Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 37, Roma (2016), 235 – 256

Guido Castelnuovo: le conferenze di Matematica Superiore (1927-1928)

PAOLA GARIO – ENRICO ROGORA

Abstract: *This paper contains a faithful transcription of some handwritten notes by Guido Castelnuovo relative to a cycle of lectures about rationality problems in algebraic geometry, given at the university of Roma in the academic year 1927-28.*

1 – Introduzione

In questo fascicolo speciale dei Rendiconti dedicato a Guido Castelnuovo, a omaggio e a testimonianza della sua opera di ricerca e di insegnamento, pubblichiamo una trascrizione del quaderno manoscritto degli appunti relativi al Corso di conferenze per il Seminario matematico dell'Università di Roma che egli tenne nell'anno accademico 1927-1928[1].

Il Seminario era stato istituito con l'approvazione del Regolamento nella seduta della Facoltà di Scienze MFN dell'Università di Roma del 4 giugno 1913 e sanzionato dal Ministero della Pubblica Istruzione con una lettera del successivo 22 luglio, al fine di *diffondere la cultura matematica e di promuovere studi e ricerche matematiche* attraverso *esercitazioni, conferenze, discussioni, comunicazioni scientifiche e quanto altro possa servire allo scopo suddetto*[2]. Negli anni, il Seminario perseguì le diverse finalità per le quali era stato istituito rivestendo una funzione formativa

[1]Si ricorda che il documento originale è conservato presso il Fondo Guido Castelnuovo dell'Archivio storico dell'Accademia Nazionale dei Lincei, al pari dei quaderni di appunti relativi a tutti gli altri insegnamenti del secondo biennio della Laurea in Matematica; i documenti originali sono accessibili via web all'indirizzo
http://operedigitali.lincei.it/Castelnuovo/Lettere_E_Quaderni/menuQ.htm.

[2]Il Regolamento è pubblicato in: *Seminario matematico della Facoltà di Scienze* della R. Università di Roma, Vol. 1, Rendiconti delle sedute dell'Anno Accademico 1913-1914, p. 3.

Key Words and Phrases: *Guido Castelnuovo – Lectures on Rational Varieties*
A.M.S. Classification: 01A55, 1403, 14J26.

importante. I cosiddetti Corsi di conferenze organizzati dal Seminario andavano a integrare l'offerta didattica del secondo biennio della Laurea in Matematica. Per l'anno accademico 1927-1928 il Consiglio di Facoltà approvava il seguente Corso di conferenze e i relativi affidamenti:

1. Prof. Guido Castelnuovo – Corso di 9 conferenze *Sopra gli enti algebrici razionali.*
2. Prof. Tullio Levi-Civita – Corso di 11 conferenze *Sugli invarianti adiabatici.*
3. Prof. Francesco Severi – Corso di 20 conferenze di *Geometria algebrica e topologia*[3].

Pur nella forma sintetica di chi scrive per sé e non per essere letto, gli appunti delle conferenze, che Castelnuovo tenne a partire dal 1 marzo del 1928 con cadenza tendenzialmente settimanale, mostrano che la sua trattazione non aveva carattere divulgativo e neppure si rivolgeva a un pubblico esperto.

Il tema degli enti algebrici razionali fu da lui ripreso nella conferenza plenaria *La geometria algebrica e la scuola italiana* tenuta nel settembre successivo al Congresso Internazionale dei Matematici di Bologna[4]. Dall'epoca in cui la sua attività di ricerca era completamente dedicata alla geometria algebrica sono passati oltre vent'anni e Castelnuovo aveva lasciato l'insegnamento del Corso di Geometria superiore ormai da qualche anno[5].

Interessante è pertanto integrare la lettura di queste note con le considerazioni e le riflessioni che egli ebbe modo di sviluppare in occasione del Congresso. Insieme, i due documenti mostrano che, anche se ormai da tempo impegnato su fronti di ricerca molto distanti dalla geometria algebrica, la disciplina che l'aveva reso famoso era oggetto dei suoi interessi e ancora ne seguiva gli sviluppi. *Come vedete*− diceva a conclusione della presentazione delle questioni poste dall'opera di Solomon Lefschetz con lo sviluppo della topologia e dei risultati di Severi e di Oscar Zariski − *la teoria algebrica e trascendente delle superfici algebriche, che credevamo qualche anno fa avesse raggiunto una forma quasi definitiva, promette di rivelare ancora fatti inattesi*[6].

L'argomento delle varietà algebriche razionali ha nella produzione scientifica di Castelnuovo una posizione di rilievo. Egli vi si era dedicato agli albori della

[3]Le conferenze di Severi, in forma rielaborata, sono pubblicate in Severi F., *Conferenze di Geometria Algebrica*, Roma, Stabilimento tipo-litografico del Genio Civile, 1927.

[4]In: *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3-10 settembre 1928*, Bologna, Zanichelli, 1929, p. 191-201.

[5]L'ultimo corso fu quello del 1922-1923. Si ricorda che l'U.M.I ha pubblicato gli appunti presi da persona non identificata per l'occasione dei 150 della nascita di Castelnuovo: *Curve algebriche piane e sghembe. Corso del prof. G. Castelnuovo 1922-23*, a cura di Ciliberto C. e Fontanari C., Unione Matematica Italiana, Bologna, 2015.

[6]Castelnuovo G., *La geometria algebrica e la scuola italiana*, loc. cit., p. 199.

teoria delle superfici algebriche secondo l'indirizzo italiano e i risultati furono notevoli. Affiancato da Federigo Enriques nel lavoro di costruzione dei fondamenti della geometria sopra una superficie, a guidare i due geometri tra le difficoltà e le insidie che il passaggio dalle curve alle superfici comportava era stato lo studio dei casi particolari. Castelnuovo lo dice esplicitamente nella Conferenza del 1928 in un passo in cui associa il metodo di ricerca da loro seguito a quello delle *scienze sperimentali*: si tratta del celebre passo delle *due vetrine* in cui lui ed Enriques distribuivano *per così dire*, il *gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori* via via costruiti *in senso astratto*. In una ponevano le superfici regolari, per le quali *tutto procedeva come nel migliore dei mondi possibili*, nell'altra quelle irregolari. A districare le complicazioni della teoria delle superfici irregolari aiutava il confronto con quanto accadeva con quelle regolari e lo studio comparato li aveva condotti a riconoscere, *divinare* egli scrive, i fatti che dovevano sussistere *con modificazioni opportune per le superfici di ambedue le vetrine* che poi verificavano su nuovi modelli prima di procedere con l'ultima fase, quella della *giustificazione logica*[7]. Come noto fu proprio uno di questi modelli, che gli era stato suggerito da Enriques, a portarlo alla corretta formulazione del criterio di razionalità per le varietà algebriche di dimensione 2 che oggi ha il suo nome.

Ad apertura degli appunti, Castelnuovo afferma l'*interesse dell'argomento, sebbene particolare*, spiegandone così le ragioni:

> *Lo studio degli enti algebrici è progredito grazie all'alternarsi di ricerche sopra enti generali e sopra enti particolari, i quali fornivano esempi su cui saggiare o divinare proprietà estendibili ad altri enti. Fra le curve, le superficie ecc. le razionali costituiscono il caso particolarmente interessante.*

Un decennio più tardi uscirà il testo *Le superfici razionali* a nome di Fabio Conforto[8] che raccoglieva le *lezioni tenute dalla Cattedra di Geometria superiore*[9], ovvero tenute da Enriques ma il suo nome non poteva essere dichiarato perché nell'autunno del 1938 erano entrati in vigore i nuovi provvedimenti di legge a difesa della razza. Notiamo che l'enfasi sulle superfici razionali caratterizza anche alcune importanti trattazioni moderne della teoria delle superfici algebriche, *cf.* [2, 3, 9].

Sempre in apertura, Castelnuovo dichiarava la propria fiducia nei confronti del *metodo geometrico* anche per le ricerche sulle varietà razionali di dimensione su-

[7] I passi citati sono tratti da Castelnuovo G., *La geometria algebrica e la scuola italiana*, loc. cit., p. 194.

[8] Conforto F., *Le superficie razionali*, Bologna, Zanichelli, 1939.

[9] La citazione è tratta dalla Prefazione al libro di Conforto.

periore e si sbilanciava in una previsione che tuttavia la storia successiva non ha confermato:

> *Il metodo geometrico che ha permesso di risolvere la questione della razionalità delle superficie è il solo che finora sia riuscito a trattare l'argomento, ed è presumibilmente quello col quale si potrà affrontare il problema per le varietà algebriche a più dimensioni.*

Lo studio dei problemi di razionalità per le varietà di dimensione superiore ha richiesto l'introduzione di tecniche diverse, quali la teoria del modello minimale di Mori e la teoria di Hodge, vedi ad esempio [13].

Nella conferenza di Bologna, entrando nel merito di questo argomento, Castelnuovo richiamò il contributo della scuola italiana, in particolare di Gino Fano che in quella sede avrebbe tenuto una comunicazione sul tema:

> *Come decidere se una equazione assegnata a quattro o cinque incognite rappresenti una varietà razionale o semirazionale*[10] *? Nulla sappiamo in proposito, nemmeno per i più bassi valori del grado, superiori a due. Anzi, ricerche che il Fano prosegue da vari anni, e di cui vi parlerà in una sua comunicazione, fanno vedere quanto la questione sia complessa. Egli prende in esame le varietà che hanno nulli tutti i generi e i plurigeneri e le distribuisce in un numero finito di famiglie, di cui la prima si compone di varietà razionali, la seconda di varietà semirazionali e le altre di varietà che si staccano sempre di più dalla razionalità. Una classificazione accurata di questi tipi getterebbe molta luce su una questione che è necessario risolvere per lo sviluppo futuro della geometria algebrica*[11]*.*

Nell'officialità di questa occasione Castelnuovo non si avventurò in previsioni ma nella chiosa finale, a proposito dei problemi ancora aperti riguardanti le varietà algebriche di dimensione alta, le sue parole esprimevano la preoccupazione che nel futuro la ricerca potesse fare astrazione dall'intuizione geometrica che li aveva guidati:

> *Orbene, pochi rami di matematica possono vantare una genealogia così illustre come quello al quale si collegano le ricerche di cui vi ho parlato.*
>
> *Quattro secoli or sono, in questa insigne Università,* SCIPIONE DAL FERRO *gettava le basi dell'algebra moderna. La risoluzione dell'equazione cubica, seguita a breve distanza dalla risoluzione dell'equazione di quarto grado e dai primi studi sopra i numeri complessi, inaugurò quel periodo di indagini sulle equazioni algebriche ad una incognita che si chiuse tre secoli dopo colle ricerche di* RUFFINI, *di* ABEL *e di* GALOIS. *Lo studio delle equazioni a più*

[10] Unirazionale.

[11] Cfr. G. Castelnuovo, *La geometria algebrica e la scuola italiana*, loc. cit., p. 200.

incognite è molto meno progredito e, se si fa astrazione dalla teoria dell'eliminazione che ha già uno stabile assetto, e dalla teoria degli invarianti nel gruppo lineare che diede origine a tanti lavori, ben poco si conosce in questo campo. Eppure il problema di risolvere una equazione mediante funzioni razionali di parametri, del quale poc'anzi vi parlavo, o mediante irrazionalità prestabilite, è suggerito dalle grandiose vedute di GALOIS. *Certo la ricerca presenta ardue difficoltà. Può darsi che la via più adatta per eseguirla non sia ancora scoperta. Ma rinunziare all'intuizione geometrica, la sola che abbia permesso sinora di orientarsi in questo territorio intricato, vorrebbe dire spegnere la tenue fiammella che può guidarci nell'oscura foresta. D'altra parte la difficoltà di una ricerca, se scoraggia chi cerca i facili successi, esercita un fascino su quei giovani che, nati per la scienza, conoscono le gioie della lotta per la conquista del vero.*

Io penso a costoro nel formulare l'augurio che essi riprendano con lena giovanile i problemi al punto in cui li abbiamo condotti, e portino la luce sopra questioni vitali per il progresso dell'analisi[12].

2 – Il manoscritto e i criteri di trascrizione

Il quaderno degli appunti è costituito da 44 fogli: esso raccoglie in modo esaustivo se pur sintetico i contenuti delle nove conferenze tenute nel secondo semestre dell'a.a. 1927-1928. Castenuovo aveva l'abitudine di scrivere il testo solo sul recto del foglio. Il verso è usato per le eventuali aggiunte agli appunti riportati nella pagina a fianco e per le correzioni che per ragioni di spazio non potevano essere riportate nel corpo del testo. Sul verso in posizione variabile, egli aveva inoltre l'abitudine di segnalare l'inizio di una nuova lezione con l'annotazione del numero in caratteri romani e della data. Non vi sono, in generale, salti di riga o segni che evidenzino la fine di una lezione e l'inizio della successiva, perciò il passaggio tra una lezione e la successiva può essere incerto. La trascrizione riporta anche queste informazioni, secondo la nostra interpretazione, per completezza e perché possono dare indicazioni rilevanti. Si può notare ad esempio che gli appunti della lezione VIII che introduceva il tema *Condizioni di razionalità di una superficie algebrica* occupano una mezza pagina, da cui si comprende che per questa parte gli appunti restituiscono essenzialmente un elenco dei punti che a lezione furono trattati più diffusamente. Notiamo infine che la penultima conferenza porta la data del 19 aprile, invece per l'ultima la data non è indicata.

Per la trascrizione ci siamo attenuti al criterio della riproduzione fedele del manoscritto, riducendo al minimo i nostri interventi. Abbiamo racchiuso fra parentesi quadre [ ] le parole di cui non siamo certi dell'interpretazione. Ogni altro interven-

[12] Cfr. G. Castelnuovo, *La geometria algebrica e la scuola italiana*, loc. cit., p. 200-201.

to da parte nostra è comunque segnalato da parentesi quadre. Per quanto riguarda l'apparato critico, ci siamo limitati a completare, in note poste a pié di pagina, i riferimenti bibliografici contenuti nel testo. Abbiamo evitato note di commento per rispetto del testo che vogliamo mettere a disposizione nella sua integrità: questo lavoro, che solo in piccola parte è sostituito dalle indicazioni bibliografiche riportate nell'ultimo paragrafo, è rinviato a una pubblicazione successiva.

3 – Sommario

In questo paragrafo riproduciamo il "Sommario" delle conferenze di Castelnuovo presentato nella seduta del Seminario del 5 maggio 1928, poi pubblicato nel volume dei "Rendiconti"[13].

Curve razionali: come allo studio di queste abbiano condotto sia considerazioni dirette (Möbius), sia una questione sugli integrali a differenziale algebrico. (Abel, Riemann) [p. 7].

La superficie di Riemann relativa ad una curva razionale [p. 8]. Genere della superficie e della curva [p. 8]. Condizione di razionalità secondo Clebsch [p. 8].

Teorema di Lüroth [p. 9].

Teorema di Nöther sulle irrazionalità aritmetiche che intervengono nella rappresentazione parametrica di una curva razionale [p. 9].

Superficie razionali; sistema rappresentativo [p. 10]; costruzione della superficie dato il sistema [p. 10]; superficie rappresentabile sopra una involuzione piana. Esempi di superficie razionali [p. 11].

Dimostrazione del teorema di Nöther sulle superficie contenenti un fascio lineare di curve razionali [p. 11].

Superficie rappresentabili sopra un piano doppio [p. 13]. Piani doppi razionali [p. 14]. Curva di diramazione di ordine $2m$ con un punto multiplo d'ordine $2m-2$ [p. 14], o del quarto ordine [p. 14]; involuzioni piane corrispondenti [p. 14].

La involuzione piana determinata dalle sestiche con otto punti base doppi e il terzo tipo di piano doppio razionale [p. 15].

Cenno di risultati più generali [p. 15].

Generalità sulle involuzioni piane e le superficie che le rappresentano [p. 15]. Sistemi lineari di curve sopra una superficie [p. 16]. Sistema lineare di curve piane appartenenti ad una involuzione, come dalle proprietà di questi sistemi possano dedursi proprietà dei sistemi di curve sulla superficie rappresentativa [p. 17].

Il sistema di curve aggiunte ad un sistema lineare di curve sopra una superficie; i successivi aggiunti [p. 17].

[13] Castelnuovo G., "Corso di Conferenze sopra gli enti algebrici razionali" in Corsi di Conferenze tenuti nell'anno 1927-28, *Rendiconti del Seminario Matematico della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma*, **6** (2), (1927-28), 43-44.

La successione degli aggiunti è limitata se sulla superficie esiste un sistema di curve la cui dimensione superi il genere. Come di qua si deduca che la superficie [è] immagine della involuzione e quindi l'involuzione stessa è razionale [p. 17].

Ricerca delle condizioni di razionalità di una superficie in base ai valori assunti da certi invarianti. Il genere geometrico e il genere numerico di una superficie [p. 18]. Superficie regolari: proprietà di un sistema lineare completo di curve sopra una superficie regolare [p. 18]. Caso particolare relativo all'ipotesi $p_g = p_a = 0$ [p. 18].

La serie dei successivi aggiunti di un sistema regolare sopra una superficie avente $p_g = p_a = 0$ [p. 18]. Il bigenere di una superficie [p. 19]. Superficie regolari aventi il bigenere nullo; il processo di aggiunzione si estingue dopo un numero finito di operazioni, e l'esame dell'ultimo aggiunto fa vedere che la superficie è regolare [p. 20]. Esempio di una superficie avente $p_g = p_a = 0$, $P_2 = 1$ [p. 20].

Cenno relativo al problema della razionalità delle varietà a più dimensioni [Non presente].

4 – Trascrizione

Conferenze di Matem[atiche] Sup[eriori] (1927-28)
Il problema della razionalità degli enti algebr[ici].

I (1 Mar[zo]) Interesse dell'argomento, sebbene particolare.

1) Lo studio degli enti algebrici è progredito grazie all'alternarsi di ricerche sopra enti generali e sopra enti particolari, i quali fornivano esempi su cui saggiare o divinare proprietà estendibili ad altri enti. Fra le curve, le superficie ecc. le razionali costituiscono il caso particolarmente interessante.

2) Il metodo geom[etrico] che ha permesso di risolvere la questione della razionalità delle superf[icie] è il solo che finora sia riuscito a trattare l'argomento, ed è presumibilmente quello col quale si potrà affrontare il problema per le varietà alg[ebriche] a più dimensioni.

Definizione di curva razionale: risoluzione razionale di un'equaz[ione] alg[ebrica] a due incogn[ite].

$$f(x, y) = 0 \tag{4.1}$$

$$x = R(t),\ y = S(t); \quad t = T(x, y). \tag{4.2}$$

I due problemi che hanno dato l'impulso alle ricerche sulle curve raz[ionali].

1. Il problema geometrico (Möbius 1827)[14]: ricerca delle proprietà proiettive delle curve rappresentate parametricamente mediante le (4.2) o le loro estensioni a

[14] [Mbius F., *Der barycentrische Calcul: ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*, Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1827].

più variabili (es[empi] coniche, cubiche sghembe; estensioni allo spazio S_m); interesse proiettivo.

2. Il problema della integraz[ione] dei differ[enziali] alg[ebrici]. Integrale di una funz[ione] raz[ionale] di una variabile e funzioni che permettono di esprimerlo. Integrale di un radicale quadratico che porta sopra un polinomio di 1 o di 2 gr[ado] nella x, o integrale della forma

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}\,x;$$

può essere ridotto al precedente perché la curva $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ è razionale.

Quand'è che un integrale della forma $\int y\,\mathrm{d}\,x$ ove y è legata a x da una eq[uazione] alg[ebrica] $f(x, y) = 0$ può razionalizzarsi? Integrale abeliano (Abel, Riemann).

Risposta data da Riemann (1857)[15]. Se $f(x, y) = 0$ è una curva razionale la superficie di Riemann relativa alla curva può porsi in corrispondenza biunivoca e continua col piano della variabile complessa t; quindi ha genere 0 (def[inizione] del genere di una superficie di R[iemann]).

Viceversa se la superficie ha genere 0, si può costruire una funzione razionale della superficie $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ con P e Q polinomi, la quale abbia un solo polo del primo ordine, che si può anche assegnare arbitrariamente; allora, dato t, l'equazione $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = t$ ossia $P(x, y) - tQ(x, y)$ ammette una sola soluzione x, y soddisfacente la $f = 0$.

Condizione necessaria e sufficiente perché la curva $f = 0$ *sia razionale è che la superficie di R[iemann] abbia il genere zero.*

Una sup[erficie] di R[iemann] a n fogli, di genere p, possiede $\omega = 2(n + p - 1)$ punti di diramazione; di qui si ha il mezzo per calcolare il genere della superficie o della curva $f = 0$, noto l'ordine e il numero dei suoi punti doppi. Donde il risultato di Clebsch (1863)[16].

Condizione necessaria e sufficiente perché una curva sia razionale è che possieda il numero massimo di punti doppi $\frac{(n-1)(n-1)}{2}$ *compatibile con il suo ordine* n.

Clebsch dimostra direttamente per via alg[ebrico] geom[etrica] questo risultato senza ricorrere ai procedimenti trascendenti di Riemann. Basta osservare che le curve aggiunte d'ordine $(n - 2)$ ad una curva razionale d'ordine n segano su questa una serie g^{n-2}_{n-2} e quindi una g^1_1 donde ecc. D'altra parte la invarianza del genere per trasf[ormazioni] biraz[ionali] dimostrata dal Clebsch per via algebr[ico] geometr[ica] prova che una curva raz[ionale] ha genere 0.

Quando la questione vien trattata per via alg[ebrico] geom[etrica] si presenta un dubbio: supposto che la $f(x, y) = 0$ si soddisfi identicamente ponendo $x =$

[15] [Riemann B., *Theorie der Abel'sche Funktionen*, J. fr Math., **54** (1857), 115–155].

[16] [Clebsch A., *Über die Anwendung der Abel'schen Functionen in Geometrie*, J. fr Math., **63** (1864), 189–243].

$R(t)$, $y = S(t)$, sarà possibile ricavare t razionalmente mediante x, y? Non sempre come dimostra l'esempio $x = t^2$, $y = t^4$. Qui basta porre $t^2 = \tau$ per avere τ in funzione razionale di x. Sarà sempre possibile sostituire a t un tale parametro τ che riescano x, y funzioni razionali di τ e τ funzione razionale di x, y? Cioè: sarà razionale la curva f? Che ciò sia risulta subito per via trascendente perché in caso opposto esisterebbe un integrale abeliano di prima specie $\int \phi(x,y)\,\mathrm{d}\,x = \int \Phi(t)\,\mathrm{d}\,t$, sempre finito e non costante. Per via alg[ebrica] il teorema fu dimostrato da Lüroth (1875)[17] V[edi] una dimostrazione in Severi, Geom[etria] Alg[ebrica] I, pag. 32[18].

Qui limitiamoci a notare che se ad ogni punto (x, y) della curva $f = 0$ corrispondono n valori di t, allora gli n punti corrispondenti sulla retta ove varia il parametro t variano al variare di (x, y) in gruppi di una involuzione γ_n^1. Viceversa data una involuzione di ordine n sulla retta, cioè una serie algebrica ∞^1 di gruppi G_n, tale che ogni punto della retta appartenga ad un sol gruppo della serie, questa involuzione può essere pensata come una curva in corrispondenza $(1, n)$ colla retta, cioè rappresentabile razionalmente mediante un parametro; concludiamo che ogni *involuzione algebrica sulla retta è razionale* (rappresentabile sotto la forma $\phi_1(t) - \tau\phi_2(t) = 0$).

Un'altra giustificazione (di carattere aritmetico) si presenta a proposito della risoluzione raz[ionale] di una equazione $f(x, y) = 0$, rappresentante una curva razionale. Si consideri il campo di razionalità K determinato dai coefficienti di f. Sarà possibile eseguire la risoluzione $x = R(t)$, $y = S(t)$ senza uscire dal campo K, cioè in modo che i coefficienti dei polinomi di cui R ed S sono quozienti appartengano a K? Non sempre, come mostra l'esempio della curva $x^2 + y^2 - a = 0$ ove, per eseguire la risoluzione razionale occorre fissare un punto della curva e quindi introdurre una irrazionalità; ad esempio $\sqrt{a}$. Invece nessuna irrazionalità interviene se si tratta di una cubica razionale.

II (8 Mar[zo]) In generale si dimostra che la risoluzione raz[ionale] dell'eq[uazione] $f = 0$ può farsi senza uscire dal campo di raz[ionalità] dei coeff[icienti] se f è d'ordine dispari, mentre esige la estrazione di una radice quadratica se f è d'ordine pari (Nöther).

Ciò dipende dal fatto che data l'equaz[ione] di una curva $f = 0$ d'ordine n, si può senza introdurre irrazionalità scrivere l'equaz[ione] di una curva aggiunta di dato ordine, ad esempio $n - 2$ se $n \geq 3$; e in particolare si può scrivere razionalmente l'equazione di curve aggiunte d'ordine $n - 2$ variabile in un sistema lineare ∞^2:

$$\lambda_0\phi_0(x, y) + \lambda_1\phi_1(x, y) + \lambda_2\phi_2(x, y) = 0.$$

[17] [Lüroth J., *Beweis eines Satzes tiber rationale Kurven*, Math Ann., **9** (1876), 163–165].

[18] [Severi F., *Trattato di Geometria algebrica - Volume I - Parte I. Geometria delle serie lineari.*, Bologna, Zanichelli, 1926].

Queste segano su $f = 0$, fuori dei punti multipli una g^2_{n-2}. Mediante la trasformazione birazionale

$$X = \frac{\phi_1(x,y)}{\phi_0(x,y)}, \quad Y = \frac{\phi_2(x,y)}{\phi_0(x,y)}$$

la $f = 0$ si trasforma in una curva d'ordine $n - 2$ i cui coefficienti appartengono allo stesso campo K. Proseguendo con successive trasf[ormazioni] dello stesso tipo la curva f si muta in una retta o conica secondo che n è dispari o pari donde segue il teorema.

Es[empi] di superficie razionali. Definizione di sup[erficie] raz[ionale]

$$f(x,y,z) = 0 \tag{4.3}$$

$$x = \frac{X(u,v)}{T(u,v)}, \quad y = \frac{Y(u,v)}{T(u,v)}, \quad z = \frac{Z(u,v)}{T(u,v)} \tag{4.4}$$

$$u = u(x,y,z), \quad v = v(x,y,z), \tag{4.5}$$

con $X, \ldots, T$, polinomi; u, v funzioni raz[ionali]. – Corrisp[ondenza] biunivoca fra il piano (u,v) e la superficie. Alla sezione della (4.3) col piano

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \pi = 0 \tag{4.6}$$

corrisponde la curva piana

$$\lambda X(u,v) + \mu Y(u,v) + \nu Z(u,v) + \pi T(u,v) = 0 \tag{4.7}$$

la quale, al variare del piano (4.6) varia entro un sistema lineare ∞^3, *sistema rappresentativo* della superficie (4.3).

Dato nel piano (u,v) un qualsiasi sistema lineare (4.7) di curve irriducibili rimane determinata mediante le (4.4) una superficie (4.3) di cui (4.7) è il sistema rappresentativo. Le ∞^2 curve (4.7) passanti per un punto generico (u_0, v_0) corrispondono a ∞^2 piani (4.6) di una stella, il cui vertice (x_0, y_0, z_0) è il punto di f corrispondente al punto (u_0, v_0) dato nel piano u, v. Se però le ∞^2 curve nominate passano in conseguenza per altri $m - 1$ punti $(u_1, v_1), \ldots, (u_{m-1}, v_{m-1})$, tutto il gruppo degli m punti $(u_0, v_0), \ldots, (u_{m-1}, v_{m-1})$ corrisponde allo stesso punto (x_0, y_0, z_0); e in tale caso non sussistono le (4.5); la corrispondenza fra sup[erficie] e piano è razionale in un sol senso; la superficie è rappresentabile biunivocamente sopra una *involuzione* piana d'ordine m. – Cenno sui punti fondamentali.

Sorgono due problemi:

1. data una superficie decidere se è razionale e costruire il sistema rappresentativo;
2. partendo da un sistema lineare ∞^3 di curve, sistema semplice, irriducibile, studiare la superficie da esso rappresentato. (Il sistema rappresentativo è determinato a meno di una trasf[ormazione] cremoniana del piano).

Il primo problema, di gran lunga più difficile, ci occuperà nel seguito.

Esempi di superficie razionali.

1. Quadriche, 1842 Plücker[19]; proiez[ioni] stereografiche; caso part[icolare] del cono.
2. Monoidi (es[empio] sup[erficie] di Steiner).
3. Sup[erficie] cubica (Cremona, Clebsch, 1865-68)[20].
4. Rigate razionali.
5. Superficie del 4° ordine con retta doppia o conica doppia (Clebsch 1868)[21].

Criteri generali per dedurre la razionalità di una superficie dalla conoscenza di particolari sistemi lineari di curve sulla sup[erficie].

Nozioni generali sui sistemi lineari di curve piane; sistemi completi; dimensione, genere, grado; invariantività di questi caratteri per trasf[ormazioni] biraz[ionali]. Sistema lineare di curve sopra una sup[erficie]. Ogni superficie raz[ionale] contiene fasci (lineari) di curve razionali. Sarà vera l'inversa? Il teorema fondamentale di Nöther (1870)[22].

III (15 Mar[zo]) *Una superficie che contiene un fascio lineare di curve razionali è razionale.*

1) Si comincia col trasformare biraz[ionalmente] la sup[erficie] F in un'altra F_1 su cui le curve razionali del fascio stanno in piani per una retta fissa. Basta proiettare da un centro fisso sopra i piani di un fascio ad esempio $z = \lambda$, la curva razionale segata da $\phi + \lambda\psi = 0$ corrisp[ondente] allo stesso valore del parametro.

2) Supposto che n sia l'ordine della curva piana $z = cost$ su F_1, si trasforma questa curva in una curva di ordine $n-2$ dello stesso piano mediante un sistema lineare ∞^2 di curve aggiunte d'ordine $n-2$, fissato ad esempio coll'imporre alle ∞^{n-2} curve aggiunte di passare per $n-4$ punti fissati sopra ogni piano $z = cost$, ad esempio mediante $n-4$ rette dello spazio. Con ciò le curve d'ordine n di F_1 si mutano birazionalmente in curve di ordine $n-2$ costituenti una sup[erficie] F_2 in corrisp[ondenza] biraz[ionale] con F_1 e quindi con F. Così proseguendo si trasforma la F in una superficie F' su cui i piani di un fascio segano curve raz[ionali] d'ordine 3 o 2 secondo che n è dispari o pari. Nel primo caso proiettando ciascuna cubica

[19] [Referenza bibliografica aggiunta da Castelnuovo nell'interlinea al di sopra del testo. A nostro avviso i riferimento dovrebbe essere all'articolo del 1847, Plcker J., *Die analitysche Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe*, J. fr Math., **34** (1847) 341–356].

[20] [Clebsch A., *Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung*, J. fr Math, **65** (1866), 359–380; Cremona L. *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*, J. fr Math, **68** (1868), 1–133].

[21] [Clebsch A., *Über die Flächen vierter Ordung welche eine Doppelcurve zweiten graden besitzen*, J. fr Math, **69** (1868), 142–184].

[22] [Nöther M., *Über Flächen welche Schharen rationaler Kurven besitzen*, Math. Ann., **3** (1871), 161–227.]

dal proprio punto doppio sulla retta che il suo piano sega sopra un piano fisso π, la F' e quindi F viene rappresentata birazionalmente su π.

3) Il caso del fascio di coniche esige un esame più profondo. Per rappresentare F' sopra un piano occorrerebbe conoscere razionalmente un punto sopra ciascuna conica, e quindi determinare una curva Γ unisecante tutte le coniche di F'. Per costruire la Γ si può ricorrere alla rappresentazione di F' sopra un piano doppio. Sia r l'asse del fascio di piani contenenti le coniche, S un punto di r, ad esempio il punto all'∞, π un piano non passante per r. Proiettando da S F' su π si ottiene una corrispondenza $(2,1)$ fra la superficie e il piano; F' viene rappresentata sul *piano doppio*.

4) Su questo vi sono ∞^1 punti costituenti la curva K di diramazione, a ciascuno dei quali corrispondono due punti coincidenti di F'. Poiché ogni conica del fascio proiettata da S dà su π una retta di un fascio [per] O, retta doppia con due punti di diramazione, segue che K è incontrata in due punti fuori di O da ogni retta per O. Cioè se K ha l'ordine m (*pari*), O è un multiplo secondo $m-2$. Supposto ora che F' possegga una curva razionale unisecante Γ le coniche[23] questa sarà proiettata da S su π in una curva Γ_O razionale unisecante le rette per O fuori di O, cioè una curva di un certo ordine ν passante $\nu-1$ volte per O. Ma se prendo su π una curva Δ_0 d'ordine ν passante $\nu-1$ volte per O, ad essa corrisponderà su F' una curva Δ secante ogni conica in due punti allineati con S, curva iperellittica avente tanti punti di diramazione quante sono le intersezioni di Δ_0 con K fuori di O. Però se Δ_0 tocca K in un punto P_0 il corrispondente punto P di F' sarà un punto doppio di Γ, cioè P_0 non va più contato come punto di diramazione; il fatto che due intersezioni di Δ_0 con K si riuniscano in P_0 abbassa il genere di Δ di due unità. Se riusciamo a ottenere che Δ_0 tocchi K ovunque la incontra, le curve Δ, non possedendo più punti di diramazione devono necessariamente spezzarsi in due curve, Γ, Γ_1 unisecanti le coniche di F'. E viceversa. Tutto sta dunque a costruire su π una curva Δ_0 di ordine arbitrario ν passante $\nu-1$ volte per O e tangente a K ovunque la incontra fuori di O. Se prendiamo $\nu = m-2$, la Δ_0 riuscirà aggiunta a K. Le curve di quest'ordine aggiunte a K formano un sistema $\infty^{2(m-2)}$ e segano K fuori di O in gruppi di $3(m-2)$ punti (le curve K aventi il genere $p = m-2$)[24]. Disporremo dei $2(m-2)$ parametri in modo da ottenere che le $3(m-2)$ intersezioni si riducano a $\frac{3}{2}(m-2)$ contatti; si potranno anzi imporre $\frac{1}{2}(m-2)$ contatti in punti fissi il che importa $m-2$ condizioni lineari, e disporre degli $m-2 = p$ parametri rimanenti per ottenere altri $m-2$ contatti in punti da determinare.

(Algebric[amente] la determinazione di un tale Δ_0 esige la costruzione di $\frac{p}{2}$ punti fissi su K mediante altrettante rette per O e risoluzione di altrettante equazioni

[23] [Dal testo originale sembra che la lettera Γ sia stata aggiunta successivamente. A nostro avviso, la frase andrebbe letta "possegga una curva razionale Γ unisecante le coniche"].

[24] [Integrazione al testo, riportata nella pagina a fianco]. Le dette aggiunte segano su K una g^{2p}_{3p}.

quadratiche, più la determinazione di un gruppo di g_{2p}^{p} su K composto di p punti doppi. Se $\omega_i(x)$ sono i p integrali abeliani di prima specie di K, si ha da risolvere il problema di inversione

$$\omega_i(x_1) + \omega_i(x_2) + \cdots + \omega_i(x_p) \equiv \frac{\Pi_i}{2}$$

dove Π_i è un periodo dell'i-esimo integrale abeliano. Il problema conduce a 2^{2p} gruppi di soluzioni risolvendo un'equazione di grado $2p+2$ e successive equazioni quadratiche; equazioni per la bisezione delle funzioni abeliane iperellittiche)[25].

IV (20 Mar[zo]) Cenno sul risultato di Enriques (Math. Ann. 52)[26] concernente le superficie con un fascio irrazionale di curve razionali.

2° criterio. *Piani doppi razionali.* Generalità sui piani doppi. La superficie

$$z = \sqrt{f(x,y)} \tag{4.8}$$

con f polinomio è rappresentabile nel piano doppio xy colla curva di diramazione $f=0$. Ed ogni superficie trasformabile birazionalmente nella (4.8) è pure rappresentabile sullo stesso piano doppio. Viceversa data una superficie $F(X,Y,Z)=0$ la quale possa porsi in corrispondenza algebrica col piano x,y in guisa che ad ogni punto (X,Y,Z) di essa corrisponda *un* punto x,y, sicché

$$x = R(X,Y,Z), \quad y = S(X,Y,Z) \tag{4.9}$$

mentre ad ogni punto x,y del piano corrispondono due punti (X_1,Y_1,Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) di F, coincidenti soltanto se $f(x,y)=0$, la sup[erficie] F è trasformabile birazionalmente nella (4.8). Infatti X_1+X_2 e X_1X_2 sono funzioni razionali di x,y e quando X_1, X_2 sono radici di una eq[uazione] generale a coefficienti raz[ionali] in x, y il cui discriminante deve ridursi a $f(x,y)$; sicché sarà

$$\begin{cases} X = T_1(x,y) + U_1(x,y)\sqrt{f(x,y)} = T_1 + U_1 z \\ Y = T_2(x,y) + U_2(x,y)\sqrt{f(x,y)} = T_2 + U_2 z \\ Z = T_3(x,y) + U_3(x,y)\sqrt{f(x,y)} = T_3 + U_3 z \end{cases} \tag{4.10}$$

mentre $z = \frac{X-T_1}{U_1}$ è attraverso la (4.9) esprimibile razionalmene mediante X, Y, Z.

---

[25] [Integrazione al testo, riportata nella pagina a fianco]. Cfr. Enriques, Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere ... Math. Ann. 49. [Enriques F., *Sull'irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un' equazione algebrica* $f(xys)=0$ *con funzioni razionali di due parametri*, Math. Ann., **49** (1897), 1–23)].

[26] [Enriques F., *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali*, Math. Ann., **52** (1899), 449–456].

La (4.8) determina effettivamente una classe di sup[erficie] birazionalmente identiche; da avvertire che la curva di diramazione $f = 0$ può essere assoggettata ad una trasformazione cremoniana del piano.

Si presenta dunque la questione di decidere data la curva di diramazione se un piano doppio sia razionale oppure no: od anche: a *quali tipi possono ridursi per trasformazioni birazionali le curve di diramazione dei piani doppi razionali?* Ogni tal piano è rappresentabile sopra una involuzione di punti di un piano semplice. Sicché la ricerca porta indirettamente a determinare le involuzioni (razionali) di coppie di punti di un piano e i tipi a cui possono ridursi per trasformazioni cremoniane.

Vi sono tre tipi di piani doppi raz[ionali].

1) Un primo tipo si presenta nella dimostrazione del teor[ema] di Nöther: esso è caratterizzato da *una curva di diramazione di ordine m (pari) con un punto multiplo secondo $m-2$.* è rappresentabile sopra un'involuzione di coppie di punti allineati con un punto fisso.

2) Un secondo tipo, *piano doppio di Clebsch* (1870)[27], si ottiene proiettando sopra un piano una sup[erficie] gen[erale] del 3° ordine da un suo punto. La curva di diramazione è del 4° ordine. Supposto che la sup[erficie] passi per il punto all'∞ dell'asse z, la sua equazione è del tipo

$$u_1 z^2 + 2u_2 z + u_3 = 0$$

dove u_1, u_2, u_3 sono polinomi del grado indicato dall'indice in x, y. La curva di diramazione è

$$u_2^2 - u_1 u_3 = 0$$

quartica che è toccata dalla retta $u_1 = 0$ in due punti e dalla cubica $u_3 = 0$ in 6 punti, gli 8 punti appartenendo alla conica $u_2 = 0$.

Viceversa se si parte da una quartica $f_4 = 0$, una sua bitangente $u_1 = 0$ e per i due contatti si conduca una conica $u_2 = 0$, al fascio $f_4 + \lambda u_2^2 = 0$ appartiene una curva che si spezza nella $u_1 = 0$ e in una cubica $u_3 = 0$; dunque per un valore opportuno di λ si ha $f_4 + \lambda u_2^2 = u_1 u_3$ ossia $f_4 = -\lambda u_2^2 + u_1 u_3$. Esiste dunque una superficie cubica che ha per curva di diramazione la $f_4 = 0$. *è razionale ogni piano doppio che abbia come curva di diramazione una quartica* (dotata di una bitangente).

Alle rette del piano doppio corrispondono sulla superficie cubica le sezioni piane per un punto, e quindi sopra un piano semplice le cubiche per 7 punti. Queste determinano una involuzione di coppie di punti che corrispondono ai punti del piano doppio.

[27][Clebsch A., *Über den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen* Math. Ann., **3** (1871), 45–75].

V (22 Mar[zo]) 3) Un terzo tipo di piano doppio è stato trovato da Nöther nel 1878[28] ed ha per curva di diramazione una *sestica con due punti tripli infinitamente vicini.* Per arrivare a questo tipo conviene partire da un terzo tipo di involuzione di coppie di punti sopra un piano (semplice) determinato dalle ∞^3 sestiche con 8 punti doppi, di genere 2. Le dette sestiche segano sopra una cubica che passi per gli 8 punti una g_2^1 e quindi le ∞^2 sestiche passanti per un punto generico b del piano passano per un ulteriore punto b' determinato dal primo. Il sistema ∞^3 dato rappresenta una superficie $f = 0$ di cui ogni punto ha per immagine una coppia dell'involuzione $(b\,b')$ nel piano. Poiché due sestiche si incontrano in due coppie, la superficie è una quadrica. Le ∞^1 cubiche per gli 8 punti base hanno per immagine rette della quadrica, e poiché due cubiche quadrisecanti formano una sestica, le rette della quadrica si incontrano a due a due e la quadrica è un cono.

Sopra ogni cubica vi sono 4 coppie dell'involuzione che si riducono a punti doppi, una delle quali coppie è data dal nono punto base del fascio di cubiche contato due volte. Quindi sopra ogni generatrice del cono quadrico vi sono quattro punti di diramazione uno dei quali cade però nel vertice. Gli altri generano una curva di diramazione del 6° ordine sul cono quadrico (in corrispondenza al fatto che la g_2^1 sopra ogni sestica del sistema ∞^3 ha 6 punti doppi)[29]. Proiettando il cono quadrico doppio da un suo punto si ha un piano doppio di Nöther.

Viceversa si dimostra che ogni piano doppio con curva di diramazione del 6° ordine avente due punti tripli infinitamente vicini è equivalente a un cono quadrico doppio con curva di diramazione del 6° ordine, e che questo si rappresenta sopra un'involuzione piana di Bertini.

Il Nöther nel 1878 ha affermato non esservi presumibilmente altri tipi di piani doppi raz[ionali], risultato giustificato anche dal fatto che il Bertini era arrivato a 3 soli tipi di involuzioni piane di coppie di punti. In modo rigoroso la cosa fu dimostrata nel 1900.

Le ricerche del Bertini (1878-80)[30] se fossero esaurienti dimostrerebbero che ogni involuzione di coppie di punti è razionale; risultato questo che oggi può stabilirsi indipendentemente dal teorema generale sulle involuzioni piane, valendosi del fatto che una involuzione di coppie di punti proviene da una trasf[ormazione] cremoniana involutoria.

VI (29 Mar[zo]) Definizione generale di involuzione piana: sistema algebrico ∞^2 di gruppi di n punti del piano, tale che un punto generico del piano appartenga a

[28] [Nöther M., *Über die ein-zweideutigen Ebentransforationen*, Sitzungsberichte der phil. med. Soc. zu Eralngen, (1878)].

[29] [Integrazione al testo, riportata nella pagiuna a fianco]. La sestica sghemba di genere 4 è intersezione del cono quadrico con una superficie del 3° ordine.

[30] [Bertini E., *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano*, Annali di Matematica, **8** (2) (1877), 244–286; Bertini E., *Sulle trasformazioni univoche piane e in particolare sulle involutorie*, Rend. del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, **13** (2) (1880), 443–451].

un solo gruppo. Poniamo che il punto (u, v) determini un gruppo di cui fanno parte esso insieme ai punti $(u_1, v_1), \ldots, (u_{n-1}, v_{n-1})$; il gruppo essendo pure determinato da (u_1, v_1), ecc. Allora se si formano tre funzioni razionali simmetriche delle n coppie

$$\begin{aligned} x &= M(u, v; \ldots; u_{n-1}, v_{n-1}) \\ y &= N(u, v; \ldots; u_{n-1}, v_{n-1}) \\ z &= P(u, v; \ldots; u_{n-1}, v_{n-1}) \end{aligned}$$

il punto (x, y, z) al variare di u, v descriverà una superficie

$$f(x, y, z) = 0 \tag{4.11}$$

e saranno x, y, z funzioni razionali di u e v

$$x = \frac{X(u, v)}{T(u, v)}, \quad y = \frac{Y(u, v)}{T(u, v)}, \quad z = \frac{Z(u, v)}{T(u, v)} \tag{4.12}$$

mentre dato il punto (x, y, z) di (4.11) ad esso corrisponderanno generalmente n punti del piano (u, v), (u_1, v_1), $\ldots$, (u_{n-1}, v_{n-1}); dalla (4.12) insieme alla (4.11) non si potranno in generale ricavare (u, v) razionalmente mediante x, y, z. I gruppi delle involuzioni sono rappresentabili biunivocamente sui punti della sup[erficie] e viceversa la sup[erficie] è rappresentabile sulla involuzione. Dare un'involuzione piana d'ordine n equivale a dare una sup[erficie] che possa porsi in corrispondenza algebrica $(1, n)$ col piano.

Abbiamo già visto che le sezioni piane della (4.11) si rappresentano colle curve del sistema lineare ∞^3

$$\lambda X(u, v) + \mu Y(u, v) + \nu Z(u, v) + \pi T(u, v) = 0 \tag{4.13}$$

il quale ha la proprietà che le ∞^2 curve passanti per un punto u, v passano in conseguenza per gli $n-1$ punti coniugati $(u_1, v_1), \ldots, (u_{n-1}, v_{n-1})$; il sistema *appartiene alla involuzione*. E poiché viceversa ogni sistema lineare ∞^3 siffatto dà luogo ad una involuzione piana e rappresenta una superficie in corrispondenza biunivoca colla involuzione, possiamo dire che ogni involuzione piana di ordine n è determinata da un sistema lineare ∞^3 tale che le ∞^2 curve passanti per un punto generico del piano passino in conseguenza per $n-1$ punti coniugati con questo.

La questione che ci proponiamo di esaminare è se *ogni involuzione piana sia razionale* (riferibile biunivocamente ad un piano n-plo), o *se ogni superficie* (4.11) *rappresentabile parametricamente mediante le funzioni razionali* (4.12) *sia per questo solo fatto razionale*, senza che si esiga che u e v siano funzioni razionali di x, y, z.

Cenno sul processo di ricerca. Ad ogni sistema lineare di curve sulla superficie (4.11) corrisponde sul piano un sistema lineare di curve appartenenti alla involuzione, e viceversa. Conviene dunque dedurre dalle proprietà dei sistemi lineari di curve appartenenti ad una involuzione, tali proprietà dei sistemi lineari di curve sulla f, da poterne dedurre la razionalità di f.

Proprietà fondamentali dei sistemi lineari completi di curve piane (Caratteri invarianti di un sist[ema] lin[eare]). Serie caratteristica.

A) *La serie caratteristica di un sistema completo è completa.* Questa proprietà si trasporta alle superficie razionali, ma è vera per infinite altre superficie (ad esempio per la superficie generale di ordine n), non però per tutte le superficie (ad esempio non per la rigata del quarto ordine con due rette doppie).

B) *Esistono sistemi lineari la cui dimensione supera il genere della curva generica.* Tale è ad esempio il sistema delle rette, delle coniche, delle curve generali di dato ordine, ecc. La proprietà si trasporta alle sup[erficie] raz[ionali], ma è vera anche per sup[erficie] non raz[ionali] (es[empio] la rigata del quarto ord[ine] suddetta) ma non per altre sup[erficie] (ad esempio non per la sup[erficie] gen[erale] d'ordine $>$ di 3).

Si tratta di vedere in primo luogo se una sup[erficie] rappresentabile sopra una involuzione piana possegga le due proprietà A) e B). Si dimostra di sì, faticosamente per la prima, più facilmente per la seconda. Ad esempio si vede che mentre il punto (u, v) descrive una retta nel proprio piano, il punto x, y, z corrispondente su f descrive una curva la quale fa parte di un sistema lineare che ha la proprietà B).

VII (12 Apr[ile]) Dimostrato che la sup[erficie] f gode le proprietà A) e B) si tratta di vedere se quelle due proprietà insieme caratterizzano le superficie razionali e si riesce a vedere di sì col seguente procedimento.

Si parte da un sistema completo $|C|$ su f avente la dimensione $r > \pi$ e se ne costruisce il sistema aggiunto $|C'|$ il quale ha la dimensione $r' = \pi - 1 < r$, se è irriducibile; in questo caso si dimostra che il genere π' di $|C'|$ è minore di r', e che la serie caratteristica di $|C'|$ è completa. Sicché $|C'|$ gode della stessa proprietà di $|C|$ ma ha dimensione e genere inferiore. Se invece $|C'|$ si spezza, si dimostra (salvo un caso insignificante) che le C' si spezzano in curve razionali di un fascio lineare, e allora si applica il teorema di Nöther.

In caso opposto si costruisca l'aggiunto $|C''|$ di $|C'|$ e si ragiona similmente. Il procedimento di successiva aggiunzione termina necessariamente, perché le dimensioni e i generi vanno decrescendo. Si dimostra che se non si presenta uno dei casi di spezzamento suddetto (nel qual caso la sup[erficie] è raz[ionale] in virtù del teor[ema] di Nöther) si arriva alla fine necessariamente ad uno dei seguenti sistemi:

a) sistema lineare almeno ∞^1 di curve razionali;
b) sistema lineare almeno ∞^2 di curve ellittiche;
c) sistema lineare almeno ∞^3 di curve di genere 2.

Nel caso a) la sup[erficie] è raz[ionale]. Nel caso b) si può ricavare dal sistema una rete di curve ellittiche secantesi a due a due in due punti donde piano doppio con quartica di diramazione .

Nel caso c) si può ricavare un sistema ∞^3 di curve di genere 2 secantisi a due a due in 4 punti appartenenti ad una involuzione di coppie di punti che dà luogo al terzo tipo di piano doppio razionale. In tutti i casi la sup[erficie] è razionale.

VIII (19 Apr[ile]) *Condizioni di razionalità di una superficie.*

Criteri fondati sulla conoscenza dei valori di certi invarianti. Analogia colle curve. Come il concetto di genere di una curva si possa estendere alle superficie. Il genere geometrico e il genere numerico; loro carattere invariante[31] (Per una superficie di ordine n con curva doppia d'ordine d e genere π con t punti tripli per essa e per la superficie è $p_a = \binom{n-1}{3} - (n-4)d + 2t + \pi - 1.$). Superficie regolari $p_g = p_a$. Proprietà della serie caratteristica di un sistema completo sopra una sup[erficie] regolare, e proprietà della serie segata sopra una curva del sistema dal sistema aggiunto. Per il piano è $p_g = p_a = 0$. Basteranno queste due condizioni per assicurare la razionalità di una superficie?

IX ([senza data]) Proprietà delle superficie aventi $p_g = p_a = 0$; esistono sistemi completi di curve aventi la serie caratteristica (completa) non speciale. Tale è ad esempio il sistema $|C|$ aggiunto ad un sistema lineare $|C_0|$ di curve sulla superficie. Si parte dunque da un tal sistema $|C_0|$ la cui curva generica abbia il genere π_0: il sistema aggiunto $|C|$ avrà la dimensione $r = \pi_0 - 1$. Se π è il genere di una sua curva il grado del sistema si dimostra essere $\pi + \pi_0 - 1$. Si costruisca poi l'aggiunto $|C'|$ di C che avrà la dimensione $\pi - 1$, le curve di un certo genere π', il grado $\pi + \pi' - 2$, e così si continui. Si otterrà ove non avvengano spezzamenti una successione di aggiunti aventi i caratteri

	genere	dimensione	grado
$\lvert C\rvert$	π	$\pi_0 - 1$	$\pi + \pi_0 - 2$
$\lvert C'\rvert$	π'	$\pi - 1$	$\pi + \pi' - 2$
$\lvert C''\rvert$	π''	$\pi' - 1$	$\pi' + \pi'' - 2$
...	...	...	...

Tutto sta a esaminare se questa successione sia limitata o illimitata. Conviene a tal fine esaminare come il terzo sistema si comporti rispetto al primo. Due casi possono verificarsi:

1) O il sistema $|C''|$ contiene il sistema $|C|$.

Esiste allora (anche se $|C''|$ coincidesse con $|C|$) il sistema $|C'' - C| = |2C' - 2C|$ (perché $|C' - C| \equiv |C'' - C|$). Questo sistema è invariante per trasf[ormazioni]

[31] [Integrazione del testo, riportata nella pagina a fianco]. Le superficie aggiunte di ordine $n - 4$ ed il sistema canonico $|K| = |C' - C| = |D' - D| = \ldots$

biraz[ionali] *sistema bicanonico*, e il numero delle sue curve linearmente indipendenti è un carattere invariante della superficie, il bigenere P_2. Nell'ipotesi in cui ci siamo posti è $P_2 \geq 1$, e la superficie non è certo razionale, perché sul piano $P_2 = 0$.

2) Oppure C'' non contiene C ed è $P_2 = 0$.

Allora $|C''|$ sega sopra una C generica una serie lineare di dimensione $\pi' - 1$. L'ordine della serie è il numero dei punti di incontro di una C'' con una C. D'altra parte è $|C''| = |2C' - C|$ a meno di curve isolate che alterano la linea generale del ragionamento; quindi

$$C'' \cdot C = 2C' \cdot C - C \cdot C = 4(\pi - 1) - (\pi + \pi_0 - 2) = 3\pi - \pi_0 - 2.$$

La serie segata da $|C''|$ su C è una $g^{\pi'-1}_{3\pi-\pi_0-2}$ sopra una curva di genere π.

Qui vanno distinti alcuni casi.

2a) Se $\pi' > \pi$ la serie è certo non speciale ed è allora $3\pi - \pi_0 - 2 - (\pi' - 1) \geq \pi$ ossia $\pi - \pi_0 - (\pi' - \pi) > 0$,

$$\pi - \pi_0 > \pi' - \pi \tag{4.14}$$

2b) Se $\pi' = \pi$ è ancora non speciale quella serie, giacché in caso opposto coinciderebbe o farebbe parte della serie canonica. E poiché $|C + C''| = |2C'|$ sega su C il doppio della serie canonica, se $|C''|$ segasse la serie canonica anche $|C|$ dovrebbe segare la serie canonica su C contro l'ipotesi che la serie caratteristica di $|C|$ sia non speciale. Si [vedrà] anche in questo caso vale la (4.14).

2c) oppure

$$\pi > \pi' \tag{4.15}$$

senza escludere che la (4.14) e (4.15) possano sussistere insieme.

In somma fra i caratteri dei due primi sistemi $|C|$ e $|C'|$ o passa la disuguaglianza (4.14) o la (4.15).

Similmente considerando $|C'|$ e $|C''|$ si trova che o sussiste la

$$\pi' - \pi > \pi'' - \pi' \tag{4.16}$$

oppure

$$\pi' > \pi'' \tag{4.17}$$

(che può sussistere anche insieme alla (4.16)).

E qui si noti che se sussiste la (4.15) colla (4.16), sussiste certo la (4.17) perché la (4.15). insieme alla (4.16) dà per somma la (4.17).

Così continuando segue che per i successivi aggiunti

o

$$\pi > \pi' > \pi'' > \pi''' > \dots \tag{4.18}$$

cioè i generi dei successivi aggiunti formano una successione decrescente e il processo di aggiunzione si estingue;

oppure

$$\pi - \pi_0 > \pi' - \pi > \pi'' - \pi' > \pi''' - \pi'' > \dots \tag{4.19}$$

e vanno diminuendo via via le differenze tra i generi di due aggiunti successivi. Sicché anche supponendo che sia $\pi > \pi_0$, si arriverà alla fine ad un aggiunto il cui genere sarà inferiore al genere del sistema precedente; e da quel momento in poi varranno disuguaglianze del tipo (4.18). Sicché in ogni caso se $P_2 = 0$, il processo di aggiunzione si esaurirà dopo un numero finito di operazioni.

Esaminando l'ultimo o il penultimo aggiunto si ricade in uno di quei sistemi di genere 0, 1 o 2 che abbiamo incontrato nel problema della razionalità delle involuzioni piane e che sono sufficienti per stabilire la razionalità della superficie. Si conclude dunque che *condizioni necessarie e sufficienti perché una superficie sia razionale sono* $p_g = p_a = P_2 = 0$ delle quali la prima ($p_g = 0$) è conseguenza della 3ª.

Rimane da provare sopra un esempio l'esistenza di superficie per cui $p_g = p_a = 0$, $P_2 > 0$. L'es[empio] più semplice fu dato da Enriques. Si tratta di una superficie del 6° ordine passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro. Una tale superficie si ottiene combinando linearmente le sup[erficie] del 6° ordine degeneri formate da due sup[erficie] cubiche passanti semplicemente per gli spigoli del tetraedro o la superficie del sesto ordine formata dalle facce del tetraedro e da una qualsiasi quadrica.

L'equazione della superficie è (preso il tetraedro come fondamentale)

$$\lambda_1 x_2^2 x_3^2 x_4^2 + \lambda_2 x_3^2 x_4^2 x_1^2 + \lambda_3 x_4^2 x_1^2 x_2^2 + \lambda_4 x_1^2 x_2^2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3 x_4 \phi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

dove ϕ_2 è una forma quadratica.

Una tale superficie ha $p_g = 0$ perché non esistono superficie aggiunte di ordine 2, $p_a = 0$ perché il passaggio per i 6 spigoli impone ad una quadrica aggiunta 10 condizioni, $P_2 = 1$ perché esiste una superficie biaggiunta d'ordine $2(n-4) = 4$ composta dalle 4 facce del tetraedro. Preso come sistema $|C|$ il sistema ∞^3 delle sezioni piane (sestiche di genere 4), $|C'|$ è formato da ∞^3 sestiche sghembe di genere 4, e $|C''|$ coincide con $|C|$.

5 – Nota bibliografica

Questa succinta nota bibliografica ha il solo scopo di indicare alcuni testi a chi fosse interessato ad approfondire da un punto di vista moderno le tematiche trattate da Castelnuovo nelle sue lezioni e seguire il filo di alcuni sviluppi recenti.

Il riferimento classico è il libro di Enriques e Conforto [6], rivisto e pubblicato a nome del solo Conforto in ottemperanza alle vergognose leggi razziali del 1938. Esposizioni moderne dei risultati classici sulla teoria delle superfici razionali si possono trovare in [2, 3, 9, 13].

La soluzione di Castelnuovo del problema di Lüroth secondo cui ogni superficie unirazionale è razionale non è valida su una campo qualsiasi. Zariski, nel 1958, ha dato esempi di superfici unirazionali ma non razionali su un campo algebricamente chiuso di caratteristica maggiore di tre [17].

Sul campo complesso il teorema di Castelnuovo non si estende alle varietà tridimensionali (threefold). Studi pionieristici in questo campo si devono a Fano [7, 8]. Le idee di Fano ispirarono le ricerche successive, nonostante diverse lacune nelle dimostrazioni messe in evidenza, per esempio, da Roth in [14].

La costruzione di esempi di threefold unirazionali ma non razionali, che coronano gli sforzi iniziati da Fano, sono risultati significativi della geometria algebrica degli anni settanta. Esempi sono stati ottenuti da diversi autori con metodi diversi in [1, 5, 10], mentre una recente rassegna dei recenti risultati sul problema di Lüroth si trova nelle lezioni CIME (Levico Terme, giugno 2015) di Beauville [4].

Le varietà algebriche più semplici sono quelle razionali, ma sono troppo poche. La classe delle varietà unirazionali è più ampia ma di difficile trattazione. In anni più recenti è stata proposta una nuova classe di varietà per generalizzare le varietà razionali, quelle *razionalmente connesse*, ovvero tali che per ogni coppia punti esiste una curva razionale che li connette [11]. La teoria delle varietà razionalmente connesse è più semplice di quella delle varietà unirazionali, ma non sono ancora stati risolti alcuni problemi fondamentali, per esempio ancora non si sa se le due classi coincidono. Tre articoli espositivi sui principali risultati noti relativi alle varietà razionalmente connesse sono [12, 15, 16].

REFERENCES

[1] M. Artin – D. Munford: *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. London Math. Soc., **25** (1972), 75–95.

[2] W. Barth – C. Peters – A. Van de Ven: *Compact complex surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[3] A. Beauville: *Complex algebraic surfaces*, Cambridge University press, Cambridge, 1996.

[4] A. Beauville A: *The Lüroth problem*, Preprint arXiv:1507.02476.

[5] C. H. Clemens – P. A. Griffiths: *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Annals of Mathematics, **95** (1972), 281–356.

[6] F. Conforto: *Le superficie razionali*, Zanichelli, Bologna, 1939.

[7] G. Fano: *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, Atti Acc. Torino, **43** (1907/08), 973–977.

[8] G. Fano: *Osservazioni sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, Atti Acc. Torino, **50** (1915), 1067–1071.

[9] P. Griffiths – J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley & Sons, New York, 1978.

[10] V. A. Iskowski – J. I. Manin: *Three-dimensional quartics and counterexamples to the Luroth problem* (in russo) Mat. Sb. (N.S.), **86** (1971), 140–166.

[11] J. Kollár: *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer Verlag, New York, 1996.
[12] J. Kollár: *Which are the simplest algebraic varieties?* Bulletin of the American Mathematical Society, **38** (2001), 409–433.
[13] J. Kollár – K. E. Smith – A. Corti: *Rational and nearly rational varieties*, Cambridge University press, Cambridge, 2004.
[14] L. Roth: *Algebraic threefolds, with special regard to problems of rationality*, Springer Verlag, Berlin, 1955.
[15] A. Verra: *Problemi di razionalità e unirazionalità in geometria algebrica*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B, **8** (2005), 77–102.
[16] A. Verra: *Problemi di razionalità e unirazionalità: da Ugo Morin ai giorni nostri*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **VXL**, (2009) 165–184.
[17] O. Zariski: *On Castelnuovo's criterion of rationality* $p_a = P_2 = 0$ *of an algebraic surface*, Illinois J. Math., **2** (1958), 304–315.

Lavoro pervenuto alla redazione il 26 ottobre 2016
ed accettato per la pubblicazione il 19 novembre 2016

Indirizzi degli Autori:
Paola Gario – Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques" – Via C. Saldini 50 – 20133 Milano
E-mail: paola.gario@unimi.it

Enrico Rogora – Dipartimento di Matematica G. Castelnuovo – Sapienza Università di Roma – p.le Aldo Moro, 5
E-mail: rogora@mat.uniroma1.it