

DI.FI.MA. 2017: Matematica e Fisica nelle istituzioni: curriculum, valutazione, sperimentazione.

## LA FESTA DEI NUMERI: *EARLY ALGEBRA* E VALUTAZIONE FORMATIVA IN CLASSE PRIMA

Annalisa Cusi, Cristina Sabena  
Università di Torino

annalisa.cusi@unito.it cristina.sabena@unito.it

### Abstract

L'articolo coniuga il tema della valutazione formativa con quello dello sviluppo dei significati matematici attraverso processi argomentativi. In particolare, viene affrontato il tema del significato del simbolo di uguaglianza, con un approccio precoce al pensiero algebrico in seno all'aritmetica. Dopo un inquadramento teorico si discutono i risultati preliminari di alcune sperimentazioni condotte in quattro classi prime della scuola primaria e che riguardano lo sviluppo di discussioni di classe a partire dalla proiezione dei protocolli degli studenti.

### Parole-chiave

Early algebra, valutazione formativa, significati del simbolo di uguaglianza, discussione di classe, scuola primaria.

### LA VALUTAZIONE FORMATIVA IN MATEMATICA

La componente *formativa* dei processi di *valutazione* è sottolineata dalle recenti Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012), secondo cui la valutazione “Assume una prevalente funzione formativa, di accompagnamento dei processi di apprendimento e di stimolo al miglioramento continuo” (p.13). In altri termini, accanto alla *valutazione degli* apprendimenti (o *valutazione sommativa*) è emersa negli ultimi anni in modo sempre più evidente l'importanza di una *valutazione per* gli apprendimenti (o *valutazione formativa*), nel senso di un vero e proprio metodo di insegnamento nel quale “elementi di evidenza relativi ai risultati degli studenti vengono *raccolti, interpretati ed utilizzati da insegnanti, studenti e loro pari per prendere decisioni* sui passi successivi da fare nel processo di istruzione, che possano essere migliori, o meglio fondate, rispetto alle decisioni prese in assenza di tali elementi di evidenza” (Black & Wiliam, 2009, p. 9, traduzione nostra). In particolare, Black e Wiliam (ibid.)

DI.FI.MA. 2017: Matematica e Fisica nelle istituzioni: curriculum, valutazione, sperimentazione.

hanno identificato cinque strategie che l'insegnante può promuovere per sviluppare i processi di valutazione formativa in classe, che hanno denominato *strategie chiave di valutazione formativa* (Tabella 1). La tabella mette in evidenza i tre protagonisti della valutazione formativa (l'insegnante, lo studente e i suoi compagni) e le tre domande principali che guidano il processo:

**Tabella 1.** Le strategie chiave di valutazione formativa.

	Dove sta andando lo studente?	Dove si trova lo studente?	Come può raggiungere la meta lo studente?
<b>Insegnante</b>	1) Chiarire gli obiettivi di apprendimento ed i criteri di valutazione.	2) Progettare discussioni di classe efficaci ed attività che consentano di mettere in luce l'apprendimento degli studenti.	3) Fornire feedback che consente allo studente di migliorare.
<b>Compagno</b>	Capire e condividere obiettivi di apprendimento ed i criteri di valutazione.	4) Attivare gli studenti come risorse gli uni per gli altri.	
<b>Studente</b>	Capire obiettivi di apprendimento ed i criteri di valutazione.	5) Attivare gli studenti come responsabili del proprio apprendimento.	

Attività tipiche dei processi di valutazione formativa sono quindi quelle attraverso le quali gli studenti hanno modo di verificare i propri livelli di apprendimento, pianificare e attuare, in interazione con l'insegnante e i compagni di classe, le strategie necessarie per raggiungere gli obiettivi di apprendimento prefissati.

In questa prospettiva, il progetto europeo FaSMEd ha studiato il possibile supporto delle tecnologie digitali ai processi di valutazione formativa, al fine di supportare l'apprendimento degli studenti nello studio della matematica (<https://fasmedtoolkitblog.wordpress.com/>). Nell'ambito di FaSMEd abbiamo sfruttato la tecnologia di classe connessa per mettere a punto una metodologia di lavoro che coniugasse la valutazione formativa con lo sviluppo di processi argomentativi negli studenti. Tale metodologia è stata sperimentata nelle classi quarta e quinta primaria e triennio della scuola secondaria di primo grado e si basa sulla progettazione di una sequenza di schede di lavoro, che includono schede-problema, schede-aiuto e schede mirate all'attivazione di sondaggi per il

DI.FI.MA. 2017: Matematica e Fisica nelle istituzioni: curriculum, valutazione, sperimentazione.

confronto e sull'alternanza di momenti di lavoro a piccoli gruppi a discussioni analizzate collettivamente (Cusi, Morselli, Sabena 2017a,b).

### **L'EARLY ALGEBRAE IL PERCORSO “LA FESTA DEI NUMERI”**

In questo articolo presentiamo l'adattamento della metodologia per le classi prime della scuola primaria, nelle quali venivano a mancare sia l'utilizzo della tecnologia di classe connessa sia le competenze di scrittura da parte dei bambini. Abbiamo quindi scelto di svolgere le attività in ambiente carta-matita, con il supporto di una semplice macchina fotografica da parte dell'insegnante, e di concentrare l'attenzione sullo sviluppo del significato del simbolo di uguaglianza in quanto segno *relazionale* e non solamente procedurale. In tal senso, il quadro di riferimento è quello sviluppato nell'ambito del progetto ArAl, che mira a favorire, sin dalla scuola primaria, la costruzione progressiva dei modelli mentali propri del pensiero algebrico attraverso un approccio che consenta al bambino di avvicinarsi al pensiero aritmetico imparando a 'vedere' l'aritmetica algebricamente (Malara & Navarra, 2003).

A partire dall'attività “Il gioco delle mascherine” dell'Unità ArAl n.2 (Navarra & Giacomini, 2003), abbiamo creato una sequenza di tre schede di lavoro, con l'obiettivo di favorire la comprensione del significato relazionale del simbolo di uguaglianza, educando i bambini ad interpretare e confrontare i significati sottesi alle diverse “rappresentazioni non canoniche” di un numero (es: 5 rappresentato come  $3+2$ ,  $1+4$ , ecc.) (per approfondimenti, si veda Malara & Navarra, 2003).

La metodologia di lavoro, ispirata all'esperienza del progetto FaSMEd, è si può schematizzare come segue: (1) gli allievi hanno lavorato a coppie o gruppi da tre su ciascuna scheda (sono stati creati gruppi omogenei in relazione alle competenze), in modalità carta-matita; (2) i protocolli degli allievi sono stati fotografati in forma digitale; (3) insegnanti e ricercatori hanno selezionato alcune risposte degli allievi per poi mostrarle attraverso la LIM e guidare una discussione sulle risposte; (4) sono stati attivati sondaggi per alzata di mano o attraverso l'uso di biglietti.

Come accennato sopra, un altro aspetto centrale alla metodologia adottata riguarda il focus sui processi argomentativi: ciascuna discussione ha avuto tra i principali obiettivi, oltre a quello di attivare le strategie chiave di valutazione formativa, anche quello di guidare gli allievi nella costruzione delle prime argomentazioni, facendoli riflettere sull'importanza di comunicare in maniera efficace il proprio ragionamento.

DI.FI.MA. 2017: Matematica e Fisica nelle istituzioni: curriculum, valutazione, sperimentazione.

## UNA DISCUSSIONE IN OTTICA DI VALUTAZIONE FORMATIVA

Presentiamo ora l'analisi di una discussione mirata, da un lato, a favorire l'attivazione delle strategie chiave di valutazione formativa, e, dall'altro lato, a supportare gli studenti nella costruzione di un significato condiviso del simbolo uguale in termini di equivalenza.

La discussione di classe è stata condotta a partire dalla scheda di lavoro riportata in Figural). Agli allievi è richiesto di identificare coppie di “numeri fratelli”, ovvero rappresentazioni equivalenti degli stessi numeri (o, nel linguaggio del progetto ArAl, coppie di rappresentazioni non canoniche dello stesso numero), e di comunicare in linguaggio matematico quali siano le coppie di rappresentazioni equivalenti.

**LA FESTA IN MASCHERA:  
AIUTIAMO MARTIJN A TROVARE I NUMERI FRATELLI**

DURANTE LA FESTA I NUMERI FRATELLI SI METTONO A GIOCARE E SI SEPARANO.  
MARTIJN VORREBBE RAGGRUPPARE I NUMERI FRATELLI, MA NON CI RIESCE.  
AIUTALO E SCRIVI UN MESSAGGIO PER LUI PER FARGLI CAPIRE CHI SONO I NUMERI FRATELLI. RICORDATI CHE MARTIJN NON CONOSCE L'ITALIANO, MA CAPISCE MOLTO BENE IL LINGUAGGIO DELLA MATEMATICA.

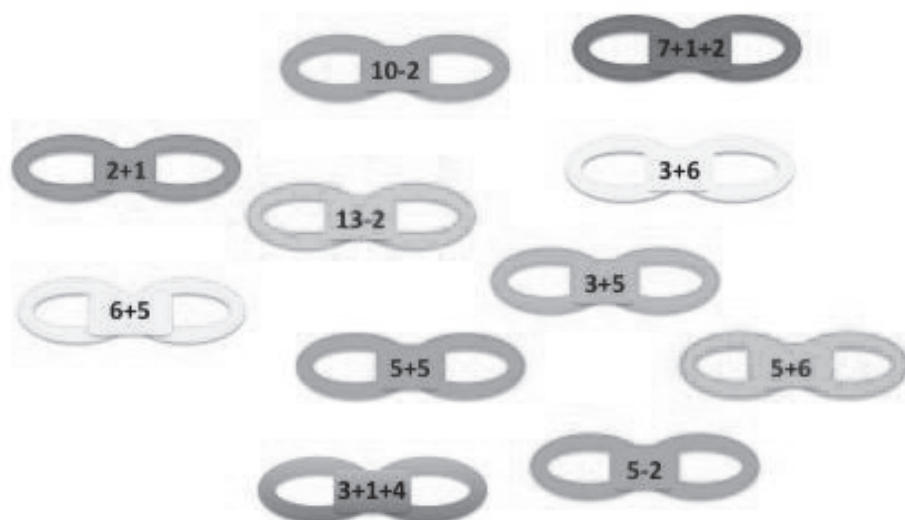
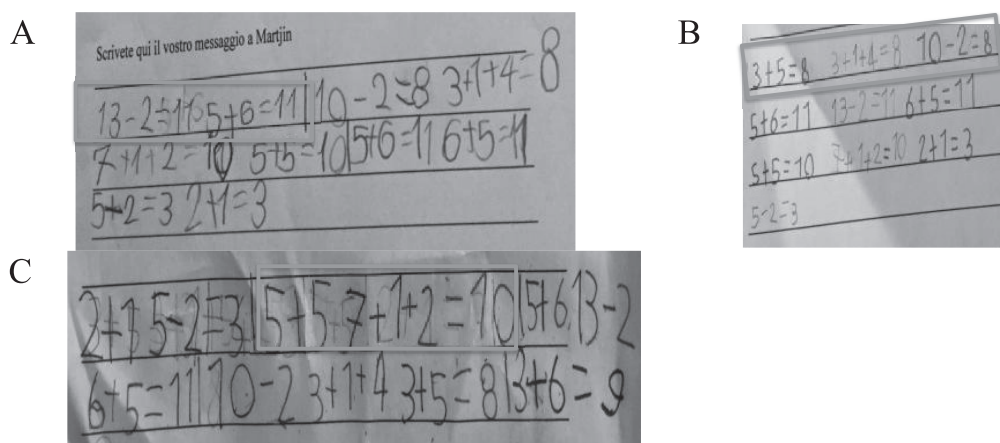


Fig. 1. La scheda di lavoro.

L'insegnante ha raccolto e fotografato le diverse soluzioni proposte dalle coppie di studenti e ne mostra alcune alla LIM (Fig. 2 A-B-C). Dopo aver affrontato

DI.FI.MA. 2017: Matematica e Fisica nelle istituzioni: curriculum, valutazione, sperimentazione.

l'analisi di una serie di risposte lacunose, focalizza l'attenzione su tre risposte caratterizzate da una corretta identificazione dei gruppi di numeri fratelli, ma da una non chiara rappresentazione dell'equivalenza tra espressioni equivalenti. Avvia quindi la discussione chiedendo di valutare se questi messaggi siano *chiari*, ossia comprensibili per Martijn, lo studente olandese che non conosce l'italiano, ma comprende il linguaggio della matematica.



**Fig. 2.** A)-B)-C) Le risposte degli studenti mostrate alla LIM (le parti delle risposte commentate dagli allievi sono evidenziate mediante un riquadro rosso).

1. **Insegnante:** Sono chiari questi messaggi per Martijn?
2. **Davide:** Io qua (*si avvicina alla LIM ed indica la prima riga della Fig. 2a*) ci leggo centoquindici!
3. **Alessio:** E qua cinquantasette! (*indica la prima riga della Fig. 2c*)
4. **Chiara:** Si capisce perché c'è l'uguale e poi il numero che fa
5. **Insegnante:** Prova a leggermi alcuni numeri fratelli che si individuano bene in questa scheda
6. **Chiara:** 10 meno 2 uguale a 8 e 3 più 1 più 4 uguale a 8 (*con riferimento alla prima riga della Fig. 2a*)
7. **Insegnante:** Provo a scriverli alla lavagna così vediamo se si capisce bene che sono fratelli.  
*L'insegnante scrive alla lavagna le due relazioni identificate da Chiara:*



**Fig. 3.** Le uguaglianze trascritte alla lavagna.

DI.FI.MA. 2017: Matematica e Fisica nelle istituzioni: curriculum, valutazione, sperimentazione.

La domanda iniziale dell'insegnante (riga 1) mira a far riflettere gli allievi sull'efficacia delle rappresentazioni proposte nell'evidenziare l'equivalenza tra rappresentazioni di uno stesso numero. Risultato di tale intervento è l'attivazione degli allievi come *risorse gli uni per gli altri*. Davide e Alessio (righe 2 e 3), infatti, individuano elementi di problematicità nelle risposte, mentre Chiara (righe 4 e 6) focalizza l'attenzione su parte di una di esse (Fig. 2a), sottolineando che, a suo parere, tale rappresentazione è efficace. L'insegnante sceglie di concentrare l'attenzione sulle due relazioni identificate da Chiara per rendere esplicito a tutta la classe il focus del discorso e per stimolare una interpretazione condivisa di tali rappresentazioni:

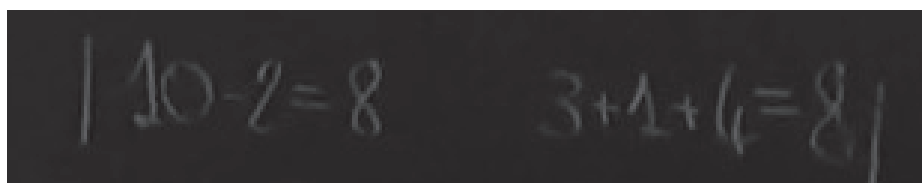
**8. Insegnante:** Chiara dice che si capisce bene che questi sono numeri fratelli. Siete d'accordo con Chiara?

**9. Davide:** Qua (*si avvicina alla lavagna e indica lo spazio tra 8 e 3*), se non ci metti niente, può sembrare 83. Ma, se lasci tanto spazio, va bene.

**10. Insegnante:** Io, se lo leggo così, potrei capire solo che 10 meno 2 è uguale a 8 e che 3 più 1 più 4 è uguale a 8. Io potrei non capire che voi mi volete dire che 10-2 e 3+1+4 sono numeri fratelli. Come facciamo a far capire a Martijn che 10-2 e 3+1+4 sono fratelli?

Obiettivo dell'insegnante (riga 10) è quello di focalizzare l'attenzione degli studenti su possibili parziali interpretazioni delle espressioni alla lavagna, spingendoli a sentire l'esigenza di introdurre nuovi simboli matematici per evidenziare l'equivalenza tra 10-2 e 3+1+4.

**11. Chiara:** Alla fine e all'inizio mettiamo una sbarretta (*va alla lavagna e mette due sbarrette all'inizio e alla fine dell'intera scrittura, Fig.4*)



**Fig. 4.** Le sbarrette aggiunte da Chiara per indicare i numeri "fratelli".

**12. Davide:** Qua puoi mettere un quadretto, così si separano (*aggiunge un quadratino tra le due equivalenze, Fig. 5*)

DI.FI.MA. 2017: Matematica e Fisica nelle istituzioni: curriculum, valutazione, sperimentazione.

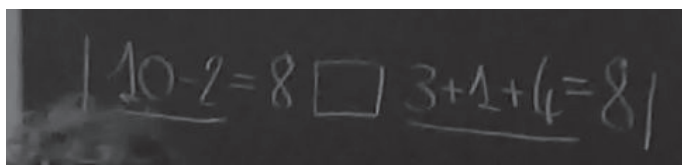


Fig. 5. La proposta di Davide per separare le due scritte.

**13. Insegnante:** Secondo voi il quadretto fa capire a Martjin che sono fratelli?

**14. Coro:** No!

**15. Insegnante:** Io vorrei far capire a Martjin che  $10-2$  e  $3+1+4$  sono dei fratelli. Pensiamo al linguaggio della matematica.

*L'insegnante scrive nuovamente le due espressioni  $10-2$  e  $3+1+4$  alla lavagna, sotto alle due espressioni già trascritte. Luigi si avvicina alla lavagna e, senza dir niente, inserisce il simbolo di uguaglianza tra le due espressioni (Fig. 6).*

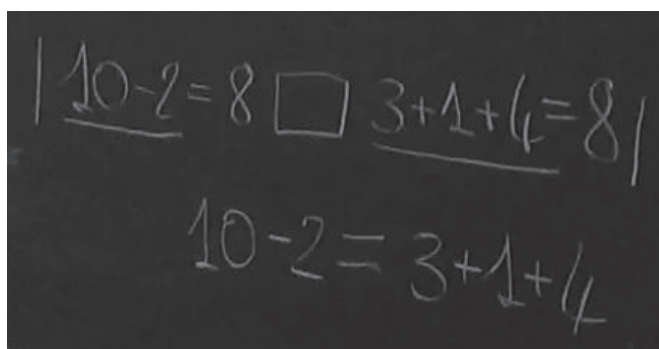


Fig.6. Luigi inserisce il simbolo di uguale tra  $10-2$  e  $3+1+4$ .

**16. Alessio:** No, perché  $10-2$  non fa 3!

**17. Insegnante:** Attenzione! Qui non c'è scritto solo 3. C'è scritto  $3+1+4$ . Pensiamoci. E' vero che  $10-2$  è uguale a  $3+1+4$ ?

*La discussione prosegue con una serie di altri interventi degli studenti, seguiti da un sondaggio, al termine del quale tutti gli allievi, compreso Alessio, inizialmente dubbioso, dichiarano di condividere la scelta di Luigi di inserire il simbolo di uguaglianza per evidenziare l'equivalenza tra le due espressioni.*

La domanda dell'insegnante (riga 10) ha avuto come effetto quello di spingere gli allievi (righe 11 e 12) ad introdurre rappresentazioni simboliche mirate ad evidenziare l'equivalenza tra le espressioni  $10-2$  e  $3+1+4$ . Successivamente, ribadisce l'obiettivo di servirsi del linguaggio della matematica per evidenziare tale equivalenza (riga 15), in modo che tale obiettivo sia condiviso dalla classe. Luigi interpreta correttamente la richiesta dell'insegnante, proponendo autonomamente la corretta rappresentazione di equivalenza attraverso l'uso del simbolo di uguaglianza. L'allievo diventa, in questo modo, una risorsa importante per i compagni. Fondamentale risulta, tuttavia la discussione di

DI.FI.MA. 2017: Matematica e Fisica nelle istituzioni: curriculum, valutazione, sperimentazione.

classe condotta successivamente dall'insegnante per far sì che la scelta di Luigi sia compresa e condivisa da tutti gli allievi.

## CONCLUSIONI

In base alle osservazioni condotte nelle varie classi, mettere in campo strategie di valutazione formativa fin dagli inizi della scuola primaria risulta una strada non solo percorribile, ma anche promettente per l'apprendimento della matematica. L'analisi del breve estratto ci consente in particolare di mettere in evidenza due aspetti significativi.

Il primo riguarda l'*attivazione di diverse strategie chiave di valutazione formativa*. L'insegnante pianifica e guida, ponendosi come autentico partecipante, una discussione mirata a evidenziare e condividere i processi di pensiero degli allievi (strategia 2). Rispondendo alle sollecitazioni dell'insegnante alcuni allievi si attivano come risorse gli uni per gli altri (strategia 4), commentando le risposte e le osservazioni dei compagni e fornendo così feedback che supportano l'evoluzione della discussione (strategia 3). Allo stesso tempo gli allievi si attivano come responsabili del proprio apprendimento (strategia 5), esplicitando le ragioni alla base delle proprie risposte, dichiarando i propri dubbi, motivando perché hanno cambiato idea.

Il secondo aspetto concerne, *l'evoluzione dei segni nell'interazione tra studenti e insegnante*. Dal punto di vista dei contenuti matematici, obiettivo fondamentale dell'insegnante è infatti quello di guidare gli allievi verso la costruzione del significato del simbolo di uguaglianza come rappresentazione dell'equivalenza tra diverse espressioni numeriche. Gli studenti si mettono in gioco proponendo diverse rappresentazioni e l'insegnante li guida nell'analizzarle e nell'individuare punti di forza e debolezza, soprattutto rispetto al criterio della *chiarezza*, reso esplicito fin dall'inizio della discussione ed evidenziato più volte durante la stessa (strategia 1 di valutazione formativa).

L'insegnante gioca un ruolo chiave nella gestione della discussione di classe in modo tale da favorire il raggiungimento degli obiettivi posti in relazione ad entrambi gli aspetti evidenziati.

## BIBLIOGRAFIA

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, **21**(1), 5-31.



DI.FI.MA. 2017: Matematica e Fisica nelle istituzioni: curriculum, valutazione, sperimentazione.

Cusi, A., Morselli, F., e Sabena, C. (2017a). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. Vol. 49(5), 755–767. *ZDM Mathematics Education*.

Cusi, A., Morselli, F., e Sabena, C. (2017b). Valutazione formativa e argomentazione: quale supporto dalle nuove tecnologie? Proposte dal progetto FaSMEd. In O. Robutti, C. Sabena & M. Mosca (eds.), *Insegnare e imparare matematica e fisica: insegnanti e studenti per una didattica inclusiva. Atti del VII Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica DI.FI.MA. 2015* (pp. 103-116). Ledizioni.

Malara, N.A., e Navarra, G. (2003). *Quadro di riferimento e glossario*. Collana “Progetto ArAl”. Pitagora.

MIUR (2012). Indicazioni nazionali per il curriculum della scuola dell’infanzia e del primo ciclo di istruzione, *Annali della Pubblica Istruzione*, Numero Speciale. Le Monnier.

Navarra, G. e Giacomini, A. (2003). *Unità 2 - Rappresentazioni del numero: le mascherine e il domino*. Collana “Progetto ArAl”. Pitagora.