

# Geometria

La geometria è la scienza che insegna a misurare le forme che si trovano nel mondo sensibile e lo spazio che le ospita o che le forme stesse includono.

Salvatore, Marta ottobre 6, 2012



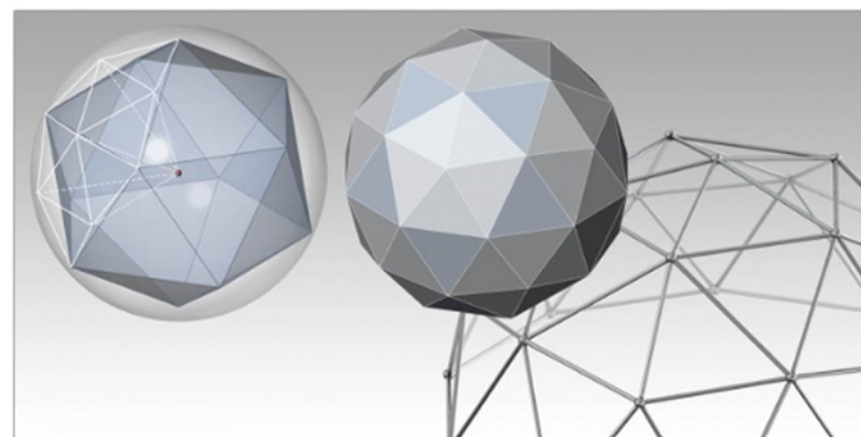
## Definizione – Etimologia

Geometria significa, alla lettera, “misura della terra” e deriva dal greco antico, ove il termine *ghê* terra è tutto ciò che è opposto al cielo. La geometria è dunque, originariamente, la scienza che insegna a misurare le forme che si trovano nel mondo sensibile e lo spazio che le ospita o che le forme stesse includono.

Questa operazione di misura non deve, però, essere intesa solo nel senso comune attuale, come valutazione di quantità lineari o di superficie o di volume, bensì come studio dei rapporti o delle proporzioni che intercedono tra le parti della forma studiata e delle proprietà che ne derivano. Inoltre, questo studio non si applica alle forme fisiche, ma ai loro modelli ideali, che la geometria stessa insegna a costruire.

Si può già cogliere, in questa definizione, il profondo legame che unisce la geometria e l'architettura: entrambe, infatti, sono arti del costruire. La prima, la geometria, costruisce figure immaginate nel piano o nello spazio, laddove la seconda, l'architettura, costruisce forme solide e spazi da vivere nel mondo reale.

Si può dire che l'architettura dà corpo fisico alle astrazioni geometriche, mentre la geometria ne controlla le forme ideali nella fase di progettazione. Un buon esempio di questo rapporto è la cupola del Pantheon a Roma, il cui intradosso approssima una sfera, appoggiata sul pavimento del tempio, con ammirevole accuratezza. È qui evidente come la forma astratta, costruita e controllata per via geometrica, sia stata tradotta in una sapiente struttura di calcestruzzo e laterizi con l'intento di suggerire ed esaltare la perfezione della sfera, assunta nell'idea progettuale. Il legame tra geometria e architettura è qui stretto al punto che non si può più distinguere tra l'una e l'altra arte, cioè tra l'arte del pensiero, che non ha corpo, e l'arte del grave lavoro che rende l'idea forma sensibile.



*Genesi di una cupola geodetica a partire da un icosaedro.*

*non ha corpo, e l'arte del grave lavoro che rende l'idea forma sensibile.*

La geometria è una scienza teorica che si avvale, però, anche di verifiche sperimentali. Infatti, se le deduzioni del ragionamento geometrico sono del tutto astratte, è pur vero che le medesime deduzioni possono essere verificate sperimentalmente attraverso il disegno e, recentemente, attraverso la rappresentazione digitale, con un grado di affidabilità della verifica sperimentale che dipende dalla accuratezza del sistema utilizzato per la rappresentazione. Questa verifica, grafica o informatica, è analoga alla costruzione fisica, anche se si svolge in uno spazio virtuale. La costruzione geometrica può anzi assurgere a metodo di dimostrazione esistenziale, nel senso che la possibilità di costruire una figura geometrica ci assicura della sua esistenza (Loria, 1935).

A sua volta, come già osservava Gaspard Monge (1799), la rappresentazione della figura e della relativa genesi geometrica “offre continui esempi del passaggio dal noto all'ignoto”, e, cioè, continue suggestioni e inviti a esplorare ciò che il pensiero astratto non aveva presagito. Anche queste caratteristiche permettono di riconoscere nella geometria un esercizio astratto di architettura.

## Cenni storici

Nel corso della storia, la geometria ha sviluppato metodi sempre più potenti e modelli sempre più articolati, come quelli che oggi permettono di descrivere forme organiche di straordinaria complessità. Questi metodi e modelli possono essere descritti per mezzo di vari linguaggi, grafici e simbolici che corrispondono ad altrettante specializzazioni della geometria. Tra queste specializzazioni, quelle che maggiormente interessano l'architetto, per le applicazioni che trovano nell'attività progettuale, sono la:

- geometria elementare;
- geometria analitica;
- geometria differenziale;
- geometria descrittiva;
- geometria proiettiva.

La geometria elementare (secolo VI a. C.) è la più antica e studia le figure piane e solide, che rappresenta per mezzo del disegno. Questa geometria fornisce all'architetto gli strumenti essenziali per la composizione planimetrica e altimetrica degli edifici e della città. La geometria elementare, inoltre, consente il controllo delle proporzioni, cioè dei rapporti dimensionali e formali che intercedono tra le parti della costruzione.

La geometria analitica (René Descartes, 1637), si serve di rappresentazioni algebriche per descrivere le forme del piano e dello spazio e per studiare le loro proprietà. In particolare, la posizione dei punti nel piano e nello spazio è riferita a un sistema di assi cartesiani ed espressa per mezzo di coordinate.

La geometria differenziale (secolo XIX), si serve del calcolo e dell'analisi infinitesimale per descrivere linee e superfici in funzione della loro curvatura.

Le geometrie analitica e differenziale sono impiegate, insieme ad altri metodi, nel calcolo strutturale.

La geometria descrittiva (Gaspard Monge, 1799), è tutta rivolta al controllo delle forme dello spazio. Questo controllo viene esercitato attraverso i metodi che permettono di rappresentare in vario modo le suddette forme e attraverso le operazioni che permettono di analizzarle. I metodi di rappresentazione possono utilizzare gli strumenti grafici tradizionali, come i più recenti strumenti digitali. Il disegno analogico, manuale, permette di rappresentare l'architettura in pianta e in alzato, associando le due rappresentazioni, in assonometria, in prospettiva, in proiezione quotata. Gli strumenti digitali permettono di rappresentare l'Architettura utilizzando tutti i metodi già noti oltre al metodo della rappresentazione matematica e al metodo della rappresentazione numerica, di recente istituzione. Questi ultimi metodi, che appartengono a buon diritto alla teoria della geometria descrittiva, sono entrambi utilizzati nel CAD (*Computer Aided Design*). La geometria descrittiva viene utilizzata in tutta l'attività progettuale, dal momento dell'invenzione al momento della esecuzione.

La geometria proiettiva (Jean Victor Poncelet, 1822) studia le trasformazioni che subiscono le figure del piano e dello spazio, quando sono sottoposte a operazioni di proiezione. Per questo motivo, la geometria proiettiva, pur essendo stata codificata dopo la geometria descrittiva, fornisce a quest'ultima i principi teorici fondamentali. Inoltre, la geometria proiettiva studia le relazioni che intercedono tra le figure geometriche oggettive e le loro proiezioni ed è perciò indispensabile strumento in varie attività che interessano il progettista architetto. Ad esempio, la scenografia teatrale e cinematografica, richiede la conoscenza e l'applicazione di questi principi. E ancora: la fotogrammetria e la stereofotogrammetria applicano la teoria proiettiva. Infine, con l'avvento degli strumenti digitali, sono stati messi a punto algoritmi di origine proiettiva in grado di restituire la forma tridimensionale di un qualsiasi oggetto del quale siano state riprese varie immagini statiche e isolate, o anche organizzate in un flusso dinamico. Queste tecniche hanno oggi numerosissime applicazioni che vanno dalla produzione cinematografica, alla presentazione del progetto di architettura, alla *anastilosi* virtuale.

## Definizione relativa ai sensi usati in architettura – La geometria e la costruzione

Nella descrizione dei rapporti tra geometria e architettura, viene spesso citato il passo di Vitruvio: *Geometria autem plura praesidia praestat architecturae ...* , “La geometria poi fornisce all'architettura non poche conoscenze ausiliarie, e innanzitutto insegna, dopo le rette, l'uso del compasso, grazie al quale in particolare si approntano molto speditamente le piante degli edifici all'interno degli spazi loro destinati e si tracciano gli angoli retti e i livelli e le linee.”(I, 1, 4) In questo passo, Vitruvio attribuisce alla geometria due compiti istituzionali che sono: la composizione planimetrica e la rappresentazione dei volumi. Ma i sensi che la parola geometria assume nell'ambito dell'architettura, si sono estesi, nel corso dei secoli, ben oltre la definizione vitruviana.



Infatti:

- la geometria è, sì, lo strumento che permette la costruzione dei modelli che prefigurano la forma realizzata, come vuole Vitruvio, ma anche lo strumento che permette di simulare, su quei modelli, ogni possibile operazione; si deve dunque considerare non solo l'operazione prima e semplice di rappresentazione dell'idea progettuale, ma anche, e soprattutto, le continue verifiche e mutazioni che fanno dell'iter progettuale un ciclo di rappresentazioni convergente verso la definizione dell'idea;
- la geometria è lo strumento che attribuisce al modello la ripetibilità; ciò significa che, grazie alla geometria, il modello di un'architettura può essere ripetuto n volte sempre eguale a sé stesso e perciò può essere trasmesso senza perdita di informazioni;
- la geometria applica la ragione all'immagine e cioè si serve di forme visibili per esprimere il ragionamento matematico e anche per agevolarne e chiarirne il flusso; grazie al ragionamento incorporato nella figura geometrica, il modello è ripetibile;
- la geometria, nelle sue accezioni più comuni e che interessano l'architettura, è una scienza anche sperimentale, vale a dire una scienza che esegue le verifiche dei propri enunciati non solo per mezzo del ragionamento astratto, ma anche progettando e realizzando esperimenti grafici o digitali, i quali possono convalidare o negare l'ipotesi iniziale; così come nel progetto di architettura ogni idea si traduce in un esperimento grafico atto a verificarne la validità rispetto ai requisiti e alle ipotesi mirate a soddisfarli.

## Esemplificazione – Costruzioni geometriche e architettura

Il ruolo della geometria nel progetto di architettura è talmente ricco e articolato che ogni raccolta di esempi sarebbe riduttiva e poco significativa. È possibile, però, fornire alcuni esempi del modus operandi della geometria, all'interno del ciclo progettuale e della conseguente materializzazione dell'idea geometrica nell'opera architettonica finita.

### Geometria per la genesi delle proporzioni

Il più noto esempio di applicazione della geometria elementare al proporzionamento di piante e alzati è senz'altro la costruzione del rapporto aureo. Si definisce in questo modo la divisione di un segmento AB, per mezzo di un punto C, in due parti tale che:

$$\begin{aligned} AC + CB &= AB \\ AB:AC &= AC:CB \end{aligned}$$

Il segmento CB si dice estrema ragione; il segmento AC media ragione del rapporto. Vi sono due modi per costruire il rapporto, uno utile quando sia dato AB e un altro utile quando sia data la media ragione AC.

Nel primo modo si innalza su B la perpendicolare BD con  $BD = \frac{1}{2} AB$ . Si costruisce la

Nel primo modo si innalza su B la perpendicolare BD con  $BD=1/2 AB$ . Si costruisce la diagonale AD e si riporta su di essa DB, in E. Si riporta infine AE su AB, staccando il punto C.

Nel secondo modo, si costruisce un quadrato su AC e lo si divide in due rettangoli eguali per mezzo dell'asse del segmento AC. Si riporta su AB la diagonale di uno dei due rettangoli a partire dal punto medio di AC: l'estremo del segmento così riportato è il punto B.

Come si vede, la costruzione geometrica del rapporto ha generato una figura geometrica che è, essa stessa, la struttura di una plausibile forma architettonica. La soluzione di un problema squisitamente matematico, attraverso un procedimento grafico affetto dalle approssimazioni del mezzo usato per eseguirlo, ha dato luogo a una immagine di valore formale. Questa immagine, mentre da un lato può essere utilizzata per una verifica sperimentale dell'assunto ( $AB:AC = AC:CB$ ), dall'altro suggerisce partizioni del piano e disposizioni di elementi che possono essere interpretati in senso planimetrico come in senso altimetrico.

Il più noto esempio contemporaneo di applicazione di questa procedura, anche perché dichiarato dall'Autore, è la facciata della casa Stein di Le Corbusier (1927). "Tutta questa casa risponde a tracciati regolatori rigorosi che hanno condotto a modificare le misure delle differenti parti con l'approssimazione di un cm. La matematica porta qui a verità confortanti: quando si smette di utilizzarla si ha la certezza d'essere arrivati a un risultato esatto". Questa la testimonianza dell'architetto, che, mentre avvalora il potenziale della costruzione geometrica come matrice formale dell'edificio, racconta anche di un processo creativo ricorsivo, che utilizza il disegno geometrico come campo di esperienze e tentativi mirati, al tempo stesso, a verificare opzioni e a creare nuove suggestioni.

Un altro rapporto significativo, nel *modus operandi* della geometria in architettura, è il rapporto invariante nelle operazioni di proiezione, cioè quel rapporto, noto come birapporto, che non si altera nella visione prospettica di un edificio.

Dati su un segmento AD i quattro punti A, B, C e D, si possono individuare i quattro segmenti, parzialmente sovrapposti:

AC, BC, AD, BD.

Si dicono rapporti semplici i rapporti  $AC/BC$  e  $AD/BD$  e si dice birapporto (ABCD) il rapporto di questi rapporti semplici, ovvero:

$$(ABCD) = (AC/BC)/(AD/BD).$$

Il birapporto (ABCD) ha la caratteristica di rimanere invariato nelle operazioni di proiezione e perciò anche nella visione prospettica e scorciata di una composizione architettonica. Se, ad esempio, una facciata è ripartita in tre parti eguali, il birapporto dei quattro punti staccati su un marcapiano dalla ripartizione verticale del prospetto resta eguale, quale che sia l'angolo sotto il quale viene osservata la facciata, e pari a  $4/3$ . Di conseguenza, una scansione verticale della facciata fatta in parti diseguali, ma legate dal birapporto  $4/3$ , avrà come effetto quello di generare nell'osservatore l'impressione di un movimento in profondità della facciata. Questo accorgimento si può osservare in alcune facciate barocche. Soluzioni analoghe, ma più complesse, sono le prospettive solide, come quella di Borromini a Palazzo Spada ([falsa prospettiva](#)).

**Geometria per la genesi delle superfici**

Diverso è il *modus operandi* della geometria quando il campo dell'invenzione si sposta dal piano nello spazio. In questo caso il luogo geometrico diviene, al tempo stesso, regola della costruzione geometrica ideale e strumento tecnico della costruzione fisica del manufatto.

Consideriamo, ad esempio, il caso di un guscio di calcestruzzo armato che debba coprire un ambiente, o una sua porzione, delimitato da due lati opposti sghembi. Una possibile soluzione, dal punto di vista geometrico, consiste nel costruire la superficie rigata a piano direttore che si appoggia ai due segmenti dati nello spazio. Tale superficie rigata è un paraboloido iperbolico. La realizzazione fisica del manufatto impiega il medesimo procedimento, appoggiando, ai due bordi sghembi imposti, una schiera di tavole tutte parallele al medesimo piano e, per l'armatura, una schiera di tondini o una doppia schiera, come nella genesi geometrica. Si danno molti esempi di questa soluzione, come la cattedrale di Santa Maria a Tokyo, di Kenzo Tange.

I luoghi geometrici sono un potente mezzo di indagine e di genesi formale, basti pensare che la maggior parte delle superfici si definisce a mezzo del movimento di una linea curva o retta che si rivolge intorno a un asse o trasla appoggiandosi ad altre linee curve o rette. Queste rivoluzioni, così come questi movimenti, suggeriscono poi, facilmente, gli espedienti tecnici necessari alla realizzazione dei relativi manufatti.

**Geometria per la genesi delle strutture**

Le cupole geodetiche (Buckminster Fuller, 1954) sono un ottimo esempio del processo che porta l'idea geometrica a divenire architettura. La superficie che chiude il più ampio volume con la minima estensione è la sfera. Se si vuole realizzare una copertura con la minore quantità di materiale è dunque logico pensare ad una struttura reticolare i cui nodi siano disposti su una superficie sferica. La geometria insegna che i solidi regolari, inscrittibili in una sfera, sono solo cinque (tetraedro, esaedro, ottaedro, dodecaedro e icosaedro) e tra questi, l'icosaedro (duale del dodecaedro) è quello che presenta il maggior numero di spigoli (trenta), cioè il maggior numero di aste, ove lo si immagini come solido vacuo, alla maniera di Leonardo e Luca Pacioli. Se si vuole aumentare il numero delle aste, è possibile dividere in parti eguali lo spigolo dell'icosaedro (o l'angolo al centro sotteso dal medesimo) per proiettare i punti, così individuati, dal centro sulla superficie della sfera, ottenendo nuovi nodi della maglia reticolare. Il risultato sarà un poligono irregolare, cioè con le facce non tutte eguali, ma con differenze minime tra una faccia l'altra. I vantaggi di questa costruzione sono notevoli: le differenze di lunghezza tra le aste sono le più piccole possibili e il numero delle aste-tipo è pure ottimizzato.

In queste strutture non è più possibile distinguere l'invenzione geometrica, quella strutturale o ingegneristica, quella compositiva o architettonica. La teoria di natura matematica, il calcolo, l'estetica si fondono in un tutt'uno.

**Geometria per la genesi di forme libere**

Fino agli anni Ottanta dello scorso secolo era difficile pensare di poter utilizzare, in architettura, forme liberamente modellate come quelle che oggi ostentano molti degli edifici di Frank Gehry. Le forme non esprimibili come luoghi geometrici elementari e cioè come superfici di rivoluzione o di traslazione non potevano essere rappresentate con accuratezza in ogni punto e perciò riprodotte, calcolate e realizzate. Le equazioni NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) hanno finalmente permesso di descrivere



matematicamente e perciò rappresentare, nel piano e nello spazio, anche queste forme e le hanno rese, perciò, ripetibili. La geometria si è dunque arricchita, nelle sue espressioni digitali, di una tavolozza di forme inesauribile. Queste recenti geometrie, unite all'accuratezza dei sistemi di rappresentazione digitale, che è migliorata di due ordini di grandezza, ha fatto sì che non vi sia più differenza alcuna di tracciamento tra entità geometriche come la retta e il cerchio, o la parabola e l'iperbole, o, ancora, una qualsiasi curva o superficie algebrica, o una qualsiasi curva e superficie la cui forma è funzione di alcuni poli e dei relativi tensori (o pesi). E' così possibile concepire e modellare una superficie geometrica come se fosse plasmata in un materiale elastico, tenuto in forma per mezzo di tiranti. La tecnologia di progetto degli scafi, degli aerei e delle carrozzerie si è così trasmessa all'architettura e ha sollecitato nuove sperimentazioni formali e tecnologiche.

### Bibliografia

Boyer C. B., *Storia della matematica*, Mondadori, Milano, 1980; Casle A., *Geometria creativa – Intuizione e ragione nel disegno dell'oggetto*, Edizioni Kappa, Roma, 2010; Descartes R., *Discours de la méthode, Livre I – Géométrie*, Imprimerie de Ian Maire, Leyde, 1637; Euclide, *Tutte le opere*, Introduzione, traduzione, note e apparti di Fabio Acerbi, Bompiani, Milano, 2007; Jammer M., *Storia del concetto di spazio – da Democrito alla relatività*, Feltrinelli, Milano, 1963; Le Corbusier (Jeanneret P.), *Oeuvre complète 1910-1929*, Girsberger, Zürich, 1974; Loria G., *Metodi matematici – Essenza – Tecniche – Applicazioni*, Hoepli, Milano, 1935; Migliari R., *I fondamenti geometrici della progettazione*, in *Enciclopedia Italiana di scienze, lettere ed arti. Gli spazi e le arti*, IV vol., appendice XXI, Istituto Treccani, Roma, 2010; Monge G., *Géométrie descriptive*, Baudouin, Paris, 1799; Piegl L., Tiller W., *The NURBS Book*, SpringerVerlag, Berlin-Heidelberg, 1997; Poncelet J.V., *Traité de propriétés projectives des figures*, Bachelier, Paris, 1822; Quici F., *Tracciati d'invenzione*, UTET Libreria, Torino, 2004; Sacchi L., Unali M., *Architettura e cultura digitale*, Skira, Milano, 2003; Saggio A., *Architettura e modernità – Dal Bauhaus alla rivoluzione informatica*, Carocci, Roma, 2010; Vitruvio, *De Architectura*, Gros P. (a cura), Einaudi, Torino, 1997.

### PHOTOGALLERY

