

## **INTERAZIONE RISONANTE NELLA GENERAZIONE NON LINEARE DELLA SECONDA ARMONICA IN ONDE CHE SI PROPAGANO SULLA SUPERFICIE DELL'ACQUA**

Andrea Bettucci, Massimo Germano, Adriano Alippi

Sapienza Università di Roma, Dipartimento SBAI, Via A. Scarpa 14, 00161 Roma

### **1. Introduzione**

La generazione di componenti armoniche lungo la direzione di propagazione di un'onda elastica, è un fenomeno fisico noto e ben studiato che è stato utilizzato, ad esempio, per applicazioni ingegneristiche nel campo delle onde acustiche superficiali [1,2]. Nel caso in cui tale processo fisico avvenga in un fluido, si può avere la formazione di onde di shock causata dalla progressiva distorsione del fronte d'onda indotta dall'accumulo di componenti armoniche lungo la direzione dell'onda [3]. Se si considerano, invece, onde che si propagano sulla superficie di un liquido, l'acqua per esempio, l'agire concomitante della forza di gravità e della tensione superficiale può generare un'interazione cosiddetta risonante fra due componenti armoniche.

Il concetto di interazione risonante fra due diverse componenti armoniche generate non linearmente da un'onda propagantesi in un data direzione, esplicita il fatto che energia elastica può fluire da una componente all'altra se in ogni punto lungo la direzione di propagazione esiste una relazione di fase costante tra le due componenti: tale condizione massimizza l'integrale di sovrapposizione spaziale tra la distribuzione delle deformazioni generate dalle due componenti armoniche risonanti [4].

Se il mezzo di propagazione è dispersivo, la condizione per l'interazione risonante è, in generale, non verificata, poiché le componenti armoniche viaggiano ciascuna con una velocità diversa dalle altre; se però la relazione di dispersione per la velocità di propagazione delle onde nel mezzo presenta un minimo, l'interazione risonante può avere luogo tra due onde aventi un'opportuna coppia di frequenze armoniche ( $f$  e  $2f$  nel caso di interazione tra fondamentale e seconda armonica) che si propagano con la stessa velocità di fase pur avendo frequenze diverse.

In questo lavoro vengono riportati alcuni risultati sperimentali che mostrano l'effetto dell'interazione risonante nella generazione non lineare di seconda armonica nelle onde che si propagano sulla superficie dell'acqua; viene anche descritto un modello per l'interpretazione delle misure basato sull'ipotesi che la seconda armonica sia localmente generata dalla fondamentale, l'ampiezza della seconda armonica essendo proporzionale al quadrato di quest'ultima tramite un opportuno coefficiente di accoppiamento, e si so-

stenga per l'effetto cumulativo di tutte le interazioni locali che si susseguono lungo la direzione di propagazione.

## 2. Il dispositivo sperimentale

Il dispositivo sperimentale impiegato per misura dei dati riportati in questo lavoro è schematicamente illustrato in figura 1. Le onde superficiali sono state generate in contenitore di vetro largo 40 cm, lungo 40 cm e alto 5 cm contenente acqua deionizzata per una profondità di 1 cm; un nastro gommato è stato posto lungo le superfici laterali del contenitore al fine di annullare la generazione di onde riflesse. Una sottile piastra di alluminio ( $20 \times 20 \times 0.2 \text{ cm}^3$ ) costituisce la sorgente delle onde superficiali; essa è stata posizionata in prossimità di un bordo della vasca e a esso parallela, immersa perpendicolarmente alla superficie del liquido per una profondità di 4 mm. La piastra è stata posta in oscillazione tramite un vibratore elettromeccanico cui era solidalmente collegata; il controllo della frequenza e dell'ampiezza di oscillazione del vibratore è avvenuto tramite un generatore di tensione sinusoidale ad esso elettricamente collegato. L'ampiezza e la fase delle onde superficiali generate sono state misurate per mezzo di un amplificatore lock-in collegato a un vibrometro laser, il cui fascio luminoso incideva perpendicolarmente alla superficie dell'acqua. Un sistema di motori passo-passo ha permesso lo spostamento del fascio laser sulla superficie dell'acqua, perpendicolarmente alla piastra oscillante, lungo la direzione di propagazione dell'onda superficiale.

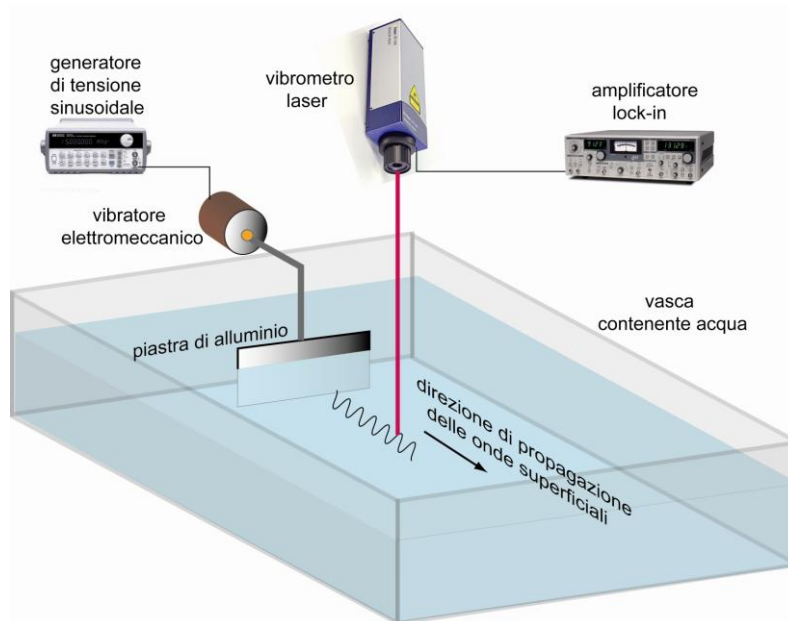


Figura 1 – Schema del dispositivo sperimentale utilizzato per la generazione e la rivelazione delle onde superficiali nell'acqua

## 3. Condizioni per l'interazione risonante nelle onde superficiali in acqua e risultati sperimentali

Se sulla superficie dell'acqua si considerano onde sinusoidali (ovvero senza increspature della superficie) in cui la gravità sia l'unica forza di richiamo la quale, insieme

all'inerzia della massa del liquido, sia la causa della propagazione dell'onda, la relazione di dispersione della velocità di propagazione non presenta un minimo: la velocità di fase dell'onda è una funzione crescente della lunghezza d'onda fino al valore limite di  $(gh)^{1/2}$ , raggiunto per onde in cui la lunghezza d'onda sia molto maggiore della profondità  $h$  – supposta uniforme – del fluido [5]. Stante queste condizioni, pertanto, anche se si generano frequenze armoniche nella propagazione dell'onda, non è possibile un'interazione risonante [6].

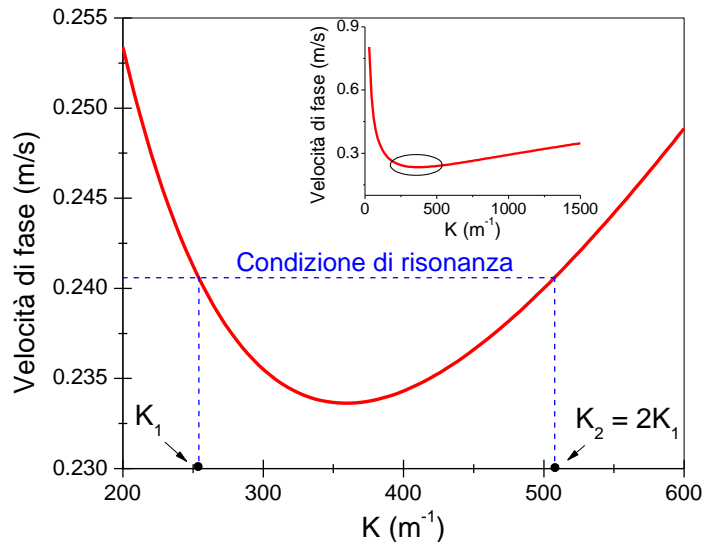


Figura 2 – Curva di dispersione per le onde superficiali in acqua nel caso in cui le forze di richiamo siano la gravità e la tensione superficiale. In secondo piano la curva di dispersione è mostrata per un largo intervallo di numeri d'onde: la parte cerchiata è riportata in primo piano dove sono messi in evidenza i valori dei numeri d'onda per il fenomeno della risonanza.

Se oltre alla gravità si considera l'agire della tensione superficiale, la superficie libera dell'acqua sarà sottoposta a una forza di richiamo aggiuntiva proporzionale alla curvatura della superficie; in questo caso la relazione di dispersione assume la forma [5]:

$$(1) \quad c = \sqrt{\left( \frac{g}{k} + \frac{\tau k}{\rho} \right) \tanh kh} \quad [\text{m/s}]$$

dove  $k$  è il numero d'onde, mentre  $\tau$  e  $\rho$  rappresentano la tensione superficiale e la densità dell'acqua, rispettivamente. La figura 2 mostra la relazione di dispersione avendo assunto  $g = 998 \text{ kg/m}^3$  (densità dell'acqua),  $h = 1 \text{ cm}$  e  $\tau = 72 \times 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$ : in questo caso è presente un minimo di velocità pari a  $c_{min} = 23 \text{ cm/s}$  cui corrisponde una lunghezza d'onda  $\lambda_{min} = 1.7 \text{ cm}$ . Questo rende possibili le condizioni per l'interazione risonante tra due onde, una di frequenza doppia dell'altra, ma che necessariamente abbiano la stessa velocità di fase. Nella figura 2 la linea tratteggiata indica i due valori dei numeri d'onda della fondamentale,  $k_1 = 254.2 \text{ m}^{-1}$ , e della seconda armonica,  $k_2 = 2 k_1 = 508.4 \text{ m}^{-1}$ , che

soddisfano questa condizione: la frequenza della fondamentale corrisponde a  $f_{res} \approx 9.6$  Hz con una velocità di fase, eguale per le due onde, di circa 24.1 cm/s.

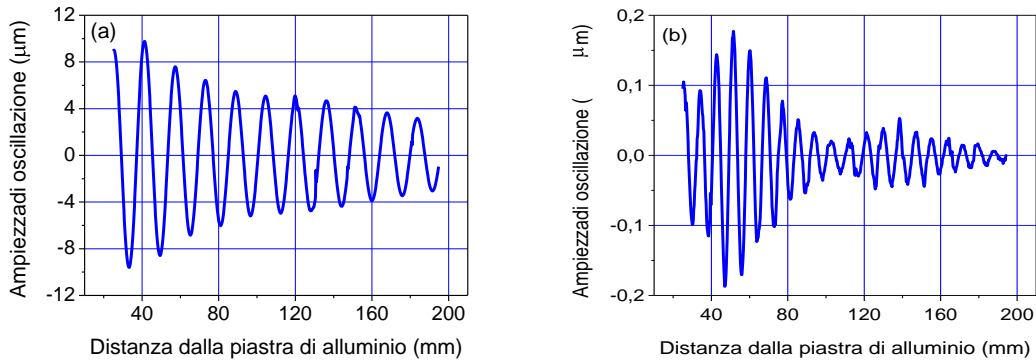


Figura 3 – Ampiezza di oscillazione della superficie dell'acqua misurata in funzione della distanza dalla sorgente di onde (piastra di alluminio) oscillante alla frequenza di 14 Hz. (a): ampiezza della fondamentale a 14 Hz; (b): ampiezza della seconda armonica a 28 Hz

La figura 3 riporta, per una frequenza di eccitazione della sorgente di onde (piastra) di 14 Hz, in (a) l'ampiezza di vibrazione della superficie dell'acqua misurata alla frequenza fondamentale (frequenza di vibrazione della sorgente delle onde), e in (b) l'ampiezza di vibrazione misurata a 28 Hz (ampiezza della seconda armonica). La figura 4 riporta le stesse misure per una frequenza di eccitazione (9.6 Hz) pari a quella per l'interazione risonante tra prima e seconda armonica.

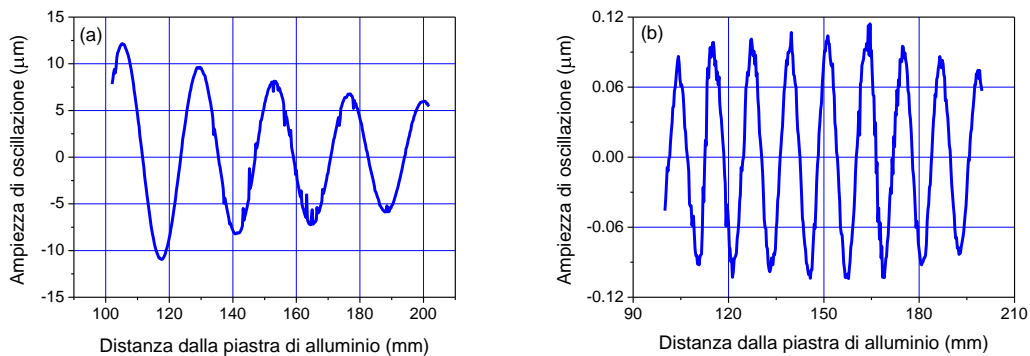


Figura 4 – Ampiezza di oscillazione della superficie dell'acqua misurata in funzione della distanza dalla sorgente di onde (piastra di alluminio) oscillante alla frequenza di 9.6 Hz. (a): ampiezza della fondamentale a 9.6 Hz; (b): ampiezza della seconda armonica a 19.2 Hz (b)

Come si nota da entrambe le figure, l'ampiezza,  $A$ , della fondamentale ha un naturale decremento esponenziale secondo la legge

$$(2) \quad A = A_0 e^{-\alpha(x-x_0)} \quad [m]$$

essendo  $\alpha$  – misurato in  $\text{m}^{-1}$  – il coefficiente di attenuazione dell'onda,  $x$  la direzione di propagazione dell'onda e  $A_0$  l'ampiezza di oscillazione nel punto  $x = x_0$ .

Misure della ampiezza di spostamento della superficie dell'acqua alla frequenza fondamentale prese per diversi valori della frequenza di oscillazione della sorgente delle onde, ha consentito di ricavare l'andamento del coefficiente di attenuazione nell'intervallo di frequenze compreso fra 5 Hz e 60 Hz. La figura 5 riporta tali valori che sono in accordo con quanto riportato in letteratura così come lo è l'andamento lineare in funzione della frequenza.

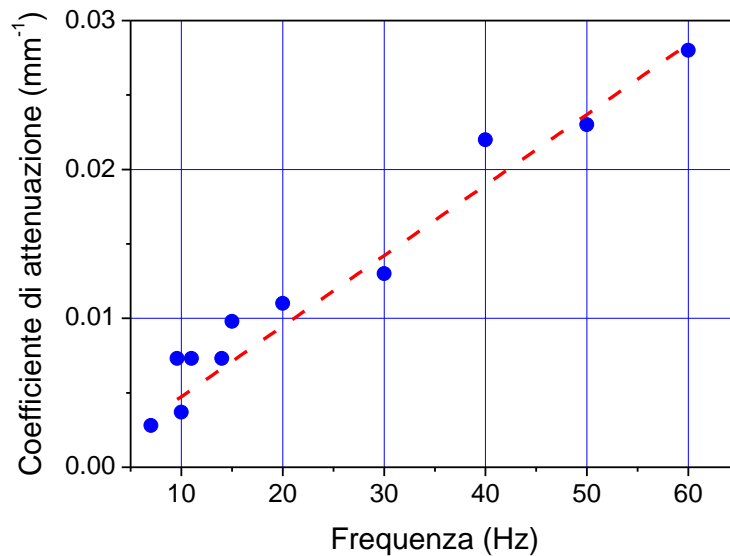


Figura 5 – Valori del coefficiente di attenuazione,  $\alpha$ , delle onde superficiali in acqua misurato nell'intervallo di frequenza tra 5 e 10 Hz. La curva tratteggiata indica la regressione lineare dei dati sperimentali

#### 4. Modello teorico dell'interazione risonante e discussione dei risultati sperimentali

La generazione di armoniche per non linearità lungo la direzione di propagazione di un'onda è un problema complesso a causa della geometria del fronte d'onda e per il tipo di relazioni costitutive il mezzo di propagazione. Nel caso in questione in cui la propagazione riguarda onde sulla superficie dell'acqua, si è supposto che il fronte d'onda sia piano e infinitamente esteso così da poter trascurare la diffusione angolare e il conseguente campo di Fresnel. Di conseguenza, l'espressione dell'onda di pulsazione  $\omega$  che si propaga nella direzione dell'asse  $x$  assume la forma:

$$(3) \quad a_1(x, t) = A_1 e^{i(\omega t - kx)} e^{-\alpha x} \quad [m]$$

Tale onda, in un intervallo di lunghezza  $Dx$  attorno al punto  $x'$  posto lungo la direzione di propagazione, produrrà per non linearità una perturbazione di seconda armonica proporzionale al quadrato di  $a_1$ . L'integrale di sovrapposizione tra questa perturbazione e la distribuzione delle deformazioni prodotte dall'onda di seconda armonica, determinano un breve treno d'onde che, lungo la direzione  $x$  di propagazione, si somma,

con l'opportuna fase, con la seconda armonica prodotta localmente. Pertanto, in ogni punto  $x$  verrà prodotta una seconda armonica di ampiezza:

$$(4) \quad a_2(x, t) = \int \Gamma a_1^2 \left( x', t - \frac{x - x'}{v_2} \right) e^{-\beta(x-x')} dx' \quad [m]$$

nella quale  $\Gamma$  rappresenta un coefficiente di accoppiamento complesso che comprende sia i parametri di non linearità elastica del mezzo di propagazione sia il tipo di onda (di volume, di superficie ecc.);  $\beta$  e  $v_2$  sono il coefficiente di attenuazione la velocità della seconda armonica, rispettivamente. Da questo modello ne discende che le sorgenti della seconda armonica seguono la distribuzione della fondamentale e la sua velocità, mentre la seconda armonica si propaga con la propria velocità  $v_2$ . In questo meccanismo di interazione, la dispersione gioca un ruolo fondamentale influenzando le relazioni di fase tra fondamentale e seconda armonica. Si è precedentemente visto, Eq. (1), che le onde superficiali nell'acqua sono altamente dispersive e, quindi, il modello ora descritto prevede l'impossibilità della nascita della seconda armonica lungo la direzione di propagazione della fondamentale; tuttavia, come evidenziato nel terzo paragrafo, l'esistenza di un minimo della curva di risonanza fa sì che, pur in presenza di dispersione, esista una frequenza (9.6 Hz) per la quale la seconda armonica ha esattamente la metà della lunghezza d'onda della fondamentale (ovvero  $k_2 = 2k_1$ ) e, quindi, la stessa velocità di fase, essendo la frequenza della seconda armonica il doppio di quella della fondamentale (Fig. 2).

Tutto questo è ben evidenziato nella figure 3(b) che riporta l'ampiezza dell'onda di seconda armonica per una frequenze di eccitazione  $f=14$  Hz, lontano dalla frequenza di risonanza  $f_{\text{res}} = 9.6$  Hz. Si nota l'esistenza di una forte modulazione generata dalla differenza di fase tra fondamentale e seconda armonica che varia lungo la direzione di propagazione; questo sfasamento produce un massimo di ampiezza a una distanza  $x \approx 50$  mm dalla sorgente delle onde elastiche (piastra). Da questo punto in avanti la seconda armonica localmente prodotta per interazione non lineare della fondamentale e la seconda armonica che si sta propagando nella stessa direzione della fondamentale, tendono alla condizione di controfase che viene raggiunta a una prima volta a una distanza  $x \approx 105$  mm dalla piastra e, successivamente, in  $x \approx 196$  mm: in questi punti si misura un minimo dell'ampiezza di seconda armonica.

Questo effetto di modulazione può essere qualitativamente spiegato con l'interferenza di un'onda con numero d'onde  $k_2$  con un'onda di seconda armonica (numero d'onde  $2k_1$ ): dalla relazione di dispersione (Eq. 1) alle frequenze  $f_1 = 7.0$  Hz e  $f_2 = 14.0$  Hz si ricava per le lunghezze d'onda  $\lambda_1 = 16.5$  mm e  $\lambda_2 = 9.08$  mm, rispettivamente. L'interferenza tra le due onde con numero d'onde  $k_1 = 2\pi/\lambda_1$  e  $k_2 = 2\pi/\lambda_2$  produce un'onda che ha una portante di lunghezza d'onda  $\lambda_c = 2 \lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + 2\lambda_2) = 8.67$  mm; sperimentalmente, dalla figura 3(b) è possibile ricavare  $\lambda_c^{\text{spcr}} = 8.65 \pm 0.05$  mm. Teoricamente, inoltre, l'interferenza delle due onde causa una lunghezza d'onda dell'involuppo  $\lambda_{\text{inv}} = 91$  mm, mentre sperimentalmente, sempre dalla figura 3(b), si ricava  $\lambda_{\text{inv}}^{\text{spcr}} = 90 \pm 3$  mm.

La modulazione dell'ampiezza della seconda armonica è invece assente nel caso in cui la frequenza di eccitazione sia prossima alla frequenza risonante (Fig. 4b): se la frequenza dell'onda fondamentale è uguale a 9.6 Hz, la seconda armonica (di frequenza 19.2 Hz) propagandosi con la stessa velocità di fase della fondamentale, è sempre in fase e sempre in fase con quest'ultima, cosicché la sua ampiezza cresce continuamente

lungo al direzione di propagazione, limitata solo dagli effetti di attenuazione prodotti dall'acqua. In questo caso si ha teoricamente  $\lambda_c = 12.36$  mm, mentre le misure sperimentali forniscono il valore  $\lambda_c^{\text{spet}} = 11.9 \pm 0.5$  mm.

La figura 6 mostra una curva di risonanza del fenomeno osservato; essa è stata ottenuta misurando la distanza dalla sorgente di onde superficiali alla quale le diverse frequenze armoniche hanno raggiunto la loro massima ampiezza: la condizione di risonanza, come ipotizzato, viene nell'intorno di 20 Hz pari a circa al doppio della frequenza  $f_{\text{res}} = 9.6$  Hz.

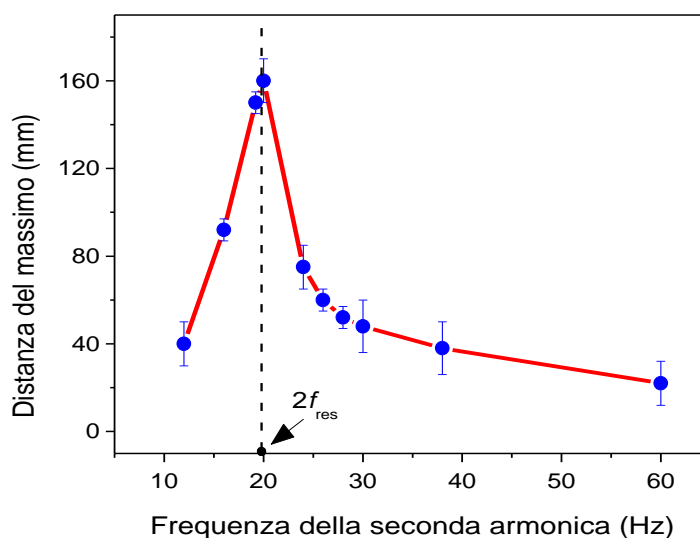


Figura 6 – Posizione dei punti sulla superficie dell'acqua, misurata lungo la direzione di propagazione, dove, per una data frequenza di eccitazione  $f$  delle onde elastiche superficiali, viene raggiunto il massimo della seconda armonica a frequenza  $2f$

## 5. Conclusioni

Sono state riportate misure sperimentali che mostrano l'esistenza del fenomeno dell'interazione risonante nella generazione non lineare della seconda armonica nel caso di un'onda che si propaghi sulla superficie dell'acqua. L'interazione risonante è resa possibile dalla presenza di un minimo nella curva di dispersione della velocità di fase delle onde nel caso in cui agiscano sia la forza di gravità che la tensione superficiale: è così possibile trovare una frequenza di eccitazione per la quale coincidono la velocità dell'onda di frequenza fondamentale e quella della seconda armonica: le due onde mantengono così, punto per punto lungo la direzione di propagazione, la stessa relazione di fase, permettendo la crescita della seconda armonica la cui ampiezza viene limitata solo da effetti dissipativi.

Le misure hanno messo in evidenza il carattere locale dell'interazione tra fondamentale e seconda armonica e i dati sperimentali sono stati interpretati sulla base di un modello in cui si considera che la seconda armonica venga localmente generata dalla fondamentale per non linearità; nel modello l'ampiezza della seconda armonica è stata supposta proporzionale al quadrato dell'ampiezza della fondamentale tramite un opportuno

coefficiente di accoppiamento e cresce per effetto cumulativo di tutte le interazioni locali che si susseguono lungo la direzione di propagazione.

## 6. Bibliografia

- [1] A. Alippi, A. Palma, L. Palmieri, and G. Socino, *Determination of coupling coefficient in second harmonic generation of acoustic surface waves*, Journal of Applied Physics, **45** (1974), pp 4347-4349
- [2] G. Kino, *Acoustic waves: devices, imaging, and analog signal processing*, Prentice-Hall, 1987, pp. 318-528
- [3] M. Hamilton and D. T. Blackstock, *Nonlinear acoustics*, Academic Press, 1998, pp. 65-150
- [4] A. Alippi, G. Shkerdin, A. Bettucci, F. Craciun, E. Molinari and A. Petri, *Low-threshold subharmonic generation in composites structures with Cantor like code*, Physical Review Letters, **69** (1992), pp. 3318-3321
- [5] M. J. Lighthill, *Waves in fluids*, Cambridge University Press 2001, pp. 204-279
- [6] O. M. Phillips, *On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude Part 1. The elementary interactions*, Journal of Fluid Mechanics, **9** (1960), pp. 193-217
- [7] A. Bettucci, M. Germano, and A. Alippi, *Resonant condition in second harmonic generation of water surface waves*, in Recent Developments in Nonlinear Acoustics, edited by P. Blan-Benon, V. W. Sparrow, and D. Dragna, AIP Publishing 2015, p. 090006