Insegnare matematica

Claudio Bernardi
Sapienza Università di Roma
claudio.bernardi@uniroma1.it

Abstract. Il titolo dell'intervento può sembrare da un lato un po' generico, dall'altro impegnativo e forse anche pretenzioso. La mia intenzione è solo parlare della professione di insegnante e, in particolare, dell'insegnante di matematica. Inevitabilmente mi soffermerò su alcuni aspetti e non su altri; mi scuso, in particolare, se trascurerò aspetti legati alle nuove tecnologie.

1. Due citazioni

Inizio raccontando un episodio spiacevole, che mi è capitato pochi mesi fa.
Ero all'Accademia dei Lincei, dove si era appena concluso un *pomeriggio interdisciplinare,* rivolto appunto a insegnanti di varie discipline. Una persona (non un matematico) che ha responsabilità nelle attività per la scuola promosse dai Lincei, parla delle sue esperienze: lui va nella scuola primaria e anche dell'infanzia e vede i bambini svegli, attivi, curiosi; poi va alle superiori e trova studenti svogliati, lenti, poco attivi.
La conclusione è chiara: «*la scuola li rovina*».
Non sono riuscito a trattenermi; è troppo facile parlar male della scuola in questo modo. Mi è venuto spontaneo rispondere: «*prova a non mandare un ragazzo a scuola, così non lo roviniamo*». È seguita qualche altra battuta, poco conciliante, da una parte e dall'altra.
A mio parere, la frase «*la scuola li rovina*» è un commento superficiale, accettabile in un bar, ma che dispiace sentir pronunciare da una persona che ha responsabilità nella formazione. Potremmo dire anche che i ragazzi sono rovinati dalle famiglie, ecc.
Vale però la pena aggiungere qualche osservazione.
- In primo luogo, la scuola potrebbe certamente fare di più; questo è fuori discussione.
- Un bimbo ha più potenzialità e maggiori capacità di apprendimento rispetto a un ragazzo più grande (basta pensare a quanto è difficile apprendere una lingua da adulti).
- Alle superiori gli studenti hanno imparato a scansare gli ostacoli e a cercare il massimo rendimento con il minimo sforzo.

Non è vero che la scuola rovina gli studenti. Alle varie età gli studenti hanno caratteristiche e potenzialità diverse: compito di ogni insegnante è insegnare ai *suoi* studenti, di quella specifica età (e con tutti i loro difetti).

Passiamo ad una seconda citazione, completamente diversa.
Phillip Griffiths è stato, fra l'altro, Direttore dell'*Institute for Advanced Study* di Princeton negli USA. Si tratta di un prestigioso centro di ricerca di cui hanno fatto parte, fra gli altri, Albert Einstein, Kurt Gödel, John von Neumann, Hermann Weyl.
Griffiths, che ha oggi ormai quasi 80 anni, in vari discorsi e interviste (si veda per esempio [1]) ha citato Lottie Wilson, la sua insegnante di matematica nella *high school*:
«*I can honestly say that the most important person in my own career was Lottie Wilson*»
«*Her love of the subject was "infectious"*»
«*She understood the majesty and mystery of mathematics*»

Sull'ultima frase non oso aggiungere nulla. Soffermiamoci sulla seconda frase.
L'amore per la disciplina è contagioso. Volente o nolente, un insegnante è contagioso: trasmette la voglia di fare (o di non fare), il desiderio di studiare, di sapere, trasmette il suo gusto (e tutto ciò è molto più importante di un altro capitolo nel programma).
Chi conosce e ama la disciplina che insegna, risulta un buon educatore anche sul piano della formazione generale. In quest'ottica, è giusto richiedere molto a un insegnante: preparazione nella disciplina, voglia di insegnare, passione.

2. A che serve l'insegnamento della matematica? Il linguaggio e il ragionamento

Talvolta l'insegnamento della matematica dà l'impressione di essere un'*educazione alle regole* (come capita, per esempio, nel calcolo algebrico). Io sono invece convinto che l'educazione matematica abbia un peso rilevante nella formazione *culturale* degli studenti. Più specificamente, la matematica educa
- *alla precisione e alla concisione di linguaggio*;
- *al ragionamento, alla coerenza, a uno spirito critico* (per esempio a non fidarsi di quanto appare chiaro in figura); per inciso, proprio in questo senso la matematica può dare sicurezza;
- *all'uso di simboli, al formalismo, all'astrazione*;
- *a un metodo, alla scoperta di strategie*; sottolineo che saper affrontare un problema è sempre più importante in tutti i lavori;
- *alla fantasia, alla capacità di vedere, a rappresentare*.

Per quanto riguarda il *linguaggio* e il *ragionamento logico* di base, io ritengo che, a tutte le età, l'educazione matematica contribuisca allo sviluppo della competenza linguistica. Propongo alcune semplici frasi (non tutte corrette!), relative a numeri naturali, in cui parole con valenza logica giocano un ruolo rilevante:
- il prodotto di due numeri è dispari se e solo se entrambi i numeri sono dispari
- il prodotto di due numeri è pari se e solo se entrambi i numeri sono pari
- il prodotto di due numeri è un multiplo di 3 se e solo se almeno uno dei due numeri è multiplo di 3
- il prodotto di due numeri è un multiplo di 4 se e solo se almeno uno dei due numeri è multiplo di 4.

L'idea generale è che vale la pena dedicare un po' di tempo a scuola all'analisi di frasi. Aggiungo un paio di frasi, sempre molto facili, in un contesto probabilistico:
- *credo* che mia mamma sia a casa, ma non sono *sicuro*
- è *possibile* che domani piova, ma *non* è *probabile*.

Passiamo a due domande sul ragionamento logico; le domande sono tratte dal test assegnato alla Sapienza nel 2016 per l'ammissione a Scienze della Formazione primaria.

- Per sostenere che il proverbio “chi beve birra campa cent'anni” è SBAGLIATO, occorre trovare uno che

A) non ha bevuto la birra ed è morto prima di compiere 100 anni
B) ha bevuto la birra ed è morto prima di compiere 100 anni
C) non ha bevuto birra e ha compiuto 100 anni
D) ha bevuto birra e ha compiuto 100 anni

(*la percentuale di risposte corrette è stata l'* 80%)

- Supponendo che sia vero che "se una persona ha l'influenza allora ha la febbre", si può dedurre che

A) se Giovanni non ha l'influenza allora non ha la febbre
B) se Giovanni non ha la febbre allora non ha l'influenza
C) tutti coloro che hanno la febbre hanno l'influenza
D) nessuno di coloro che ha la febbre ha l'influenza

(*la percentuale di risposte corrette è stata solo il* 26%)

3. Teoremi e dimostrazioni

Educare alla dimostrazione è un processo che inizia molto presto e richiede tempo.
Partiamo un classico enunciato: «la somma degli angoli di un triangolo è un angolo piatto». In un primo tempo, è opportuna una *verifica*, per esempio ritagliando un triangolo di carta e accostando gli angoli. A me, pare tuttavia, più significativa la verifica che si ottiene piegando un triangolo come illustrato in Figura 1, dove *M* ed *N* sono i punti medi di due lati del triangolo (e dove si suppone che gli angoli in *A* e in *B* siano acuti).

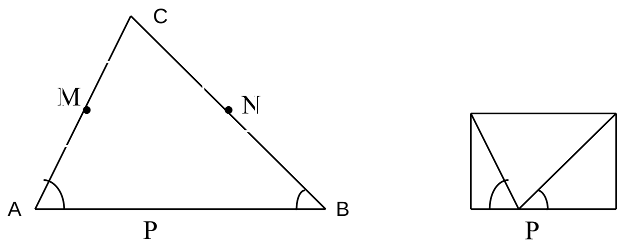


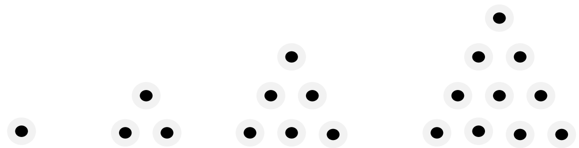
Figura 1. *Ripiegando un triangolo di carta*

Qualche anno più tardi si potrà *dimostrare* quell'enunciato. Quasi sempre per la dimostrazione si ricorre al postulato delle parallele. E questo significa che lo stesso enunciato non è un teorema nelle geometrie non euclidee: del resto, è facile trovare sulla superficie terrestre esempi di triangoli in cui la somma degli angoli è maggiore di un angolo piatto (basta considerare l'equatore e due archi di meridiani).

Abbiamo visto che un foglio di carta, piegato opportunamente, permette di verificare un teorema. Sempre con la piegatura della carta possiamo realizzare costruzioni geometriche e verificare altri teoremi.
Per esempio, è facile determinare le tre *bisettrici* di un triangolo: si ripiega il triangolo in modo che un lato vada a sovrapporsi (del tutto o in parte) a un altro. Se ripieghiamo tre volte il triangolo, verifichiamo che le tre bisettrici passano per uno stesso punto.
Si possono costruire le *altezze* di una triangolo acutangolo: basta sovrapporre parte di un lato a se stesso, in modo che la piegatura passi per il vertice opposto al lato considerato. È poi facile verificare che le tre altezze passano per uno stesso punto.
Procedendo in modo analogo si verifica l’esistenza del *baricentro*, con piegature che corrispondono alle tre *mediane*, e del *circocentro* con piegature lungo i tre assi.

In alcuni casi, prima di arrivare alla dimostrazione, è molto utile *esplorare, congetturare, comunicare*. Vediamo un esempio.
Come è noto, i *numeri triangolari* sono i numeri che si ottengono come somme dei primi numeri interi positivi:

1 $\qquad$ 1 + 2 = 3 $\qquad$ 1 + 2 + 3 = 6 $\qquad$ 1 + 2 + 3 + 4 = 10 $\qquad$ ...



Osserviamo la successione dei numeri triangolari:

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 ...

Alcune domande sorgono in modo abbastanza naturale: dove si trovano i numeri pari? perché? è vero che troviamo un multiplo di 3 ogni tre numeri? che cosa si può dire della somma di due triangolari consecutivi?
Il discorso si formalizza con il linguaggio algebrico: i numeri triangolari sono del tipo $n(n+1)/2$. Per esempio, la somma di due numeri triangolari consecutivi è:

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)(n+n+2)}{2}=\frac{(n+1)(2n+2)}{2}=(n+1)^2$$

Vediamo un esempio di dimostrazione in cui la presenza di una figura, se adeguatamente capita, aiuta la memoria e rende più chiaro l'argomento. Ci occupiamo del confronto fra *media aritmetica* e *media geometrica*. Per dimostrare che la media aritmetica di due numeri positivi a, b è sempre maggiore o uguale della loro media geometrica, possiamo seguire una via puramente algebrica:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \qquad \text{equivale a} \qquad (a+b)^2\geq 4ab \qquad \text{cioè a} \qquad (a-b)^2\geq 0$$

Ma un'immagine risulta più efficace. Dette a, b le lunghezze di due segmenti, tracciamo una semicirconferenza di diametro $a+b$ (Figura 2): il confronto fra media aritmetica m_a e media geometrica m_g si riconduce al confronto fra raggio e metà di una corda di un cerchio (il triangolo inscritto è rettangolo e quindi m_g è la media geometrica di a e b per il II teorema di Euclide). E risulta anche chiaro che $m_a = m_g$ se e solo se $a = b$.

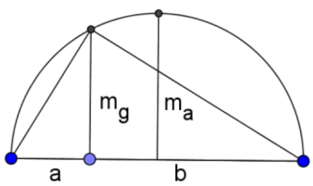


Figura 2. *Confronto fra media aritmetica e media geometrica.*

Aggiungo qualche parola sul confronto fra metodo algebrico e metodo geometrico, metodi che talvolta, come nel caso precedente, rappresentano vie diverse per ottenere uno stesso risultato. Il procedimento algebrico è in genere più semplice da seguire; d'altra parte, la dimostrazione geometrica, se capita, è più "formativa" (illustra la situazione) ed è più facile da memorizzare. Per altri esempi e considerazioni rimando a [3].

4. Due esempi di problemi

Una premessa: è inevitabile in matematica assegnare *anche* esercizi ripetitivi; è però sbagliato limitarsi a esercizi ripetitivi.
Riporto un problema a risposta multipla, proposto nel luglio 2017 al *Mediterranean Youth Mathematical Championship* (si veda [2]); il problema non è difficile, ma richiede qualche tentativo, un po' di fantasia e la capacità di escludere certe situazioni.

In una tabella 3×3 *(Figura 3) viene scritto un numero intero in ogni casella in modo che la somma di ogni riga e di ogni colonna sia dispari. Fra i nove numeri scritti nelle caselle, quanti possono essere i numeri pari?*

A) 0, 2, 4, 6, 8
B) 0, 2, 4, 6
C) 0, 2, 6
D) 0, 4, 6
E) 0, 4

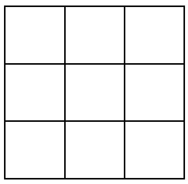


Figura 3. *Inserire numeri interi nelle caselle*

In primo luogo notiamo che la somma di tutti i numeri scritti nella tabella è dispari e, di conseguenza, i dispari sono in numero dispari e quindi i pari sono in numero pari. È immediato che una tabella senza numeri pari è accettabile; inoltre, non ci possono essere righe con 3 pari, per cui il numero cercato non può essere 8. Se c'è un numero pari, ce ne devono essere un altro sulla stessa riga e un altro sulla stessa colonna; quindi anche 2 va scartato. Infine, è facile costruire esempi con 4 e con 6 pari (in quest'ultimo caso i numeri dispari sono disposti lungo una diagonale).
In conclusione la risposta corretta è 0, 4, 6.

Il secondo problema riguarda da un lato la capacità di vedere nello spazio, dall'altro un'applicazione della matematica alla realtà.

Talete riuscì a misurare l'altezza di una piramide, confrontando l'ombra della piramide con l'ombra di un bastone conficcato nel terreno. Descrivere (o riprodurre) il procedimento di Talete.

La risposta sembra semplice: se un bastone di lunghezza nota è perpendicolare al terreno, ricorrendo alla similitudine è lecito scrivere la proporzione

$$\textit{lunghezza bastone} : \textit{ombra bastone} = \textit{altezza piramide} : \textit{ombra piramide};$$

Supponendo che la zona sia pianeggiante, si determina così l'altezza della piramide misurando gli altri tre segmenti.

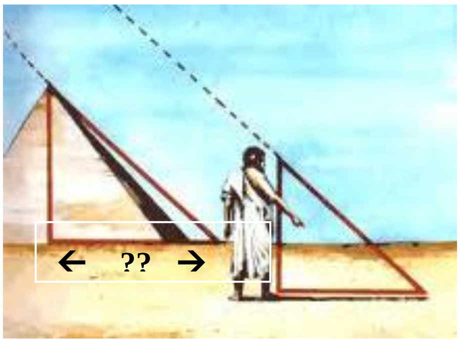


Figura 4. Misura, per similitudine dell'altezza di una piramide

Tuttavia, ... se avessimo a che fare con un obelisco, sarebbe facile misurare la lunghezza dell'ombra; ma nel caso di una piramide (e di molti edifici), la proiezione sul terreno del punto più alto non è accessibile. E quindi risulta complicato determinare la lunghezza del segmento indicato nella Figura 4 con due punti interrogativi.
Si può superare la difficoltà in vari modi. Propongo un'idea raffinata:

non si misura la lunghezza dell'ombra, ma lo spostamento dell'ombra.

In concreto: si mette un segno in corrispondenza alle punte delle ombre della piramide e del bastone; dopo un po' di tempo, si misura *di quanto si sono spostate le punte* delle due ombre. A questo punto, sempre per similitudine, è lecito scrivere una proporzione:

gli spostamenti delle punte delle due ombre stanno fra loro
nello stesso rapporto delle rispettive altezze.

5. Per concludere

Vorrei concludere ribadendo che ogni insegnante ha una responsabilità culturale, se non altro perché la cultura di base di ciascuno di noi è quella appresa a scuola.
Il mestiere (l'arte?) dell'insegnante non è facile, sia per difficoltà intrinseche (spesso gli studenti non collaborano), sia per gli innumerevoli intralci amministrativi ed ambientali che incontriamo ogni giorno.
Mi permetto un suggerimento finale: cerchiamo di *non* insegnare sempre nello stesso modo. Per esempio, ogni tanto possono risultare efficaci collegamenti con altre discipline, dall'arte alla storia e alla filosofia, oppure discussioni sulla logica e sui fondamenti, o anche attività di *problem solving*. In questo modo si può forse recuperare l'attenzione e l'interesse di un maggior numero di studenti.

Bibliografia e sitografia

[1] www.simonsfoundation.org/2014/01/24/phillip-griffiths
[2] www.mymc.it
[3] Bernardi, C., & Menghini, M. (2017). La logica e l'insegnamento della geometria. In *Atti del Convegno Educare alla razionalità, in ricordo di Paolo Gentilini* (Sestri Levante, giugno 2016). In corso di stampa.