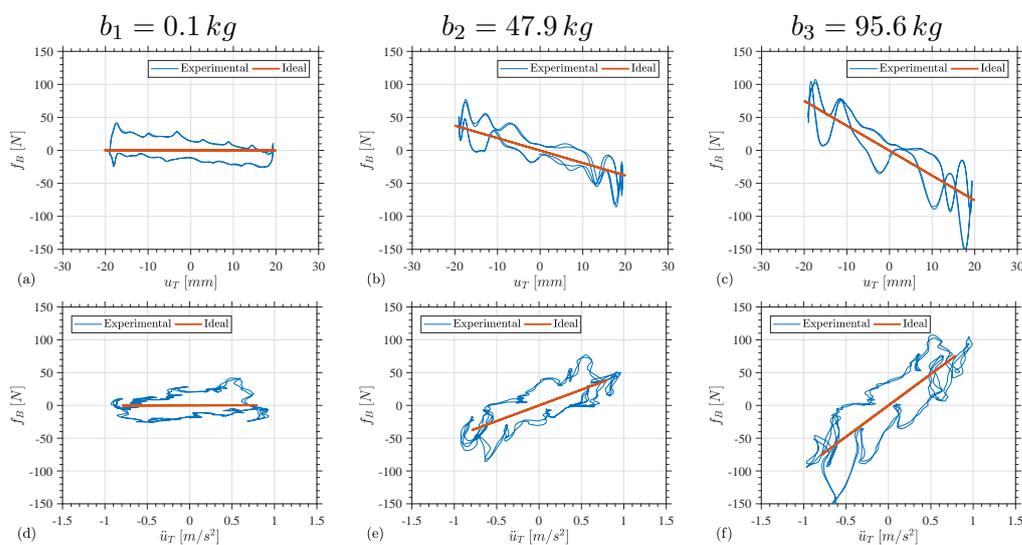
A parità di azione, si può osservare che anche all'aumentare dell'inertanza del prototipo, l'attuatore tavola vibrante è in grado di riprodurre nello stesso modo il segnale ideale in termini di spostamento  $u_T$ , Figg. 7.11 (d-f).

Nelle Figg. 7.11 (d-f), si osserva come a parità di azione ( $f = 1 \text{ Hz}$  e  $A = 20 \text{ mm}$ ) e all'aumentare dell'inertanza del dispositivo, le accelerazioni  $\ddot{u}_T$  risultano influenzate essenzialmente nello stesso modo dai fenomeni locali legati al prototipo testato (come gli urti legati a giochi interni al dispositivo).

La Fig. 7.12 mostra rispettivamente il legame costitutivo nel piano  $f_B - u_T$  (prima riga) e nel piano  $f_B - \ddot{u}_T$  (seconda) per gli analoghi casi riportati in Fig. 7.11.

Nel piano  $f_B - u_T$ , Figg. 7.12 (a-c), si osserva come la rigidezza negativa aumenta proporzionalmente con l'inertanza del dispositivo a partire dalla configurazione NF ( $b_1 = 0.1 \text{ kg}$ ), Fig. 7.12 (a), dove la pendenza della retta ideale è quasi nulla. In quest'ultimo caso, rispetto alle altre due configurazioni testate, si osserva una significativa componente dissipativa.

Nel piano  $f_B - \ddot{u}_T$ , Figg. 7.12 (d-f), il legame costitutivo ruota in senso antiorario all'aumentare dell'inertanza del prototipo, le curve sono posizionate nel I e III quadrante e attraverso la stima della pendenza è possibile identificare l'inertanza del prototipo. Si può osservare come l'inertanza nominale  $b_{nom}$  definita in precedenza interpola bene i risultati sperimentali nei casi in cui l'influenza della componente



**Figura 7.12.** Legame costitutivo nel piano  $f_B - u_T$  (a-c) e nel piano  $f_B - \ddot{u}_T$  (d-f) al variare dell'inertanza del prototipo ( $f = 1$  Hz e  $A = 20$  mm).

inerziale è significativa (configurazioni  $b_2 = 47.9$  kg e  $b_3 = 95.6$  kg).

### Ammettenza del prototipo

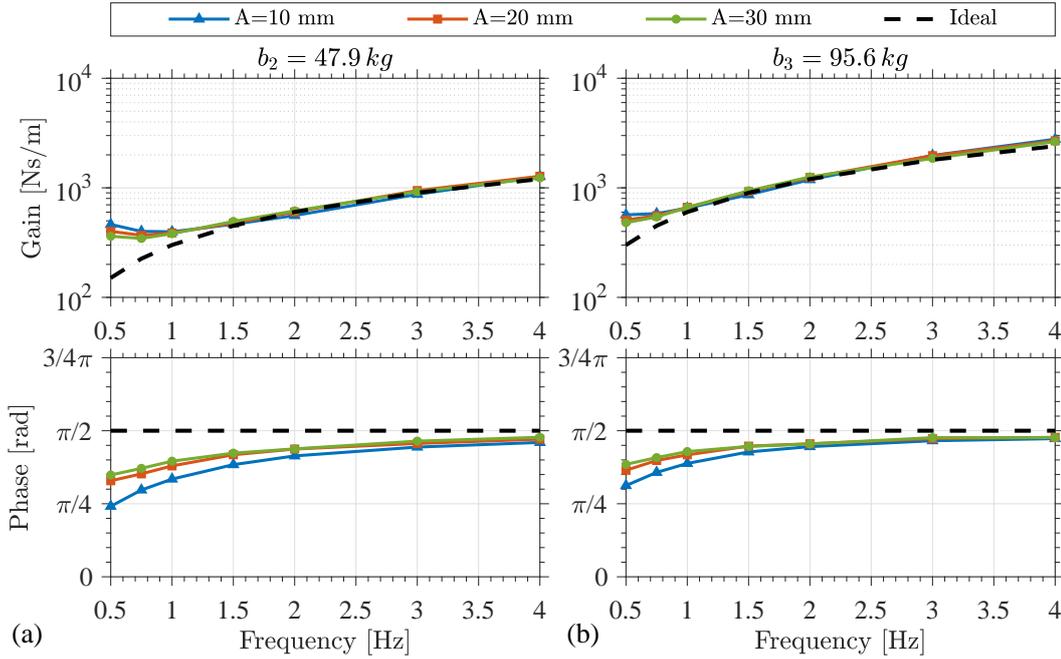
L'ammittenza del prototipo è la funzione di trasferimento tra la forza generata dall'Inerter e la velocità relativa tra i due terminali del dispositivo. L'ammittenza è stata calcolata sia in termini di guadagno che di sfasamento tra questi due segnali nel caso di azione di tipo sinusoidale. Le frequenze indagate risultano comprese nel range 0.5-4 Hz e con un numero maggiore di punti nelle frequenze relativamente basse.

In Fig. 7.13 si confrontano le curve di ammettanza ideali e quelle ottenute sperimentalmente per il prototipo di Inerter testato nella configurazione  $b_2 = 47.9$  kg, Fig. 7.13 (a), e  $b_3 = 95.6$  kg, Fig. 7.13 (b) e per tre diverse ampiezze dell'azione ( $A = 10, 20, 30$  mm).

La Fig. 7.13 mostra come il prototipo testato in entrambe le configurazioni tende al modello ideale all'aumentare dell'ampiezza  $A$ , ma soprattutto all'aumentare della frequenza  $f$  dell'azione. Inoltre, si può notare come l'ampiezza dell'azione influisce maggiormente sulle ammettenze quando la frequenza dell'azione risulta relativamente piccola per poi risultare quasi trascurabile per frequenze più elevate.

In termini di guadagno, le ammettenze sperimentali risultano sovrapposte rispetto a quelle ideali per frequenze relativamente elevate, mentre, in termini di fase, le funzioni sperimentali nel range di frequenza indagato risultano sempre inferiori rispetto a quelle ideali.

Risulta interessante notare come all'aumentare dell'inertanza del prototipo il comportamento sperimentale si avvicina maggiormente a quello ideale per frequenze relativamente più basse. Infatti, in termini di guadagno si osserva come le curve sperimentali risultano circa sovrapposte a quella ideale per  $f \geq 1.5$  Hz nella configurazione  $b_2 = 47.9$  kg e per  $f \geq 1$  Hz nella configurazione  $b_3 = 95.6$  kg; inoltre, anche



**Figura 7.13.** Confronto tra la curva di ammettenza ideale e quella sperimentale del prototipo testato nelle configurazioni (a)  $b_2 = 47.9 \text{ kg}$  e (b)  $b_3 = 95.6 \text{ kg}$  e per diverse ampiezze dell'azione ( $A = 10, 20, 30 \text{ mm}$ ).

in termini di fase le ammettenze nella configurazione  $b_3$  risultano maggiormente vicine al caso ideale rispetto alla configurazione  $b_2$ .

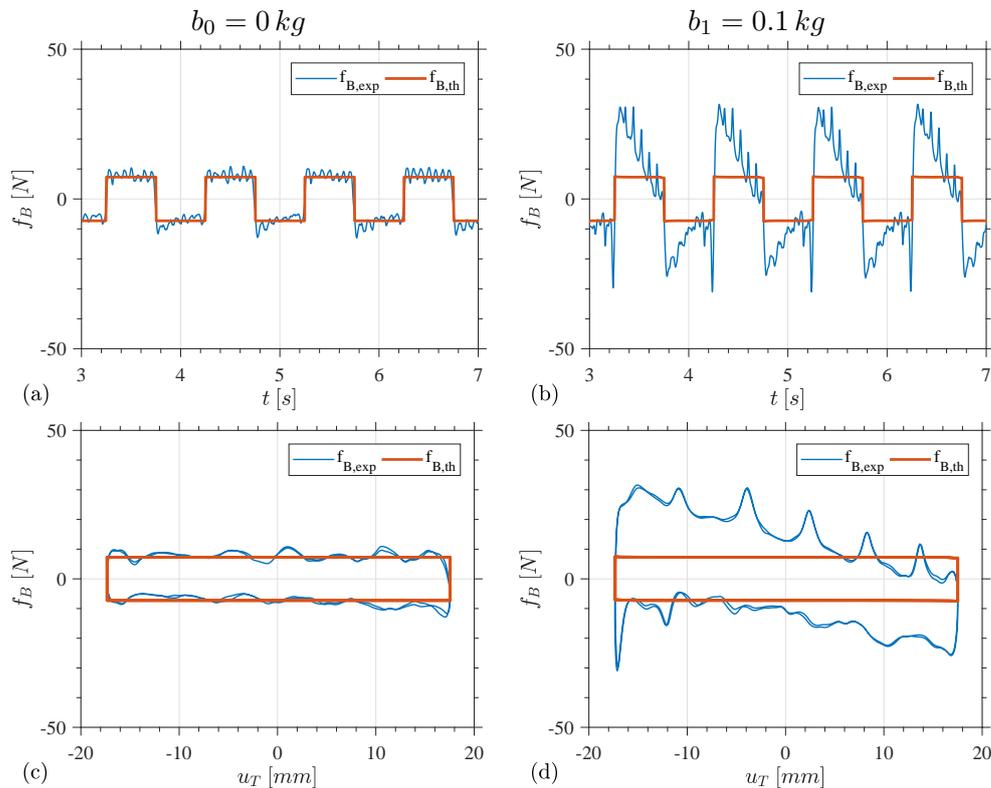
Questo risultato mostra come le non linearità manifestate del prototipo (attriti, giochi, ecc...) tendono a risultare meno importanti all'aumentare dell'inertanza del dispositivo anche per frequenze dell'azione relativamente basse.

### 7.3.2 Definizione degli effetti non lineari nel prototipo

Al fine di evidenziare maggiormente le componenti dissipative separatamente da quelle elastiche e inerziali, uno dei due terminali dell'Inerter è stato sottoposto ad uno spostamento armonico con onda triangolare, ovvero applicando velocità costanti durante ciascuna direzione del movimento. Tranne che per la fase di transizione durante la quale si ha il cambio di direzione del moto, la forza è composta prevalentemente dagli effetti legati alle componenti dissipate.

La Fig. 7.14 riporta in blu le storie temporali della forza misurata  $f_B$  e il relativo legame costitutivo  $f_B - u_T$  nel caso di azione armonica con onda triangolare (frequenza  $f = 1 \text{ Hz}$  e ampiezza  $A = 20 \text{ mm}$ ) per le configurazioni  $b_0 = 0 \text{ kg}$  e  $b_1 = 0.1 \text{ kg}$ .

Le Fig. 7.14 (a,c) si riferiscono al caso in cui l'Inerter non è presente (Configurazione  $b_0$ ) al fine di valutare le componenti dissipative legate alla particolare realizzazione del prototipo e al setup di prova. Si può osservare come l'andamento della forza misurata  $f_B$  è tipico di un comportamento attritivo del tipo  $f_F = f_y \text{sign}(\dot{u}_T)$  con  $f_y$  identificata (riportata in rosso) e pari a  $7.3 \text{ N}$ . La forza di attrito  $f_F$  è stata



**Figura 7.14.** Confronto teorico sperimentale tra la forza  $f_B$  versus il tempo  $t$  e lo spostamento  $u_T$  per le configurazioni (a,c)  $b_0 = 0$  kg e (b,d)  $b_1 = 0.1$  kg soggette ad uno spostamento imposto di tipo armonico con onda triangolare ( $f = 1$  Hz e  $A = 20$  mm).

associata alla guida su cui si muove la cremagliera e per tale ragione è presente in tutte le prove e le configurazioni testate.

Nelle Figg. 7.14 (b,d) in rosso si riporta la forza  $f_B$  ideale associata sia all’Inerter che alla forza di attrito della guida della cremagliera  $f_F$ . Si osserva come in questo caso la forza ideale associata all’Inerter è trascurabile (l’inertanza è circa nulla,  $b_{1,nom} = 0.1$  kg), mentre la forza di attrito risulta non trascurabile rispetto al valore della forza misurata. Si osservano inoltre come la presenza del dispositivo Inerter introduce ulteriori contributi legati alle non linearità del prototipo che possono essere associati ad attriti, giochi, forze di ingranamento, ecc...

## 7.4 Definizione di un modello numerico

In questo paragrafo si cerca di definire un modello numerico interpretativo dei risultati sperimentali in precedenza illustrati e predittivo per tutti quei casi non testati dal punto di vista sperimentale.

### 7.4.1 Modello dell’Inerter con gioco e componente dissipativa

Il modello proposto è quello riportato in Fig. 7.15 che, oltre alla forza d’attrito  $f_F$  in precedenza descritta, combina un modello di Inerter a pignone e cremagliera con

un gioco (*backlash*) e una componente dissipativa di tipo viscoso (caratterizzata da un coefficiente di smorzamento  $c_B$  [Nms/rad]). Il gioco è stato modellato attraverso un albero privo di inerzia nel quale è inserito un gioco di  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  [rad], una molla rotazionale di rigidezza  $k_S$  [Nm/rad] e uno smorzatore viscoso  $c_S$  [Nms/rad].

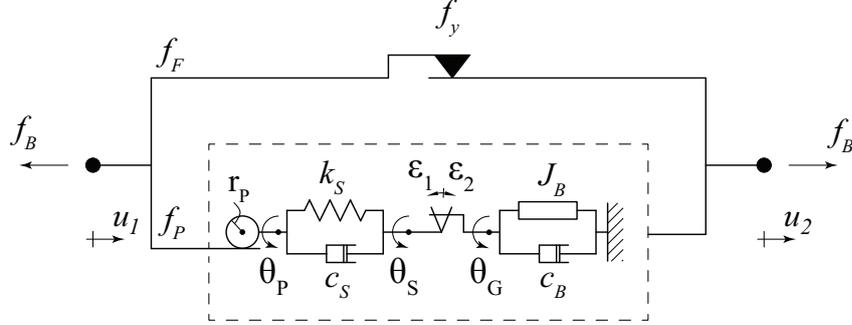


Figura 7.15. Modello numerico dell'Inerter.

Il gioco è stato introdotto nell'albero che collega il pignone all'ingranaggio conduttore (vedere Fig. 7.3) e quindi seguono le seguenti relazioni. Definendo con  $u_T = u_2 - u_1$ ,  $\dot{u}_T$  e  $\ddot{u}_T$  rispettivamente lo spostamento, la velocità e l'accelerazione relativa tra i due terminali dell'Inerter, per il pignone di raggio  $r_P$  condotto dalla cremagliera si ha che la velocità angolare del pignone è pari a  $\dot{\theta}_P = \dot{u}_T/r_P$  e la forza  $f_P = T_P/r_P$ , con  $T_P$  il momento torcente agente sul pignone che risulta pari a:

$$T_P = T_{ES} + T_{DS} = \omega_S^2 J_B (\theta_S - \theta_P) + 2\xi_S J_B \omega_S (\dot{\theta}_S - \dot{\theta}_P) \quad (7.3)$$

dove  $\dot{\theta}_S$  e  $\dot{\theta}_P$  sono rispettivamente le velocità angolari corrispondenti alle rotazioni  $\theta_S$  e  $\theta_P$ . Inoltre  $\omega_S = \sqrt{k_S/J_B}$  e  $\xi_S = c_S/(2J_B\omega_S)$  sono rispettivamente la pulsazione e il fattore di smorzamento del sistema dinamico che si realizza nella fase di ingranamento. Per l'ultima parte del moltiplicatore di marcia e del volano si può ricavare che il momento torcente agente sull'ingranaggio conduttore risulta pari a:

$$T_G = T_{BB} + T_{DB} = J_B \ddot{\theta}_G + 2\xi_B J_B \omega_S \dot{\theta}_G \quad (7.4)$$

dove  $J_B = m_f \rho^2 (r_G/r_N)^2$  è la massa inerziale,  $\dot{\theta}_G$  e  $\ddot{\theta}_G$  sono rispettivamente la velocità e l'accelerazione angolare dell'ingranaggio conduttore e  $\xi_B = c_B/(2J_B\omega_S)$  è il fattore di smorzamento associato allo smorzatore viscoso caratterizzato dal coefficiente di smorzamento  $c_B$ . In sintesi per il sistema raffigurato in Fig. 7.15 si ha che la forza generata dal modello di Inerter soggetto ad una deformazione imposta è pari a  $f_B = f_F + f_P$ , dove  $f_F = f_y \text{sign}(\dot{u}_T)$  è la forza d'attrito della guida della cremagliera e la forza  $f_P$  generata dall'Inerter, ovvero il momento torcente  $T_P$  è pari a:

$$\begin{cases} T_P = T_G \leq 0 & \text{se } \theta_G - \theta_S = -\varepsilon_1 \\ T_P = T_G = 0 & \text{se } -\varepsilon_1 < \theta_G - \theta_S < \varepsilon_2 \\ T_P = T_G \geq 0 & \text{se } \theta_G - \theta_S = \varepsilon_2 \end{cases} \quad (7.5)$$

### 7.4.2 Identificazione dei parametri del modello

L'obiettivo di questo sottoparagrafo è quello di identificare i parametri del modello del dispositivo Inerter con gioco e componente dissipativa in modo tale che risulti interpretativo dei risultati sperimentali.

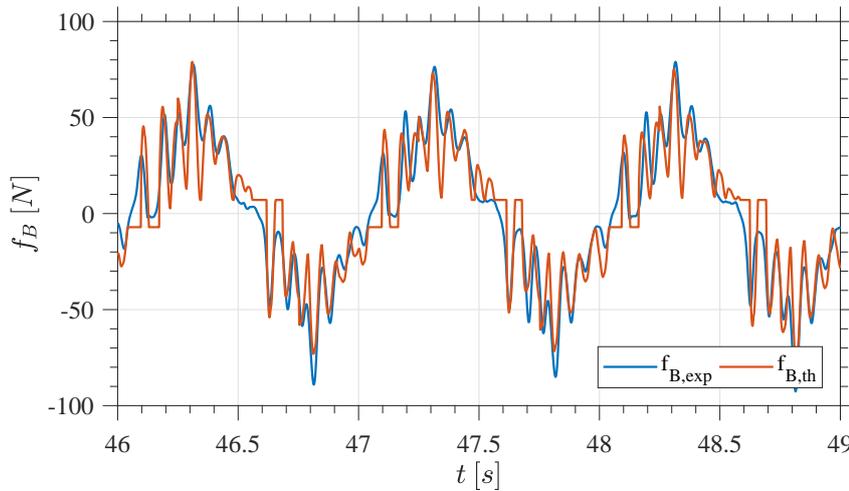
In questo caso per la configurazione  $b_2 = 47.9 \text{ kg}$ , sono stati assunti dei parametri noti che possono essere determinati con elevata accuratezza, ovvero il valore della forza di attrito  $f_y = 7.3 \text{ N}$  identificata nel Sottoparagrafo 7.3.2, il raggio del pignone  $r_P = 0.018 \text{ m}$  e la massa inerziale  $J_B = 1.55 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2$ .

I parametri che definiscono il modello del gioco, ovvero la pulsazione  $\omega_S$ , il fattore di smorzamento  $\xi_S$  e gli angoli di *backlash*  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , e il parametro che definisce la componente dissipativa, ovvero il fattore di smorzamento  $\xi_B$ , sono stati identificati sulla base delle misure sperimentali.

Un algoritmo di ottimizzazione ai minimi quadrati è stato utilizzato al fine ottenere la seguente minimizzazione:

$$\min_{\omega_S, \xi_S, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \xi_B} \| (f_{B,th}(f_y, r_P, J_B, \omega_S, \xi_S, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \xi_B) - f_{B,exp}) \|_2^2 \quad (7.6)$$

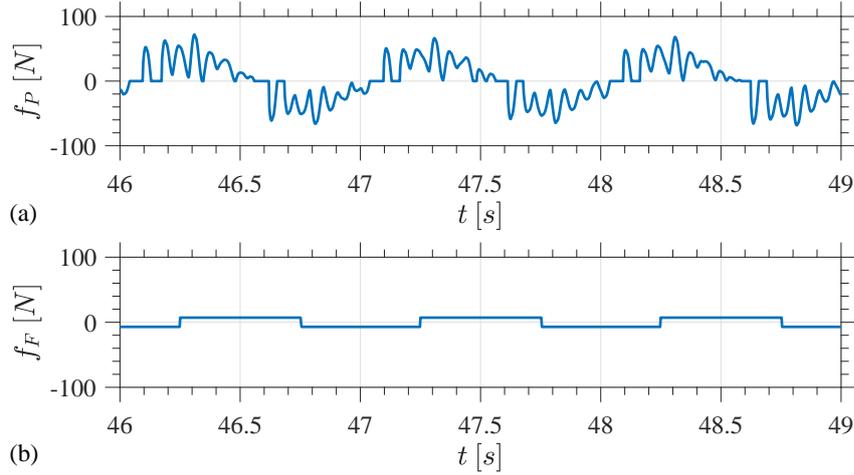
La forza misurata  $f_{B,exp}$  è riferita ad un test in cui i due terminali del prototipo di Inerter nella configurazione  $b_2$  sono stati soggetti a uno spostamento armonico sinusoidale imposto caratterizzato da una frequenza  $f = 1 \text{ Hz}$  e un'ampiezza  $A = 20 \text{ mm}$ . La forza teorica  $f_{B,th}$  è stata ricavata mediante la risoluzione del modello numerico definito nel precedente sottoparagrafo soggetto alla stessa azione armonica. Dalla procedura di ottimizzazione sono stati ricavati i seguenti parametri:  $\omega_S = 106.96 \text{ rad/s}$ ,  $\xi_S = 0.25$ ,  $\varepsilon_1 = 0.0084 \text{ rad}$  ( $0.48 \text{ deg}$ ),  $\varepsilon_2 = 0.0056 \text{ rad}$  ( $0.32 \text{ deg}$ ) e  $\xi_B = 0.01$ . Il gioco totale risulta pari a  $\varepsilon = 0.0140 \text{ rad}$  ( $0.8 \text{ deg}$ ) a cui corrisponde uno spostamento della cremagliera di  $0.251 \text{ mm}$ . Il confronto tra i risultati teorici e sperimentali in termini di forza sono mostrati in Fig. 7.16.



**Figura 7.16.** Confronto tra la forza sperimentale  $f_{B,exp}$  e quella teorica  $f_{B,th}$  trasmessa da prototipo di Inerter nel caso di uno spostamento armonico sinusoidale imposto ( $f = 1 \text{ Hz}$ ,  $A = 20 \text{ mm}$  e configurazione  $b_2 = 47.9 \text{ kg}$ ).

Si osserva come il modello dinamico proposto per interpretare i risultati sperimentali è in grado di cogliere con un buon grado di approssimazione le non linearità del prototipo che allontanano in modo più o meno significativo il comportamento sperimentale dell'Inerter da quello ideale.

La Fig. 7.17 mostra la storia temporale della forza legata all'Inerter  $f_P$  e di quella legata all'attrito della guida della cremagliera  $f_F$  che contribuiscono alla forza  $f_{B,th}$  di Fig. 7.16.



**Figura 7.17.** Storie temporali delle componenti alla forza  $f_{B,th}$  di Fig. 7.16: (a) forza dell'Inerter  $f_P$  e (b) forza d'attrito della guida della cremagliera  $f_F$  ( $f = 1\text{ Hz}$ ,  $A = 20\text{ mm}$  e configurazione  $b_2 = 47.9\text{ kg}$ ).

Si osserva come l'entità della forza di attrito  $f_F$ , Fig. 7.17 (b), risulta trascurabile nella fase di ingranamento degli ingranaggi ( $f_P \neq 0$ ), mentre è l'unico contributo alla forza totale  $f_B$  nella fase di non contatto tra gli ingranaggi legata alla presenza del gioco ( $f_P = 0$ ).

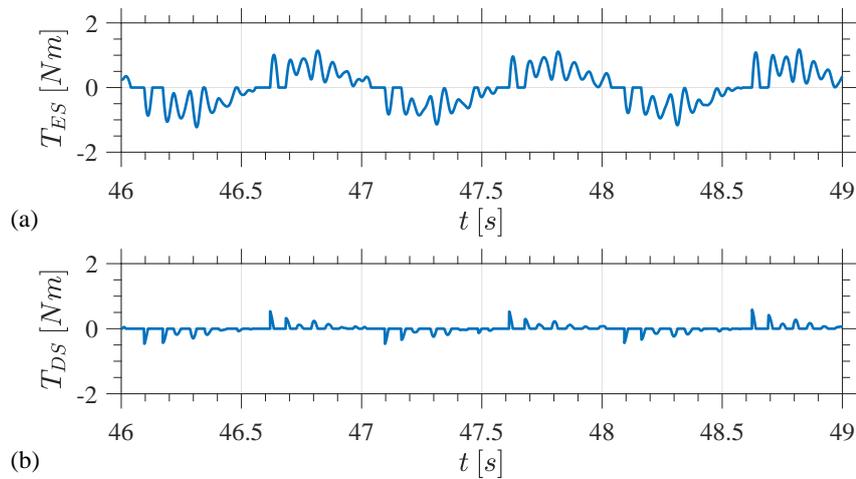
Relativamente alla forza  $f_{B,th}$  di Fig. 7.16, in Fig. 7.18 si riporta la storia temporale della corrispondente componente elastica  $T_{ES}$  e di quella viscosa  $T_{DS}$  che contribuiscono al momento torcente  $T_P$ , mentre in Fig. 7.19 si riporta la storia temporale della corrispondente componente inerziale elastica  $T_{BB}$  e di quella viscosa  $T_{DB}$  che contribuiscono al momento torcente  $T_G$ .

La Fig. 7.18 mostra come il principale contributo al momento torcente  $T_P$  è rappresentato dalla componente elastica  $T_{ES}$ , mentre la Fig. 7.19 mostra come il principale contributo al momento torcente  $T_G$  è rappresentato dalla componente inerziale  $T_{BB}$ . I contributi legati alle componenti viscosi  $T_{DS}$  e  $T_{DB}$ , infatti, risultano essere relativamente piccoli rispetto al momento torcente  $T_P = T_G$ .

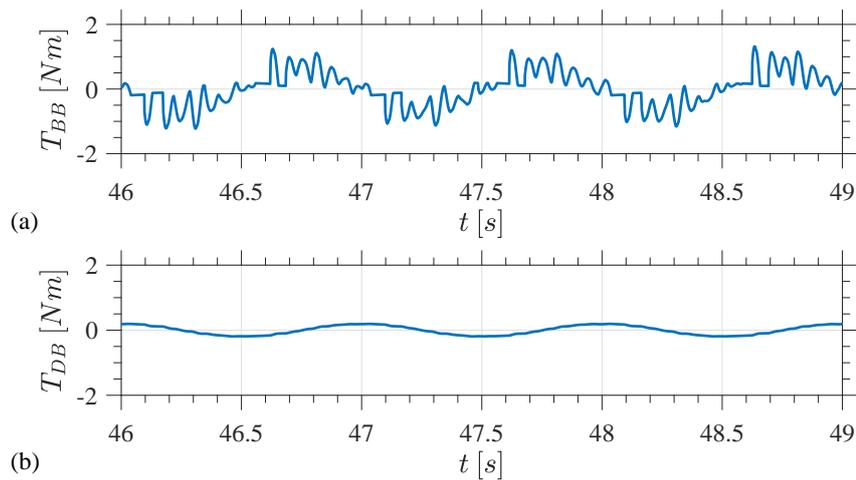
La Fig. 7.20 mostra la storia temporale del momento torcente  $T_P$  e il corrispondente angolo di *backlash*  $\theta_G - \theta_S$  corrispondente alla forza  $f_{B,th}$  di Fig. 7.16.

Attraverso la definizione del modello dinamico con gioco e componente dissipativa oltre a interpretare le evidenze sperimentali è stato possibile valutare il contributo di ciascuna componente alla forza totale  $f_B$  e studiare in che modo la presenza del *backlash* influenza la dinamica del sistema.

Risulta interessante osservare come nel caso in cui non c'è contatto tra gli ingranaggi  $-\varepsilon_1 < \theta_G - \theta_S < \varepsilon_2$  il momento torcente  $T_P$ , ovvero la forza  $f_P$  trasmessa



**Figura 7.18.** Storie temporali della componente (a) elastica  $T_{ES}$  e (b) viscosa  $T_{DS}$  del momento torcente  $T_P$  corrispondente alla forza  $f_{B,th}$  di Fig. 7.16 ( $f = 1 \text{ Hz}$ ,  $A = 20 \text{ mm}$  e configurazione  $b_2 = 47.9 \text{ kg}$ ).

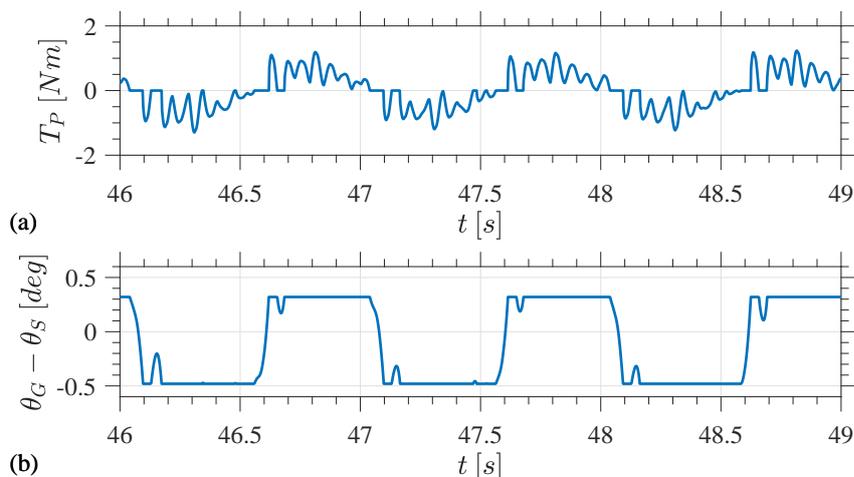


**Figura 7.19.** Storie temporali della componente (a) inerziale  $T_{BB}$  e (b) viscosa  $T_{DB}$  del momento torcente  $T_G$  corrispondente alla forza  $f_{B,th}$  di Fig. 7.16 ( $f = 1 \text{ Hz}$ ,  $A = 20 \text{ mm}$  e configurazione  $b_2 = 47.9 \text{ kg}$ ).

dall'Inerter, è nulla, mentre nella fase di ingranamento  $T_P \neq 0$  il sistema oscilla con una pulsazione naturale pari a  $\omega_S$ .

## 7.5 Conclusioni

In questo capitolo è stato affrontato il tema relativo alla caratterizzazione di un prototipo in scala di Inerter a pignone e cremagliera testato a spostamento armonico imposto mediante una tavola vibrante come attuatore. In particolare, l'attenzione è stata risolta a range di ampiezze e frequenze tipiche dell'Ingegneria Civile per i quali evidenze sperimentali risultano limitate. Un primo obiettivo è stato quello



**Figura 7.20.** Storie temporali (a) del momento torcente  $T_P$  e (b) dell'angolo di *backlash*  $\theta_G - \theta_S$  corrispondente alla forza  $f_{B,th}$  di Fig. 7.16 ( $f = 1 \text{ Hz}$ ,  $A = 20 \text{ mm}$  e configurazione  $b_2 = 47.9 \text{ kg}$ ).

di valutare in che modo il comportamento reale del prototipo si discosta rispetto a quello ideale.

L'influenza della frequenza e dell'ampiezza della azione, e dell'inertanza del prototipo sono state valutate da un punto di vista sperimentale sia in termini di forza che in termini di spostamento e accelerazione tra i terminali dell'Inerter.

Nel caso di azione armonica sinusoidale si è osservato che il comportamento sperimentale del dispositivo non si discosta in modo significativo rispetto a quello ideale, infatti quest'ultimo riesce a cogliere il comportamento fondamentale del prototipo trascurando una serie di componenti che a seconda dei casi possono risultare più o meno significative. Si è visto che le maggiori differenze tra il modello ideale e le evidenze sperimentali sono maggiori quando la forza nell'Inerter è piccola e quindi le non linearità diventano significative.

Nel caso di Inerter ideale soggetto ad uno spostamento armonico tra i due terminali, la forza nel dispositivo è direttamente proporzionale all'inertanza, all'ampiezza dello spostamento imposto e al quadrato della frequenza dell'azione. Per tale ragione le non linearità nel prototipo di Inerter risultano non trascurabili quando l'inertanza, e l'ampiezza e soprattutto la frequenza sono relativamente piccole.

Inoltre si è visto che a differenza degli spostamenti, le accelerazioni misurate nei terminali del prototipo di Inerter risultano influenzate dal comportamento del dispositivo ed in particolare dagli urti causati dagli inevitabili giochi tra i vari componenti meccanici che costituiscono il dispositivo.

Dallo studio delle funzioni di ammettenza è emerso come il comportamento del prototipo Inerter tende a quello ideale all'aumentare dell'ampiezza dell'azione, ma soprattutto all'aumentare della frequenza della stessa. Inoltre si è visto come all'aumentare dell'inertanza del dispositivo il comportamento sperimentale tende maggiormente a quello ideale anche per frequenze dell'azione relativamente basse.

Attraverso test a spostamento armonico imposto ad onda triangolare è stato possibile mettere in evidenza le componenti attrittive e viscosse presenti nel dispositivo rispetto a quelle elastiche e inerziali. Infatti si è osservato come la presenza

di una componente attritiva legata alla guida della cremagliera e di una ulteriore componente dissipativa all'interno del prototipo.

Infine un modello numerico non lineare è stato definito in modo da poter interpretare in modo più approfondito i risultati sperimentali e predittivo per le ulteriori analisi condotte anche in relazione della successiva sperimentazione descritta nel successivo capitolo. Il modello è stato formulato in modo da tenere in conto gli effetti legati ai giochi tra i diversi ingranaggi che costituiscono il prototipo e le diverse componenti dissipative presenti. Infine una procedura di ottimizzazione è stata definita al fine di identificare i parametri incogniti del modello e di avvicinarne i risultati a quelli ottenuti sperimentalmente.

I risultati relativi al modello dinamico numerico con gioco e componente dissipativa hanno evidenziato come il principale contributo alla forza generata dal prototipo risulta essere quella legata alla componente inerziale ed elastica, mentre i contributi delle componenti viscosi risultano essere molto piccoli. Inoltre si è visto come nella fase di ingranaggio tra gli ingranaggi il sistema oscilla con la frequenza del sistema dinamico formato dalla componente elastica e inerziale che costituiscono il sistema.

In conclusione a seguito dei risultati mostrati in questo capitolo si ritiene che nel caso di applicazioni tipiche dell'ingegneria civile il comportamento dell'Inerter non si discosta in maniera significativa rispetto a quello ideale. Infatti in questi casi i livelli di forza nell'Inerter sono relativamente elevati dal momento che nonostante il campo di frequenze non risulta relativamente elevato sia le ampiezze dell'azione che le inerzie sono elevate. Inoltre si ritiene che alcune non linearità come i giochi si mantengono inalterati con la scala del dispositivo e quindi nel caso di prototipi in scala come quelli testati in questo caso alcuni effetti potrebbero risultare amplificati. Per tale ragione in successivi studi si vuole valutare il ruolo dell'effetto scala sui dispositivi Inerter di tipo meccanico.



## Capitolo 8

# Sistema isolato a un grado di libertà dotato di TMDI

### 8.1 Premessa

In questo capitolo, si riportano i risultati relativi alla sperimentazione su tavola vibrante di un sistema isolato a un gdl dotato di sistema di controllo TMDI. Infatti in letteratura non sono presenti evidenze sperimentali di questa particolare configurazione.

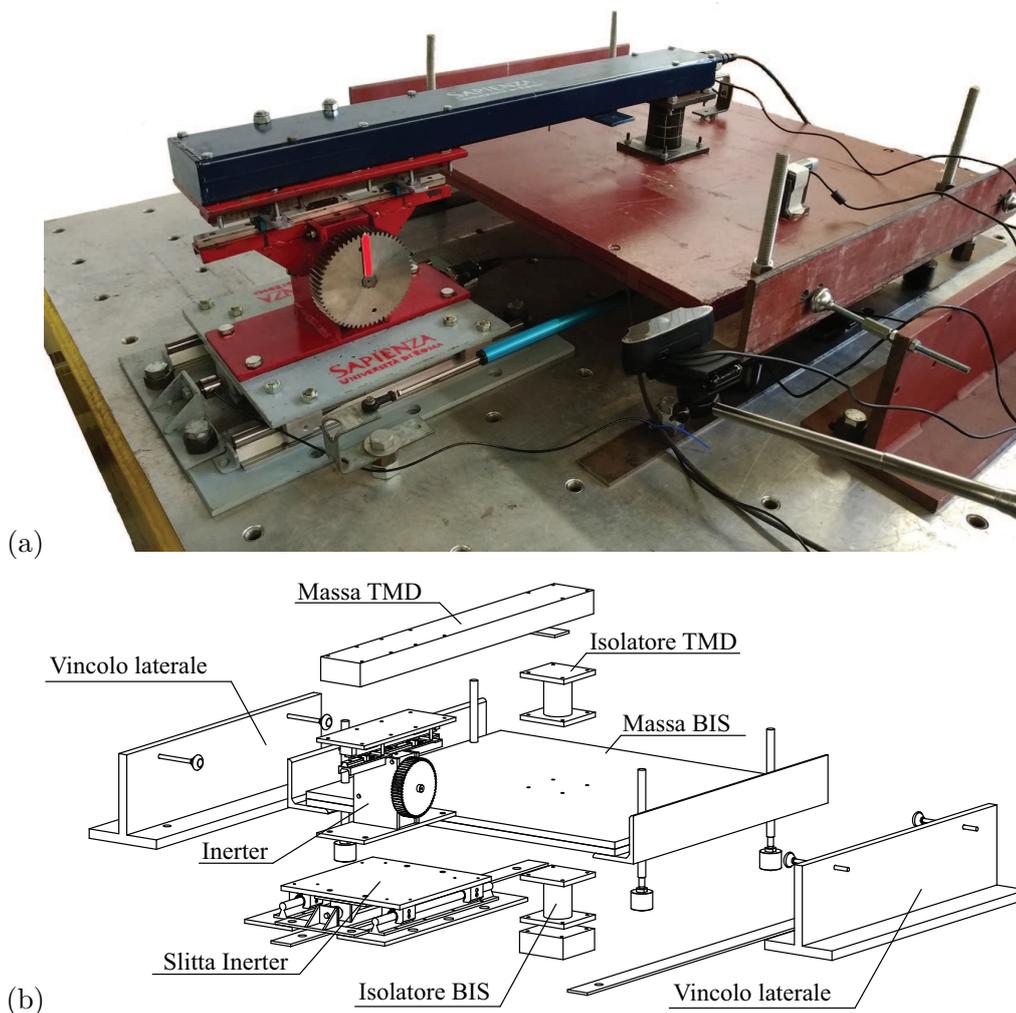
A seguito dei risultati emersi nel Capitolo 4 per le strutture multipiano a base isolata e dotate di TMDI, uno degli obiettivi che si è voluto perseguire in questa sperimentazione è stato quello di valutare la fattibilità, l'applicabilità, la robustezza e l'efficacia del TMDI nel ridurre lo spostamento del BIS senza incrementarne le accelerazioni.

In ogni caso, il sistema testato risulta rappresentativo di numerose situazioni strutturali e per tale ragione sono stati perseguiti degli ulteriori obiettivi. In particolare oltre alla valutazione dell'efficacia sismica si è voluta studiare l'influenza sulla risposta dinamica del sistema dell'ampiezza dell'azione (al fine di mettere in evidenza eventuali non linearità del sistema) e dei parametri inerziali del sistema di controllo (inerzanza e massa ausiliaria). Infine è stato definito un modello numerico non lineare interpretativo e predittivo delle evidenze sperimentali.

### 8.2 Test su tavola vibrante

#### 8.2.1 Modello sperimentale

Il modello fisico del sistema a 2 gradi di libertà, Fig. 8.1, è composto da (i) una massa isolata, connessa al suolo attraverso un isolatore elastomerico (nel seguito isolatore del BIS), (ii) una massa ausiliaria collegata alla massa isolata attraverso un isolatore elastomerico (nel seguito isolatore del TMD) e (iii) un Inerter che collega la massa ausiliaria a terra: il primo rappresenta il sistema isolato alla base (BIS) da proteggere, il secondo svolge il ruolo di sistema Tuned Mass Damper (TMD) che insieme al terzo (dispositivo Inerter) costituisce il sistema Tuned Mass Damper Inerter (TMDI).

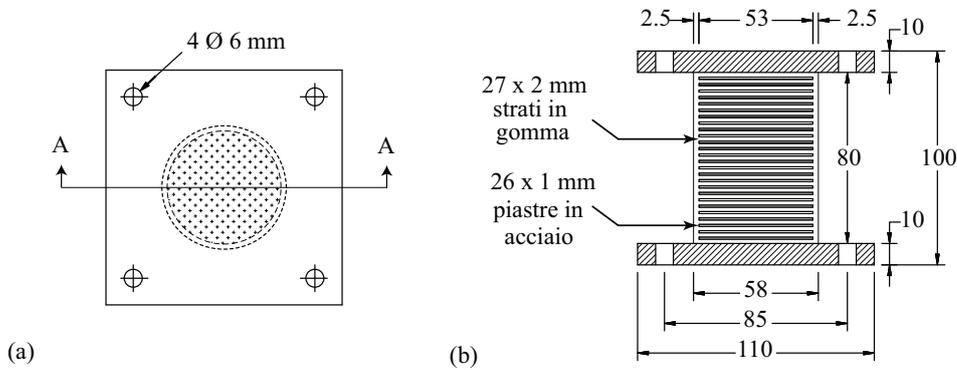


**Figura 8.1.** Modello fisico del sistema isolato alla base (BIS) dotato di TMDI: (a) Foto ed (b) esploso.

La massa isolata ( $m_I = 125 \text{ kg}$ ) è composta da due piastre (dimensioni:  $0.78 \text{ m} \times 0.68 \text{ m} \times 0.015 \text{ m}$ ) di acciaio dolce unite attraverso bulloni. Il modello è stato testato con tre differenti masse ausiliarie realizzate attraverso: (i) un pannello di legno multistrato (dimensioni sezione:  $0.10 \text{ m} \times 0.025 \text{ m}$  e lunghezza:  $1.25 \text{ m}$ ),  $m_{T,1} = 6 \text{ kg}$  (nel seguito small mass, SM), (ii) un tubolare rettangolare (dimensioni sezione:  $0.10 \text{ m} \times 0.025 \text{ m}$ , spessore:  $3 \text{ mm}$  e lunghezza:  $0.815 \text{ m}$ ) di acciaio dolce,  $m_{T,2} = 10 \text{ kg}$  (nel seguito intermediate mass, IM) e (iii) il precedente tubolare rettangolare con aggiunte due piastre di acciaio (sezione:  $0.12 \text{ m} \times 0.02 \text{ m}$  e lunghezza:  $0.22 \text{ m}$ ),  $m_{T,3} = 20 \text{ kg}$  (nel seguito large mass, LM).

Gli isolatori del BIS e del TMD sono due isolatori circolari in gomma ad alto smorzamento (HDRB, High Damping Rubber Bearings), Fig. 8.2, costituiti da 27 strati di gomma di spessore  $2 \text{ mm}$  e 26 piastre in acciaio di spessore  $1 \text{ mm}$ . Lo spessore totale della gomma è quindi di  $54 \text{ mm}$ , mentre l'altezza dell'isolatore, escluse le piastre terminali, è di  $80 \text{ mm}$ . Il diametro totale è di  $58 \text{ mm}$ , costitui-

to da  $53\text{ mm}$  di diametro delle piastre in acciaio e da  $5\text{ mm}$  di ricoprimento della gomma. Le piastre terminali consentono di fissare gli isolatori alle masse. La rigidità equivalente nominale, corrispondente ad una deformazione  $\gamma = 100\%$ , è pari a  $k_{nom} = 0.018\text{ kN/mm}$ .



**Figura 8.2.** Isolatore in gomma ad alto smorzamento: (a) Pianta e (b) sezione A-A.

L'inertanza  $b$  è fornita dal prototipo di Inerter a pignone e cremagliera caratterizzato nel Capitolo 7. Il dispositivo è stato testato in tre diverse configurazioni: (i) No flywheel (NF)  $b_{1,nom} = 0.1\text{ kg}$ , (ii) Intermediate flywheel (IF)  $b_{2,nom} = 47.9\text{ kg}$  e (iii) Large flywheel (LF)  $b_{3,nom} = 95.6\text{ kg}$ .

A parte il caso del solo sistema isolato, il modello è stato testato in dodici differenti configurazioni riportate in Tabella 8.1. In particolare per il parametri inerziali del sistema sono stati definiti i seguenti parametri adimensionali: rapporto di massa  $\mu_i = m_{T,i}/m_I$ , con  $i = 1 - 3$ , e rapporto di inertanza  $\beta_i = b_{i,nom}/m_I$ , con  $i = 0 - 3$ .

Configurazione	Small mass ( $\mu_1 = 0.048$ )	Intermediate mass ( $\mu_2 = 0.080$ )	Large mass ( $\mu_3 = 0.160$ )
No Inerter ( $\beta_0 = 0$ )	x	x	x
No Flywheel ( $\beta_1 = 0.001$ )	x	x	x
Intermediate Flywheel ( $\beta_2 = 0.383$ )	x	x	x
Large Flywheel ( $\beta_3 = 0.765$ )	x	x	x

**Tabella 8.1.** Lista delle configurazioni testate.

### 8.2.2 Setup sperimentale

I test sono stati condotti su una tavola vibrante ad un grado di libertà nel Laboratorio Materiali e Strutture del Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica della Sapienza, Università degli studi di Roma. La tavola vibrante, di dimensioni

$1.5\text{ m} \times 1.5\text{ m}$ , prodotta dalla Moog Inc. e controllata attraverso il software Moog Replication, ha le seguenti caratteristiche: massima frequenza di operatività  $20\text{ Hz}$ ; accelerazione massima  $> \pm 1\text{ g}$ , dove  $g$  è l'accelerazione di gravità; velocità massima  $> \pm 1\text{ m/s}$ ; spostamento massimo  $\pm 0.2\text{ m}$ ; massima massa  $2\text{ t}$ .

Il modello è stato equipaggiato con i seguenti sensori di misura, Figg. 8.3, 8.4 e 8.5:

- n. 5 accelerometri piezoelettrici ICP®, modello 393A03 e prodotti dalla PCB Piezotronic e così ripartiti: uno sulla tavola vibrante ( $\ddot{u}_G$ ), due sulla massa del sistema isolato ( $\ddot{u}_{I,r}^{(tot)}$  e  $\ddot{u}_{I,l}^{(tot)}$ ), uno sulla massa del sistema TMD ( $\ddot{u}_T^{(tot)}$ ) e uno sul supporto dell'Inerter ( $\ddot{u}_B^{(tot)}$ );
- n.3 trasduttori di spostamento lineari, modello SLS 190 e prodotti dalla Penny e Giles, al fine di misurare gli spostamenti relativi tra la massa della tavola vibrante e il suolo ( $u_G$ ), tra la massa del sistema isolato e la massa della tavola vibrante ( $u_I$ ) e tra la massa del sistema TMD e la massa del sistema isolato ( $u_{TI}$ );
- n.1 cella di carico, modello U9B e prodotta dalla HBM, al fine di misurare la forza trasmessa dall'Inerter alla tavola ( $f_R$ ).

I dati sperimentali sono stati acquisiti, con una frequenza di campionamento pari a  $500\text{ Hz}$ , attraverso n. 3 sistemi di acquisizione dati (Data acquisition system, DAQ), modello Krypton 3xSTG prodotti dalla DEWESoft, e gestiti dal software DEWESoft.

Oltre alle precedenti quantità misurate, è stato possibile calcolare le restanti quantità di interesse; infatti, l'accelerazione assoluta della massa del BIS  $\ddot{u}_I^{(tot)}$  è stata calcolata come media delle accelerazioni misurate  $\ddot{u}_{I,r}^{(tot)}$  e  $\ddot{u}_{I,l}^{(tot)}$ , l'accelerazione relativa dell'Inerter  $\ddot{u}_T$  è stata calcolata come differenza delle accelerazioni misurate  $\ddot{u}_T^{(tot)}$  e  $\ddot{u}_B^{(tot)}$  e lo spostamento dell'Inerter  $u_T$  è stato calcolato come somma degli spostamenti misurati  $u_I$  e  $u_{TI}$ . Inoltre, le velocità della massa del BIS  $\dot{u}_I$ , della massa del TMD  $\dot{u}_{TI}$  e dell'Inerter  $\dot{u}_T$  sono state calcolate rispettivamente per differenziazione nel tempo degli spostamenti  $u_I$ ,  $u_{TI}$  e  $u_T$ . La forza generata dall'Inerter  $f_B$  è stata calcolata come somma tra la reazione  $f_R$  e la forza d'inerzia legata alla massa dell'Inerter + slitta  $m_i$ , con  $i = 0 - 3$ , e all'accelerazione assoluta della slitta  $\ddot{u}_B^{(tot)}$ . In particolare, la massa dell'Inerter + slitta nelle quattro configurazioni assume i seguenti valori  $m_0 = 16.7\text{ kg}$ ,  $m_1 = 16.7\text{ kg}$ ,  $m_2 = 18.8\text{ kg}$  e  $m_3 = 20.9\text{ kg}$ . Infine, attraverso la conoscenza della forza  $f_B$  e delle accelerazioni assolute  $\ddot{u}_I^{(tot)}$  e  $\ddot{u}_T^{(tot)}$  è stato possibile, sfruttando le equazioni del moto del sistema, calcolare le forze  $f_T = -f_B - m_T\ddot{u}_T^{(tot)}$  e  $f_I = f_T - m_I\ddot{u}_I^{(tot)}$  rispettivamente nell'isolatore del TMD e del BIS.

Nel seguito, salvo diversa indicazione, i segnali sono stati filtrati prima con un filtro Butterworth passa alto del primo ordine con frequenza di taglio  $0.16\text{ Hz}$  e poi con un filtro Butterworth passa basso del primo ordine con frequenza di taglio  $20\text{ Hz}$ . Inoltre, verranno utilizzate le seguenti unità di misura:  $mm$  per gli spostamenti,  $m/s^2$  per le accelerazioni e  $kN$  per le forze.

Il modello fisico è stato testato su tavola vibrante mediante sia prove di identificazione dinamica che sismiche. Per i test di identificazione dinamica sono stati



**Figura 8.3.** Foto del setup sperimentale e disposizione dei sensori di misura.

utilizzati segnali di tipo (i) sine sweep lineare (frequenza variabile da 0.5 a 10  $Hz$  con una velocità di 0.08  $Hz/s$ ) e (ii) sine sweep a blocchi (costituita da 20 cicli per raggiungere lo stato stazionario nell'intervallo di frequenza 0.5 – 10.0  $Hz$ , con un passo di 0.05  $Hz$  vicino alle frequenze di risonanza del sistema e 0.1  $Hz$  nel resto della banda). I segnali di di tipo sine sweep sono stati assegnanti in controllo di spostamento in modo tale da imporre fissate accelerazioni di picco alla tavola vibrante.

Al fine di valutare l'efficacia sismica sono stati condotti test con (i) segnali di tipo rumore bianco casuale (densità spettrale di potenza costante tra 0.5 e 10.0  $Hz$ ) e (ii) accelerogrammi naturali. E' stata utilizzata un'ampia selezione di accelerogrammi naturali, in modo da valutare l'influenza sull'efficacia del TMDI proposto della durata dell'input e del contenuto di frequenza. In dettaglio, sono stati selezionati i sei accelerogrammi naturali, riportati in Tabella 2.1. Tra questi, Northridge-Sylmar-Olive View, Kobe-KJMA, Irpinia-Sturmo e Cape Mendocino-Petrolia sono terremoti di tipo near-fault caratterizzati da una preponderante componente impulsiva, mentre Imperial Valley-El Centro e Tokachi-Oki-Hachinohe sono terremoti di tipo far-field. La scala temporale degli segnali sismici è stata scalata di un fattore

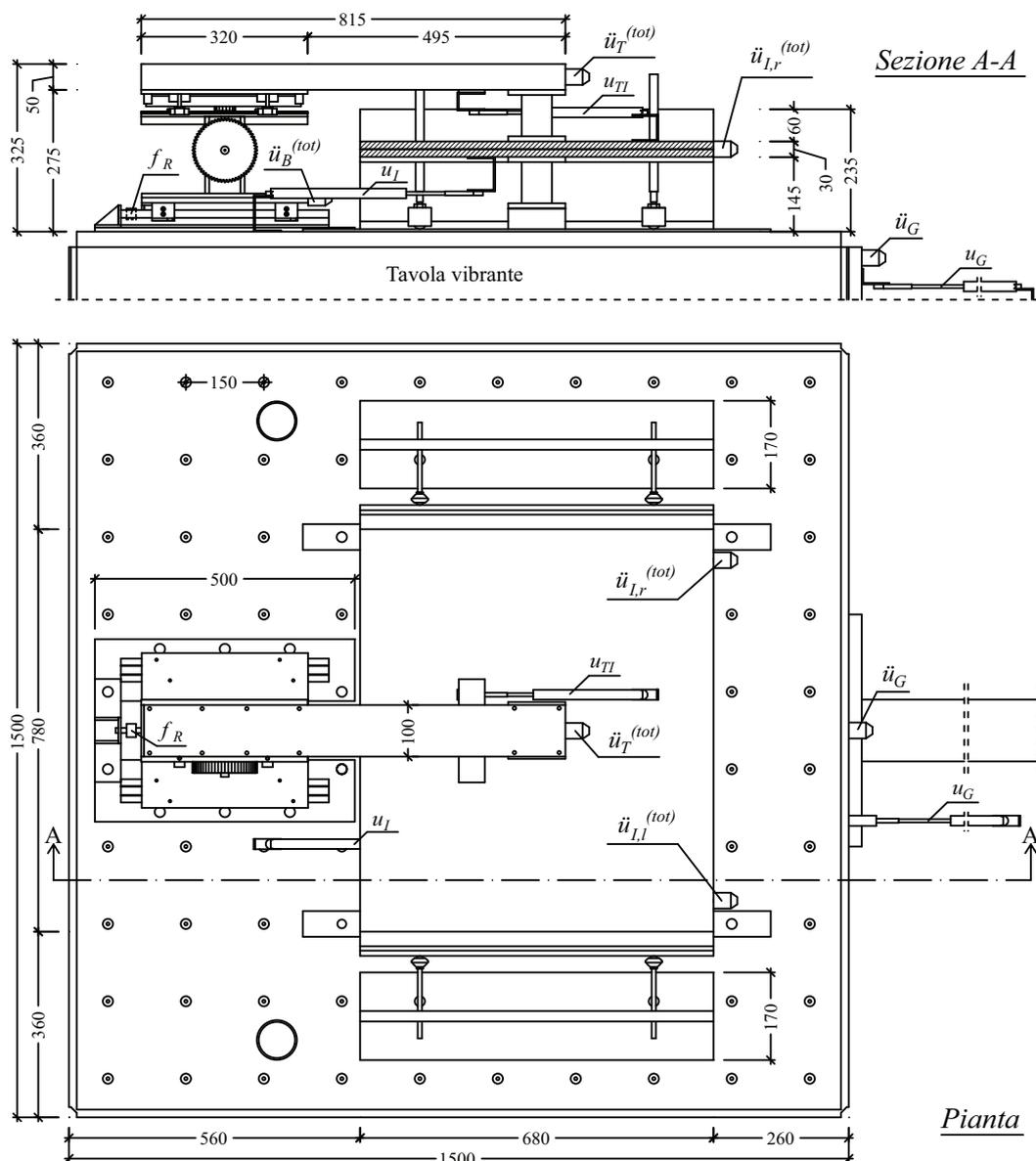


Figura 8.4. Schema del setup sperimentale e disposizione dei sensori di misura.

5 per tenere in conto della scala ridotta del modello fisico. I test sismici sono stati eseguiti a diversi livelli di accelerazione di picco del terreno (PGA) per ciascun accelerogramma, senza mai superare la deformazione di taglio ammissibile per gli isolatori e lo spostamento massimo nel prototipo di Inerter.

Nei successivi paragrafi prima verrà studiata la risposta dinamica del modello in oggetto nel caso di azioni di tipo sine sweep (sia lineari che a blocchi) al variare dell'ampiezza dell'azione e delle proprietà inerziali del sistema di controllo (inerzanza e massa ausiliaria) per poi valutare l'efficacia sismica del sistema TMDI nel caso di azione di tipo rumore bianco e nel caso di accelerogrammi naturali imposti alla base. Verrà infine proposto un modello numerico non lineare interpretativo e predittivo

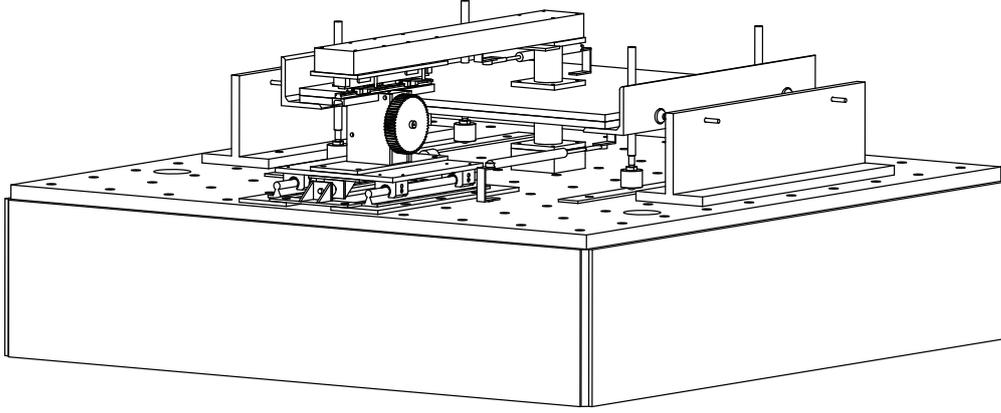


Figura 8.5. Vista del setup sperimentale.

delle evidenze sperimentali.

### 8.3 Studio della risposta dinamica

In questo paragrafo si vuole valutare da un punto di vista sperimentale l'influenza sulla risposta dinamica del sistema sia dell'ampiezza dell'azione sia dei parametri inerziali del TMDI. Nel seguito le curve di risposta in frequenza (FRC)  $H_\varphi$ , dove  $\varphi$  rappresenta la  $\varphi$ -esima grandezza di risposta, sono state normalizzate rispetto alla FRC relativa all'accelerazione imposta  $H_{\ddot{u}_G}$  e per tale ragione sono state definite le seguenti FRC normalizzate:

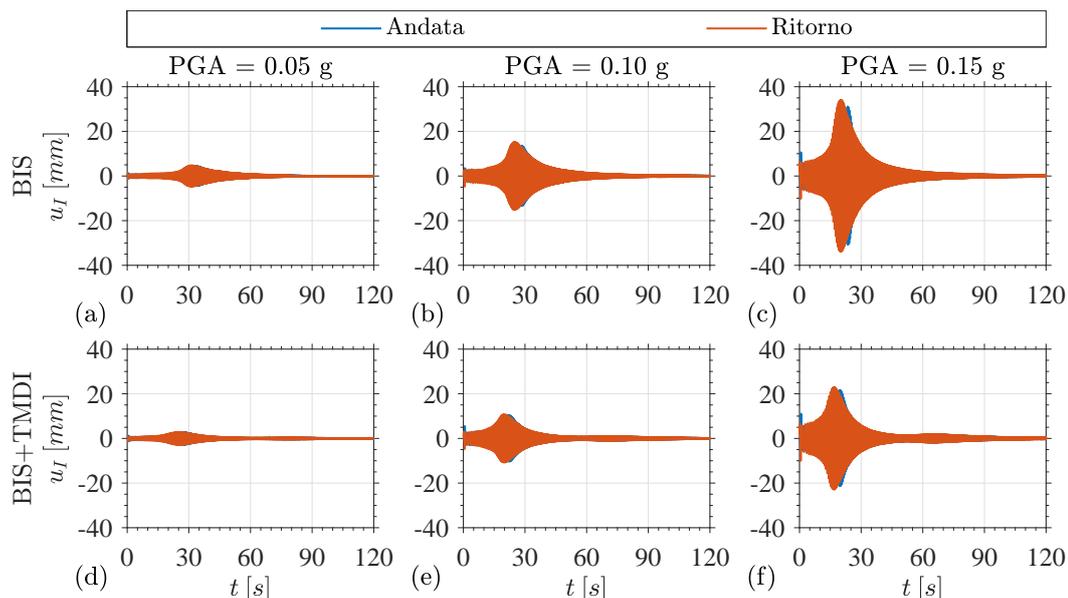
$$\begin{aligned}
 H_{y_I} &= \frac{H_{u_I}}{H_{\ddot{u}_G}}, & H_{y_I^{(tot)}} &= \frac{H_{\ddot{u}_I^{(tot)}}}{H_{\ddot{u}_G}}, & H_{r_I} &= \frac{H_{f_I}}{H_{\ddot{u}_G}}, \\
 H_{y_{TI}} &= \frac{H_{u_{TI}}}{H_{\ddot{u}_G}}, & H_{y_T^{(tot)}} &= \frac{H_{\ddot{u}_T^{(tot)}}}{H_{\ddot{u}_G}}, & H_{r_T} &= \frac{H_{f_T}}{H_{\ddot{u}_G}}, \\
 H_{y_T} &= \frac{H_{u_T}}{H_{\ddot{u}_G}}, & H_{\dot{y}_T} &= \frac{H_{\dot{u}_T}}{H_{\ddot{u}_G}}, & H_{r_B} &= \frac{H_{f_B}}{H_{\ddot{u}_G}}
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

#### 8.3.1 Influenza dell'ampiezza dell'azione e non linearità del sistema

In questo sottoparagrafo si vuole valutare in che modo si modifica la risposta dinamica del sistema al variare dell'ampiezza dell'azione in modo tale da mettere in evidenza la presenza di eventuali non linearità del sistema. L'attenzione è stata rivolta inizialmente alle grandezze di risposta del BIS (in particolare allo spostamento  $u_I$ ) e successivamente a quelle del sistema di controllo TMDI.

In Fig. 8.6, al fine di evidenziare eventuali non linearità del sistema, si riportano le storie temporali dello spostamento del BIS sia della fase di andata che di quella di ritorno della sine sweep lineare.

Nelle Figg. 8.6 (a-c), in particolare, si riporta lo spostamento  $u_I$  nel caso di assenza di sistema di controllo TMDI per tre diversi livelli di ampiezza dell'azione, rispettivamente,  $PGA = 0.05, 0.10, 0.15 g$ . Si può osservare come in tutti e tre i grafici il sistema evidenzia una sola pseudo-amplificazione dinamica (nel seguito



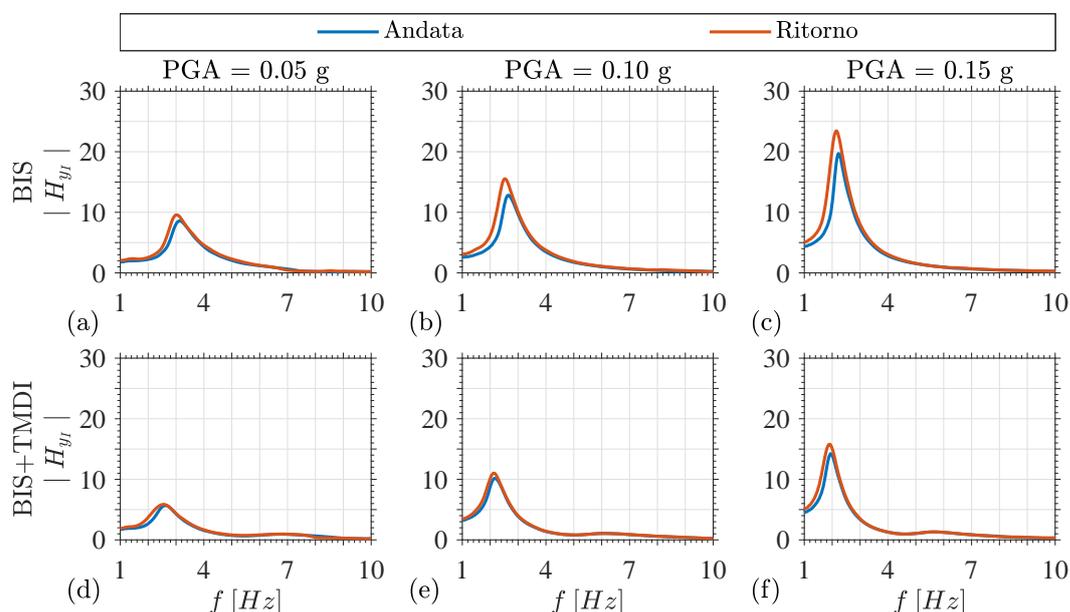
**Figura 8.6.** Sine sweep lineare. Storie temporali dello spostamento del BIS  $u_I$  dell'andata e del ritorno al variare dell'ampiezza dell'azione ( $PGA = 0.05, 0.10, 0.15 g$ ) nelle configurazioni: (a-c) BIS e (d-f) BIS+TMDI ( $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ).

chiamata solo amplificazione dinamica) che si sposta verso sinistra all'aumentare dell'ampiezza dell'azione, in quanto la rigidità dell'isolatore elastomerico diminuisce all'aumentare della deformazione (si passa da uno spostamento  $u_I$  inferiore a  $5 mm$  nel caso di  $PGA = 0.05 g$  a oltre  $30 mm$  nel caso di  $PGA = 0.15 g$ ). Si può osservare, inoltre, come la risposta in termini di spostamento tra la fase di andata e quella ritorno della sine sweep lineare non risultano sovrapposti ed in particolare l'amplificazione dinamica del ritorno è posizionata sempre a sinistra rispetto a quella dell'andata, a dimostrazione del comportamento *softening* dell'isolatore.

Nelle Figg. 8.6 (d-f), invece, si riporta lo spostamento del BIS per gli stessi livelli di ampiezza dell'azione delle rispettive Fig. 8.6 (a-c), ma nel caso di BIS dotato di sistema di controllo TMDI nella configurazione con rapporto di inerzia e di massa intermedia,  $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ , che verrà presa come riferimento nel seguito del capitolo. In questo caso si osserva come il sistema risulta caratterizzato da due amplificazioni dinamiche posizionate rispettivamente prima e dopo quella del BIS non controllato e queste risultano maggiormente evidenti per ampiezze dell'azione relativamente elevate come nel caso riportato in Fig. 8.6 (f). Si osserva che solo per la prima amplificazione dinamica la risposta relativa alla fase di andata non è sovrapposta a quella relativa al ritorno e in particolare, come già visto per il caso del solo BIS, l'amplificazione dinamica relativa al ritorno è posizionata a sinistra rispetto a quella dell'andata. Risulta interessante osservare come il valore massimo dello spostamento  $u_I$  in presenza del sistema di controllo TMDI risulta particolarmente ridotto indipendentemente dall'ampiezza dell'azione (si ha una riduzione del 39% nel caso di  $PGA = 0.05 g$  e del 33% nel caso di  $PGA = 0.15 g$ ).

La Fig. 8.7 riporta il modulo delle curve di risposta in frequenza (FRC)  $H_{y_I}$  relative allo spostamento  $u_I$  per gli stessi casi descritti in Fig. 8.6 al fine di mettere

in maggiore evidenza i comportamenti in precedenza osservati.



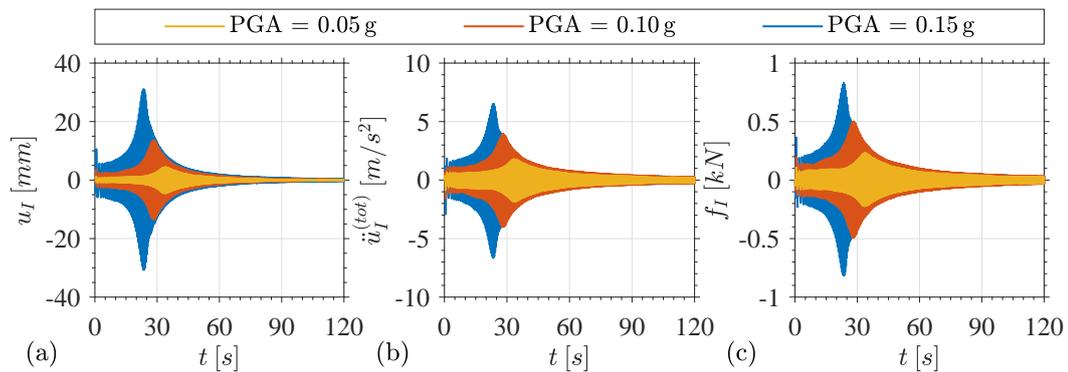
**Figura 8.7.** Sine sweep lineare. Curve di risposta in frequenza relative allo spostamento del BIS  $u_I$  dell'andata e del ritorno al variare dell'ampiezza dell'azione ( $PGA = 0.05, 0.10, 0.15 g$ ) nelle configurazioni: (a-c) BIS e (d-f) BIS+TMDI ( $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ).

In analogia alle Figg. 8.6 (a-c), nelle Figg. 8.7 (a-c) si riportano la FRC dello spostamento  $u_I$  nel caso di solo BIS sia della fase di andata che di quella di ritorno per tre diversi livelli di  $PGA$ . In tutti i casi si osserva una singola amplificazione dinamica caratterizzata da una pseudo-frequenza (nel seguito chiamata solo frequenza)  $f_0$  che diminuisce all'aumentare dell'ampiezza dell'azione (si passa da una frequenza  $f_0$  nella fase di andata di  $3.1 Hz$  nel caso di  $PGA = 0.05 g$  a  $2.2 Hz$  nel caso di  $PGA = 0.15 g$ ). Inoltre si nota che, a parità di ampiezza dell'azione, le FRC della fase di andata e di ritorno non sono sovrapposte, ma quella relativa al ritorno è caratterizzata da una ampiezza dell'amplificazione maggiore e da una frequenza minore rispetto a quella relativa all'andata. Si osserva quindi una regione tra le due curve definita di isteresi posizionata a sinistra dell'amplificazione dinamica legata al comportamento *softening* dell'isolatore.

Nelle Figg. 8.7 (d-f) si riportano le FRC dello spostamento  $u_I$  nel caso di BIS dotato di TMDI nella configurazione di riferimento per gli stessi livelli di ampiezza della sine sweep lineare in precedenza commentati. Per tutti i casi si osservano due amplificazioni dinamiche dove la prima è caratterizzata da un'ampiezza molto maggiore rispetto alla seconda. Inoltre si nota come le frequenze  $f_1$  e  $f_2$  (con  $f_2 > f_1$ ) in corrispondenza delle due amplificazioni dinamiche diminuiscono all'aumentare dell'ampiezza dell'azione e le variazioni percentuali risultano maggiori per la frequenza  $f_1$  rispetto alla frequenza  $f_2$  (tra il caso  $PGA = 0.05 g$  e quello  $PGA = 0.15 g$  si ha una riduzione del 25% per la frequenza  $f_1$  e del 16% per la frequenza  $f_2$ ). Inoltre, a parità di  $PGA$ , la frequenza  $f_0$  nel caso di solo BIS risulta sempre intermedia rispetto a quelle del caso in cui il BIS è dotato di TMDI ( $f_2 > f_0 > f_1$ ). Nel caso di

BIS+TMDI, inoltre, solo per la prima amplificazione dinamica non c'è coincidenza tra le FRC relative alla fase di andata e di ritorno della sine sweep e, a parità di  $PGA$ , la differenza tra le due curve, ovvero l'area di isteresi, è inferiore rispetto al caso di solo BIS. Le FRC mostrano, infine, come il sistema di controllo TMDI risulta efficace nel ridurre lo spostamento del sistema isolato alla base.

Le Figg. 8.8 (a-c) mostrano rispettivamente le storie temporali della fase di andata della sine sweep lineare dello spostamento  $u_I$ , dell'accelerazione  $\ddot{u}_I^{(tot)}$  e della forza  $f_I$  del BIS non controllato al variare dell'ampiezza dell'azione. Nel seguito, salvo diversa indicazione, l'attenzione sarà concentrata solo sulla fase di andata della sine sweep sia lineare sia a blocchi.



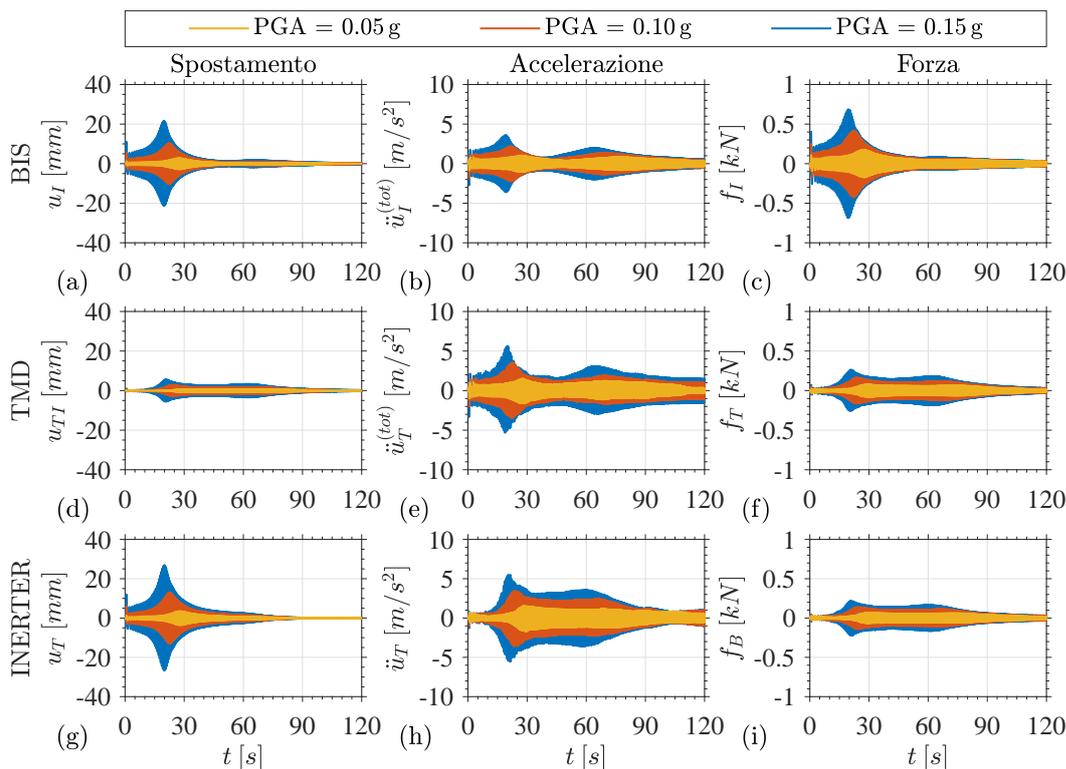
**Figura 8.8.** Sine sweep lineare. Storie temporali delle grandezze di risposta (a) spostamento  $u_I$ , (b) accelerazione  $\ddot{u}_I^{(tot)}$  e (c) forza  $f_I$  del BIS nel caso non controllato al variare dell'ampiezza dell'azione.

Si può osservare come all'aumentare del  $PGA$  per tutte le grandezze di risposta del BIS l'ampiezza dell'amplificazione dinamica aumenta, mentre la corrispondente frequenza diminuisce. Invece lontani dall'amplificazione dinamica le risposte risultano meno influenzate da questo parametro.

Questi risultati appaiono utili per essere confrontati con quelli mostrati in Figura 8.9 nella quale si vuole mettere in evidenza l'influenza dell'ampiezza dell'azione sulle grandezze di risposta cinematiche (spostamenti e accelerazioni) e dinamiche (forze) nel caso di BIS controllato dal sistema di controllo TMDI nella configurazione di riferimento ( $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ). La figura è una matrice  $3 \times 3$  dove lungo le colonne si riporta rispettivamente lo spostamento, l'accelerazione e la forza dei tre componenti che costituiscono il modello fisico, ovvero il BIS (prima riga), il sistema TMD (seconda riga) e il dispositivo Inerter (terza riga).

Per quanto riguarda lo spostamento del BIS, Fig. 8.9 (a), si può osservare come risulti particolarmente evidente una sola amplificazione dinamica caratterizzata da una frequenza che diminuisce all'aumentare dell'ampiezza dell'azione. Confrontando la risposta con il caso di BIS non controllato, Fig. 8.8 (a), si osserva come lo spostamento massimo del sistema d'isolamento risulta particolarmente ridotto (si ha una riduzione del 30% per il  $PGA = 0.15 g$  e del 37% per il  $PGA = 0.05 g$ ).

L'accelerazione  $\ddot{u}_I^{(tot)}$ , Fig. 8.9 (b), mostra in modo abbastanza evidente le due amplificazioni dinamiche del sistema la cui ampiezza aumenta all'aumentare del  $PGA$  dell'azione mentre le corrispondenti frequenze diminuiscono. Come è stato



**Figura 8.9.** Sine sweep lineare. Storie temporali delle grandezze di risposta del BIS dotato del sistema TMDI nella configurazione di riferimento ( $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ) al variare dell'ampiezza dell'azione.

osservato per lo spostamento, il sistema di controllo TMDI è in grado di ridurre, anche in modo significativo, l'accelerazione del sistema isolato in termini di valore massimo, ma le maggiori riduzioni si hanno in corrispondenza della frequenza di risonanza del BIS non controllato  $f_0$ , Fig. 8.8 (b).

In Fig. 8.9 (c), la forza del sistema di isolamento  $f_I$  mostra analoghe tendenze osservate per lo spostamento  $u_I$ .

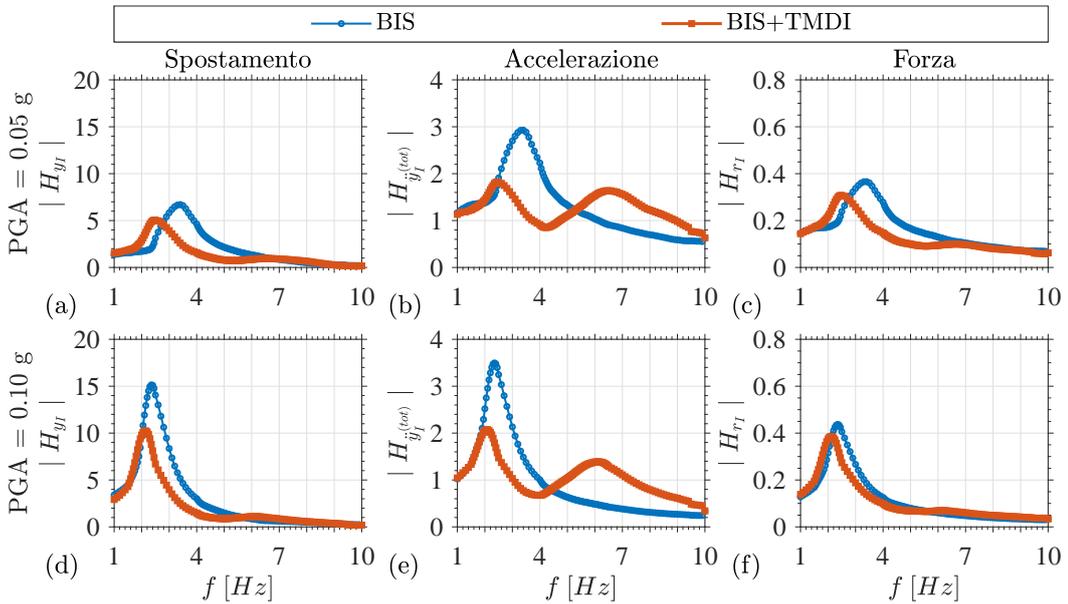
Per quanto riguarda le grandezze risposta del sistema di controllo suddivise tra quelle relative al sistema TMD, Fig. 8.9 (d-f) e quelle relative al dispositivo Inerter, Fig. 8.9 (g-i) le seguenti osservazioni generali possono essere fatte.

Si può osservare come, ad eccezione dello spostamento dell'Inerter  $u_T$  che ha un andamento simile a quello dello spostamento del BIS  $u_I$  anche se con ampiezze maggiori, le altre risposte sono caratterizzate da una ampia banda di frequenza dell'azione in cui l'ampiezza della risposta è circa costante. All'aumentare del  $PGA$  l'ampiezza di entrambe le amplificazioni dinamiche aumenta, mentre le corrispondenti frequenze diminuiscono a dimostrazione del comportamento di tipo *softening* dei due isolatori elastomerici.

Le storie temporali di tutte le grandezze cinematiche o dinamiche presentano degli andamenti sostanzialmente regolari, ad eccezione delle accelerazioni del sistema di controllo  $\ddot{u}_T^{(tot)}$  e  $\ddot{u}_T$  che invece mostrano alcune irregolarità attribuite alle non linearità dell'Inerter. Infatti, come visto nel Capitolo 7 relativo alla caratte-

rizzazione del solo prototipo di Inerter, le non linearità emerse tra cui i giochi tra i diversi componenti meccanici che compongono il prototipo generano urti che risultano particolarmente evidenti in termini di accelerazione tra i suoi due terminali che in questo caso corrispondono proprio alle grandezze in questione  $\ddot{u}_T^{(tot)}$  e  $\ddot{u}_T$ .

In Fig. 8.10, si confrontano le curve di risposta in frequenza delle grandezze di risposta del BIS con e senza TMDI per due diversi PGA dell'azione. Le FRC relative alla sine sweep a blocchi sono state ottenute valutando il massimo valore allo stazionario della grandezza di risposta a quella specifica frequenza. Come si può osservare le FRC presentano andamenti abbastanza regolari legati anche al piccolo passo di variazione tra una frequenza e quella successiva ( $df = 0.05 \text{ Hz}$  nei pressi delle amplificazioni dinamiche).



**Figura 8.10.** Sine sweep a blocchi. Curve di risposta in frequenza delle grandezze di risposta del sistema isolato con e senza sistema controllo TMDI di riferimento ( $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ) al variare dell'ampiezza dell'azione (a-c)  $PGA = 0.05 \text{ g}$  e (d-f)  $PGA = 0.10 \text{ g}$ .

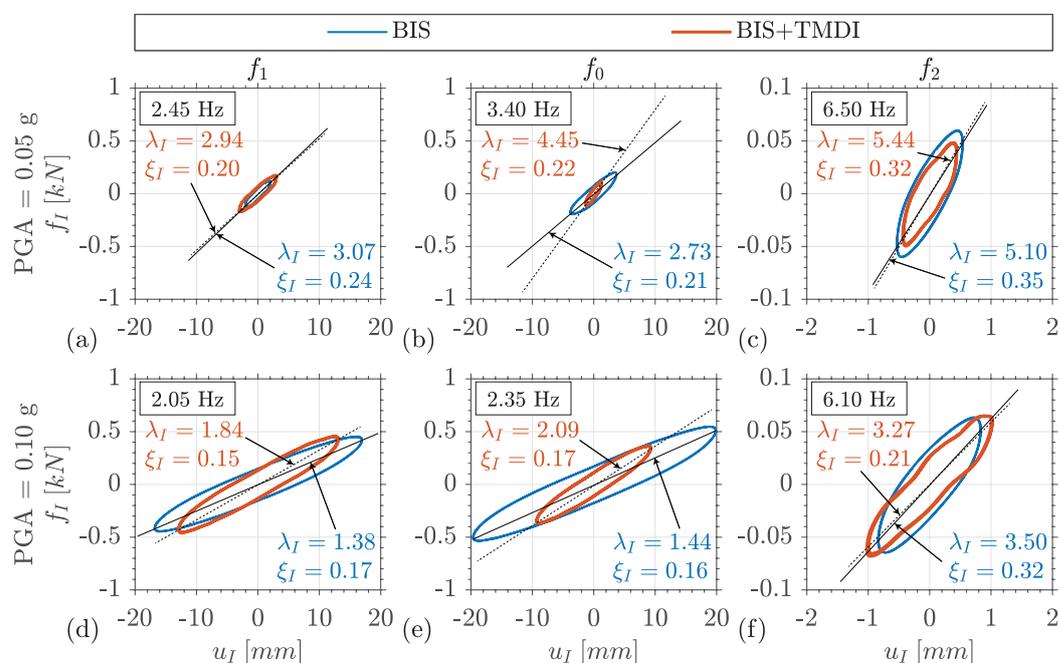
Dalle figure è possibile notare come in tutti i casi la frequenza  $f_0$  in corrispondenza dell'amplificazione dinamica del solo BIS è intermedia alle due frequenze  $f_1$  e  $f_2$  del BIS dotato di TMDI ( $f_2 > f_0 > f_1$ ). Inoltre l'ampiezza massima delle FRC nel caso in cui è presente il sistema di controllo TMDI risulta sempre inferiore rispetto al caso di solo BIS.

Si può notare come, per il PGA più piccolo, il sistema di controllo è in grado di ridurre lo spostamento del BIS, Fig. 8.10 (a), in un ampio range di frequenze, soprattutto quando le frequenze dell'azione sono maggiori della frequenza del solo BIS. All'aumentare del PGA, Fig. 8.10 (d), l'efficacia nel ridurre lo spostamento  $u_I$  è maggiore dal momento che la risposta del BIS+TMDI è sempre comparabile o più piccola rispetto al caso del BIS non controllato.

Nelle Figg. 8.10 (b,e), si osserva come il TMDI è in grado di ridurre l'accelerazione del BIS in un'ampia banda di frequenza, ma per frequenze relativamente elevate

( $f > 4 - 5 \text{ Hz}$  a seconda del PGA ovvero nell'intorno della frequenza  $f_2$ ) la risposta del BIS con sistema di controllo è maggiore rispetto a quello del sistema isolato non controllato. Infine, la forza  $f_I$ , Figg. 8.10 (c,f), mostra tendenze analoghe a quelle osservate per lo spostamento  $u_I$ .

In Figura 8.11 si riportano i legami forza-spostamento  $f_I - u_I$ , relativi all'isolatore del BIS, in corrispondenza delle frequenze  $f_1$ ,  $f_0$  e  $f_2$  nelle configurazioni con e senza sistema di controllo TMDI di riferimento per due diversi livelli di PGA della sine sweep a blocchi. Nelle figure con il simbolo  $\lambda_I$  è stato indicato il rapporto tra la rigidità equivalente dell'isolatore del BIS  $k_I$  alla generica deformazione  $\gamma$  (corrispondente alla pendenza della retta indicata in figura) e quella nominale corrispondente ad una deformazione  $\gamma = 100\%$  ( $\lambda_I = k_I/k_{nom}$ ). Invece con il simbolo  $\xi_I$  è stato indicato il fattore di smorzamento equivalente valutato come  $\xi_I = E_D/(4\pi E_E)$  con  $E_D$  l'energia dissipata (corrispondente all'area racchiusa dal ciclo) e con  $E_E$  l'energia elastica.



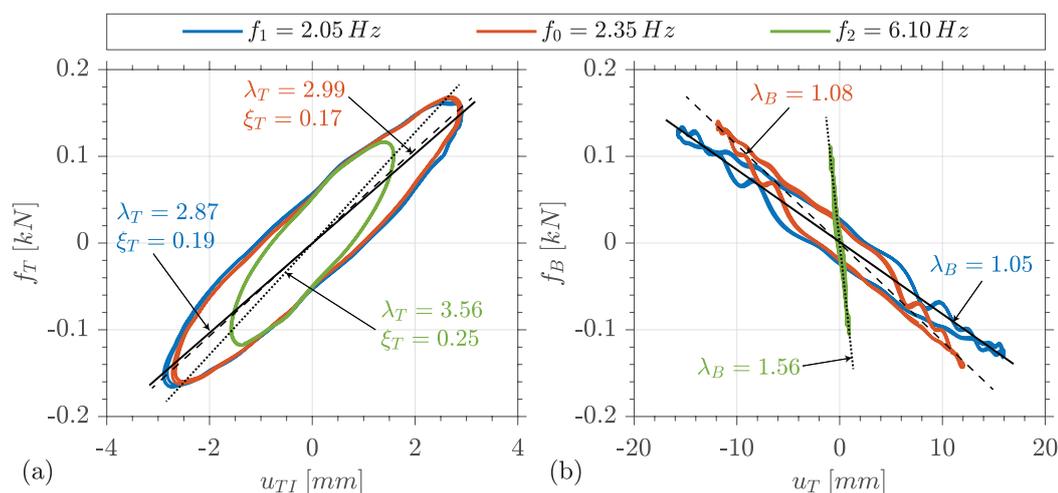
**Figura 8.11.** Sine sweep a blocchi. Legami forza-spostamento,  $f_I - u_I$ , in corrispondenza delle frequenze  $f_1$ ,  $f_0$  e  $f_2$  nelle configurazioni con e senza TMDI ( $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ) al variare dell'ampiezza dell'azione (a-c)  $PGA = 0.05 g$  e (d-f)  $PGA = 0.10 g$ .

Dalla Figura 8.11 si osserva come in generale all'aumentare della deformazione, ovvero all'aumentare dello spostamento  $u_I$ , la rigidità equivalente  $\lambda_I$  e il fattore di smorzamento equivalente  $\xi_I$  diminuiscono. Inoltre tipicamente, tra il caso non controllato e quello controllato e a parità di frequenza e PGA dell'azione, i fattori di smorzamento equivalente risultano confrontabili, mentre per piccole deformazioni la rigidità equivalente è circa la stessa per poi variare in modo più significativo per valori di deformazione maggiori.

Si può osservare come, per i livelli di ampiezza dell'azione indagati, l'energia dissipata  $E_D$  nel caso di solo BIS (curva blu) e in corrispondenza della frequenza

del sistema non controllato  $f_0$  (Figg. 8.11 (b,e)) è sempre maggiore rispetto a quella dissipata nel caso di presenza di TMDI (curva rossa). Invece l'energia dissipata nel caso non controllato rispetto al caso con sistema di controllo è inferiore per la frequenza  $f_1$  e maggiore per la frequenza  $f_2$  per il per il  $PGA$  più piccolo (Figg. 8.11 (a,c)), viceversa è maggiore per la frequenza  $f_1$  e inferiore per la frequenza  $f_2$  per il per il  $PGA$  più grande (Figg. 8.11 (d,f)).

Per completezza di trattazione, in Figura 8.12 si riportano i legami forza-spostamento  $f_T - u_{TI}$ , relativi all'isolatore del TMDI, e  $f_B - u_T$ , relativi al prototipo di Inerter, in corrispondenza delle frequenze  $f_1$ ,  $f_0$  e  $f_2$  per il  $PGA = 0.10 g$ . In analogia alla Fig. 8.10, con il simbolo  $\lambda_T$  è stato indicato il rapporto tra la rigidezza equivalente dell'isolatore del TMD  $k_T$  e quella nominale ( $\lambda_T = k_T/k_{nom}$ ), mentre con il simbolo  $\xi_T$  è stato indicato il fattore di smorzamento equivalente. Invece con il simbolo  $\lambda_B$  è indicata il rapporto tra la rigidezza negativa del legame  $f_B - u_T$  (corrispondente alla pendenza della retta indicata in figura) e quella nominale nel caso di Inerter ideale pari a  $-b_{nom}(2\pi f)^2$ .



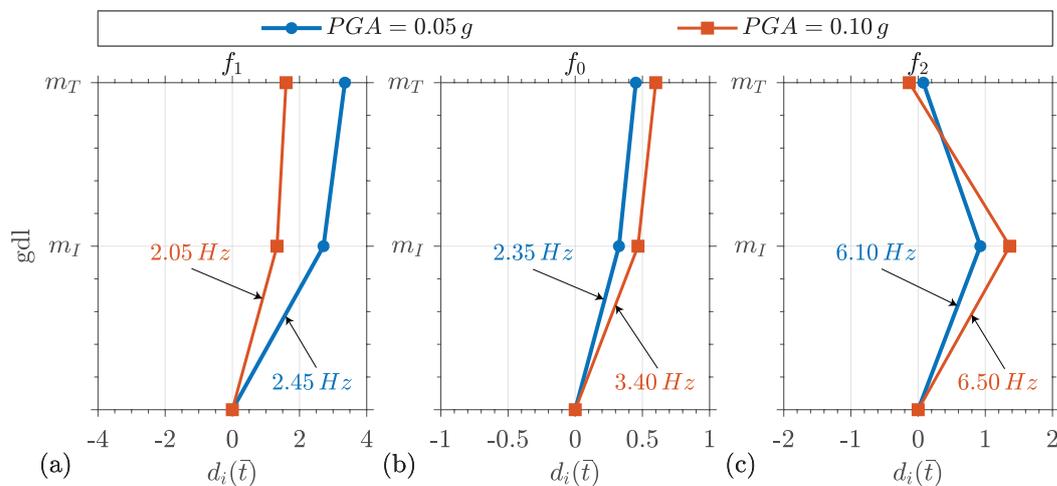
**Figura 8.12.** Sine sweep a blocchi. Legami forza-spostamento (a)  $f_T - u_{TI}$  e (b)  $f_B - u_T$  nella configurazione BIS+TMDI ( $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ) in corrispondenza della frequenza dell'azione  $f_1$ ,  $f_0$  e  $f_2$  ( $PGA = 0.10 g$ ).

La Fig. 8.12 (a) mostra tendenze analoghe a quelle emerse per l'isolatore del BIS. In particolare si evince come i legami costitutivi in corrispondenza delle frequenze  $f_1$  e  $f_0$  risultano circa gli stessi (le due frequenze risultano abbastanza vicine), mentre in corrispondenza della frequenza  $f_2$  il legame costitutivo è caratterizzato da una deformazione inferiore e quindi una rigidezza e un fattore di smorzamento equivalente maggiore.

Il legame forza-spostamento dell'Inerter, Fig. 8.12 (b), evidenzia come la rigidezza negativa aumenta all'aumentare della frequenza dell'azione ed è circa pari a quella nominale (i valori di  $\lambda_B$  sono prossimi all'unità) ad eccezione del caso in cui il sistema è forzato ad una frequenza  $f_2$ , pari a quella della seconda amplificazione dinamica del BIS+TMDI, dove il valore di  $\lambda_B$  si discosta rispetto all'unità. Questo comportamento è legato al fatto che in corrispondenza della frequenza  $f_2$  lo spostamento  $u_T$  ( $< 1 mm$ ) è più di un ordine di grandezza più piccolo rispetto agli

altri due casi e quindi per piccoli spostamenti le non linearità dell'Inerter (tra cui i giochi che sono dell'ordine del decimo di millimetro) ne discostano maggiormente il comportamento rispetto a quello ideale.

In Fig. 8.13 si riportano, in corrispondenza delle frequenze  $f_1$ ,  $f_0$  e  $f_2$  e per due diversi livelli di  $PGA$  della sine sweep a blocchi, gli spostamenti normalizzati delle masse  $m_I$  e  $m_T$ ,  $d_i(\bar{t}) = u_i(\bar{t})/u_{I0,max}$  con  $i = I, T$ , dove  $\bar{t}$  è l'istante di tempo in cui si ha il valore massimo dello spostamento del sistema isolato nel caso di BIS dotato di TMDI e  $u_{I0,max}$  rappresenta il valore di picco dello spostamento del BIS non controllato alla corrispondente frequenza e ampiezza dell'azione. Valori dello spostamento normalizzato  $d_I(\bar{t})$  inferiori all'unità significano che il sistema di controllo risulta efficace nel ridurre il valore di picco dello spostamento del BIS.



**Figura 8.13.** Sine sweep a blocchi. Spostamenti normalizzati  $d_i(\bar{t})$ , con  $i = I, T$ , dei gdl del BIS+TMDI ( $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ) in corrispondenza delle frequenze (a)  $f_1$ , (b)  $f_0$  e (c)  $f_2$  al variare del  $PGA$  dell'azione ( $PGA = 0.05, 0.10 g$ ).

Si può osservare come, per i  $PGA$  considerati, le due masse si muovono in fase con uno spostamento  $d_T(\bar{t})$  non significativamente più grande rispetto allo spostamento  $d_I(\bar{t})$  (la deformazione nell'isolatore del TMD è inferiore rispetto a quella del BIS) in corrispondenza delle frequenze  $f_1$  e  $f_0$ , Figg. 8.13 (a-b), mentre per la  $f_2$ , Fig. 8.13 (c), ad uno spostamento massimo del BIS è associato uno spostamento circa nullo della massa  $m_T$  (la deformazione nei due isolatori è confrontabile). La Fig. 8.13 (a) mostra come in corrispondenza della frequenza  $f_1$  lo spostamento del BIS in presenza del TMDI è maggiore rispetto al caso di solo sistema isolato, ma all'aumentare del  $PGA$  le differenze tra sistema controllato e non controllato risultano meno significative. Invece, per la frequenza  $f_0$ , Fig. 8.13 (b), si osserva come il sistema di controllo è in grado di ridurre in modo abbastanza significativo lo spostamento del BIS (i valori dello spostamento normalizzato  $d_I(\bar{t})$  sono inferiori a 0.5 per il  $PGA = 0.05 g$ ). Infine, si può osservare come per la frequenza  $f_2$  lo spostamento del BIS dotato di TMDI è circa uguale a quello del sistema isolato non controllato per il  $PGA = 0.05 g$ , mentre lo spostamento normalizzato  $d_I(\bar{t})$  assume valori maggiori dell'unità per il  $PGA = 0.10 g$ , Fig. 8.13 (c).

In conclusione in questo sottoparagrafo è stata valutata l'influenza dell'ampiezza

dell'azione sulla risposta dinamica del BIS con e senza sistema di controllo TMDI. Si è osservato come il comportamento non lineare del sistema è di tipo *softening* legato all'utilizzo di isolatori elastomerici ad alto smorzamento. Infatti all'aumentare dell'ampiezza dell'azione i valori delle frequenze in corrispondenza delle amplificazioni dinamiche diminuiscono, ovvero il sistema riduce la propria rigidità all'aumentare dell'ampiezza dell'azione. Inoltre è stato osservato come il sistema di controllo TMDI è in grado di ridurre in modo significativo e per un ampio range di frequenze la risposta del sistema isolato. Inoltre si è visto come gli urti legati ai giochi presenti nell'Inerter, particolarmente evidenti in termini di accelerazione tra i terminali del dispositivo, non risultano evidenti in termini di accelerazione nel sistema isolato.

### 8.3.2 Influenza delle proprietà inerziali del sistema di controllo

In questo sottoparagrafo si vuole valutare da un punto di vista sperimentale, l'influenza sulla risposta dinamica del sistema delle proprietà inerziali del TMDI, ovvero il rapporto di inertanza  $\beta_i$  e il rapporto di massa  $\mu_i$ , con  $i = 1 - 3$ , a partire dalla configurazione di riferimento ( $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ).

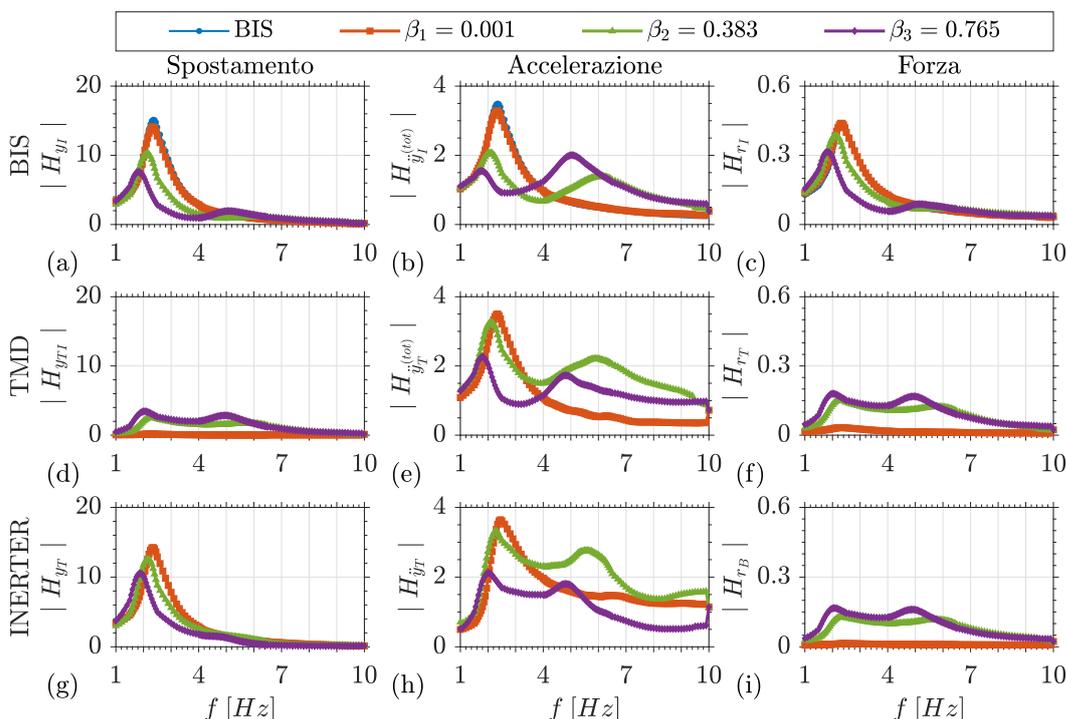
La Fig. 8.14 mostra il modulo delle curve di risposta in frequenza (FRC) relative alle nove grandezze di risposta definite nell'Eq. 8.1, ricavate nel caso di azione di tipo sine sweep a blocchi ( $PGA = 0.10g$ ) al variare del rapporto di inertanza  $\beta_i$  del sistema, con  $i = 1 - 3$ . Le grandezze di risposta sono riportate in una matrice  $3 \times 3$  in cui lungo le righe si riportano partendo dall'alto i parametri di risposta, rispettivamente del BIS, del TMD e dell'Inerter, mentre lungo le colonne si riportano a partire da sinistra, rispettivamente, lo spostamento, l'accelerazione e la forza dei tre precedenti componenti.

La Figura 8.14 mostra che le frequenze  $f_1$  e  $f_2$  corrispondenti alle amplificazioni dinamiche diminuiscono all'aumentare del rapporto di inertanza e, ad eccezione del caso  $\beta_1$  in cui il valore dell'inertanza è trascurabile, in tutti gli altri casi la frequenza  $f_1$  corrispondente alla prima amplificazione dinamica è inferiore rispetto alla frequenza  $f_0$  del BIS non controllato.

Per le risposte del BIS, Figg. 8.14 (a-c), all'aumentare dell'inertanza del dispositivo Inerter, l'ampiezza della prima amplificazione dinamica diminuisce, mentre quella relativa alla seconda aumenta. La seconda amplificazione dinamica è maggiormente evidente in termini di accelerazione, Fig. 8.14 (b), rispetto allo spostamento, Fig. 8.14 (a). Inoltre per  $\beta_1$ , le FRC mostrano una sola amplificazione dinamica, legata al fatto che lo spostamento relativo tra le due masse è molto piccolo (a cui corrisponde una rigidità del secondo isolatore relativamente elevata) e quindi la seconda amplificazione dinamica è caratterizzata da una frequenza  $f_2$  relativamente elevata. Infine, si evince come, all'aumentare del rapporto di inertanza, il sistema di controllo TMDI risulta particolarmente efficace nel ridurre sia il valore massimo che l'area sottesa alla curva di risposta in frequenza relativa allo spostamento e alla forza del BIS.

Le curve di risposta in frequenza dello spostamento del TMD e della forza nel TMD e nell'Inerter, Figg. 8.14 (d,f,i), presentano la caratteristica di avere un'ampiezza quasi costante per un'ampia banda di frequenza.

A parità di inertanza, l'ampiezza delle amplificazioni dinamiche in termini di accelerazione nei tre componenti, Figg. 8.14 (b,e,h), sono paragonabili, mentre in

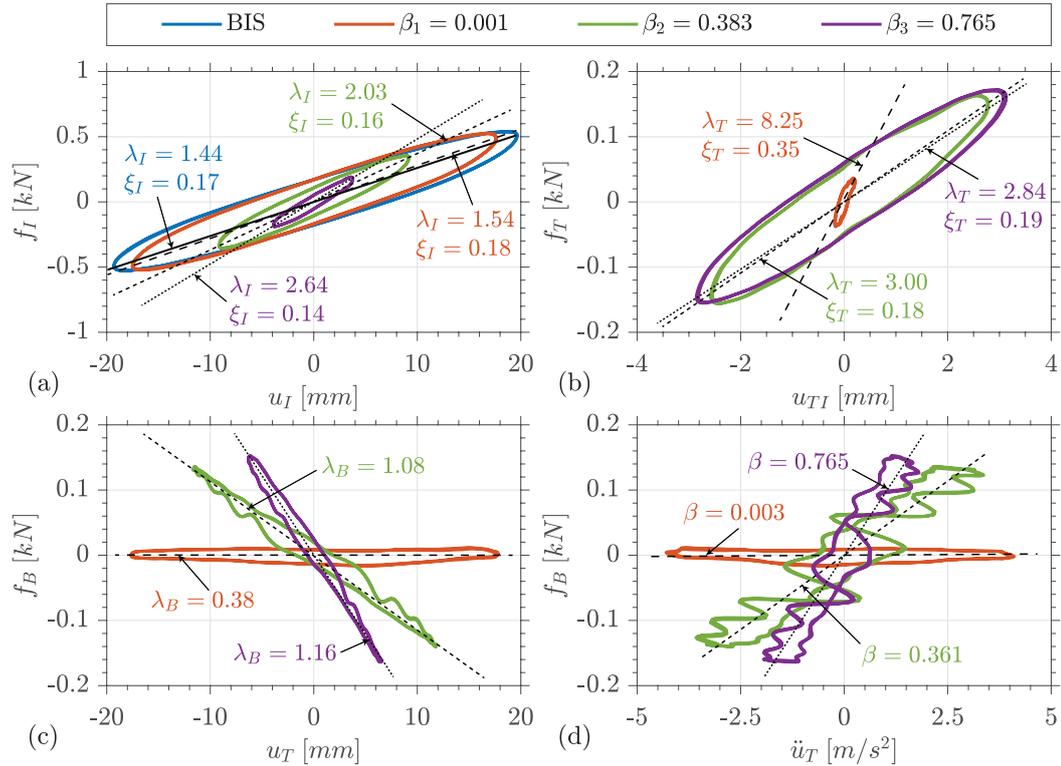


**Figura 8.14.** Sine sweep a blocchi. Curve di risposte in frequenze delle grandezze di risposta per diverse configurazioni testate al variare dell'inertanza ( $PGA = 0.10g$  e  $\mu_2 = 0.080$ ).

termini di spostamento l'ampiezza della prima amplificazione dinamica nel BIS e nell'Inerter, Figg. 8.14 (a,g), sono maggiori rispetto a quella del TMD, Fig. 8.14 (d). Infine la prima amplificazione dinamica del BIS in termini di forza, Fig. 8.14 (c) è maggiore rispetto a quella del TMD e dell'Inerter Figg. 8.14 (f,i).

In Fig. 8.15 si riportano, in corrispondenza della frequenza del sistema non controllato  $f_0 = 2.35 Hz$ , i legami costitutivi forza-spostamento relativi al BIS, al TMD e all'Inerter, rispettivamente Figg. 8.15 (a-c), e il legame costitutivo forza-accelerazione relativo all'Inerter, Fig. 8.15 (d), al variare del rapporto di inertanza  $\beta_i$ , con  $i = 1 - 3$ . In particolare in Fig. 8.15 (d), il parametro  $\beta = b/m_I$  indica il rapporto di inertanza stimato dal grafico  $f_B - \ddot{u}_T$ , dove  $b$  rappresenta il valore di inertanza stimato (corrispondente alla pendenza della retta rappresentata).

In Fig. 8.15 (a) si osserva come, rispetto al caso di sistema non controllato (curva blu), all'aumentare di  $\beta$  il valore massimo della forza  $f_I$  e dello spostamento  $u_I$  si riducono (con conseguente aumento della rigidità equivalente dell'isolatore), mentre il fattore di smorzamento equivalente  $\xi_I$  rimane circa invariato. Invece la Fig. 8.15 (b) relativa al legame forza-spostamento dell'isolatore del TMD mostra come all'aumentare del rapporto di inertanza il valore massimo della forza  $f_I$  e dello spostamento  $u_I$  aumentano (con conseguente riduzione della rigidità equivalente dell'isolatore), mentre, ad eccezione del caso  $\beta_1$ , il fattore di smorzamento equivalente  $\xi_I$  rimane circa invariato. Inoltre si evince come all'aumentare dell'inertanza l'energia dissipata dall'isolatore del BIS si riduce mentre quella dissipata dall'isolatore del TMD aumenta. Infine, il legame forza-spostamento dell'Inerter



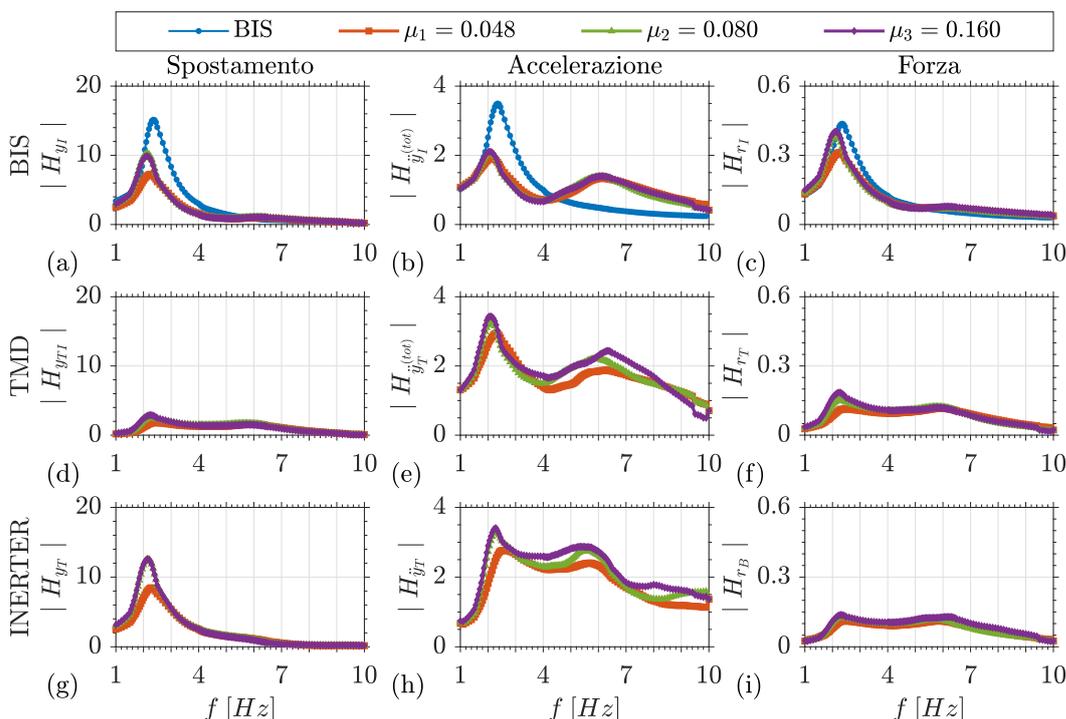
**Figura 8.15.** Sine sweep a blocchi. Legami forza-spostamento (a)  $f_I - u_I$ , (b)  $f_T - u_{TI}$  e (c)  $f_B - u_T$ , e forza-accelerazione (d)  $f_B - \ddot{u}_T$  per diverse configurazioni testate al variare dell'inertanza ( $PGA = 0.10 g$ ,  $f_0 = 2.35 Hz$  e  $\mu_2 = 0.080$ ).

evidenzia una rigidezza negativa che aumenta all'aumentare dell'inertanza del dispositivo, Fig. 8.15 (c), mentre si può osservare come dal legame forza-accelerazione, Fig. 8.15 (d), è possibile stimare valori di inertanza che sono molto simili a quelli nominali.

La Fig. 8.16 mostra il modulo delle curve di risposta in frequenza (FRC) relative alle nove grandezze di risposta definite nell'Eq. 8.1, ricavate nel caso di azione di tipo sine sweep a blocchi ( $PGA = 0.10 g$ ) al variare del rapporto di massa  $\mu_i$  del sistema, con  $i = 1 - 3$ .

La Figura 8.16 mostra come le curve di risposta in frequenza sono poco influenzate dalla massa del sistema di controllo, infatti le amplificazioni dinamiche sono fondamentalmente le stesse in tutti i casi analizzati. In ogni caso la tendenza che emerge è che le prestazioni migliorano, anche se in modo non troppo significativo, al diminuire della massa secondaria. Questa tendenza era emersa anche nel Capitolo 4 dove per rapporti di inertanza relativamente elevati come in questo caso ( $\beta_2 = 0.383$ ) il sistema TID ( $\mu = 0$ ) risulta più efficace rispetto al sistema TMDI. Inoltre, ad eccezione dello spostamento del BIS e dell'Inerter, Figg. 8.16 (a,g), e della forza del BIS, Fig. 8.16 (c), le curve di risposta in frequenza delle altre grandezze di risposta mostrano sempre due amplificazioni dinamiche, indipendentemente dal rapporto di massa.

In Fig. 8.17 si riportano, in corrispondenza della frequenza del sistema non

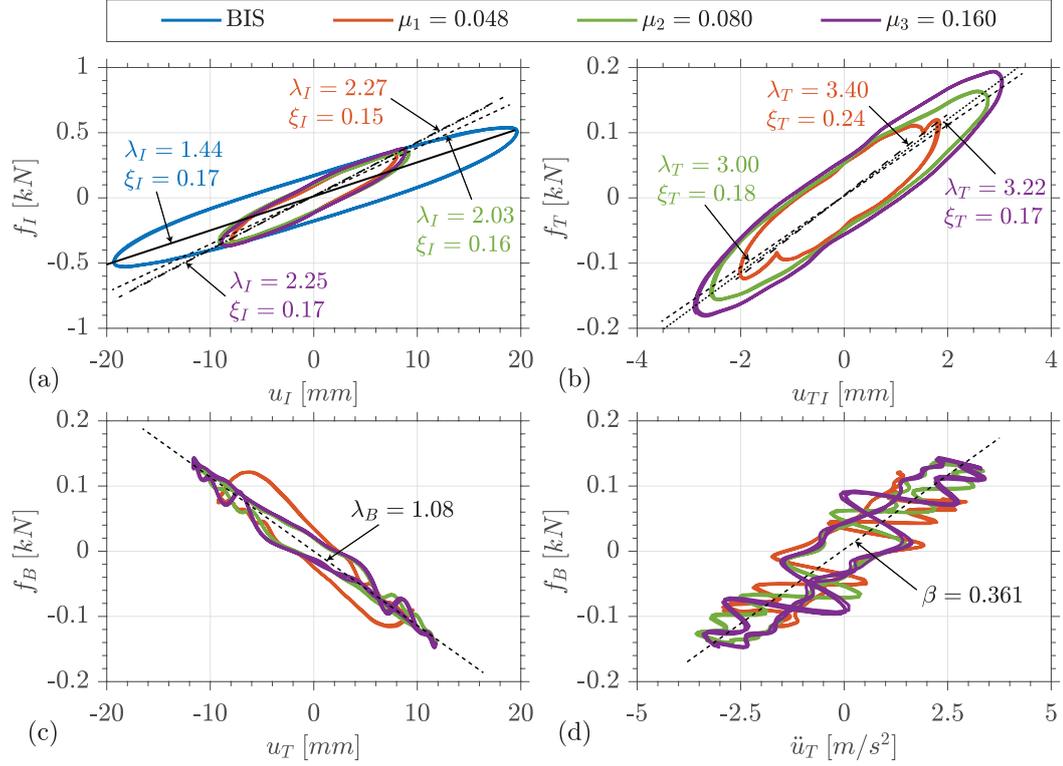


**Figura 8.16.** Sine sweep a blocchi. Curve di risposte in frequenze delle grandezze di risposta per diverse configurazioni testate al variare della massa del sistema di controllo ( $PGA = 0.10 g$  e  $\beta_2 = 0.383$ ).

controllato  $f_0 = 2.35 Hz$ , i legami costitutivi forza-spostamento relativi al BIS, al TMD e all’Inerter, rispettivamente Fig. 8.15 (a-c), e il legame costitutivo forza-accelerazione relativo all’Inerter, Fig. 8.15 (d), al variare del rapporto di massa  $\mu_i$ , con  $i = 1 - 3$ .

Si può osservare come i legami relativi all’isolatore del BIS e all’Inerter, Fig. 8.17 (a,c,d) risultano poco influenzati dal rapporto di massa del sistema di controllo, mentre il legame forza-spostamento dell’isolatore del TMD, Fig. 8.17 (b), è caratterizzato da un’energia dissipata che aumenta all’aumentare della massa del sistema di controllo.

In conclusione in questo sotto sottoparagrafo è stata valutata l’influenza delle proprietà inerziali del sistema di controllo sulla risposta dinamica del sistema isolato e di controllo TMDI. Si è visto come le evidenze sperimentali mostrano analoghe tendenze osservate negli studi numerici illustrati nel Capitolo 4 in quanto l’efficacia del sistema di controllo aumenta all’aumentare dell’inertanza e per rapporti di inertanza relativamente elevati la presenza di una massa nel sistema di controllo risulta trascurabile. Infine dalle curve di risposta in frequenza delle risposte del BIS è emerso come il sistema di controllo TMDI è in grado di ridurre lo spostamento e l’accelerazione del BIS in un range di frequenze relativamente ampio.



**Figura 8.17.** Sine sweep a blocchi. Legami forza-spostamento (a)  $f_I - u_I$ , (b)  $f_T - u_{TI}$  e (c)  $f_B - u_T$ , e forza-accelerazione (d)  $f_B - \ddot{u}_T$  per diverse configurazioni testate al variare della massa del sistema di controllo ( $PGA = 0.10 g$ ,  $f_0 = 2.35 Hz$  e  $\beta_2 = 0.383$ ).

## 8.4 Valutazione dell'efficacia sismica

In questo paragrafo si vuole valutare da un punto di vista sperimentale l'efficacia sismica del sistema di controllo TMDI nel controllare la risposta di sistema isolato alla base. Al fine di perseguire questo obiettivo inizialmente è stata considerata un'azione di tipo rumore bianco casuale e successivamente l'efficacia è stata valutata mediante accelerogrammi naturali.

L'efficacia sismica è stata valutata mediante tre gruppi di indici di prestazione che in termini di varianza sono stati definiti come:

$$\begin{aligned}
 d_I &= \frac{\sigma_{u_I}^2}{\sigma_{u_{I0}}^2}, & a_I &= \frac{\sigma_{\ddot{u}_I^{(tot)}}^2}{\sigma_{\ddot{u}_{I0}^{(tot)}}^2}, & p_I &= \frac{\sigma_{f_I}^2}{\sigma_{f_{I0}}^2}, \\
 d_{TI} &= \frac{\sigma_{u_{TI}}^2}{\sigma_{u_{I0}}^2}, & a_T &= \frac{\sigma_{\ddot{u}_T^{(tot)}}^2}{\sigma_{\ddot{u}_{I0}^{(tot)}}^2}, & p_T &= \frac{\sigma_{f_T}^2}{\sigma_{f_{I0}}^2}, \\
 d_T &= \frac{\sigma_{u_T}^2}{\sigma_{u_{I0}}^2}, & \dot{d}_T &= \frac{\sigma_{\ddot{u}_T}^2}{\sigma_{\ddot{u}_{I0}^{(tot)}}^2}, & p_B &= \frac{\sigma_{f_B}^2}{\sigma_{f_{I0}}^2},
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

dove  $\sigma_{u_{I0}}^2$ ,  $\sigma_{\ddot{u}_{I0}^{(tot)}}^2$  e  $\sigma_{f_{I0}}^2$  sono rispettivamente le varianze dello spostamento, dell'ac-

celerazione assoluta e della forza del BIS non controllato. Invece in termini di valore quadratico medio (*rms*) gli indici di prestazione, indicati con l'apice  $\wedge$ , sono stati definiti come:

$$\begin{aligned}\hat{d}_I &= \frac{\hat{u}_I}{\hat{u}_{I0}}, & \hat{a}_I &= \frac{\hat{u}_I^{(tot)}}{\hat{u}_{I0}^{(tot)}}, & \hat{p}_I &= \frac{\hat{f}_I}{\hat{f}_{I0}}, \\ \hat{d}_{TI} &= \frac{\hat{u}_{TI}}{\hat{u}_{I0}}, & \hat{a}_T &= \frac{\hat{u}_T^{(tot)}}{\hat{u}_{I0}^{(tot)}}, & \hat{p}_T &= \frac{\hat{f}_T}{\hat{f}_{I0}}, \\ \hat{d}_T &= \frac{\hat{u}_T}{\hat{u}_{I0}}, & \hat{d}_T &= \frac{\hat{u}_T}{\hat{u}_{I0}^{(tot)}}, & \hat{p}_B &= \frac{\hat{f}_B}{\hat{f}_{I0}},\end{aligned}\quad (8.3)$$

dove  $\hat{u}_{I0}$ ,  $\hat{u}_{I0}^{(tot)}$  e  $\hat{f}_{I0}$  sono rispettivamente il valore quadratico medio dello spostamento, dell'accelerazione assoluta e della forza del BIS non controllato e le quantità con l'apice  $\wedge$  indicano il valore quadratico medio delle grandezze di risposta del sistema isolato dotato di TMDI. Infine in termini di valore di picco, indicati con l'apice  $\bar{\phantom{x}}$ , sono stati definiti come:

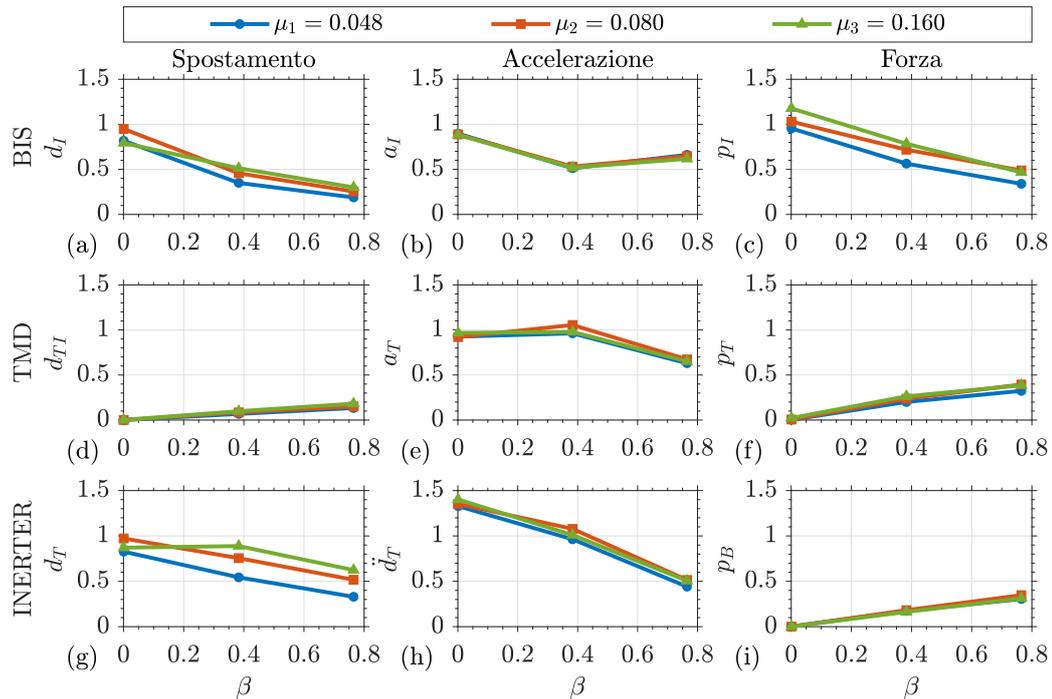
$$\begin{aligned}\bar{d}_I &= \frac{u_{I,max}}{u_{I0,max}}, & \bar{a}_I &= \frac{\ddot{u}_{I,max}^{(tot)}}{\ddot{u}_{I0,max}^{(tot)}}, & \bar{p}_I &= \frac{f_{I,max}}{f_{I0,max}}, \\ \bar{d}_{TI} &= \frac{u_{TI,max}}{u_{I0,max}}, & \bar{a}_T &= \frac{\ddot{u}_{T,max}^{(tot)}}{\ddot{u}_{I0,max}^{(tot)}}, & \bar{p}_T &= \frac{f_{T,max}}{f_{I0,max}}, \\ \bar{d}_T &= \frac{u_{T,max}}{u_{I0,max}}, & \bar{d}_T &= \frac{\ddot{u}_{T,max}}{\ddot{u}_{I0,max}^{(tot)}}, & \bar{p}_B &= \frac{f_{B,max}}{f_{I0,max}},\end{aligned}\quad (8.4)$$

dove  $u_{I0,max}$ ,  $\ddot{u}_{I0,max}^{(tot)}$  e  $f_{I0,max}$  sono rispettivamente il valore di picco dello spostamento, dell'accelerazione assoluta e della forza del BIS non controllato e le quantità con il pedice *max* indicano il valore di picco delle grandezze di risposta del sistema isolato dotato di TMDI. Si noti che se gli indici di prestazione assumono valori inferiori all'unità il sistema di controllo è efficace nel ridurre la risposta strutturale.

#### 8.4.1 Azione di tipo rumore bianco casuale

Per l'azione di tipo rumore bianco casuale (caratterizzata da una densità spettrale di potenza costante tra 0.5 e 10 Hz e una varianza  $\sigma_{\ddot{u}_G}^2 = 1.648 m^2/s^4$ ), in Fig. 8.18 si riportano gli indici di prestazione in termini di varianza (definiti nell'Eq. 8.2) al variare del rapporto di inertanza  $\beta$  e per tre valori del rapporto di massa ( $\mu = 0.048, 0.080, 0.160$ ). Gli indici di prestazione sono riportati in una matrice  $3 \times 3$  in cui lungo le righe si riportano partendo dall'alto i parametri di risposta, rispettivamente del BIS, del TMD e dell'Inerter, mentre lungo le colonne si riportano a partire da sinistra, rispettivamente, lo spostamento, l'accelerazione e la forza dei tre precedenti componenti.

Osservando le grandezze di risposta del BIS, Fig. 8.18 (a-c), si può osservare come i valori degli indici di prestazione generalmente per tutti i casi testati risultano inferiori all'unità, a dimostrazione dell'efficacia del sistema TMDI nel controllare



**Figura 8.18.** Rumore bianco casuale. Indici di prestazione in termini di varianza al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  e per diversi valori del rapporto di massa  $\mu$  ( $\sigma_{u_G}^2 = 1.648 m^2/s^4$ ).

la risposta di sistemi isolati alla base. In particolare si può osservare come, all'aumentare del rapporto di inerzia  $\beta$ , le risposte in termini di spostamento e forza, Figg. 8.18 (a,c), diminuiscono sempre, mentre l'accelerazione del sistema isolato, Figg. 8.18 (b), inizialmente diminuisce per poi aumentare, ma con valori sempre inferiori all'unità. Inoltre si osserva come, al diminuire del rapporto di massa  $\mu$ , il sistema di controllo risulta più efficace nel controllare gli spostamenti e la forza del BIS, mentre non si evidenziano significative variazioni sull'efficacia in termini di accelerazione del sistema isolato  $a_I$ .

I parametri di risposta del TMD e dell'Inerter risultano meno influenzati dalla variazione della massa del TMD, ad eccezione dello spostamento dell'Inerter  $d_T$ , Figg. 8.18 (g), che generalmente aumenta all'aumentare del rapporto di masse  $\mu$  e diminuisce all'aumentare del rapporto di inerzia  $\beta$ . L'accelerazione del TMD e dell'Inerter, Figg. 8.18 (e,h), generalmente diminuiscono all'aumentare dell'inerzia, mentre lo spostamento del TMD e la forza del TMD e dell'Inerter, Figg. 8.18 (d,f,i) aumentano quasi linearmente con  $\beta$ . Infine si osserva come, per valori di  $\beta$  relativamente piccoli, i valori dell'indice  $d_T$ , relativo allo spostamento dell'Inerter, assumono valori prossimi all'unità e quindi questo parametro può rappresentare un importante vincolo per la progettazione del dispositivo Inerter.

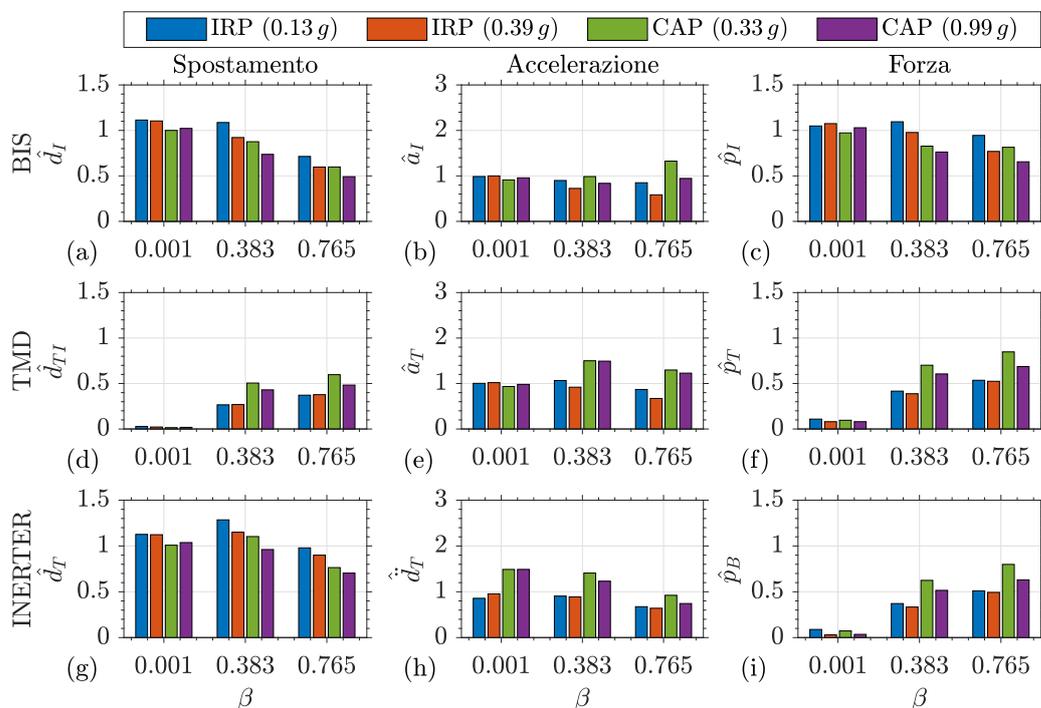
#### 8.4.2 Accelerogrammi naturali

L'efficacia sismica del sistema di controllo è stata infine valutata attraverso l'utilizzo dei sei accelerogrammi naturali di terremoti registrati riportati in Tabella 2.1. Nel

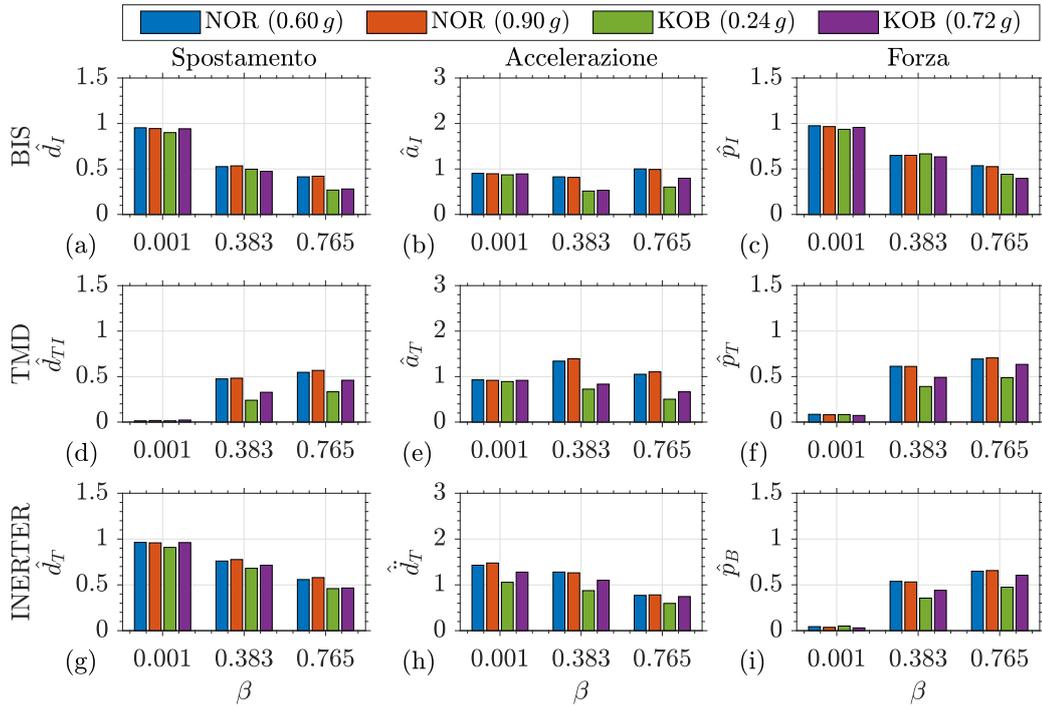
seguito, attraverso gli indici di prestazione definiti nelle Eqq. 8.3 e 8.4, l'efficacia sismica è stata valutata prima nel caso di terremoti di tipo near-fault caratterizzati da una preponderante componente impulsiva (ovvero Irpinia-Sturno, Cape Mendocino-Petrolia, Northridge-Sylmar-Olive View e Kobe-KJMA) e successivamente nel caso di terremoti di tipo far-field (ovvero Imperial Valley-El Centro e Tokachi-Oki-Hachinohe). I risultati di questo paragrafo sono riferiti al caso  $\mu_2 = 0.080$  (vista la modesta influenza del rapporto di massa sulla risposta del sistema), mentre per ciascun accelerogramma è stata indagata l'influenza del rapporto di inerzia  $\beta$  e del *PGA* sull'efficacia sismica del TMDI.

### Terremoti near-fault

Nelle Figg. 8.19 e 8.20 si riportano gli indici di prestazione in termini di valore quadratico medio (definiti nell'Eq. 8.3), relativi rispettivamente agli accelerogrammi di Irpinia-Sturno e Cape Mendocino-Petrolia e agli accelerogrammi di Northridge-Sylmar-Olive View e Kobe-KJMA, per i tre diversi valori del rapporto di inerzia ( $\beta = 0.001, 0.383, 0.765$ ) e per due diversi livelli di *PGA* per ciascun accelerogramma. Gli indici di prestazione sono riportati in una matrice  $3 \times 3$  in cui lungo le righe si riportano partendo dall'alto i parametri di risposta, rispettivamente del BIS, del TMD e dell'Inerter, mentre lungo le colonne si riportano a partire da sinistra, rispettivamente, lo spostamento, l'accelerazione e la forza dei tre precedenti componenti.



**Figura 8.19.** Accelerogrammi di Irpinia-Sturno (IRP) e Cape Mendocino-Petrolia (CAP). Indici di prestazione in termini di valore quadratico medio al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  ( $\mu_2 = 0.080$  e *PGA* dell'azione riportato tra parentesi in legenda).



**Figura 8.20.** Accelerogrammi di Northridge-Sylmar-Olive View (NOR) e Kobe-KJMA (KOB). Indici di prestazione in termini di valore quadratico medio al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  ( $\mu_2 = 0.080$  e  $PGA$  dell'azione riportato tra parentesi in legenda).

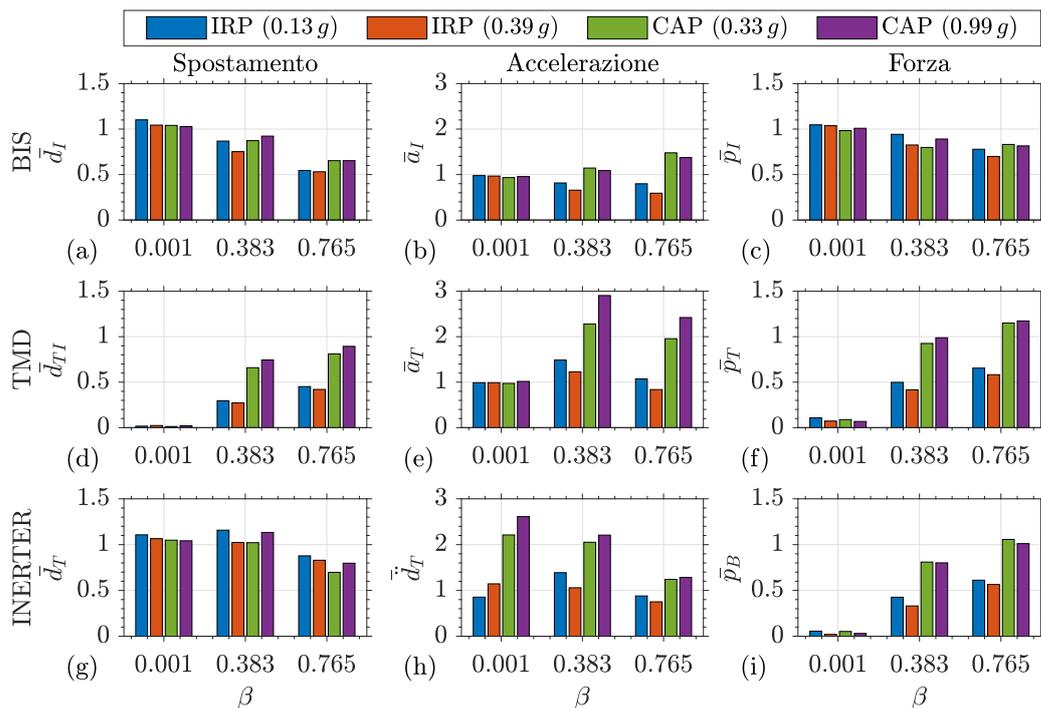
Le Figg. 8.19 (a) e 8.20 (a) mostrano come l'indice di prestazione  $\hat{d}_I$  per tutti i casi analizzati assume generalmente valori inferiori all'unità, a conferma dell'efficacia del TMDI nel ridurre lo spostamento di sistemi isolati alla base. In particolare il sistema di controllo risulta maggiormente efficace nel caso dell'accelerogramma di Kobe-KJMA (per  $\beta_3 = 0.765$  e  $PGA = 0.24g$  si ha una riduzione del 73%) e meno efficace nel caso dell'accelerogramma di Irpinia-Sturmo (per  $\beta_3 = 0.765$  e  $PGA = 0.13g$  si ha una riduzione del 29%). Si osserva inoltre come, per tutti gli accelerogrammi di tipo near-fault, all'aumentare del rapporto di inerzia  $\beta$  corrisponde sempre una riduzione dell'indice  $\hat{d}_I$ . Infine si evince come l'indice  $\hat{d}_I$  rimane generalmente invariato al variare del  $PGA$  dell'accelerogramma, ma ci sono casi in cui all'aumentare dello stesso è associata una maggiore efficacia del sistema di controllo nel ridurre lo spostamento del sistema isolato (per  $\beta_3 = 0.765$  e per l'accelerogramma di Cape Mendocino-Petrolia si ha una variazione del 18% tra i due  $PGA$  considerati).

Nelle Figg. 8.19 (b) e 8.20 (b) si può osservare come l'indice di prestazione  $\hat{a}_I$  generalmente assume valori inferiori o vicini l'unità a conferma dell'efficacia del sistema di controllo di ridurre gli spostamenti del BIS senza incrementarne in modo significativo le accelerazioni. Invece, gli indici  $\hat{p}_I$  e  $\hat{d}_T$ , Figg. 8.19 (c,g) e 8.20 (c,g), relativi rispettivamente alla forza nel BIS e allo spostamento dell'Inerter mostrano tendenze analoghe a quelle già commentate per l'indice  $\hat{d}_I$ .

Gli indici di prestazione  $\hat{d}_{TI}$ ,  $\hat{p}_T$  e  $\hat{p}_B$ , Figg. 8.19 (d,f,i) e 8.20 (d,f,i), relativi

rispettivamente allo spostamento del TMD e alla forza nel TMD e nell'Inerter, aumentano all'aumentare del rapporto di inerzia  $\beta$ , ma per i diversi casi analizzati assumono sempre valori inferiori all'unità. Infine, nelle Figg. 8.19 (e,h) e 8.20 (e,h) si può osservare come rispettivamente gli indici  $\hat{a}_T$  e  $\hat{d}_T$  assumono generalmente valori prossimi o maggiori dell'unità.

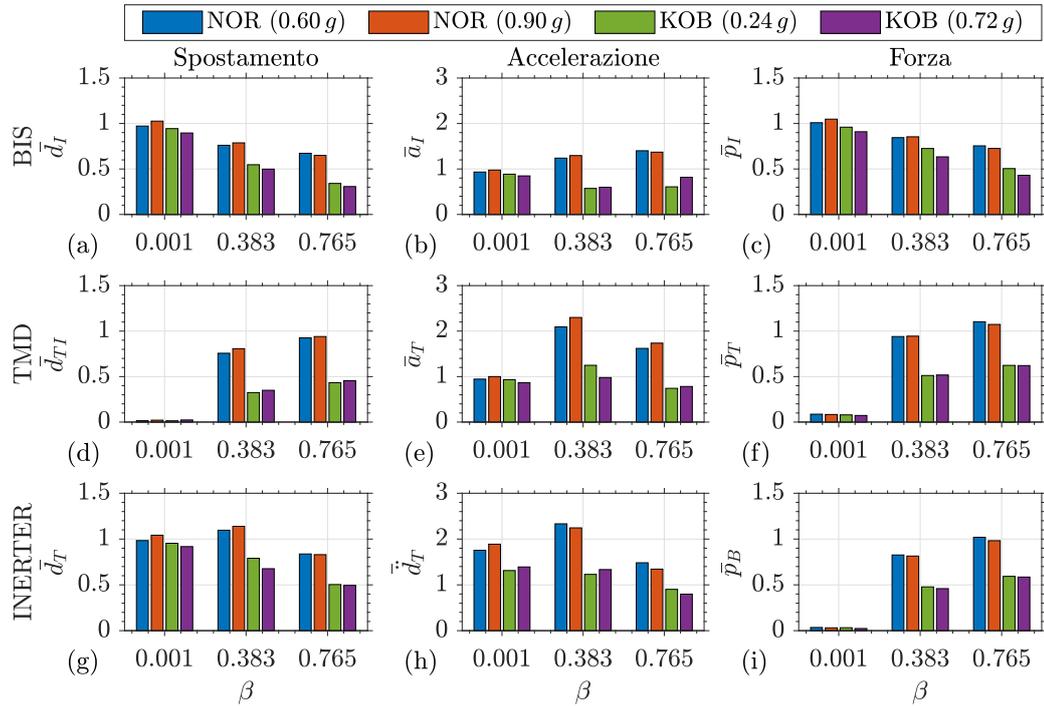
Nelle Figg. 8.21 e 8.22 si riportano gli indici di prestazione in termini di valore di picco (definiti nell'Eq. 8.4) per gli stessi casi mostrati nelle Figg. 8.19 e 8.20.



**Figura 8.21.** Accelerogrammi di Irpinia-Sturno (IRP) e Cape Mendocino-Petrolia (CAP). Indici di prestazione in termini di valore di picco al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  ( $\mu_2 = 0.080$  e  $PGA$  dell'azione riportato tra parentesi in legenda).

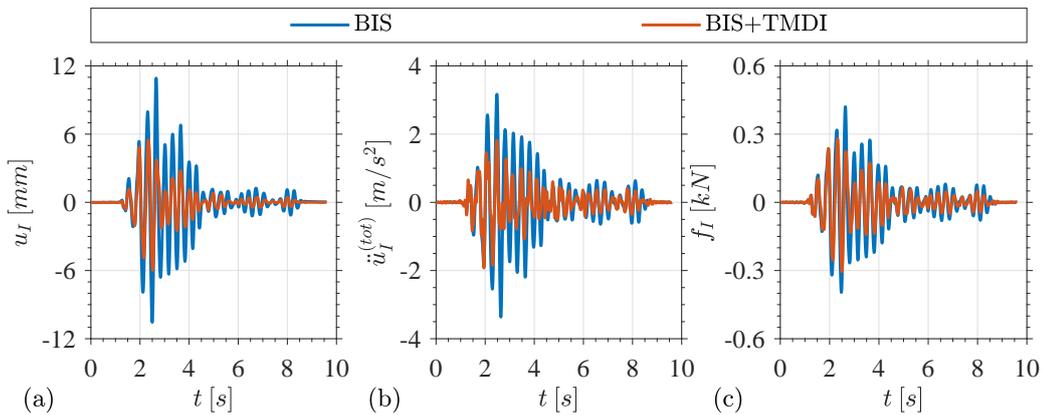
In generale si può osservare come le tendenze osservate per gli indici in termini di valore quadratico medio risultano tipicamente confermate anche per gli indici in termini di valore di picco. In ogni caso si può osservare come tipicamente l'efficacia sismica nel ridurre lo spostamento del sistema isolato risulta maggiore in termini di valore quadratico medio che in termini di valore di picco, ad eccezione dell'accelerogramma di Irpinia-Sturno dove si ha che  $\hat{d}_I > \bar{d}_I$ . La maggiore differenza tra i due diversi gruppi di indici è legata alle accelerazioni del TMD e dell'Inerter, dove si può osservare come gli indici in termini di valore di picco, Figg. 8.21 (e,h) e 8.22 (e,h), risultano tipicamente maggiori rispetto a quelli in termini di valore quadratico medio, Figg. 8.19 (e,h) e 8.20 (e,h). Questa tendenza è stata attribuita agli urti legati ai giochi tra gli ingranaggi che compongono l'Inerter che causano picchi di accelerazione tra i terminali del dispositivo.

Nelle Figg. 8.23 e 8.24 si riportano le storie temporali delle risposte del sistema isolato con e senza sistema di controllo TMDI ( $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ) rispetti-



**Figura 8.22.** Accelerogrammi di Northridge-Sylmar-Olive View (NOR) e Kobe-KJMA (KOB). Indici di prestazione in termini di valore di picco al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  ( $\mu_2 = 0.080$  e  $PGA$  dell'azione riportato tra parentesi in legenda).

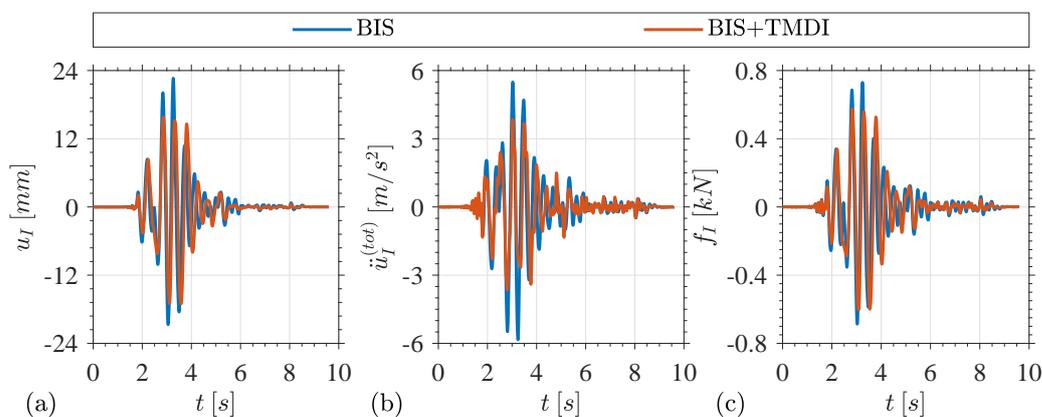
vamente per gli accelerogrammi di Kobe-KJMA ( $PGA = 0.24 g$ ) e Irpinia-Sturmo ( $PGA = 0.39 g$ ).



**Figura 8.23.** Accelerogramma di Kobe-KJMA. Storie temporali in termini di (a) spostamento  $u_I$ , (b) accelerazione  $\ddot{u}_I^{(tot)}$  e (c) forza  $f_I$  del BIS con e senza sistema di controllo TMDI ( $PGA = 0.24 g$ ,  $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ).

La Fig. 8.23 mostra come, nonostante la natura impulsiva del terremoto di Kobe-KJMA, il sistema di controllo TMDI è in grado di ridurre anche in modo significativo lo spostamento del BIS, Fig. 8.23 (a), fin dai primi cicli di oscillazione. Discorso analogo anche per l'accelerazione e la forza del sistema isolato, Figg. 8.23 (c-d).

Infatti per l'accelerogramma di Kobe-KJMA, il sistema di controllo ha il tempo necessario per attivarsi e risultare efficace sia in termini di valore quadratico medio che di picco come già osservato dagli indici di prestazione riportati nelle Figg. 8.20 e 8.22.



**Figura 8.24.** Accelerogramma di Irpinia-Sturmo. Storie temporali in termini di (a) spostamento  $u_I$ , (b) accelerazione  $\ddot{u}_I^{tot}$  e (c) forza  $f_I$  del BIS con e senza sistema di controllo TMDI ( $PGA = 0.39 g$ ,  $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ).

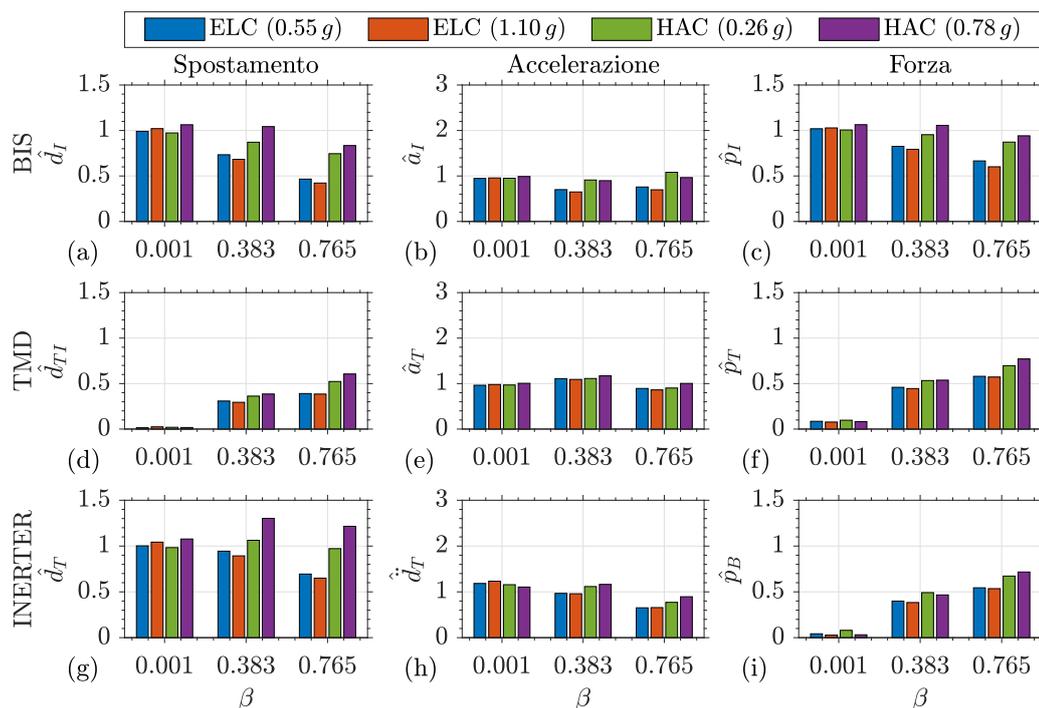
Per quanto riguarda invece il terremoto di Irpinia-Strurno, Fig. 8.24, si osserva come l'elevata componente impulsiva posizionata nella parte iniziale del segnale non permette al sistema di controllo di risultare efficace fin dall'inizio. In ogni caso il TMDI è in grado di ridurre i valori di picco delle risposte del sistema isolato soprattutto in termini di spostamento e accelerazione, Figg. 8.24 (a-b). Questo giustifica la diversa tendenza osservata nelle Figg. 8.19 e 8.21 dove, rispetto agli altri terremoti di tipo near-fault, l'efficacia sismica del sistema di controllo nel ridurre lo spostamento del BIS è maggiore in termini di valore di picco che in termini di valore quadratico medio.

### Terremoti far-field

Nelle Figg. 8.25 e 8.26 si riportano rispettivamente gli indici di prestazione in termini di valore quadratico medio (definiti nell'Eq. 8.3) e in termini di valore di picco (definiti nell'Eq. 8.4) relativi a due diversi livelli di  $PGA$  degli accelerogrammi di Imperial Valley-El Centro e Tokachi-Oki-Hachinohe e per tre diversi valori del rapporto di inertanza ( $\beta = 0.001, 0.383, 0.765$ ).

A parità di proprietà inerziali del sistema di controllo, si può osservare come generalmente il TMDI risulta maggiormente efficace nel ridurre lo spostamento del sistema isolato nel caso dell'accelerogramma di Imperial Valley-El Centro rispetto a quello di Tokachi-Oki-Hachinohe (gli indici di prestazione  $\hat{d}_I$  e  $\bar{d}_I$ , rispettivamente Figg. 8.25 (a) e 8.26 (a), sono tipicamente inferiori). Inoltre, all'aumentare del rapporto di inertanza  $\beta$ , generalmente entrambi gli indici di prestazioni relativi allo spostamento del sistema isolato tendono a diminuire.

La Fig. 8.25 (b) mostra come per entrambi gli accelerogrammi l'indice  $\hat{a}_I$  assume valori inferiori o vicini l'unità, mentre l'indice  $\bar{a}_I$ , Fig. 8.26 (b), nel caso dell'accelerogramma di Tokachi-Oki-Hachinohe assume tipicamente valori anche maggiori



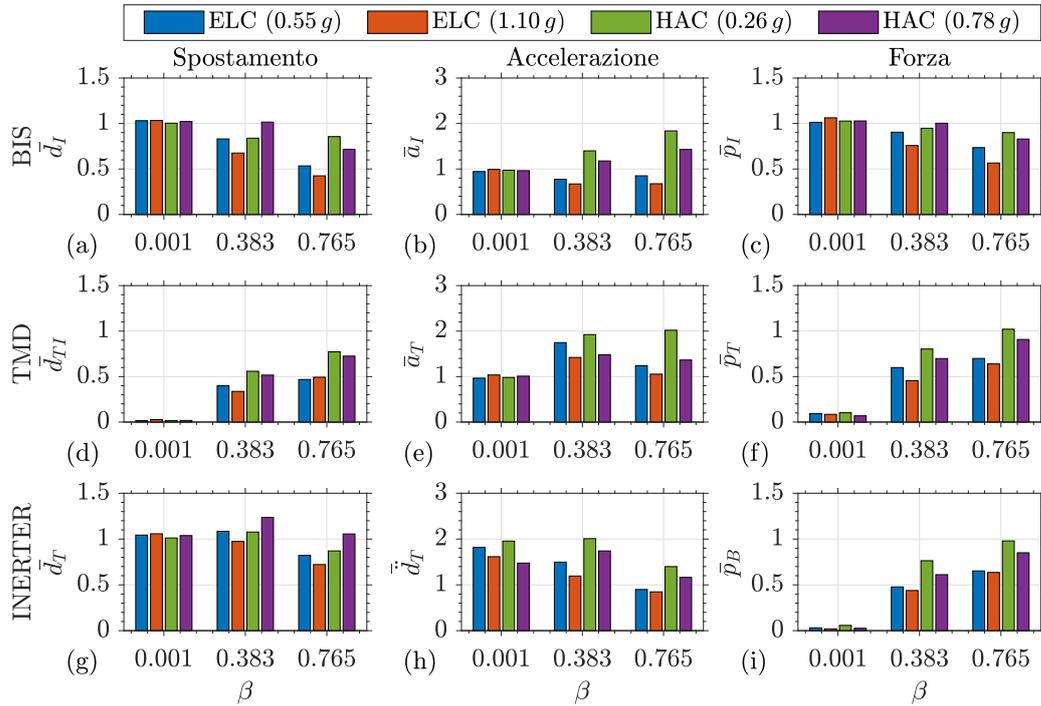
**Figura 8.25.** Accelerogrammi di Imperial Valley-El Centro (ELC) e Tokachi-Oki-Hachinohe (HAC). Indici di prestazione in termini di valore quadratico medio al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  ( $\mu_2 = 0.080$  e  $PGA$  dell'azione riportato tra parentesi in legenda).

dell'unità e aumenta all'aumentare del rapporto di inerzia. Per i restanti indici di prestazione si può osservare come questi mostrano generalmente le analoghe tendenze già osservate nel caso dei terremoti di tipo near-fault.

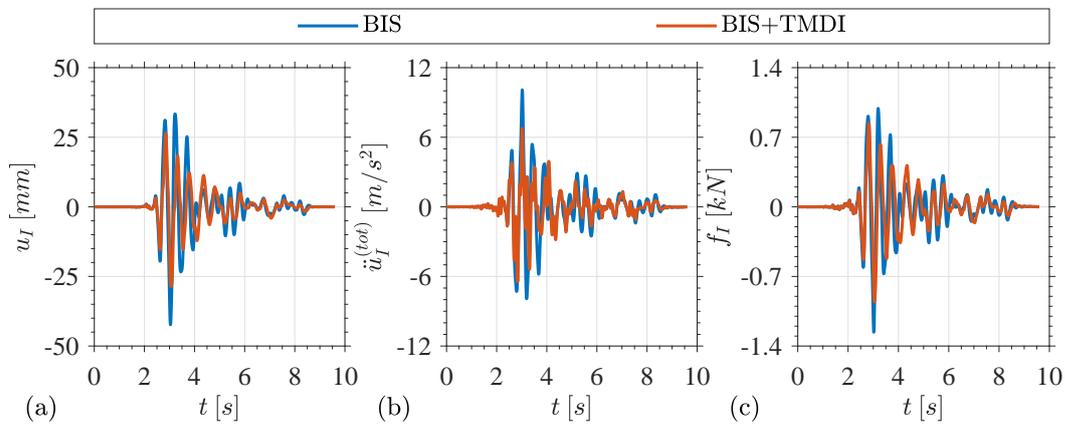
In Fig. 8.27 si riportano le storie temporali delle risposte del sistema isolato con e senza sistema di controllo TMDI ( $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ) per l'accelerogramma di Imperial Valley-El Centro ( $PGA = 1.10 g$ ).

Si osserva come il sistema di controllo è in grado di ridurre la risposta del sistema isolato sia in termini di valore quadratico medio che di picco. Le maggiori riduzioni si hanno in termini di spostamento  $u_I$  e accelerazione  $\ddot{u}_I^{(tot)}$ , Fig. 8.27 (a-b), rispetto alla forza  $f_I$ , Fig. 8.27 (c), dove le riduzioni risultano inferiori.

In conclusione, si è visto come il sistema di controllo TMDI risulta efficace nel ridurre lo spostamento del BIS senza incrementare, ovvero con incrementi poco significativi, le accelerazioni anche nel caso di input più realistici come gli accelerogrammi naturali. Inoltre, gli indici di prestazione, sia in termini di valore quadratico medio sia in termini di valori di picco, generalmente hanno evidenziato andamenti analoghi a quelli osservati nel caso di azioni semplificate come il rumore bianco casuale. Infine è emerso come anche da un punto di vista sperimentale questi sistemi di controllo risultano efficaci sia nel caso di terremoti far-field che nel caso di terremoti near-fault caratterizzati da un'elevata componente impulsiva.



**Figura 8.26.** Accelerogrammi di Imperial Valley-El Centro (ELC) e Tokachi-Oki-Hachinohe (HAC). Indici di prestazione in termini di valore di picco al variare del rapporto di inerzia  $\beta$  ( $\mu_2 = 0.080$  e  $PGA$  dell'azione riportato tra parentesi in legenda).



**Figura 8.27.** Accelerogramma di Imperial Valley-El Centro. Storie temporali in termini di (a) spostamento  $u_I$ , (b) accelerazione  $\ddot{u}_I^{tot}$  e (c) forza  $f_I$  del BIS con e senza sistema di controllo TMDI ( $PGA = 1.10 g$ ,  $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ).

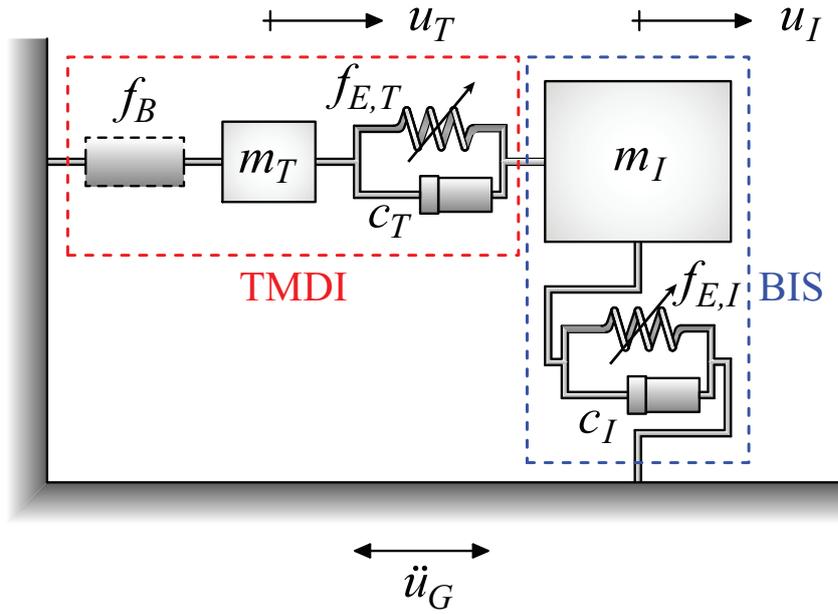
## 8.5 Definizione di un modello numerico

L'obiettivo di questo paragrafo è di definire un modello numerico che risulti interpretativo delle evidenze sperimentali del sistema isolato dotato di TMDI in precedenza commentate.

### 8.5.1 Modello numerico ed equazioni del moto

La risposta dinamica del modello fisico mostrato in Figura 8.1 è stata studiata anche mediante un modello numerico a 2 gdl nel quale la massa  $m_I$  e l'isolatore del BIS costituiscono il gdl relativo al BIS, mentre la massa  $m_T$ , l'isolatore del TMD e l'Inerter costituiscono il gdl relativo al sistema di controllo TMDI.

In Figura 8.28 si riporta il modello numerico utilizzato, dove  $u_I$  e  $u_T$  indicano rispettivamente gli spostamenti delle masse  $m_I$  e  $m_T$  rispetto al suolo, mentre con il simbolo  $u_{TI}$  è indicato lo spostamento relativo tra le due masse ( $u_{TI} = u_T - u_I$ ).



**Figura 8.28.** Modello numerico a 2 gdl interpretativo delle evidenze sperimentali del sistema isolato dotato di TMDI di Fig. 8.1.

Il modello reologico dei due isolatori elastomerici (relativi sia al BIS a sia al TMD), Fig. 8.2, è costituito da una molla elastica caratterizzata da una relazione forza-spostamento ( $f_{E,I} - u_I$  per l'isolatore del BIS e  $f_{E,T} - u_{TI}$  per l'isolatore del TMD) non lineare posta in parallelo ad uno smorzatore viscoso lineare caratterizzato da un coefficiente di smorzamento  $c_i$ , con  $i = I, T$ .

La relazione forza-spostamento delle molle elastiche relative ai due isolatori è definita dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} f_{E,I} &= k_{1,I} u_I - k_{2,I} u_I^2 \operatorname{sign}(u_I) + k_{3,I} u_I^3 \\ f_{E,T} &= k_{1,T} u_{TI} - k_{2,T} u_{TI}^2 \operatorname{sign}(u_{TI}) + k_{3,T} u_{TI}^3 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Le equazioni del moto del modello numerico, Fig. 8.28, possono essere scritte nel seguente modo:

$$\begin{aligned} m_I \ddot{u}_I + f_I &= -m_I \ddot{u}_G + f_T \\ m_T \ddot{u}_T &= -m_T \ddot{u}_G - f_B - f_T \\ f_I &= c_T \dot{u}_I + f_{E,I} \quad f_T = c_T (\dot{u}_T - \dot{u}_I) + f_{E,T} \end{aligned} \quad (8.6)$$

dove il punto sopra il simbolo indica la derivata rispetto al tempo  $t$  e  $f_B$  indica la forza nell'Inerter a seguito di uno spostamento tra i due terminali pari a  $u_T$  secondo il modello definito nel Sottoparagrafo 7.4.1.

### 8.5.2 Identificazione dei parametri e confronto numerico-sperimentale

L'obiettivo di questo sottoparagrafo è quello di identificare i parametri del modello numerico riportato in Fig. 8.28 in modo tale che risulti interpretativo delle evidenze sperimentali.

In questo caso tra le diverse configurazioni testate è stata selezionata a titolo esemplificativo quella di riferimento ( $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ) e sono stati assunti dei parametri noti, ovvero la massa del BIS  $m_I = 125 \text{ kg}$ , la massa del TMD  $m_T = 10 \text{ kg}$  e i parametri relativi al modello non lineare di Inerter identificati nel Sottoparagrafo 7.4.2 ( $f_y = 7.3 \text{ N}$ ,  $r_P = 0.018 \text{ m}$ ,  $J_B = 1.55 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2$ ,  $\omega_S = 106.96 \text{ rad/s}$ ,  $\xi_S = 0.25$ ,  $\varepsilon_1 = 0.0084 \text{ rad}$ ,  $\varepsilon_2 = 0.0056 \text{ rad}$  e  $\xi_B = 0.01$ ).

I parametri che definiscono il modello reologico dei due isolatori elastomerici, ovvero i coefficienti  $k_{1,i}$ ,  $k_{2,i}$  e  $k_{3,i}$  che definiscono il legame forza-spostamento delle molle elastiche non lineari e i coefficienti di smorzamento  $c_i$  degli smorzatori viscosi, con  $i = I, T$ , sono stati identificati sulla base delle misure sperimentali.

I parametri noti e i parametri da identificare sono stati collezionati rispettivamente all'interno dei vettori  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  nel seguente modo:

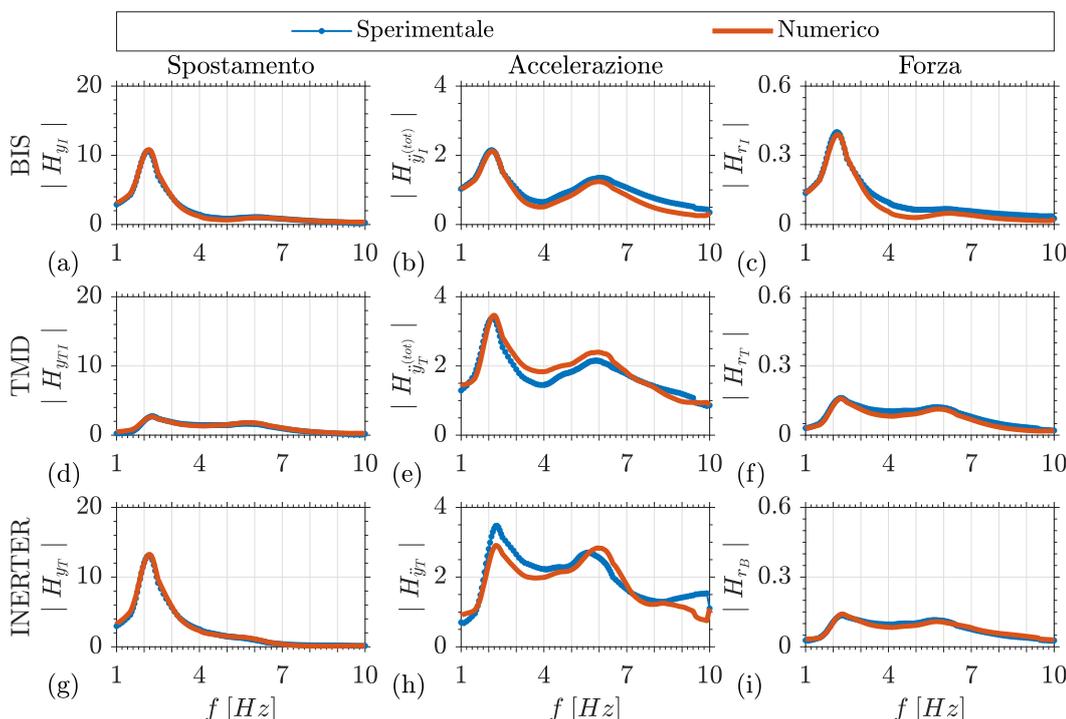
$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= [m_I, m_T, f_y, r_P, J_B, \omega_S, \xi_S, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \xi_B]^T \\ \mathbf{x}_2 &= [k_{1,I}, k_{2,I}, k_{3,I}, c_I, k_{1,T}, k_{2,T}, k_{3,T}, c_T]^T\end{aligned}\quad (8.7)$$

Un algoritmo di ottimizzazione ai minimi quadrati è stato utilizzato al fine ottenere la seguente minimizzazione:

$$\min_{\mathbf{x}_2} \sum_{\varphi} \left( \frac{|H_{\varphi,th}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| - |H_{\varphi,exp}|}{\max(|H_{\varphi,exp}|)} \right)^2 \quad \text{con } \varphi = y_I, \ddot{y}_I^{(tot)}, y_{TI}, y_T, r_B \quad (8.8)$$

Le curve di risposta in frequenza sperimentali  $H_{\varphi,exp}$  relative alla  $\varphi$ -esima grandezza di risposta sono riferite all'azione di tipo sine sweep a blocchi caratterizzata da un  $PGA = 0.10 g$  e al sistema di controllo TMDI nella configurazione di riferimento ( $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ). Le curve di risposta in frequenza numeriche  $H_{\varphi,th}$  sono state ricavate mediante la risoluzione del modello numerico definito nel precedente sottoparagrafo soggetto alla stessa azione alla base. Dalla procedura di ottimizzazione sono stati ricavati i seguenti parametri:  $k_{1,I} = 4.85 \times 10^4 \text{ N/m}$ ,  $k_{2,I} = 1.25 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ ,  $k_{3,I} = 1.88 \times 10^4 \text{ N/m}^3$ ,  $c_I = 582.20 \text{ Ns/m}$ ,  $k_{1,T} = 6.03 \times 10^4 \text{ N/m}$ ,  $k_{2,T} = 3.88 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $k_{3,T} = 1.98 \times 10^6 \text{ N/m}^3$  e  $c_T = 423.56 \text{ Ns/m}$ . Il confronto tra le FRC sperimentali e numeriche sono riportate in Fig. 8.29.

Si osserva come il modello dinamico proposto per interpretare i risultati sperimentali è in grado di cogliere con un soddisfacente grado di accuratezza sia le risposte del sistema isolato che quelle del sistema di controllo TMDI.



**Figura 8.29.** Confronto tra le curve di risposta in frequenza sperimentali e numeriche nel caso di azione di tipo sine sweep a blocchi per il sistema di controllo nella configurazione di riferimento ( $PGA = 0.10 g$ ,  $\beta_2 = 0.383$  e  $\mu_2 = 0.080$ ).

## 8.6 Conclusioni

In questo capitolo, sono stati presentati i risultati relativi ad una sperimentazione su tavola vibrante condotta su un sistema isolato a un gdl dotato di sistema di controllo TMDI. Il modello testato risulta rappresentativo di numerose configurazioni strutturali e per tale ragione sono stati perseguiti diversi obiettivi come lo studio della risposta dinamica del sistema e la valutazione dell'efficacia del TMDI nel ridurre lo spostamento del BIS senza incrementarne in modo significativo le accelerazioni. Al fine di perseguire questi obiettivi sono state selezionate diverse tipologie di azione: azioni di tipo sine sweep al fine di studiare la risposta dinamica del sistema e azioni di tipo rumore bianco e accelerogrammi naturali al fine di valutare l'efficacia sismica del sistema di controllo.

Ai fini della valutazione della risposta dinamica è stata condotta un'analisi parametrica sperimentale al variare dell'ampiezza dell'azione e dei parametri inerziali del sistema di controllo (inertanza e massa ausiliaria).

I risultati hanno evidenziato come, nel caso di azioni di tipo sine sweep, al variare dell'ampiezza il sistema isolato con e senza sistema di controllo evidenzia un comportamento non lineare di tipo *softening* legato alla rigidità degli isolatori elastomerici ad alto smorzamento che si riduce all'aumentare della deformazione.

Invece, al variare delle proprietà inerziali del sistema di controllo le evidenze sperimentali hanno confermato le tendenze osservate da un punto di vista numerico nel Capitolo 4. Infatti, all'aumentare dell'inertanza l'efficacia del sistema TMDI

aumenta e nel caso di valori di inerzia relativamente elevati la presenza di una massa nel sistema di controllo risulta trascurabile (infatti numericamente si era osservato come in queste situazioni l'utilizzo del sistema di controllo TID risulta preferibile al TMDI).

Inoltre le curve di risposta in frequenza hanno permesso di mettere in evidenza come il sistema di controllo TMDI risulta particolarmente efficace nel ridurre la risposta di sistemi isolati alla base in un ampio intervallo di frequenze.

I risultati relativi al rumore bianco casuale hanno permesso di evidenziare come il sistema di controllo TMDI risulta particolarmente efficace nel ridurre lo spostamento del sistema isolato senza incrementarne le accelerazioni. L'efficacia in termini di spostamento del BIS aumenta all'aumentare dell'inerzia e al diminuire della massa secondaria, a conferma che per valori di inerzia relativamente elevati i sistemi caratterizzati da elevate masse inerziali e modeste masse gravitazionali risultano particolarmente efficaci. Come visto nel Capitolo 4, anche sperimentalmente è emerso come la risposta del sistema di controllo, in particolare lo spostamento dell'Inerter, è comparabile a quella del sistema isolato e quindi può essere un importante vincolo progettuale.

Nel caso di azioni più realistiche come gli accelerogrammi naturali, i risultati sperimentali hanno messo in evidenza come l'aggiunta del dispositivo Inerter (precedentemente caratterizzato) collegato a terra ad un sistema TMD permette di ridurre in modo significativo (sia in termini di valori di picco che in termini di valori quadratici medi) lo spostamento di sistemi isolati senza incrementarne significativamente le accelerazioni sia nel caso di terremoti di tipo far-field sia nel caso di terremoti di tipo near-fault caratterizzati da un'elevata componente impulsiva.

Infine un modello numerico non lineare è stato definito e calibrato al fine di interpretare le evidenze sperimentali.



## Capitolo 9

# Conclusioni e sviluppi futuri

In questa tesi si è voluto contribuire nell'avanzamento delle conoscenze sull'utilizzo dell'innovativo dispositivo Inerter nel controllo delle vibrazioni. L'Inerter è stato sviluppato per applicazioni tipiche dell'Ingegneria meccanica e solo recentemente diversi autori ne hanno proposto l'estensione anche all'Ingegneria civile che, a differenza di quella meccanica, è caratterizzata da sistemi di grandi dimensioni, con masse elevate.

L'attenzione è stata rivolta all'utilizzo dell'Inerter insieme ai tradizionali sistemi per il controllo delle vibrazioni al fine di ridurre la risposta dinamica di strutture civili soggette ad azioni indirette alla base come quelle indotte dai terremoti. Infatti, il disaccoppiamento tra massa inerziale e massa gravitazione legato all'Inerter risulta particolarmente interessante nel caso di azioni inerziali come quelle sismiche. Lo studio è stato diviso in due parti relazionate tra di loro, una prima parte in cui i diversi temi sono stati affrontati da un punto di vista teorico e una seconda parte nella quale sono stati condotti dei test sperimentali al fine di validare gli studi teorici. Nella prima parte il dispositivo Inerter è stato studiato come elemento aggiuntivo ai tradizionali sistemi per il controllo delle vibrazioni al fine di migliorarne le prestazioni in termini di efficacia e robustezza. In particolare sono state studiate tre diverse configurazioni strutturali per le quali i tradizionali sistemi di controllo possono presentare degli inconvenienti e/o prestazioni non elevate, ovvero strutture multipiano a base fissa, strutture multipiano isolate alla base e strutture adiacenti.

Per quanto riguarda le strutture multipiano a base fissa si propone l'utilizzo del dispositivo Inerter insieme ai tradizionali sistemi TMD di tipo convenzionale (massa gravitazionale piccola) nella configurazione definita Tuned Mass Damper Inerter (TMDI). Questo sistema di controllo risulta di particolare interesse dal momento che numerosi studi hanno dimostrato, sia da un punto di vista teorico che sperimentale, come i sistemi TMD per essere efficaci e robusti anche in ambito sismico devono essere caratterizzati da un'elevata massa inerziale (TMD non convenzionale) che si traduce in una massa gravitazionale elevata. Per tale ragione il sistema TMDI è in grado di unire i vantaggi dei sistemi TMD convenzionali (la piccola massa gravitazionale) a quelli dei sistemi TMD non convenzionali (l'efficacia e la robustezza). Nello studio è stato affrontato, attraverso la definizione di un sistema ridotto, il tema dell'allocazione ottimale, della progettazione ottimale e della valutazione delle prestazioni in termini di efficacia e robustezza del sistema TMDI in questa parti-

colare configurazione. Attraverso il modello ridotto è stato possibile definire una procedura per l'allocazione ottimale di entrambi i terminali del sistema di controllo all'interno della struttura basata sulla sola analisi della forma di vibrare della struttura da controllare. I risultati hanno mostrato come le prestazioni del sistema di controllo risultano elevate quando un terminale del sistema di controllo è collegato a terra o in un nodo in cui la forma da controllare è nulla. Per quanto riguarda la progettazione ottimale del sistema di controllo è emerso come tra le tre diverse metodologie di progettazione ottimale analizzate, quella di tipo energetico, basata sull'indice EDI, risulta essere un buon compromesso rispetto alle altre basate sulla minimizzazione delle risposte cinematiche della struttura primaria (in particolare lo spostamento e l'accelerazione). Le analisi di sensitività, perturbando i parametri di progetto in un range di variazione molto ampio, hanno mostrato che il TMDI è un sistema di controllo robusto, con prestazioni superiori al sistema TMD con lo stesso rapporto di massa inerziale. Infine, oltre a studi con azioni semplificate come il rumore bianco, l'efficacia del sistema TMDI (progettato in modo ottimale con il rumore bianco) è stata valutata nel caso di azioni più realistiche come accelerogrammi naturali relativi a terremoti sia di tipo near-fault che di tipo far-field. I risultati presentati in questa tesi hanno dimostrato che il sistema TMDI è leggero (ma con elevate masse inerziali legate all'Inerter), efficace e robusto nel ridurre la risposta dinamica di strutture multipiano rispetto ai tradizionali TMD. I risultati numerici hanno inoltre mostrato come, rispetto ai tradizionali sistemi a massa accordate, il TMDI è in grado di ridurre in modo significativo anche le risposte del sistema di controllo. Per queste ragioni, questo sistema di controllo innovativo risulta particolarmente applicabile sia nel caso di nuove costruzioni che nel caso di quelle già esistenti, senza aggiungere elevate masse ausiliarie.

Nel caso di strutture multipiano isolate alla base si propone l'utilizzo TMDI (con il terminale relativo all'Inerter collegato a terra) al fine di limitare gli spostamenti laterali del basamento senza incrementarne in modo significativo le accelerazioni. Attraverso un'ampia gamma di valori dei parametri considerati, relativi alla massa e all'inertanza del sistema di controllo, è stato possibile confrontare le prestazioni di sistemi tradizionali TMD rispetto a sistemi innovativi basati sull'Inerter (ovvero il TMDI e il Tuned Inerter Damper, TID; quest'ultimo caratterizzato dall'assenza di massa nel sistema di controllo). Per i diversi sistemi a massa accordata, progettati in modo ottimale massimizzando l'indice energetico EDI, sono stati selezionate azioni semplificate di tipo rumore bianco (WN) e rumore bianco colorato (CWN) e azioni più realistiche come gli accelerogrammi naturali dei *ground motions* (GMs) registrati. Per tutti i tipi di azione, i risultati hanno mostrato che i sistemi di controllo basati sull'Inerter (TMDI e TID) collegati a terra permettono di ridurre in modo significativo sia la risposta del BIS (spostamento e accelerazione) sia del sistema di controllo che, nel caso di sistemi TMD può essere un importante vincolo progettuale. Inoltre si è visto come, per BIS debolmente smorzati, l'utilizzo di questi innovativi sistemi a massa accordata permette di raggiungere livelli di prestazione comparabili se non superiori a quelli ottenuti con solo BIS maggiormente smorzati. I sistemi TMDI e TID risultano maggiormente efficaci soprattutto nel caso di sovrastrutture caratterizzate da rapporti di masse elevati e per tale ragione consentono di raggiungere prestazioni comparabili o superiori a quelle ottenute nel caso di BIS non controllati con sovrastrutture leggere. Sono inoltre in grado di ridurre in modo

significativo le risposte del sistema isolato (sia basamento che sovrastruttura) nel caso di sovrastrutture relativamente più flessibili del BIS. In definitiva, l'aggiunta di un sistema a massa accordata a BIS permette di ridurre in modo significativo lo spostamento sia del basamento che della sovrastruttura senza incrementarne le accelerazioni. Inoltre, i sistemi di controllo innovativi basati sull'Inerter e collegati a terra riducono in modo significativo anche lo spostamento della massa secondaria rispetto al basamento che nei tradizionali sistemi TMD può essere un importante vincolo progettuale. Per queste ragioni il TMDI e il TID hanno dimostrato di essere in grado sia di incrementare le prestazioni di BIS (soprattutto debolmente smorzati e con sovrastrutture relativamente rigide) sia di permettere di isolare sovrastrutture relativamente flessibili e caratterizzate da rapporti di masse relativamente elevati.

Oltre allo studio del sistema di controllo TMDI in strutture multipiano a base fissa e isolata, infine, è stato studiato l'Inerter come elemento di collegamento di strutture adiacenti. In particolare è stata valutata l'influenza che tale dispositivo ha sulle caratteristiche dinamiche del sistema nel caso sia posto in parallelo ad una connessione viscoelastica. Inizialmente l'attenzione è stata rivolta allo studio dei parametri modali del sistema accoppiato considerando diverse situazioni di collegamento: connessione di tipo conservativo e non conservativo. Nel caso di connessione conservativa, le frequenze naturali e i modi di vibrare sono stati derivati analiticamente ed è stato dimostrato che il problema agli autovalori ammette soluzione in forma chiusa. Nel caso di connessione non conservativa, è stata adottata la formulazione nello spazio di stato e, attraverso l'analisi modale complessa, sono state derivate pseudo-frequenze, pseudo-fattori di smorzamento e modi complessi. E' stato quindi valutato in che modo la tipologia di connessione influenza i parametri modali del sistema accoppiato. Comportamenti peculiari, particolarmente vantaggiosi a fini del controllo strutturale, sono emersi quando i parametri della connessione assumono valori specifici. Inizialmente per via numerica, è stato osservato che, per un dato sistema strutturale, esistono alcune particolari triplette di parametri della connessione per cui si ha la coalescenza degli autovalori e il sistema è caratterizzato da frequenze (coincidenti con la frequenza nel caso di connessione rigida), fattori di smorzamento e modi complessi uguali per entrambi i modi. Sistemi che godono di tali proprietà in letteratura sono definiti difettivi. Inoltre, esiste un valore minimo ottimale della massa inerziale dell'Inerter per il quale il sistema difettivo risulta caratterizzato dal più alto fattore di smorzamento modale. Successivamente, a seguito della complessità della ricerca per via numerica dei parametri della connessione che realizzavano un sistema difettivo, il problema è stato affrontato analiticamente e sono state ricavate espressioni in forma chiusa. In questo modo è stato possibile dimostrare che, indipendentemente dai fissati parametri strutturali, è sempre possibile realizzare sistemi difettivi nel caso di oscillatori adiacenti collegati da una connessione con Inerter posto in parallelo ad una connessione viscoelastica. Le analisi hanno mostrato come il sistema difettivo che realizza il massimo fattore di smorzamento è caratterizzato dal più rapido decadimento della risposta strutturale in caso di oscillazioni libere e dalla minima amplificazione dinamica per entrambi gli oscillatori nel caso di forzante armonica. E' stato quindi possibile, solo dallo studio delle proprietà dinamiche del sistema, definire un criterio di progettazione per la connessione in grado di controllare la risposta di entrambi gli oscillatori adiacenti. I sistemi difettivi infatti possiedono interessanti proprietà

applicabili ai fini del controllo strutturale.

Dal momento che le evidenze sperimentali su questo tema risultano limitate, nella seconda parte della tesi si riportano i risultati relative a due diverse sperimentazioni condotte al fine di supportare e validare i risultati numerici.

Nella prima sperimentazione un prototipo in scala di Inerter meccanico a pignone e cremagliera è stato testato a spostamento armonico imposto mediante una tavola vibrante come attuatore. In particolare, i test sono stati condotti in un range di ampiezze e frequenze tipiche dell'Ingegneria civile. I risultati hanno mostrato come il comportamento meccanico del dispositivo non si allontana in modo significativo rispetto a quello ideale, e le differenze sono maggiori quando la forza nel prototipo è piccola e quindi le componenti non lineari diventano significative. E' stato inoltre definito un modello numerico non lineare che ha permesso di poter interpretare in modo più approfondito i risultati sperimentali. Il modello è stato formulato in modo da tenere in conto delle non linearità legate ai giochi tra i diversi componenti che costituiscono il prototipo e alle diverse componenti dissipative presenti. A seguito dei risultati evidenziati si ritiene che nel caso di applicazioni tipiche dell'Ingegneria civile il comportamento meccanico dell'Inerter non si discosti in maniera significativa rispetto a quello ideale. In questi casi infatti i livelli di forza nell'Inerter sono relativamente elevati dal momento che, nonostante il campo di frequenze non risulta relativamente elevato, sia le ampiezze dell'azione che le inertanze sono elevate. Inoltre è plausibile aspettarsi che i giochi si mantengano sostanzialmente inalterati con la scala del dispositivo e che quindi nel caso di prototipi in scala (come quello testato in questo studio) alcune non linearità potrebbero risultare amplificate. Per tale ragione tra i possibili sviluppi di questa tesi risulta particolarmente interessante la valutazione dell'effetto scala sulle non linearità dei dispositivi Inerter di tipo meccanico.

Nella seconda sperimentazione su tavola vibrante, un sistema isolato dotato di TMDI è stato testato in diverse configurazioni (sono state considerate diverse masse gravitazionali e inerziali) e con diverse tipologie di azione. I test condotti a diversi livelli di ampiezza dell'azione hanno mostrato un comportamento non lineare del sistema di tipo *softening*, legato alla rigidità degli isolatori elastomerici ad alto smorzamento che si riduce all'aumentare della deformazione. Per le azioni armoniche di tipo sine sweep, le curve di risposta in frequenza del sistema hanno mostrato come il sistema di controllo TMDI risulta particolarmente efficace nel ridurre la risposta del BIS in un ampio intervallo di frequenze. I risultati relativi sia ad azioni semplificate, come il rumore bianco, che ad azioni più realistiche, come gli accelerogrammi naturali di terremoti near-fault e far-field, hanno evidenziato come il sistema di controllo innovativo a masse accordate TMDI risulta particolarmente efficace nel ridurre lo spostamento del sistema isolato senza incrementarne le accelerazioni. E' risultato interessante notare come anche da un punto di vista sperimentale l'efficacia del TMDI nel ridurre lo spostamento del BIS aumenta all'aumentare dell'inertanza e al diminuire della massa secondaria. Questo risultato supporta le analisi numeriche nelle quali si era osservato come, per valori di inertanza relativamente elevati, i sistemi a masse accordate caratterizzati da elevate masse inerziali e modeste masse gravitazionali risultano particolarmente efficaci. Inoltre le evidenze sperimentali hanno mostrato come lo spostamento nell'Inerter è comparabile a quello del sistema isolato e quindi può essere un importante vincolo

progettuale. E' stato infine definito un modello numerico non lineare interpretativo validato dalle evidenze sperimentali.

I risultati incoraggianti riportati nella tesi permetteranno notevoli ricadute dal punto di vista applicativo (sia nel panorama nazionale che internazionale) riguardo la possibilità di proporre sistemi di controllo basati sull'Inerter che risultino leggeri, robusti ed efficaci in grado di ridurre la risposta dinamica di strutture civili non solo in caso di terremoti di tipo far-field, ma anche nel caso di terremoti impulsivi come quelli near-fault. Inoltre, l'utilizzo di questi innovativi sistemi di controllo non è limitata alle nuove costruzioni, ma può essere estesa anche a quelle esistenti, con il vantaggio, aggiungendo sistemi leggeri, di non aumentare significativamente i carichi gravitazionali. Infine, sarà possibile non solo di realizzare nuovi sistemi a masse accordate leggeri, efficaci e robusti, ma anche di poter adeguare sistemi TMD convenzionali esistenti, così da renderli più efficaci e robusti senza aumentare in modo significativo i carichi gravitazionali.

Successivi sviluppi della ricerca in questo tema possono essere orientati allo studio sia da un punto di vista teorico sia sperimentale sull'utilizzo dell'Inerter, in aggiunta ai tradizionali sistemi di controllo delle vibrazioni, in ulteriori configurazioni strutturali tipiche dell'Ingegneria civile e alla valutazione dell'influenza dell'effetto scala sul comportamento meccanico di questo dispositivo innovativo.



# Bibliografia

- Baker, JW (2007). «Quantitative classification of near-fault ground motions using wavelet analysis». In: *Bulletin of the Seismological Society of America* 97.5, pp. 1486–1501.
- Basili, M e M De Angelis (2007a). «A reduced order model for optimal design of 2-m dof adjacent structures connected by hysteretic dampers». In: *Journal of Sound and Vibration* 306.1-2, pp. 297–317.
- (2007b). «Optimal passive control of adjacent structures interconnected with nonlinear hysteretic devices». In: *Journal of sound and vibration* 301.1-2, pp. 106–125.
- (2014). «Investigation on the optimal properties of semi active control devices with continuous control for equipment isolation». In: *Scalable Computing: Practice and Experience* 15.4, pp. 331–344.
- (2017). «Vibration Analysis and Models of Adjacent Structures Controlled by Magnetorheological Dampers». In: *Shock and Vibration* 2017.
- Basili, M, M De Angelis e G Fraraccio (2013). «Shaking table experimentation on adjacent structures controlled by passive and semi-active MR dampers». In: *Journal of Sound and Vibration* 332.13, pp. 3113–3133.
- Basili, M, M De Angelis e D Pietrosanti (2017). «Dynamic response of a viscously damped two adjacent degree of freedom system linked by inerter subjected to base harmonic excitation». In: *Procedia engineering* 199, pp. 1586–1591.
- (2018). «Modal analysis and dynamic response of a two adjacent single degree of freedom systems linked by spring-dashpot-inerter elements». In: *Engineering Structures* 174, pp. 736–752.
- (2019). «Defective two adjacent single degree of freedom systems linked by spring-dashpot-inerter for vibration control». In: *Engineering Structures* 188, pp. 480–492.
- Bigdeli, K, W Hare, J Nutini e S Tesfamariam (2016). «Optimizing damper connectors for adjacent buildings». In: *Optimization and Engineering* 17.1, pp. 47–75.
- Chen, MZQ, Y Hu, L Huang e G Chen (2014). «Influence of inerter on natural frequencies of vibration systems». In: *Journal of Sound and Vibration* 333.7, pp. 1874–1887.
- Chopra, AK (2015). *Dynamics of Structures: International Edition*. Law Express Questions & Answers. Pearson Education Limited. ISBN: 9780273774266.
- Ciampi, V, M De Angelis e F Paolacci (1995). «Design of yielding or friction-based dissipative bracings for seismic». In: *Engineering Structures* 17.5, pp. 381–391.

- Clough, RW e J Penzien (1993). *Dynamics of Structures*. Civil Engineering Series. McGraw-Hill. ISBN: 9780071132411.
- De Angelis, M, R Giannini e F Paolacci (2010). «Experimental investigation on the seismic response of a steel liquid storage tank equipped with floating roof by shaking table tests». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 39.4, pp. 377–396.
- De Angelis, M, A Giaralis, F Petrini e D Pietrosanti (2019). «Optimal tuning and assessment of inertial dampers with grounded inerter for vibration control of seismically excited base-isolated systems». In: *Engineering Structures* 196, p. 109250.
- De Angelis, M, S Perno e A Reggio (2012). «Dynamic response and optimal design of structures with large mass ratio TMD». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 41.1, pp. 41–60.
- De Domenico, D e G Ricciardi (2018). «An enhanced base isolation system equipped with optimal tuned mass damper inerter (TMDI)». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 47.5, pp. 1169–1192.
- Den Hartog, JP (1985). *Mechanical vibrations*. Courier Corporation.
- Frahm, H (1909). *Device for Damping Vibrations of Bodies, US No.*
- Garrido, H, O Curadelli e D Ambrosini (2013). «Improvement of tuned mass damper by using rotational inertia through tuned viscous mass damper». In: *Engineering Structures* 56, pp. 2149–2153.
- Gartner, BJ e MC Smith (feb. 2013). *Damping and inertial hydraulic device*. US Patent App. 13/577,234.
- Gattulli, V, F Potenza e M Lepidi (2013). «Damping performance of two simple oscillators coupled by a visco-elastic connection». In: *Journal of Sound and Vibration* 332.26, pp. 6934–6948.
- Ge, Z e W Wang (2018). «Modeling, Testing, and Characteristic Analysis of a Planetary Flywheel Inerter». In: *Shock and Vibration* 2018.
- Giaralis, A e F Petrini (2017). «Wind-induced vibration mitigation in tall buildings using the tuned mass-damper-inerter». In: *Journal of Structural Engineering* 143.9, p. 04017127.
- Giaralis, A e PD Spanos (2012). «Derivation of response spectrum compatible non-stationary stochastic processes relying on Monte Carlo-based peak factor estimation». In: *Earthquakes and Structures* 3.3, pp. 581–609.
- Giaralis, A e AA Taflanidis (2018). «Optimal tuned mass-damper-inerter (TMDI) design for seismically excited MDOF structures with model uncertainties based on reliability criteria». In: *Structural Control and Health Monitoring* 25.2, e2082.
- Greco, R e GC Marano (2016). «Multi-objective optimization of a dissipative connection for seismic protection of wall-frame structures». In: *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 87, pp. 151–163.
- Hazewinkel, M (2013). *Encyclopaedia of mathematics: C an updated and annotated translation of the soviet 'mathematical encyclopaedia'*. Vol. 2. Springer Science & Business Media.
- Hoang, N, Y Fujino e P Warnitchai (2008). «Optimal tuned mass damper for seismic applications and practical design formulas». In: *Engineering structures* 30.3, pp. 707–715.

- Housner, GW et al. (1997). «Structural control: past, present, and future». In: *Journal of engineering mechanics* 123.9, pp. 897–971.
- Ikago, K, K Saito e N Inoue (2012). «Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 41.3, pp. 453–474.
- Jangid, RS e JM Kelly (2001). «Base isolation for near-fault motions». In: *Earthquake engineering & structural dynamics* 30.5, pp. 691–707.
- Kanai, K (1957). «Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground motion». In: *Bulletin of the Earthquake Research Institute* 35.2, pp. 308–325.
- Kelly, JM (1999). «The role of damping in seismic isolation». In: *Earthquake engineering & structural dynamics* 28.1, pp. 3–20.
- Kunde, MC e RS Jangid (2003). «Seismic behavior of isolated bridges: A-state-of-the-art review». In: *Electronic Journal of Structural Engineering* 3.2, pp. 140–169.
- Lazar, IF, SA Neild e DJ Wagg (2014). «Using an inerter-based device for structural vibration suppression». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 43.8, pp. 1129–1147.
- (2016). «Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers». In: *Engineering Structures* 122, pp. 62–71.
- Li, C e M Liang (2012). «Characterization and modeling of a novel electro-hydraulic variable two-terminal mass device». In: *Smart Materials and Structures* 21.2, p. 025004.
- Lin, CC, JF Wang e JM Ueng (2001). «Vibration control identification of seismically excited mdof structure-PTMD systems». In: *Journal of Sound and Vibration* 240.1, pp. 87–115.
- Lin, YK (1967). *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*. McGraw-Hill.
- Luongo, A (1995). «Free vibrations and sensitivity analysis of a defective two degree-of-freedom system». In: *AIAA Journal* 33.1, pp. 120–127.
- Madhamshetty, K e J Manimala (2018). «Low-Rate Characterization of a Mechanical Inerter». In: *Machines* 6.3, p. 32.
- Marian, L e A Giaralis (2014). «Optimal design of a novel tuned mass-damper-inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems». In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 38, pp. 156–164.
- Meirovitch, L (2010). *Fundamentals of vibrations*. Waveland Press.
- Naeim, F e JM Kelly (1999). *Design of seismic isolated structures: from theory to practice*. John Wiley & Sons.
- Nakamura, Y, A Fukukita, K Tamura, I Yamazaki, T Matsuoka, K Hiramoto e K Sunakoda (2014). «Seismic response control using electromagnetic inertial mass dampers». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 43.4, pp. 507–527.
- Nishihara, O e T Asami (2002). «Closed-form solutions to the exact optimizations of dynamic vibration absorbers (minimizations of the maximum amplitude magnification factors)». In: *Journal of vibration and acoustics* 124.4, pp. 576–582.

- Ohtori, Y, RE Christenson, BF Spencer Jr e SJ Dyke (2004). «Benchmark control problems for seismically excited nonlinear buildings». In: *Journal of Engineering Mechanics* 130.4, pp. 366–385.
- Ormondroyd, J e JP Den Hartog (1946). «The theory of dynamic vibration absorber». In: *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics* 13.
- Palacios-Quiñonero, F, J Rubió-Massegú, JM Rossell e HR Karimi (2014). «Vibration control for adjacent structures using local state information». In: *Mechanics* 24.4, pp. 336–344.
- Palazzo, B, L Petti e M De Ligio (1997). «Response of base isolated systems equipped with tuned mass dampers to random excitations». In: *Journal of Structural Control* 4.1, pp. 9–22.
- Paolacci, F, R Giannini e M De Angelis (2013). «Seismic response mitigation of chemical plant components by passive control techniques». In: *Journal of loss prevention in the process industries* 26.5, pp. 924–935.
- Papageorgiou, C, NE Houghton e MC Smith (2009). «Experimental testing and analysis of inerter devices». In: *Journal of dynamic systems, measurement, and control* 131.1, p. 011001.
- Pietrosanti, D, M De Angelis e M Basili (2017). «Optimal design and performance evaluation of systems with Tuned Mass Damper Inerter (TMDI)». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 46.8, pp. 1367–1388.
- Reggio, A e M De Angelis (2013). «Optimal design of an equipment isolation system with nonlinear hysteretic behaviour». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 42.13, pp. 1907–1930.
- (2014). «Combined primary–secondary system approach to the design of an equipment isolation system with High-Damping Rubber Bearings». In: *Journal of Sound and Vibration* 333.9, pp. 2386–2403.
- (2015). «Optimal energy-based seismic design of non-conventional Tuned Mass Damper (TMD) implemented via inter-story isolation». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 44.10, pp. 1623–1642.
- Siami, A, HR Karimi, A Cigada, E Zappa e E Sabbioni (2018). «Parameter optimization of an inerter-based isolator for passive vibration control of Michelangelo's Rondanini Pietà». In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 98, pp. 667–683.
- Smith, MC (2002). «Synthesis of mechanical networks: the inerter». In: *Decision and Control, 2002, Proceedings of the 41st IEEE Conference on*. Vol. 2. IEEE, pp. 1657–1662.
- Song, TT e GF Dargush (1997). *Passive energy dissipation system in structure engineering*.
- Soong, TT e MC Costantinou (2014). *Passive and active structural vibration control in civil engineering*. Vol. 345. Springer.
- Soong, TT e BF Spencer (2002). «Supplemental energy dissipation: state-of-the-art and state-of-the-practice». In: *Engineering structures* 24.3, pp. 243–259.
- Soto-Brito, R e SE Ruiz (1999). «Influence of ground motion intensity on the effectiveness of tuned mass dampers». In: *Earthquake engineering & structural dynamics* 28.11, pp. 1255–1271.

- Symans, MD, FA Charney, AS Whittaker, MC Constantinou, CA Kircher, MW Johnson e RJ McNamara (2008). «Energy dissipation systems for seismic applications: current practice and recent developments». In: *Journal of structural engineering* 134.1, pp. 3–21.
- Symans, MD e MC Constantinou (1999). «Semi-active control systems for seismic protection of structures: a state-of-the-art review». In: *Engineering structures* 21.6, pp. 469–487.
- Tajimi, H (1960). «A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake». In: *Proceedings of the Second World Conference on Earthquake Engineering* 2, pp. 781–798.
- Taniguchi, T, A Der Kiureghian e M Melkumyan (2008). «Effect of tuned mass damper on displacement demand of base-isolated structures». In: *Engineering Structures* 30.12, pp. 3478–3488.
- The MathWorks Inc. (2019). *MATLAB*. Natick, Massachusetts. URL: <https://it.mathworks.com/>.
- Tian, Z, J Qian e L Zhang (2008). «Slide roof system for dynamic response reduction». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 37.4, pp. 647–658.
- Tronci, EM, D Pietrosanti, G Cordisco e M De Angelis (2017). «Vibration analysis of the civic tower in Rieti». In: *Procedia engineering* 199, pp. 2268–2273.
- Tsai, HC (1995). «The effect of tuned-mass dampers on the seismic response of base-isolated structures». In: *International journal of solids and structures* 32.8-9, pp. 1195–1210.
- Vittozzi, A, G Silvestri, L Genca e M Basili (2017). «Fluid dynamic interaction between train and noise barriers on High-Speed-Lines». In: *Procedia engineering* 199, pp. 290–295.
- Wang, FC, MS Hsu, WJ Su e TC Lin (apr. 2009). *Screw type inerter mechanism*. US Patent App. 12/220,821.
- Warburton, GB (1982). «Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters». In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 10.3, pp. 381–401.
- Warn, GP e KL Ryan (2012). «A review of seismic isolation for buildings: historical development and research needs». In: *Buildings* 2.3, pp. 300–325.
- Whittaker, AS e M Kumar (2014). «Seismic isolation of nuclear power plants». In: *Nuclear Engineering and Technology* 46.5, pp. 569–580.
- Zhang, WS e YL Xu (2000). «Vibration analysis of two buildings linked by Maxwell model-defined fluid dampers». In: *Journal of Sound and Vibration* 233.5, pp. 775–796.
- Zhu, HP, DD Ge e X Huang (2011). «Optimum connecting dampers to reduce the seismic responses of parallel structures». In: *Journal of Sound and Vibration* 330.9, pp. 1931–1949.
- Ziyaeifar, M e H Noguchi (1998). «Partial mass isolation in tall buildings». In: *Earthquake engineering & structural dynamics* 27.1, pp. 49–65.