УДК 512.816.7

ГЕОМЕТРИЯ В ИТАЛИИ И РОССИИ В 1920-1940-Е ГОДЫ

Дулина Анастасия Петровна, докторант
Римский университет «La Sapienza», Италия
dulina@mat.uniroma1.it, nastyamatan@mail.ru

Аннотация: статья посвящена развитию итальянской и русской школ проективно-дифференциальной геометрии. Рассматриваются научные теории А. Террачини и М. А. Акивиса, их эволюция и влияние на развитие актуальных проблем проективно-дифференциальной геометрии.

Ключевые слова: проективно-дифференциальная геометрия, метод «подвижного репера», метод «дифференциальных форм», метод «расширений и включений».

1. РАЗВИТИЕ ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ИТАЛИИ.

Итальянский математик К. Сегре (C. Segre, 1863-1924) является основателем исследований в области проективно-дифференциальной геометрии гиперпространств с геометрической точки зрения. Он использовал аналитическо-синтетический подход для развития этих теорий. Проективно-дифференциальная геометрия родов высшего порядка была культивируема внутри итальянской школы до 1960-х гг. и разработала ряд фундаментальных результатов, принадлежащих, в частности, итальянскому математику Э. Бомпиани (E. Bompiani, 1889-1975) и его школе. В своих основополагающих работах К. Сегре строго демонстрирует все свойства: геометрические, используя самые простые аналитические инструменты обусловленные глубокой геометрической интуицией. Работа К. Сегре «Su una classe di supeficie degl'iperspazi legata colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2^0 ordine» [10] опубликованная в 1907 г. является одним из краеугольных камней итальянской школы проективно-дифференциальной геометрии. В этой работе представлены следующие фундаментальные вопросы: поверхность определяет два независимых уравнения Лапласа, если и только если она является разложимой или находится в трёхмерном пространстве; каждая поверхность в P^4 определяет одно уравнение Лапласа; исследование геометрии богатой поверхностями Φ, которые определяют одно уравнение Лапласа в P^5 в связи с поведением их четырёхмерных тангенциальных многообразий; одна поверхность Φ имеет двойную систему сопряжённых линий, если и только если первая определяет одно уравнение Лапласа. Важные обобщения этих результатов на многомерные многообразия и линейные дифференциальные уравнения высшего порядка были проделаны учениками и последователями К. Сегре, такими как А. Террачини (A. Terracini, 1889-1968), Э. Бомпиани, Б. Сегре (B. Segre, 1903-1977) и др. В работе «Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi» [9] Сегре изучает многообразия порождённые семейством линейных подпространств. Эта область исследования была продолжена А. Террачини и Э. Бомпиани и до сегодняшнего дня имеет нерешённые проблемы.

Помимо школы К. Сегре, параллельно в Италии развивалась школа берущая свои истоки от работ Г. Фубини (G. Fubini, 1879-1943). Первая работа

Фубини посвященная проективно-дифференциальной геометрии опубликована в 1914 г., однако его наиболее выдающиеся исследования принадлежат к послевоенному периоду вплоть до 1942 г. Эти исследования были опубликованы в двух трактатах: «Geometria proiettiva differenziale» [7] в 1927 г. и «Introduction a la géométrie projective différentielle de surfaces» в 1931 г., оба написаны в сотрудничестве с Э. Чехом (E. Cech, 1893-1960). Г. Фубини был прежде всего выдающимся специалистом в анализе, что позволило ему преодолеть большие алгоритмические трудности, которые препятствовали открытию «проективных дифференциальных инвариантов». Несмотря на то, что точка зрения Г. Фубини отличалась от точки зрения К. Сегре, они имели и точки соприкосновения. Фубини предпринял попытку определить поверхность в ординарном пространстве, вплоть до ординарных преобразований в смысле дифференциальных форм. Геометрической интерпретации инвариантов им найденных впоследствии посвятили свои труды разные математики, в частности два выдающихся итальянских геометра А. Террачини и Э. Бомпиани.

2. РАЗВИТИЕ ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В РОССИИ.

Развитие проективно-дифференциальной геометрии в России во многом было обусловлено влиянием на русскую геометрическую школу французского математика Э. Ж. Картана (E. J. Cartan, 1869-1951), который был связан узами дружбы со многими советскими математиками. Многочисленные труды Картана по дифференциальной геометрии основываются на введении нового метода «подвижного репера». Этот метод связан с теорией групп Ли конечной размерности и с теорией систем уравнений Пфаффа в инволюции.

Переняв и обосновав идеи Ж. Дарбу (J.-G. Darboux) и Э. Коттона (E. Cotton), в 1910 г. Э. Картан публикует первый краткий очерк «Sur les développables isotropes et la méthode du trièdre mobile» и позднее работу «La structure des groupes de transformations continus et la thèorie du trièdre mobile», в которых Картан впервые соединил теорию групп Ли и теорию уравнений Пфаффа с методом «подвижного репера». Этот метод позднее стал основным методом в трудах Картана по геометрии. Десять книг и полное собрание трудов Э. Ж. Картана появились в русском переводе в 1933-1963 гг. В 1930 г. в Москве Картан прочитал курс лекций посвящённый «La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés», который был опубликован на русском языке в 1933 г.

Выдающий русский математик XX в. С. П. Фиников (1883–1964), являлся студентом Картана в Парижском университете, основал советскую школу дифференциальной геометрии, которая занималась приложениями метода «внешних форм» и метода «подвижного репера». Метод «дифференциальных форм» был развит С. П. Финиковым в книге «Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии». Этот метод был применён к решению многих проблем дифференциальной геометрии Финиковым и его студентами. В 1927-1928 гг. Г. Н. Николадзе (1888-1931) под руководством Э. Картана в Сорбонне защитил докторскую диссертацию. Вернувшись в СССР Николадзе становиться профессором университета Тбилиси и основывает грузинскую геометрическую школу.

Ученик московской тензорной школы А. П. Норден, работая методом тензорного анализа, рассматривал поверхность вместе с двумя «нормалями» – прямой, проходящей через рассматриваемую точку поверхности (первая нормаль), и прямой, лежащей в соответствующей касательной плоскости (вторая нормаль).

Одно из первых мест по разнообразию и глубине тематики занял В. В. Вагнер. Его работы по неголономной геометрии и среди них крупное исследование 1937 г. о кривизне неголономных многообразий, удостоились премии им. Н. В. Лобачевского.

Характерной чертой русской геометрической школы данного периода является стремление сохранить уравнения первого порядка за счёт введения новых неизвестных функций, т. е. новых точек репера. Этот путь привёл непосредственно к полуканоническому тетраэдру конгруэнции, построенному на двух фокусах и двух фокальных плоскостях луча. Тетраэдр был достаточно гибким, чтобы, пользуясь произволом выбора третьей и четвёртой вершин в фокальных плоскостях луча, соединять ребро с произвольной прямой пространства, и достаточно связанным с конгруэнцией, чтобы отдельные компоненты точно характеризовали её. Метод был построен для исследования расслояемой пары (1926-1929), но он нашёл себе применение в ряде таких задач как: преобразование расслояемой пары (1930), последовательность конгруэнции Фубини, конгруэнции с проективно налагающимися фокальными поверхностями (1931), расслояемые параболические пары (1931), преобразования $T-$конгруэнций (1933), пары поверхностей с пересечением асимптотических касательных (1934-1935), конгруэнции, ассоциированные в совместном изгибании (1937).

3. ВКЛАД А. ТЕРРАЧИНИ.

Одним из выдающихся представителей итальянской школы проективно-дифференциальной геометрии является А. Террачини. Его труды посвящены классификации многообразий с секущим дефектом и с тангенциальным дефектом: с 1979 г. эта проблема актуализируется в работах Ф. Зака (F. Zak). Сочинения А. Террачини также посвящены геометрически-проективным аспектам теории дифференциальных уравнений в частных производных и классификации многообразий, которые являются решениями многих уравнений Лапласа. Он дал геометрическую интерпретацию теории Г. Фубини, в частности, проективной прямой Фубини-Грина на поверхности и проективной метрики Фубини. Террачини рассмотрел расширения на многомерные проективные многообразия понятия «дифференциальной формы Фубини», заменив его удобными линейными системами. Он классифицировал некоторые особые многообразия, в частности многообразие К. Сегре, отталкиваясь от условий их первой дифференциальной квадратичной формы.

В курсе лекций «Geometria differenziale con particolare riguardo all'indirizzo proiettivo» [11], который А. Террачини читал в 1936-1937 гг. в Туринском университете он представил изучение дифференциальной геометрии в сочетании с разными группами преобразований, в частности, с группой проективных преобразований и, развивая таким образом, дифференциально-проективную геометрию.

4. ВКЛАД М. А. АКИВИСА.

М. А. Акивис – один из выдающихся русских геометров современности, опубликовавший в период 1948-2015 гг. более 150 научных работ. Под руководством С. П. Финикова М. Акивис опубликовал свои первые труды посвящённые парам T комплексов (трёхпараметрических семейств) прямых в трёхмерном проективном пространстве P^3. Для решения этой проблемы он нашёл новые свойства пар T конгруэнций, введённых Финиковым, и распространил результаты последнего на пары T комплексов.

В период 1950-1960 гг. М. Акивис посвятил серию работ проективной теории подмногообразий, изучая сеть сопряжённых линий. В результате он создал новую область проективно-дифференциальной геометрии, которая успешно развивается до сегодняшнего дня. Результаты в вопросах пар T комплексов и многие другие результаты М. Акивиса в многомерной проективной дифференциальной геометрии стали частью его монографии «Projective differential geometry of submanifolds» [3].

В своих исследованиях Акивис совместил методы Э. Ж. Картана «внешних форм», «подвижного репера», метод «расширений и включений» Г. Ф. Лаптева с классическим тензорным методом. Помимо вышеуказанной монографии с 1993 г. по 2008 г. М. Акивис опубликовал более 40 работ в разных областях дифференциальной геометрии. В конформной дифференциальной геометрии он изучил вещественную геометрию четырёхмерных многообразий с конформной структурой различной сигнатуры. В сотрудничестве с В. В. Гольдбергом были изучены конформные структуры и их интегрируемость и полуинтегрируемость.

5. НОВЫЙ РАСЦВЕТ ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ.

Возврат к проблемам проективно-дифференциальной геометрии в конце XX в. во многом был обусловлен критическим переосмыслением Эрлангенской программы 1872 г. Ф. Клейна (F. Klein, 1849-1925), выполнение которой значительно отстало. В этой программе он сформулировал проблему: «Что есть геометрия?» Геометрией, согласно Ф. Клейну, является изучение всех инвариантных свойств обьектов представленного класса по отношению к заданной группе преобразований. Согласно Ф. Клейну, некоторая геометрия определяется «областью действия» Ψ (плоскость, пространство и т.д.), и «группой автоморфизмов» (или группой симметрии) Ω, действующей на области Ψ. Когда меняется группа Ω, меняется рассматриваемая геометрическая схема, в результате чего, обретается новая «геометрия».

Целью Эрлангенской программы Ф. Клейна было создание проективно-дифференциальной геометрии для её переосмысления как эволюции классической дифференциальной геометрии, а также создание проективной геометрии для её переосмысления как эволюции евклидовой геометрии.

Исследования в этой области были предприняты Г. Хальфеном (G. H. Halphen) и Э. Вильчинским (E. J. Wilczynski), однако систематическое оформление Эрлангенской программы было осуществлено Г. Фубини. Последний достиг значительных успехов в изучении дифференциальных выражений относительно проективной группы. Эти выражения были найдены без геометрической интерпретации, которая может быть очевидной.

В первой половине XX в. проективно-дифференциальная геометрия была передовой областью в геометрических исследованиях. Однако сегодня она не является столь широко востребованной, тем не менее, найдены многочисленные интересные связи между ней и другими разделами математики. Уже в одномерном случае проективно-дифференциальная геометрия предлагает множество структур связанных с известной алгеброй Вирасоро (которая является одной из бесконечномерных алгебр Ли и определяется как центральное расширение $Vect(S^1)$). В частности, самым древним дифференциальным инвариантом проективной геометрии является производная Шварца. Соотношение производной Шварца с когомологией группы $Diff(R\mathrm{P}^1)$ влечёт за собой многочисленные интересные приложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акивис М.А., Шелехов А.М. Метод Картана-Лаптева в теории многомерных три-тканей // Фундаментальная и прикладная математика. – 2010. – Выпуск 1. – Т. 16. – С. 13-38.
2. Акивис М.А. Дифференциальная геометрия тканей // Итоги науки и техники. – 1983. – Серия: Проблемы геометрии. – Т. 15. – С. 187-213.
3. Akivis M.A., Goldberg V.V. Projective Differential Geometry of Submanifolds. – Amsterdam: North-Holland Publishing Co. – Vol.49. – 1993. – 361 p.
4. Akivis M.A., Goldberg V.V. Differental Geometry of Varieties with Degenerate Gauss Maps. – New York: Springer-Verlag. – 2000. – 255 p.
5. Akivis M.A. Rosenfeld B.A. Elie Cartan (1869-1951). American Mathematical Society. – Vol.123. – 1991. – 317 p.
6. Ciliberto C. An overview on the Italian school of projective differential geometry. Conference at IHS, Paris. – 2008.
7. Fubini G., Chech E. Geometria proiettiva differenziale. 2 voll. Bologna: Zanichelli. – 1927. – 398 p.
8. Goldberg V.V. Maks A. Akivis Selected Papers. Heldermann Verlag. – 2008. – 294 p.
9. Segre C. Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. – 1910. – Vol. 30. – no. 1. – P. 87-121.
10. C. Segre. Su una classe di superficie degl’iperspazi, legate con le equazioni lineari alle derivate parziali di 2^0 ordine // Atti R. Acc. Scienze Torino. – 1906-1907. – Vol. 42. – P. 1047–1079.
11. Terracini A. Geometria differenziale con particolare riguardo all'indirizzo proiettivo. Quaderni delle lezioni. Torino. – 1936-1937. – 358 p.
12. Yaglom I.M. Felix Klein and Sophus Lie. Evolution of the idea of symmetry in the nineteenth century. Boston: Birkhäuser. – 1988. – 251 p.