



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

SCUOLA DI DOTTORATO IN INGEGNERIA CIVILE E ARCHITETTURA
DOTTORATO IN INGEGNERIA STRUTTURALE E GEOTECNICA

MODELLAZIONE DELLE NON LINEARITÀ DI MATERIALE
PER LE ANALISI STATICHE E DINAMICHE DI STRUTTURE
INTELAIATE ESISTENTI IN CALCESTRUZZO ARMATO

FRANCESCA MATTEI

XXIX Ciclo- A.A. 2015/2016

Roma, 27 Febbraio 2017

RELATORE:
PROF. ROSARIO GIGLIOTTI

IL COORDINATORE DEL DOTTORATO:
PROF. FRANCO BONTEMPI

SOMMARIO

Premessa: Motivazioni della ricerca e contenuti della tesi	4
1 Il patrimonio edilizio esistente in Italia	8
1.1 Analisi dei dati del 15° Censimento ISTAT 2011	8
2 La perdita di aderenza tra le barre d'acciaio e il calcestruzzo	13
2.1 Evidenze sperimentali sull'influenza del fenomeno.....	13
2.1.1 Calvi, Magenes, Pampanin (2001)	15
2.1.2 Gigliotti et al (2002).....	17
2.1.3 Varum et al (2015).....	20
2.2 Il meccanismo dell'aderenza tra barre e calcestruzzo	22
2.2.1 Barre ad aderenza migliorata	23
2.2.1.1 Comportamento monotono delle tensioni di aderenza per le barre ad aderenza migliorata	23
2.2.1.2 Comportamento ciclico delle tensioni di aderenza per le barre ad aderenza migliorata	27
2.2.2 Barre lisce	31
2.2.2.1 Comportamento monotono delle tensioni di aderenza per le barre lisce	31
CEB FIP '90.....	33
Verderame et al.	35
Varum et al.....	36
2.2.2.2 Comportamento ciclico delle tensioni di aderenza per le barre lisce.....	38
3 Modellazione del fenomeno della perdita di aderenza nelle analisi fem	41
3.1 Modellazione dell'aderenza tra acciaio-calcestruzzo	41
3.1.1 Modelli di aderenza negli elementi a plasticità concentrata.....	42
Alsiwat e Saatcioglu (1992).....	42
Mitra e Lowes (2007).....	44
Sezen e Setzler (2008)	45

3.1.2 Modelli di aderenza negli elementi a plasticità diffusa	46
Monti e Spacone (2000).....	47
3.2 Modelli semplificati.....	53
3.2.1 Legge modificata dell'acciaio: Braga et al. (2012)	54
3.2.1.1 Modellazione dell'uncino	57
3.3 Legge modificata dell'acciaio: formulazione esponenziale monotona	64
3.3.1 Formulazione esponenziale con acciaio elasto plastico incrudente e plateau	66
Condizioni di pre-snervamento ($\sigma_L < \sigma_Y$):	66
Riepilogo σ_L - u_L nei tre casi, in condizioni di pre-snervamento ($\sigma_L \leq \sigma_Y$)	81
Condizioni di post-snervamento ($\sigma_L \geq \sigma_Y$):	82
Legame σ_L - u_L : confronti e differenze con formulazione precedente	102
Influenza dei diversi parametri nella legge σ_L - u_L	106
3.4. Legge modificata dell'acciaio: formulazione ciclica.....	111
3.4.1 Leggi costitutive dell'acciaio, dell'interfaccia e dell'uncino	114
Giuffrè – Menegotto – Pinto (Steel 02)	117
Filippou et al. (Steel MPF).....	119
Interfaccia	122
4 Validazione della legge modificata dell'acciaio con scorrimenti e ulteriori applicazioni ..	132
4.1 Software utilizzato: OpenSees.....	132
Elementi trave/ colonna disponibili in libreria OpenSees.....	133
4.1.1 Displacement-Based Element	133
4.1.2 Force-Based Element / Non Linear Beam Column	133
4.1.3 Beam with Hinges.....	138
4.2 Validazione della formulazione proposta	141
4.2.1 Saatcioglu and Ozcebe (1989), Specimen "U4"	141
4.2.2 Braga, Gigliotti, Laterza (2002)	144

4.3 Domanda di deformazione delle barre in condizioni sismiche: influenza della perdita di aderenza	148
5 Lunghezza di cerniera plastica: inquadramento della problematica	150
5.1 Stato dell'arte sulla lunghezza di cerniera plastica.....	150
5.2 Modellazione numerica di una colonna con plinto in ambiente Abaqus.....	165
5.2.1 Modellazione dell'aderenza.....	167
5.2.2 Modellazione del calcestruzzo non lineare reagente a trazione	172
5.2.2.1 Legame costitutivo del calcestruzzo: Concrete Plasticity Damage	175
5.3 Risultati delle analisi numeriche.....	182
Conclusioni e sviluppi futuri	189
Modellazione degli scorrimenti all'interno del pannello nodale trave colonna.....	191
Bibliografia.....	198

Premessa: Motivazioni della ricerca e contenuti della tesi

Il presente lavoro di dottorato riguarda la tematica della modellazione dei fenomeni non lineari che intervengono nella risposta strutturale degli edifici esistenti in calcestruzzo armato in Italia la cui costruzione risale al periodo compreso all'incirca tra il 1950 e il 1980.

Nel lavoro vengono inquadrare le principali carenze e problematiche descritte nella letteratura tecnica, da cui emerge la necessità, per una migliore previsione delle risposta strutturale, di una adeguata modellazione dei principali fenomeni che influenzano il comportamento delle strutture durante le condizioni sismiche, in particolare nelle zone critiche ove si concentrano le plasticizzazioni.

La problematica dell'esistente in Italia è piuttosto rilevante: il nostro Paese presenta un livello di pericolosità sismica medio alto rispetto ad altri Paesi della zona mediterranea (Grecia, Turchia ad esempio hanno una pericolosità piuttosto alta al confronto), ma con una vulnerabilità sismica elevatissima (come hanno confermato i recenti eventi sismici avvenuti il 24 Agosto e 26-30 Ottobre, nell'Italia Centrale).

Le motivazioni dell'elevata vulnerabilità sismica sono di diversa natura: culturale, economica e tecnica. In relazione ai primi due aspetti ci sono da segnalare l'abusivismo edilizio e la scarsa attenzione alla qualità delle costruzioni, le quali sono state pratiche molto ricorrenti nel corso degli anni nel nostro Paese.

Per quanto riguarda il discorso tecnico, le ridefinizioni di pericolosità sismica delineate nel corso degli anni da INGV (Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia) e adottate dalle attuali Normative tecniche (NTC 2008 e, successivamente, NTC 2017), per l'intero territorio nazionale italiano, hanno aumentato il numero di comuni classificati come sismici, introducendo oltretutto anche una zona a bassissima sismicità (che precedentemente veniva ignorata) e che dunque richiede l'attuazione dei principi di costruzione antisismici per il nuovo e di adeguamento sismico (in senso lato) dell'esistente.

Come si vedrà in dettaglio nel primo capitolo del presente lavoro di tesi, infatti, il patrimonio esistente italiano è costituito per circa la metà da edifici in calcestruzzo armato costruiti prima del 1980.

Di questi, la quasi totalità è stata costruita con normative precedenti alla Legge 64/74 (la prima a introdurre vere e proprie prescrizioni antisismiche) ossia secondo i dettami della Legge 1684 del 1962, o addirittura del Regio Decreto 1939 (che non fornivano, o quasi, indicazioni circa i dettagli

costruttivi, le caratteristiche di regolarità e dei materiali da utilizzare per ottenere un comportamento antisismico).

Le problematiche di tali edifici sono varie, tra cui:

- la **progettazione per soli carichi verticali (a)**;
- **la scarsità o assenza di dettagli costruttivi** ad esempio insufficiente o **assente armatura trasversale (b,c)** nelle regioni nodali, insufficiente lunghezza di ancoraggio delle barre e l'impiego di **uncini (d)**;
- l'utilizzo di **materiali assolutamente scadenti**, come l'impiego di calcestruzzi con bassi valori di resistenza (e) e **l'impiego di barre lisce (f)** sia per l'armatura longitudinale che trasversale.

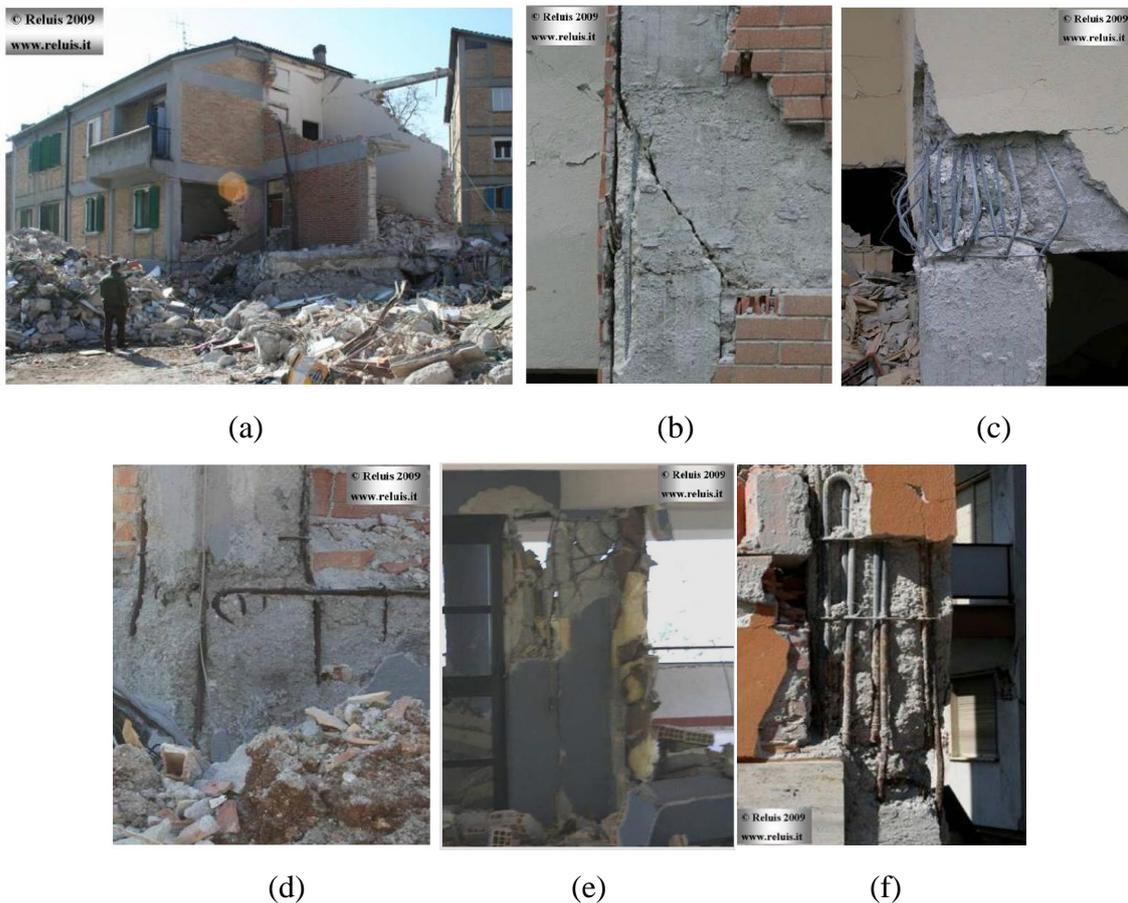


Figura 1: Carenze progettuali edifici anni'60 [1]

E' noto, in letteratura, che la risposta in campo inelastico di tali strutture è governata da significativi scorrimenti delle armature (in particolare nel pannello dei nodi interni), da plasticizzazioni

concentrate, localizzate nei pilastri piuttosto che lungo le travi, e dalla rottura a taglio dei pannelli nodali esterni.

La rivisitazione del patrimonio edilizio italiano esistente, necessita di analisi numeriche adeguate, che siano in grado di prevedere la risposta sismica dell'edificio e dunque di indicare un intervento piuttosto che un altro.

Per poter fare ciò, è necessario avere modelli matematici idonei che consentano la simulazione dei fenomeni che determinano il comportamento della struttura.

Di seguito, vengono descritti i contenuti della tesi.

Nel primo capitolo viene evidenziata la problematica del patrimonio esistente in Italia in termini quantitativi, elaborando i risultati dell'ultima indagine ISTAT, individuando quindi il numero di costruzioni in c.a. costruite in funzione dell'evoluzione delle normative antisismiche italiane, dal 1918 al 2011.

Nel secondo capitolo viene affrontata la problematica della perdita di aderenza tra calcestruzzo e acciaio nelle strutture esistenti in calcestruzzo armato.

In prima battuta vengono descritte alcune delle prove sperimentali su elementi o sottostrutture disponibili in letteratura, i cui risultati confrontati con analisi numeriche evidenziano la problematica, in particolare le marcate differenze, in termini di previsione della risposta strutturale, tra la modellazione degli scorrimenti relativi tra acciaio e calcestruzzo e l'adozione della perfetta aderenza. Successivamente viene descritto il meccanismo fisico dell'aderenza tra barre d'acciaio e il calcestruzzo, lo stato dell'arte sul legame tensioni – scorrimenti all'interfaccia (come è stato trattato negli anni dai vari autori) e in particolare la differenza tra il meccanismo che si sviluppa nel caso di perdita di aderenza tra calcestruzzo e barre lisce piuttosto che tra calcestruzzo e barre ad aderenza migliorata.

Nel terzo capitolo vengono passati in rassegna le tecniche e i modelli principali utilizzati nel corso degli anni per simulare gli scorrimenti acciaio - calcestruzzo, sottolineandone pro e contro (in particolare l'elevato onere computazionale), e la descrizione del modello semplificato proposto, sia a livello monotono (formulazione analitica) che ciclico (formulazione numerica).

Tale modello semplificato si configura come un legame modificato dell'acciaio che tiene in conto gli scorrimenti, che trova largo impiego nelle analisi non lineari con elementi a fibre, sia nel caso di plasticità diffusa che di plasticità concentrata. In particolare si mostrano i risultati delle analisi numeriche svolte per trovare la relazione tra le espressioni analitiche del ramo di scarico e di ricarico della barra, e il ramo monotono descritto dalla formulazione già trovata in via analitica.

Nel quarto capitolo sono mostrate le analisi numeriche svolte in ambiente OpenSees per validare la formulazione ciclica trovata.

Nel quinto capitolo viene descritto lo stato dell'arte circa la lunghezza del tratto di plasticizzazione negli elementi in calcestruzzo armato, ossia la lunghezza di cerniera plastica per quanto riguarda gli elementi a plasticità concentrata, la lunghezza del primo tratto di integrazione per quanto riguarda gli elementi a plasticità diffusa.

Nel sesto capitolo viene descritto un aspetto che è stato affrontato (lo è tutt'ora) ma non del tutto ultimato a causa dell'elevata non linearità dei materiali coinvolti, che quindi si configura tra gli sviluppi dell'immediato futuro: vengono descritte, in particolare, le analisi numeriche affrontate per trovare la formulazione analitica della lunghezza del tratto plasticizzato per una colonna in calcestruzzo armato e quindi la descrizione dei legami costitutivi, dei metodi e delle tecniche di modellazione adottati. In particolare, si ha interesse a valutare l'influenza dell'accorciamento del calcestruzzo sulla rotazione complessiva (dal punto di vista degli scorrimenti la lunghezza di cerniera plastica è solo un mezzo di implementazione all'interno dell'elemento a fibre).

Conclusioni e sviluppi futuri

In questo capitolo vengono descritti i principali obiettivi raggiunti durante la ricerca e le strategie in corso per la risoluzione di problematiche ancora aperte.

Tra gli obiettivi in particolare ci si sofferma sul raggiungimento, nell'ambito degli elementi a fibre a plasticità concentrata (ma anche diffusa) di una formulazione completa sia dal punto di vista monotono che ciclico del legame costitutivo modificato dell'acciaio (che tiene in conto anche degli scorrimenti tra barre lisce e calcestruzzo), la procedura già iniziata per valutare l'influenza dell'accorciamento del calcestruzzo sulla lunghezza del tratto plasticizzato di un elemento in calcestruzzo armato attraverso analisi numeriche, e infine la descrizione della problematica della modellazione degli scorrimenti all'interno del pannello nodale.

1 IL PATRIMONIO EDILIZIO ESISTENTE IN ITALIA

1.1 Analisi dei dati del 15° Censimento ISTAT 2011

Il rischio sismico in Italia rappresenta un problema estremamente rilevante.

Esso si definisce come la stima delle perdite complessive causate da un terremoto che possono interessare una specifica area in uno specifico intervallo di tempo, e può essere espressa attraverso diversi modi: il costo dei danni subiti dagli edifici, il costo complessivo in termini sociali ed economici subiti dalla popolazione dell'intero Paese, o attraverso il numero prevedibile di morti e feriti.

Per la definizione del rischio in una certa zona è necessario conoscere:

- la *pericolosità* sismica della zona, intesa come probabilità che in un certo intervallo di tempo si verifichino terremoti di una certa intensità;
- la *vulnerabilità*, relazionata alle caratteristiche degli edifici in quella zona;
- l'*esposizione*, ossia quante persone abitano in quella zona.

Se nulla si può fare riguardo alla pericolosità, che è una caratteristica intrinseca della zona, ci si può concentrare sulla vulnerabilità: è infatti probabile che per basse pericolosità ma costruzioni scadenti i danni dovuti al terremoto sia elevatissimi, così come può accadere il contrario ossia che per alte pericolosità ma patrimonio edilizio poco vulnerabile i danni siano bassi.

L'Italia purtroppo presenta, entrambi gli aspetti, ossia significativa pericolosità ed elevata vulnerabilità.

Analizzando il 15° Censimento ISTAT sugli edifici e abitazioni (<http://dati-censimentopopolazione.istat.it/Index.aspx?lang=it>), effettuato nel 2011, e confrontandolo con l'evoluzione delle normative antisismiche, la situazione appare da subito chiara.

Il patrimonio edilizio italiano è costituito da 14.515.795 edifici di cui 12.187.698 di tipo residenziale. Se si analizzano gli edifici residenziali dal 1945, la maggior parte di essi sono in muratura portante (44%), una buona parte è costituita da strutture in calcestruzzo armato (38%) e il resto (18%) da materiali di altro tipo probabilmente misto (Figura 2). Le percentuali sono ottenute rispetto al numero totale di edifici residenziali.

Ripartizione tipologie costruttive in Italia dal 1945

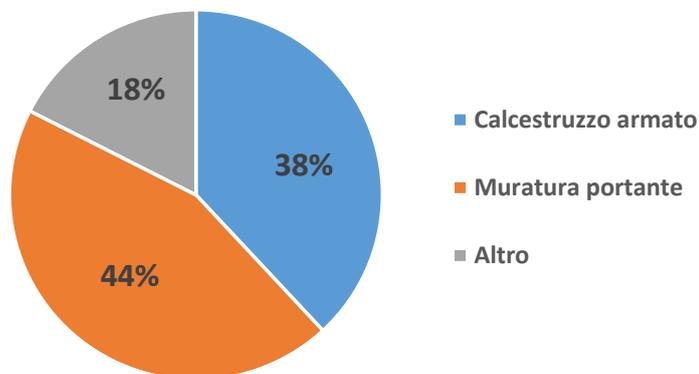


Figura 2: Ripartizione percentuale degli edifici in base alla tipologia strutturale dal 1945 ad oggi.

Se ci si concentra sulle principali tipologie costruttive, ossia muratura e calcestruzzo armato, si evince come fino al 1945 la stragrande maggioranza degli edifici siano costruiti in muratura, rappresentando una buona parte del patrimonio storico italiano, mentre la percentuale di costruzioni in calcestruzzo armato aumenta a partire dagli anni '60 fino all'inizio degli anni '80, costituendo ben il 45% del costruito in c.a. presente in Italia.

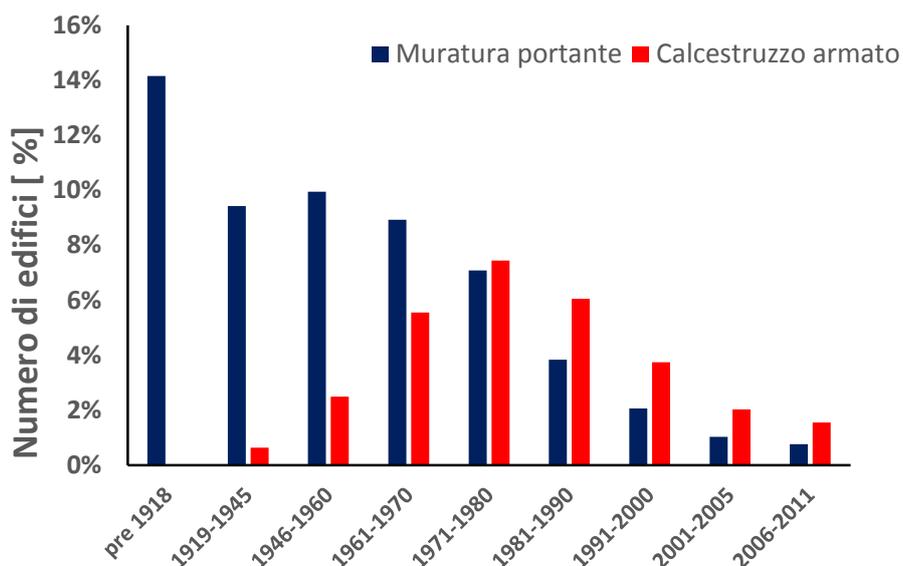


Figura 3: Ripartizione percentuale degli edifici in base alla tipologia costruttiva: calcestruzzo armato e muratura

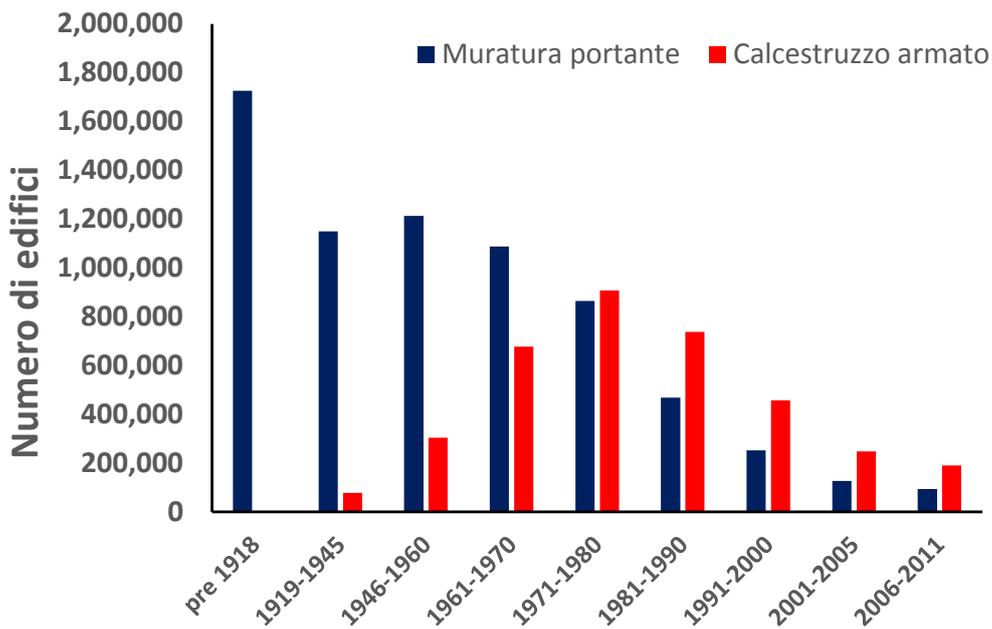


Figura 4: Numero di edifici in c.a. e muratura fino al 2011

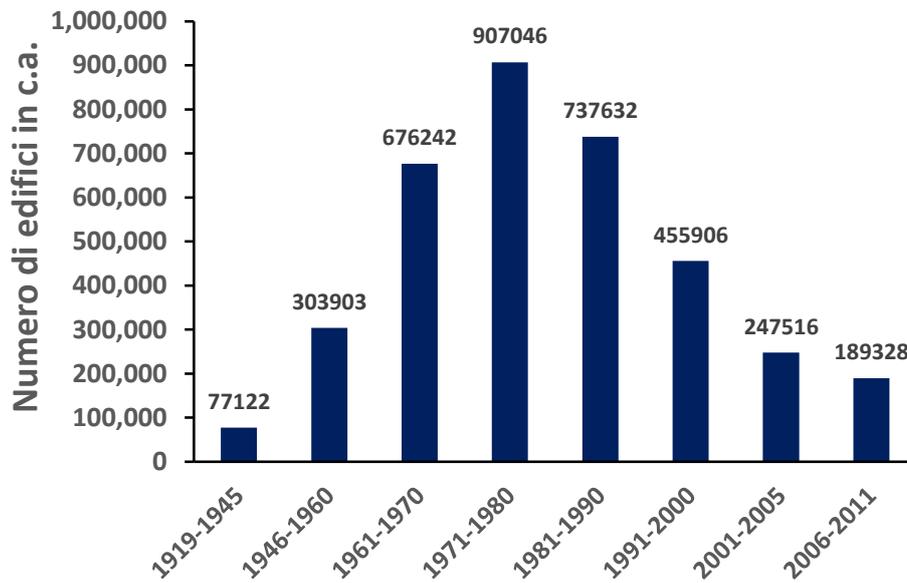


Figura 5: Numero di edifici in c.a. dal 1919 al 2011

Oltretutto, a titolo solo indicativo, sembrerebbe che il 44% degli edifici esistenti tra gli anni '60 e '80 si trovano nelle zone a maggiore pericolosità sismica (Classificazione Sismica 2015), Figura 6 (a), (b):

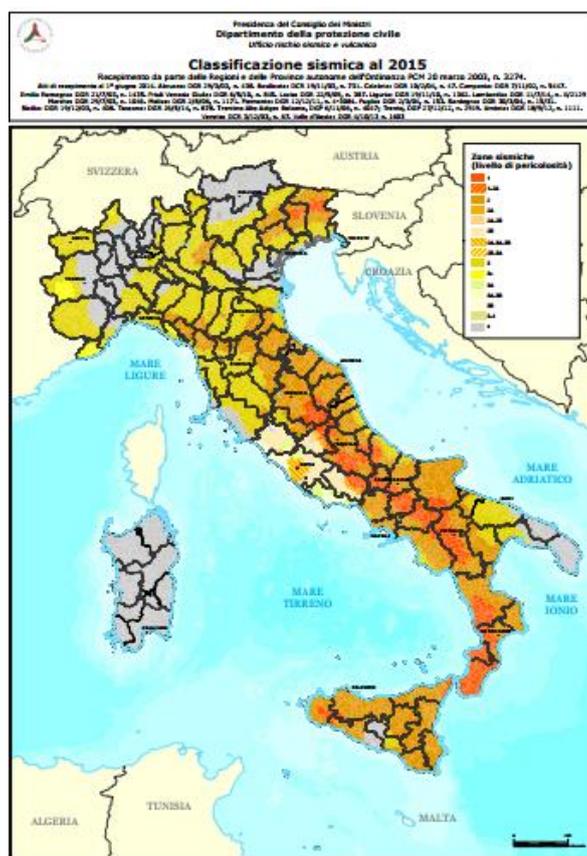
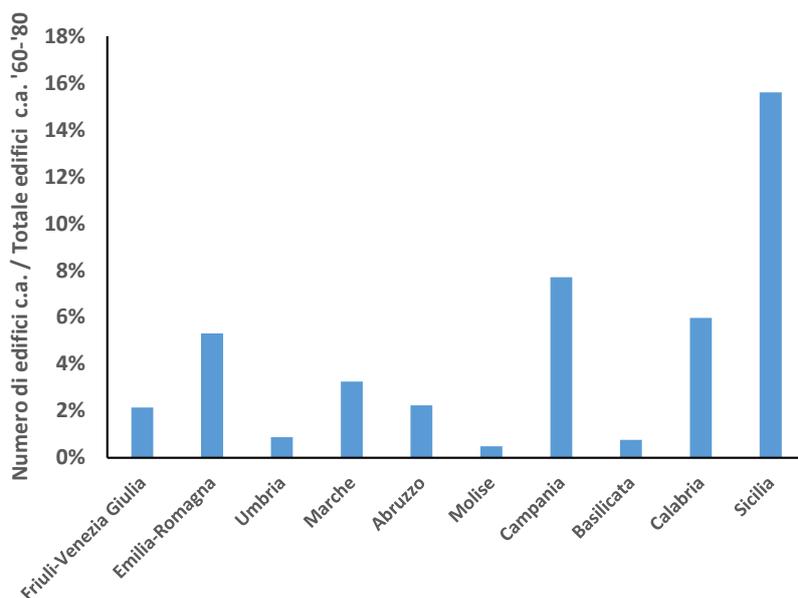


Figura 6: (a) Numero di edifici in c.a. costruiti tra gli anni '60 e gli anni '80 nelle regioni a più elevata pericolosità sismica. (b) Classificazione sismica 2015.

Considerando l'evoluzione delle normative italiane, purtroppo questo è un dato piuttosto allarmante: prima del 1971, infatti, non erano ancora state emesse le Norme Tecniche specifiche per le zone sismiche previste dalla Legge 64/74, e si faceva riferimento alla Legge 1684 del 1962. Quest'ultima

(che anzitutto risulta difficile stabilire quanto sia stata rispettata data la scarsa cultura antisismica del Paese, l'abuso edilizio e l'abitudine all'utilizzo di materiali scadenti) quando applicata, non dava esaurienti indicazioni specifiche sui dettagli costruttivi o sui requisiti di regolarità atti a garantire un buon comportamento antisismico.

Queste strutture dunque necessiterebbero di operazioni stringenti ed impegnative dal punto di vista sia economico che tecnico, a causa della loro vita in servizio che supera i 40 anni: è questa infatti la durata ottimale di un edificio oltre la quale si richiedono interventi.

Edifici in c.a. per epoca di costruzione in Italia, in relazione alle Norme

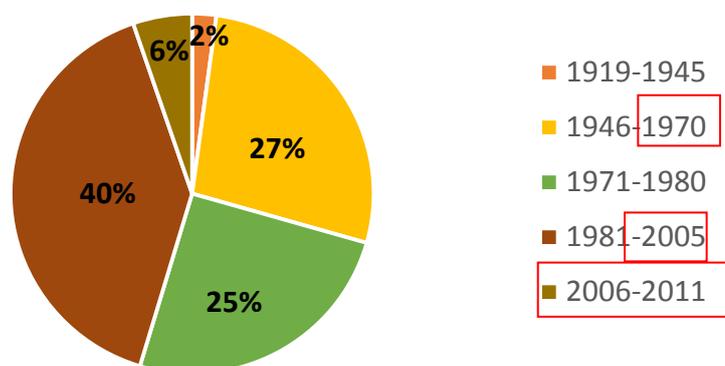


Figura 7: Edifici in c.a. per epoca di costruzione in Italia, in relazione all'evoluzione delle Norme (1974, 2005)

Le recenti normative sismiche (OPCM 3274/2003 e NTC '08) hanno classificato nuovamente in termini di rischio sismico il territorio nazionale, portando il numero di Comuni classificati come sismici da 2965 (pari al 37% dei comuni italiani), nel 2001, a 4671 (pari al 58%), ampliando particolarmente le zone a sismicità più bassa.

Inoltre l'introduzione di una zona a bassissima sismicità estende a quasi tutto il territorio nazionale la necessità di applicare principi generali di progettazione antisismica.

In base a tutte queste considerazioni, solo il 15% del patrimonio esiste in c.a. risulta costruito con criteri antisismici.

2 LA PERDITA DI ADERENZA TRA LE BARRE D'ACCIAIO E IL CALCESTRUZZO

2.1 Evidenze sperimentali sull'influenza del fenomeno

Il fenomeno della perdita di aderenza tra le barre e il calcestruzzo, è stato studiato sin dagli anni '60 da molteplici studiosi e tecnici, e rimane tuttora uno dei temi di più forte interesse scientifico a livello mondiale (si pensi alla conferenza internazionale appositamente dedicata "Bond in Concrete", tenuta ogni 10 anni dal 1982, di cui l'ultima avvenuta a Brescia nel 2012, che cerca di mettere il punto proprio sullo stato di avanzamento delle conoscenze a riguardo).

Come mostrato da numerose sperimentazioni, (Filippou, F.C., Popov, E.P., & Bertero, V.V. (1983) [2], Eligehausen, R., Popov, E.P., & Bertero, V.V. (1982) [3], Hakuto, S., Park, R., & Tanaka, H. (2000) [4], Calvi et al. (2001) [5], Gigliotti, R. (2002) [6], Fernandes, C., Varum, H., & Costa, A. (2013) [7], Melo, J., Varum, H., & Rossetto, T. (2015) [8], Fabbrocino, Verderame, Manfredi, Cosenza [9]), il meccanismo della perdita di aderenza tra le barre d'acciaio e il calcestruzzo gioca un ruolo centrale nella risposta delle strutture in calcestruzzo armato (soprattutto esistenti) in presenza di carichi laterali significativi.

Nonostante tutto, solo alcune di queste sperimentazioni riguardano condizioni vicine a quelle degli edifici esistenti, o comunque degli edifici esistenti in Italia, in particolare la presenza delle barre lisce. In particolare, tra quelle menzionate, Gigliotti, R. (2002) [6], Fernandes, C., Varum, H., & Costa, A. (2013) [7], Melo, J., Varum, H., & Rossetto, T. (2015) [8] descrivono le condizioni suddette.

Ad ogni modo, analizzando i risultati di tali sperimentazioni, i meccanismi di rottura evidenziati confermano che le strutture esistenti, progettate per soli carichi verticali e caratterizzate da scarsa attenzione ai dettagli costruttivi, nonché dalla presenza di barre lisce, presentano una vulnerabilità sismica elevata per l'instaurarsi di modalità fragili di rottura locale (concentrazione delle inelasticità nelle estremità degli elementi) o meccanismi globali di "piano debole". Uno dei motivi principali risiede proprio nella perdita di aderenza tra le barre ed il calcestruzzo, che determina riduzioni di rigidità, di resistenza e di energia dissipata durante i carichi ciclici.

Il fenomeno della perdita di aderenza è, in generale, significativo sia nel caso di barre lisce che di barre ad aderenza migliorata, tuttavia esso è particolarmente rilevante nel primo caso, in aggiunta a insufficienti ancoraggi, materiali scadenti, tutte condizioni che si verificano in molti edifici esistenti. L'accurata rappresentazione degli effetti della perdita di aderenza è cruciale nella previsione della risposta delle strutture in calcestruzzo armato: i risultati delle analisi che includono il fenomeno della perdita di aderenza sono molto più realistici in termini di tensioni, spostamenti e dissipazione di

energia, rispetto a quelli che contemplano la perfetta aderenza. In effetti, questa ipotesi, che prevede la congruenza delle deformazioni nonostante i due materiali utilizzati abbiano differenti moduli di elasticità, è valida solo nel caso in cui si abbiano bassi livelli di carico e in zone in cui il trasferimento di tensioni tra i due materiali può ritenersi trascurabile. Non appena il calcestruzzo si fessura, all'aumentare delle sollecitazioni, nascono degli scorrimenti tra la barra di acciaio ed il calcestruzzo stesso, che generano delle tensioni tangenziali all'interfaccia, che rimettono in gioco la resistenza a trazione del calcestruzzo, il quale partecipa così all'assorbimento delle sollecitazioni di trazione. Questo fenomeno è noto come "tension stiffening" e si traduce in un "incremento" della rigidità dell'elemento rispetto al caso di elemento completamente fessurato, trasmessa dalla barra stessa.

In generale, tali fenomeni di perdita di aderenza diventano più significativi e complessi in presenza di azioni sismiche dove, a causa delle elevate tensioni, l'aderenza si deteriora gradualmente.

L'assunzione dell'ipotesi di perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo, si suppone che le sezioni rimangano piane e che ci sia compatibilità tra acciaio e calcestruzzo: sotto queste assunzioni si sovrastima la rigidità iniziale dell'elemento in calcestruzzo armato così come l'energia dissipata durante l'applicazione dei carichi ciclici.

Di seguito verranno passati in rassegna i risultati di una serie di sperimentazioni effettuate sul tema, e il confronto con le analisi numeriche relative, al fine di sottolineare l'importanza, anzi l'essenzialità (soprattutto per le barre lisce) della modellazione del fenomeno.

Per ora non vengono approfonditi i modelli con cui sono stati riprodotti numericamente gli scorrimenti, i quali verranno ampiamente approfonditi nel Capitolo 3.

2.1.1 Calvi, Magenes, Pampanin (2001)

La campagna sperimentale condotta da Calvi et al. [2001] [5], ha riguardato prove sperimentali quasi statiche cicliche su sottosistemi trave colonna e su un telaio a tre piani tipico degli anni '60, condotte presso il Laboratorio di Meccanica Strutturale dell'Università di Pavia.

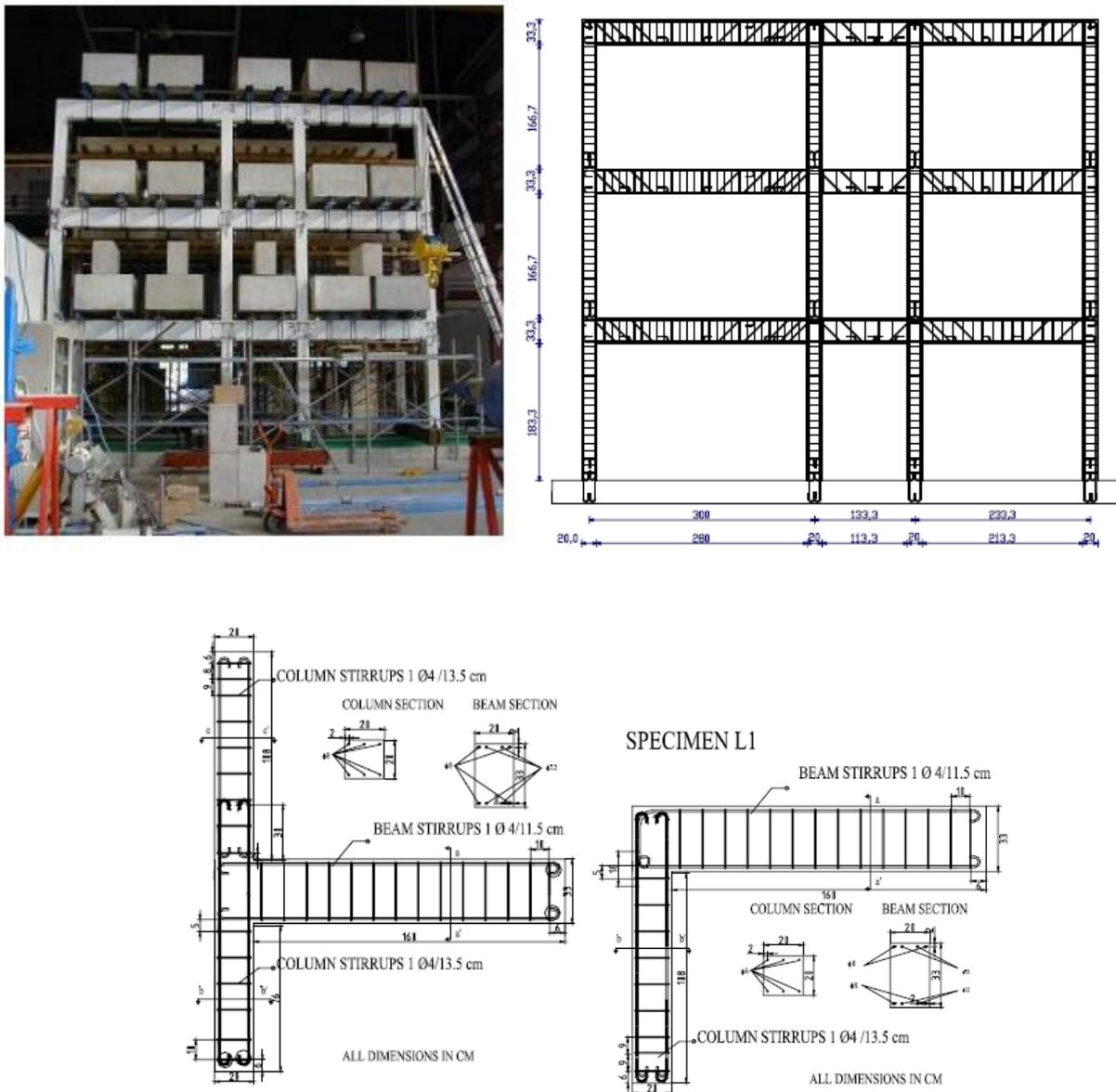


Figura 8: Descrizione del telaio e di alcuni sotto assemblaggi oggetto delle prove quasi statiche

La sperimentazione ha messo in luce le problematiche riguardanti gli edifici progettati in quell'epoca, in particolare la mancanza di armatura trasversale nei nodi, l'impiego di barre lisce e l'utilizzo di uncini come ancoraggi; nel lavoro si evince come tali carenze sembrano aver condotto a diversi meccanismi inelastici, sia di tipo locale che globale, evidenziando inoltre come i primi, a volte anche inaspettati, possano influire sui secondi, portando a meccanismi inelastici impreveduti (Figura 9).

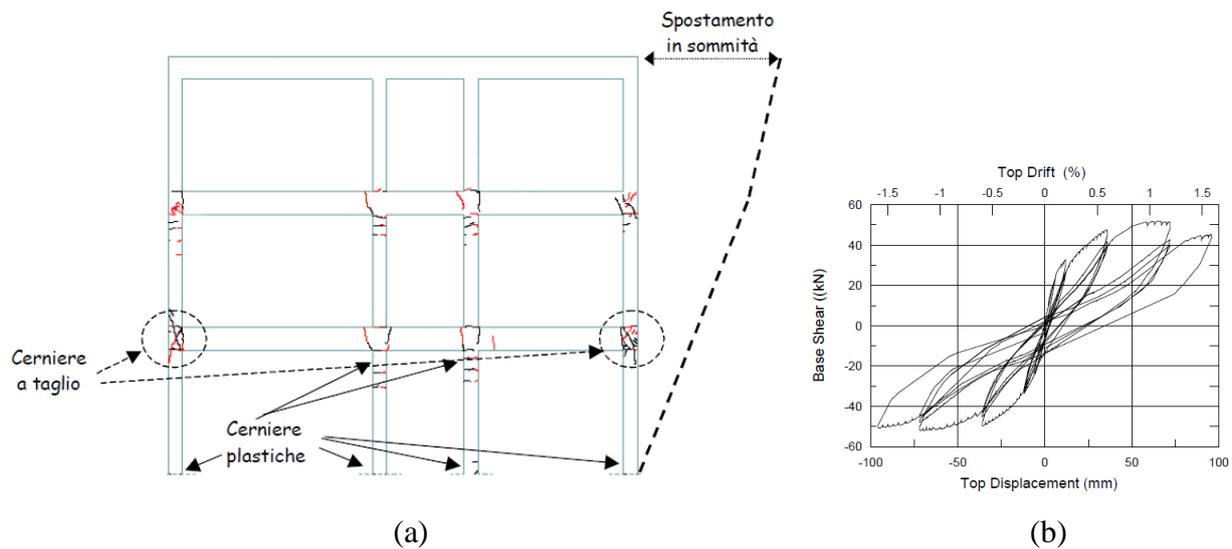


Figura 9: Meccanismi di collasso locali nel telaio prototipo(a); Risposta della struttura (b).

Gli autori [5] deducono dalla sperimentazione una maggiore vulnerabilità dei nodi esterni rispetto ai nodi interni, e una grande deformabilità di questi ultimi a causa degli scorrimenti delle barre. Essi si soffermano, in particolare, sull'individuazione di meccanismi inelastici di tipo ibrido all'interno dei nodi esterni a T e a L, in cui i meccanismi tipici di fessurazione (o di plasticizzazione) a taglio o a flessione hanno interagito con fenomeni di espulsione del copriferro per punzonamento delle barre compresse a causa della combinazione degli scorrimenti delle stesse e della presenza dell'uncino.

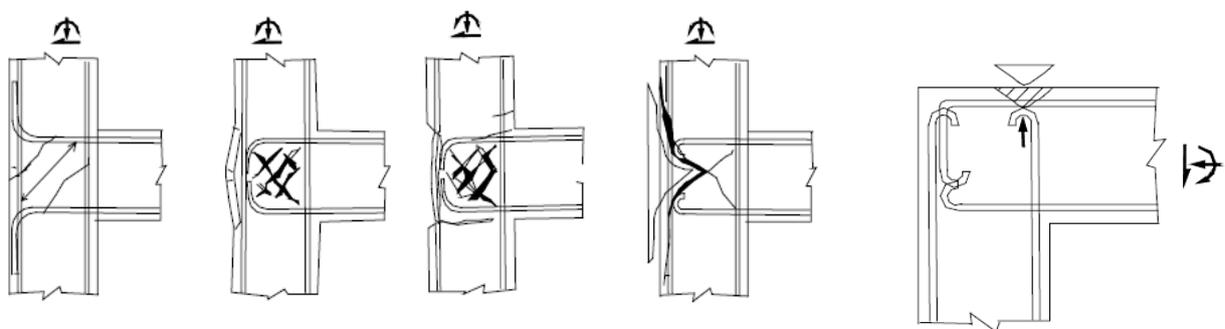




Figura 10: Meccanismi inelastici dei nodi esterni

2.1.2 Gigliotti et al (2002)

La campagna sperimentale condotta da Gigliotti, R. (2002) [6], ha per oggetto dei sotto assemblaggi di strutture esistenti in calcestruzzo armato, progettate per soli carichi verticali, dedotti dal telaio presentato nel paragrafo precedente: in particolare, la sperimentazione riguarda tre nodi interni e un nodo esterno, costruiti con calcestruzzo di bassa resistenza, barre lisce e sprovvisti di staffe nel pannello nodale.

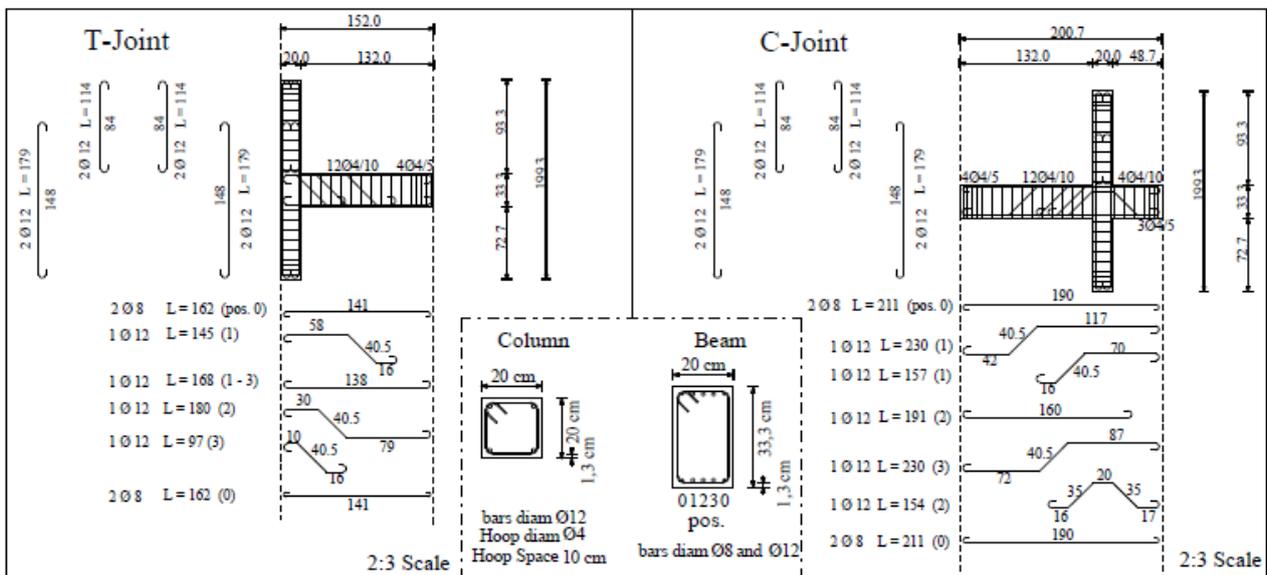


Figura 11: Nodi esterni e nodi interni utilizzati per la sperimentazione [6]

I sotto assemblaggi strutturali sono stati soggetti a prove pseudo dinamiche, applicando agli stessi degli spostamenti ciclici laterali crescenti (Figura 12) fino a portare la struttura al collasso.

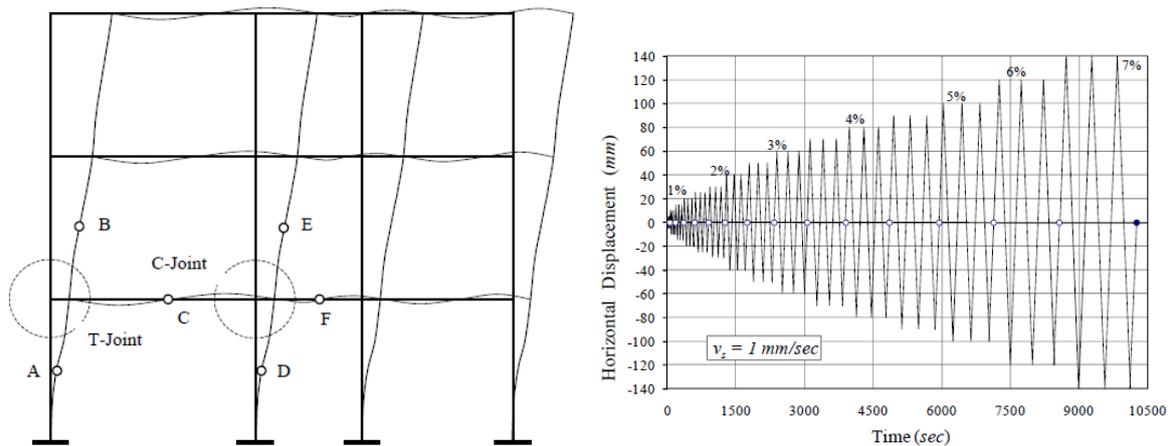


Figura 12: Meccanismo di deformazione inelastico dei nodi e storia di spostamenti applicata

La sperimentazione condotta mette in luce i principali aspetti della risposta sismica di edifici esistenti (Figura 14), ossia:

- la risposta è influenzata dagli scorrimenti tra barre longitudinali e calcestruzzo;
- il collasso per taglio è peculiare dei nodi esterni;
- nei nodi interni si evidenziano delle fessure localizzate alle estremità delle travi e delle colonne convergenti al nodo stesso.

In relazione al terzo aspetto (connesso al primo), i fenomeni che riguardano il nodo interno sono particolarmente interessanti, poichè in prossimità delle estremità delle colonne e delle travi convergenti al pannello nodale si concentrano le poche e anche principali deformazioni inelastiche dovute agli scorrimenti delle barre di armatura: il meccanismo può essere pensato come una rotazione rigida, da un lato si ha l'apertura della fessura, la cui entità di fatto coincide con il valore dello scorrimento totale che si accumula in quella zona, dall'altro si ha invece l'accorciamento del calcestruzzo.

Si può dire, in sostanza che la barra liscia si comporti come un perno nei riguardi dell'apertura della fessura, ed è l'aspetto che di fatto impedisce alla fessura di aprirsi completamente, almeno finchè non subentra la rottura del materiale o lo sfilamento definitivo della stessa.

L'aspetto sopra descritto, che è bene evidenziato dai risultati dei trasduttori della prova condotta da Gigliotti et al.:

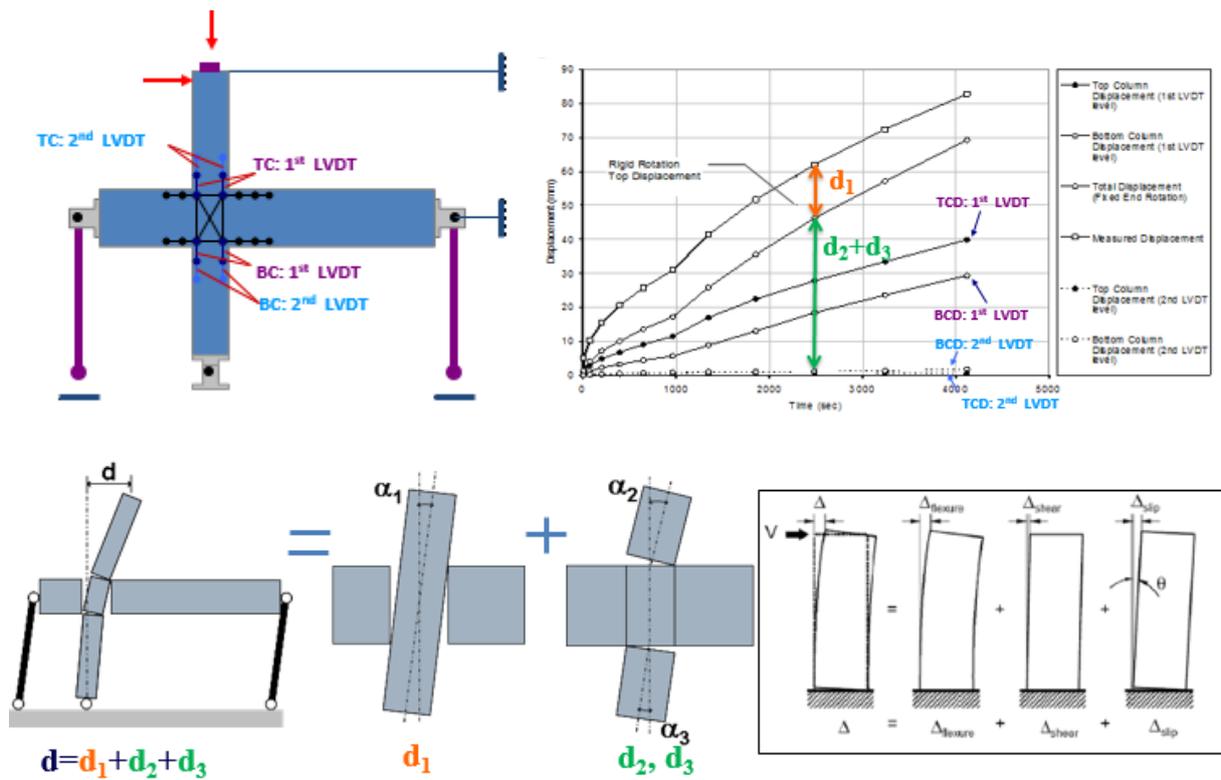
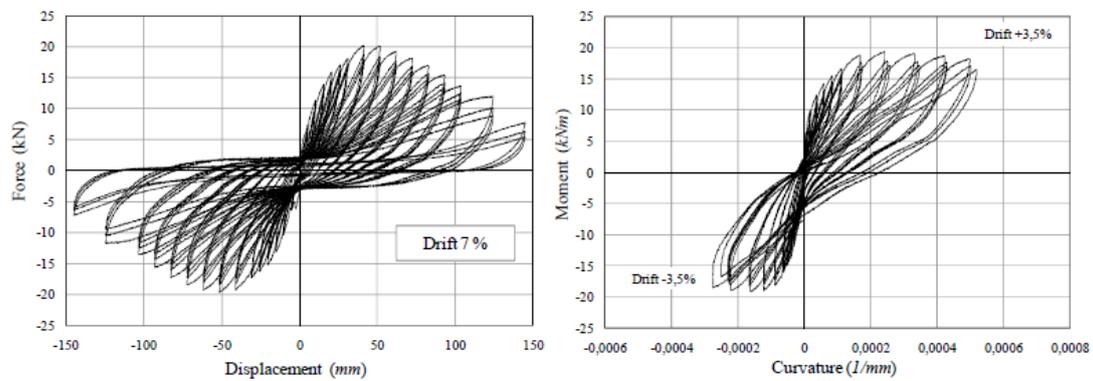
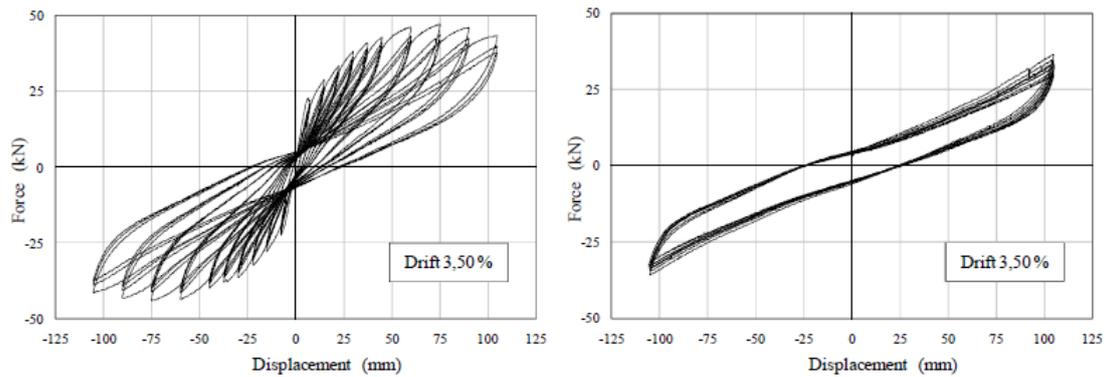


Figura 13: Schematizzazione del meccanismo di risposta durante la prova sperimentale: contributo della rotazione rigida per effetto degli scorrimenti



(a)



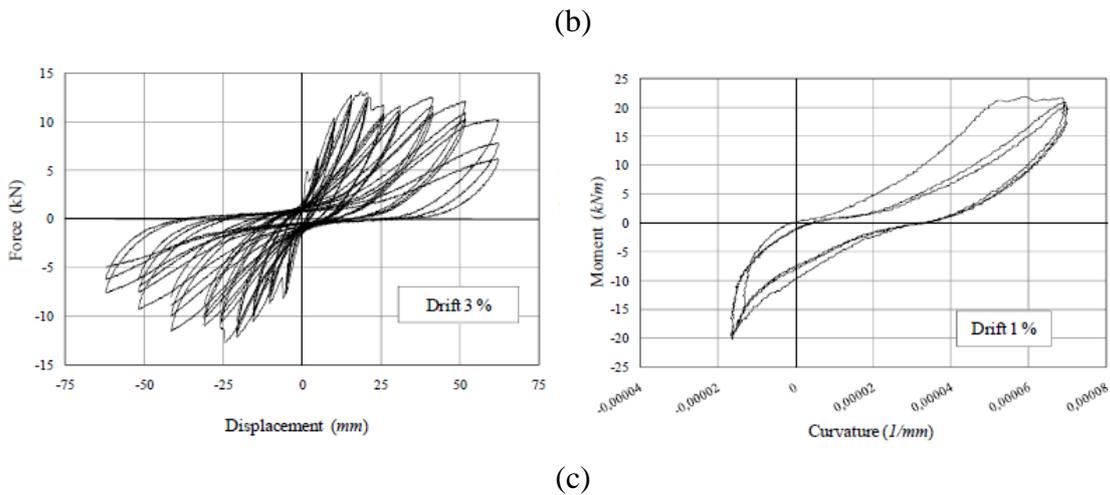


Figura 14: Forza alla base- spostamenti in testa: (a) nodo interno C23, (b) nodo interno C11-1, (c) nodo esterno T

In Figura 15 è descritto un primo confronto tra risultati sperimentali e analisi numeriche senza (a) e con modellazione degli scorrimenti (b). E' evidente che la perfetta aderenza sovrastima la resistenza massima che l'elemento è in grado di offrire in termini di taglio alla base, la rigidezza (almeno quella elastica), e, infine, l'energia dissipata dall'elemento durante l'azione laterale impressa.

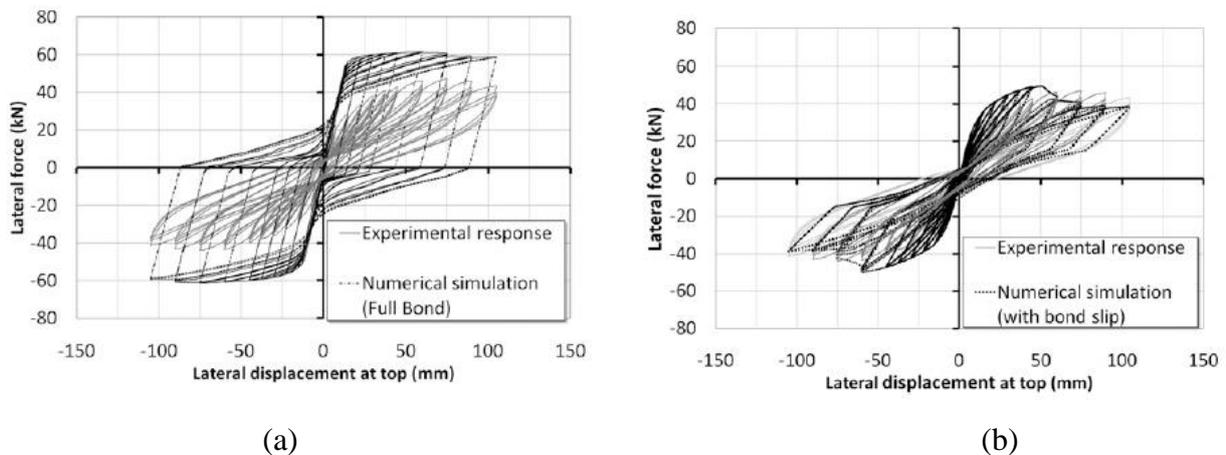


Figura 15: Confronto tra risultati sperimentale e analisi numerica, per il nodo interno C11, in termini di Forza alla base spostamento in testa: (a) Ipotesi di perfetta aderenza (b) Ipotesi di scorrimenti

2.1.3 Varum et al (2015)

Anche la sperimentazione condotta da Varum et al. [7] su sottostrutture quali nodi trave-pilastro (Figura 16), mostra diversi aspetti interessanti: oltre a mettere in luce quanto già detto nella precedente sperimentazione circa l'influenza degli scorrimenti tra barre e calcestruzzo, evidenzia alcune differenze tra barre lisce e barre ad aderenza migliorata (Figura 17).

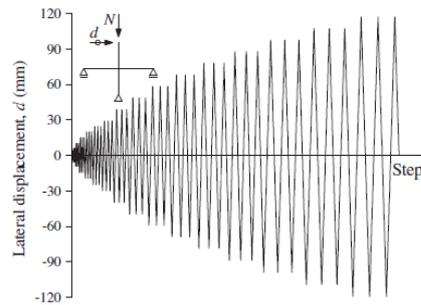
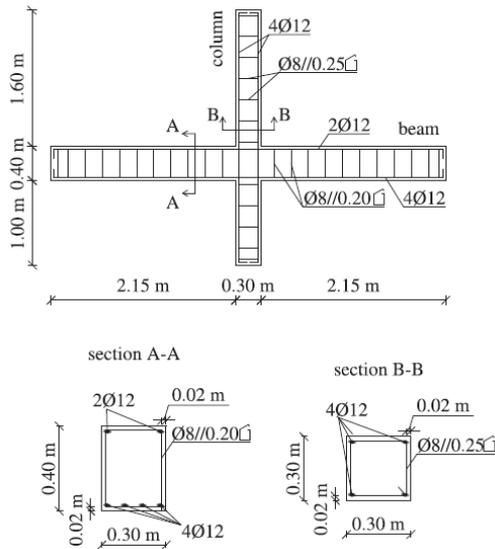


Fig. 2. Lateral displacement history imposed on the joint specimens.

Figura 16: Sperimentazione su nodi trave-pilastro condotta da Varum et al. [7]

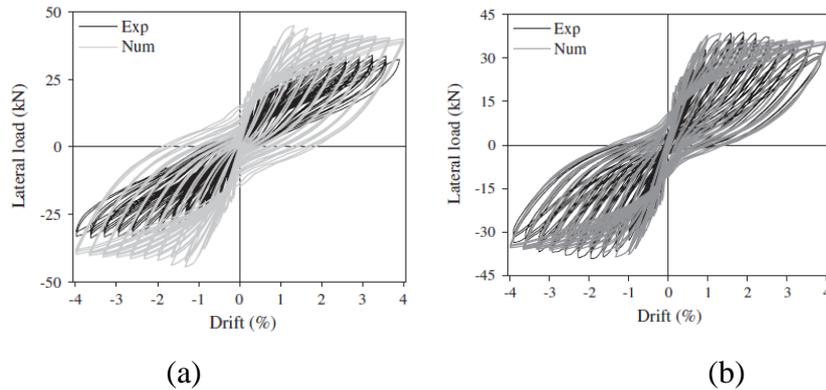


Figura 17: Confronto tra sperimentale e numerico: barre lisce (a); barre ad aderenza migliorata (b)

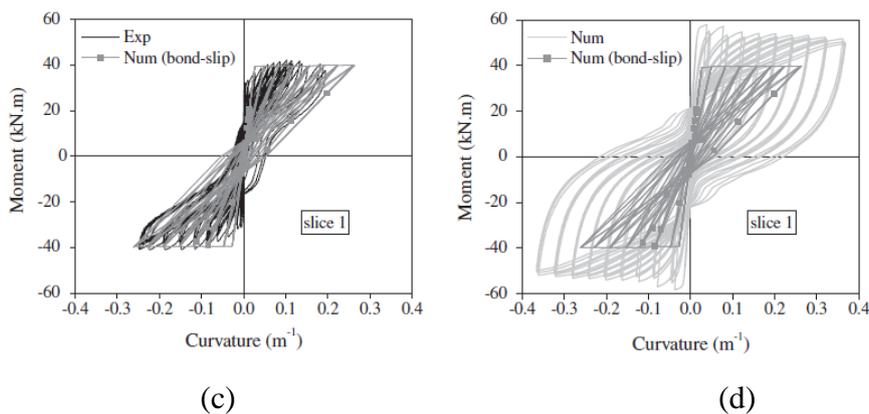


Figura 18: Sperimentale vs numerico: con bond slip (c) e senza (d)

Tuttavia, mentre il confronto tra le analisi numeriche e la sperimentazione sembra abbastanza buono per quanto riguarda le barre ad aderenza migliorata Figura 17 (a), esso sembrerebbe un po' meno preciso per quanto riguarda le barre lisce Figura 17 (b).

Un aspetto molto interessante è sicuramente quello relativo alla Figura 18 (d), in cui si evince il confronto tra l'adozione dell'ipotesi di scorrimenti e l'adozione dell'ipotesi di perfetta aderenza, nelle analisi numeriche, confermando che la negazione del fenomeno all'interno delle analisi, comporta una errata previsione della risposta.

In conclusione, sia nella sperimentazione condotta da Gigliotti et al. che in quella condotta da Varum et al. si evincono diversi aspetti, tra cui uno molto peculiare, ossia che la risposta in termini di cicli successivi dei nodi in presenza di barre lisce è inaspettatamente piuttosto stabile: in particolare è molto meno evidente l'effetto "pinching" (rispetto all'uso di barre ad aderenza migliorata), il che è dovuto a un minor degrado ciclico del legame di aderenza.

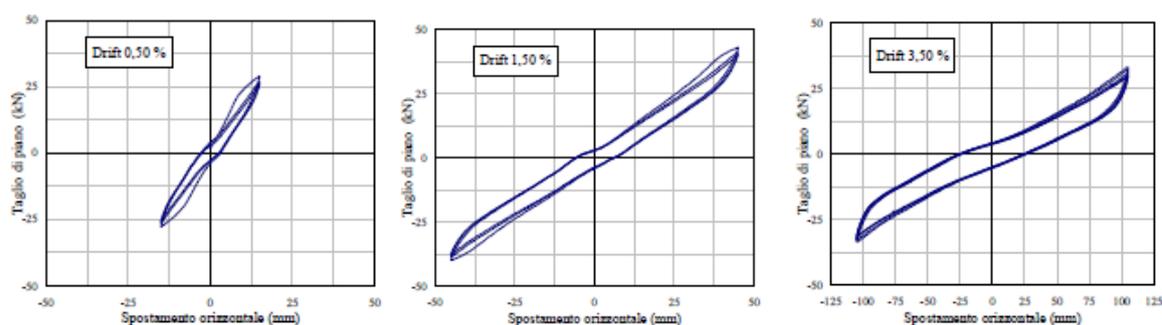


Figura 19: Evidenze sul fenomeno del "pinching", nodo C11, Gigliotti et al.

Di seguito verrà passato in rassegna il meccanismo fisico della perdita di aderenza tra barre e calcestruzzo, mostrando tra l'altro proprio le importanti differenze tra barre lisce e barre ad aderenza migliorata: purtroppo la letteratura scientifica fornisce molte informazioni riguardo le seconde, ma molto poco rispetto alle prime. Questo aspetto è estremamente importante da sottolineare perché nella modellazione delle barre lisce si utilizzano spesso modelli tipici delle barre ad aderenza migliorata, potrebbe fornire risultati piuttosto forvianti.

2.2 Il meccanismo dell'aderenza tra barre e calcestruzzo

In una struttura in cemento armato, il legame di aderenza tra le barre di armatura e il conglomerato dipende da molteplici fattori; ad esempio, la scabrezza superficiale e la modalità di lavorazione delle barre di acciaio, la resistenza e lo stato tensionale del calcestruzzo, la posizione e l'orientamento delle armature durante il getto, l'entità del copriferro, la distanza tra le armature e il diametro delle barre. Una modellazione del fenomeno è perciò possibile, ma sempre approssimata.

Circa la genesi della perdita di aderenza si può ragionare in questi termini: inizialmente, nelle aree soggette a compressione (e nelle parti soggette a trazione ma non fessurate), le deformazioni di acciaio e calcestruzzo sono le medesime, $\varepsilon_s = \varepsilon_c$.

Nelle sezioni in cui viene superata la resistenza a trazione del calcestruzzo, nascono delle fessure, per cui le tensioni vengono trasferite alle barre d'acciaio: gli spostamenti del calcestruzzo u_c , e quelli dell'acciaio u_s , sono in generale diversi tra due fessure successive lungo la lunghezza di trasferimento l .

A causa degli spostamenti relativi $s = u_s - u_c$, nascono delle tensioni di aderenza tra calcestruzzo e acciaio. L'entità di tali tensioni dipende principalmente dalla superficie della barra d'acciaio, oltre che dalla resistenza del calcestruzzo e da altri fattori che verranno analizzati successivamente.

Tra due fessure consecutive, lungo la lunghezza di trasmissione l , una parte della tensione sviluppata nella barra d'acciaio è trasferita al calcestruzzo, inducendo un effetto irrigidente, chiamato *tension stiffening*.

Nel corso degli anni molteplici sono stati i tentativi di studiare il fenomeno, nonché di schematizzarlo e modellarlo.

Soprattutto, come già accennato, molteplici sono le sperimentazioni circa le barre ad aderenza migliorata, piuttosto poche, a confronto, quelle sulle barre lisce, il che costituisce un problema dal momento che le seconde giocano un ruolo più importante sulla risposta strutturale soprattutto degli edifici esistenti, e che il comportamento tra le due è molto diverso.

Il fenomeno della perdita di aderenza tra barre e calcestruzzo verrà di seguito trattato sia per le barre ad aderenza migliorata che per le barre lisce, e le motivazioni sono essenzialmente due (come già accennato): da un lato, il fenomeno in sé è stato principalmente studiato per le barre ad aderenza migliorata, dall'altro, nonostante i due comportamenti siano molto diversi, si vuole sottolineare che le informazioni in termini di modellazione presenti in letteratura per le barre lisce sono piuttosto scarse, a differenza del primo caso in cui moltissimi sono i modelli analitici e numerici descrittivi del comportamento.

2.2.1 Barre ad aderenza migliorata

2.2.1.1 Comportamento monotono delle tensioni di aderenza per le barre ad aderenza migliorata

Il comportamento dell'aderenza per le barre nervate è una combinazione di:

- adesione;
- resistenza dovuta alle nervature;

- attrito;

L'adesione è relazionata alla resistenza a taglio offerta dall'interfaccia acciaio-calcestruzzo e, soprattutto, dai legami chimici.

Le forze di contrasto perpendicolari alle nervature, nascono quando la barra è in carico e vorrebbe sfilarsi. In questa fase sorgono fenomeni di microfessurazione e di microschiacciamento del calcestruzzo in prossimità delle nervature.

L'attrito si genera tra due nervature successive.

Sotto carichi monotonici, due sono le tipiche possibilità di rottura.

La prima è lo sfilamento della barra, il cosiddetto "pull-out", e si verifica quando il calcestruzzo che circonda la stessa è molto confinato: esso si rompe immediatamente a causa delle elevate forze di taglio presenti. Tale rottura, essenzialmente dipende dalla resistenza del calcestruzzo e dalla geometria della barra.

Il secondo tipo di rottura, noto in letteratura come "splitting of the concrete cover", imputata al fatto che il copriferro è insufficiente (affinchè si abbia il pull out della barra), consiste invece nella perdita di quest'ultimo.

In tal caso la rottura avviene per propagazione delle tensioni di trazione radiali dalla barra al calcestruzzo, che dipende essenzialmente dal numero di barre e dalla loro configurazione all'interno dell'elemento strutturale.

Sotto bassi carichi ciclici il comportamento dell'aderenza è simile al monotono mentre, per cicli elevati si deve tenere in conto dei fenomeni di fatica sia dell'acciaio che del calcestruzzo.

Poiché, essenzialmente, le tensioni di aderenza dipendono dagli scorrimenti relativi acciaio calcestruzzo, in genere è così che il fenomeno viene descritto.

In Figura 20, è riportato l'andamento delle tensioni di aderenza in funzione degli scorrimenti, in una prova di pull-out.

Gli andamenti, sono dovuti a Eligehausen et al. [3] e sono estremamente interessanti perché ogni curva dipende dalla zona dell'elemento considerata: in particolare, dal grado di confinamento offerto dal calcestruzzo che circonda la barra e dallo stato tensionale in cui esso si trova (compressione o trazione). Nello specifico, in Figura 20, si indica con "zona confinata" la parte tra due nervature successive, e con zona "non confinata a trazione o a compressione", la parte tirata o spinta.

E evidente come il calcestruzzo sebbene non confinato che si trova nella zona compressa offre maggiore resistenza all'espulsione della barra, mentre il calcestruzzo non confinato, ma in trazione

(prossimo alla zona di applicazione della forza di trazione), decisamente offre poca resistenza allo sfilamento.

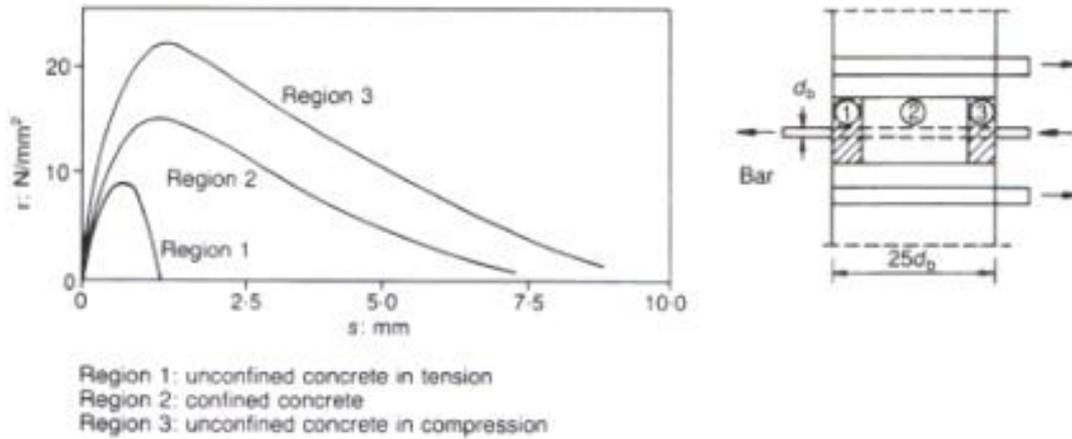


Figura 20: Andamento monotono delle tensioni di aderenza in funzione degli scorrimenti relativi acciaio calcestruzzo (Eligehausen et al.[3])

Una delle espressioni analitiche più utilizzata nella pratica, adottata dalla normativa CEB Model Code 1990, è quella proposta dallo stesso Eligehausen: tale espressione analitica va considerata naturalmente come una curva “media”, dal momento che i fenomeni in gioco sono molteplici.

Essa consiste in un ramo iniziale non lineare descritto dall’equazione :

$$\tau = \tau_1 \cdot \left(\frac{s}{s_1} \right)^\alpha \quad (2.1)$$

valida nel tratto $s \leq s_1$; tale ramo è riferito alla fase in cui le nervature penetrano all’interno della pasta cementizia, e si verificano fenomeni di schiacciamento locale e rottura per taglio del calcestruzzo tra due nervature successive.

L’equazione (1) è seguita da un plateau:

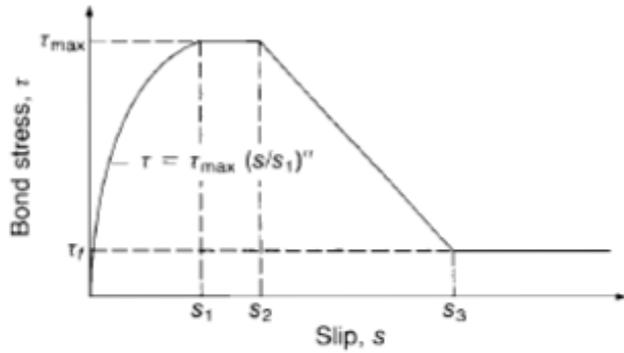
$$\tau = \tau_1 \quad (2.2)$$

l’espressione (2.2) è valida per $s_1 \leq s \leq s_2$, ed è dovuta a una certa resistenza imputata alla presenza di armature trasversali, quindi solo nel caso di calcestruzzo confinato.

Per $s \geq s_2$, τ decresce linearmente fino al valore ultimo di resistenza attritiva τ_3 , cui corrisponde il valore di scorrimento s_3 . Quest’ultimo valore di scorrimento è pari proprio alla distanza tra due nervature successive (è infatti, il massimo valore di scorrimento possibile).

Ovviamente, come accennato prima, la forma di questa legge viene mantenuta sempre, indipendentemente dalla zona in cui la barra è tirata o spinta. Tuttavia sono forniti i valori di s_1 , s_2 ,

s_3 , α , τ_{\max} per le regioni non confinate (rottura per splitting del copriferro) e per le regioni confinate (fallimento per pull-out), come riportato in Figura 21.



	Column 2	Column 3	Column 4	Column 5
	Unconfined concrete*		Confined concrete†	
	Good bond conditions	All other bond conditions	Good bond conditions	All other bond conditions
s_1	0.6 mm	0.6 mm	1.0 mm	1.0 mm
s_2	0.6 mm	0.6 mm	3.0 mm	3.0 mm
s_3	1.0 mm	2.5 mm	Clear rib spacing	Clear rib spacing
α	0.4	0.4	0.4	0.4
τ_{\max}	$2.0\sqrt{f_{t,k}}$	$1.0\sqrt{f_{t,k}}$	$2.5\sqrt{f_{t,k}}$	$1.25\sqrt{f_{t,k}}$
τ_f	$0.15\tau_{\max}$	$0.15\tau_{\max}$	$0.40\tau_{\max}$	$0.40\tau_{\max}$

*Failure by splitting of the concrete.

†Failure by shearing of the concrete between the ribs.

Figura 21: Formulazione analitica tensioni di aderenza-scorrimenti per carichi monotonici (CEB '90)

2.2.1.2 Comportamento ciclico delle tensioni di aderenza per le barre ad aderenza migliorata

Per le barre ad aderenza migliorata, durante i carichi ciclici, si verifica un progressivo deterioramento dell'aderenza stessa, che è accompagnata da un incremento degli scorrimenti: questo è causato dall'aumento delle microfessure e dello schiacciamento del calcestruzzo in prossimità delle nervature. Tutto ciò comporta una riduzione della tensione ultima a cui si giungerebbe nel caso di nel caso di carico monotono.

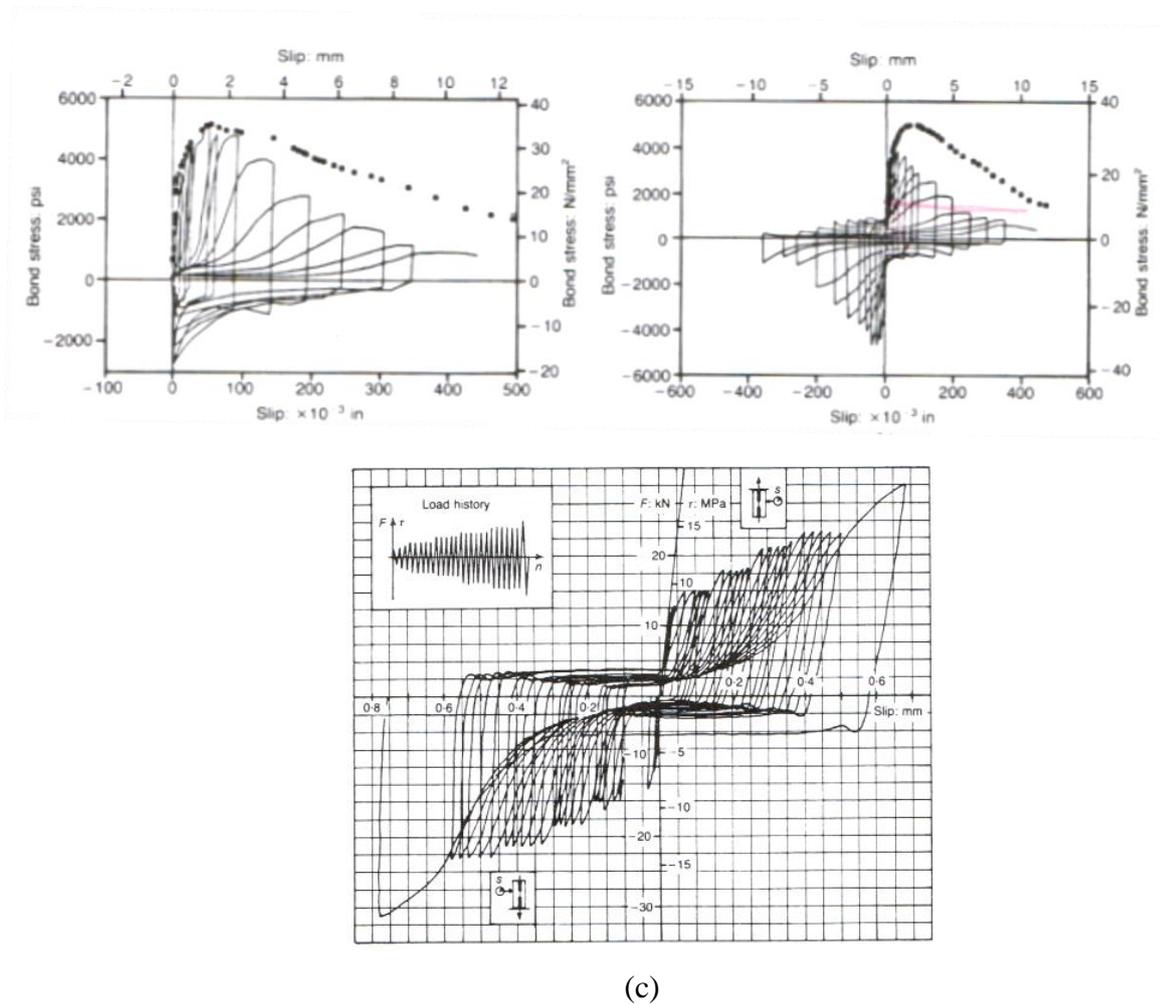
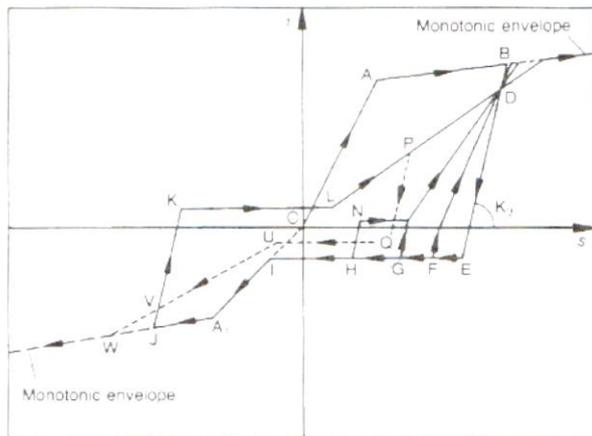


Figura 22: Comparazione tra monotono (tratteggiato) e ciclico: (a) senza inversione del segno degli scorrimenti (b) con inversione), Hawkins et al[14]; Balázs [15]

Molteplici sono stati gli studi per comprendere il comportamento ciclico delle barre ad aderenza migliorata, e spesso si è giunti a formulazioni tuttora di grande impiego. Di seguito, vengono brevemente riportati in rassegna gli autori e le formulazioni cui si è giunti, Figura 23:



$$\begin{aligned} \tau_D &= \beta \tau_B & \tau_K &= \alpha \tau_J & s_L &= (s_B + s_J)/2 \\ \tau_V &= \beta \tau_J & \tau_N &= \alpha \tau_H & s_U &= (s_J + s_P)/2 \\ \tau_E &= \alpha \tau_B & \tau_Q &= \alpha \tau_P & s_G &= s_B/2 \end{aligned}$$

$$K_3 = 400 \text{ N/mm}^3$$

$$\alpha = 0.18$$

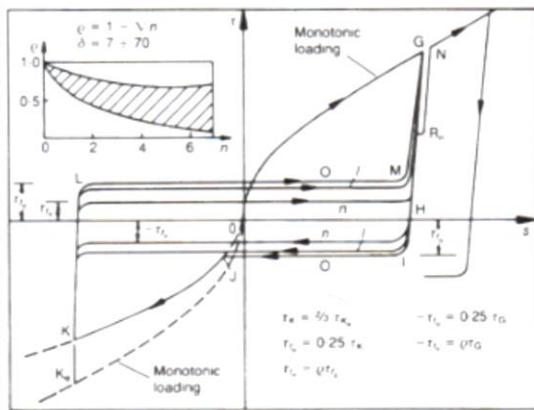
$$\beta = 0.9$$

$$\beta = 0.9 - 0.44 (s - 0.05)$$

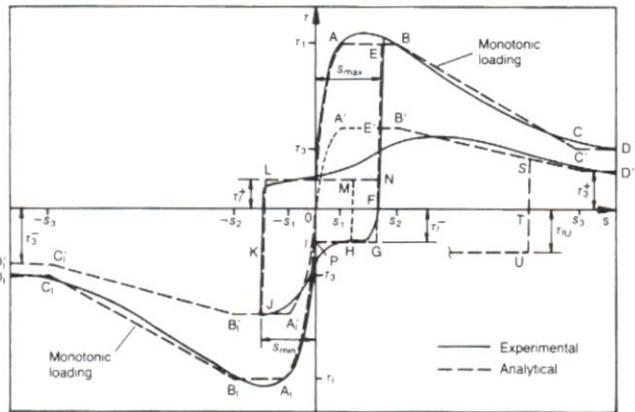
$$s \leq 0.05 \text{ mm}$$

$$0.05 \leq s \leq 0.5 \text{ mm}$$

(a)

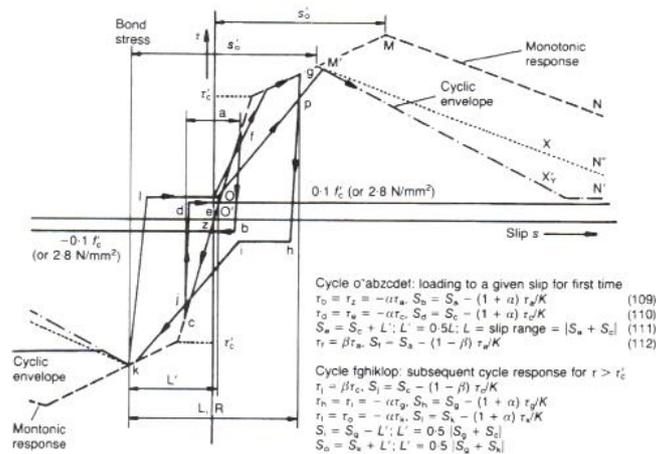


$$\begin{aligned} r_a &= 0.5 r_{a0} & -r_b &= 0.25 r_d \\ r_b &= 0.25 r_a & -r_c &= \rho r_d \\ r_c &= \rho r_a \end{aligned}$$



(c)

(b)



(d)

Figura 23: Modelli ciclici analitici del legame tensioni di aderenza- scorrimenti: (a) Morita and Kaku [11]; (b) Tassios [12] ;(c) Ciampi et al.[13];(d) Hawkins[14]

Il comportamento ciclico delle barre ad aderenza migliorata è stato studiato in maniera dettagliata da Eligehausen et al [3].

Nella fase di carico, la relazione è la medesima che si assume nel caso monotono (ramo OABCD in Figura 24) :

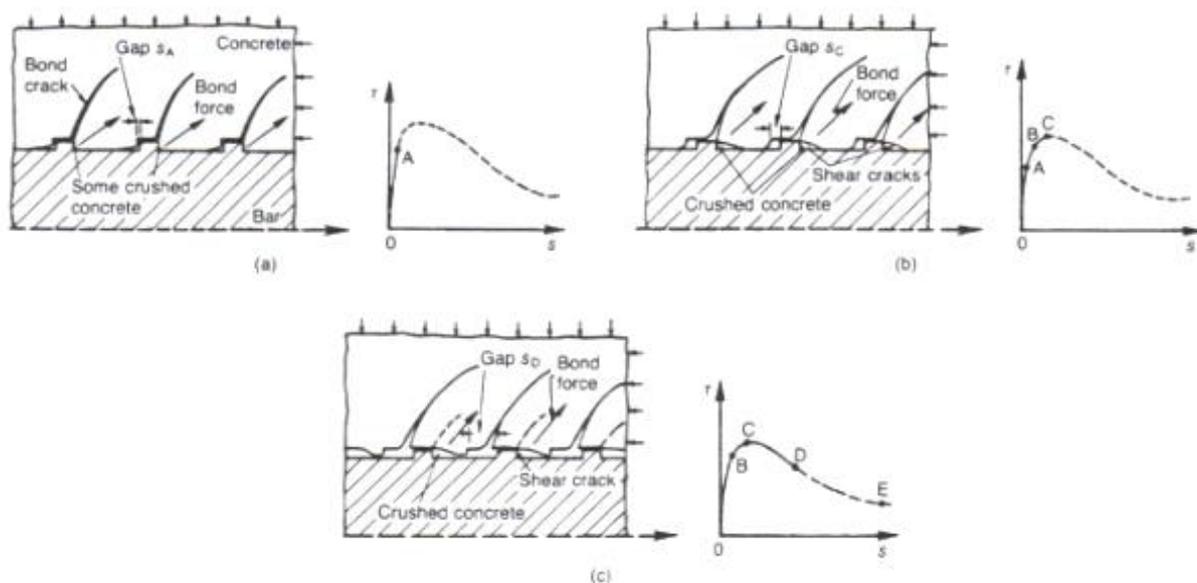


Figura 24: Meccanismo di aderenza per barre nervate in caso monotono

Per bassi valori del carico (punto A), iniziano a propagarsi le fessure inclinate a partire dalla parte superiore della nervatura; incrementando il carico, gli schiacciamenti localizzati del calcestruzzo in prossimità delle nervature stesse, producono una riduzione della tangente alla curva (punto B). Quando la resistenza massima viene raggiunta, le chiavi di taglio vengono espulse, formando un cono (linea di applicazione della forza di aderenza) di lunghezza pari a 4-5 volte l'altezza della nervatura, inclinato di 45° .

Successivamente le fessure a taglio del calcestruzzo raggiungono la nervatura adiacente (punto D), le tensioni di aderenza iniziano a decadere e nel momento in cui lo scorrimento ha raggiunto il valore pari allo spazio tra due nervature successive, rimane attiva la componente attritiva (punto E).

Sotto carichi ciclici, il ramo iniziale segue il comportamento monotono appena descritto, ma lo scarico dipende molto dal livello di scorrimento raggiunto. A questo proposito vengono introdotti tre differenti modelli per descrivere il fenomeno, a seconda delle tre differenti situazioni che possono verificarsi, Figura 25.

Nel primo caso (a), l'inversione del carico avviene prima che ci sia la formazione di fessure inclinate: questo comporta una rigidità del tratto di scarico (A-F) sostanzialmente nulla, perché solo una parte dello scorrimento è causata da deformazioni inelastiche dovute alla fessurazione del calcestruzzo.

Successivamente, quando viene attivato lo scorrimento nella direzione opposta, si attiva il contributo attritivo (ramo orizzontale FH): dal momento che la superficie della barra è liscia in questo tratto (l'attrito interviene tra due nervature successive), la pendenza del ramo pseudorizzontale è appunto molto piccola. Il ramo di ricarico è molto simile al ramo di scarico, ad eccezione del fatto che il punto in cui l'aderenza inizia a ricrescere è un pò spostato verso destra rispetto all'origine (punto L), effetto causato dalle precedenti microfessure e schiacciamenti locali del calcestruzzo creati in prossimità delle nervature. Il ramo di carico seguita comunque ad attestarsi sul monotono.

Il secondo caso (b), riguarda l'eventualità in cui lo scarico avvenga in prossimità del picco, e cioè quando le fessure inclinate si sono ormai formate. Va osservato che in fase di inversione di carico se ne creano oltretutto di nuove nella direzione opposta: la combinazione di questi due fenomeni in entrambe le direzioni comporta un rigidezza più bassa sia in fase di scarico (HI) sia in fase di ricarico. In particolare, il ramo di ricarico (IKLMN), presenta una rigidezza e resistenza complessiva minore rispetto ai precedenti, poiché la porzione di calcestruzzo non fessurata rimasta attiva tra le nervature viene a rompersi per taglio.

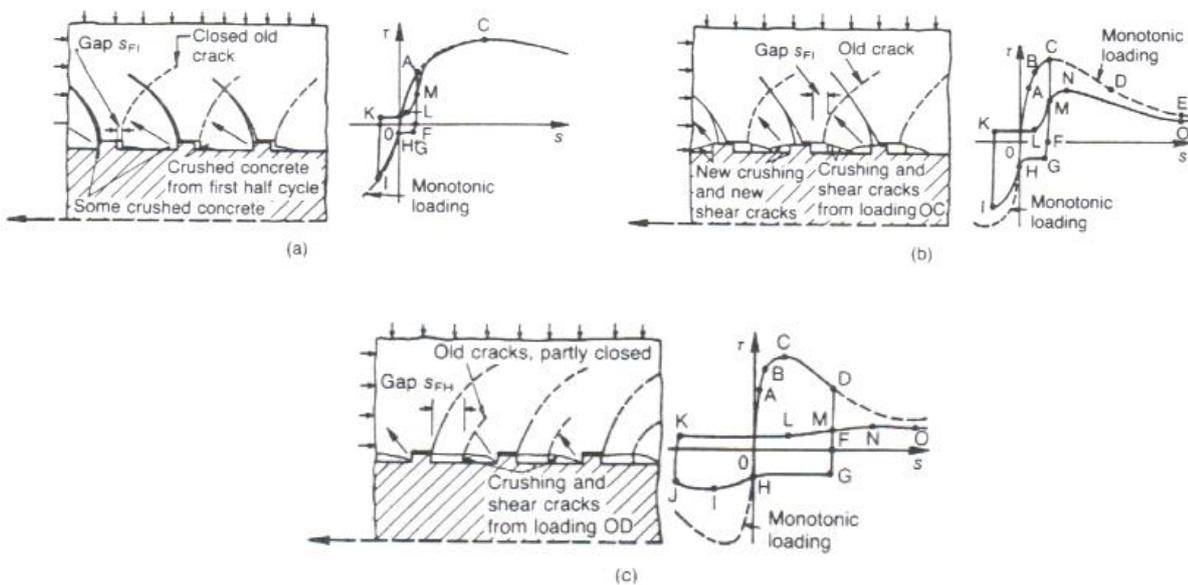


Figura 25: Comportamento delle tensioni di aderenza sotto carichi ciclici

Per quanto concerne, infine, il CEB FIP, esso non fornisce molte indicazioni sul comportamento ciclico dell'aderenza, si limita infatti ad indicare la pendenza del ramo di scarico, Figura 26, valida tra l'altro solo qualora esso avvenga a partire dal ramo di carico o dal plateau. Tale pendenza, è indipendente dal valore di scorrimento, e presenta un valore medio di 200 N/mm^3 .

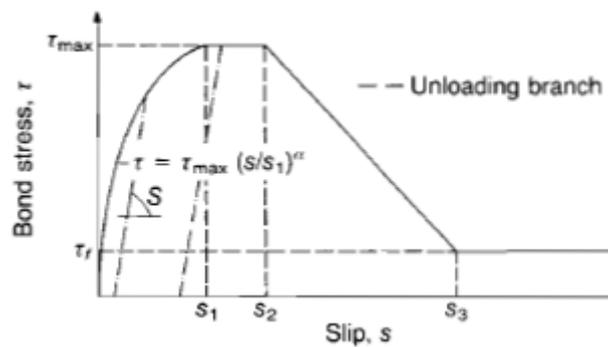


Figura 26: Ramo di scarico della relazione τ - u

2.2.2 Barre lisce

2.2.2.1 Comportamento monotono delle tensioni di aderenza per le barre lisce

Come già accennato, i tests sulle barre lisce sono decisamente in monoranza rispetto a quelli delle barre ad aderenza migliorata.

Il primo ad avere effettuato una vera e propria campagna sperimentale fu Abrams [16], il quale effettuò 1500 tests in controllo di spostamenti: il risultato fu, oltre ai dati ottenuti, una prima interpretazione del meccanismo che regola il fenomeno.

Il comportamento delle barre lisce differisce da quello delle barre ad aderenza migliorata, essenzialmente per la mancanza delle nervature. Non essendoci queste che si oppongono, il fenomeno è prevalentemente attribuito alla resistenza che offrono le asperità tra le due superfici di contatto (acciaio e calcestruzzo) e alla resistenza attritiva.

Abrams, interpretò così il meccanismo: il primo fenomeno a intervenire fino al valore di picco della tensione di aderenza e per piccolissimi valori di scorrimenti relativi tra i due materiali, è l'adesione (di natura chimica) che costituisce il 50-60% della resistenza massima offerta dal legame; il fenomeno è seguito dal meccanismo attritivo statico: quando si raggiunge il massimo contributo offerto dalle due resistenze, il fenomeno inizia a degradare seguendo la sola resistenza residua attritiva.

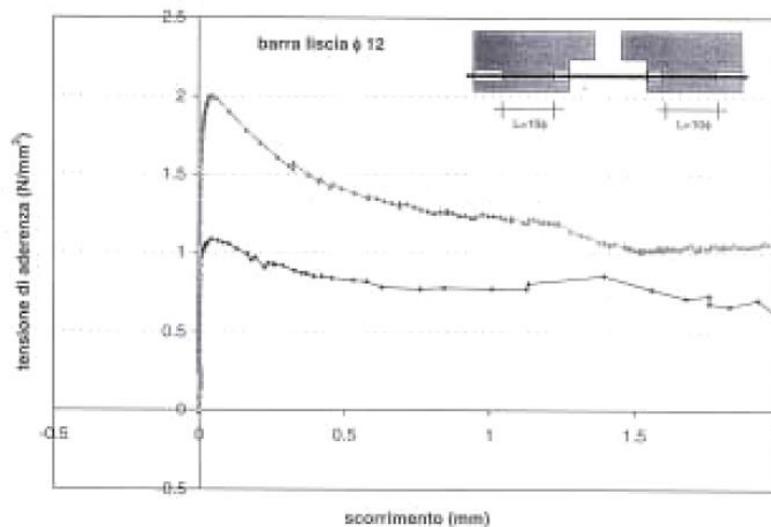


Figura 27: Prova di pull-out su barra liscia

Il fenomeno viene poi meglio descritto da Stoken e Sozen [17], che approfondiscono meglio le fasi già individuate da Abrams: la prima fase, per bassi valori di scorrimenti (campo elastico), è dovuta essenzialmente ancora una volta all'adesione che, come già detto, è un fenomeno di natura chimica, dovuta essenzialmente allo stato di ossido che ricopre la barra. Successivamente, un incremento di resistenza è offerto dalle chiavi a taglio del calcestruzzo, generate dalla penetrazione della pasta cementizia all'interno delle microasperità della superficie della barra (micro-interlocking phase). Il picco di resistenza del legame tensioni-scorrimenti è dato dalla somma di questi due contributi (prevalentemente adesione), mentre man mano che lo scorrimento aumenta, il calcestruzzo a contatto con la barra si fessura, determinando un degrado della rigidità dell'acciaio. A questo punto, il fenomeno dell'interlocking decresce gradualmente, cosichè solo la nascita della componente attritiva può intervenire per giungere al massimo della resistenza.

Con il crescere dello scorrimento, anche la componente attritiva inizia a degradarsi, fino ad attestarsi a un valore di resistenza residua pari circa al 30% della massima resistenza raggiunta.

Ovviamente, vale la pena specificare sempre che, il fenomeno, che è già per sua natura estremamente complesso, non è peraltro uniforme su tutta la barra, per cui tali valori di resistenza vanno sempre intesi come valori medi raggiunti sulla barra stessa.

Stante ciò, il meccanismo più probabile è quello di pull-out: infatti, è molto più semplice sfilare una barra liscia dal calcestruzzo rispetto alle barre ad aderenza migliorata, soprattutto in presenza di azioni cicliche. Nel caso di comportamento monotono, dunque, il comportamento delle barre lisce segue leggi completamente diverse dalle sorelle nervate.

CEB FIP '90

In particolare, una formulazione molto usata per la descrizione del comportamento monotono delle barre lisce, è ancora una volta, fornita dal CEB FIP '90 (e, successivamente CEB FIP 2010) che ripropone le formule di Eligehausen per le barre ad aderenza migliorata, dando tuttavia validità solo ad alcuni rami della curva, ossia l'equazione:

$$\tau = \tau_1 \cdot \left(\frac{s}{s_1} \right)^\alpha \quad (2.3)$$

nel tratto $0 \leq s \leq s_1$, in cui α è pari a 0.5

mentre nel tratto $s \geq s_1$, si ha:

$$\tau = \tau_1 \quad (2.4)$$

Ossia, il comportamento post picco è governato essenzialmente dalla resistenza attritiva.

In tal modo, le equazioni per la valutazione dell'andamento monotono delle barre lisce assumono una forma semplificata rispetto al caso delle barre ad aderenza migliorata.

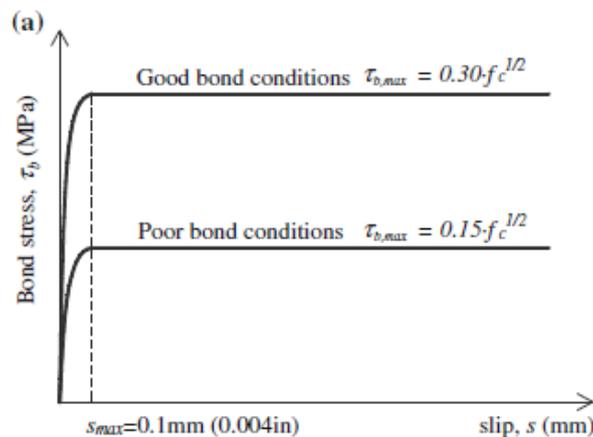


Figura 28: Andamento delle tensioni di aderenza per le barre lisce secondo CEB FIP

	Cold drawn wire		Hot rolled bars	
	Good bond conditions	All other bond conditions	Good bond conditions	All other bond conditions
$s_1 = s_2 = s_3$	0.01 mm	0.01 mm	0.1 mm	0.1 mm
α	0.5	0.5	0.5	0.5
$\tau_{max} = \tau_f$	$0.1\sqrt{f_{ck}}$	$0.05\sqrt{f_{ck}}$	$0.3\sqrt{f_{ck}}$	$0.15\sqrt{f_{ck}}$

Figura 29: Parametri per definire il legame tensioni tangenziali di aderenza – scorrimenti per le barre lisce

In particolare secondo il CEB FIP, i valori riportati nella tabella in Figura 13 sono valevoli sia nel caso di calcestruzzo confinato che di calcestruzzo non confinato.

E' bene tuttavia tenere a mente che la differenza tra i valori di aderenza nelle differenti sperimentazioni è piuttosto importante (soprattutto per bassi valori di scorrimento), fino a dispersioni del 30%. Questo purtroppo dipende dalle condizioni di prova, in particolare dalle differenti tecniche di misurazione, dalla velocità di applicazione del carico, ed infine dall'eterogeneità del calcestruzzo e della barra a contatto.

In conclusione, il legame descritto dal CEB FIP è molto semplice rispetto al medesimo adottato per le barre ad aderenza migliorata, e trascura completamente il contributo "di picco" dovuto ai fenomeni di adesione chimica (50-60%) e alla rugosità della superficie di contatto (microasperità).

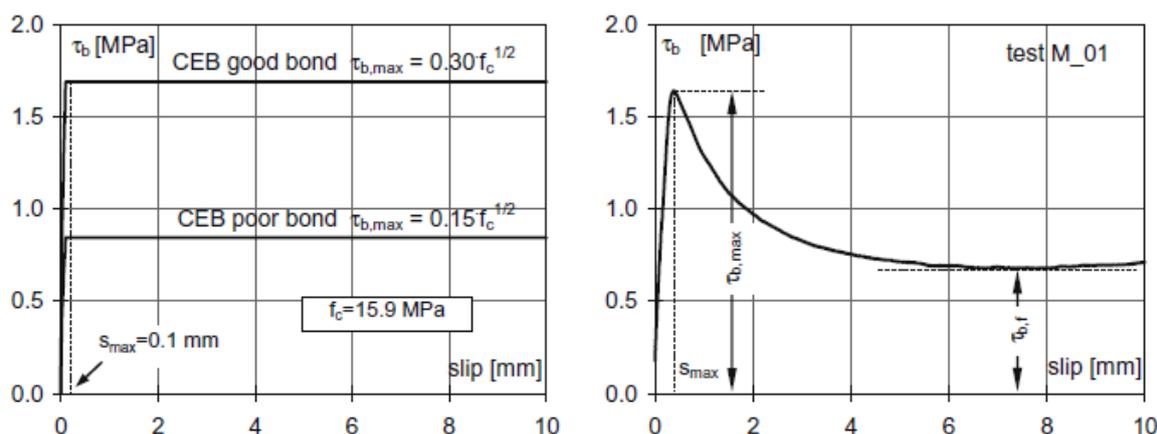


Figura 30: Modello analitico proposto da CEB FIP (sinistra), confrontato con la prova sperimentale reale (destra)

Confrontando i comportamenti dei due tipi di barra, è interessante ragionare sul ramo di softening, che ha natura completamente diversa, se ci riferiamo alle barre lisce o alle barre ad aderenza migliorata: nel primo caso il softening è dovuto al degrado di tipo attritivo tra barre e calcestruzzo, mentre nel secondo caso la perdita di aderenza è più traumatica e dovuta alla rottura dei micro cunei di calcestruzzo compresso che si creano tra le nervature della barra.

I valori finali del punto in cui si ha lo scorrimento ultimo per le barre ad aderenza migliorata dipendono da molteplici fattori come l'area delle nervature, ma sono sostanzialmente valori di rottura e di perdita di aderenza pressoché totale.

Recenti campagne sperimentali, effettuate da Varum et al.[18], Verderame et al.[19][20], hanno contribuito a far luce sul comportamento delle barre lisce, i primi caratterizzandolo da un punto di vista prevalentemente monotono, i secondi da un punto di vista sia monotono che ciclico.

Verderame et al.

I test di pull out effettuati da Verderame et al., confermano che il comportamento attritivo nelle barre lisce sia prevalente, e che il valore di picco tensionale non solo delle volte è poco differente dal valore attritivo residuo, ma degrada molto velocemente (questo effetto è particolarmente evidente nel caso di ricarco ciclico), Figura 32.

In seguito a questa campagna sperimentale, è stata formulata una relazione analitica per descrivere il legame tensioni di aderenza - scorrimenti, che si differenzia dal CEB FIP'90, decidendo di tenere in conto il raggiungimento di una resistenza di picco, e di descrivere in maniera accurata il ramo di softening, Figura 31 :

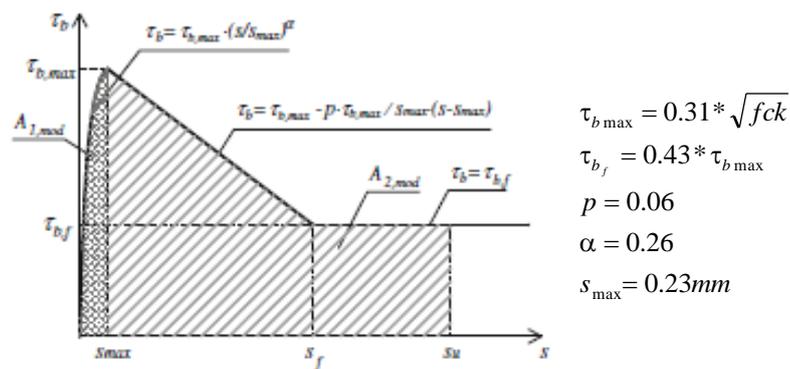


Figura 31: Formulazione analitica proposta da Verderame et al.

In Figura 32, sono riportati, in particolare, i risultati della campagna sperimentale condotta, rappresentati da curve monotone tensioni di aderenza - scorrimenti, e il relativo confronto con il modello analitico elaborato, di cui si parlerà nel dettaglio nel Capitolo III.

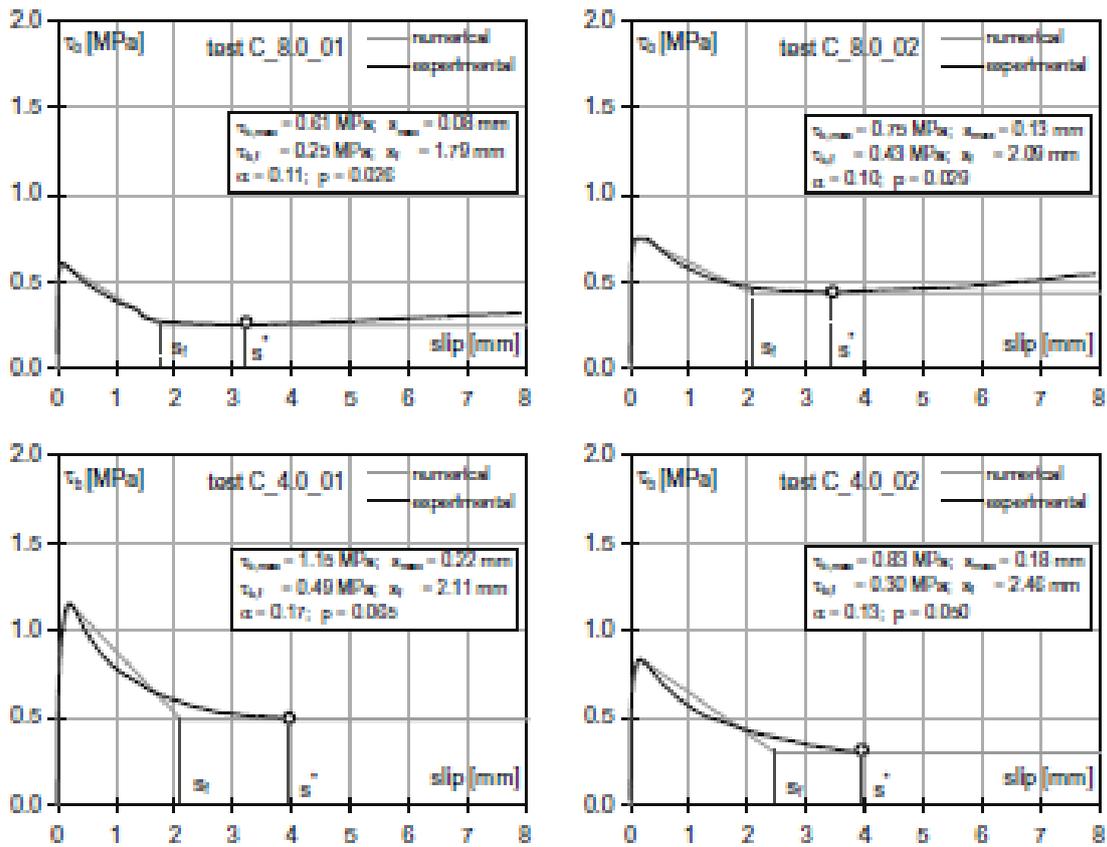


Figura 32: Campagna sperimentale Verderame et al.: confronto tra modello analitico proposto e risultato numerico

Varum et al.

Varum et al. hanno condotto una campagna sperimentale simile ai precedenti, basata su diverse prove di pull out (Figura 33) variando le caratteristiche delle barre e del calcestruzzo: la novità introdotta dalla formulazione analitica monotona che segue all'analisi parametrica, consiste nel fatto che non tiene in conto della sola resistenza del calcestruzzo, ma anche di altri fattori, quali ad esempio le caratteristiche geometriche e meccanica delle barre e del provino.

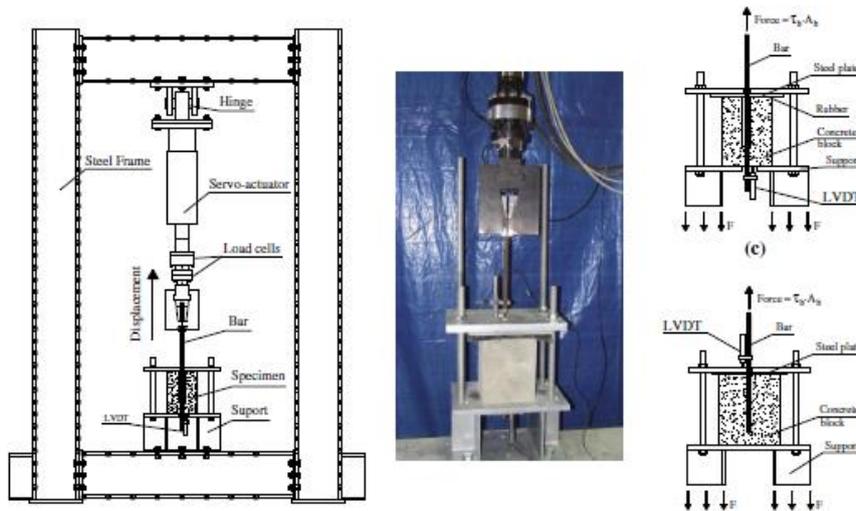


Figura 33: Varum et al.: prove di Pull-out

La formulazione che ne deriva, è riportata in Figura 34 con le relative equazioni:

$$\tau_b = a \cdot s^3 + b \cdot s^2 + c \cdot s + d \quad (2.5)$$

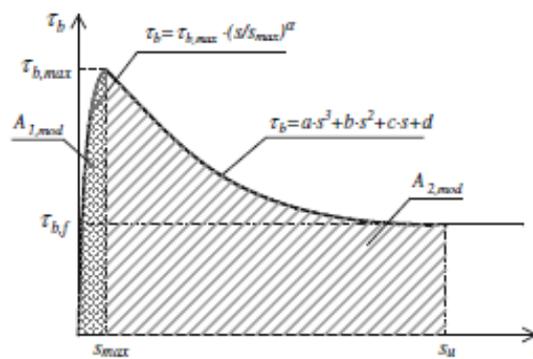


Figura 34: Formulazione analitica proposta da Varum

Di seguito, è riportato inoltre il confronto effettuato da Varum tra i risultati sperimentali della campagna condotta, il modello di aderenza CEB-FIP, il modello di aderenza proposto da Verderame.

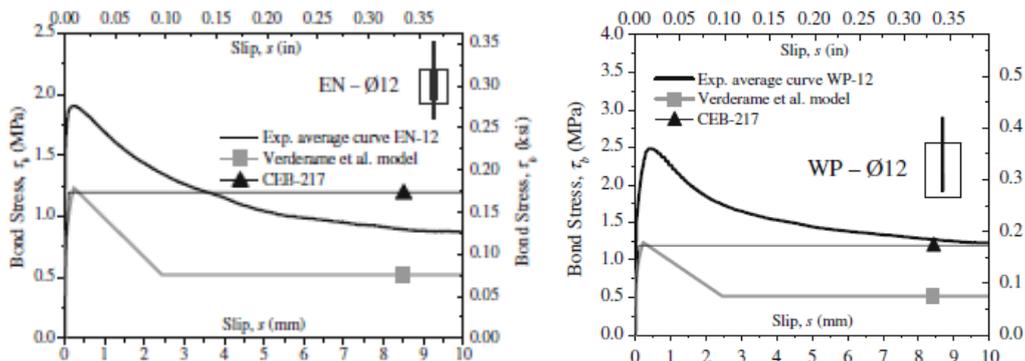


Figura 35: Confronto tra sperimentale e numerico (CEB-FIP e Verderame) effettuato da Varum et al.

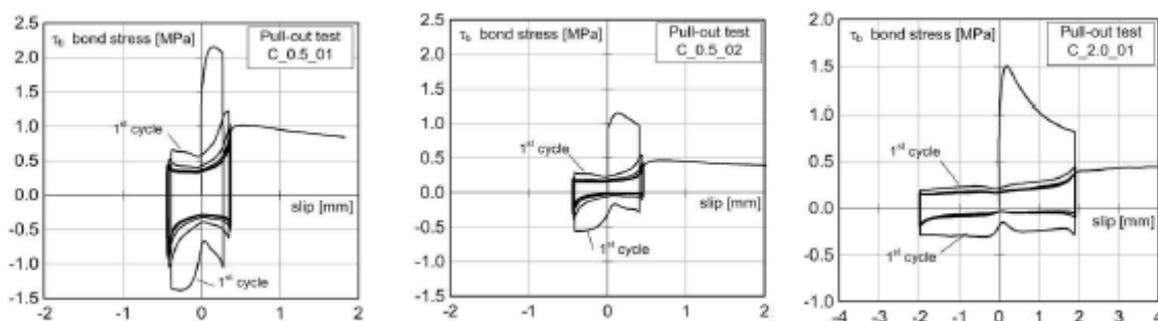
Il modello proposto da Varum, si presenta abbastanza completo da un punto di vista analitico, sebbene sia di sola natura monotona, ma presenta delle limitazioni applicative, essendo figlio di una regressione su un numero limitato di dati sperimentali: in particolare è valido per classi di calcestruzzo C12/15-C16/20 e per le barre il cui diametro sia compreso tra 10 e 16 mm.

2.2.2.2 Comportamento ciclico delle tensioni di aderenza per le barre lisce

Il vero problema della modellazione dell'aderenza per le barre lisce è, tuttavia, la descrizione del comportamento ciclico delle tensioni di interfaccia: se infatti, per quanto riguarda il comportamento monotono diversi sono i modelli a disposizione, per quanto riguarda il comportamento ciclico il contesto è veramente carente.

Un'ipotesi basata su una delle precedenti campagne sperimentali menzionate, è stata proposta da Verderame et al.. In Figura 36, sono riportati alcuni dei risultati in termini di tensioni-scorrimenti ottenuti dalla medesima sperimentazione, mentre in Figura 37 sono riportati i risultati relativi al decadimento della tensione massima rispetto alla tensione attritiva.

E' impressionante notare le differenze comportamentali con le barre nervate: è particolarmente evidente sia la brusca perdita di resistenza massima (offerta nella prima fase di carico, individuata nel picco τ_{max}) evidente già dai primissimi cicli, sia il preponderante contributo residuale attritivo.



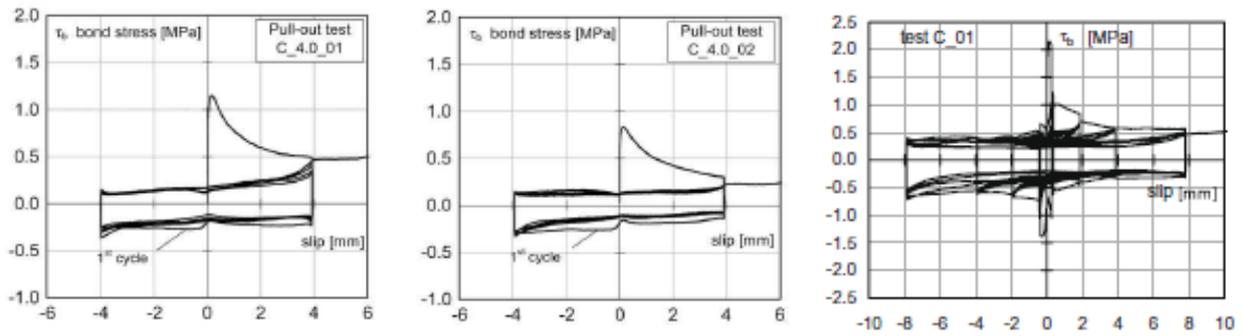


Figura 36: Comportamento ciclico delle tensioni di aderenza in funzione degli scorrimenti per le barre lisce

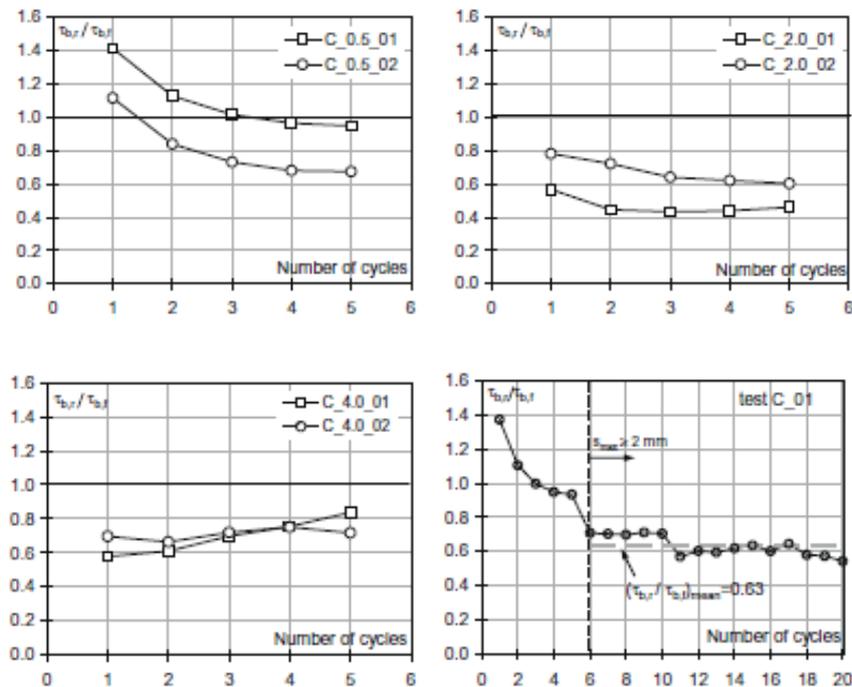


Figura 37: Decadimento della tensione massima di aderenza fino alla tensione residua attrittiva

Da tale campagna sperimentale è derivata una formulazione analitica, che tiene conto sia del picco di tensione (τ_{max}), sia del comportamento ciclico prevalentemente di natura attrittiva.

Il modello è da considerare ovviamente una semplificazione di quello che avviene nella realtà, perché come già accennato all'inizio del paragrafo, i test forniscono risultati con grandi dispersioni, per cui riprodurre il comportamento reale è veramente complesso.

In fase di carico, il legame segue la curva monotona (ramo OAB), ma dal momento in cui avviene lo scarico, questo tratto presenta una rigidità pressappoco costante, fino al valore massimo $\tau_{b,c}$, (ramo BC). Tale valore si mantiene costante fino a D, ossia fino a quando la barra non è tornata nella posizione iniziale e il valore di scorrimento è quindi nullo, per poi incrementare nuovamente la tensione di aderenza al valore residuo $\tau_{b,r}$ (ramo DEF). In seguito a una nuova inversione dello

scorrimento la curva percorre il ramo FGH, mantenendo costante il valore di tensione residua Figura 38 (a). In Figura 38 (b), viene invece riportato il caso di nuova inversione di ciclo a partire dal punto H, che segue il ramo HLMN.

In generale, nei cicli di scarico e ricarico sembrerebbe che non si raggiunga la tensione massima attritiva ma una sua frazione: ad ogni modo, ciò che caratterizza il legame sono principalmente due parametri, ossia la resistenza attritiva residua $\tau_{b,r}$ e la resistenza ciclica residua $\tau_{b,c}$, che comunque vanno intesi come quota parte della resistenza attritiva $\tau_{b,f}$ (ramo monotono).

Tutte le tensioni chiave del legame sono regolate dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
 \tau_{b,max} &= 0.31 \cdot \sqrt{fc} \\
 \tau_{b,f} &= 0.13 \cdot \sqrt{fc} \\
 \tau_{b,r} &= 0.09 \cdot \sqrt{fc} \\
 \tau_{b,c} &= 0.05 \cdot \sqrt{fc}
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

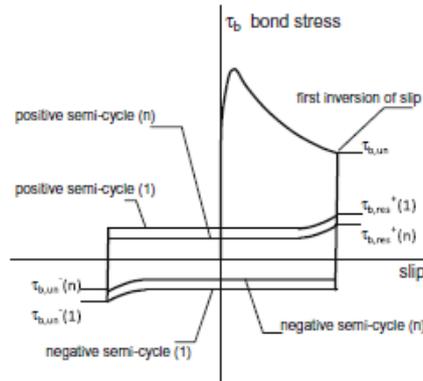
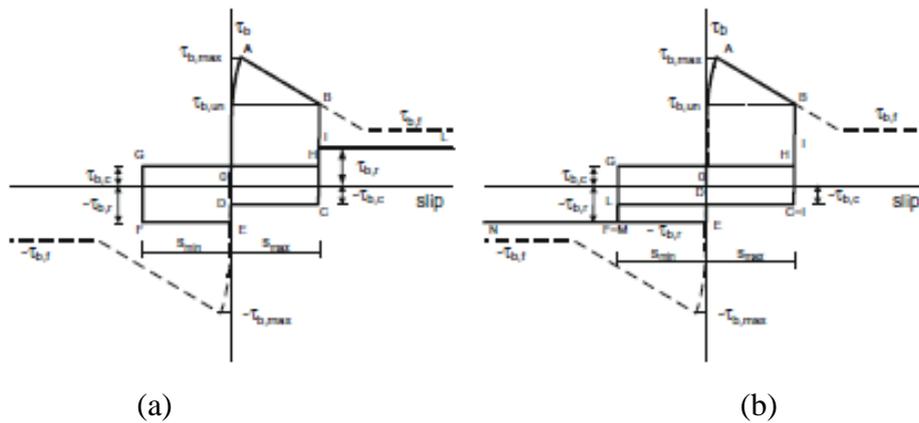


Figura 38: Modello proposto da Verderame et al. per il comportamento ciclico delle tensioni di aderenza per barre lisce

3 MODELLAZIONE DEL FENOMENO DELLA PERDITA DI ADERENZA NELLE ANALISI FEM

La perdita di aderenza tra barre e calcestruzzo, rappresenta una problematica piuttosto importante nell'ambito della valutazione della risposta strutturale degli edifici soggetti ad azioni cicliche.

In particolare, nel capitolo II, è stata sottolineata l'importanza del fenomeno sulla risposta di edifici esistenti con barre lisce, scarsi dettagli costruttivi e materiali impiegati scadenti.

Data l'importanza del fenomeno, sin dagli anni '60, e in particolare, in concomitanza con lo sviluppo dei software agli elementi finiti, molteplici sono stati i tentativi di formulazione di modelli, di tecniche o addirittura di elementi finiti ad hoc, per tenere in conto del fenomeno nelle analisi non lineari delle strutture in c.a. (nuove ed esistenti).

Verranno di seguito passati in rassegna i principali modelli elaborati in questi decenni, con i relativi vantaggi e limiti, al fine di comprendere la genesi del modello di aderenza oggetto del presente lavoro di tesi.

Se infatti da un lato, molti di questi modelli, consentono una valutazione accurata del fenomeno suddetto, d'altro canto essi spesso risultano eccessivamente onerosi da un punto di vista computazionale, e consentono la valutazione della risposta strutturale solo per singoli elementi strutturali, non per edifici nella loro interezza.

Proprio per questa motivazione, nel 2012 è stato elaborato un modello semplificato di aderenza [21] che si configura, piuttosto, come un legame costitutivo "modificato", dell'acciaio ossia che tenga in conto della perdita di aderenza tra calcestruzzo e barre.

Tale modello è stato migliorato e completato nel lavoro di tesi, e verrà presentato nel paragrafo successivo.

Prima, però, per poter comprendere la necessità dell'introduzione del modello, e successive modifiche, è indispensabile analizzare la letteratura a riguardo e il contesto in cui esso trova collocazione: gli elementi finiti a fibre, a plasticità sia concentrata che diffusa.

3.1 Modellazione dell'aderenza tra acciaio-calcestruzzo

Diversi sono i modelli che descrivono il fenomeno della perdita di aderenza tra barre d'acciaio e calcestruzzo, nell'ambito dell'applicazione in software agli elementi finiti.

Dal 1960, circa, ad oggi, diversi autori si sono cimentati nell'elaborazione di suddetti modelli, diversi tra loro per tipologia, accuratezza e onere computazionale. In particolare, lo stato dell'arte si divide in due gruppi principali: i modelli solidi, utilizzabili per le analisi FEM di modelli continui bi e tri-

dimensionali, e i modelli monodimensionali, basati sulla teoria della trave e utilizzabili per le analisi di strutture con telai.

I modelli "continui", utilizzati per descrivere l'interazione tra barre longitudinali e calcestruzzo circostante sono tra i più dettagliati, tuttavia presentano un notevole onere computazionale, e in generale consentono realisticamente lo studio della risposta di soli elementi o sottostrutture in calcestruzzo armato. Tra questi, si annoverano: Kwak e Filippou (1995) e Lowes (1999).

Tuttavia, si può considerare un'ulteriore e importante sottodivisione di questi modelli: i modelli per gli elementi a plasticità concentrata e i modelli a plasticità diffusa.

3.1.1 Modelli di aderenza negli elementi a plasticità concentrata

I modelli a plasticità concentrata, come suggerisce stesso il nome sono tali da considerare le deformazioni inelastiche degli elementi in calcestruzzo armato, e in generale le non linearità, concentrate all'interno di zone ben precise dell'elemento strutturale. Per questo motivo, spesso il legame di aderenza tra acciaio e calcestruzzo è stato introdotto per mezzo di molle rotazionali non lineari, ad esempio all'estremità degli elementi strutturali, ove si pensano localizzate le deformazioni inelastiche.

Tra i modelli, più famosi in letteratura, impiegabili negli elementi a plasticità concentrata si annoverano Rubiano-Benavides (1998) [23] sulla base del modello di Alsiwat e Saatcioglu (1992) [27], Lowes e Altoonash (2003) [24], Mitra e Lowes (2007)[25], Sezen e Setzler (2008)[26].

Alsiwat e Saatcioglu (1992)

Il modello descrive una procedura analitica per la relazione monotona forza-deformazione di barre ancorate nel calcestruzzo, e fornisce una delle prime chiavi di lettura del fenomeno dal punto di vista della barra, seppure ancora grossolana. La procedura divide la deformazione delle barre in due contributi: una elastica e l'altra inelastica. Lungo la parte elastica della barra viene considerata una tensione di aderenza costante, mentre un contributo attritivo viene contemplato nella parte della barra ove avvengono le plasticizzazioni e quindi gli scorrimenti.

In sostanza, viene considerato un campo multilineare di deformazioni lungo la stessa, che può essere, a seconda della zona rispetto al punto di applicazione della forza, elastico oppure inelastico. In Figura 39, viene riportato lo stato tenso deformativo di una barra soggetta a trazione in cui si nota la differenza tra la zona a deformazioni elastiche e la zona dove le deformazioni sono inelastiche (plateau, incrudimento e cono di pullout), e la distribuzione delle tensioni di aderenza.

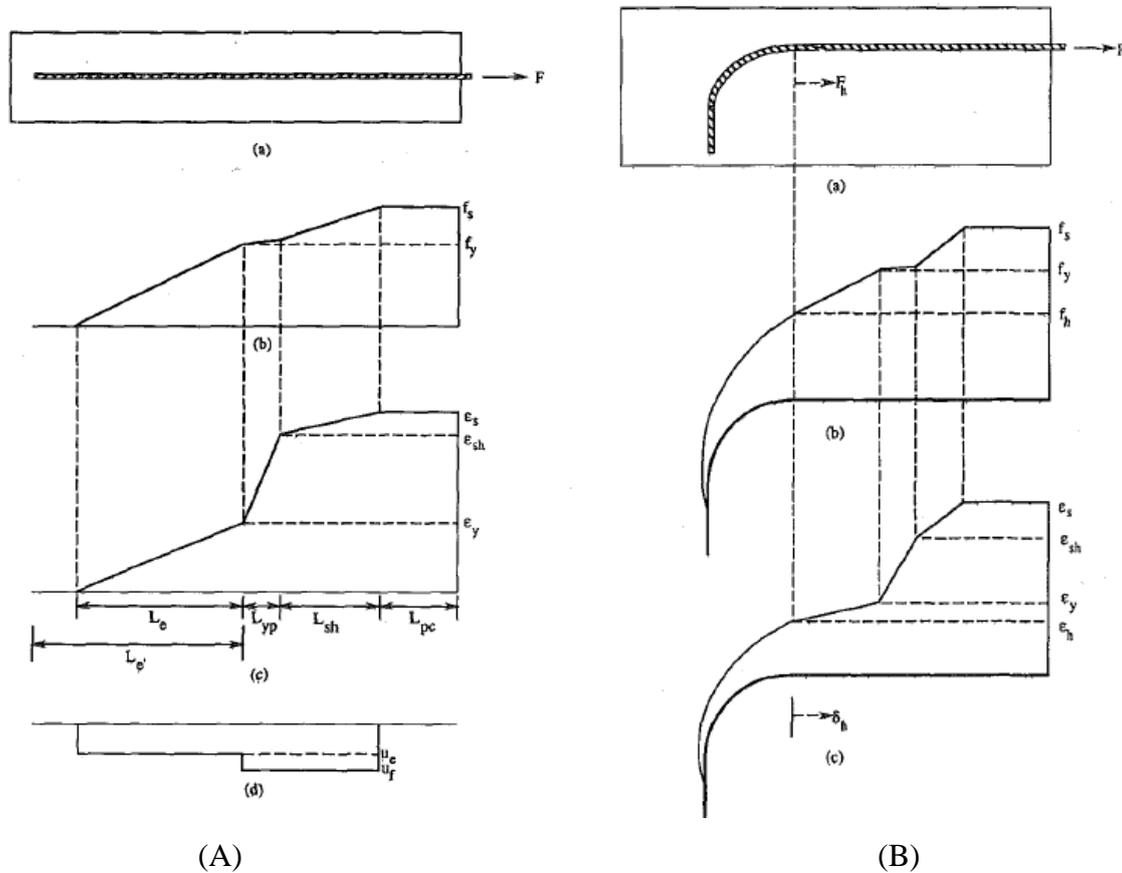


Figura 39: (A): a) Barra immersa nel calcestruzzo; b) Distribuzione delle tensioni; c) Distribuzione delle deformazioni; d) Distribuzione delle tensioni di aderenza acciaio-calcestruzzo . (B) Distribuzione delle medesime tensioni e deformazioni sulla barra uncinata

Nella zona elastica, la tensione di aderenza si considera costante, nella zona altamente inelastica del plateau e dell'incrudimento si considera pari alla componente attrittiva, mentre la zona del cono di pull-out (letteralmente un cono di espulsione, una zona in cui il calcestruzzo in trazione non riesce più a sopportare la tensione applicata all'elemento) si verifica solo se la tensione di aderenza raggiunge dei valori limite prima di giungere allo snervamento.

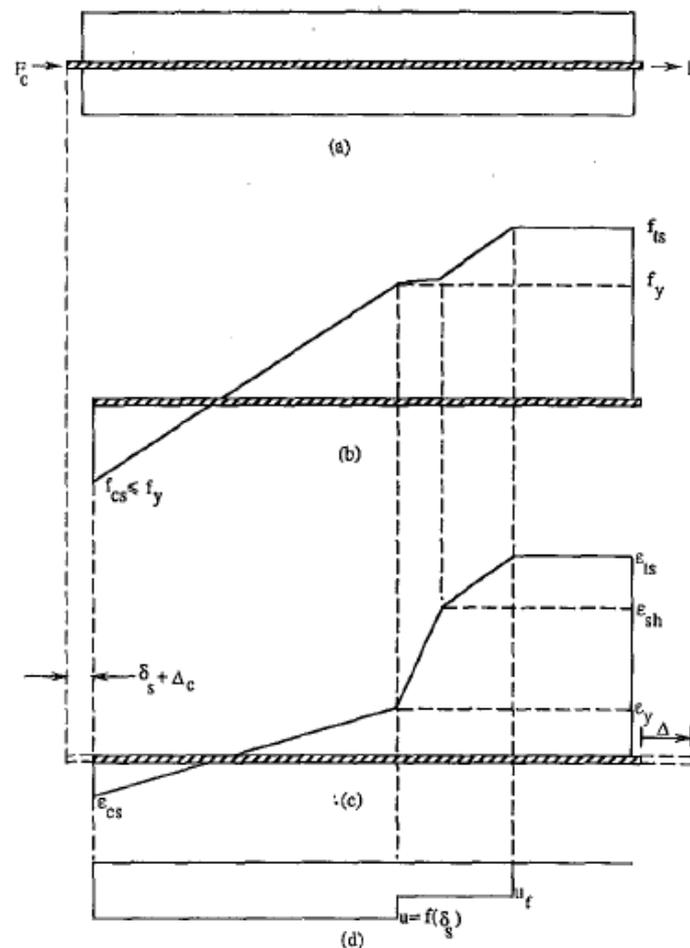


Figura 40: Descrizione del comportamento della barra soggetta a trazione- compressione : b) Distribuzione delle tensioni; c) Distribuzione delle deformazioni; d) Distribuzione delle tensioni di aderenza acciaio-calcestruzzo

Il modello può essere applicato sia in caso di elemento “tirato” che “spinto”, con o senza ancoraggio, ma oltre ad essere piuttosto essenziale, manca di una descrizione degli scorrimenti in prossimità dell’uncino, quando questo entra in gioco, ossia quando la lunghezza della barra non è sufficiente a resistere alla trazione impressa all’estremità.

Mitra e Lowes (2007)

Il modello di Mitra e Lowes, muove dalla volontà di descrivere il fenomeno della perdita di aderenza tra barre e calcestruzzo al fine di descrivere il meccanismo all’interno del nodo trave pilastro.

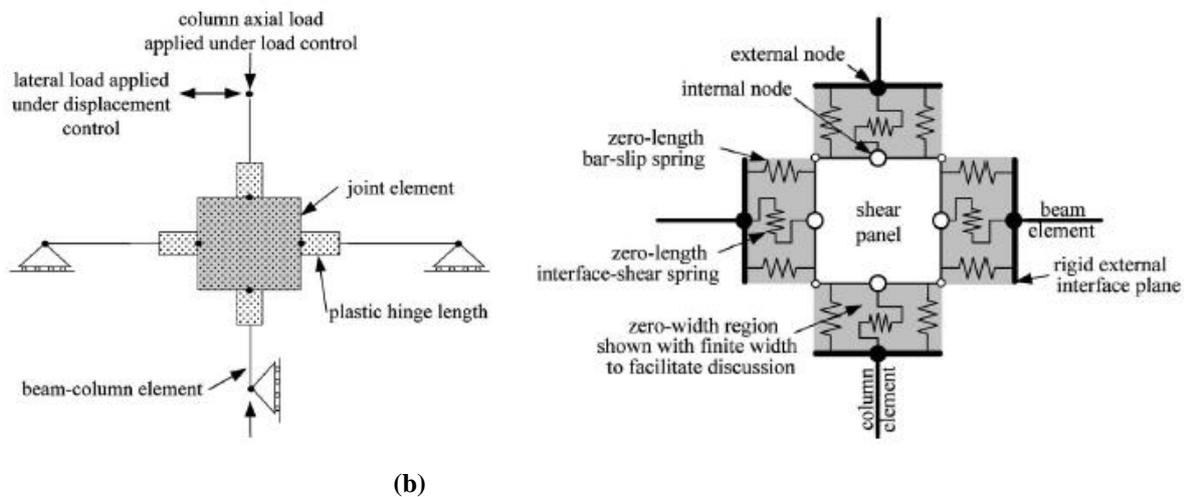


Figura 41: Mitra e Lowes (a) Sottoassemblaggio creato in laboratorio; (b) Modello reologico del nodo interno

Il modello del nodo si basa in realtà sull'elemento finito creato da Lowes e Altoonash nel 2003 [24]: un elemento finito a 4 nodi a 12 gradi di libertà, in cui le tensioni di aderenza sono pensate costanti se la barra è elastica, o costanti a tratti se la barra ha snervato e introdotte per mezzo di molle non lineari.

Il modello di nodo di Mitra e Lowes migliora il precedente: esso presenta 4 molle razionali inelastiche all'estremità dell'elemento finito, che simulano il comportamento tagliante, o meglio la ridotta capacità di trasferimento del taglio all'interno del nodo a causa delle fessure che si creano al suo interno, e 8 molle rotazionali che invece tengono in conto della perdita di rigidità e di resistenza dovuta agli scorrimenti dell'ancoraggio delle barre nel nodo.

I legami utilizzati per descrivere entrambi questi comportamenti, sono di tipo non lineare, ma purtroppo il modello presenta diversi problemi di convergenza.

Sezen e Setzler (2008)

Gli autori utilizzano un campo di deformazioni lineare su tutta la lunghezza di ancoraggio della barra, considerando la piegatura come una barra dritta di lunghezza equivalente. Questo modello rientra nei modelli a plasticità concentrata in cui si considera alle estremità degli elementi strutturali la presenza di molle rotazionali a cui si assegna un certo legame tensioni di aderenza scorrimenti, come si evince dalle Figura 42 (a) e (b)

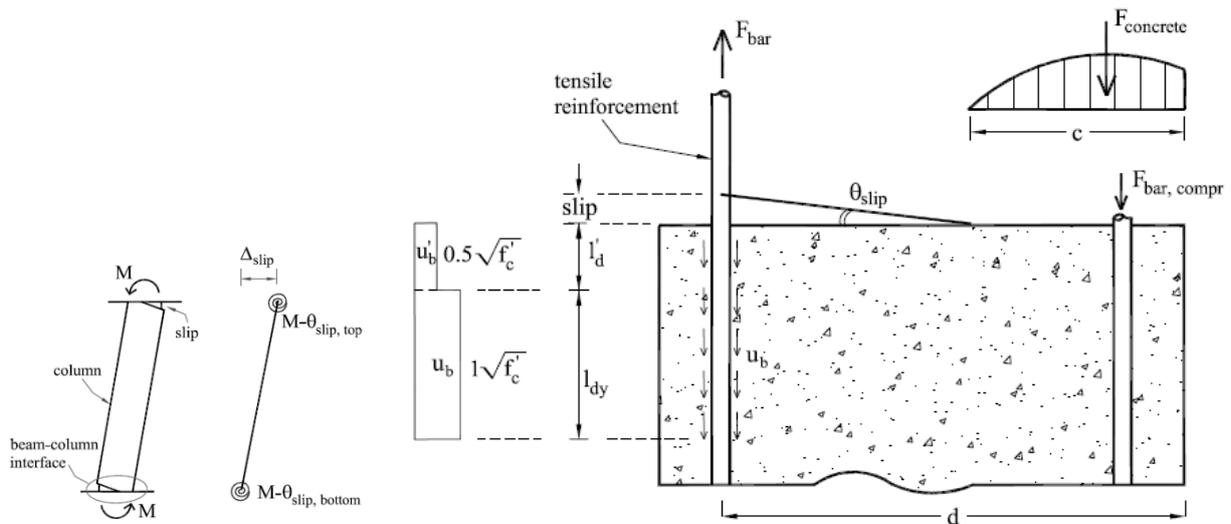


Figura 42: Descrizione del fenomeno degli scorrimenti all'interfaccia trave colonna secondo Sezen e Setzler

Tutti questi modelli introducono una discontinuità all'interno dell'elemento a fibre adottato, non sempre consentono una rappresentazione accurata del fenomeno e necessitano di un'attenta descrizione del legame da adottare per la molla rotazionale.

3.1.2 Modelli di aderenza negli elementi a plasticità diffusa

I modelli a plasticità diffusa descrivono il fenomeno dell'interazione tra barre e calcestruzzo circostante a livello "locale".

Questo approccio è ovviamente molto più dettagliato dei modelli a plasticità concentrata, ma purtroppo presenta l'inconveniente di un grande onere computazionale e di problemi di convergenza. A differenza del primo gruppo, in cui bisogna porre grande accuratezza nei riguardi della scelta delle proprietà meccaniche delle molle rotazionali, e in cui comunque c'è "un salto" all'interno della descrizione dell'elemento, gli elementi a plasticità diffusa presentano la peculiarità di descrivere "in continuità" ciò che avviene all'interno dell'elemento.

Questo tipo di modelli muovono nell'ambito degli elementi finiti "a fibre", che sono caratterizzati dall'essere divisi in n sezioni (dipendenti dalla regola di integrazione adottata), sotto divise in fibre o aree. Il vantaggio di questo tipo di elementi è quello di poter attribuire a ogni fibra un diverso legame costitutivo non lineare, e quindi il calcestruzzo confinato per il nucleo, il non confinato per il copriferro, e qualsivoglia legame non lineare per l'acciaio.

Monti e Spacone (2000) [28]

Gli autori combinano la formulazione elaborata in precedenza da Monti et al. (1997) [29], che consiste nella descrizione della barre d'acciaio immersa nel calcestruzzo e soggetta a scorrimenti, con un tipo di elemento a fibre con formulazione in forza (force-based finite element) elaborato da Spacone et. al (1996) [31] per le analisi di strutture soggette ad azioni sismiche.

La formulazione del nuovo elemento, in particolare, combina la sezione a fibre con l'elemento finito di una barra con un campo di scorrimenti continuo lungo di essa.

La sezione conserva l'ipotesi di sezioni piane, ma le deformazioni delle fibre di acciaio che rappresentano le barre sono date dalla somma di due contributi, la deformazione elastica della barra e quella inelastica dovuta agli scorrimenti.

Nel modello, le fibre di acciaio tengono in conto non solo del comportamento della barra all'interno della trave, ma anche del suo ancoraggio oltre l'elemento.

La risposta è dunque determinata in termini di tensione e deformazione a livello di fibra, che sono i due parametri fondamentali per risalire alla risposta a livello di sezione.

L'**elemento di trave a fibre** è pensato costituito da una serie di sezioni lungo l'elemento stesso, il cui numero e posizione dipende dallo schema di integrazione adottato, nella fattispecie lo schema di Gauss-Lobatto, perché in questa condizione il primo e ultimo punto di integrazione coincidono sempre con le due estremità dell'elemento, ove hanno luogo le deformazioni inelastiche più significative, Figura 43.

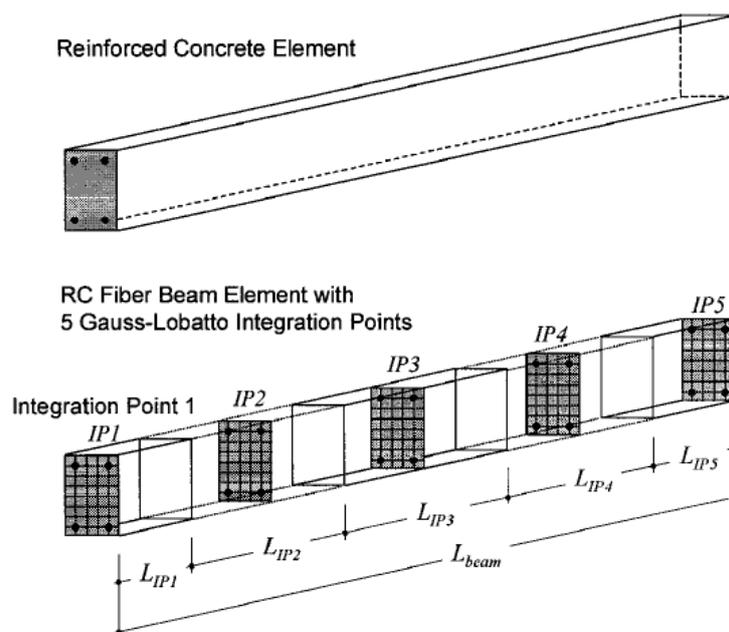


Figura 43: Elemento a fibre con 5 punti di integrazione con regola di Gauss-Lobatto

La risposta sezionale è ottenuta attraverso l'integrazione delle tensioni e delle rigidzze attraverso la sezione, suddivisa in n fibre, cui corrispondono n aree, Figura 44. A questo punto la risposta dell'elemento è ottenuta attraverso l'integrazione della risposta sezionale cui è associato un certo "peso", quindi come la somma della risposta delle sezioni nei vari punti di controllo.

Purtoppo essendo la formulazione in forza, piuttosto che in spostamenti, l'onere computazionale è piuttosto elevato, anche se la risposta è molto più accurata.

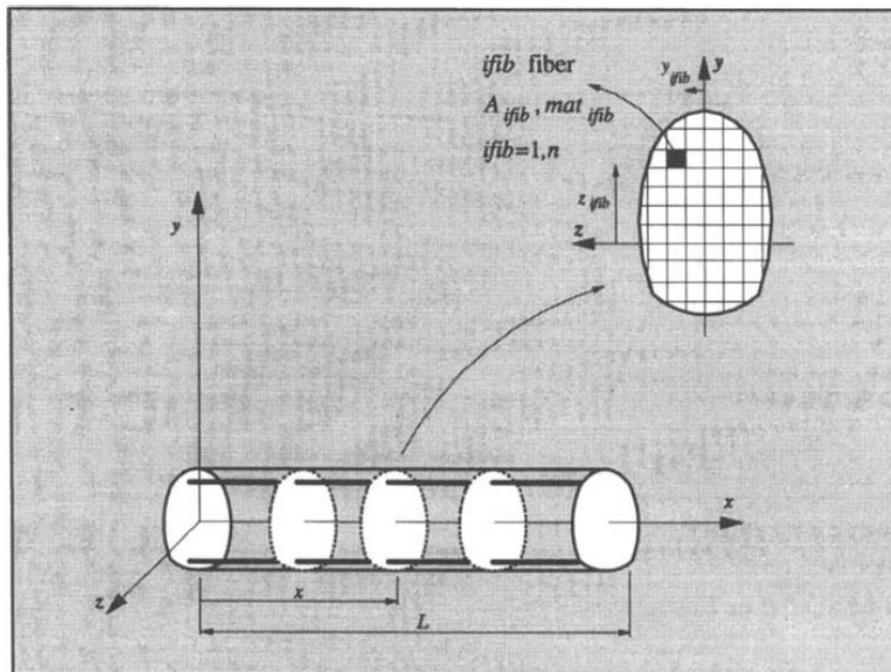


Figura 44: Suddivisione delle sezioni dell'elemento trave in fibre [31]

L'elemento finito di barra con gli scorrimenti può essere invece immaginato come un sistema costituito da due componenti in parallelo: la barra e l'interfaccia tra la barra e il calcestruzzo circostante.

La risposta globale dell'elemento ovviamente dipende dall'interazione tra le due componenti, e nel modello di Monti et al. (1997 a), questa interazione basata sulla formulazione in forza serve a descrivere il problema della barra soggetta a un campo di spostamenti (pullout).

Il problema principale dell'implementazione del modello suddetto di barra all'interno di un elemento trave, deriva dal fatto che la risposta della barra è espressa in termini di tensione scorrimento, σ - u , mentre l'inserimento all'interno della sezione a fibre necessita nell'inserimento di un legame di tipo σ - ε , dal momento che la determinazione dello stato sezionale avviene per mezzo delle deformazioni.

Il problema della deformazione dovuta agli scorrimenti si risolve come spiegato di seguito.

Dall'ipotesi di planarità delle sezioni, ne deriva che la deformazione della fibra di una sezione, a una distanza y dall'asse di riferimento, è data da:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + ky \quad (3.1.1)$$

Nella logica dell'elemento a fibre, per ogni sezione le barre e il calcestruzzo si possono considerare due sistemi in parallelo, e nell' ipotesi di perfetta aderenza, ovviamente la deformazione dell'acciaio e quella del calcestruzzo coincidono, per cui:

$$\varepsilon = \varepsilon_c = \varepsilon_s = \bar{\varepsilon} + ky \quad (3.1.2)$$

Esattamente come la rotazione φ e l'allungamento d :

$$d = \bar{d}_s = \bar{d}_c; \quad \varphi = \varphi_s = \varphi_c \quad (3.1.3)$$

Ove i pedici c ed s riguardano il calcestruzzo e l'acciaio.

Tuttavia, nell'ipotesi di scorrimenti, queste ipotesi vengono meno.

Per poter procedere, bisogna fare una precisazione sull'elemento finito in questione. Nel caso dell'elemento a fibre, infatti, la risposta globale è data dalla somma pesata della risposta delle n "fette" in cui è discretizzato l'elemento, la cui risposta dipende a loro volta dalla somma delle tensioni e rigidezze integrate su ogni areola o fibra della sezione che si trova nella fetta stessa. L'introduzione del concetto di "fetta" è fondamentale, perché la risposta globale è una somma integrale, il che presuppone l'intervento di una lunghezza. Ognuna di queste "fette" presenta una lunghezza di entità:

$$L_{IPi} = w_{IP} L_{beam} \quad (3.1.4)$$

Ove L_{beam} è chiaramente la lunghezza totale dell'elemento, Figura 43. L_{IPi} dipende quindi dal tipo di schema adottato e dal numero di punti di Gauss.

La "fetta" è intesa quindi come una porzione dell'elemento in cui si trova il punto di integrazione IP, dove vengono calcolate le deformazioni, costanti, ossia ε e κ , da cui derivano un allungamento e una rotazione costanti :

$$\bar{d} = \bar{\varepsilon} \cdot L_{IP}; \quad \varphi = \kappa \cdot L_{IP} \quad (3.1.5)$$

A questo punto, l'equazione di compatibilità può essere espressa in termini di spostamenti di una singola fibra:

$$u(y) = u_c = u_s = \bar{d} + \varphi \cdot y \quad (3.1.6)$$

Da cui:

$$\varepsilon(y) = \frac{u(y)}{L_{IP}} = \frac{\bar{d} + \varphi \cdot y}{L_{IP}} \quad (3.1.7)$$

A questo punto, la rimozione dell'ipotesi di perfetta aderenza si può concretizzare sostanzialmente, attraverso la suddivisione dell'allungamento e della rotazione dell'acciaio in due componenti, una elastica (d_s), l'altra dovuta agli scorrimenti (d_a):

$$\bar{d} = \bar{d}_c = \bar{d}_{s+a} = \bar{d}_s + \bar{d}_a \quad \varphi = \varphi_c = \varphi_{s+a} = \varphi_s + \varphi_a \quad (3.1.8)$$

Mentre la deformazione del calcestruzzo è pari a:

$$\varepsilon(y_c) = \frac{(\bar{d}_c + \varphi_c \cdot y_c)}{L_{IP}} = \bar{\varepsilon} + \kappa \cdot y_c \quad (3.1.9)$$

La deformazione dell'acciaio invece diventa:

$$\varepsilon_{s+a} = \varepsilon_s + \varepsilon_a = \frac{(\bar{d}_s + \varphi_s \cdot y_s)}{L_{IP}} + \frac{(\bar{d}_a + \varphi_a \cdot y_a)}{L_{IP}} \quad (3.1.10)$$

$$\varepsilon_{s+a} = \varepsilon_s + \frac{u_a}{L_{IP}} = \varepsilon_s + \varepsilon_a \quad (3.1.11)$$

In cui ε_a è riferito alla deformazione equivalente al contributo dell'ancoraggio, condensato a livello di fibra attraverso la lunghezza L_{IP} del punto di integrazione.

La compatibilità è comunque rispettata, infatti:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{s+a} \quad (3.1.12)$$

anche se:

$$\varepsilon_c \neq \varepsilon_s \quad (3.1.13)$$

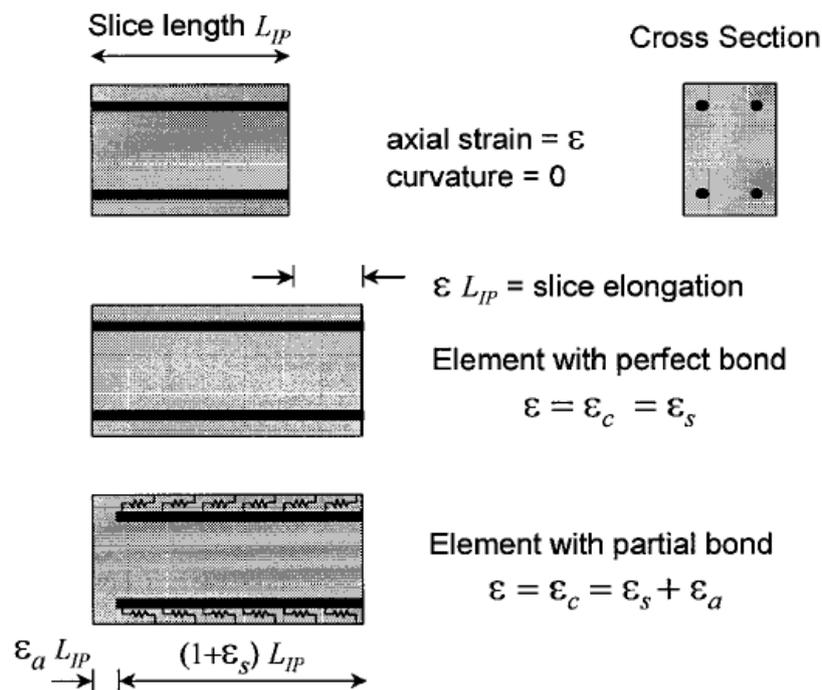


Figura 45: Deformazione di una “fetta” : confronto tra perfetta aderenza e scorrimenti

Se da un lato dunque, lo stato tenso-deformativo del calcestruzzo si determina in maniera semplice, il medesimo dell'acciaio è un po' più complicato, perché la deformazione dipende da due contributi, quello elastico della barra e quello dovuto all'ancoraggio della stessa.

Ovviamente la lunghezza d'ancoraggio dipende dalla zona che si sta analizzando della trave:

- Se la barra è continua L_a coinciderà con una lunghezza L_{IP} ;
- Se la barra è ancorata oltre l'elemento, tale lunghezza L_a , è data dalla somma di L_{IP} e la lunghezza di ancoraggio.

In Figura 46 è descritto quest'ultimo caso, in cui si valuta la deformazione della barra in prossimità del primo punto di integrazione.

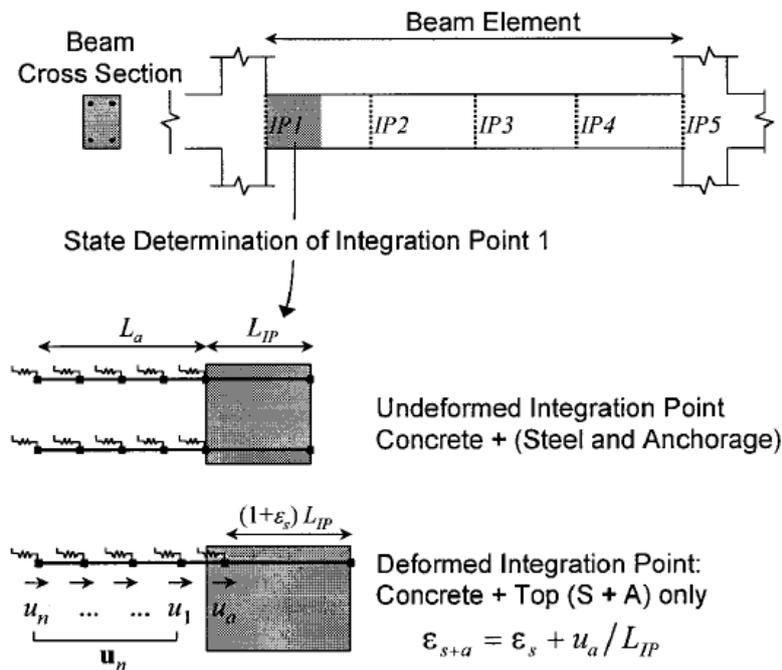


Figura 46 : Determinazione della deformazione totale della fibra d'acciaio della prima fetta della trave

La parte della barra ancorata, è schematizzata secondo il modello di Monti et al. (1997 a) come una serie di n barre soggetta a un'aderenza continua (Figura 46) : la legge delle tensioni di aderenza rispetto agli scorrimenti è quella proposta da Eligehausen et al. (1983).

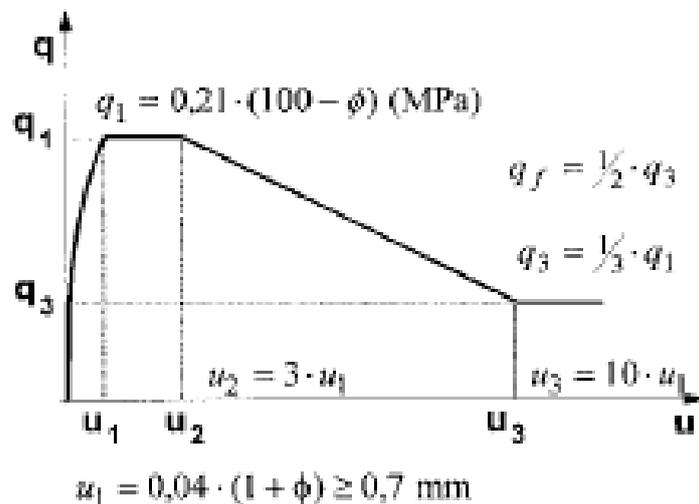


Figura 47: Legge di aderenza-scorrimenti proposta da Eligehausen et al. (1983)

Stante la definizione delle deformazioni dell'acciaio, e della schematizzazione sopra menzionata, le tensioni sono invece così schematizzate:

$$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon_s \quad \left\{ \begin{matrix} \sigma_a \\ 0 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{an} \\ k_{na} & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.1.14)$$

In cui gradi di libertà della barra ancorata sono dati dalla componente di scorrimento dovuto all'ancoraggio u_a e gli spostamenti u_n degli altri n nodi lungo la lunghezza d'ancoraggio L_a .

Tale lunghezza è automaticamente tenuta in conto dal modello, a seconda di dove si sviluppano effettivamente le tensioni di aderenza, per cui non c'è bisogno di specificarla.

In definitiva:

$$\varepsilon_{s+a} = m^T \cdot e \quad \sigma = \left\{ \sigma_s \quad \sigma_a \quad s_n^U \right\}^T \quad (3.1.15)$$

Ove:

$$e = \frac{1}{L_{IP}} \left\{ L_{IP} \varepsilon_s \quad u_a \quad u_n \right\} \quad m = \{1 \quad 1 \quad 0\} \quad (3.1.16)$$

e s_n^U rappresenta il vettore residuo delle tensioni lungo la lunghezza di ancoraggio L_a .

Il modello di Monti e Spacone rappresenta un'ottima soluzione per tenere in conto dell'aderenza, e riesce a riprodurre la risposta strutturale in maniera piuttosto accurata, tuttavia ci sono due principali limitazioni.

La prima, che è valido solo per un singolo elemento strutturale, cioè riesce a cogliere bene la rotazione alla base ad esempio delle colonne in c.a. dovute agli scorrimenti, ma non riesce a tenere in conto l'effetto delle barre che passano tra due elementi strutturali attraverso il nodo.

La seconda, presenta un importante onere computazionale, che comunque fa sì che non si riesca ad andare oltre singoli elementi strutturali, non riuscendo così ad essere efficiente in termini di risposta strutturale di un telaio, ad esempio.

3.2 Modelli semplificati

A causa dell'importante onere computazionale suddetto, e, grazie al successo e ai vantaggi dell'elemento a fibre, che consente di attribuire a ogni barra d'acciaio un suo legame, si sono sviluppati dei modelli semplificati di aderenza, che consistono in una legge costitutiva dell'acciaio "modificata", per tenere in conto gli scorrimenti, piuttosto che creare un elemento finito ad hoc che consideri l'interazione della barra con il calcestruzzo in condizioni di scorrimenti relativi.

In tale contesto, rientrano il modello elaborato da Braga et al. (2012) [21] , Figura 48, e successive modifiche [22] nonché il modello, ad esempio, di Dehastani et al. (2015)[32], che forniscono entrambi, tuttavia, un legame modificato dell'acciaio solo a livello monotono.

3.2.1 Legge modificata dell'acciaio: Braga et al. (2012)

Braga et al (2012)[21] e successive modifiche (2015)[22], propongono un modello semplificato per tenere in conto degli effetti della perdita di aderenza. Tale modello si configura di fatto, come una legge costitutiva dell'acciaio "modificata", e si inserisce bene nel contesto degli elementi finiti a fibre sia a plasticità diffusa che a plasticità concentrata.

Il modello, particolarmente indicato per la descrizione del fenomeno in caso di barre lisce, fa riferimento allo schema generico di una barra ancorata con un gancio ad uncino, dove all'estremo libero è applicato uno spostamento u_L , come mostrato in Figura 48:

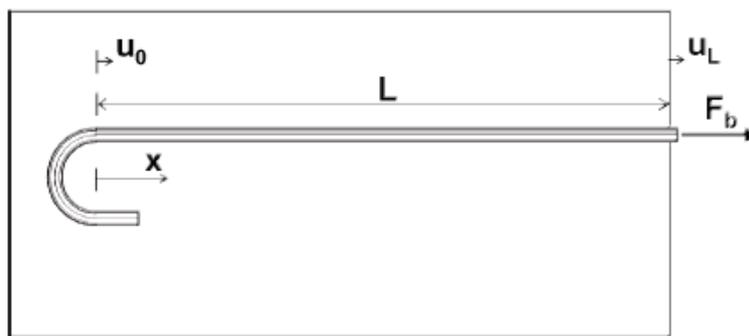


Figura 48: Schema di una barra con uncino immersa nel calcestruzzo

Esso si basa su una serie di ipotesi semplificate:

- il campo di spostamenti $u(x)$ è *imposto* di tipo lineare lungo la barra;
- la legge di aderenza $\tau-u$ è di tipo elastico perfettamente plastico;
- gli ancoraggi di estremità, se presenti, quali uncini o piegature sono descritti attraverso una legge costitutiva di tipo elastico-lineare;

Tali assunzioni rappresentano una drastica semplificazione nella descrizione di un fenomeno non lineare di scorrimenti tra l'armatura longitudinale e il calcestruzzo circostante. Tuttavia queste ipotesi facilitano lo sviluppo di un legame dell'acciaio che tenga conto degli scorrimenti evitando un faticoso processo iterativo e dunque un elevato onere computazionale, pur presentando buoni risultati, confrontabili con il comportamento sperimentale.

La prima ipotesi si esplicita nell'equazione lineare (3.2.1), in fase pre- snervamento:

$$u(x) = u_0 + \frac{(u_0 - u_L)}{L} \cdot x \quad (3.2.1)$$

mentre in fase post snervamento, il campo di scorrimenti diventa il seguente:

$$u(x) = \begin{cases} u_0 + \frac{u_y - u_0}{L_0 - L_y} \cdot x & \text{for } 0 \leq x \leq L_0 - L_y \\ u_y + \frac{u_L - u_y}{L_y} \cdot (x - L_0 + L_y) & \text{for } L_0 - L_y < x \leq L_0 \end{cases} \quad (3.2.2)$$

in cui u_0 e u_L sono gli scorrimenti, rispettivamente, in prossimità dell'uncino e all'estremo libero ove è applicato lo spostamento, x rappresenta l'ascissa lungo la barra, L la lunghezza totale della barra, L_0 la lunghezza di ancoraggio, L_y la lunghezza lungo la quale le tensioni nella barra hanno superato la tensione di snervamento.

La seconda ipotesi, circa la legge di aderenza, può essere appropriata nell'ipotesi in cui le barre sono lisce. Come infatti si è ampiamente discusso nel Capitolo II, l'andamento delle tensioni di aderenza all'interfaccia barra calcestruzzo in questo caso è tale per cui si raggiunge un picco di resistenza per piccoli scorrimenti, che però decade molto repentinamente, per assestarsi sul residuo attritivo, che ne determina gran parte del comportamento. Oltre a ciò, come si evince, sempre nel Capitolo II, tale picco viene comunque perso nei cicli successivi al primo, mentre il valore residuo si mantiene abbastanza costante sia per carichi ripetuti che invertiti.

Per questo motivo, è ragionevole pensare (soprattutto ai fini di un modello semplificato di agevole utilizzo) che la legge monotona sia di tipo elasto-plastica, seguendo tra l'altro le prescrizioni normative del CEB-FIP, Figura 49.

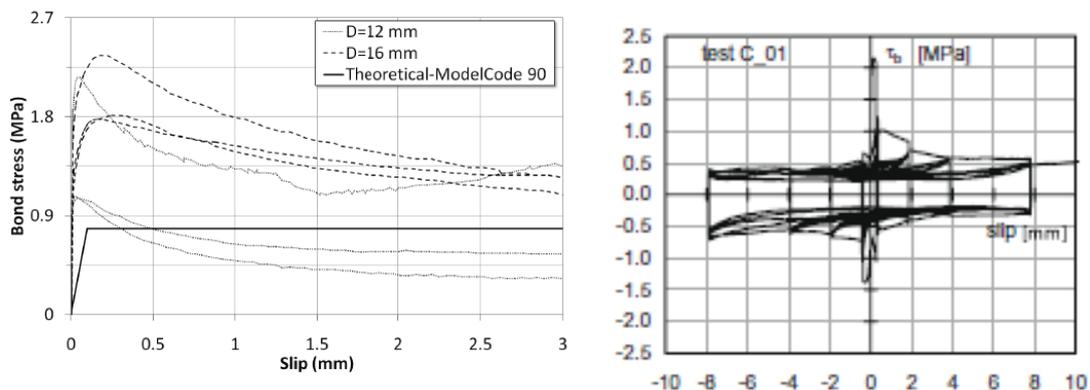


Figura 49: Andamento sperimentale delle tensioni di aderenza, monotono (sinistra), ciclico(destra).

Con questa assunzione si calcola la tensione tangenziale che si sviluppa all' interfaccia acciaio-calcestruzzo, attraverso le leggi (3.2.2):

$$\tau[u(x)] = \begin{cases} \frac{\tau_d}{u_1} \cdot u(x) & \text{if } u(x) \leq u_1 \\ \tau_d & \text{if } u(x) > u_1 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

dove τ_d è la tensione di aderenza residua attritiva, e u_1 lo scorrimento corrispondente.

La tensione di picco che si raggiunge nel legame, infatti, diventa importante nel caso di barre ad aderenza migliorata, particolarmente in presenza di un elevato livello di confinamento e in cui il fenomeno degli scorrimenti nasce in virtù del locale schiacciamento del calcestruzzo circostante e della formazione di fessure longitudinali (splitting).

In sintesi, lo schema di calcolo del modello analitico di Braga et al. è il seguente:

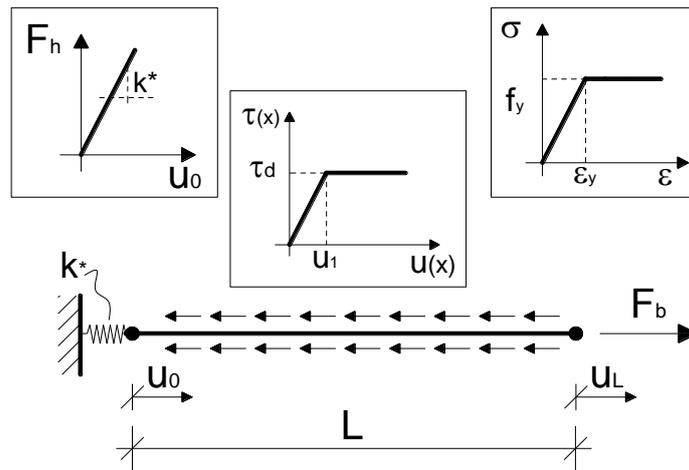


Figura 50: Schema riassuntivo delle ipotesi alla base del modello Braga et al.

L'adozione delle equazioni di equilibrio, compatibilità e delle leggi costitutive, consente di determinare il campo di tensioni e di scorrimenti lungo l'elemento.

In particolare, tramite l'**equilibrio**, la tensione normale alla sezione dell'area della barra A_b , è data dall'equilibrio in direzione longitudinale alla barra stessa:

$$\sigma(x) = \frac{F(x)}{A_b} = \frac{1}{A_b} \cdot \int_0^x \tau(x) \cdot \pi \cdot d_b \cdot dx + F_h = \frac{4}{d_b} \cdot \int_0^x \tau(x) \cdot dx + \frac{F_h}{A_b} \quad (3.2.4)$$

Dove d_b e A_b sono rispettivamente il diametro e l'area trasversale della barra, F_h la forza agente nell'uncino dovuta alle tensioni che è data da:

$$F_h = k_h \cdot u_0 \quad (3.2.5)$$

in cui k_h è la rigidezza dell'uncino stesso, la cui determinazione viene riportata nel paragrafo che segue.

Dall'equazione di **congruenza**, si ottiene invece il campo di spostamenti lungo la barra, *dedotto*, che segue l'espressione (3.2.5):

$$u(x) = u_0 + u_E(x) \quad (3.2.6)$$

E in cui $u_E(x)$ si deduce mediante integrazione delle deformazioni, assumendo per l'acciaio un comportamento elastico-lineare finchè non sia stato raggiunto lo snervamento, (3.2.6):

$$u_E(x) = \int_0^x \frac{\sigma(x)}{E_s} dx \quad (3.2.7)$$

3.2.1.1 Modellazione dell'uncino

Il modello semplificato dello scorrimento presuppone che qualunque ancoraggio all'estremità della barra sia descritto attraverso una relazione lineare elastica tra la forza esplicata dall'uncino e lo scorrimento u_0 relativo. In questo modo la rigidezza specifica dell'uncino k_h^* è l'unico parametro che descrive l'ancoraggio all'estremità della barra.

In Figura 51, è schematizzato l'andamento delle tensioni lungo l'uncino, sia nella parte curva di raggio R , sia nella parte rettilinea L_{AB} .

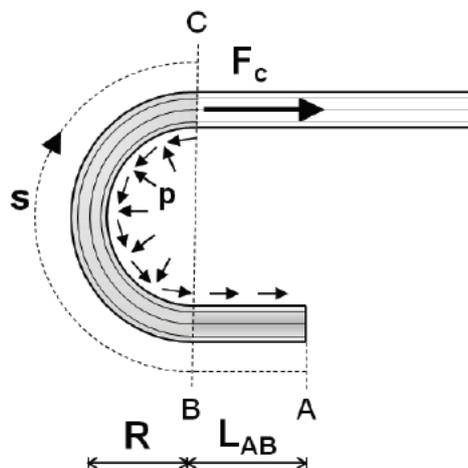


Figura 51: Tensioni lungo l'uncino

In ogni punto della superficie curvilinea individuata dall'ascissa s , la tensione tangenziale è fornita dalla somma della tensione offerta dalla barra dritta (τ_b) e la componente in direzione radiale dovuta alla pressione (τ_p):

$$\tau = \tau_b(s) + \tau_p(s) \quad (3.2.8)$$

La componente $\tau_p(s)$ può essere calcolata come segue:

$$\tau_p(s) = \mu \frac{F(s)}{R} \quad (3.2.9)$$

In cui μ rappresenta il coefficiente di attrito tra acciaio e calcestruzzo ed usualmente presenta valori prossimi a 0.4, R è il raggio del gancio, $F(s)$ la forza di trazione agente all'estremità.

La rigidezza dell'uncino k_h^* , può essere calcolata come rigidezza secante, data dal rapporto tra tensioni e scorrimenti in condizioni di incipiente sfilamento.

In condizioni di scorrimento incipiente, infatti, la forza di raddrizzamento deve avere un valore inferiore alla forza totale agente sull'uncino, quindi per semplicità si può trascurare la forza necessaria per il raddrizzamento dell'uncino stesso e l'equilibrio delle forze agenti si può scrivere come segue:

$$\sigma(s) = \frac{4\tau_d}{d_b} (L_{AB} + s) + \frac{\mu}{R} \left(\int_0^s \sigma(z) dz \right) \quad (3.2.10)$$

In cui è presente un integrale di Volterra del secondo tipo, la cui soluzione è data da:

$$\sigma(s) = \frac{4\tau_d}{E_s d_b} \left[\left(\frac{\mu}{R} L_{AB} + 1 \right) \cdot e^{\frac{\mu}{R}s} - 1 \right] \quad (3.2.11)$$

dove L_{AB} è il tratto rettilineo terminale dell'uncino.

Assumendo un legame costitutivo lineare per l'acciaio nel tratto relativo all'uncino, lo scorrimento $u(s)$ lungo lo stesso si calcola come segue:

$$u(s) = \frac{4\tau_d}{E_s d_b} \left\{ \frac{R}{\mu} \left[\left(L_{AB} + \frac{R}{\mu} \right) \cdot \left(e^{\frac{\mu}{R}s} - 1 \right) - s \right] + L_{AB}^2 \right\} + u_1 \quad (3.2.12)$$

Assumendo una relazione lineare tra la tensione e lo scorrimento agenti in condizioni di incipiente sfilamento, k_h^* è data dal rapporto tra le espressioni (3.2.10) e (3.2.11) quando $s = \pi R$:

$$k_h^* = \frac{\sigma(\pi R)}{u(\pi R)} \quad (3.2.13)$$

I risultati ottenuti con la precedente relazione sono stati confrontati con quelli ottenuti da Fabbrocino et al. (2002) effettuati su barre di diametro 12 e 16 mm. Gli uncini sono inseriti in blocchi di calcestruzzo armato con una resistenza cubica di 34.2 N/mm^2 , hanno un raggio interno pari a $5d_b$ ed un tratto rettilineo di lunghezza $3d_b$, dove d_b è il diametro della barra: per ognuno dei due diametri, la tensione di trazione allo scorrimento è stata misurata in corrispondenza della sezione.

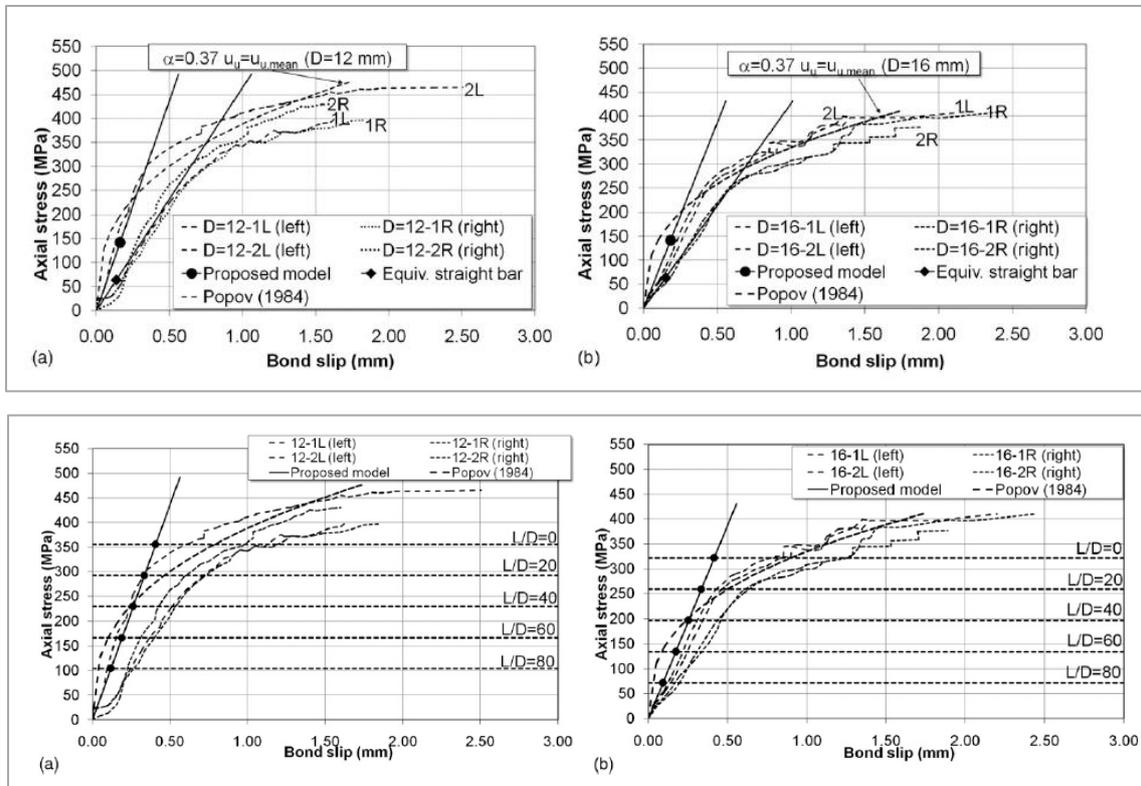


Figura 52: Curve tensioni-scorrimenti: confronto tra risultati sperimentali e modello analitico;

La figura mostra il punto di incipiente pull-out e la relativa rigidezza secante k_h^* con riferimento a due diverse condizioni al contorno. La prima è quella di modellare l'uncino con un tratto rettilineo equivalente di lunghezza $8D$ (prendendo ad esempio in considerazione solo la τ_b , la seconda condizione tiene conto anche della τ_p lungo la superficie curvilinea. Nello svolgimento di tali confronti, la τ_b e u_1 sono calcolati attraverso le equazioni date dal CEB-FIP (2008) assumendo $\mu = 0.4$. Si può osservare che la legge lineare definita attraverso il modulo secante all'incipiente pull-out rappresenta un'approssimazione dei risultati ottenuti sui beam test. Inoltre più la tensione nell'uncino

è bassa minore è la dispersione ottenuta. Sempre nella figura precedente, è riportato l'andamento delle tensioni nell'uncino al variare del rapporto $\frac{L}{d_b}$ ipotizzando che la barra longitudinale all'estremo libero sia snervata. Nei casi analizzati quando le barre longitudinali immerse nel calcestruzzo hanno un elevato rapporto $\frac{L}{d_b}$, l'approccio lineare semplificato è più accettabile ed affidabile non descrivere il comportamento dell'uncino all'estremità della barra.

In alternativa viene proposto anche il modello di Popov (1984) con la seguente relazione analitica:

$$\sigma_h(u_h) = f_u \left(\frac{u_h}{u_u} \right)^\alpha \quad (3.2.14)$$

Dove:

f_u è la tensione dell'uncino a rottura per sfilamento

u_u è il relativo scorrimento

α è un esponente positivo adimensionale

Quest'ultimo modello fornisce senz'altro una relazione più accurata rispetto a quella lineare però i valori da assegnare ai parametri sopra citati risultano di difficile determinazione.

La formulazione analitica sopra descritta, viene usata per calcolare la relazione tensione-scorrimento di una barra, con uncino o meno, all'interno del calcestruzzo. La relazione si concentra sullo scorrimento assiale all'estremo libero u_L , che rappresenta lo scorrimento globale assiale della barra longitudinale, compresi sia l'allungamento dell'acciaio che lo slittamento dell'ancoraggio. Questo modello è particolarmente conveniente da un punto di vista computazionale, e senza ricorrere a un complesso processo iterativo multilivello, fornisce una relazione semplificata (σ_L, u_L) che restituisce una soluzione ragionevole in termini di equilibrio e congruenza.

In Figura 53 sono riportati gli andamenti degli scorrimenti, tensioni tangenziali e tensioni normali della barra in funzione del raggiungimento o meno, all'estremità libera, dello scorrimento u_1 in corrispondenza del quale si ha la massima tensione di aderenza τ_d .

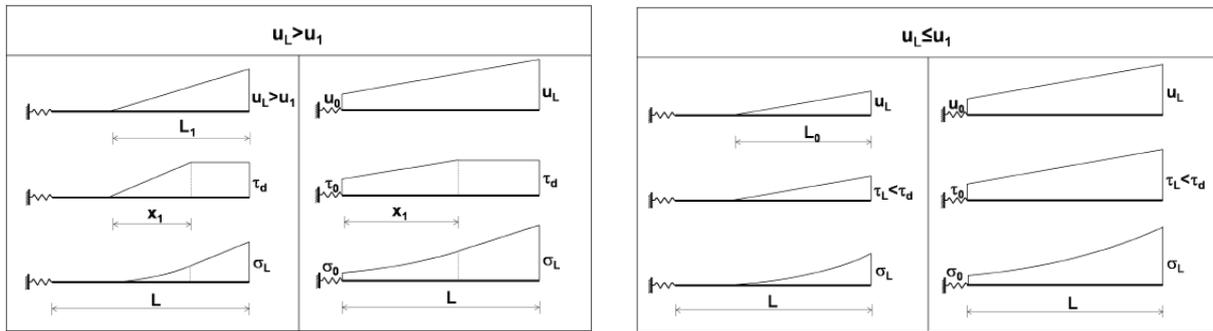


Figura 53: Campo di spostamenti, tensioni tangenziali e tensioni normali alla barra nei due casi principali

La Figura 54 (a), mostra un esempio del legame $\sigma - u$ quando $L_0 \leq L$, in cui con L_0 si indica la lunghezza di ancoraggio. Sulle curva sono definiti tre punti caratteristici: il primo punto A si verifica quando $u_L = u_1$ e corrisponde al limite superiore del tratto lineare (tratto O-A), il secondo punto B corrisponde a $L_1 = L$ e $u_0 = 0$ (tratto AB). Il terzo punto C corrisponde alla condizione $u_0 = u_1$, In Figura 54 (b), è mostrato il caso in cui $L_0 > L$ in cui il legame si sviluppa lungo tutto l'andamento della barra per qualsiasi valore di u_L ed il legame $\sigma - u$ ha solo due punti caratteristici, mancando il punto B. Il punto A corrisponde al caso in cui $u_L = u_1$ (tratto OA) mentre il punto C è il limite superiore del ramo non lineare e corrisponde a $u_0 = u_1$ (tratto AC).

Le due curve appena descritte contemplano sia lo snervamento delle barre che il pull-out (massime tensioni di aderenza raggiunte lungo tutta la barra), nelle ipotesi indipendenti che avvenga o prima un caso o prima l'altro: se infatti la barra è piuttosto corta (o comunque nel caso di rapporti L/d piuttosto contenuti), è facile che l'aderenza venga raggiunta su tutta la lunghezza della barra prima che lo snervamento possa accadere (caso 1), mentre d'altro canto se la barra è lunga, o meglio se è "snella", accade molto più facilmente che avvenga prima il raggiungimento della tensione di snervamento dell'acciaio piuttosto che della totale perdita di aderenza (caso 2).

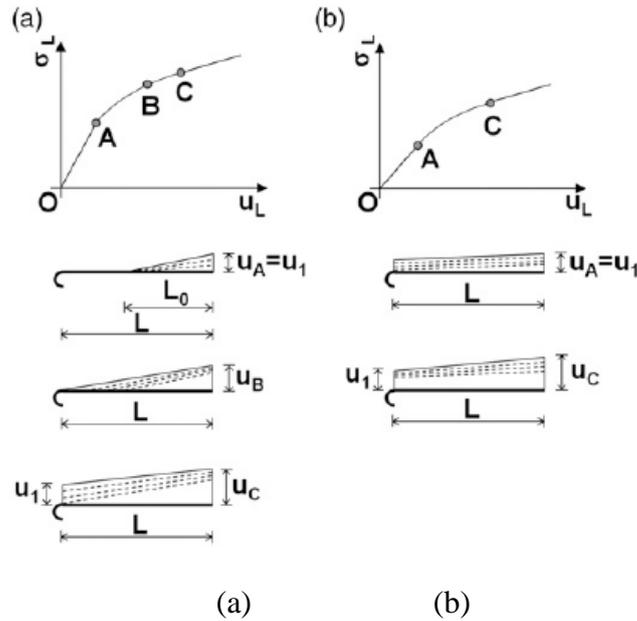


Figura 54: Relazione $\sigma-u$: (a) $L_0 \leq L$, (b) $L_0 > L$

Nell'ottica della modellazione con elementi a fibre, come ampiamente descritto nel paragrafo precedente a proposito del modello di Spacone, per poter implementare il modello nel software c'è la necessità di passare da un legame tensioni- scorrimenti a un legame tensioni- deformazioni.

Ciò è possibile attraverso il concetto di lunghezza del tratto di integrazione, per quanto riguarda la plasticità diffusa, e della lunghezza di cerniera plastica per quanto riguarda gli elementi a plasticità concentrata.

Riferendosi al secondo caso, a partire dal legame $\sigma - u$, si ricava il legame $\sigma - \varepsilon$ distribuendo gli scorrimenti sulla lunghezza di cerniera plastica L_{pl} .

$$\varepsilon = \frac{u_{L,TOT}}{L_{pl}} \quad (3.2.15)$$

Dove $u_{L,TOT}$ rappresenta lo scorrimento complessivo della barra rispetto ai due blocchi di calcestruzzo a ridosso della fessura:

$$u_{L,TOT} = u_{L,A} + u_{L,B} \quad (3.2.16)$$

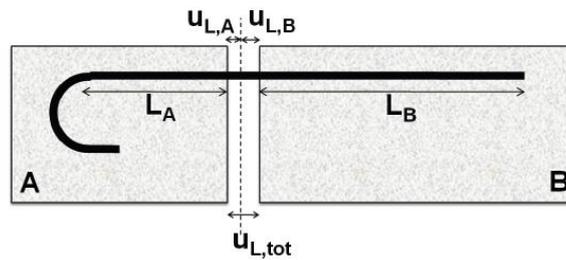


Figura 55: Scorrimento relativo totale

$u_{L,A}$ rappresenta lo scorrimento della barra uncinata rispetto al blocco di calcestruzzo A, mentre $u_{L,B}$ rappresenta lo scorrimento del blocco B rispetto alla barra. Il legame $\sigma - \varepsilon$ così ricavato da assegnare alle fibre di acciaio può definirsi come uno "pseudo legame tensione-deformazione" in prima battuta perché esso rappresenta un legame costitutivo fittizio che tiene già conto degli scorrimenti delle barre di armatura, e poi perché all'interno del programma tali deformazioni verranno nuovamente divise per la lunghezza del tratto di integrazione ottenendo nuovamente gli scorrimenti.

Un confronto tra il legame $\sigma - \varepsilon$ ottenuto con il modello semplificato ed il legame in perfetta aderenza è riportato nella figura sottostante. È possibile notare come gli scorrimenti aumentino la deformabilità delle barre e ne riducano drasticamente la capacità dissipativa.

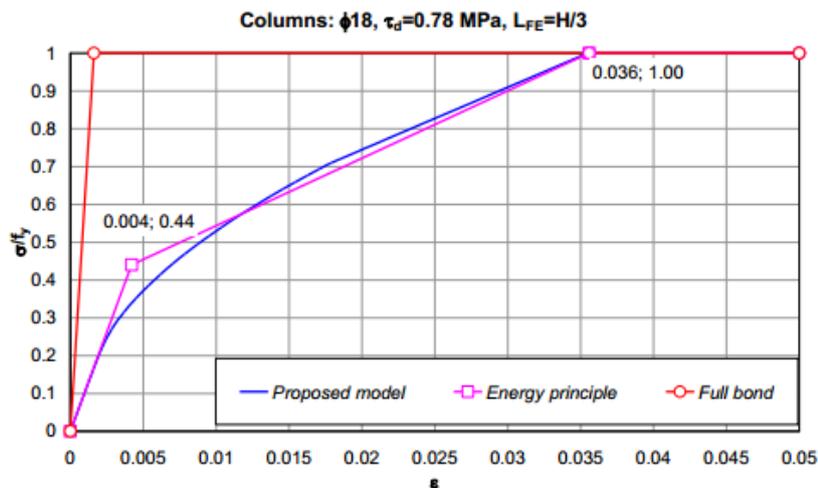


Figura 56: Confronto tra un legame in perfetta aderenza e il modello con scorrimenti Braga et al.

3.3 Legge modificata dell'acciaio: formulazione esponenziale monotona

Il modello analitico proposto da Braga et al.[21] , rappresenta un buon compromesso tra accuratezza dei risultati e onere computazionale. In particolare, la Figura 57 evidenzia l'ottima corrispondenza con modelli più raffinati quale il modello proposto da Monti, Filippou, Spacone [1997][29] dal cui confronto emergono differenze poco significative, in termini di curva tensione- scorrimento (σ_L, u_L) di estremità della barra:

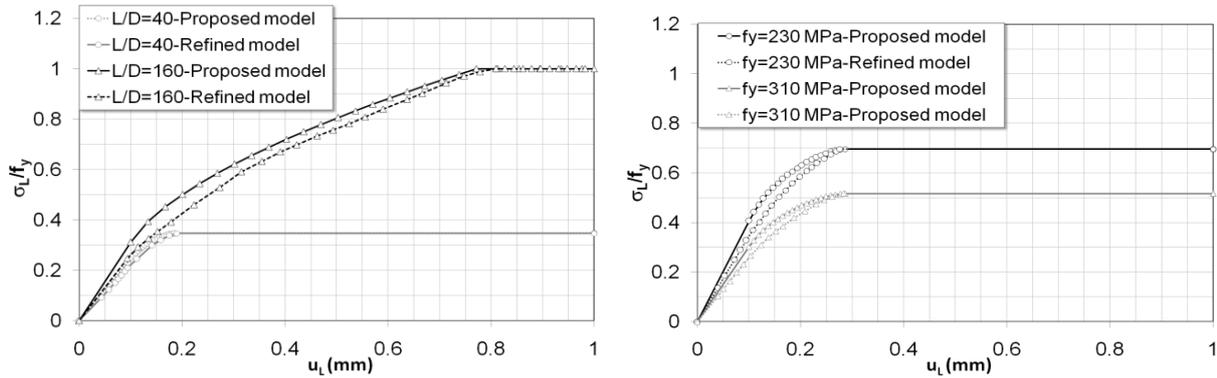


Figura 57: Confronti della legge tensioni-scorrimenti all'estremità della barra, al variare del rapporto L/D e della tensione di snervamento f_y tra il modello Braga et al. e il modello Monti, Filippou, Spacone [1997].

Nonostante ciò il modello, presenta due problematiche:

- violazione dell'equilibrio e la congruenza lungo l'ascissa x della barra;
- Mancanza della descrizione del comportamento ciclico della barra con scorrimenti.

Per quanto riguarda il primo punto, l'imposizione di un campo di scorrimenti lineare rappresenta senza dubbio la più importante semplificazione del modello: questa ipotesi di fatto, seppure non altera in maniera significativa il risultato in termini di scorrimento totale u_L all'estremità della barra, e presenta come già visto ottime rispondenze in termini globali con modelli più raffinati, (Figura 57 e in Figura 58), conduce a delle incongruenze puntuali lungo l'ascissa x tra il campo di scorrimenti imposto e il campo di scorrimenti dedotto dall'equazione di compatibilità (3.2.5).

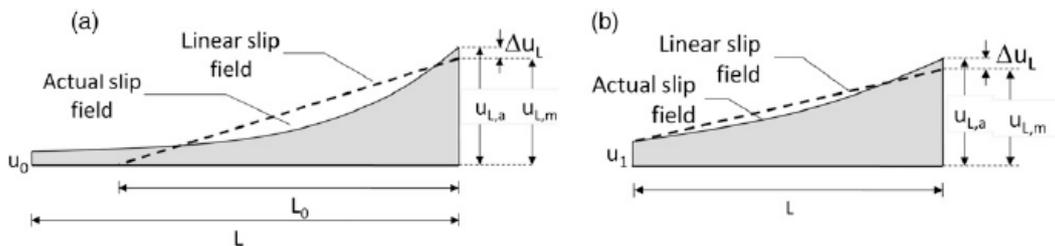


Figura 58: Campo di scorrimenti lungo la barra: (a) buone condizioni di ancoraggio, (b) caso di pull-out

Per esempio, infatti, considerando il caso in cui $u_L \leq u_1, u_0 < u_1$, dal confronto tra l'equazione dello scorrimento imposto (3.2.1) e quella derivante dalla compatibilità (3.2.5), si deduce un campo di scorrimenti cubico lungo la barra:

$$u(x) = u_0 + \frac{1}{E_S} \cdot \left\{ (k_h \cdot u_0) \cdot x + \left(\frac{2 \cdot \tau_d \cdot u_0}{d_b \cdot u_1} \right) \cdot x^2 + \left[\frac{2 \cdot \tau_d}{3 \cdot d_b \cdot u_1 \cdot L} \cdot (u_L - u_0) \right] \cdot x^3 \right\}$$

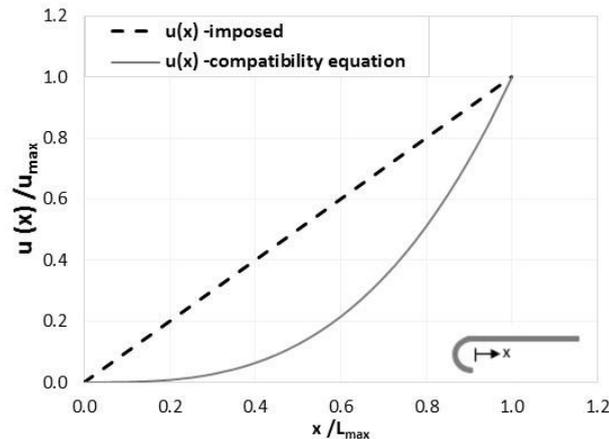


Figura 59: Differenza tra campo di scorrimenti imposto e dedotto

Al fine di minimizzare se non addirittura in molti casi eliminare suddetta incongruenza, il campo di scorrimenti lineare, alla base del modello sopradescritto, è stato sostituito da un campo di scorrimenti esponenziale.

Tale campo riduce incredibilmente l'incongruenza, presenta un andamento degli scorrimenti lungo la barra più verosimile rispetto al modello lineare, semplificando tra l'altro ulteriormente il numero di equazioni, consentendo in ogni caso di avere un processo non iterativo per il calcolo del legame σ_L - u_L e quindi pochi oneri computazionali per il suo uso non solo a livello di elemento, ma anche a livello di struttura.

Esso, di fatto, mantiene la semplicità del modello precedente ma ne migliora e completa alcuni aspetti. Per quanto riguarda il secondo punto, è stata condotta un'estesa analisi parametrica tramite modelli numerici, che ha consentito di comprendere il comportamento del ramo di scarico e di ricarica della barra con scorrimenti e di legarlo al tratto monotono di cui si conosce la formulazione analitica.

Di seguito sono presentati:

- Formulazione esponenziale monotona degli scorrimenti considerando incrudimento dell'acciaio e plateau: pre snervamento;
- Formulazione esponenziale monotona degli scorrimenti considerando incrudimento dell'acciaio e plateau: post snervamento;
- Formulazione ciclica relativa al modello semplificato degli scorrimenti.

3.3.1 Formulazione esponenziale con acciaio elasto plastico incrudente e plateau

Il modello esponenziale è basato sulle seguenti ipotesi di base:

1. Il campo di scorrimenti $u(x)$ è esponenziale lungo la barra (Figura 60);
2. La legge delle tensioni di aderenza-scorrimenti è di tipo elasto- plastico perfetto (Figura 61);
3. La legge costitutiva dell'acciaio è di tipo elasto-plastico con incrudimento e plateau (Figura 62);
4. Ogni ancoraggio all'estremità della barra è descritto da una funzione lineare dello scorrimento u_0 dell'estremità vincolata (Figura 63);

Condizioni di pre-snervamento ($\sigma_L < \sigma_Y$):

Di seguito è analizzata l'evoluzione dello stato tensionale e di scorrimenti nella barra nelle condizioni in cui nessuna delle sezioni della barra abbia raggiunto lo snervamento.

La legge esponenziale che descrive gli scorrimenti lungo la barra è data dall'equazione (3.3.1) :

$$u(x) = u_0 \left(\frac{u_L}{u_0} \right)^{\frac{x}{L}} \quad (3.3.1)$$

Dove u_L e u_0 sono rispettivamente gli scorrimenti all'estremità libera e vincolata della barra, x la generica ascissa lungo di essa, L la sua lunghezza Figura 60:

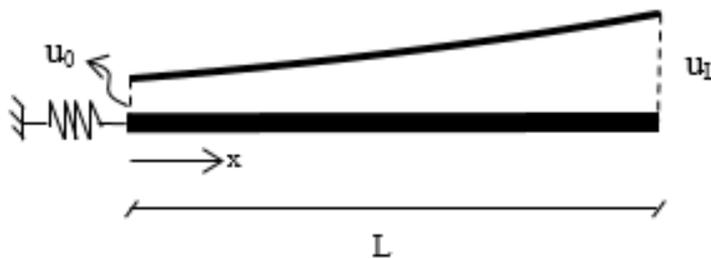


Figura 60: Campo di scorrimenti esponenziale lungo la barra

La legge di aderenza monotona di tipo elasto-plastica, presenta e espressioni differenti a seconda del valore dello scorrimento $u(x)$:

$$\tau(x) = \frac{\tau_d}{u_1} u(x) \quad u(x) \leq u_1 \quad (3.3.2)$$

$$\tau(x) = \tau_d \quad u(x) \geq u_1 \quad (3.3.3)$$

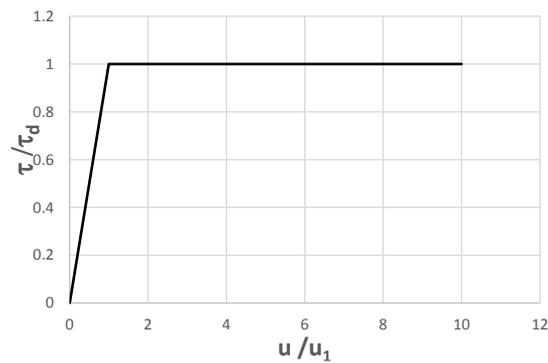


Figura 61: Legge tensioni tangenziali-scorrimenti all'interfaccia barra-clc

La legge costitutiva dell'acciaio, è di tipo elasto-plastico incrudente e tiene in conto anche della presenza del plateau:

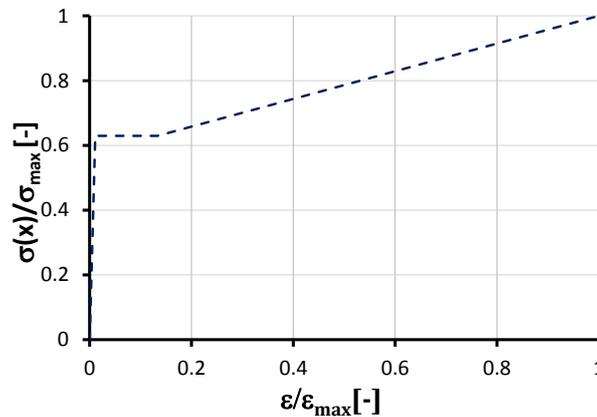


Figura 62: Legame costitutivo dell'acciaio: legge elasto plastica

La quarta ipotesi conserva l'idea del modello originario, per cui l'uncino è assimilato a una molla equivalente, con rigidezza k_h data dal rapporto tra la forza di incipiente sfilamento F_h e lo scorrimento relativo letto nella sezione iniziale della barra u_0 :

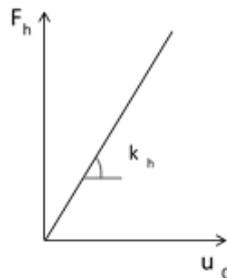


Figura 63: Rigidzza equivalente dell'uncino in condizioni di sfilamento incipiente

La formulazione proposta consente ancora una volta di ottenere la relazione tensione-scorrimento globali (Figura 64) per una barra immersa nel calcestruzzo, ancorata o meno, e di monitorare in ogni punto lungo l'ascissa x lo stato tenso-deformativo della barra stessa, fotografando l'andamento degli scorrimenti, delle tensioni tangenziali e delle tensioni normali alla sezione trasversale della barra stessa.

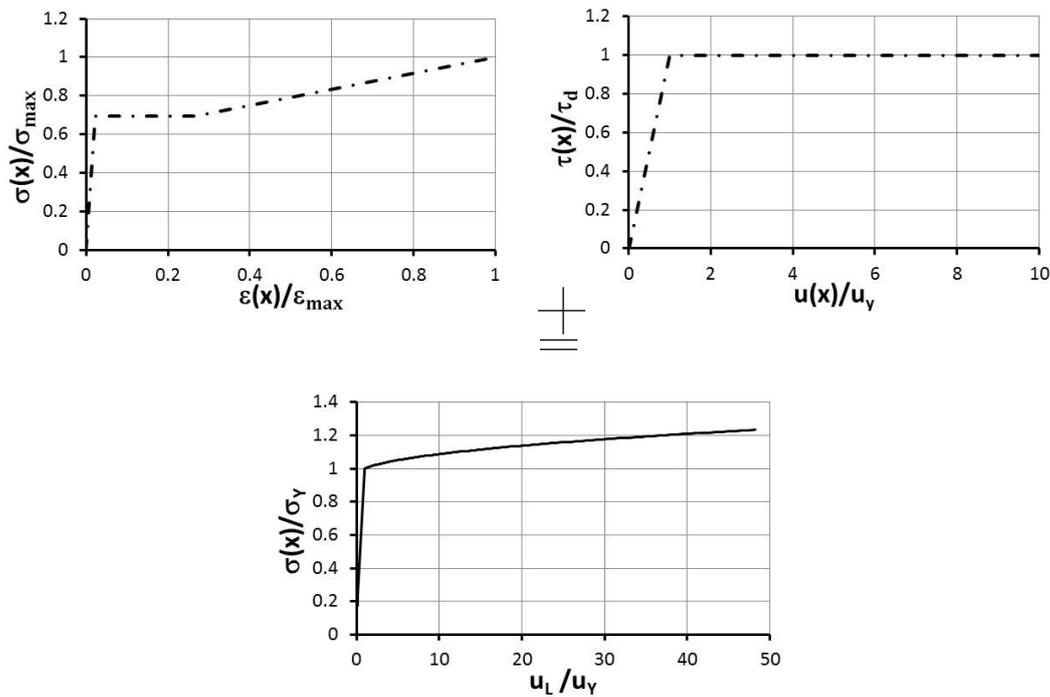


Figura 64: Costruzione della curva σ_L - u_L a partire dalla curva dell'acciaio e dell'aderenza

Per potere costruire suddetta curva si parte dalle equazioni di equilibrio e congruenza, scritte come di seguito.

L'equazione di equilibrio, riportata di seguito, è espressa come somma dell'integrale delle tensioni lungo la barra e della forza offerta dall'uncino in condizioni di sfilamento incipiente, dove d_b e A_b rappresentano rispettivamente il diametro della barra e l'area della sezione della stessa, F_h è la forza che agisce sull'uncino data dal prodotto tra la rigidezza k_h e lo scorrimento nella sezione iniziale u_0 .

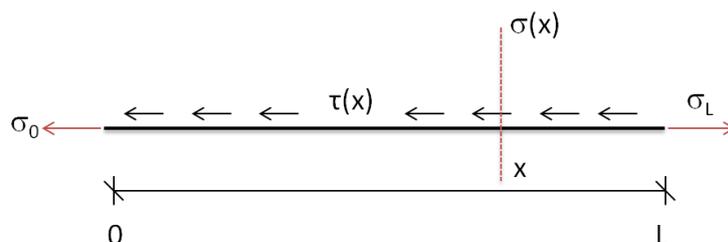


Figura 65: Equilibrio lungo la barra: condizione generica

$$\sigma(x) = \frac{F(x)}{A_b} = \frac{1}{A_b} \left[\int_0^x \tau(x) \pi d_b dx + F_h \right] = \frac{4}{d_b} \left[\int_0^x \tau(x) dx \right] + \frac{F_h}{A_b} \quad (3.3.4)$$

L'equazione di compatibilità conduce invece al campo di scorrimenti dedotto, e si scrive come di seguito:

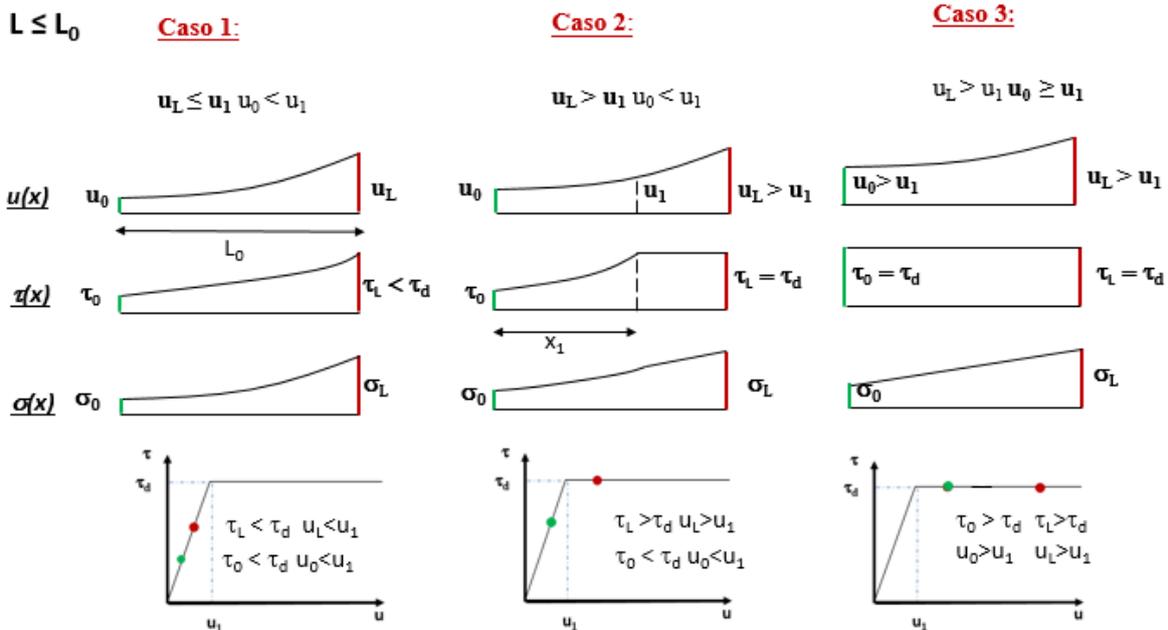
$$u(x) = u_0 + \Delta u(x) = u_0 + u_E(x) \quad (3.3.5)$$

In cui la componente $u_E(x)$, in condizioni di acciaio elasto-plastico e comunque fino allo snervamento dell'acciaio, diventa:

$$\Delta u(x) = u_L - u_0 = \int_0^x \frac{\sigma(x)}{E_s} dx = u_E(x) \quad (3.3.6)$$

A seconda del raggiungimento delle tensione di aderenza, solo all'estremità libera $x=L$, o su tutta la barra (estremità vincolata $x=0$), si crea un certo numero di condizioni corrispondenti a certi stati della barra stessa, governati da specifiche equazioni.

Di seguito sono analizzate dette condizioni (o casi) e la trattazione analitica che ne deriva.



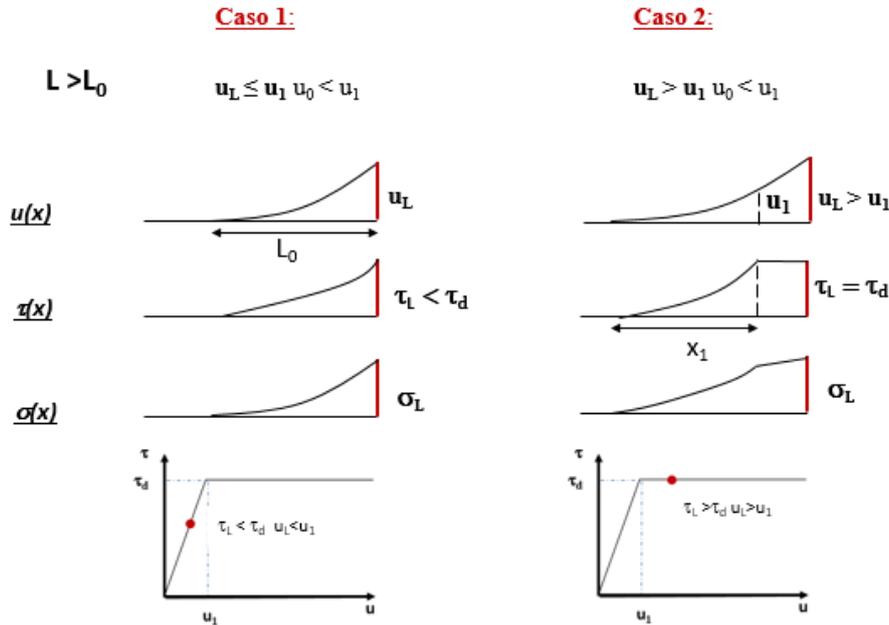


Figura 66: Schematizzazione qualitativa dei casi possibili in fase di pre-sneramento: nel caso in cui la barra risulta ancorata per la sua intera lunghezza (a), o solo per un tratto(b)

Caso 1 $u_L \leq u_1, u_0 < u_1$

In questo caso, in nessuna delle sue sezioni di estremità della barra è stata raggiunto lo scorrimento u_1 per cui si ha la tensione di aderenza massima τ_d :

Per dedurre la coppia σ_L - u_L , si parte dall'equazione di equilibrio, esplicitando le tensioni tangenziali di aderenza rispetto agli scorrimenti come segue:

$$\tau(x) = \frac{\tau_d}{u_1} u_0 \left(\frac{u_L}{u_0} \right)^{\frac{x}{L}} \quad (3.3.7)$$

Che inserita nell'equazione di equilibrio assume la forma:

$$\sigma(x) = \frac{4}{d_b} \left[\int_0^x \frac{\tau_d}{u_1} u_0 \left(\frac{u_L}{u_0} \right)^{\frac{x}{L}} dx \right] + k_h^* \cdot u_0 \quad (3.3.8)$$

dove k_h^* è la rigidità secante espressa come di seguito:

$$k_h^* = \frac{k_h}{A_b} \quad (3.3.9)$$

Sviluppando l'equazione (3.4.8) si ottiene:

$$\sigma(x) = \frac{4\tau_d u_0 L}{d_b u_1 \ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} \left[\left(\frac{u_L}{u_0}\right)^{\frac{x}{L}} - 1 \right] + k_h^* \cdot u_0 \quad (3.3.10)$$

Che in corrispondenza dell'estremità libera assume la forma:

$$\sigma_L = \sigma(L) = \frac{4\tau_d u_0 L}{d_b u_1 \ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} \left[\left(\frac{u_L}{u_0}\right) - 1 \right] + k_h^* \cdot u_0 \quad (3.3.11)$$

Lo scorrimento all'estremità libera u_L è, invece dato dall'equazione di compatibilità (3.3.5), in cui $x = L$:

$$u_L = u_0 + u_E(L) \quad (3.3.12)$$

in cui $u_E(L)$ è calcolato considerando l'acciaio come materiale elastico fino allo snervamento:

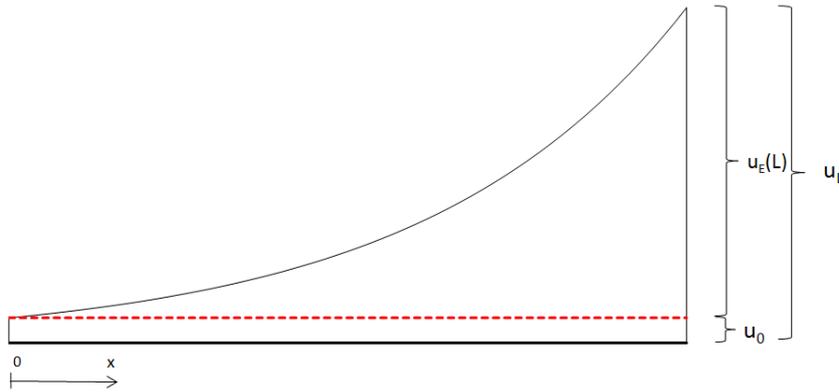


Figura 67: Congruenza degli scorrimenti fino all'estremità libera della barra

$$u_E(L) = \frac{1}{E_s} \int_0^L \sigma(x) dx \quad (3.3.13)$$

Sostituendo la (3.3.10) in (3.3.12), si ottiene

$$u_E(x) = \frac{1}{E_s} \int_0^x \left\{ \frac{4\tau_d u_0 L}{d_b u_1 \ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} \left[\left(\frac{u_L}{u_0}\right)^{\frac{x}{L}} - 1 \right] + k_h^* \cdot u_0 \right\} dx \quad (3.3.14)$$

Che sviluppata, per $x=L$ diventa:

$$u_E(L) = \frac{1}{E_s} \left\{ \frac{4\tau_d u_0 L^2}{d_b u_1 \ln^2\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} \left[\left(\frac{u_L}{u_0}\right) - 1 \right] - \frac{4\tau_d L^2 u_0}{d_b u_1 \ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} + (k_h^* \cdot u_0) \cdot L \right\} \quad (3.3.15)$$

Da cui si ottiene lo scorrimento di estremità, sostituendo la (3.3.15) in (3.3.12) :

$$u_L = u_0 + \frac{4\tau_d u_0 L^2}{E_s d_b u_1 \ln^2\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} \left[\left(\frac{u_L}{u_0}\right) - 1 \right] - \frac{4\tau_d L^2 u_0}{E_s d_b u_1 \ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} + \frac{L}{E_s} (k_h^* \cdot u_0) \quad (3.3.16)$$

Per semplificazione si pone :

$$\alpha = \frac{4 \cdot \tau_d \cdot L^2}{E_s d_b u_1} ; \beta = \frac{L \cdot k_h^*}{E_s} ; \eta_L = \frac{u_L}{u_0} \quad (3.3.17)$$

ottenendo:

$$u_L = u_0 \cdot \left\{ 1 + \left\{ \frac{\alpha}{\ln(\eta_L)} \left[\frac{(\eta_L - 1)}{\ln(\eta_L)} - 1 \right] + \beta \right\} \right\} \quad (3.3.18)$$

Dividendo per u_0 , si ha:

$$\frac{u_L}{u_0} = 1 + \frac{\alpha}{\ln^2\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} \left(\frac{u_L}{u_0} - 1 \right) - \frac{\alpha}{\ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} + \beta \quad (3.3.19)$$

l'equazione precedente diventa:

$$\frac{\alpha}{\ln^2(\eta_{L0})} (\eta_{L0} - 1) - \eta_{L0} - \frac{\alpha}{\ln(\eta_{L0})} + \beta + 1 = 0 \quad (3.3.20)$$

oppure:

$$\frac{\alpha}{\ln(\eta_{L0})} \left[\frac{\eta_{L0} - 1}{\ln(\eta_{L0})} - 1 \right] - \eta_{L0} + \beta + 1 = 0 \quad (3.3.21)$$

Da cui si ricava il rapporto $\eta_{L0} = \left(\frac{u_L}{u_0}\right)$, costante nell'intervallo $u_L \leq u_1$. Per ogni u_L assegnato il

corrispondente u_0 è dato dalla relazione lineare: $u_0 = \eta_{L0} \cdot u_L$.

In generale imponendo la congruenza degli scorrimenti, si ottiene, a partire da quello assegnato, il campo di spostamenti finale $u(x)$.

$$u(x) = u_0 + u_E(x) \quad (3.3.22)$$

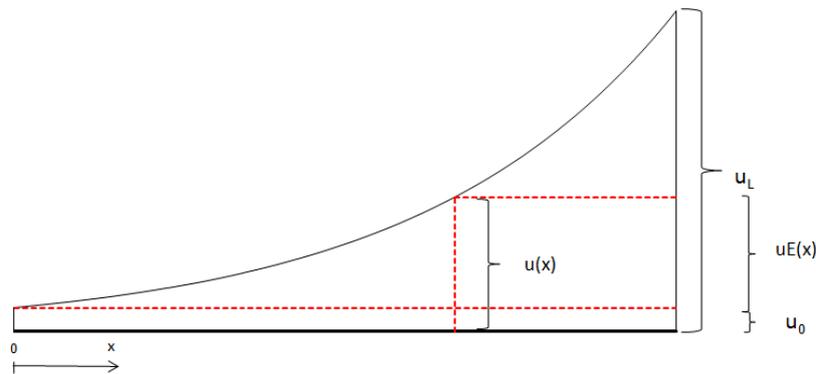


Figura 68: Congruenza degli scorrimenti in un punto qualsiasi della barra nel caso in cui $u(x) \leq u_1$

Per ogni u_L assegnato, il campo di spostamenti $u(x)$ è dato univocamente dalla relazione:

$$u(x) = u_0 + \frac{1}{E_s} \left\{ \frac{4\tau_d u_0 L^2}{d_b u_1 \ln^2\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} \left[\left(\frac{u_L}{u_0}\right)^{\frac{x}{L}} - 1 \right] - \frac{4\tau_d L u_0}{d_b u_1 \ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} x + (k_h^* \cdot u_0) \cdot x \right\} \quad (3.3.23)$$

Ossia:

$$u(x) = \frac{u_L}{\eta_{L0}} \cdot \left\{ 1 + \left[\frac{\alpha}{\ln^2(\eta_{L0})} \cdot \left((\eta_{L0})^{\frac{x}{L}} - 1 \right) + \left(-\frac{\alpha}{\ln(\eta_{L0})} + \beta \right) \cdot \frac{x}{L} \right] \right\} \quad (3.3.24)$$

Si può notare che il campo di spostamenti $u(x)$ dipende linearmente da u_L ed è dato dal prodotto:

$$u(x) = u(x, u_L) = u_L \cdot \frac{f(x)}{\eta_{L0}} \quad (3.3.25)$$

essendo $f(x)$ una funzione di x , invariante in tutto il campo $u_L \leq u_1$.

Anche l'equazione che descrive lo stato tensionale lungo la barra (3.4.10) può essere espressa nella forma seguente:

$$\sigma(x) = \left\{ \frac{4\tau_d L}{d_b u_1 \ln(\eta_{L0})} \left[(\eta_{L0})^{\frac{x}{L}} - 1 \right] + k_h^* \right\} \cdot \frac{u_L}{\eta_{L0}} \quad (3.3.26)$$

Per ogni u_L compreso nell'intervallo $0 \leq u_L \leq u_1$, la corrispondente σ_L (3.4.11) è data dall'equazione:

$$\sigma_L = \sigma(L) = \left[\frac{4\tau_d L}{d_b u_1 \ln(\eta_{L0})} \cdot (\eta_{L0} - 1) + k_h^* \right] \cdot \frac{u_L}{\eta_{L0}} \quad (3.3.27)$$

In particolare, per il punto limite superiore dell'intervallo $u_L = u_1$, la tensione corrispondente σ_1 è data dall'equazione:

$$\sigma_1 = \sigma(L, u_1) = \left[\frac{4\tau_d L}{d_b u_1 \ln(\eta_{L0})} (\eta_{L0} - 1) + k_h^* \right] \cdot \frac{u_1}{\eta_{L0}} \quad (3.3.28)$$

Riassumendo, si ottiene la coppia di valori σ_L, u_L :

- $\sigma_L = \sigma(L) = \left[\frac{4\tau_d L}{d_b u_1 \ln(\eta_{L0})} \cdot (\eta_{L0} - 1) + k_h^* \right] \cdot \frac{u_L}{\eta_{L0}} \quad (3.3.27)$

- $u_L = u_0 \cdot \left\{ 1 + \left[\frac{\alpha}{\ln(\eta_L)} \left[\frac{(\eta_L - 1)}{\ln(\eta_L)} - 1 \right] + \beta \right] \right\} \quad (3.3.29)$

Se $\sigma_1 > f_y$ la barra raggiunge lo snervamento nel campo $u_L \leq u_1$. In questo caso, lo scorrimento corrispondente alla tensione di snervamento f_y è dato dall'equazione:

$$u_{Ly} = f_y \cdot \eta_{L0} \cdot \left[\frac{4\tau_d L}{d_b u_1 \ln(\eta_{L0})} (\eta_{L0} - 1) + k_h^* \right]^{-1} \quad (3.3.29Y)$$

Caso 2 $u_L \geq u_1, u_0 < u_1$

Se si immagina che la barra continui ad essere soggetta a uno spostamento (o forza) di estremità crescente che tende a sfilarla dal blocco di calcestruzzo, gli scorrimenti (e le tensioni) crescono, finchè non solo lo scorrimento di estremità avrà raggiunto lo scorrimento u_1 (punto in comune con il caso precedente, Caso 1) ma lo scorrimento penetrerà all'interno della barra per una lunghezza pari a $(x - x_1)$.

Di seguito sono riportate le espressioni delle equazioni relative all'equilibrio e alla congruenza a seconda della posizione dell'ascissa rispetto all'ascissa x_1 :

se $x \leq x_1$:

$$\sigma_{E1}(x) = \frac{4}{d_b} \left[\int_0^x \frac{\tau_d}{u_1} u(x) dx \right] + k_h^* \cdot u_0 \quad (3.3.30)$$

$$u_{E1}(x) = \frac{1}{ES} \left[\int_0^x \sigma_{E1}(x) dx \right] \quad (3.3.31)$$

se $x > x_1$:

$$\sigma_{E2}(x) = \frac{4}{d_b} \left[\int_0^{x_1} \frac{\tau_d}{u_1} u(x) dx + \int_{x_1}^x \tau_d dx \right] + k_h^* \cdot u_0 \quad (3.3.32)$$

$$u_{E2}(x) = \frac{1}{ES} \left[\int_0^{x_1} \sigma_{E1}(x) dx + \int_{x_1}^x \sigma_{E2}(x) dx \right] \quad (3.3.33)$$

Dove x_1 è la porzione di barra dove lo scorrimento $u(x)$ è minore di u_1 ed è espressa dall'equazione :

$$x_1 = \frac{\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right)}{\ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} \cdot L \quad (3.3.34)$$

Sviluppando le equazioni precedenti si ha:

per $x \leq x_1$

$$\sigma_{E1}(x) = k_h^* \cdot u_0 + \frac{4 \cdot L \cdot \tau_d \cdot u_0 \left[\left(\frac{u_L}{u_0}\right)^{\frac{x}{L}} - 1 \right]}{d \cdot u_1 \cdot \ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} \quad (3.3.35)$$

$$u_{E1}(x) = \frac{1}{E_s} \left\{ \frac{4\tau_d u_0 L^2}{d_b u_1 \ln^2\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} \left[\left(\frac{u_L}{u_0}\right)^{\frac{x}{L}} - 1 \right] - \frac{4\tau_d L u_0}{d_b u_1 \ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} x + (k_h^* \cdot u_0) \cdot x \right\} \quad (3.3.36)$$

per $x > x_1$

$$\sigma_{E2}(x) = k_h^* u_0 + \frac{4 \cdot L \cdot \tau_d \cdot u_0 \left[\left(\frac{u_L}{u_0} \right)^{\frac{x_1}{L}} - 1 \right]}{d_b \cdot u_1 \cdot \ln \left(\frac{u_L}{u_0} \right)} + \frac{4 \cdot \tau_d \cdot (x - x_1)}{d_b} \quad (3.3.37)$$

$$u_{E2}(x) = \frac{4\tau_d u_0 L^2}{E_s \cdot d_b \cdot u_1 \ln^2 \left(\frac{u_L}{u_0} \right)} \cdot \left(\frac{u_L}{u_0} \right)^{\frac{x_1}{L}} - \frac{4\tau_d u_0 L^2}{E_s \cdot d_b \cdot u_1 \ln^2 \left(\frac{u_L}{u_0} \right)} - \frac{4\tau_d u_0 L}{E_s \cdot d_b \cdot u_1 \ln \left(\frac{u_L}{u_0} \right)} \cdot x_1 + \frac{4\tau_d u_0 L (x - x_1)}{E_s \cdot d_b \cdot u_1 \ln \left(\frac{u_L}{u_0} \right)} \cdot \left(\frac{u_L}{u_0} \right)^{\frac{x_1}{L}} +$$

$$- \frac{4\tau_d u_0 L (x - x_1)}{E_s \cdot d_b \cdot u_1 \ln \left(\frac{u_L}{u_0} \right)} + \frac{4\tau_d (x - x_1)^2}{2 \cdot E_s \cdot d_b} + \frac{k_h^* \cdot u_0}{E_s} \cdot x \quad (3.3.38)$$

In corrispondenza dell'ascissa per cui si ha $x=L$, si ha lo scorrimento:

$$u_{E2}(L) = \frac{4\tau_d u_0 L^2}{E_s \cdot d_b \cdot u_1 \ln^2 \left(\frac{u_L}{u_0} \right)} \cdot \left(\frac{u_L}{u_0} \right)^{\frac{x_1}{L}} - \frac{4\tau_d u_0 L^2}{E_s \cdot d_b \cdot u_1 \ln^2 \left(\frac{u_L}{u_0} \right)} - \frac{4\tau_d u_0 L}{E_s \cdot d_b \cdot u_1 \ln \left(\frac{u_L}{u_0} \right)} \cdot x_1 + \frac{4\tau_d u_0 L \cdot (L - x_1)}{E_s \cdot d_b \cdot u_1 \ln \left(\frac{u_L}{u_0} \right)} \cdot \left(\frac{u_L}{u_0} \right)^{\frac{x_1}{L}} +$$

$$- \frac{4\tau_d u_0 L \cdot (L - x_1)}{E_s \cdot d_b \cdot u_1 \ln \left(\frac{u_L}{u_0} \right)} + \frac{4\tau_d (L - x_1)^2}{2 \cdot E_s \cdot d_b} + \frac{k_h^* \cdot u_0}{E_s} \cdot L \quad (3.3.39)$$

L'equazione di congruenza in tal caso può essere scritta come segue:

$$u_L = u_0 + \left\{ \frac{\alpha \cdot u_0}{\ln^2 \left(\frac{u_L}{u_0} \right)} \left[\left(\frac{u_L}{u_0} \right)^{\frac{\ln \left(\frac{u_1}{u_0} \right)}{\ln \left(\frac{u_L}{u_0} \right)}} - 1 - \ln \left(\frac{u_1}{u_0} \right) \cdot \left(\frac{u_L}{u_0} \right)^{\frac{\ln \left(\frac{u_1}{u_0} \right)}{\ln \left(\frac{u_L}{u_0} \right)}} \right] + \frac{\alpha \cdot u_0}{\ln \left(\frac{u_L}{u_0} \right)} \left[\left(\frac{u_L}{u_0} \right)^{\frac{\ln \left(\frac{u_1}{u_0} \right)}{\ln \left(\frac{u_L}{u_0} \right)}} - 1 \right] + \frac{\alpha \cdot u_1 \ln^2 \left(\frac{u_L}{u_1} \right)}{2 \ln^2 \left(\frac{u_L}{u_0} \right)} + \beta \cdot u_0 \right\} \quad (3.3.40)$$

avendo posto: $\alpha = \frac{4 \cdot \tau_d \cdot L^2}{E_s d_b u_1}$; $\beta = \frac{L \cdot k_h^*}{E_s}$

Dividendo per u_0 , si ha:

$$\frac{u_L}{u_0} = 1 + \left\{ \frac{\alpha}{\ln^2\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} \left[\left(\frac{u_L}{u_0}\right)^{\frac{\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right)}{\ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right)}} - 1 - \ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) \cdot \left(\frac{u_L}{u_0}\right)^{\frac{\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right)}{\ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right)}} \right] + \frac{\alpha}{\ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} \left[\left(\frac{u_L}{u_0}\right)^{\frac{\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right)}{\ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right)}} - 1 \right] + \frac{\alpha \cdot \frac{u_1}{u_0} \ln^2\left(\frac{u_L}{u_1}\right)}{2 \ln^2\left(\frac{u_L}{u_0}\right)} + \beta \right\}$$

(3.3.41)

L'equazione precedente può essere scritta nella forma:

$$\eta_{L0} = 1 + \frac{\alpha}{\lambda_{L0}^2} \left[(1 - \lambda_{10}) \cdot (\eta_{L0})^{\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{L0}}} - 1 \right] + \frac{\alpha}{\lambda_{L0}} \left[(\eta_{L0})^{\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{L0}}} - 1 \right] + \frac{\alpha \cdot \eta_{10} \cdot \lambda_{L1}^2}{2 \lambda_{L0}^2} + \beta \quad (3.3.42)$$

dove:

$$\eta_{L0} = \frac{u_L}{u_0}; \quad \eta_{10} = \frac{u_1}{u_0}; \quad \lambda_{L0} = \ln\left(\frac{u_L}{u_0}\right); \quad \lambda_{10} = \ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right); \quad \lambda_{L1} = \ln\left(\frac{u_L}{u_1}\right)$$

Per ogni $u_L \geq u_1$, si ricava il valore del rapporto η_{L0} che soddisfa l'equazione:

$$\frac{\alpha}{\lambda_{L0}^2} \left[(1 - \lambda_{10}) \cdot (\eta_{L0})^{\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{L0}}} - 1 + \frac{\eta_{10} \cdot \lambda_{L1}^2}{2} \right] + \frac{\alpha}{\lambda_{L0}} \left[(\eta_{L0})^{\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{L0}}} - 1 \right] - \eta_{L0} + \beta + 1 = 0$$

VERIFICA

per $u_L = u_1$ l'equazione precedente degenera nella corrispondente equazione trovata per il campo

$u_L \leq u_1$. Per $u_L = u_1$ si ha:

$$\frac{\alpha}{\lambda_{L0}^2} (\eta_{L0} - \lambda_{L0} \cdot \eta_{L0} - 1) + \frac{\alpha}{\lambda_{L0}} (\eta_{L0} - 1) - \eta_{L0} + \beta + 1 = 0$$

$$\frac{\alpha}{\lambda_{L0}^2} (\eta_{L0} - 1) - \frac{\alpha}{\lambda_{L0}} - \eta_{L0} + \beta + 1 = 0$$

c.v.d.

Si ha dunque:

$$u_0 = \eta_{L0} \cdot u_L$$

Il nuovo campo di spostamenti fornito dall'equazione di congruenza è dato da:

$$u(x) = u_0 + \Delta u_{E0,x1} + \Delta u_{E1,x} = u_0 + u_E(x)$$

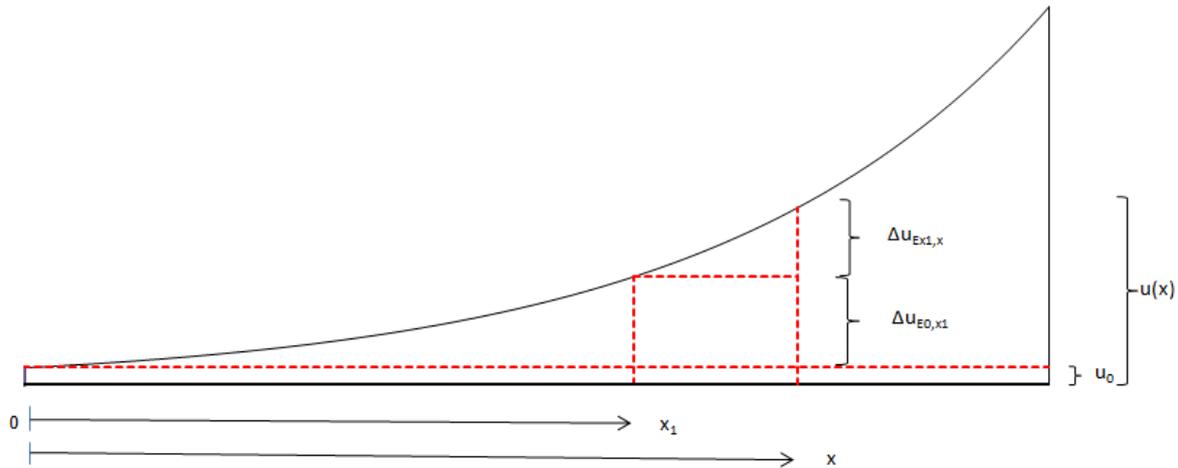


Figura 69: Congruenza degli scorrimenti in un punto qualsiasi lungo la barra nel caso in cui $u(x) > u_1$
Riassumendo, si ottiene la coppia di valori σ_L, u_L :

$$\bullet \quad \sigma_L = u_0 \cdot \left[\frac{\left(\eta_L \frac{x_1}{L} - 1 \right)}{L \cdot \lambda_{L0}} + \frac{4 \cdot \tau_d \cdot (L - x_1)}{d_b} + k_h^* \right] \quad (3.3.43)$$

$$\bullet \quad u_L = u_0 \left\{ 1 + \left\{ \frac{\alpha}{\lambda_{L0}} \left[\frac{1}{\lambda_{L0}} \left(\gamma_L \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{L0}} - 1 - \lambda_{10} \cdot (\eta_L)^{\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{L0}}} \right) + \left(\eta_L \frac{\ln(\gamma_1)}{\ln(\gamma_L)} - 1 \right) \right] \cdot \beta \right\} \right\} + \frac{\alpha \cdot u_1 \lambda_{L1}^2}{2 \lambda_{L0}^2} \quad (3.3.44)$$

Caso 3 $u_L \geq u_1, u_0 \geq u_1$

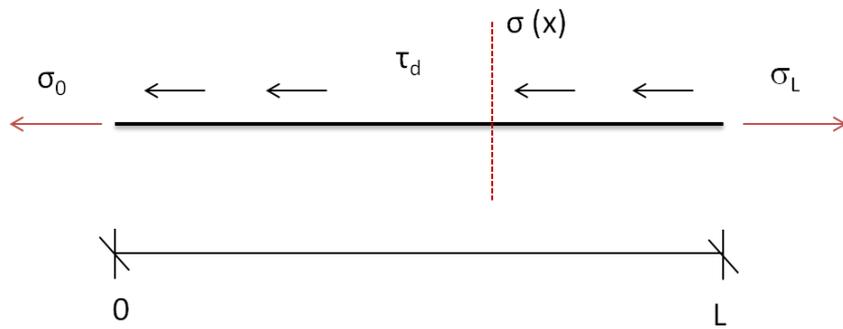
Le equazioni del caso precedente sono valide finché la tensione τ_d non ha coinvolto anche l'ultima sezione della barra, ossia quella in prossimità dell'uncino.

Lungo tutta la barra, a questo punto, è stata raggiunta la tensione di aderenza massima τ_d :

$$\tau(x) = \tau_d \quad \forall x$$

Da cui segue, per l'equilibrio:

$$\sigma(x) = \frac{4}{d_b} \int_0^x \tau_d dx + k_h^* \cdot u_0 \quad (3.3.45)$$



Sviluppando, si ottiene una relazione lineare della tensione rispetto all'ascissa x , e che dipende esclusivamente dallo scorrimento u_0 .

$$\sigma(x) = k_h^* u_0 + \frac{4 \cdot \tau_d}{d_b} \cdot x \quad (3.3.46)$$

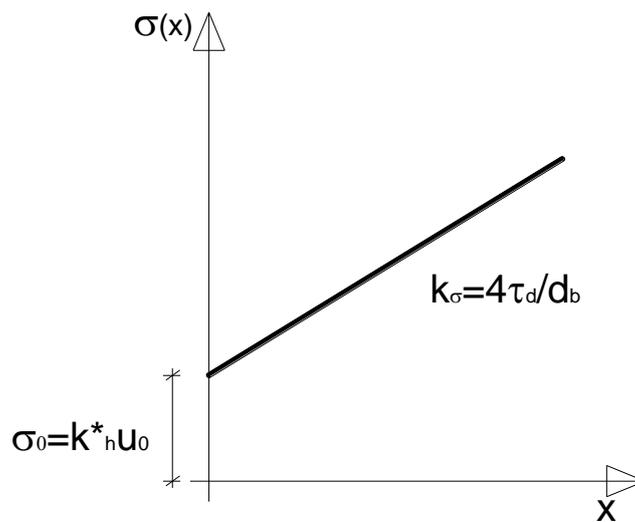


Figura 70: Tensioni lungo la barra per il Caso 3

Per la congruenza si ha, invece, la seguente espressione per $u_E(x)$:

$$u_E(x) = \frac{1}{E_s} \left[\int_0^x \sigma(x) dx \right] \quad (3.3.47)$$

$$u_E(L) = \frac{1}{E_s} \left[\int_0^L \sigma(x) dx \right] = \frac{L}{E_s} \left[\frac{2}{d_b} \tau_d L + k_h^* u_0 \right] \quad (3.3.48)$$

Da cui, ricavando u_0 come di seguito, e sostituendolo nell'equazione (3.4.46), si ottiene il legame σ_L - u_L :

$$u_0 \left(1 + \frac{L \cdot k_h^*}{E_s} \right) = u_L - \frac{2\tau_d L^2}{E_s d_b} \quad (3.3.49)$$

$$u_0 = \left(1 + \frac{L \cdot k_h^*}{E_s} \right)^{-1} \cdot \left(u_L - \frac{2\tau_d L^2}{E_s d_b} \right) \quad (3.3.50)$$

In definitiva si ha:

$$\bullet \sigma_L = k_h^* u_0 + \frac{4 \cdot \tau_d}{d_b} \cdot L \quad (3.3.51)$$

$$\bullet u_L = u_0 + \frac{L}{E_s} \left[\frac{2\tau_d L}{d_b} + k_h^* u_0 \right] \quad (3.3.52)$$

Il passaggio dal Caso II al Caso III si ha per $u_0 = u_1$; la u_L corrispondente è data dall'equazione:

$$u_L(u_0 = u_1) = u_1 + \frac{L}{E_s} \left[\frac{2\tau_d L}{d_b} + k_h^* u_1 \right] \quad (3.3.53)$$

Se $\sigma_L = f_y$ la barra raggiunge lo snervamento nel campo $u_L \geq u_1, u_0 \geq u_1$. In questo caso, lo scorrimento corrispondente alla tensione di snervamento è dato dall'equazione:

$$u_{Ly} = u_{0y} + \frac{L}{E_s} \left[\frac{2\tau_d L}{d_b} + k_h^* u_{0y} \right] \quad (3.3.54)$$

Ove u_{0y} è ottenuto dall'equazione di equilibrio in cui $\sigma_L = f_y$

$$u_{0y} = \left(\sigma_y - \frac{4 \cdot \tau_d \cdot L}{d} \right) \frac{1}{k_h^*} \quad (3.3.55)$$

Riepilogo σ_L - u_L nei tre casi, in condizioni di pre-snervamento ($\sigma_L \leq \sigma_Y$)

Di seguito viene riportato un quadro di sintesi della coppia σ_L , u_L per i Casi 1,2,3.

Caso 1: $u_L \leq u_1$

$$\sigma_L = \sigma(L) = \left[\frac{4\tau_d L}{d_b u_1 \ln(\eta_{L0})} \cdot (\eta_{L0} - 1) + k_h^* \right] \cdot \frac{u_L}{\eta_{L0}} \quad (3.3.27)$$

$$u_L = u_0 \cdot \left\{ 1 + \left\{ \frac{\alpha}{\ln(\eta_L)} \left[\frac{(\eta_L - 1)}{\ln(\eta_L)} - 1 \right] + \beta \right\} \right\} \quad (3.3.29)$$

Caso 2: $u_L > u_1$, $u_0 < u_1$

$$\sigma_L = u_0 \cdot \left[\frac{\left(\eta_L^{\frac{x_1}{L}} - 1 \right)}{L \cdot \lambda_{L0}} + \frac{4 \cdot \tau_d \cdot (L - x_1)}{d_b} + k_h^* \right] \quad (3.3.43)$$

$$u_L = u_0 \cdot \left\{ 1 + \left\{ \frac{\alpha}{\lambda_{L0}} \left[\frac{1}{\lambda_{L0}} \left(\gamma_L^{\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{L0}}} - 1 - \lambda_{10} \cdot (\eta_L)^{\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{L0}}} \right) + \left(\eta_L^{\frac{\ln(\gamma_L)}{\ln(\gamma_L)}} - 1 \right) \right] + \beta \right\} \right\} + \frac{\alpha \cdot u_1 \lambda_{L1}^2}{2\lambda_{L0}^2} \quad (3.3.44)$$

Caso 3: $u_L > u_1$, $u_0 \geq u_1$

$$\sigma_L = k_h^* u_0 + \frac{4 \cdot \tau_d}{d_b} \cdot L \quad (3.3.51)$$

$$u_L = u_0 + \frac{L}{E_s} \left[\frac{2\tau_d L}{d_b} + k_h^* u_0 \right] \quad (3.3.52)$$

Condizioni di post-snervamento ($\sigma_L \geq \sigma_Y$):

Le equazioni di seguito descrivono il comportamento della barra quando in un punto qualsiasi di essa sia stata raggiunta la tensione di snervamento dell'acciaio. Ovviamente, in questa condizione, a causa del plateau e dell'incrudimento presenti nel legame dell'acciaio, le equazioni precedenti non sono assolutamente sufficienti e adatte alla descrizione del fenomeno.

Si individuano i principali casi possibili:

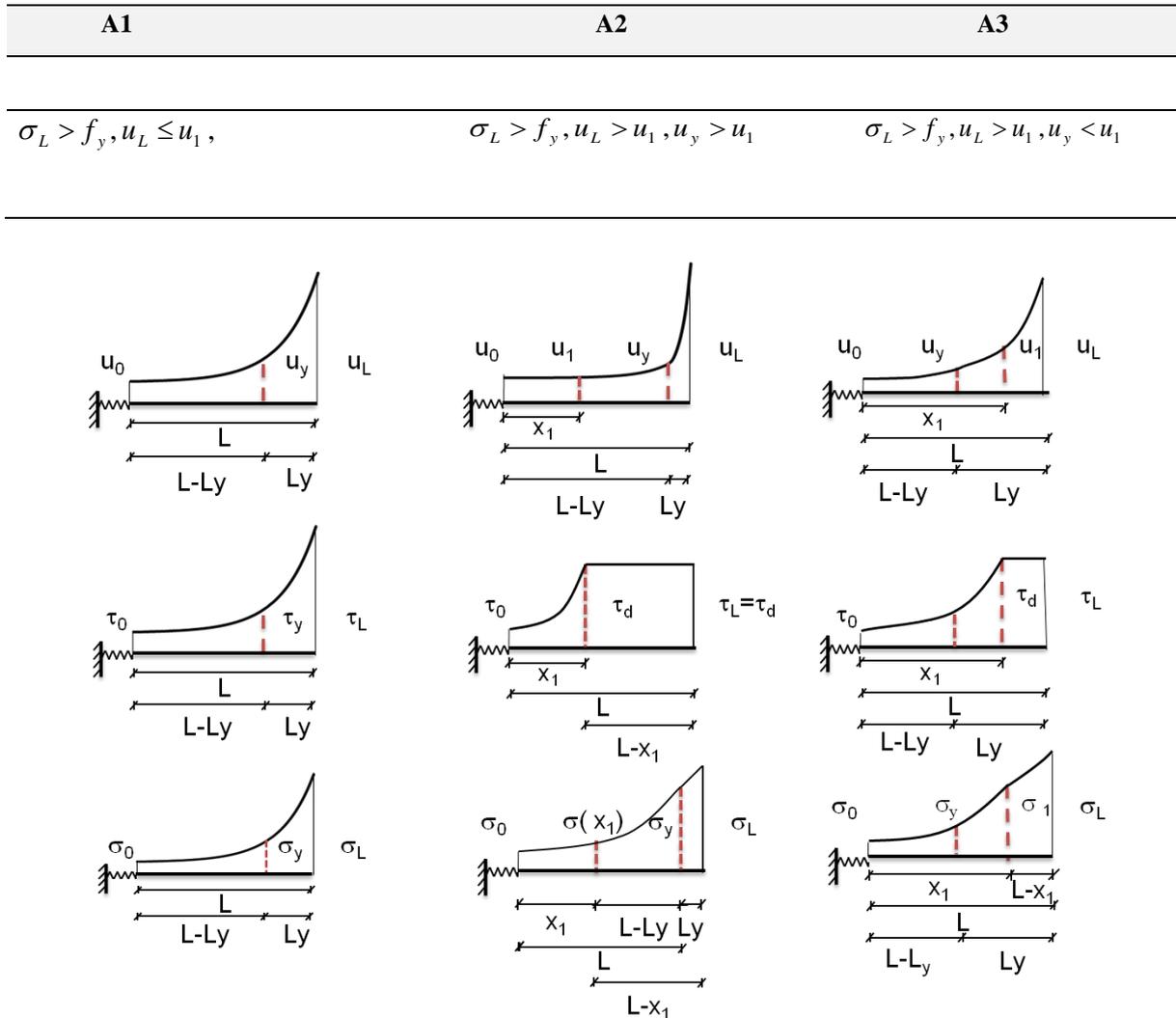


Figura 71: Schematizzazione dei possibili casi nella condizione post-snervamento

In particolare, è fondamentale anzitutto individuare in quale campo di scorrimenti della trattazione pre-snervamento avviene lo snervamento: a seconda di ciò, si individuano, al solito le espressioni degli scorrimenti e delle tensioni, che, tramite le equazioni di equilibrio e di congruenza, consentono di proseguire la legge σ_L - u_L fino alla rottura dell'acciaio. La presenza del plateau e dell'incrudimento dell'acciaio, hanno un grosso impatto sulla suddetta legge finale, come verrà mostrato in seguito.

Il plateau e l'incrudimento consentono la propagazione degli scorrimenti all'interno della barra, e non considerandoli si rischia di perdere una quota parte sostanziale del fenomeno (per quanto riguarda il plateau, almeno a livello monotono).

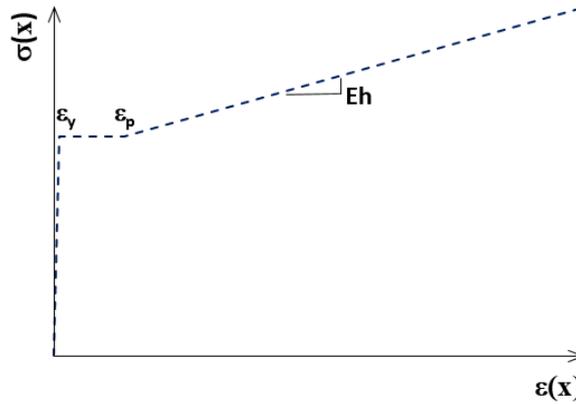


Figura 72: Legame dell'acciaio: plateau e incrudimento

Nella precedente figura, E_h rappresenta la pendenza del ramo incrudente, ed è pari a $(\sigma_{max}-\sigma_y)/(\epsilon_{max}-\epsilon_p)$.

Di seguito, si passano in rassegna i casi principali e le relative equazioni

Caso A1: $\sigma_L \geq f_y, u_L \leq u_1$

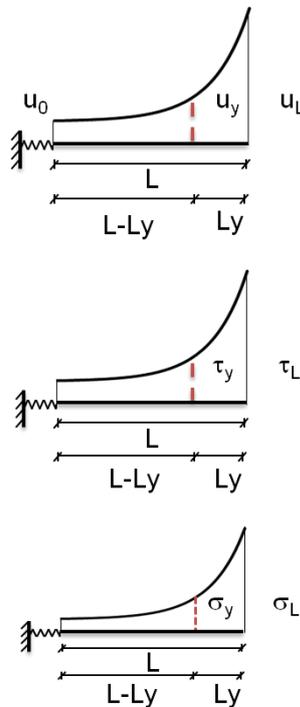


Figura 73: Campo di scorrimenti, tensioni tangenziali e normali nella condizione post-snervamento nel caso $u_L \leq u_1, \sigma_L \geq f_y$

Nel caso in cui lo snervamento avvenga nel Caso 1 della formulazione pre-snervamento, ossia quando in nessun punto della barra si è raggiunta la tensione τ_d , le equazioni sono quelle riportate di seguito. Lo scorrimento $u(x)$ è definito come (3.4.56a e 3.4.56b):

$$u(x) = \begin{cases} u_0 \cdot \left(\frac{u_y}{u_0} \right)^{\frac{x}{L-L_y}} & \text{se } 0 \leq x \leq L - L_y \\ u_L \cdot \left(\frac{u_L}{u_y} \right)^{\frac{x-L}{L_y}} & \text{se } L - L_y < x \leq L \end{cases} \quad (3.3.56)$$

Ove L_y rappresenta la quota parte di barra in cui si è propagato lo snervamento dell'acciaio e quindi gli scorrimenti corrispondenti u_y .

Conseguentemente le tensioni tangenziali assumono la forma (3.4.57a e 3.4.57b):

$$\tau(x) = \begin{cases} \frac{\tau_d \cdot u_0}{u_1} \cdot \left(\frac{u_y}{u_0} \right)^{\frac{x}{L-L_y}} & \text{se } 0 \leq x \leq L - L_y \\ \frac{\tau_d \cdot u_L}{u_1} \cdot \left(\frac{u_L}{u_y} \right)^{\frac{x-L}{L_y}} & \text{se } L - L_y < x \leq L \end{cases} \quad (3.3.57)$$

Mentre le tensioni normali sono regolate dalle equazioni (3.4.58a e 3.4.58b):

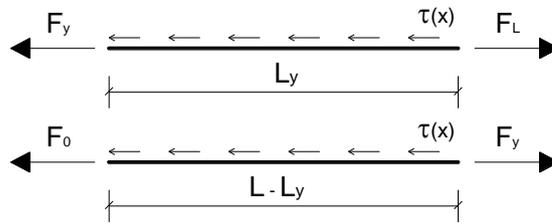
$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{4 \cdot \tau_d \cdot u_0 \cdot (L - L_y)}{Du_1 \cdot \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right)} \cdot \left[\left(\frac{u_y}{u_0} \right)^{\frac{x}{L-L_y}} - 1 \right] & \text{se } 0 \leq x \leq L - L_y \\ \frac{4\tau_d L_y u_L}{Du_1 \ln\left(\frac{u_L}{u_y}\right)} \left[\left(\frac{u_L}{u_y} \right)^{\frac{x-L}{L_y}} - \frac{u_y}{u_L} \right] - \frac{\tau_d (L - L_y)(u_0 - u_y)}{Du_1 \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right)} & \text{se } L - L_y < x \leq L \end{cases} \quad (3.3.58)$$

Lo scorrimento relativo tra i due estremi è regolato dalle equazioni di congruenza e fornito dalla (3.3.59):

$$\Delta u = \int_0^{L-L_y} \frac{\sigma(x)}{E_s} dx + \int_{L-L_y}^L \varepsilon_p + \frac{\sigma(x) - f_y}{E_h} dx = \frac{4 \cdot (L-L_y)^2 \cdot t_d \cdot \left[-u_0 + u_y - u_0 \cdot \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right) \right]}{D \cdot E_s \cdot u_1 \cdot \left[\ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right) \right]^2} +$$

$$+ \varepsilon_p \cdot L_y - \frac{f_y \cdot L_y}{E_h} + \frac{4L_y \tau_d \cdot \left(\frac{L_y \left(-u_L + u_y + u_y \ln\left(\frac{u_L}{u_y}\right) \right)}{\ln^2\left(\frac{u_L}{u_y}\right)} - \frac{(L-L_y)(u_0 - u_y)}{\ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right)} \right)}{E_h \cdot D \cdot u_1} \quad (3.3.59)$$

La lunghezza della zona plasticizzata L_y può essere ricavata tramite considerazioni di equilibrio:



$$\frac{\pi d_b^2}{4} (f_y - \sigma(0)) = \int_0^{L-L_y} \pi d_b \tau(x) dx = \int_0^{L-L_y} \pi d_b \frac{\tau_d \cdot u_0}{u_1} \cdot \left(\frac{u_y}{u_0}\right)^{\frac{x}{L-L_y}} dx = -\frac{d_b \cdot (L-L_y) \cdot \pi \cdot \tau_d \cdot (u_0 - u_y)}{u_1 \cdot \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right)} \quad (3.3.60)$$

$$\frac{\pi d_b^2}{4} (\sigma(L) - f_y) = \int_{L-L_y}^L \pi d_b \tau(x) dx = \int_{L-L_y}^L \pi d_b \frac{\tau_d \cdot u_L}{u_1} \cdot \left(\frac{u_L}{u_y}\right)^{\frac{x-L}{L_y}} dx = \frac{d_b \cdot L_y \cdot \pi \cdot \tau_d (u_L - u_y)}{u_1 \cdot \ln\left(\frac{u_L}{u_y}\right)} \quad (3.3.61)$$

Sviluppando la (3.3.60), si ottiene:

$$L_y = L + \frac{d_b f_y u_1 \cdot \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right)}{4 \tau_d (u_0 - u_y)} \quad (3.3.62)$$

L'espressione per il calcolo della tensione assiale e dello scorrimento in corrispondenza dell'estremo libero è la seguente:

$$\bullet \quad \sigma_L = \frac{4 \cdot \tau_d \cdot L_y \cdot (u_L - u_y) + d_b \cdot f_y \cdot u_1 \cdot \ln(\gamma_{Ly})}{d_b \cdot u_1 \cdot \ln(\gamma_{Ly})}$$

(3.3.63)

$$u_L = u_0 + \frac{\alpha_y \cdot [u_y - u_0 (1 + \ln(\gamma_{y0}))]}{[\ln(\gamma_{y0})]^2} + \epsilon_p \cdot L_y - \frac{f_y \cdot L_y}{E_h} - \frac{L_y \alpha_y}{(L - L_y)} \cdot \left\{ \frac{L_y [-u_L + u_y \cdot (1 + u_y \ln(\gamma_{Ly}))]}{\ln^2(\gamma_{Ly})} + \right.$$

$$\bullet \quad \left. + \frac{(L - L_y)(u_0 - u_y)}{\ln \gamma_{y0}} \right\} \quad (3.3.64)$$

Caso A2: $\sigma_L \geq f_y, u_L > u_1, u_0 < u_1, u_y > u_1$

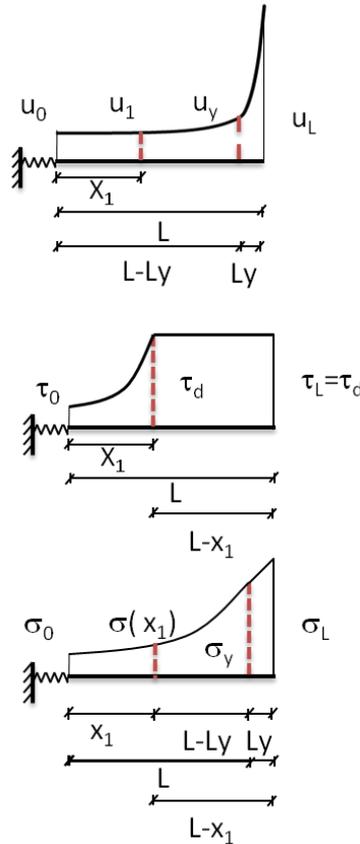


Figura 74: Campo di scorrimenti, tensioni tangenziali e normali nella condizione post-snervamento nel caso A2

Si passa anzitutto a una nuova definizione dell'ascissa x_1 come quella corrispondente al punto in cui, lungo la barra, si raggiunge τ_d ($u=u_1$):

$$x_1 = \frac{\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right)}{\ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right)} \cdot (L - L_y) < L - L_y \quad (3.3.65)$$

Lo scorrimento $u(x)$ è definito tramite le equazioni (3.3.66a e 3.3.66b):

$$u(x) = \begin{cases} u_0 \cdot \left(\frac{u_y}{u_0}\right)^{\frac{x}{L-L_y}} & \text{se } 0 \leq x \leq L - L_y \\ u_L \cdot \left(\frac{u_L}{u_y}\right)^{\frac{x-L}{L_y}} & \text{se } L - L_y < x \leq L \end{cases} \quad (3.3.66)$$

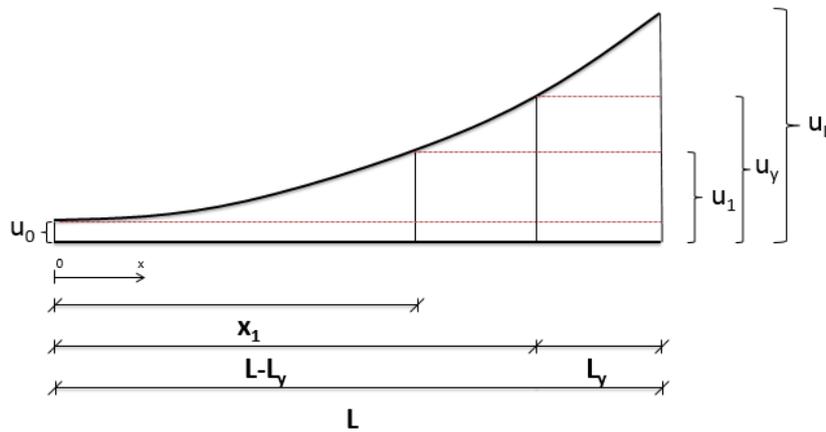


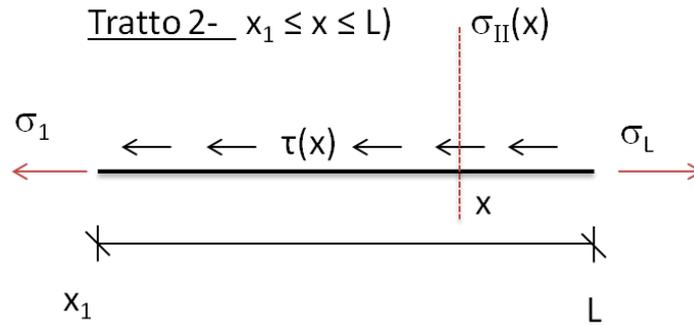
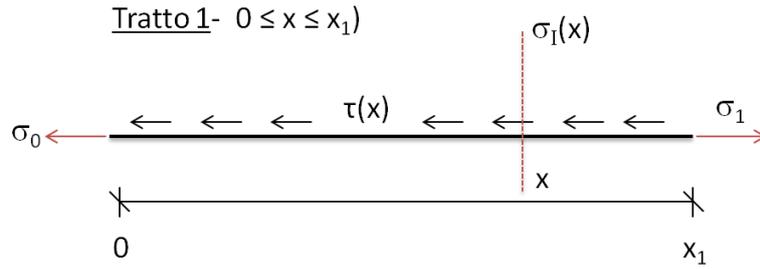
Figura 75: Campo di scorrimenti nel caso A2

Conseguentemente le tensioni tangenziali sono espresse mediante le seguenti relazioni:

$$\tau(x) = \begin{cases} \frac{\tau_d \cdot u_0}{u_1} \cdot \left(\frac{u_y}{u_0}\right)^{\frac{x}{L-L_y}} & \text{se } 0 \leq x \leq x_1 \\ \tau_d & \text{se } x_1 < x \leq L \end{cases} \quad (3.3.67)$$

L'andamento delle tensioni normali sulla barra è definito dalle seguenti relazioni, che sono ricavate dall'equilibrio lungo la stessa, differenziando il tratto compreso tra x_1 ed L e il tratto compreso tra $x=0$ e x_1 :

$$\frac{\pi d_b^2}{4} (\sigma(x) - \sigma_0) = \int_0^x \tau(x) \cdot \pi \cdot d_b dx \quad (3.3.68)$$



$$\frac{\pi d_b^2}{4} (\sigma(x) - \sigma_1) = \int_{x_1}^x \tau_d \cdot \pi \cdot d_b dx \quad (3.3.69)$$

Dallo sviluppo delle precedenti equazioni si giunge alle espressioni della tensione normale lungo la

barra:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{4 \cdot (L - L_y) \cdot \tau_d u_0 \left[\left(\frac{u_y}{u_0} \right)^{\frac{x}{L-L_y}} - 1 \right]}{d_b u_1 \ln \left(\frac{u_y}{u_0} \right)} + k_H^* u_0 & \text{se } 0 \leq x \leq x_1 \\ \frac{4 \tau_d (x - x_1)}{d_b} + \frac{4(L - L_y) \tau_d u_0 \left[\left(\frac{u_y}{u_0} \right)^{\frac{x_1}{L-L_y}} - 1 \right]}{d_b u_1 \ln \left(\frac{u_y}{u_0} \right)} + k_h^* u_0 & \text{se } x_1 < x \leq L \end{cases} \quad (3.3.70)$$

Nel complesso, il campo delle tensioni lungo la barra può essere schematizzato come di seguito:

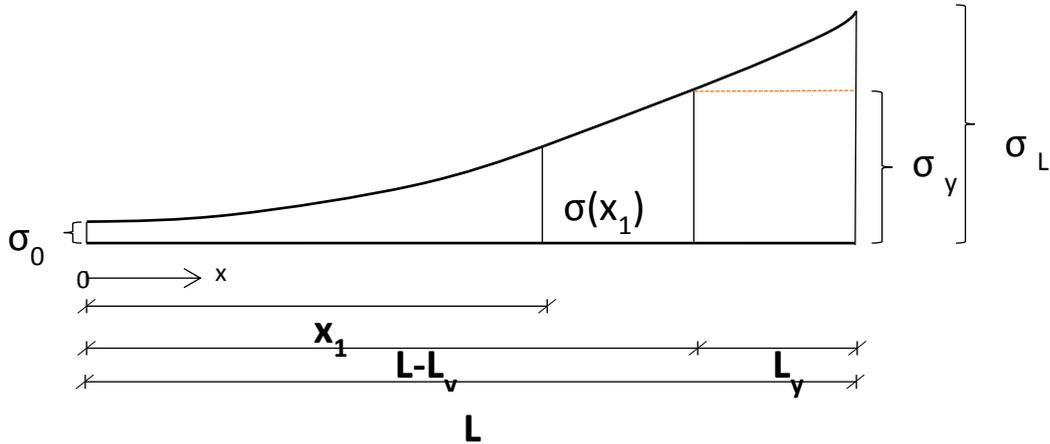


Figura 76: Campo delle tensioni lungo la barra nel caso A2

Lo scorrimento relativo tra i due estremi è espresso mediante la seguente relazione, come descritto nella Figura 77:

$$\Delta u_{Tot} = \Delta u_{01} + \Delta u_{1y} + \Delta u_{yL}$$

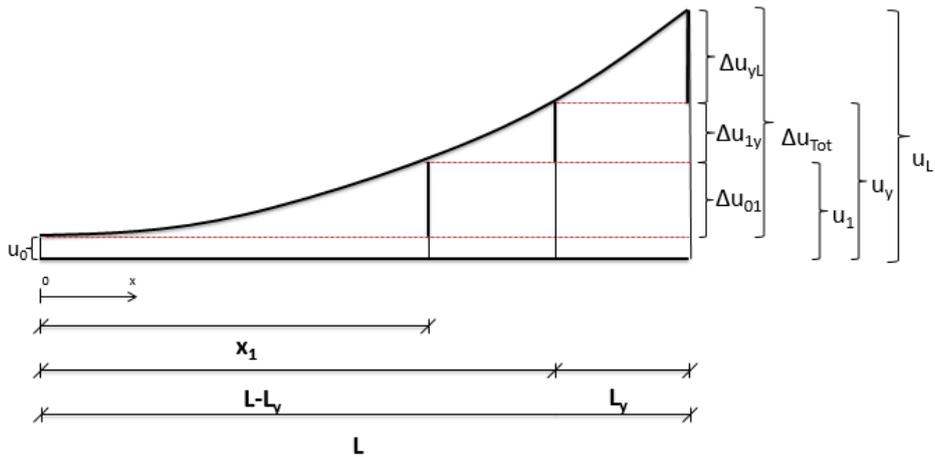


Figura 77: Decomposizione del campo di scorrimenti nel caso A2

In cui:

$$\begin{aligned}\Delta u_{01} &= \int_0^{x_1} \frac{\sigma_I(x)}{E_s} dx \\ \Delta u_{1y} &= \int_{x_1}^{L-L_y} \frac{\sigma_{II}(x)}{E_s} dx \\ \Delta u_{yL} &= \int_{L-L_y}^L \varepsilon_p dx + \int_{L-L_y}^L \frac{\sigma_{II}(x) - f_y}{E_h} dx\end{aligned}\tag{3.3.71}$$

E quindi, in definitiva, si ha:

$$\begin{aligned}\Delta u_{Tot} &= \int_0^{x_1} \frac{\sigma_I(x)}{E_s} dx + \int_{x_1}^{L-L_y} \frac{\sigma_{II}(x)}{E_s} dx + \int_{L-L_y}^L \varepsilon_p dx + \int_{L-L_y}^L \frac{\sigma_{II}(x) - f_y}{E_h} dx = \\ &= \frac{(L - L_y)}{d_b E_s u_1 \ln^2\left(\frac{u_y}{u_0}\right)} \left\{ -4\tau_d (L - L_y)(u_0 - u_1) + 2\tau_d (L - L_y) \cdot u_1 \ln^2\left(\frac{u_1}{u_0}\right) - 4\tau_d (L - L_y)(u_0 - u_1) \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right) + \right. \\ &+ \left. [2\tau_d (L - L_y) + d_b k_h u_0] u_1 \ln^2\left(\frac{u_y}{u_0}\right) - 4(L - L_y) \tau_d u_1 \ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) \cdot \left[1 + \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right)\right] \right\} + \\ &+ \frac{L_y}{d_b E_h} \left\{ d_b E_h \varepsilon_p - d_b f_y + 4L\tau_d - 2L_y\tau_d + d_b k_h u_0 + \frac{4 \cdot (L_y - L) \cdot \tau_d \left\{ u_0 + u_1 \cdot \left[\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) - 1 \right] \right\}}{u_1 \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right)} \right\} = u_L - u_0\end{aligned}\tag{3.3.72}$$

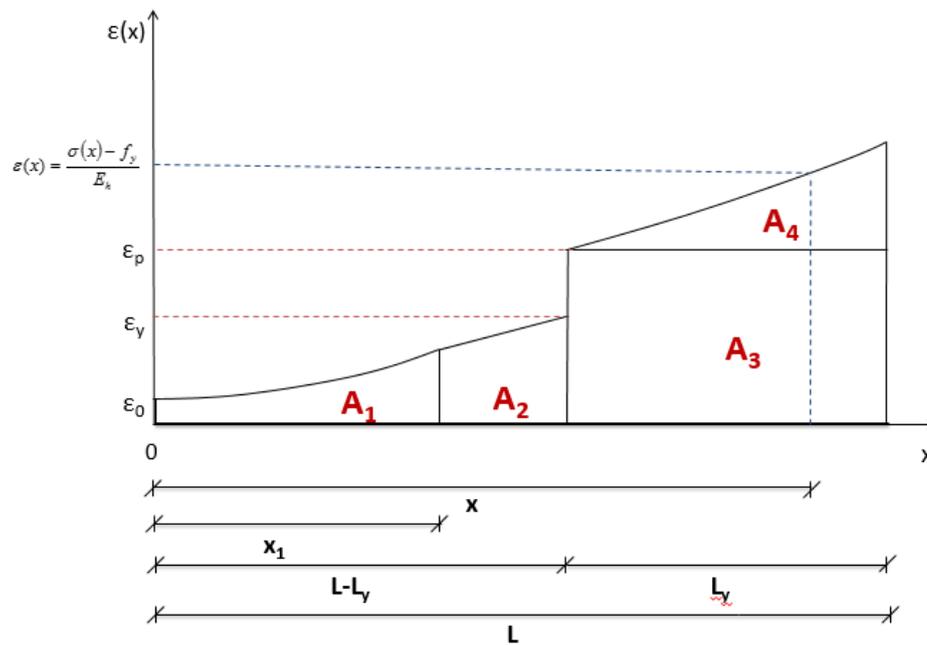


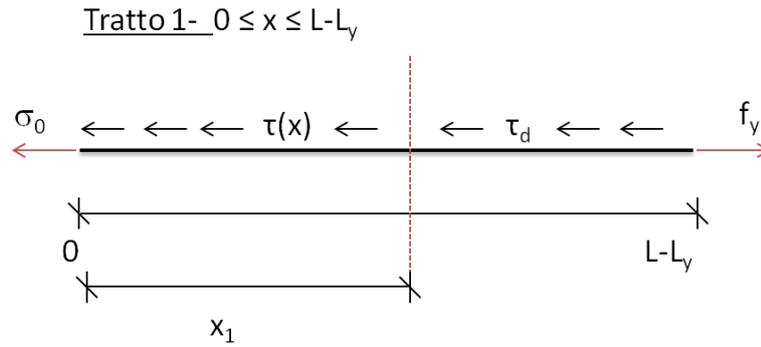
Figura 78: Significato degli integrali (3.4.71)

Risulta evidente il “salto” nel passaggio dalla deformazione elastica ε_y a quella plastica ε_p .

Ove:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_0^{x_1} \frac{\sigma_I(x)}{E_s} dx \\
 A_2 &= \int_{x_1}^{L-L_y} \frac{\sigma_{II}(x)}{E_s} dx \\
 A_3 &= \int_{L-L_y}^L \varepsilon_p dx \\
 A_4 &= \int_{L-L_y}^L \frac{\sigma_{II}(x) - f_y}{E_h} dx
 \end{aligned}
 \tag{3.3.73}$$

La lunghezza della zona plasticizzata L_y può essere ricavata, al solito, tramite considerazioni di equilibrio sul primo tratto della barra:



$$\int_0^{L-L_y} \pi D \tau(x) dx = \frac{\pi D^2}{4} (f_y - \sigma(0)) \quad (3.3.74)$$

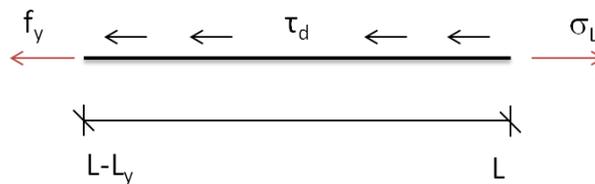
$$\int_0^{x_1} \pi D \frac{\tau_d \cdot u_0}{u_1} \cdot \left(\frac{u_y}{u_0}\right)^{\frac{x}{L-L_y}} dx + \int_{x_1}^{L-L_y} \pi D \tau_d dx = \frac{\pi D^2}{4} (f_y - \sigma(0)) \quad (3.3.75)$$

$$L_y = \frac{4\tau_d L(u_0 - u_1) + 4\tau_d L u_1 \ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) + (d \cdot f_y - 4L\tau_d - d \cdot k_h u_0) \cdot u_1 \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right)}{4\tau_d \left\{ u_0 + u_1 \cdot \left[\ln\left(\frac{u_1}{u_y}\right) - 1 \right] \right\}} \quad (3.3.76)$$

L'espressione per il calcolo della tensione assiale in corrispondenza dell'estremo libero è ottenuta dall'equilibrio sul secondo tratto della barra in cui si è ormai raggiunto e superato lo snervamento:

$$\int_{L-L_y}^L \pi D \tau(x) dx = \frac{\pi D^2}{4} (\sigma(L) - f_y) \Rightarrow \int_{L-L_y}^L \pi D \tau_d dx = \frac{\pi D^2}{4} (\sigma(L) - f_y) \quad (3.3.77)$$

Tratto 2 - $L-L_y \leq x \leq L$



$$\sigma_L = \frac{4\tau_d L_y}{d_b} + f_y \quad (3.3.78)$$

Naturalmente, il valore della tensione in prossimità dell'estremo libero può anche essere calcolato usando l'espressione (3.4.78) nel caso particolare per cui si ha $x=L$.

Per poter calcolare il legame σ_L-u_L , si procede attraverso due fasi successive: la prima, in cui si calcola il valore dello scorrimento u_y , cui corrisponde la tensione di snervamento σ_y , la seconda in cui si calcola lo scorrimento all'estremità libera u_L .

Infatti, come si può notare dalla Figura (6.5), si ha:

$$u_{yt} = u_0 + \Delta u_{0y} = u_0 + \Delta u_{01} + \Delta u_{1y} \quad (3.3.79)$$

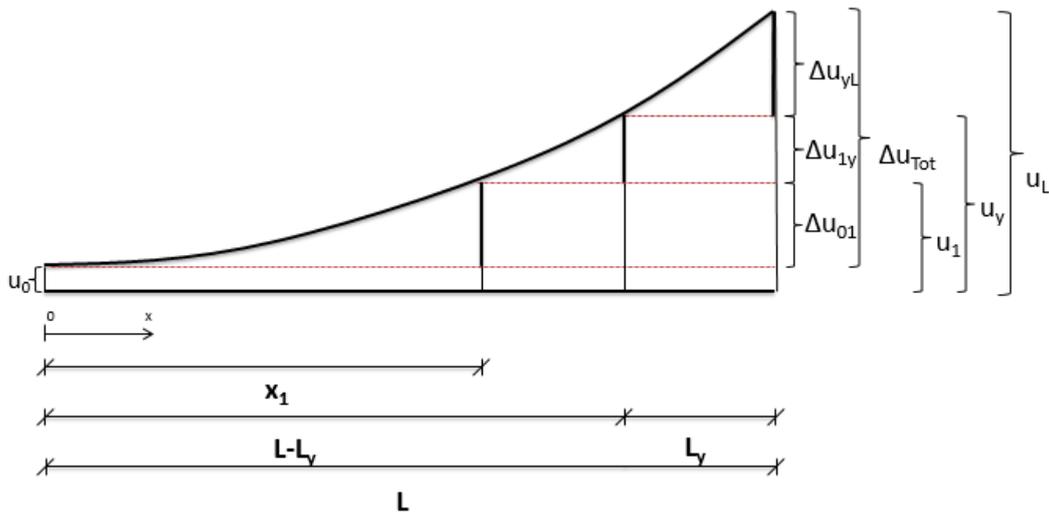


Figura 79: Congruenza scorrimenti lungo la barra, caso 2, calcolo u_0

In cui:

$$\Delta u_{01} = \int_0^{x_1} \frac{\sigma_I(x)}{E_s} dx \quad (3.3.80)$$

$$\Delta u_{1y} = \int_{x_1}^{L-L_y} \frac{\sigma_{II}(x)}{E_s} dx \quad (3.4.81)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{0y} = & \frac{(L-L_y)}{d_b E_s u_1 \ln^2\left(\frac{u_y}{u_0}\right)} \left\{ -4\tau_d(L-L_y)(u_0-u_1) + 2\tau_d(L-L_y)u_1 \ln^2\left(\frac{u_1}{u_0}\right) - 4\tau_d(L-L_y)(u_0-u_1) \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right) + \right. \\ & \left. + [2\tau_d(L-L_y) + d_b k_h u_0] u_1 \ln^2\left(\frac{u_y}{u_0}\right) - 4(L-L_y)\tau_d u_1 \ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) \cdot \left[1 + \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right) \right] \right\} \quad (3.3.82) \end{aligned}$$

Nel secondo passaggio si ricava u_L attraverso la seguente equazione:

$$u_L = u_y + \Delta u_{yL} \quad (3.3.83)$$

Cioè:

$$u_L = u_y + \frac{L_y}{d_b E_h} \left\{ d_b E_h \varepsilon_p - d_b f_y + 4L\tau_d - 2L_y\tau_d + d_b k_h u_0 + \frac{4 \cdot (L_y - L) \cdot \tau_d \left\{ u_0 + u_1 \cdot \left[\ln\left(\frac{u_1}{u_0}\right) - 1 \right] \right\}}{u_1 \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right)} \right\} \quad (3.4.84)$$

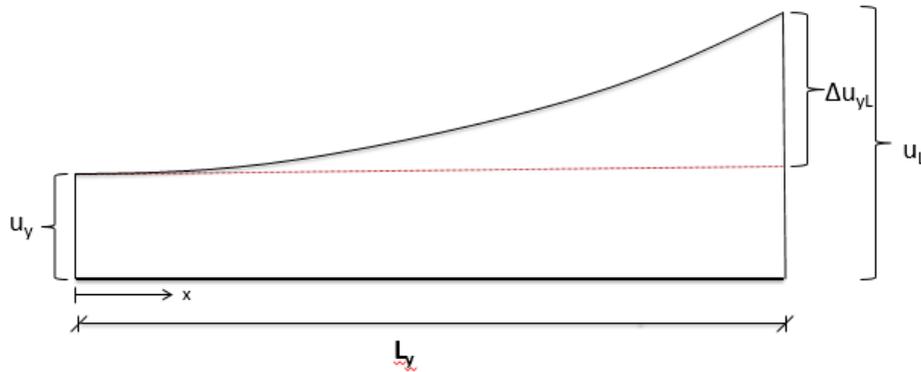


Figura 80: Congruenza scorrimenti lungo la barra, caso 2, calcolo u_L

Man mano che la forza o spostamento applicato all'estremità aumenta, si ha ovviamente un'evoluzione della storia della barra: in una prima fase, in questa ascissa, si ha il raggiungimento della tensione di snervamento u_{Ly} , che risulta essere un valore univoco, cui corrisponde la tensione di snervamento σ_y : in tal caso $L_y=0$. Successivamente, il valore degli scorrimenti globalmente continua a crescere, così come il valore della tensione all'estremità σ_L , che risulta man mano essere maggiore di σ_y , coerentemente con il fatto che, il valore della lunghezza L_y cui corrisponde la porzione di barra snervata, continua a crescere.

In definitiva il legame σ_L - u_L può essere ricavato attraverso le seguenti equazioni:

$$\bullet u_L = u_y + \frac{L_y}{d_b E_h} \left\{ d_b E_h \varepsilon_p - d_b f_y + 4L\tau_d - 2L_y\tau_d + d_b k_h u_0 - \frac{4 \cdot (L - L_y) \cdot \tau_d \left[u_0 + u_1 \cdot (\ln(\gamma_{10}) - 1) \right]}{u_1 \ln(\gamma_{y0})} \right\} \quad (3.3.85)$$

$$\bullet \sigma_L = \frac{4\tau_d L_y}{d_b} + f_y \quad (3.3.86)$$

Ove i simboli hanno i significati già esposti.

Caso A 2.1: $\sigma_L > f_y, u_L > u_1, u_0 \geq u_1, u_y > u_1$

Questo è un sottocaso del caso A2, può essere individuato infatti come un'evoluzione del precedente: all'aumentare della penetrazione dello scorrimento all'interno della barra, il valore dello scorrimento all'estremità libera u_0 per cui si raggiunge lo snervamento u_{Ly} è tale per cui $u_0 \geq u_1$.

Lo scorrimento $u(x)$ è definito come:

$$u(x) = \begin{cases} u_0 \cdot \left(\frac{u_y}{u_0}\right)^{\frac{x}{L-L_y}} & \text{se } 0 \leq x \leq L - L_y \\ u_L \cdot \left(\frac{u_L}{u_y}\right)^{\frac{x-L}{L_y}} & \text{se } L - L_y < x \leq L \end{cases} \quad (3.3.87)$$

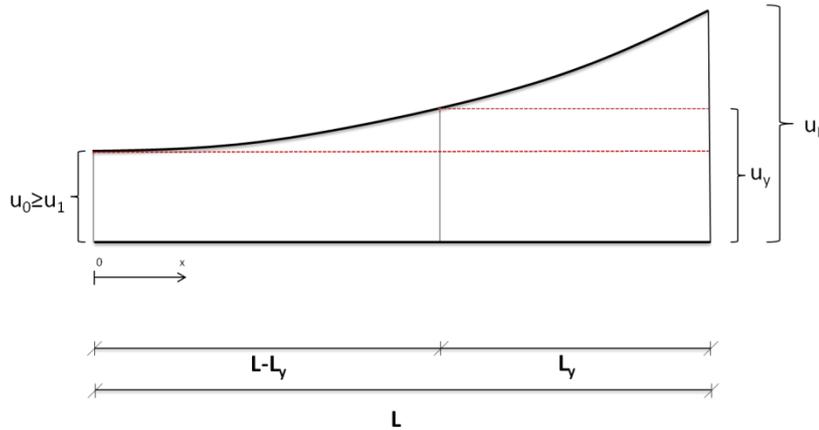


Figura 81: Congruenza degli scorrimenti caso A2.1.

Le tensioni di aderenza lungo tutta la barra sono costanti e pari a τ_d .

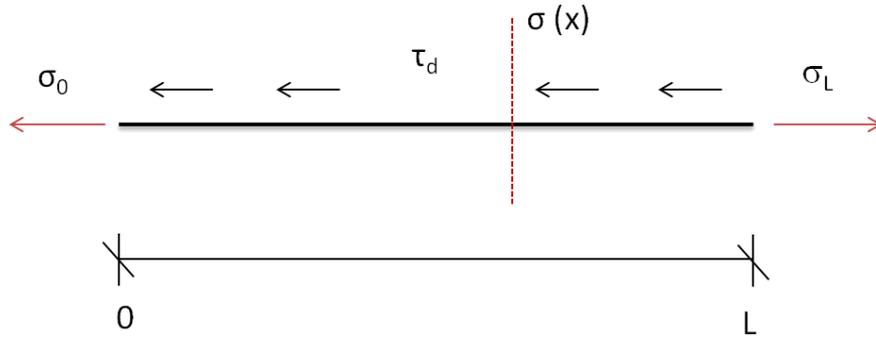
$$\tau(x) = \tau_d \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.3.88)$$

Da cui:

$$\int_0^x \pi D \tau(x) dx = \frac{\pi D^2}{4} (\sigma(x) - \sigma(0)) \quad (3.3.89)$$

E quindi:

$$\sigma(x) = k_h^* \cdot u_0 + \frac{4\tau_d}{d_b} x \quad (3.3.90)$$



In particolare, in corrispondenza dell'ascissa $x=L-L_y$:

$$\sigma(x=L-L_y) = \sigma_y$$

Il campo di scorrimenti può essere calcolato a partire dalle deformazioni :

$$\Delta u_{0y} = \int_0^{L-L_y} \frac{\sigma(x)}{E_s} dx \quad 0 \leq x \leq L-L_y \quad (3.3.91)$$

$$\Delta u_{yL} = \int_{L-L_y}^L \varepsilon_p dx + \int_{L-L_y}^L \frac{\sigma(x) - f_y}{E_h} dx \quad L-L_y \leq x \leq L \quad (3.3.92)$$

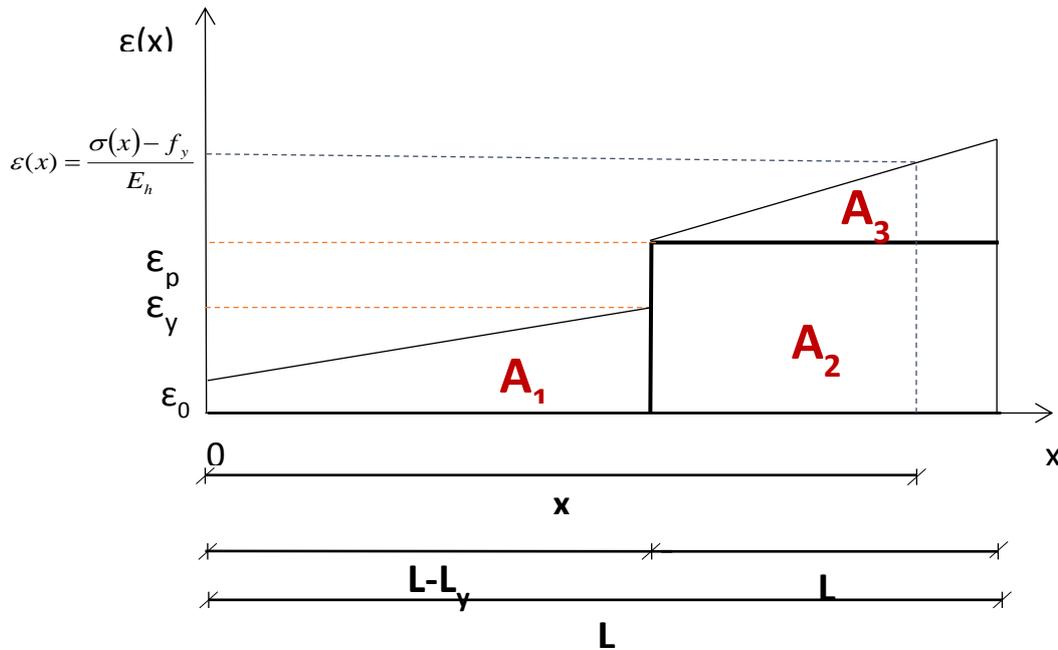


Figura 82: Significato delle componenti della deformazione per il caso A2.1

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_0^{L-L_y} \frac{\sigma(x)}{E_s} dx \\
 A_2 &= \int_{L-L_y}^L \varepsilon_p dx \\
 A_3 &= \int_{L-L_y}^L \frac{\sigma(x) - f_y}{E_h} dx
 \end{aligned}
 \tag{3.3.93}$$

Da cui, il valore di u_L è dato da:

$$u_L = u_0 + \Delta u_{0y} + \Delta u_{yL} \tag{3.3.94}$$

e cioè:

$$u_L = u_0 + \frac{(L - L_y) \cdot (2L\tau_d - 2L_y\tau_d + d_b k_h u_0)}{d_b E_s} + \frac{L_y [2 \cdot (2L - L_y)\tau_d + d_b (E_h \varepsilon_p - f_y + k_h^* u_0)]}{d_b E_h} \tag{3.3.95}$$

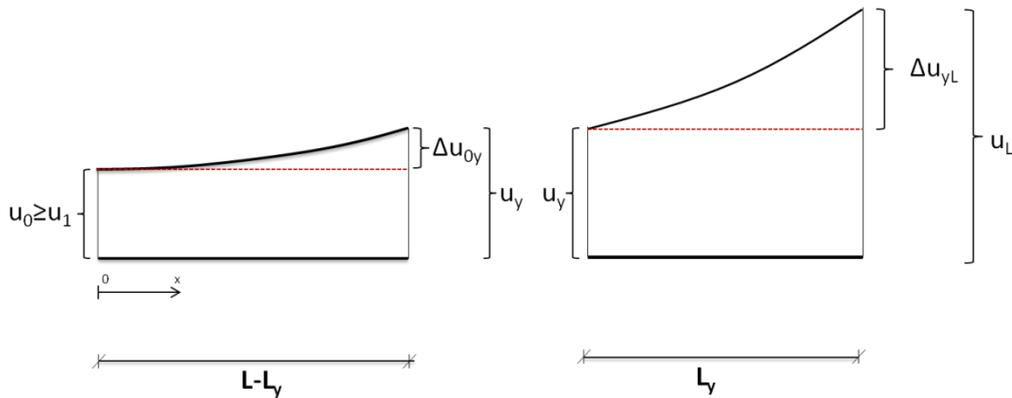


Figura 83: Congruenza scorrimenti caso A2.1

In particolare il valore di u_{Ly} è fornito da:

$$u_{0y} = \left(\sigma_y - \frac{4 \cdot \tau_d \cdot L}{d} \right) \frac{1}{k_h} \tag{3.3.96}$$

$$u_{Ly} = u_{0y} + \frac{L}{E_s} \left[\frac{2\tau_d L}{d_b} + k_h^* u_{0y} \right] \tag{3.3.97}$$

Il valore di L_y può essere ricavato dall'equilibrio lungo la barra:

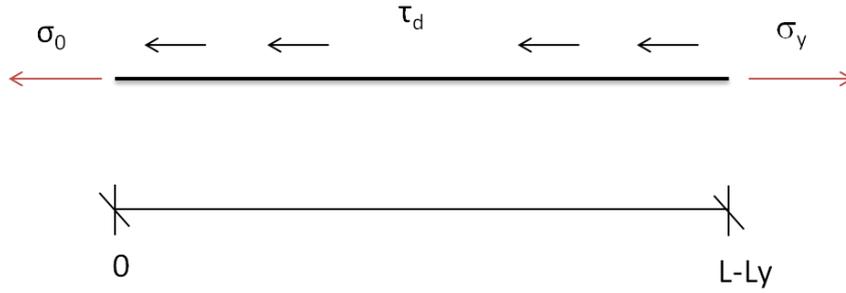


Figura 84: Equilibrio lungo la barra ne tratto 0-Y per il Caso A2.1

$$\int_0^{L-L_y} \pi D \tau(x) dx = \frac{\pi D^2}{4} (\sigma_y - \sigma(0)) \quad (3.3.98)$$

Da cui:

$$L_y = \frac{4L\tau_d + d_b k_h u_0 - d_b f_y}{4\tau_d} \quad (3.3.99)$$

Si giunge al legame $\sigma_L - u_L$, che può essere, in definitiva ricavato attraverso le seguenti equazioni:

$$\bullet u_L = u_0 + \frac{(L-L_y) \cdot (2L\tau_d - 2L_y\tau_d + d_b k_h u_0)}{d_b E_s} + \frac{L_y [2 \cdot (2L-L_y)\tau_d + d_b (E_h \varepsilon_p - f_y + k_h^* u_0)]}{d_b E_h} \quad (3.3.100)$$

$$\bullet \sigma_L = k_h^* \cdot u_0 + \frac{4\tau_d}{d_b} L \quad (3.3.101)$$

Caso A3 $\sigma_L \geq f_y, u_L > u_1, u_y < u_1$

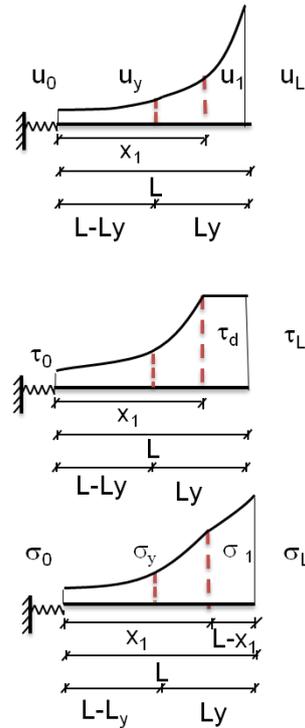


Figura 85: Campo di scorrimenti caso A3

Si definisce x_1 come l'ascissa corrispondente al punto in cui, lungo la barra, si raggiunge τ_d ($u=u_1$):

$$x_1 = \frac{\ln\left(\frac{u_1}{u_L}\right)}{\ln\left(\frac{u_L}{u_y}\right)} \cdot L - L_y > L - L_y \quad (3.3.102)$$

Lo scorrimento $u(x)$ è definito come:

$$u(x) = \begin{cases} u_0 \cdot \left(\frac{u_y}{u_0}\right)^{\frac{x}{L-L_y}} & \text{se } 0 \leq x \leq L - L_y \\ u_L \cdot \left(\frac{u_L}{u_y}\right)^{\frac{x-L}{L_y}} & \text{se } L - L_y < x \leq L \end{cases} \quad (3.3.103)$$

Conseguentemente le tensioni tangenziali sono espresse mediante le seguenti relazioni:

$$\tau(x) = \begin{cases} \frac{\tau_d \cdot u_0}{u_1} \cdot \left(\frac{u_y}{u_0}\right)^{\frac{x}{L-L_y}} & \text{se } 0 \leq x \leq L - L_y \\ \frac{\tau_d}{u_1} \cdot u_L \cdot \left(\frac{u_L}{u_y}\right)^{\frac{x-L}{L_y}} & \text{se } L - L_y < x \leq x_1 \\ \tau_d & \text{se } x_1 < x \leq L \end{cases} \quad (3.3.104)$$

L'andamento delle tensioni normali sulla barra è definito dalle seguenti relazioni :

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{4\tau_d u_L (L - L_y)}{D u_1 \ln\left(\frac{u_L}{u_y}\right)} \left[\left(\frac{u_L}{u_y}\right)^{\frac{x}{L-L_y}} - 1 \right] & 0 \leq x \leq L - L_y \\ \frac{4}{d} \cdot \left(\frac{L_y \tau_d u_L \left[\left(\frac{u_L}{u_y}\right)^{\frac{x-L}{L_y}} - \frac{u_y}{u_L} \right]}{u_1 \ln\left(\frac{u_L}{u_y}\right)} - \frac{\tau_d (L - L_y)(u_0 - u_y)}{u_1 \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right)} \right) & L - L_y < x \leq x_1 \\ \frac{4\tau_d L_y \left\{ -u_y + u_1 \left[1 - \ln\left(\frac{u_1}{u_L}\right) \right] \right\}}{d u_1 \ln\left(\frac{u_L}{u_y}\right)} - \frac{4\tau_d \cdot (L - L_y)(u_0 - u_y)}{d u_1 \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right)} - \frac{4\tau_d \cdot (L - x)}{d} & x_1 < x \leq L \end{cases} \quad (3.3.105)$$

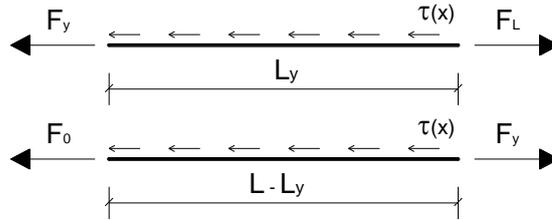
Lo scorrimento relativo tra i due estremi è espresso mediante la seguente relazione che segue, che risolta permette di ricavare il valore di L_0 .

$$\Delta u = \int_0^{L-L_y} \frac{\sigma(x)}{E_s} dx + \int_{L-L_y}^{x_1} \left(\varepsilon_p + \frac{\sigma(x) - f_y}{E_h} \right) dx + \int_{x_1}^L \left(\varepsilon_p + \frac{\sigma(x) - f_y}{E_h} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{D E_h E_s u_1 \ln^2\left(\frac{u_L}{u_y}\right) \cdot \ln^2\left(\frac{u_y}{u_0}\right)} \right] \left\{ 2E_s L_y^2 \tau_d \left(2u_1 - 2u_y - 2u_1 \ln\left(\frac{u_1}{u_L}\right) + u_1 \ln^2\left(\frac{u_1}{u_L}\right) \right) \cdot \ln^2\left(\frac{u_y}{u_0}\right) - 4 \cdot E_s \cdot L_y^2 \cdot \tau_d \cdot u_y \cdot \ln\left(\frac{u_L}{u_y}\right) \ln^2\left(\frac{u_y}{u_0}\right) + \right.$$

$$+ \ln^2\left(\frac{u_L}{u_y}\right) \cdot \left[-4 \cdot E_h (L-L_y)^2 \tau_d (u_0 - u_y) - 4 \cdot (L-L_y) \cdot \tau_d \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right) \cdot (E_h (L-L_y) u_0 + E_s L_y (u_0 - u_y)) + D \cdot E_s L_y u_1 \ln^2\left(\frac{u_y}{u_0}\right) (E_h \cdot \varepsilon_p - f_y) \right] \quad (3.3.106)$$

La lunghezza della zona plasticizzata L_y può essere ricavata tramite considerazioni di equilibrio:



$$\int_0^{L-L_y} \pi d_b \tau(x) dx = \frac{\pi d_b^2}{4} (f_y - \sigma(0)) \Rightarrow \int_0^{L-L_y} \pi d_b \frac{\tau_d}{u_1} \cdot u_0 \cdot \left(\frac{u_y}{u_0}\right)^{L-L_y-x} dx = \frac{\pi d_b^2}{4} (f_y - \sigma(0))$$

$$\int_{L-L_y}^L \pi d_b \tau(x) dx = \frac{\pi d_b^2}{4} (\sigma(L) - f_y) \Rightarrow \int_{L-L_y}^{x_1} \pi d_b \frac{\tau_d}{u_1} \cdot u_L \cdot \left(\frac{u_L}{u_y}\right)^{\frac{x-L}{L_y}} dx + \int_{x_1}^L \pi d_b \tau_d dx = \frac{\pi d_b^2}{4} (\sigma(L) - f_y)$$

$$L_y = L + \frac{d_b f_y u_1 \cdot \ln\left(\frac{u_y}{u_0}\right)}{4 t_d (u_0 - u_y)} \quad (3.3.107)$$

Le espressioni della tensione e dello scorrimento globali di estremità sono fornite dalle equazioni (3.3.108) e (3.3.109):

$$\bullet u_L = u_0 + \Delta u_{L1} + \Delta u_{L2} \quad (3.3.108)$$

$$\bullet \sigma_L = \frac{4 \cdot L_y \cdot \tau_d \cdot [u_1 (1 - \ln(\gamma_{1L})) - u_y - 1] + d_b \cdot f_y \cdot u_1 \ln(\gamma_{Ly})}{d_b \cdot u_1 \cdot \ln(\gamma_{Ly})} \quad (3.3.109)$$

In cui :

$$\Delta u_{L1} = \frac{\{2 E_s L_y^2 \tau_d \cdot \gamma_{Y0}^2 \{-2 u_y (1 + \gamma_{LY}) + u_1 [2 \cdot (1 - \gamma_{1L}) + \gamma_{1L}]\}\}}{d_b E_h E_s u_1 \gamma_{LY}^2 \cdot \gamma_{Y0}^2} \quad (3.3.108.a)$$

$$\Delta u_{L2} = \frac{\gamma_{LY}^2 \cdot \{-4 \tau_d \cdot \Delta L_y \cdot [E_h \Delta L_y (\Delta u_{0Y} + \gamma_{Y0} u_0) + \gamma_{Y0} E_s L_y \Delta u_{0Y}] + d_b \cdot E_s L_y u_1 \gamma_{Y0}^2 (E_h \cdot \varepsilon_p - f_y)\}}{d_b E_h E_s u_1 \gamma_{LY}^2 \cdot \gamma_{Y0}^2} \quad (3.3.108.b)$$

Con:

$$\Delta L_Y = (L - L_y)$$

$$\Delta u_{0Y} = (u_0 - u_y)$$

Legame σ_L - u_L : confronti e differenze con formulazione precedente

La formulazione fornisce la relazione finale σ_L - u_L , descritta individuando tre punti fondamentali A, C, Y corrispondenti a diversi stati fisici della barra d'acciaio soggetta a scorrimenti:

- Punto A corrisponde alla condizione in cui la sollecitazione τd del legame limite viene raggiunto in corrispondenza dell'estremità libera della barra: $u_{L, A} = u_1$ (Figura 86a).
- Punto C corrisponde alla condizione in cui tutta la lunghezza della barra è caratterizzata da una tensione di aderenza uguale τd : $u_{0,c} = u_1$ (Figura 86a).
- Punto Y corrisponde alla condizione in cui la sollecitazione assiale in corrispondenza della estremità libera è uguale alla tensione di snervamento (Figura 86a).

Nella formulazione lineare (Figura 86b), è possibile distinguere due casi differenti a seconda del valore della L_0 (la parte della lunghezza totale della barra coinvolti negli slittamenti relativi) rispetto alla lunghezza totale dell'armatura (L).

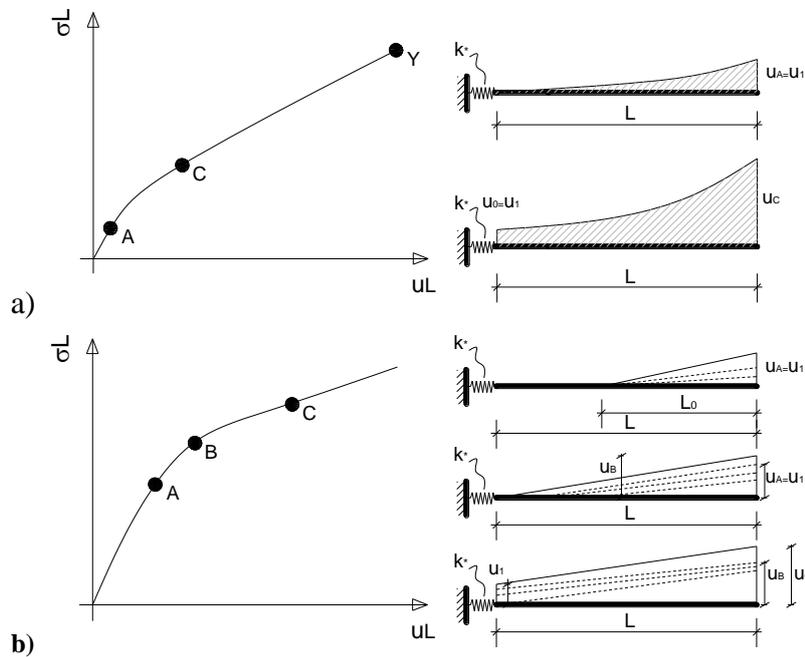


Figura 86: Punti cardinali della formulazione: a) formulazione esponenziale b) Braga et al. (2012), prima dello snervamento

La formulazione esponenziale consente di semplificare il problema e il numero di equazioni, in quanto con la medesima espressione è in grado di tenere in conto sia del caso in cui $L < L_0$, sia del caso in cui $L > L_0$.

Il confronto tra le equazioni dei punti cardinali tra due formulazioni è riportata: la nuova formulazione non include il secondo caso (punto B nella Figura 87, Tabella b).

(a)

A	$u_{L,A} = u_1$	$\sigma_{L,A} = u_0 \cdot \left[\frac{\alpha}{\ln(\gamma_L)} \cdot \frac{E_s}{L} \cdot (\gamma_L - 1) + k_h^* \right]$
C	$u_{0,C} = u_1$ $u_{L,C} = u_1 + \frac{L}{E_s} \left[\frac{2}{d_b} \tau_d L + k_h^* u_1 \right]$	$\sigma_{L,C} = k_h^* u_1 + \frac{4 \cdot \tau_d \cdot L}{d_b}$

(b)

A	$u_{L,A} = u_1$	$\sigma_{L,A} = \frac{2 \cdot \tau_d \cdot L_0}{d_b \cdot u_1}$
B	$u_0 = 0$ $\frac{3E_s d_b}{2\tau_d L^2} \cdot u_{L,B}^3 - 3u_{L,B}^2 + 3u_1 u_{L,B} - u_1^2 = 0$	$\sigma_{L,B} = \frac{2 \cdot \tau_d \cdot L_1 \cdot (2u_{L,B} - u_1)}{d_b u_{L,B}} + k_h^* u_1$
C	$u_{0,C} = u_1$ $u_{L,C} = u_1 + \frac{L}{E_s} \left[\frac{2}{d_b} \tau_d L + k_h^* u_1 \right]$	$\sigma_{L,C} = k_h^* u_1 + \frac{4 \cdot \tau_d \cdot L}{d_b}$

Figura 87: Confronto delle espressioni dei punti cardinali A,B,C tra formulazione esponenziale (a) e formulazione lineare (b)

La Figura 88 mostra la differenza tra il campo di scorrimento imposto e il campo dedotto dalle equazioni di compatibilità per il Caso 1 ($u_L \leq u_1, u_0 < u_1$), considerando il modello esponenziale e il modello lineare Figura 88: come si vede, il modello esponenziale permette di ottenere un buon accordo dei risultati, completamente perso in caso di schematizzazione lineare.

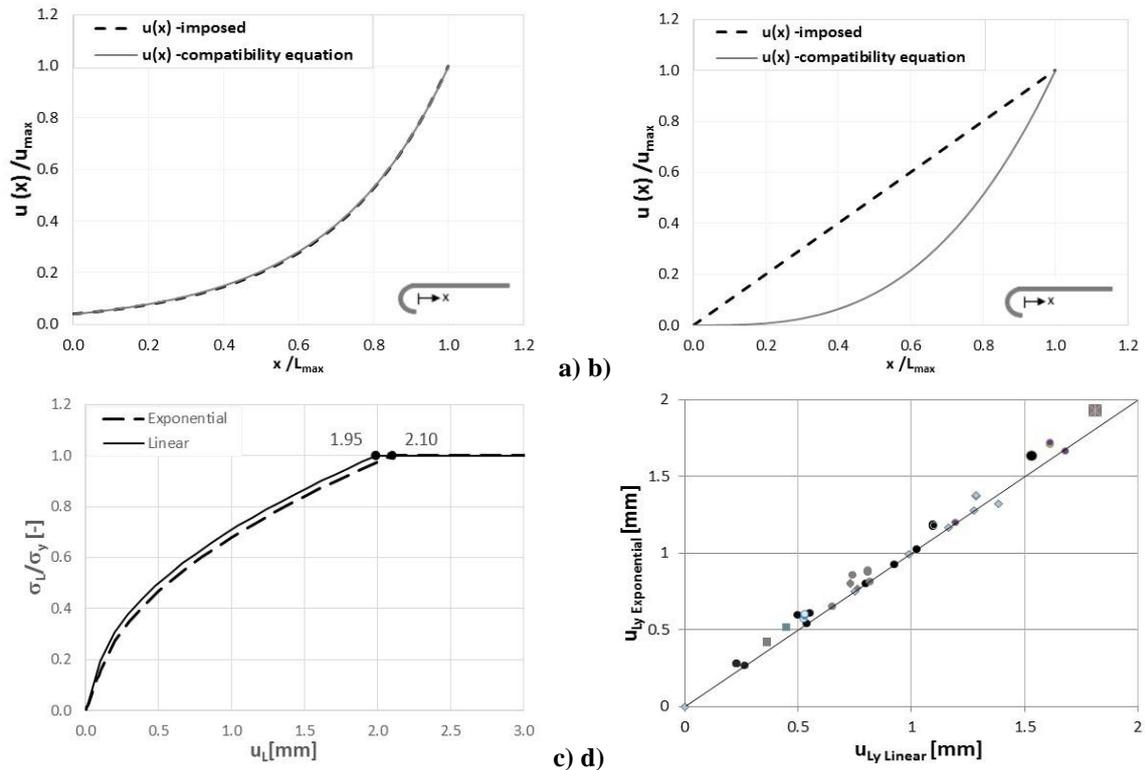


Figura 88: Campo di scorrimenti imposto e dedotto : a) formulazione esponenziale; b) formulazione lineare; c) Differenze tra σ_L - u_L con formulazione lineare ed esponenziale; d) scattergram dello scorrimento libero u_{LY}

La formulazione consente in maniera agevole la valutazione del campo di scorrimenti, tensioni tangenziali e tensioni normale lungo la barra, per diverse configurazioni geometriche, per diversi materiali e considerando o meno la presenza dell'uncino.

Di seguito (Figura 89) vengono riportate diverse configurazioni di barre di lunghezza via via crescenti, con o senza uncino: nel caso in cui l'uncino non ci si, infatti, può accedere che se la lunghezza dell'elemento è inferiore alla lunghezza di ancoraggio, la barra sfili senza raggiungere lo snervamento, a differenza della medesima barra uncinata

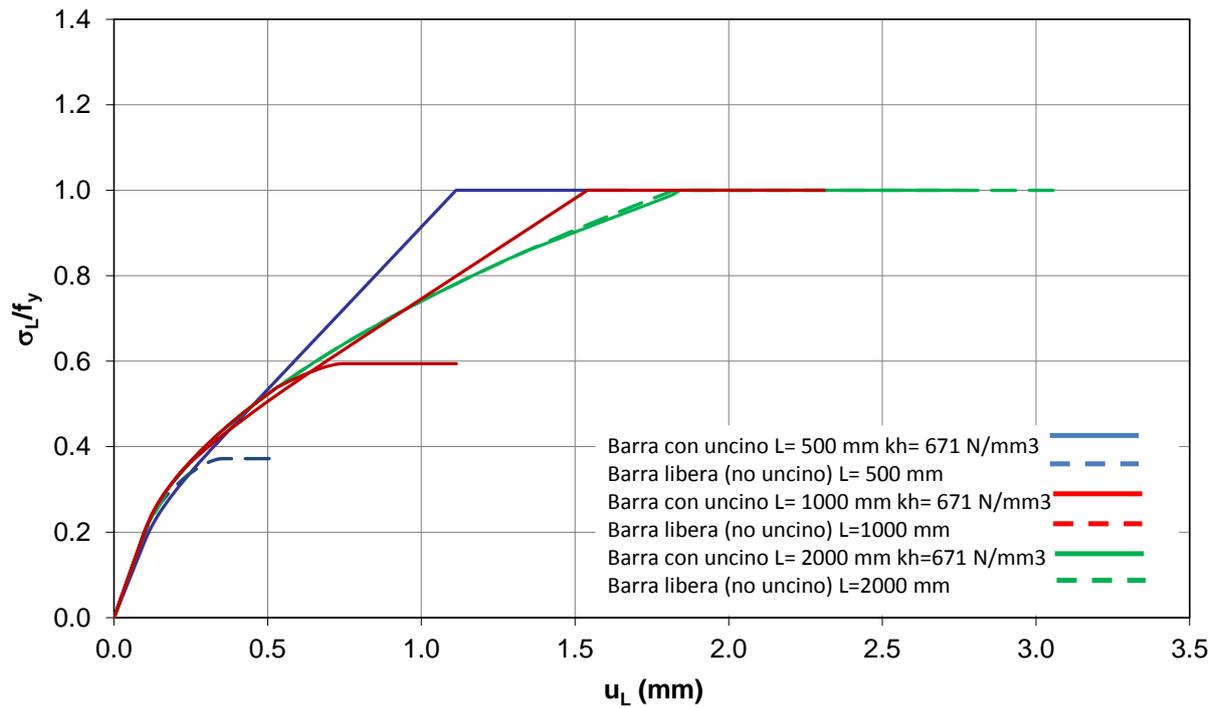


Figura 89: Effetto della presenza o meno dell'uncino

Figura 90 mostra l'evoluzione degli scorrimenti, delle tensioni di aderenza e delle tensioni assiali lungo la barra, nel caso specifico avente diametro 18 mm, lunghezza pari a 1500 mm, tensione di snervamento pari a 420 MPa e tensione di aderenza pari a 0.43 MPa.

Per il campo di scorrimento $u(x)$, la linea continua rappresenta il campo imposto, mentre la linea tratteggiata il campo dedotto dall'equazione di compatibilità.

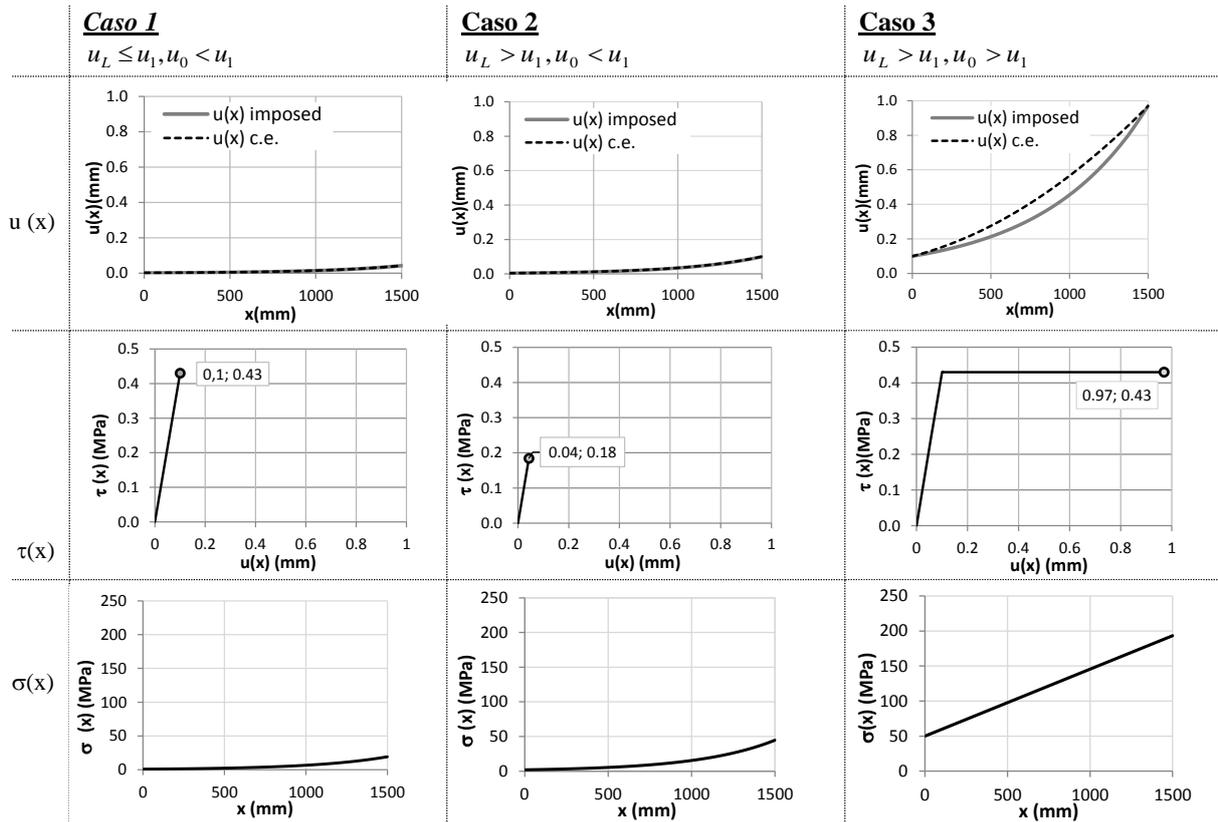
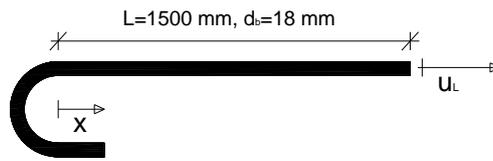


Figura 90: Sviluppo degli scorrimenti, tensioni di aderenza e tensioni assiali lungo la barra

Influenza dei diversi parametri nella legge σ_L - u_L

Di seguito vengono riportate le curve della legge σ_L - u_L , al variare dei parametri significativi, quali diametro ϕ , lunghezza della barra L , tensioni di aderenza τ_d , plateau (ϵ_h - ϵ_y)

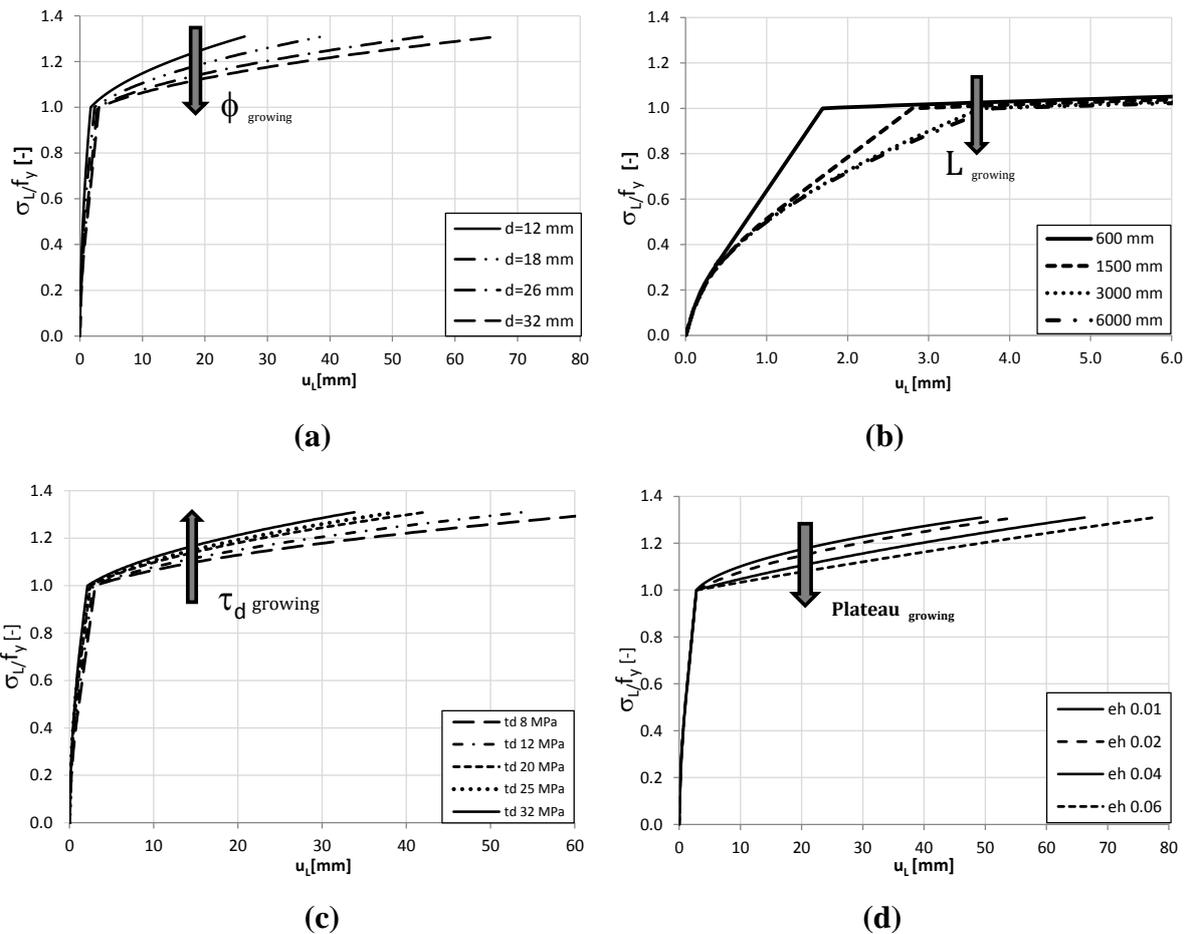


Figura 91: Curve tensioni scorrimento di estremità al variare di differenti parametri: influenza di a) diametro della barra b) lunghezza della barra c) tensioni di aderenza, d) lunghezza del plateau

Come è evidenziato in Figura 91 (a), l'incremento del diametro conduce a scorrimenti via via più grandi a parità di tensione, essendoci ovviamente una maggiore superficie di contatto, e lo stesso effetto c'è all'aumentare della lunghezza della barra (b) e del plateau (d), mentre l'incremento della tensione tangenziale (c) fornisce valori sempre minori dello scorrimento a parità di tensione, che si va avvicinando ovviamente alla condizione di perfetta aderenza (condizione limite di tensioni di aderenza infinitamente grandi).

Particolarmente importante è la presenza del plateau sulla riposta della barra: dalla Figura 92 si evincono differenze dell'ordine del 40%, ottenute considerando diversi valori del plateau ep .

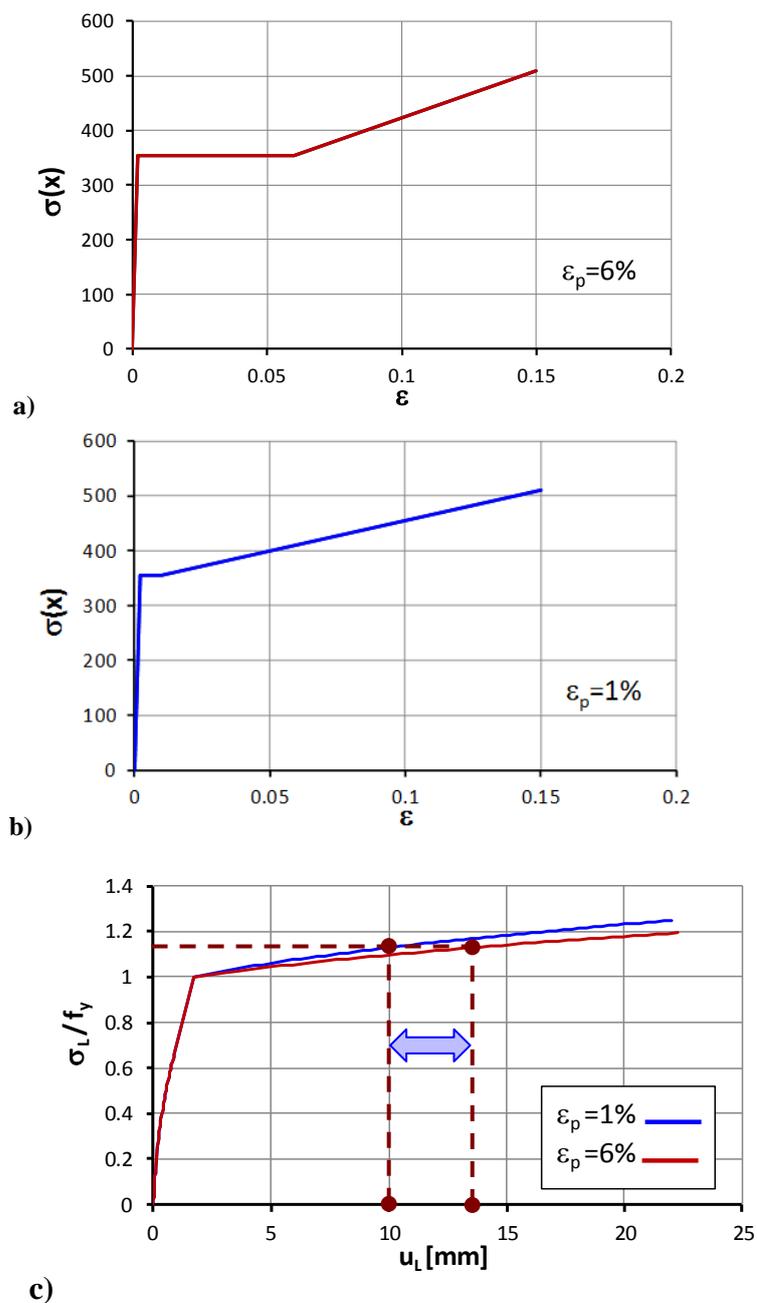


Figura 92: Influenza del plateau sulla risposta della barra

In Figura 93, sono mostrate invece le importanti differenze dovute all'allungamento massimo dell'acciaio A_{gt} , dell'ordine del 50%:

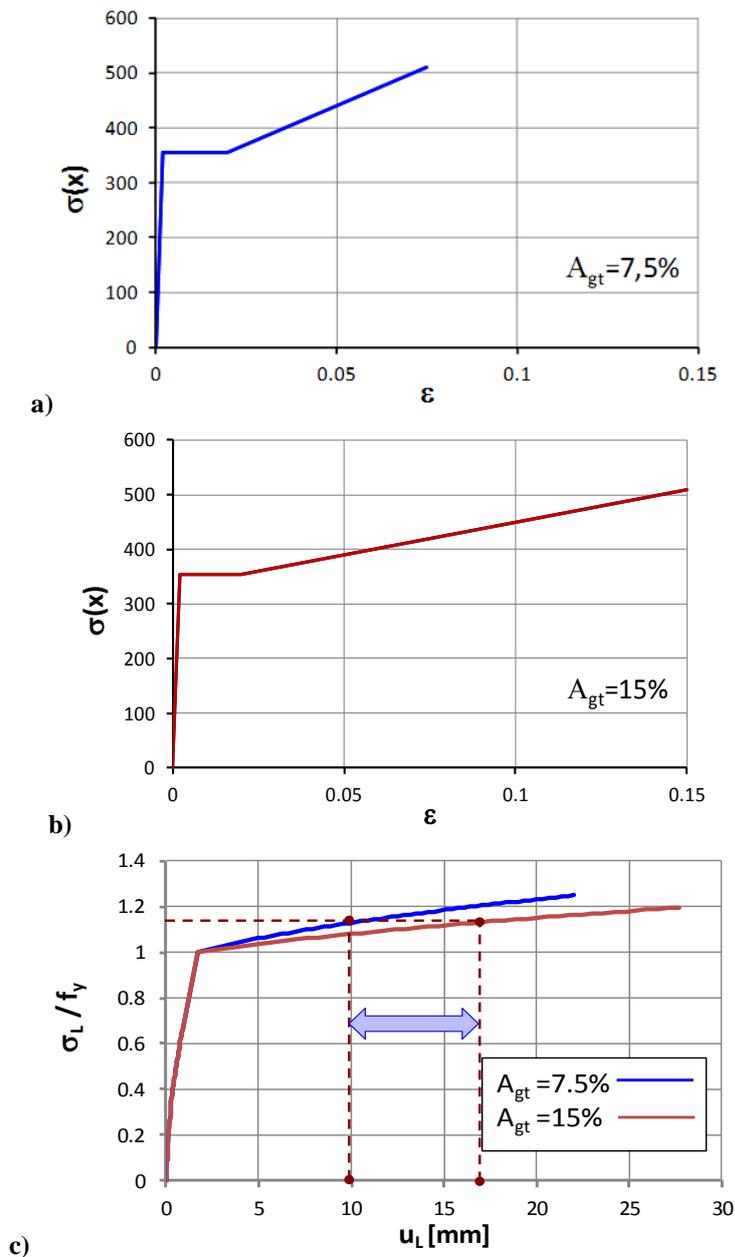


Figura 93: Influenza della deformazione massima sulla risposta della barra

Legge tensioni- scorrimenti totale

Come già accennato per la formulazione precedente (Braga et al.) per l'applicazione del modello si scorrimenti nelle analisi non lineare con elementi a fibre, non si può prescindere dalla trasformazione della legge tensioni-scorrimenti nella legge tensioni-deformazioni. Lo scorrimento u_L , rappresenta lo scorrimento globale per una certa fibra dell'elemento, lungo una specifica lunghezza di integrazione all'estremità dell'elemento stesso, detta lunghezza di cerniera plastica, nel caso di elementi con plasticità concentrata.

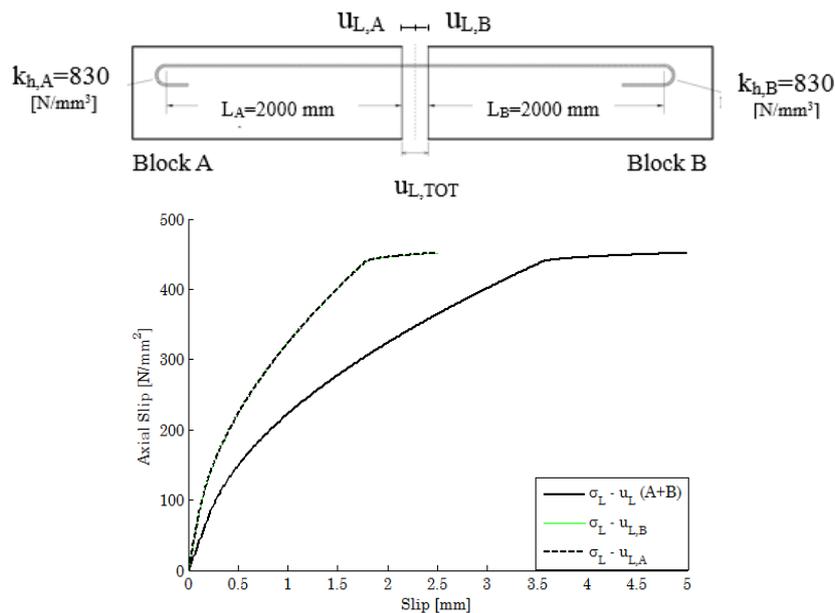
Dagli scorrimenti si passa quindi alle deformazioni (o meglio alle pseudo deformazioni) attraverso l'espressione:

$$\varepsilon = \frac{u_{L,TOT}}{L_i} \quad (3.3.110)$$

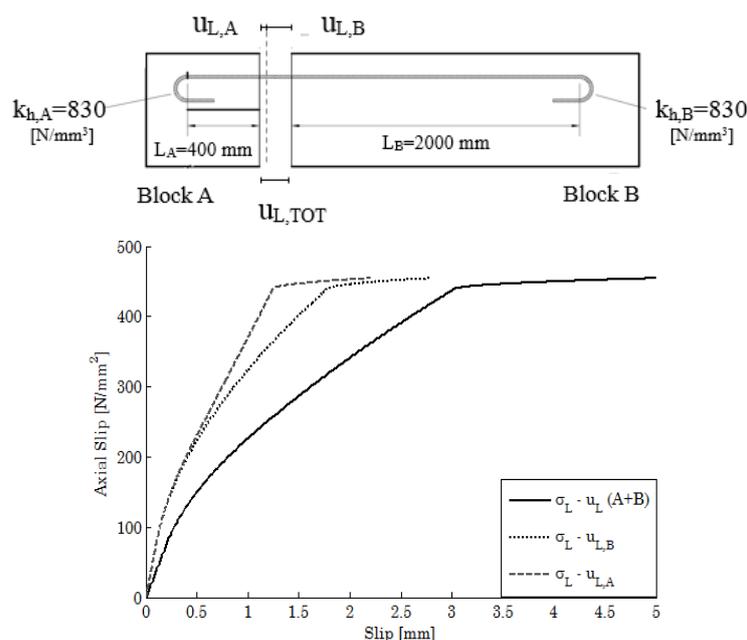
Dove $u_{L,TOT}$ è lo spostamento relativo globale all'estremità della barra, dato da:

$$u_{L,TOT} = u_{L,A} + u_{L,B} \quad (3.3.111)$$

In cui $u_{L,A}$ and $u_{L,B}$ rappresentano rispettivamente gli scorrimenti della barra rispetto al calcestruzzo da un lato, e del blocco di calcestruzzo rispetto alla barra dall'altro. La barra di fatto, si comporta come un perno che si oppone alla rotazione rigida che tende a far staccare i due blocchi, per questo lo scorrimento totale $u_{L,TOT}$ è uguale proprio al valore della fessura in quel punto. Esso dipende dalle caratteristiche della porzione di barra adiacente ai due blocchi e quindi anche eventualmente dall'ancoraggio. In Figura 94 sono mostrati degli esempi di calcolo dello scorrimento totale $u_{L,TOT}$, in funzione delle caratteristiche geometriche dei due blocchi a cavallo della fessura e degli ancoraggi: il contributo più basso in tal senso lo fornisce lo scorrimento della barra più corta, che risente della presenza irrigidente e di opposizione allo sfilamento dell'ancoraggio (caso b).



a)



b)

Figura 94: Legge ($\sigma_L - u_{L,}$)_{TOT}, per differenti configurazioni

3.4. Legge modificata dell'acciaio: formulazione ciclica

La legge tensioni scorrimenti descritta nei paragrafi precedenti, è solo di natura monotona. La formulazione esponenziale, così come la formulazione originale Braga et al. (2012) e successive modifiche (2015), consentono una descrizione del fenomeno infatti solo a livello monotono.

Nel presente paragrafo viene descritta la formulazione ciclica della legge, o meglio, volendo mantenere la validità a livello monotono della formulazione esponenziale analitica, si è voluto descrivere il ramo di scarico e di ricarico in funzione del ramo analitico monotono.

La formulazione ciclica è essenziale per descrivere il comportamento della barra in condizioni appunto cicliche, per esempio in presenza di azioni sismiche, nel cui caso è noto che per gli edifici esistenti si riscontrano maggiori criticità, essendo progettati nella maggior parte dei casi solo per carichi verticali.

Tale formulazione è stata ottenuta per mezzo di regressioni analitiche su risultati di analisi numeriche effettuate mediante il software di calcolo OpenSees [33].

Il modello numerico è di tipo monodimensionale e intende riprodurre una barra soggetta a scorrimenti, ancorata tramite uncino o piegatura a una estremità, e libera dall'altra.

La barra è stata modellata tramite un elemento truss, vincolato a un'estremità a una molla elastica lineare (a sua volta incastrata) che simula il comportamento dell'uncino o della piegatura in

generale, mentre il comportamento dell'interfaccia (legge di aderenza) è simulato tramite elementi Two Node Link:

```
element twoNodeLink SeleTag $iNode $jNode -mat $matTags -dir $dirs <-orient <$x1 $x2  
<-shearDist (2 $sDratios)> <-doRayleigh> <-mass $m>
```

SeleTag	unique element object tag
\$iNode \$jNode	end nodes
\$matTags	tags associated with previously-defined UniaxialMaterial objects
\$dirs	material directions: 2D-case: 1,2 - translations along local x,y axes; 3 - rotation about local z-axis 3D-case: 1,2,3 - translations along local x,y,z axes; 4,5,6 - rotations about local x,y,z axes
\$x1 \$x2 \$x3 \$y1 \$y2 \$y3 \$Mratios	vector components in global coordinates defining local x-axis (option 1) vector components in global coordinates defining local y-axis (option 2) P-Delta moment contribution ratios, size of ratio vector is 2 for 2D-cases (entries: [My_iNode, My_jNode, Mz_iNode, Mz_jNode]) My_iNode + My_jNode + Remaining P-Delta moments are resisted by shear couples. (option 3)
\$sDratios	shear distances from iNode as a fraction of the element length, size of ratio vector is 2 for 2D-cases (entries: [dy_iNode, dz_iNode]) (optional, default = [0.5 0.5])
-doRayleigh \$m	to include Rayleigh damping from the element (optional, default = no damping) element mass (optional, default = 0.0)

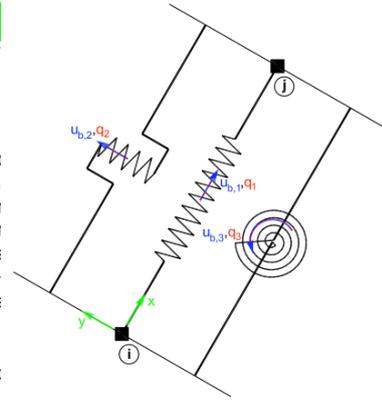


Figura 95: Two Node Link: modellazione del legame di interfaccia per le analisi numeriche condotte

Il modello numerico è schematizzato in Figura 96:

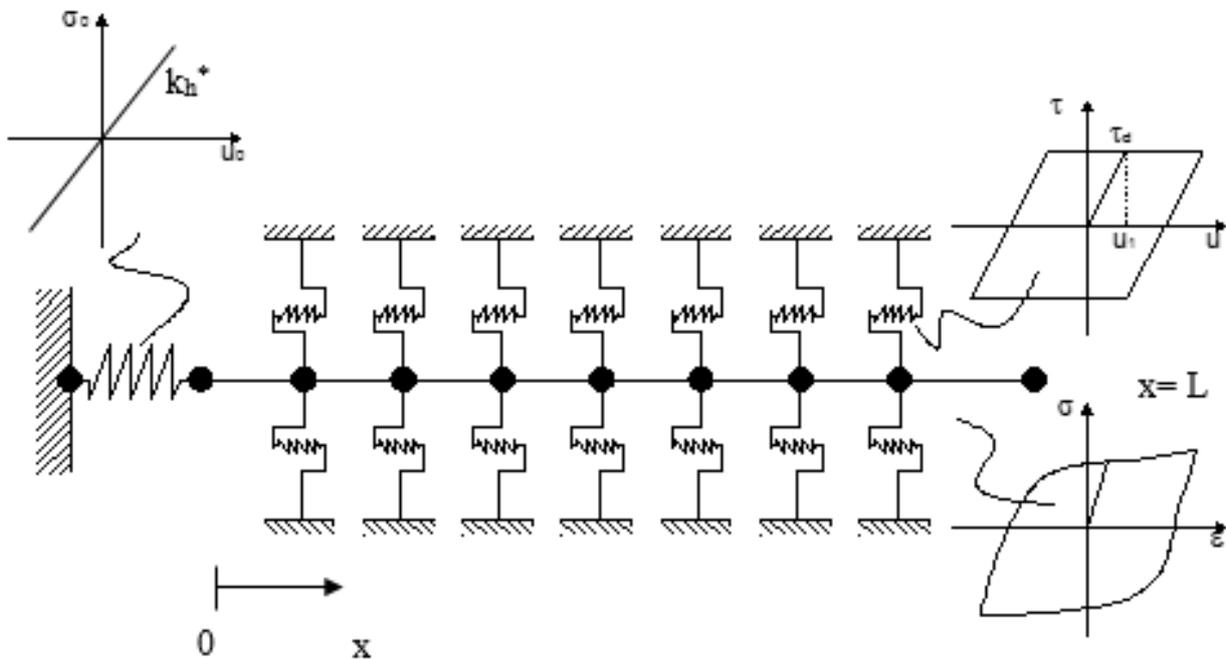


Figura 96: Modello numerico adottato per la formulazione ciclica di una barra soggetta a scorrimenti

Il modello sopra descritto è stato oggetto di un'estesa analisi parametrica, in base alle caratteristiche geometriche della barra (ad esempio variando la lunghezza, il diametro) le caratteristiche

meccaniche della stessa, (la tensione di snervamento, la tensione massima, l'entità del plateau, il livello di duttilità), nonché le caratteristiche di aderenza (principalmente τ_d), e quindi indirettamente anche la resistenza del calcestruzzo da cui queste ultime dipendono.

In particolar modo sono state effettuate prove parametriche anche per valutare l'influenza del legame di aderenza, e sono state effettuate analisi in cui, sia per evidenziare l'influenza dell'acciaio sulla forma del legame, sia per motivi di onere e di problemi numerici, sono stati impiegati diversi legami costitutivi dell'acciaio, per contemplare o meno la presenza del plateau e per considerare o meno il degrado dello stesso.

Per giungere alla legge ciclica, si è proceduto per gradi. L'interazione di due materiali, ossia dell'acciaio da un lato e dell'aderenza dall'altro, oltre alla presenza della molla, rischia di essere pericolosa ai fini interpretativi e di rendere la comprensione del risultato finale difficile o forviante. Ai fini della modellazione finale si è partiti dalla barra senza molla e link, poi si è aggiunta la molla, infine sono stati aggiunti gli N link, valutando anche l'influenza del numero di questi sul comportamento globale (confrontando la risposta all'estremità della barra in termini di tensione-scorrimenti con la risposta del modello analitico).

Il primo aspetto rilevante che è emerso, è stata l'influenza del numero di link sulla risposta globale: in tal senso la prima analisi parametrica è stata effettuata sul numero di link sufficiente per descrivere il comportamento corretto, ossia oltre il cui numero la risposta strutturale non forniva più alcuna variazione, in seguito è stata definita una procedura numerica automatica in OpenSees per cui il numero di link varia in base alla lunghezza della barra, avendo trovato precedentemente un criterio.

In secondo luogo lo studio ha riguardato i legami da utilizzare per l'acciaio e l'aderenza.

L'acciaio, in particolare, ha un comportamento non lineare estremamente complesso, ed è per questo che si è proceduto per gradi, a partire da un legame semplice, l'elasto plastico incrudente, chiamato in OpenSees Steel01, fino a modelli più raffinati, come Steel 02 (Giuffrè Menegotto Pinto), Steel 4, Reinforcing Steel Material,, Dodd Restrepo, Steel MPF (Menegotto Pinto modificato da Filippou et al.).

Poiché alcuni modelli consentono di modellare alcuni aspetti ma non altri, alla fine si è giunti a scegliere principalmente due legami: il legame Giuffrè Menegotto Pinto modificato da Filippou et al (MPF) ., e il modello di Kosovari et al. (Steel 4), che a differenza del primo consente di considerare anche la presenza del plateau.

Le analisi sono state svolte in prima battuta applicando un carico monotono all'estremità libera ($x=L$), per confermare la formulazione analitica, e in secondo luogo applicando al medesimo punto una storia di spostamenti per valutare il ramo di scarico e ricarico.

In particolare, a livello ciclico, la barra è stata soggetta a differenti storie di spostamenti crescenti, a pendenza costante, il che simulano a gruppi di tre il primo ciclo, il secondo ciclo, etc. Ogni simulazione numerica è soggetta a una diversa storia di spostamenti imposta, a seconda del livello di duttilità che si vuole raggiungere, il che dipende dal punto in corrispondenza del quale si ha u_{LY} , ossia lo snervamento dell'estremo libero della stessa. Un esempio di storia di spostamenti ciclica imposta è mostrato di seguito in Figura 97, in cui si notano il primo e il secondo ciclo:

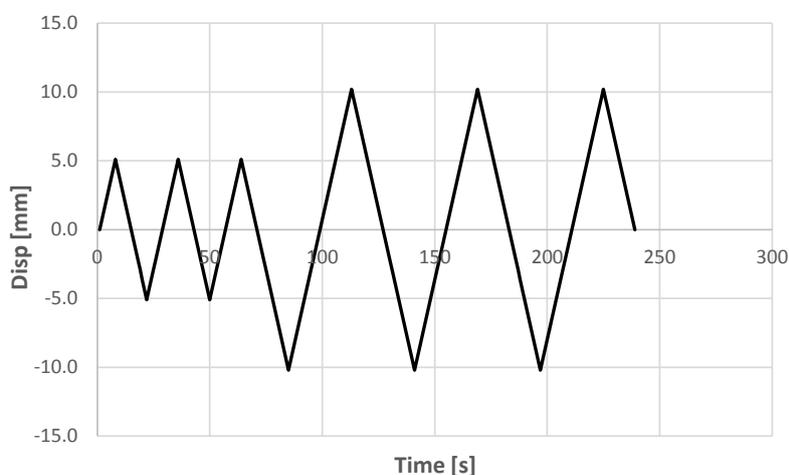


Figura 97: Un esempio di storia di spostamenti ciclica applicata all'estremità libera della barra

3.4.1 Leggi costitutive dell'acciaio, dell'interfaccia e dell'uncino

Per lo sviluppo del modello numerico, il primo passo è stato lo studio dei diversi legami costitutivi dei materiali in gioco, sia a livello monotono (per confermare i risultati analitici) sia e soprattutto a livello ciclico.

Acciaio

Il comportamento delle barre d'acciaio influenza notevolmente la risposta strutturale, in misura maggiore rispetto al calcestruzzo, ed è sostanzialmente diverso da quello dell'acciaio degli elementi strutturali. Ad esempio, per i primi, le deformazioni a compressione sono minori di quelle a trazione: questo è dovuto in generale proprio all'aderenza e alla chiusura delle fessure che si erano precedentemente create nel calcestruzzo, che prevengono eccessive tensioni di snervamento a compressione nella barra stessa prima che avvenga l'espulsione del copriferro.

In generale c'è addirittura differenza tra il comportamento dell'acciaio di barre lisce e quello relativo a barre nervate, come è evidente nel lavoro di Prota, A., De Cicco, F., & Cosenza [34]: in particolare di evince la maggiore duttilità delle barre lisce e la forte dipendenza dalla snellezza **Figura 98**:

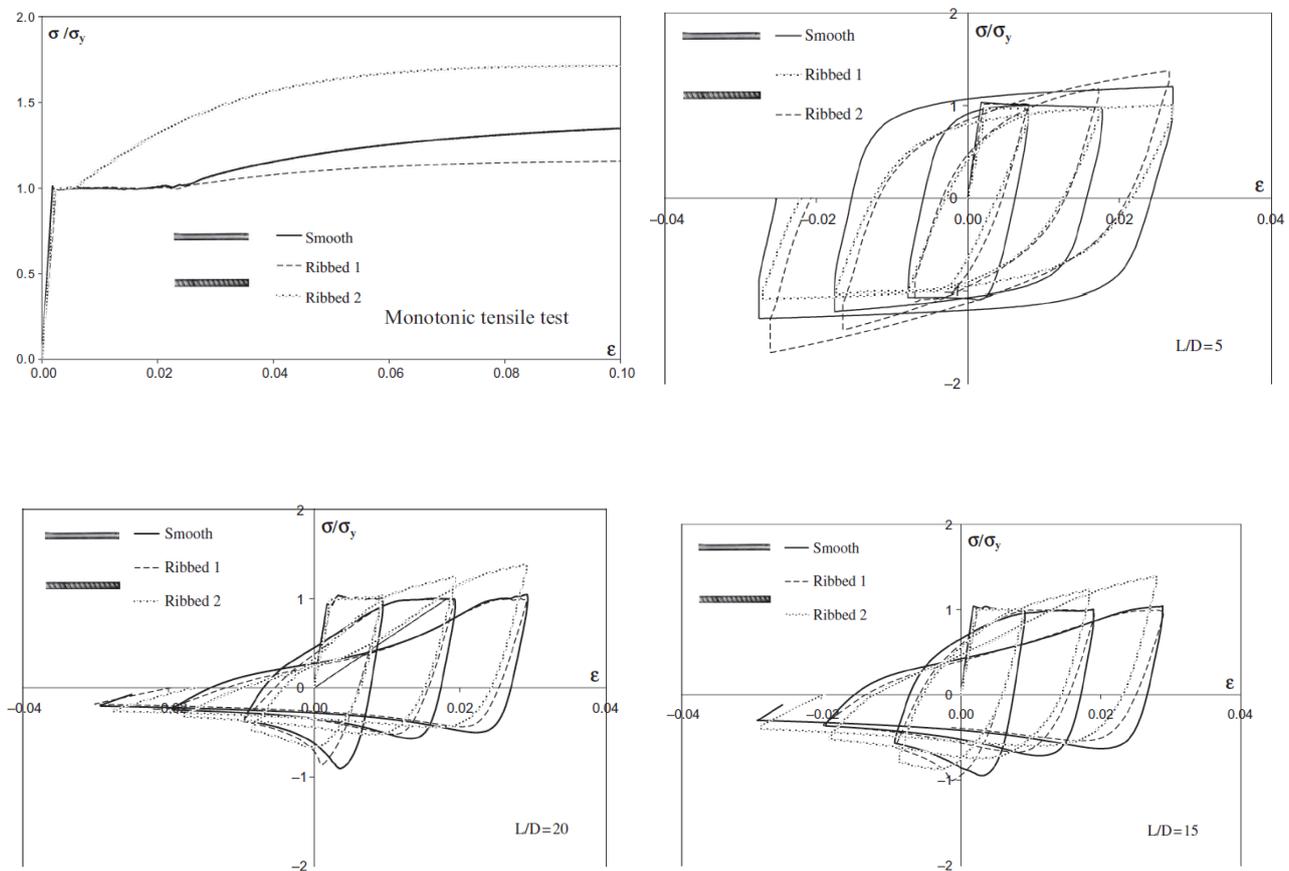


Figura 98: Barre lisce vs barre nervate: prove monotoniche e cicliche

In generale, c'è da rilevare che il comportamento delle barre come elemento di rinforzo nel calcestruzzo è influenzato da diversi fattori, e proprio perché generalmente esse sono soggette, in fase sismica, a uno sforzo di trazione e compressione, risentono in quest'ultimo particolare caso non solo del calcestruzzo ma anche dalla presenza e numero di staffe, nonché dal passo tra queste ultime.

Il legame tensioni deformazioni dell'acciaio, in generale presenta delle caratteristiche abbastanza comuni, che lo peculiarizzano. In particolare, a livello monotono:

- un primo tratto iniziale rettilineo, nel quale la tensione è proporzionale alla deformazione, essendo il coefficiente di proporzionalità il modulo di Young, E , del materiale. Il comportamento in questa fase è elastico, per cui se si effettua uno scarico esso riprende la sua lunghezza iniziale.

- proseguendo nella deformazione il diagramma abbandona l'andamento rettilineo, la deformazione si compone di una parte plastica, che non scompare eliminando la tensione, e che corrisponde circa allo scostamento della curva dalle legge di proporzionalità. Si assume come parametro di questa transizione la tensione che produce uno scostamento dalla proporzionalità dello 0,2%: $R_{p,0,2}$. In questa fase c'è la presenza del cosiddetto "plateau", per cui a parità di tensione aumentano le deformazioni plastiche, dovuto all'isorientazione dei reticoli cristallini;
- la fase di incrudimento, in cui si assiste all'aumentare contemporaneo delle tensioni e delle deformazioni, sebbene con una pendenza decisamente più bassa di quella elastica, a causa della maggiore velocità con cui aumentano le deformazioni rispetto alle tensioni. Questa fase culmina con il punto massimo (F_{max} , A_{gt}).
- oltre il punto sopra descritto c'è una fase decrescente di softening, che culmina con la rottura del materiale

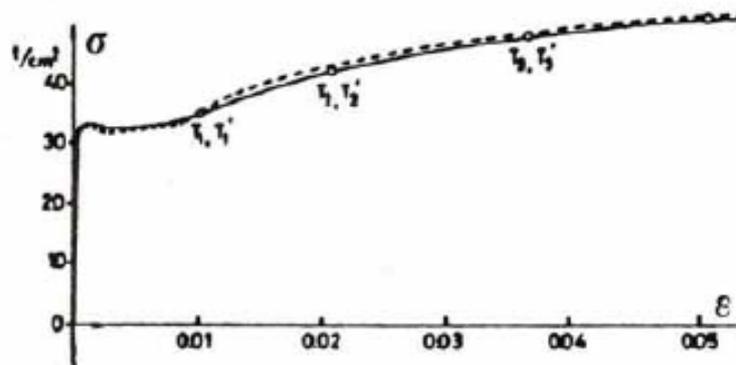


Figura 99: Curva monotona acciaio da sperimentazione

Per quanto riguarda il comportamento ciclico, lo scarico seguirebbe teoricamente la pendenza del ramo di carico, tuttavia non è così, a causa dell'Effetto Baushinger, dovuto al fatto che in fase di scarico la curva punta a un livello tensionale più basso di quello raggiunto precedentemente a causa dell'accumulo di plasticizzazione. Nella fase di ricarico il comportamento può essere duplice, ossia si può assistere sia al cosiddetto incrudimento isotropico, sia a quello cinematico che essenzialmente dipende dalla natura della superficie di snervamento.

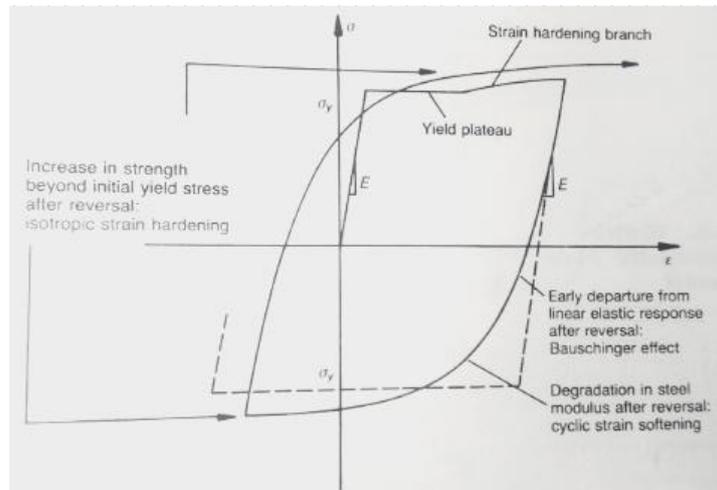


Figura 100: Comportamento ciclico dell'acciaio

Per quanti progressi possano esserci nella meccanica computazionale, l'implementazione di un materiale altamente non lineare come può essere l'acciaio, può creare non pochi problemi a livello di convergenza dell'analisi o di onere computazionale, per questo nel corso degli anni molteplici sono state le formulazioni dei vari autori, a partire da semplici modelli multilineari a modelli non lineari semplificati.

Di seguito si passano brevemente in rassegna i principali modelli utilizzati nelle analisi numeriche, alcuni dei quali sono anche tra i più famosi in letteratura.

Giuffrè – Menegotto – Pinto (Steel 02)

La formulazione di Giuffrè- Menegotto- Pinto[36] rappresenta una delle più famose, se non la più famosa formulazione sull'acciaio: la maggiorparte delle formulazioni proposte in OpenSees si basano su questa.

Essa è una formulazione non lineare piuttosto concisa che può tenere in conto dell'effetto Baushinger:

$$\sigma^* = b\varepsilon^* + \frac{(1-b)}{(1 + \varepsilon^{*R})^{\frac{1}{R}}} \quad (3.4.1)$$

in cui:

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \quad (3.4.2)$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_r} \quad (3.4.3)$$

$$R = R_0 - \frac{a_1 \xi}{a_2 + \xi} \quad (3.4.4)$$

L'equazione (3.5.1) rappresenta la curva di transizione dalla retta di pendenza E_0 all'asintoto di pendenza E_1 (linee a e b in Figura 101), in cui σ_0 e ε_0 rappresentano la tensione e la deformazione nei punti di incontro dei due asintoti (punto A, Figura 101), mentre σ_r e ε_r hanno la stessa funzione dei precedenti, ma nel caso in cui la deformazione del punto di incontro tra i due asintoti abbia lo stesso segno; b è il rapporto di incrudimento E_1/E_0 , mentre R è il parametro che influenza la forma della curva di transizione, e consente una buona rappresentazione dell'effetto Baushinger. R è dipendente dalla differenza tra la deformazione corrispondente al punto di inversione A e quella corrispondente al punto B. R_0 è il valore del parametro R durante il ramo di carico, a_1 e a_2 sono parametri determinati sperimentalmente.

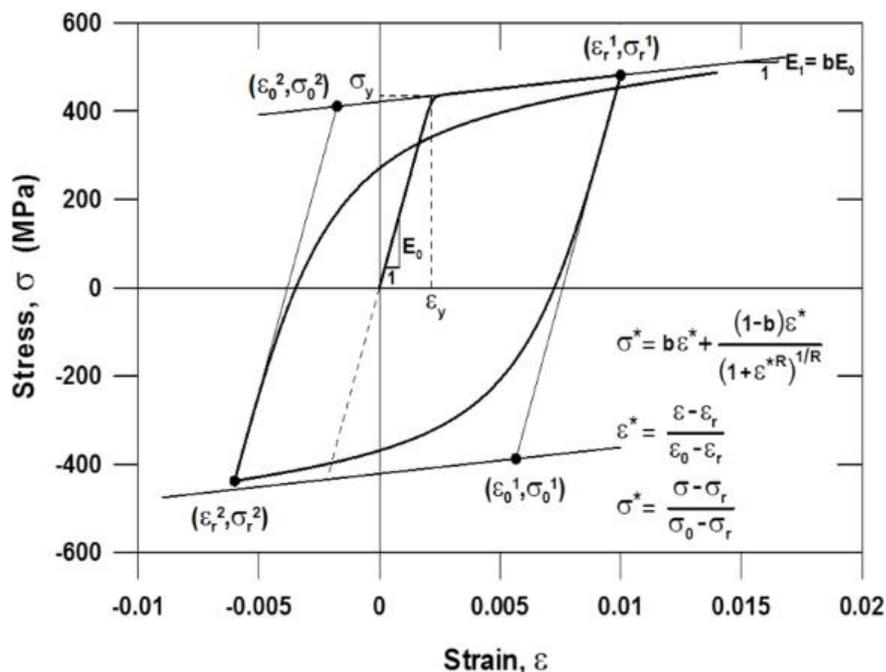


Figura 101: Parametri del modello Giuffrè Menegotto Pinto

In OpenSees il suddetto legame si chiama Steel02 e necessita dell'implementazione dei seguenti parametri:

R_0 =curvatura iniziale

cR_0, cR_1 = parametri di degrado

a_{31}, a_2, a_3, a_4 = incrudimento isotropico

Filippou et al. (Steel MPF)

Il modello di Giuffrè Menegotto Pinto precedentemente descritto viene modificato, o meglio integrato da Filippou et al. [2] nel 1983, introducendo l'incrudimento isotropico. Il modello, sostanzialmente, prevede la traslazione dell'asintoto iniziale in prossimità dello snervamento tramite una tensione σ_{st} parallela a questa direzione. L'idea è stata introdotta per la prima volta da Stanton e McNiven, il problema è tuttavia determinare da quale parametro dipende questa traslazione: Filippou ha scelto la massima deformazione plastica, da cui deriva la relazione:

$$\frac{\sigma_{st}}{\sigma_y} = \alpha_3 \left(\frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_y} - \alpha_4 \right) \quad (3.4.5)$$

In cui ε_{max} rappresenta la massima deformazione al punto di inversione del carico, mentre ε_y e σ_y rappresentano la deformazione e la tensione a snervamento, α_3 e α_4 dei parametri sperimentali.

In particolare si differenzia il comportamento isotropico a trazione da quello in compressione, tramite i fattori h_t e h_c :

$$\Delta\sigma_{st} = (h_t - 1) \cdot \sigma_{y1} \quad (3.4.6)$$

$$\Delta\varepsilon_{st} = (h_t - 1) \cdot \varepsilon_y \quad (3.4.7)$$

$$h_t = 1 + a_1 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_y} - a_2 \right) \geq 1 \quad (3.4.8)$$

$$\Delta\sigma_{sc} = -(h_c - 1) \cdot \sigma_{y1} \quad (3.4.9)$$

$$\Delta\varepsilon_{sc} = -(h_c - 1) \cdot \varepsilon_y \quad (3.4.10)$$

$$h_c = 1 + a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_y} - a_4 \right) \geq 1 \quad (3.4.11)$$

Ponendo a_1 e a_3 pari a zero, di fatto non si sta considerando l'incrudimento isotropico, poiché per h_t , h_c pari a 1, $\Delta\sigma_{st}$ e $\Delta\sigma_{sc}$ sono nulli.

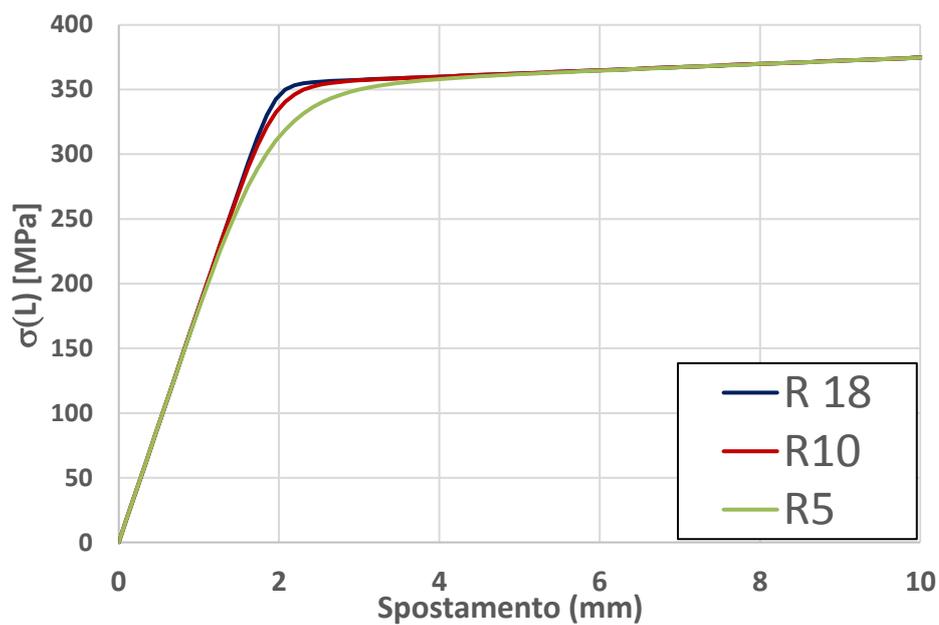


Figura 102: Influenza del parametro di curvatura R0: monotono

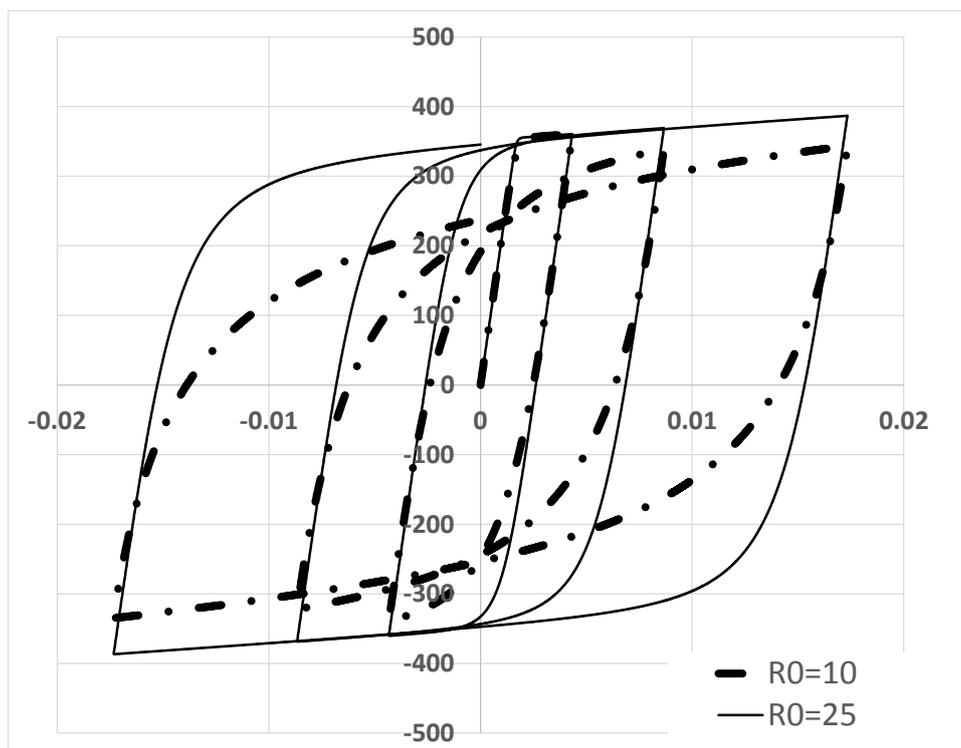


Figura 103: Influenza del parametro di curvatura R0: ciclico

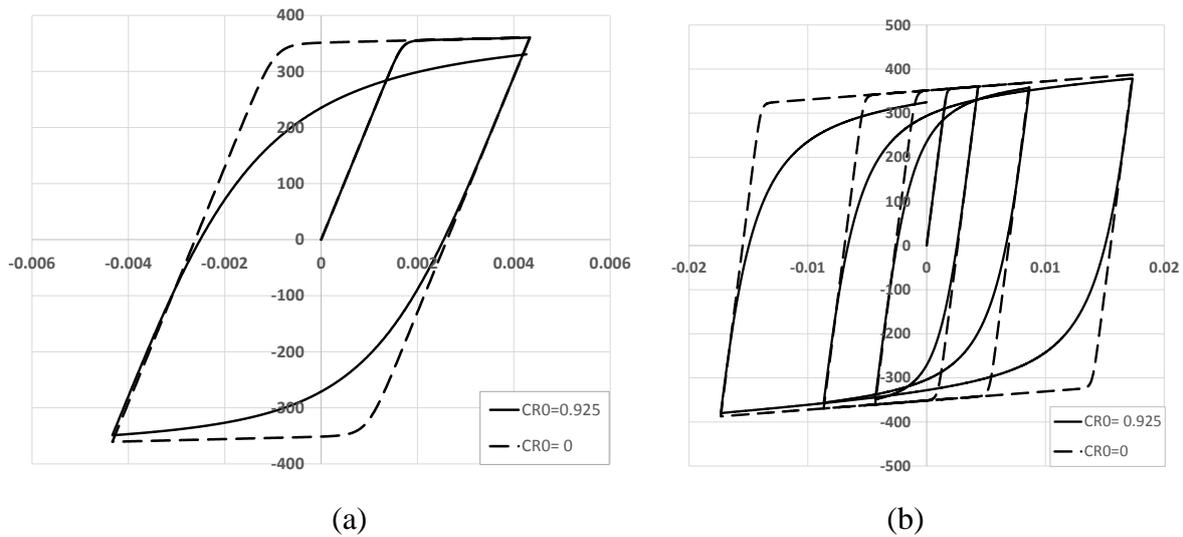


Figura 104: Influenza del parametro CR0 sul primo ciclo (a), sui cicli successivi (b)

In Figura 102, Figura 103, Figura 104 sono riportati i risultati ottenuti su una barra d'acciaio (senza scorrimenti), al variare del parametro di curvatura R_0 e dei parametri cR_0 e cR_1 .

Kolozvari (Steel4)

In OpenSees non sono molti i legami dell'acciaio che contemplano il plateau. In particolare ci sono due modelli: Steel 4[37] e Reinforced Concrete.

Il legame Steel 4 è un legame completo, che riesce a tenere in conto del Plateau, dell'incrudimento cinematico e dell'incrudimento isotropico. Purtroppo è più oneroso da un punto di vista computazionale e per questo è stato impiegato solo per alcune analisi per considerare il plateau.

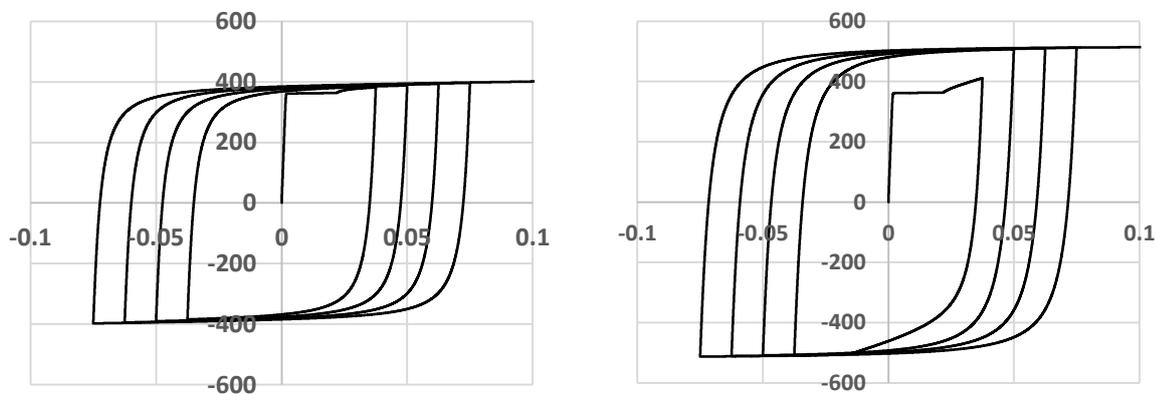


Figura 105: Steel 4: Incrudimento cinematico ($bk=0$, $bk>0$)

Per quanto riguarda il legame Reinforced Concrete, non si è riusciti a governare bene i parametri che regolano il legame stesso: questo legame infatti presenta una formulazione piuttosto complessa, che tiene in conto anche dei fenomeni di fatica e di buckling che intervengono.

Interfaccia

Sul legame di aderenza delle barre lisce e circa le sue criticità si è ampiamente discusso nel Capitolo II. E' stata sottolineata come particolare criticità la scarsa quantità di materiale disponibile in letteratura, soprattutto circa il comportamento ciclico dell'aderenza per le barre lisce, e si sono descritti i modelli analitici disponibili, principalmente Varum , Verderame e CEB FIP per il monotono,

Figura 106:

Model	$\tau_{b,ma}$	$\tau_{b,f}$	S_{max}	S_f
adopted	[MPa]	[MPa]	[mm]	[mm]
CEB-FIP	0.68	0.68	0.10	0.10
Verderame et al., 2004	1.41	0.61	0.23	2.39
Varum	2.55	0.79	0.74	4.98

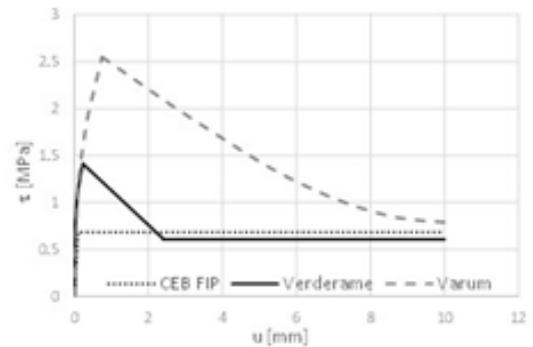


Figura 106: Confronto legami monotoni aderenza: Varum,, Verderame, CEB FIP

E solo gli ultimi due per il comportamento ciclico, **Figura 107:**

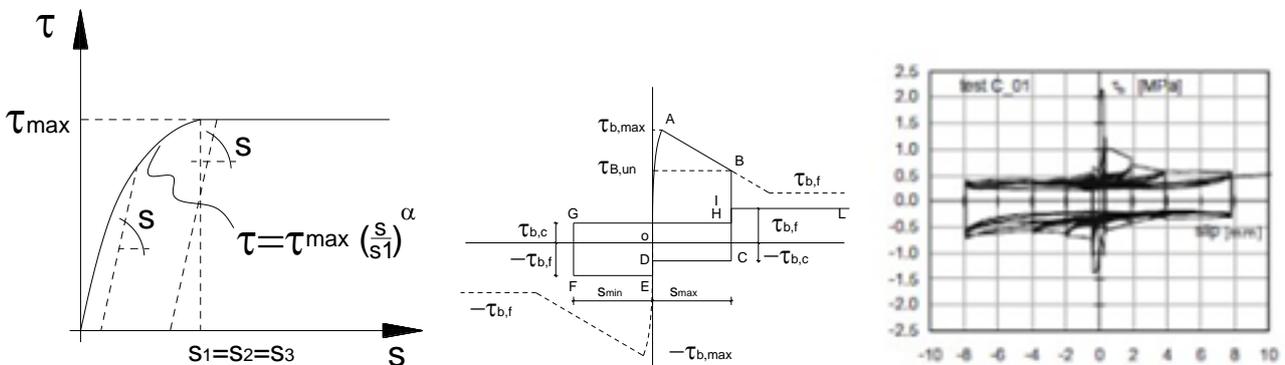


Figura 107: Comportamento ciclico delle tensioni di aderenza per barre lisce: a) CEB FIP b),c) Verderame et al.

Dal momento che si vuole legare il comportamento ciclico della barra, o meglio il suo ramo di scarico e di ricarico al modello analitico, e dal momento che il comportamento delle barre lisce, come si è visto nel Capitolo II, è spesso e in gran parte puramente attritivo, si è deciso di utilizzare, almeno in prima battuta, un legame per i link di tipo elasto plastico.

Considerare infatti un modello come quello di Verderame (Figura 107 b)), significherebbe considerare anche il picco di tensione, sul quale tuttavia non si vuole fare affidamento, in maniera tra l'altro cautelativa, dal momento che una quota parte consistente di tale tensione, %50-60%, è dovuta a fenomeni di adesione chimica più che a fenomeni di ingranamento tra la pasta di cemento e la barra liscia.

La formulazione elasto plastica attribuita ai link, presenza un ramo di scarico e di ricarico con la medesima pendenza del ramo di carico Figura 108.

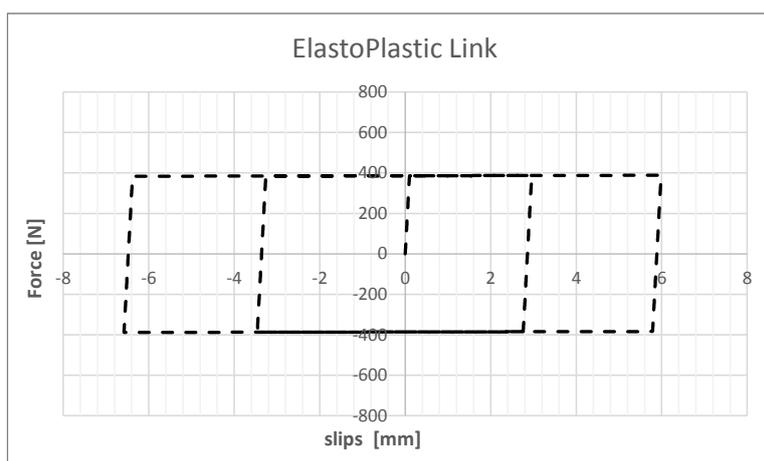


Figura 108: Tensioni di aderenza: formulazione elasto plastica

La scelta di questo tipo di legame in parte sovrastima, per un certo tratto, le tensioni in fase di scarico e di ricarico, impedendo lo sviluppo del cosiddetto effetto pinching, che tuttavia nel caso di elementi con barre lisce è piuttosto poco evidente e si può osservare spesso solo nei primissimi cicli della risposta strutturale (fenomeno legato proprio ad una maggiore stabilità nella dissipazione delle tensioni di aderenza per le barre lisce). Pertanto, la semplificazione del legame può ritenersi accettabile.

In definitiva, vengono riportati i risultati relativi al modello ciclico individuato, attribuendo ai link il legame elasto plastico e all'acciaio un legame Menegotto Pinto Filippou (Steel MPF), che tuttavia non contempla il plateau. Per completezza, dunque, per valutare anche l'influenza di quest'ultimo sono state effettuate delle analisi integrative con il legame Steel 4, benchè in realtà il suo effetto è

importante principalmente nel primo ciclo, perdendosi nei cicli immediatamente successivi al primo, e soprattutto presenta molti più oneri computazionali.

Il legame Menegotto Pinto Filippou (Steel MPF) è stato preferito al legame originale Giuffrè Menegotto Pinto (Steel02), per via di problemi numerici relativi a quest'ultimo, oltre al fatto che il modello di Filippou consente una più agile gestione dei parametri, consentendo di introdurre, ad esempio, differenti valori di snervamento a trazione o a compressione, e regolare meglio l'effetto Baushinger, cosa che nel legame Steel 02 non sempre risultava possibile.

Non sono stati contemplati fenomeni di instabilità a compressione delle barre, né fenomeni di fatica, sia per non introdurre altre variabili nel problema che non consentono effettivamente di comprendere l'esclusiva influenza degli scorrimenti, sia per non aumentare l'onere computazionale.

Formulazione ciclica dedotta dalle analisi numeriche

Le analisi numeriche sono state condotte con l'obiettivo di trovare la formulazione che relazioni il ramo di scarico e di al ramo monotono, la cui espressione è già nota.

Attraverso l'analisi parametrica, si è determinata la "forma" del ramo di scarico e di ricarico normalizzando le curve rispetto alla coppia tensione-scorrimento corrispondenti allo snervamento.

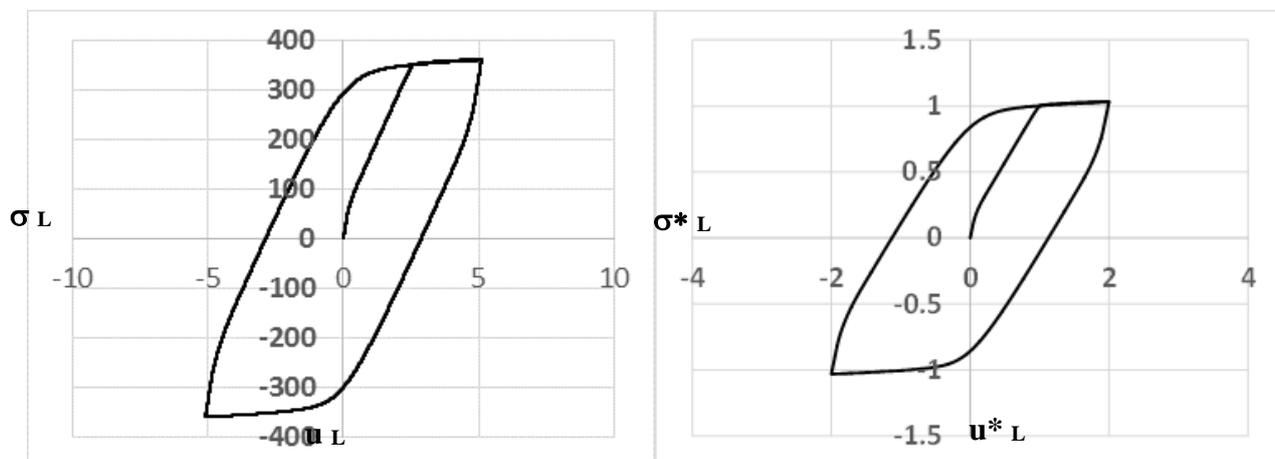


Figura 109: Ciclo della barra soggetta ad N link, $\tau_d = 0.4$ MPa: a) piano reale b) piano normalizzato rispetto al punto di snervamento

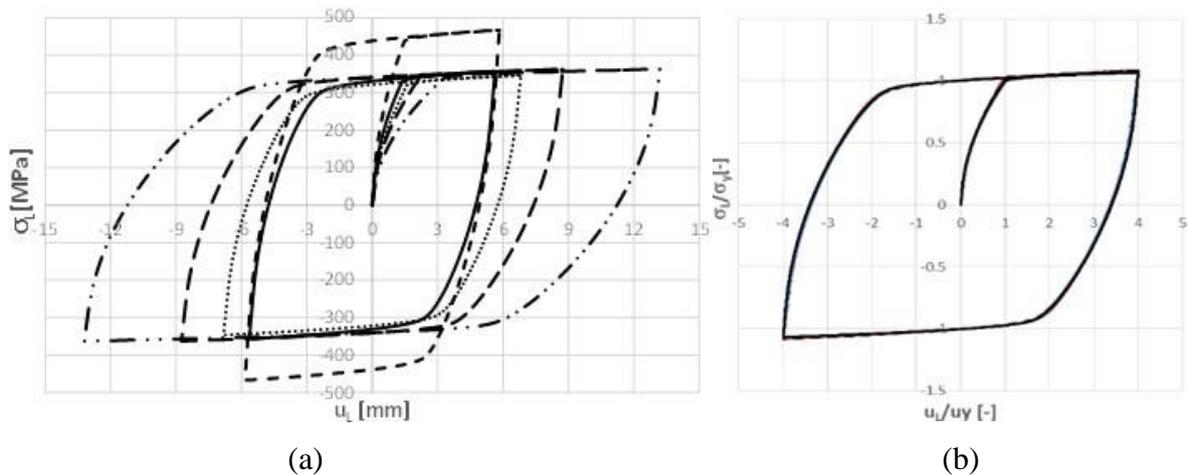


Figura 110: Risposte cicliche della barra per differenti casi: piano reale (a); piano normalizzato rispetto al punto di snervamento(b);

Adottando differenti valori di tensione di aderenza, snervamento dell'acciaio, rapporti tra lunghezza e diametro L/d , la forma dei cicli sostanzialmente non cambia.

In particolare è evidente che, per quante differenti possano essere le curve dei vari casi indagati ,Figura 110(a), normalizzando queste ultime rispetto al punto di snervamento sono sostanzialmente tutte coincidenti, il che fa presupporre che la forma della curva sia sempre la stessa.

I cicli sono caratterizzati da alcuni punti cardinali: nel ramo di carico, possono individuarsi gli stessi punti già noti nel ramo di carico, in particolare:

- Caso 1: *punto A*, in cui il valore dello scorrimento all'estremità libera u_L è uguale al valore dello scorrimento u_1 per il quale si raggiunge la tensione tangenziale massima di aderenza τ_d , e il *punto Y*, in cui la tensione σ_L all'estremo libero è pari alla tensione di snervamento σ_y .
- Caso 2: *punto A*, in cui il valore dello scorrimento all'estremità libera u_L è uguale al valore dello scorrimento u_1 per il quale si raggiunge la tensione tangenziale massima di aderenza τ_d , *punto C* per il quale lo scorrimento dell'ancoraggio u_0 assume anch'esso il valore di u_1 e il *punto Y*, in cui la tensione σ_L all'estremo libero è pari alla tensione di snervamento σ_y .

Il *Caso 1* è il caso più comune, ossia quello in cui la lunghezza di ancoraggio è minore rispetto alla lunghezza totale della barra e la barra snerva prima di raggiungere la massima tensione di aderenza per tutta l'intera lunghezza. Il secondo caso invece, riguarda la situazione un po' più

rara, ossia quando la lunghezza di ancoraggio, dove si sviluppano le tensioni di aderenza, è uguale alla lunghezza totale della barra: questo in genere accade quando si verifica la duplice condizione geometrica per la barra è molto corta e il diametro d'altro canto è molto grande. In particolare, quest'ultimo caso riguarda generalmente rapporti $L/d \leq 90$, e tensioni tangenziali di aderenza inferiori a 1 MPa, almeno questo è quanto è stato riscontrato nella presente analisi parametrica.

Il ramo di scarico è caratterizzato da una prima parte (SA') con una rigidezza $K_{SA'}$ uguale alla rigidezza elastica del primo tratto nel primo ramo di carico OA, per cui $K_A = K_{SA'}$. Il ramo SA' è poi seguito dal resto della curva di scarico, fino al punto S'. Da questo punto in poi, ricaricando, si individua il ramo (S'A''), con la medesima pendenza del ramo SA', per cui $K_{S'A''} = K_{SA'}$, seguito dal ramo di ricarico. In Figura 111 sono descritte tutte le grandezze menzionate che intervengono nella formulazione, collocate all'interno di un ciclo "tipo", mentre in Figura 112 è esplicitato il significato della rigidezza K_A , sia nel piano reale che nel piano normalizzato.

Le curvature del ramo di scarico e di ricarico sono definite in funzione dei parametri di degrado del legame di Menegotto Pinto Filippou, $cR1$ e $cR2$, cui è stato attribuito valore 0.8 e 0.15, il valore di curvatura iniziale R_0 è stato preso pari a 18.5, mentre i cicli successivi seguono il classico andamento dell'incrudimento cinematico. Non è stato implementato l'incrudimento isotropico, attribuendo quindi valori nulli ai parametri a_1 e a_3 .

Le regressioni sulle curve di scarico e di ricarico a partire dai punti A' e A'' rispettivamente, hanno condotto alla seguente espressione, nel piano normalizzato:

$$\sigma^* = a \cdot \left[\frac{(u^* - u_S^*)}{b} \right]^n + \sigma_S^* \quad (3.4.12)$$

In cui σ^* e u^* rappresentano, rispettivamente, la tensione normalizzata e lo scorrimento normalizzato rispetto al punto di snervamento, mentre a e b sono definiti come segue (3.4.13):

$$\sigma_i^* = \frac{\sigma_i}{\sigma_Y} \quad u_i^* = \frac{u_i}{u_Y} \quad a = (\sigma_{A'}^* - \sigma_S^*) \quad b = (u_{A'}^* - u_S^*) \quad (3.4.13)$$

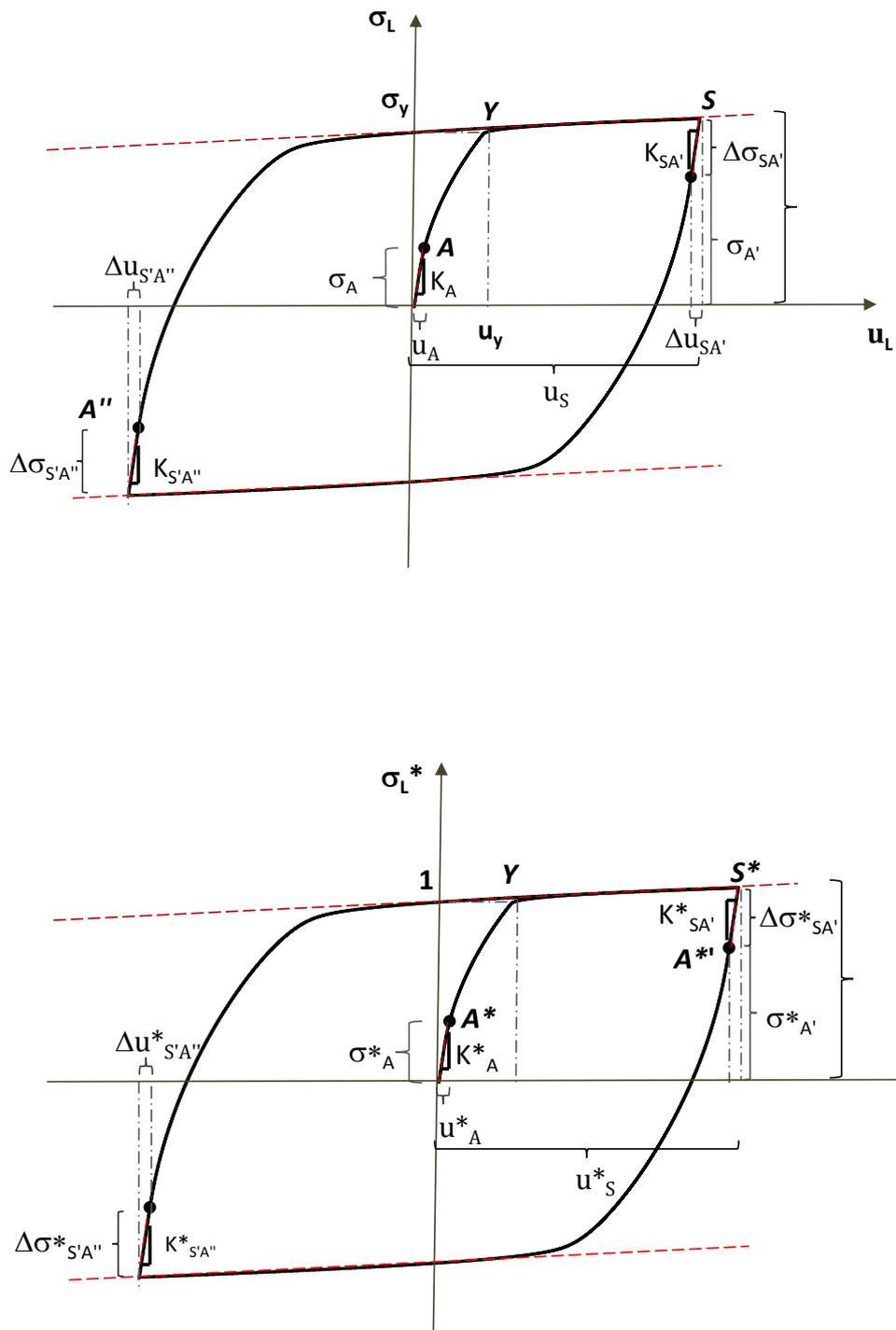


Figura 111: Schematizzazione dei punti cardine: Piano reale σ - u (a) Piano normalizzato rispetto al punto di snervamento (b).

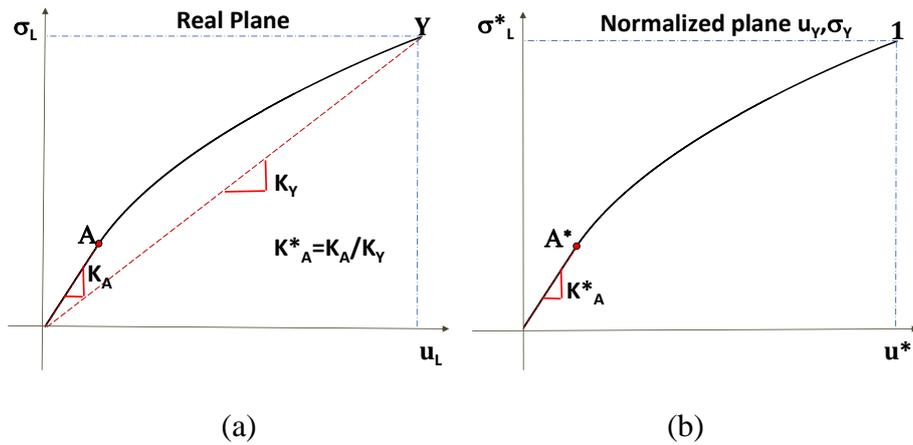


Figura 112: Significato delle componenti della rigidità elastica K_A : a) piano reale b) piano normalizzato

Per descrivere il ramo di scarico e di ricarico è necessario partire dalla definizione delle coordinate dei punti A' ($u_{A'}$ e $\sigma_{A'}$) e A'' ($u_{A''}$ e $\sigma_{A''}$), che sono espresse in funzione delle coordinate del punto A , definite nel primo tratto di carico (3.4.14):

$$u_{A'} = (u_S^* - \Delta u_{SA'}^*) \cdot u_y \quad (3.4.14)$$

$$\sigma_{A'} = (\sigma_S^* - \Delta \sigma_{SA'}^*) \cdot \sigma_y \quad (3.4.15)$$

In cui :

$$\Delta \sigma_{SA'}^* = \sigma_A^* \quad (3.5.16)$$

$$\Delta u_{SA'}^* = u_A^* \quad (3.4.17)$$

La Figura 113 mostra le relazioni tra il mio ramo di carico e il primo ramo di scarico.

Si ricorda inoltre, nella relazione tra il ramo di scarico e il ramo di carico, che:

$$K_{SA'}^* = K_A^* \quad (3.4.18)$$

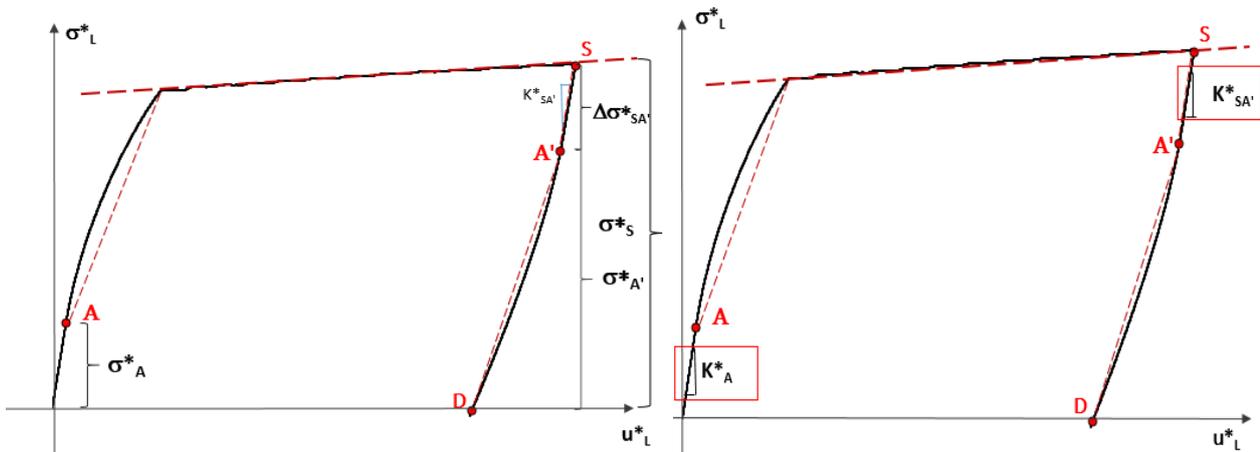


Figura 113: Relazione tensioni scorrimenti normalizzata: relazione tra primo ramo di carico (OA) e primo ramo di scarico (SA').

Per poter trovare le curve tramite la relazione (3.4.12), manca il valore dell'esponente n , che è stato trovato anch'esso per regressione, valutando la dipendenza, o meno, dai parametri in gioco, ed è espresso dalle equazioni:

$$n = 1.82 \cdot \mu + 0.29 \quad \text{Caso 1} \quad (3.4.19)$$

$$n = 1.56 \cdot \mu + 0.09 \quad \text{Caso 2} \quad (3.4.20)$$

Dove μ è la duttilità delle curve ed è espressa come $\frac{u_{max}}{u_Y}$. La Figura 114 mostra l'ottima corrispondenza tra modello analitico e modello numerico.

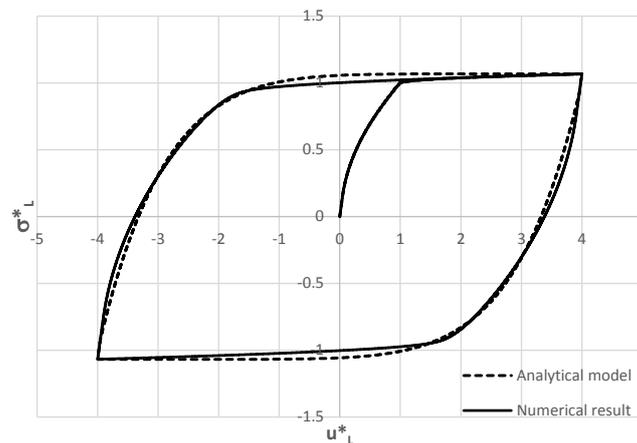


Figura 114: Comparazione tra il modello numerico (OpenSees) e il modello analitico proposto

Le equazioni (3.4.19-20) mostrano che l'esponente n del ramo di scarico e di ricarico è dipendente solo dalla duttilità: la Figura 115 conferma questo aspetto: in ogni grafico viene riportato per diversi livelli di duttilità (in particolare il rosso rappresenta una duttilità $\frac{u_{max}}{u_Y}$

=2, il blu una duttilità pari a $\frac{u_{max}}{u_Y} = 6$ e il verde una duttilità pari a $\frac{u_{max}}{u_Y} = 8$), il valore di n in funzione di un determinato parametro, tra cui, i più importanti, la tensione di snervamento σ_y , la tensione di aderenza τ_d e il rapporto lunghezza diametro.

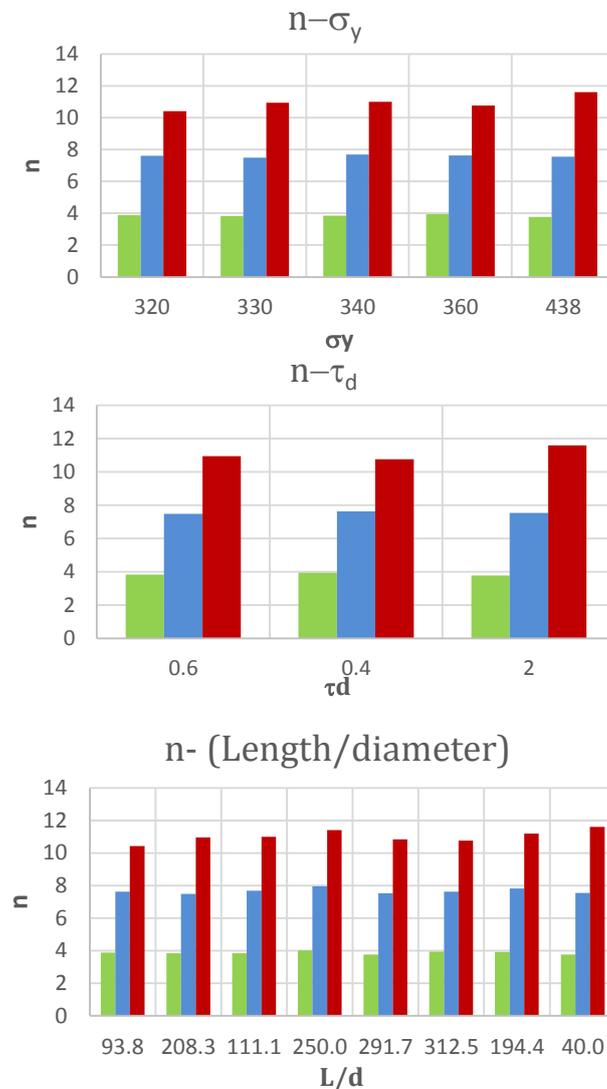


Figura 115: Dipendenza dell'esponente n dalle differenti caratteristiche della barra

La ricerca e la descrizione accurata dei modelli dell'acciaio, è stata effettuata per sottolineare come, il comportamento della barra soggetta a scorrimenti sia in realtà molto più complesso di come descrive la formulazione trovata: la variazione della curvatura, l'effetto Bauschinger, l'incrudimento isotropico piuttosto che quello cinematico (o entrambi), l'intervento dell'instabilità a compressione, sono tutti aspetti che potenzialmente potrebbero intervenire. La risposta strutturale, in generale dipende da come si è effettuata la modellazione: la scelta di un parametro piuttosto che di un altro

può influenzare la risposta, oltre al fatto che in generale, la "scelta" di un modello piuttosto che di un altro può variare in maniera più o meno significativa la risposta stessa (Figura 116).

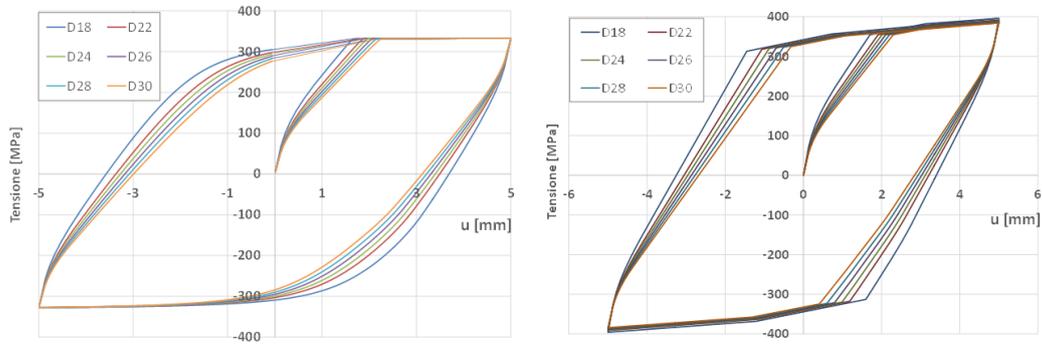


Figura 116: Cicli della barra soggetta a scorrimenti al variare del diametro (MPF, Steel 01)

4 VALIDAZIONE DELLA LEGGE MODIFICATA DELL'ACCIAIO CON SCORRIMENTI E ULTERIORI APPLICAZIONI

4.1 Software utilizzato: OpenSees

Il programma utilizzato per la validazione del legame (che è il medesimo impegnato per le analisi numeriche che hanno condotto alla formulazione ciclica) è OpenSees [33] (*The Open System for Earthquake Engineering Simulation*).

Questo software, che consente la simulazione del comportamento strutturale non lineare e geotecnico di elementi sottoposti ad azione sismica, ed è particolarmente adatto al lavoro di tesi, sia per la vastità di legame costitutivi impiegati, sia per la numerosità degli elementi finiti di cui è provvisto. L'applicazione è stata sviluppata originariamente per essere impiegata come strumento computazionale per ricerche di ingegneria sismica presso il Pacific Earthquake Engineering Research Center (*PEER*) e dal 2004 viene utilizzato anche dal Network for Earthquake Engineering Simulation (*NEES*), i quali sono due tra i più importanti centri di ricerca sui terremoti a livello mondiale.

La vasta libreria di modelli già disponibili consente di eseguire simulazioni estremamente precise, eliminando quindi gran parte delle approssimazioni che si trovano nei software commerciali, che quindi risultano meno validi nel campo della mera ricerca. La distribuzione a licenza gratuita del software, insieme alla possibilità di modificarne il codice, ne ha permesso una rapida diffusione. Il sito di riferimento fornisce tutte le informazioni necessarie sull'architettura del programma, l'accesso al codice sorgente e lo sviluppo dello stesso, in modo da permettere a tutti gli utenti qualificati di poter modificare e finalizzare a scopi specifici il codice, migliorando il lavoro precedentemente sviluppato da altri. Questo ovviamente permette di avere un programma in continua evoluzione e sempre al passo con le nuove teorie formulate.

Elementi trave/ colonna disponibili in libreria OpenSees

In OpenSees è possibile lavorare sia con elementi a fibre (di cui si è discusso a proposito del Modello di Spacone nel paragrafo precedente) che non, e in particolare, tra gli elementi del primo tipo, ci sono le formulazioni a plasticità concentrata e le formulazioni a plasticità diffusa.

Gli approcci risolutivi sono invece principalmente di due tipologie: approccio in flessibilità e approccio in rigidità.

4.1.1 Displacement-Based Element

Rappresenta la metodologia più comunemente utilizzata, in cui il campo delle deformazioni sull'elemento viene ottenuto dagli spostamenti dei nodi di estremità attraverso opportune funzioni interpolanti. In questo tipo di elemento finito la compatibilità delle deformazioni è dunque assicurata, mentre l'equilibrio delle forze lungo di esso è soddisfatto soltanto quando viene discretizzato in un numero adeguato di elementi finiti. La limitazione fondamentale di un tale approccio è legata alla scarsa precisione nel descrivere comportamenti altamente non-lineari, senza dover infittire eccessivamente la mesh, a causa dell'inadeguatezza nella rappresentazione dell'andamento delle curvature lungo l'elemento.

4.1.2 Force-Based Element / Non Linear Beam Column

Nella formulazione in flessibilità invece, le funzioni di forma vengono utilizzate per descrivere in modo esatto l'andamento delle sollecitazioni sull'elemento in base alle forze nodali e le funzioni, che riproducono il campo di spostamenti, si modificano nel corso delle analisi in base al diffondersi delle deformazioni inelastiche sulla sua lunghezza. Vale a dire che, mentre l'equilibrio delle forze è sempre soddisfatto, la compatibilità delle deformazioni viene soddisfatta per via integrale.

Questo tipo di formulazione dell'elemento finito pur richiedendo un aumento del costo computazionale, assicura, anche nel caso di comportamenti fortemente inelastici, previsioni accurate utilizzando un ridotto numero di elementi finiti. L'impiego di questa tipologia di elementi finiti può però esporre al rischio di un'eccessiva ed irrealistica localizzazione delle deformazioni rispetto ad una modellazione con elementi formulati in rigidità. Nel caso si siano adottati materiali con comportamento fortemente degradante dopo il picco di resistenza, questa circostanza può dar luogo a risultati estremamente sensibili alla discretizzazione adottata ed in particolare al numero di punti di integrazione disposti sugli elementi.

E' bene precisare che il fenomeno della "localizzazione delle deformazioni" si manifesta sia sugli elementi formulati "in rigidità" che su quelli "in flessibilità" anche se secondo quanto è presente

nell'odierna bibliografia i maggiori effetti sembrano trovarsi nelle strutture composte da elementi formulati in flessibilità. Da quanto detto si comprende l'importanza di un'oculata scelta della mesh, la quale deve essere sufficientemente fitta per descrivere i comportamenti fortemente non-lineari, ma neanche troppo per evitare il fenomeno della localizzazione delle deformazioni.

Questi due elementi appena esposti appartengono alla categoria di modelli a plasticità diffusa, cioè quei modelli nei quali la plasticità è distribuita lungo tutto l'elemento.

In programmi di analisi non lineare come OpenSees è possibile scegliere il numero di punti di integrazione, il che significa decidere la discretizzazione dell'elemento mentre la distribuzione dei punti è definita dal metodo di integrazione utilizzato.

I motivi che inducono a calcolare numericamente un integrale sono svariati: ad esempio nel caso in cui non si conosca una primitiva di $f(x)$, oppure $f(x)$ sia nota solo in alcuni punti o ancora $f(x)$ è valutabile su ogni valore di x ma solo mediante una routine automatica. In tutti questi casi, si preferiscono le cosiddette formule di quadratura. In pratica una formula di quadratura è una approssimazione dell'integrale che fa uso dei valori della funzione in alcuni punti.

I metodi di integrazione numerica sono in grado di fornire l'approssimazione della funzione integrale in termini di un numero finito di valori della funzione integranda. In questo modo, l'integrale definito di una generica funzione $f(x)$ viene sostituito da una sommatoria dei prodotti, fra i valori che la funzione assume in determinati punti (i) del dominio per i corrispondenti pesi w_i .

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)L$$

dove n è il numero di punti di integrazione .

Attraverso i metodi di integrazione numerica, detti anche metodi di quadratura, il generico elemento finito a fibre è discretizzato in un numero n di sezioni. Le grandezze di interesse vengono calcolate al livello di sezione, le quali sono distribuite sull'elemento in modo diverso, a seconda dello schema di integrazione utilizzato. Moltiplicando tali valori per i corrispondenti pesi, si calcolano le grandezze di elemento. Il valore assunto dai pesi varia con la posizione del punto di integrazione e dello schema utilizzato.

Per gli elementi finiti a fibre, gli schemi di integrazione più utilizzati sono quello di Gauss – Legendre e Gauss – Legendre - Lobatto.

Di seguito sono riportati i due schemi di integrazione sopra citati, nell'intervallo $[-1;1]$:

n	x_i	A_i
1	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
2	$\pm \frac{\sqrt{15}}{5}, 0$	$\frac{5}{9}, \frac{8}{9}$
3	$\pm \frac{1}{35} \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}, \pm \frac{1}{35} \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36}(18 + \sqrt{30}), \frac{1}{36}(18 - \sqrt{30})$
4	$0, \pm \frac{1}{21} \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}, \pm \frac{1}{21} \sqrt{245 + 14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}, \frac{1}{900}(322 + 13\sqrt{70}), \frac{1}{900}(322 - 13\sqrt{70})$

Figura 117: Nodi e pesi per le formule di Gauss-Legendre con $n=1,2,3,4$

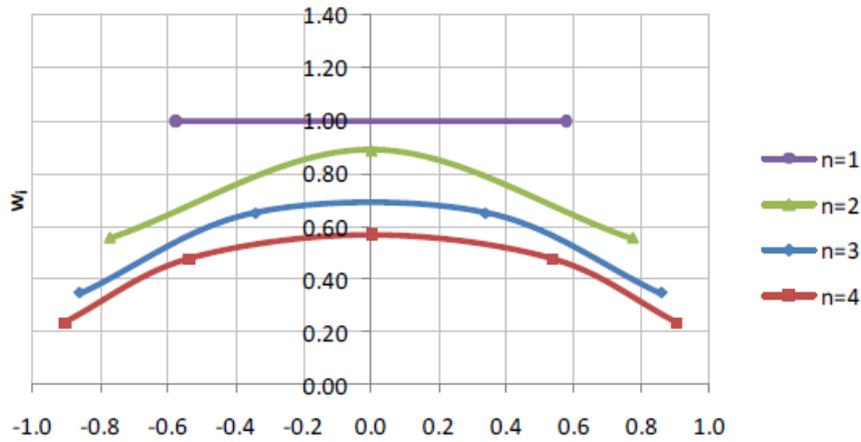


Figura 118: Schema di integrazione Gauss-Legendre con $n = 1,2,3,4$

n	x_i	A_i
1	± 1	1
2	$\pm 1, 0$	$\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$
3	$\pm 1, \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$
4	$\pm 1, \pm \frac{\sqrt{21}}{7}, 0$	$\frac{1}{10}, \frac{49}{90}, \frac{32}{45}$

Figura 119: Nodi e pesi per le formule di Gauss-Legendre-Lobatto con $n = 1,2,3,4$

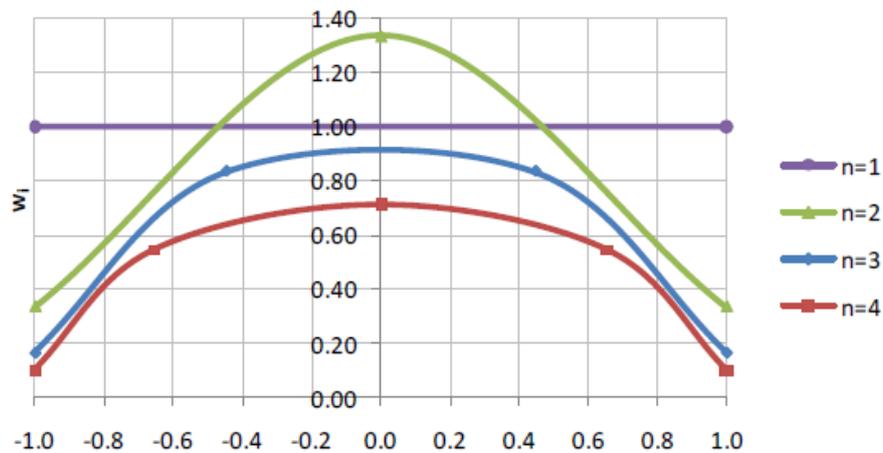


Figura 120: Schema di integrazione Gauss-Legendre-Lobatto con $n = 1, 2, 3, 4$

OpenSees utilizza come metodo di integrazione per gli elementi a fibre quello di Gauss-Legendre-Lobatto che prevede, qualunque sia il numero di punti adottato, che due punti siano posizionati all'estremità dell'elemento finito.

Un problema che si riscontra è quello della perdita di oggettività della soluzione che dipende dal numero e dalla posizione dei punti di Gauss con i quali si concentrano in una porzione sempre più piccola dell'elemento provocando così l'alterazione della soluzione.

Il fenomeno è stato analizzato da Coleman e Spacone, riferendosi ad una semplice mensola incastrata alla base, modellata con formulazione force-based element e soggetta a spostamenti imposti. Il comportamento è analizzato per diversi comportamenti dei materiali:

- elastico perfettamente plastico;
- elastico con incrudimento positivo;
- elastico con incrudimento negativo;

Di seguito sono riportate le risposte che gli autori hanno ottenuto per la mensola in questione,

Nel caso di comportamento elastico con incrudimento positivo non si nota alcuna perdita di oggettività all'aumentare dei punti di Gauss

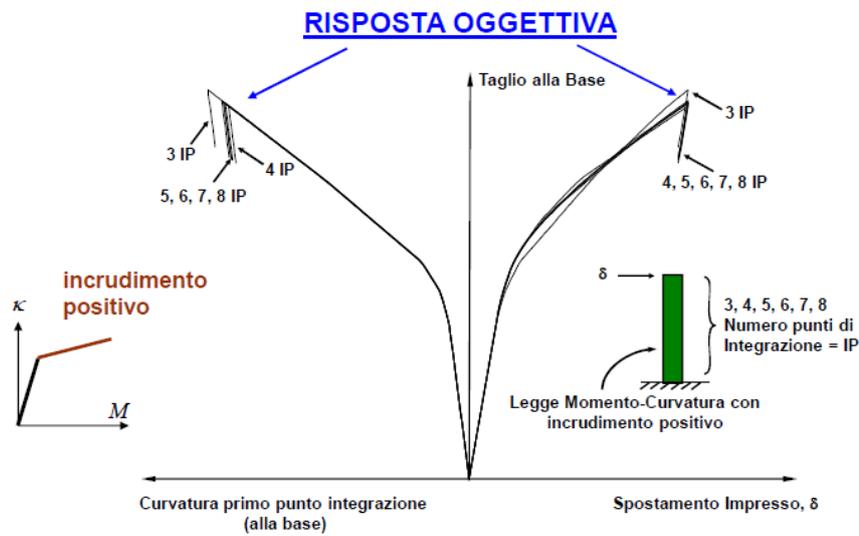


Figura 121: Mensola con comportamento elasto-plastico incrudente positivo

Nella mensola con legame elastico perfettamente plastico si nota una perdita di oggettività nella richiesta di curvatura all'aumentare dei punti di Gauss, mentre rimane invariata la richiesta di spostamento ultimo.

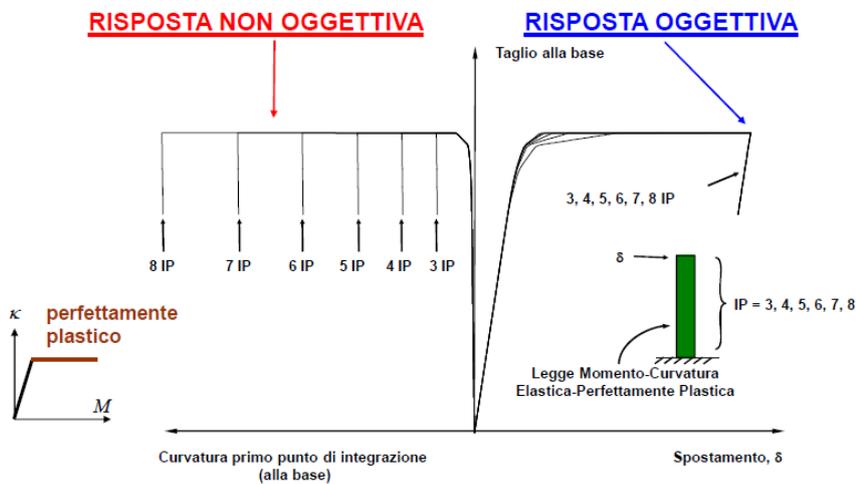


Figura 122: Mensola con comportamento elasto-plastico perfetto

Nella mensola con legame elastico incrudente negativamente si nota una perdita di oggettività all'aumentare dei punti di Gauss sia nella richiesta di curvatura sia nello spostamento ultimo.

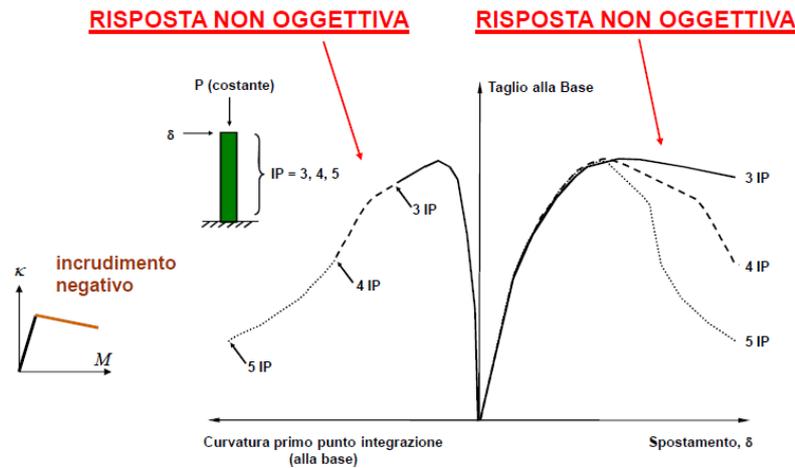


Figura 123: Mensola con comportamento elastico incrudente negativo

4.1.3 Beam with Hinges

Questo elemento a plasticità concentrata, si basa sulla formulazione in flessibilità: esso è costituito da tre parti. Possiede infatti due zone agli estremi corrispondenti alle zone di accumulo di deformazioni inelastiche di lunghezza L_{PI} , (*lunghezza di cerniera plastica*) che deve essere inserita sulla base delle formulazioni esistenti in merito, e la parte centrale elastica.

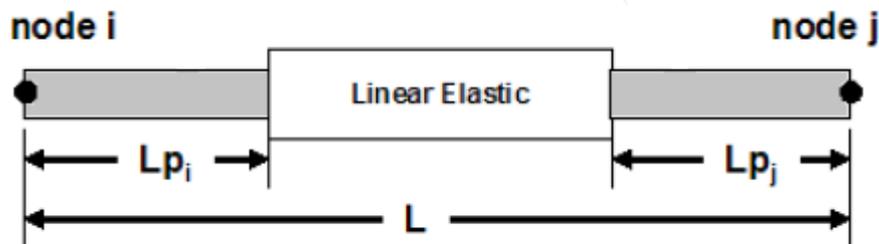


Figura 124: Schema dell'elemento Beam with Hinges a plasticità concentrata

Per rappresentare il comportamento degradante c'è la necessità di scegliere una legge di integrazione delle cerniere plastiche in grado di soddisfare i seguenti criteri:

- Per ogni campione della forza di sezione alle estremità dell'elemento, il momento flettente è maggiore in assenza di carichi distribuiti;
- Integrare esattamente i polinomi quadratici per fornire la soluzione esatta per la distribuzione della curvatura;

- Integrare le deformazioni sulle lunghezze definite L_{pi} e L_{pj} usando una singola sezione in ogni zona delle cerniere plastiche.

Il modello Gauss-Lobatto che viene impiegato abitualmente per l'integrazione di elementi finiti force-based soddisfa solo i primi due punti mostrati in precedenza, ma non il terzo in quanto la lunghezza della cerniera plastica è implicita nel numero di punti impiegati e nel peso attribuito agli stessi. Per poter impiegare il metodo è stato quindi necessario utilizzare un altro modello di integrazione. Tale modello è stato identificato nella legge di quadratura di Gauss-Radau modificata. La legge di quadratura dei due punti di Gauss-Radau è molto simile a quella di Gauss-Lobatto in quanto, come nel primo vengono impiegati due punti di integrazione, ma nel secondo metodo solo uno dei due è posizionato ad un'estremità dell'elemento, mentre l'altro si trova in un punto interno. Ciò dona alla legge di quadratura una precisione $2Np-2$, di un grado superiore al Gauss-Lobatto con la capacità quindi di integrare in maniera esatta una distribuzione lineare di curvatura. I punti di integrazione saranno disposti nelle sezioni posizionate a $[0, 2/3]$ dalla sezione iniziale dell'elemento, per cui facendo riferimento al caso in cui si hanno due cerniere plastiche alle estremità dell'elemento strutturale, la mappatura dei punti di integrazione lungo l'ascissa dell'elemento sarà:

$$\xi = \left\{ 0, \frac{2L_{pI}}{3}, \frac{L - 2L_{pJ}}{3}, L \right\}$$

Con i rispettivi pesi

$$\omega = \left\{ \frac{L_{pI}}{4}, \frac{3L_{pI}}{4}, \frac{L_{pJ}}{4}, \frac{3L_{pJ}}{4} \right\}$$

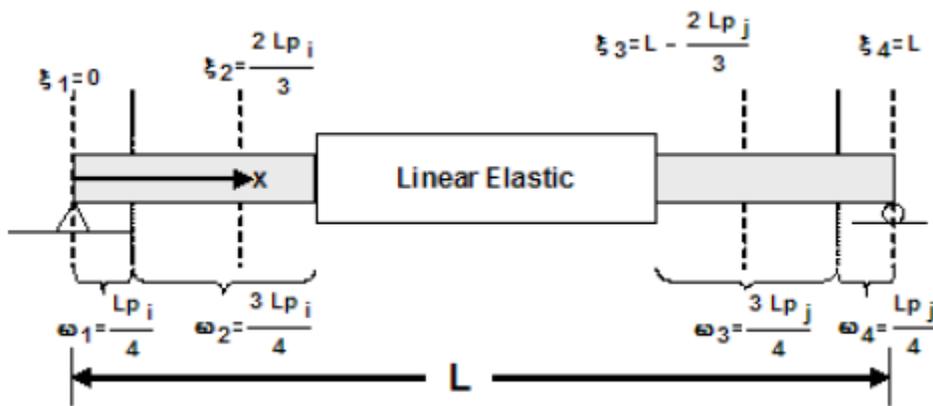


Figura 125: Schema del modello di quadratura Gauss –Radau

Il metodo di quadratura appena presentato ha due proprietà interessanti che vale la pena di evidenziare:

- quando la somma delle lunghezze delle cerniere plastiche diventa uguale alla lunghezza dell'elemento strutturale si torna ad avere un metodo a plasticità diffusa a 4 punti di integrazione;
- quando si ha la condizione $L_{pi} = L_{pj} = L/2$ il metodo di Gauss-Radau coincide con quello 3/8 di Simpson che ha un grado di precisione in più rispetto a Gauss-Radau permettendo l'integrazione esatta di polinomi cubici

Questo metodo, così come quello di Gauss-Lobatto, non riesce ad integrare le deformazioni sulle lunghezze definite L_{pi} e L_{pj} usando una singola sezione in ogni zona delle cerniere plastiche poiché la deformazione degradante si concentrerà sull'ultimo elemento, al quale come abbiamo visto precedentemente è assegnato un peso di $L_p/4$, le inelasticità si concentreranno su questa lunghezza, ovviamente inferiore rispetto a L_p . Ciò comporterà che l'elemento si scaricherà più velocemente rispetto al dovuto per mantenere l'equilibrio.

Per garantire che la lunghezza sulla quale si concentreranno le inelasticità coincida con la lunghezza della cerniera plastica, è necessario modificare il metodo appena illustrato in modo tale da far coincidere i pesi di integrazione dei punti di estremità con L_p .

Per far ciò si applica il metodo di Gauss-Radau su una lunghezza di $4L_p$ invece che di L_p generando così un nuovo schema di posizioni e pesi.

$$\xi = \left\{ 0, \frac{8L_{pi}}{3}, \frac{L - 8L_{pj}}{3}, L \right\}$$

$$\omega = \{L_{pi}, 3L_{pi}, 3L_{pj}, L_{pj}\}$$

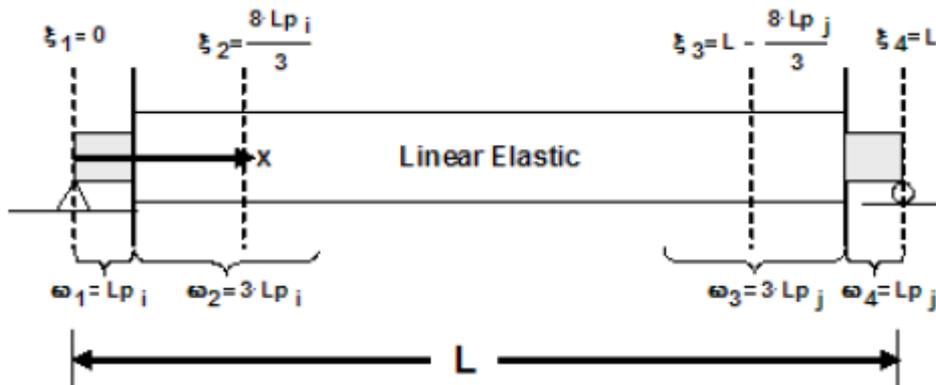


Figura 126: Schema del modello di quadratura Gauss –Radau modificato

In questo modo la lunghezza caratteristica sarà uguale alla lunghezza specifica della cerniera plastica quando si ha il comportamento degradante della sezione, così tutti i requisiti sopra richiesti sono soddisfatti.

In questo lavoro sono stati impiegati elementi a fibre con plasticità concentrata (Beam With Hinges): la motivazione risiede principalmente nel fatto che questo metodo è meno oneroso della plasticità diffusa, e tutto sommato coglie bene il comportamento tipico delle strutture intelaiate in cui, in condizioni sismiche, le deformazioni inelastiche si concentrano agli estremi dell'elemento.

4.2 Validazione della formulazione proposta

4.2.1 Saatcioglu and Ozcebe (1989), Specimen "U4"

Per validare il modello analitico, è stato riprodotto il test "U4", ad opera di Saatcioglu e Ozcebe (1989) [40] e disponibile sul database PEER.

Il caso studio consiste in una colonna in calcestruzzo armato soggetta a uno spostamento laterale prossimità della sommità, e avente un carico applicato di 600 kN. La colonna ha sezione costante rettangolare di dimensioni mostrate in

Figura 127, e presenta il tipico collasso per flessione.

La resistenza a snervamento delle barre d'acciaio è pari a 438 MPa, mentre la tensione tangenziale è pari a 2 MPa.

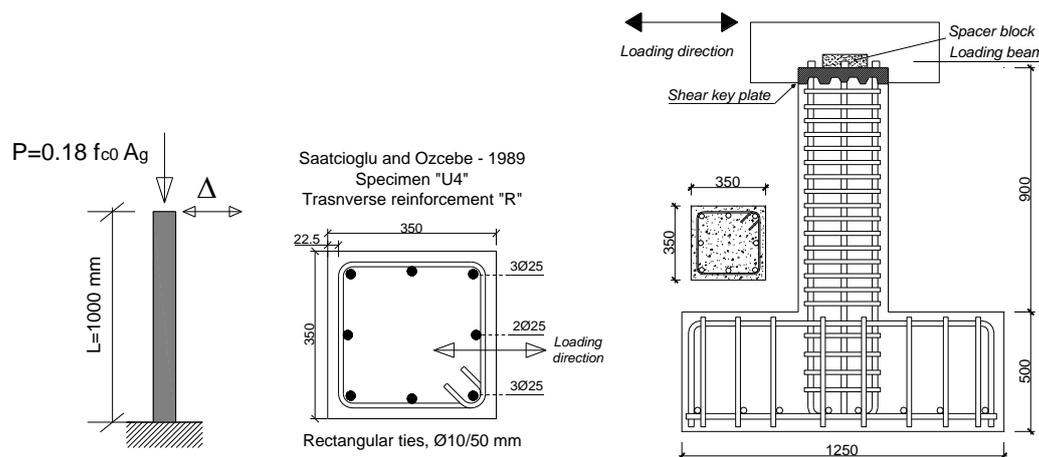


Figura 127: Saatchioglu and Ozcebe specimen U4 [40]

La colonna è stata modellata con il software di calcolo OpenSees, usando l'elemento *BeamWithHinges*, che, (coerentemente con quanto accade generalmente nella realtà, ossia plasticizzazione delle zone estremali dell'elemento), è caratterizzato da due cerniere plastiche di lunghezza definita, in corrispondenza degli estremi dell'elemento, mentre la parte centrale dello stesso rimane elastica con una rigidezza abbattuta (fessurazione).

La legge tensioni - scorrimenti deve essere trasformata in una legge tensioni deformazioni per poter essere introdotta nel programma, attraverso un'opportuna lunghezza di cerniera plastica L_P , che nel presente caso è stata ottenuta dalla formulazione di Paulay e Priestley [41].

Per ottenere la legge tensione-deformazione, lo scorrimento totale è dato dalla somma degli scorrimenti in prossimità dell'apertura della fessura: una quota parte dello scorrimento (e quindi della legge tensioni-scorrimenti) è legata allo scorrimento della barra uncinata che si sfilava rispetto al blocco di calcestruzzo inferiore, di dimensione L_A , mentre la seconda quota parte di scorrimento (e di legame) è imputata allo sfilamento del blocco di calcestruzzo superiore, di dimensione L_B , rispetto alla barra.

Per comprendere il fenomeno si può pensare a un meccanismo tipo rotazione rigida, in cui il blocco superiore ruota per effetto del carico e dello sfilamento della barra, che di fatto, si oppone come fosse un perno, alla rotazione medesima: l'apertura della fessura è proprio uguale allo scorrimento totale $u_{LA} + u_{LB}$.

Ovviamente, lo scorrimento relazionato alla parte uncinata, è più piccolo rispetto a quello relativo all'altro blocco, fornendo l'uncino ovviamente una maggiore rigidezza e resistenza allo sfilamento: la legge totale è data dalla somma delle due leggi, Figura 128:

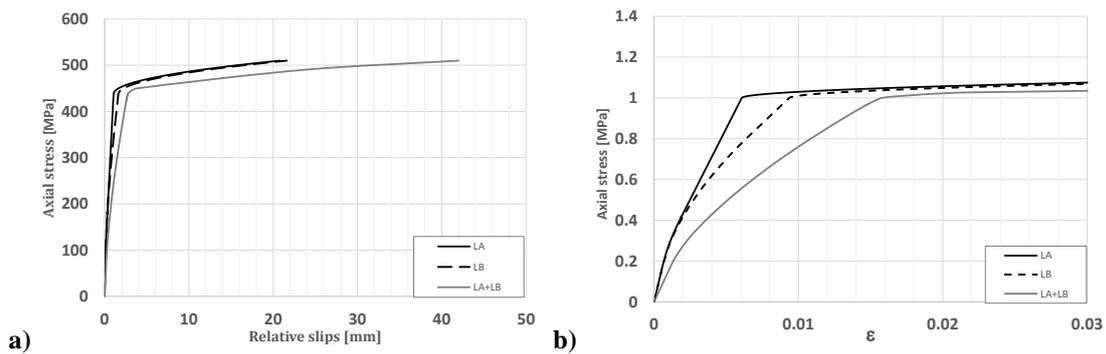


Figura 128: Legge σ - u riferita i due blocchi A e B; b) Legge derivata σ - ϵ

Per il modello di calcestruzzo è stato assunto il legame BGL [42], per le barre invece il modello elaborato e descritto nel Capitolo III.

La comparazione tra la risposta sperimentale e i risultati numerici è presentata in Figura 129, in cui si evidenzia la differenza tra l'assunzione dell'ipotesi di perfetta aderenza piuttosto che quella di scorrimenti. I risultati confermano che l'ipotesi di perfetta aderenza non è sufficiente a riprodurre il comportamento reale dell'elemento: in particolare c'è una sovrastima dell'energia dissipata di circa il 30%, esattamente come la rigidità iniziale. Al contrario il modello di scorrimenti, riesce a catturare la risposta reale con un'ottima approssimazione, anche in termini di grandezze esposte pocanzi.

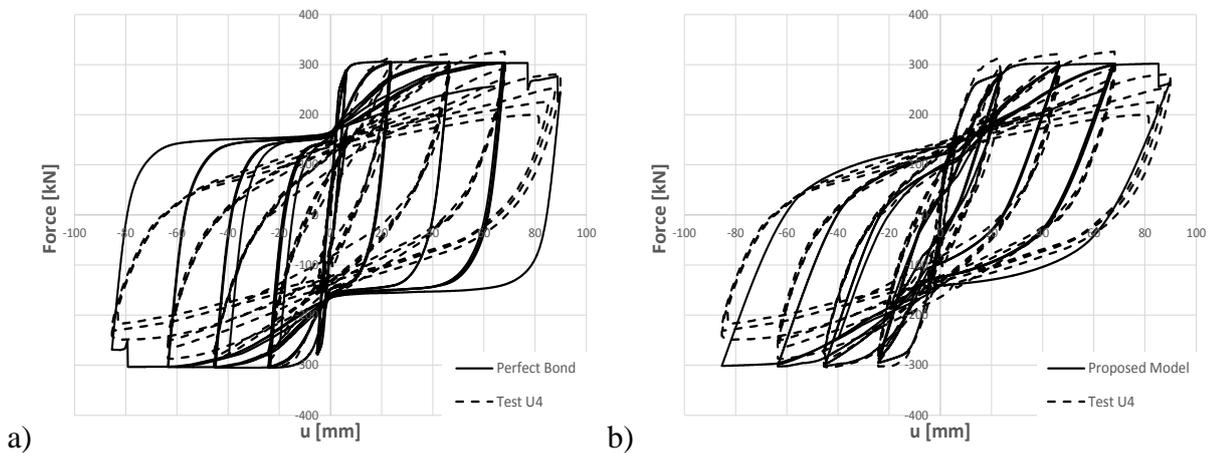


Figura 129: Comparazione tra analisi numerica e risultati sperimentali: a) con ipotesi di perfetta aderenza; b) ipotesi di scorrimenti

Tuttavia, se da un lato il problema della modellazione degli scorrimenti è stato affrontato con questo modello semplificato, rimane una grande incognita nel panorama delle modellazione non lineare di elementi in calcestruzzo armato: il valore da assegnare alla lunghezza di cerniera plastica, ossia il tratto lungo il quale si ha concentrazione delle non linearità di materiale, e quindi le deformazioni inelastiche.

Come si vedrà meglio nel Capitolo V, il suo valore ha un grande influenza sulla risposta strutturale, il che è aggravato dalla numerosità e dispersione dei valori consigliati in letteratura.

A proposito della mensola sopradescritta di cui si è già svolta l'analisi numerica, si è ampliato il lavoro implementando diverse lunghezze di cerniera plastica, e i risultati, che confermano l'influenza sulla risposta strutturale sono riportati in Figura 130:

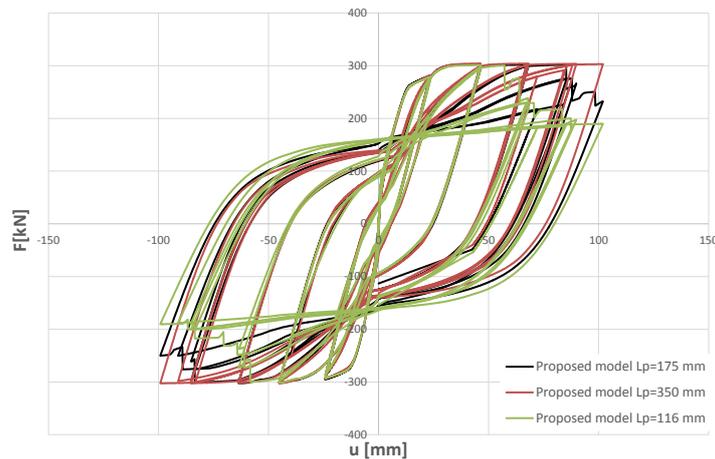


Figura 130: Influenza delle differenti lunghezze di cerniera plastica sulla risposta strutturale

4.2.2 Braga, Gigliotti, Laterza (2002)

Il caso studio consiste in un nodo trave - pilastro interno, progettato per soli carichi verticali e con barre lisce. All'estremità superiore della colonna è applicata un carico verticale costante pari a 270 kN, mentre lateralmente è soggetto a una storia di spostamenti ciclica.

Il nodo è stato modellato tramite il software OpenSees usando l'elemento *BeamWithHinges*, come nel caso precedente.

I materiali utilizzati sono i seguenti: calcestruzzo con resistenza a compressione pari a 22.47 MPa (f_{cm}), snervamento dell'acciaio (f_y) pari a 340 MPa, tensione ultima dell'acciaio (f_u) pari a 430 MPa, deformazione massima pari a 30%. In base al valore di f_{cm} , è stato dedotto il valore della tensione di aderenza residua attritiva pari a 0.7 MPa.

In Figura 133 e in Figura 134, sono mostrate le leggi costitutive delle barre della colonna e delle travi a seconda del diametro e del calcestruzzo, mentre in Figura 131, è descritta la geometria del nodo con un dettaglio delle armature e delle sezioni di trave e colonna.

Ricordando che la legge complessiva tensioni scorrimenti è data dalla somma del contributo agli scorrimenti di ogni parte dell'elemento, ognuno di questi contributi è stato contemplato ed rappresentato in Figura 133.

In Figura 135 è descritta la differenza tra il legame monotono di una barra della colonna (d 18) con ipotesi di perfetta aderenza e con scorrimenti.

La testa della colonna è stata soggetta a una storia di spostamenti orizzontale descritta in Figura 136.

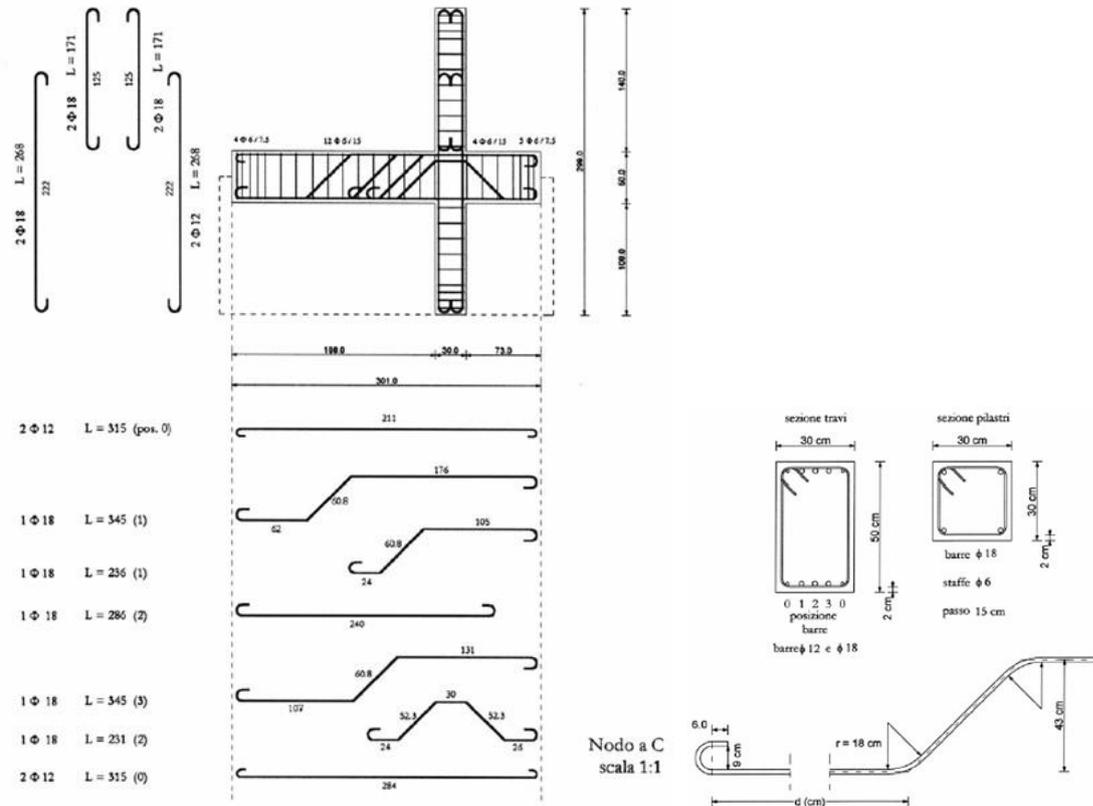


Figura 131: Dettagli del nodo interno trave colonna e della sezione sia della trave che della colonna

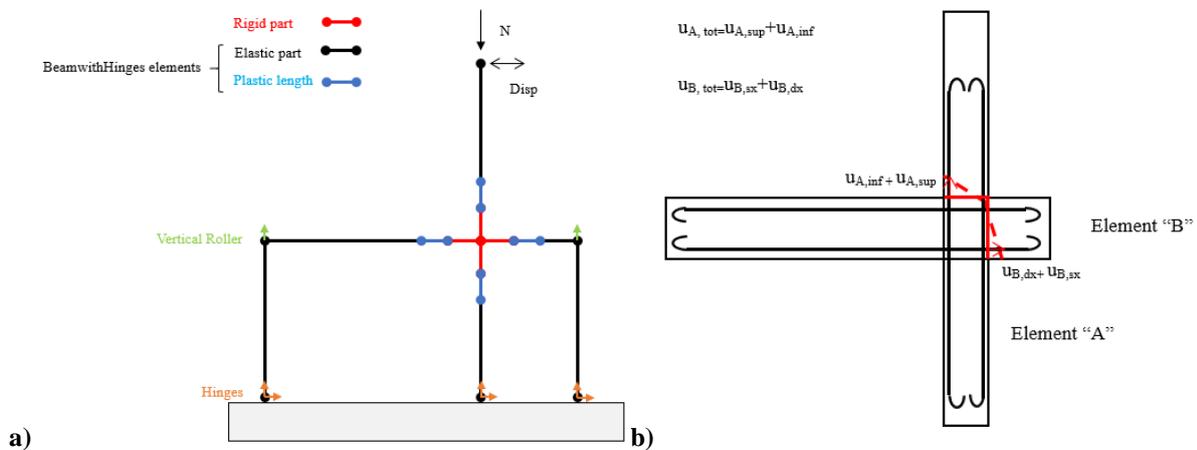


Figura 132: a) Schema adottato per le analisi numeriche b) esempio del contributo di ogni elemento allo scorrimento totale in corrispondenza della zona plastica

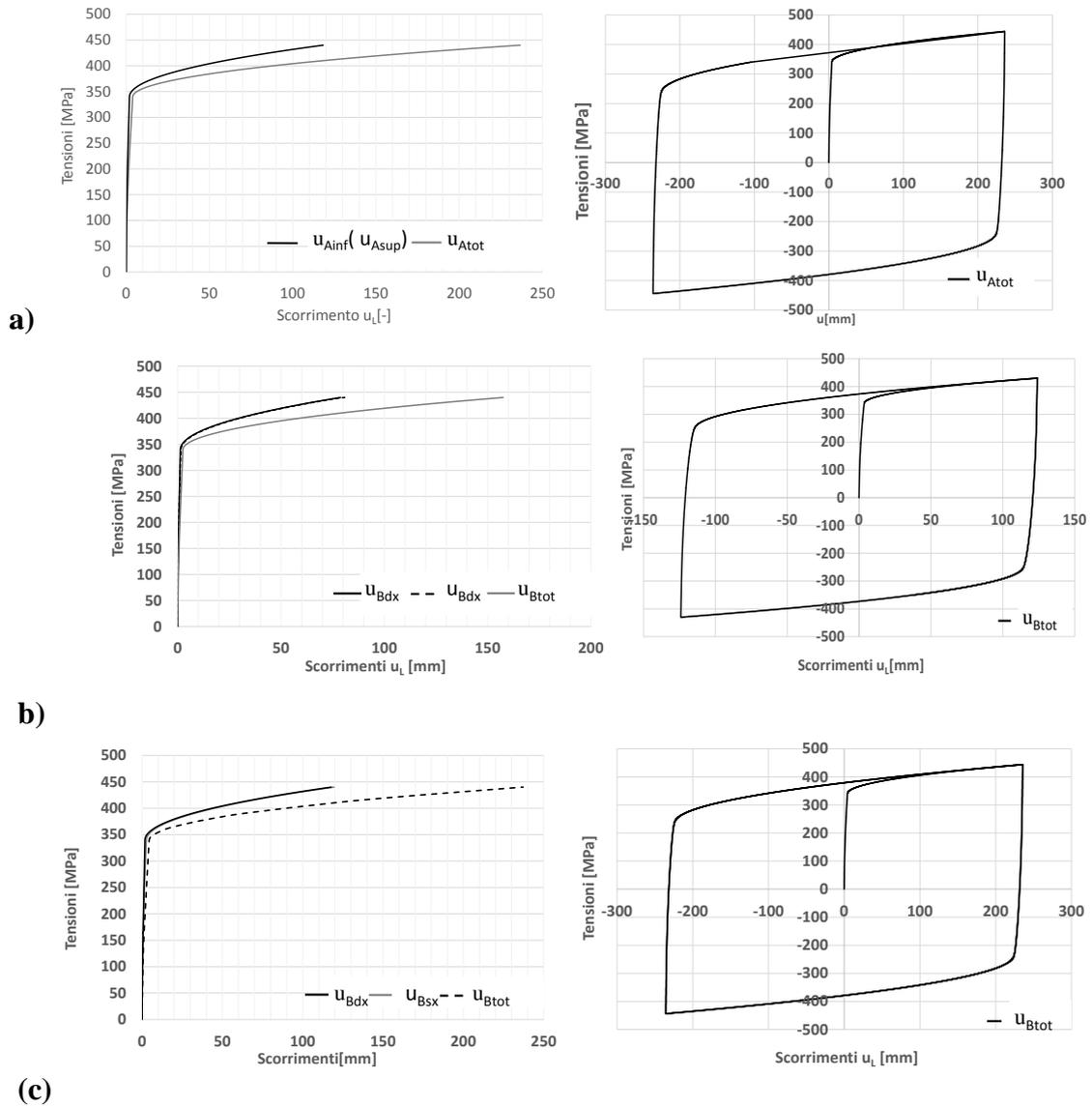


Figura 133: Legge monotona e ciclica modificata per le barre: (a) colonna (b) trave d 12 (c) trave d 18.

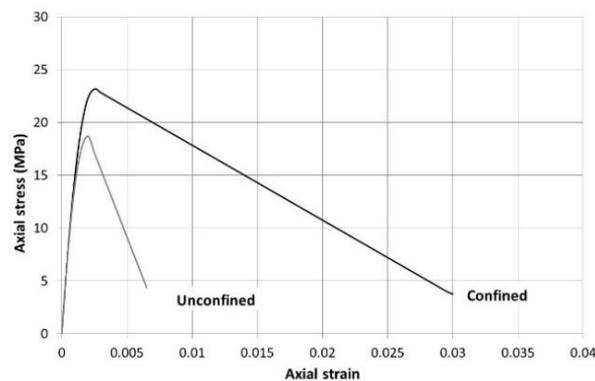


Figura 134: Legge costitutiva del calcestruzzo: zona confinata, zona non confinata

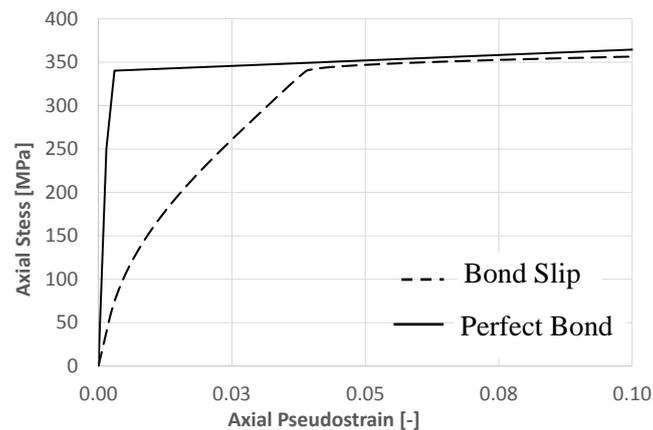


Figura 135: Differenza tra ipotesi di perfetta aderenza e scorrimenti per le barre della colonna (d 18)

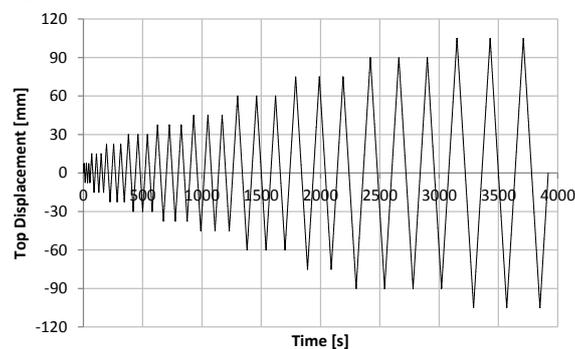


Figura 136: Storia di spostamenti applicata in testa della colonna

I risultati sono stati studiati in termini di Forza orizzontale al piede- spostamento in testa (Figura 136), confermando che l'adozione dell'ipotesi di perfetta aderenza è insufficiente a cogliere il reale comportamento della struttura. In particolare la perfetta aderenza fornisce valori della rigidità iniziale pari al doppio della rigidità reale e sovrastima l'energia dissipata nei cicli, a differenza dell'ipotesi di scorrimento che invece tende ad avvicinarsi molto al risultato reale. Ultimo aspetto da segnalare rimane il fatto che il pannello nodale non è stato esplicitamente modellato, bensì è considerato rigido.

Il problema della modellazione degli scorrimenti all'interno del pannello nodale è un aspetto piuttosto importante, che potrebbe addirittura portare la barra in compressione a perdere la compressione stessa, il che condurre ad avere nella medesima sezione tutte le barre in trazione, riducendo ulteriormente la capacità dell'elemento strutturale.

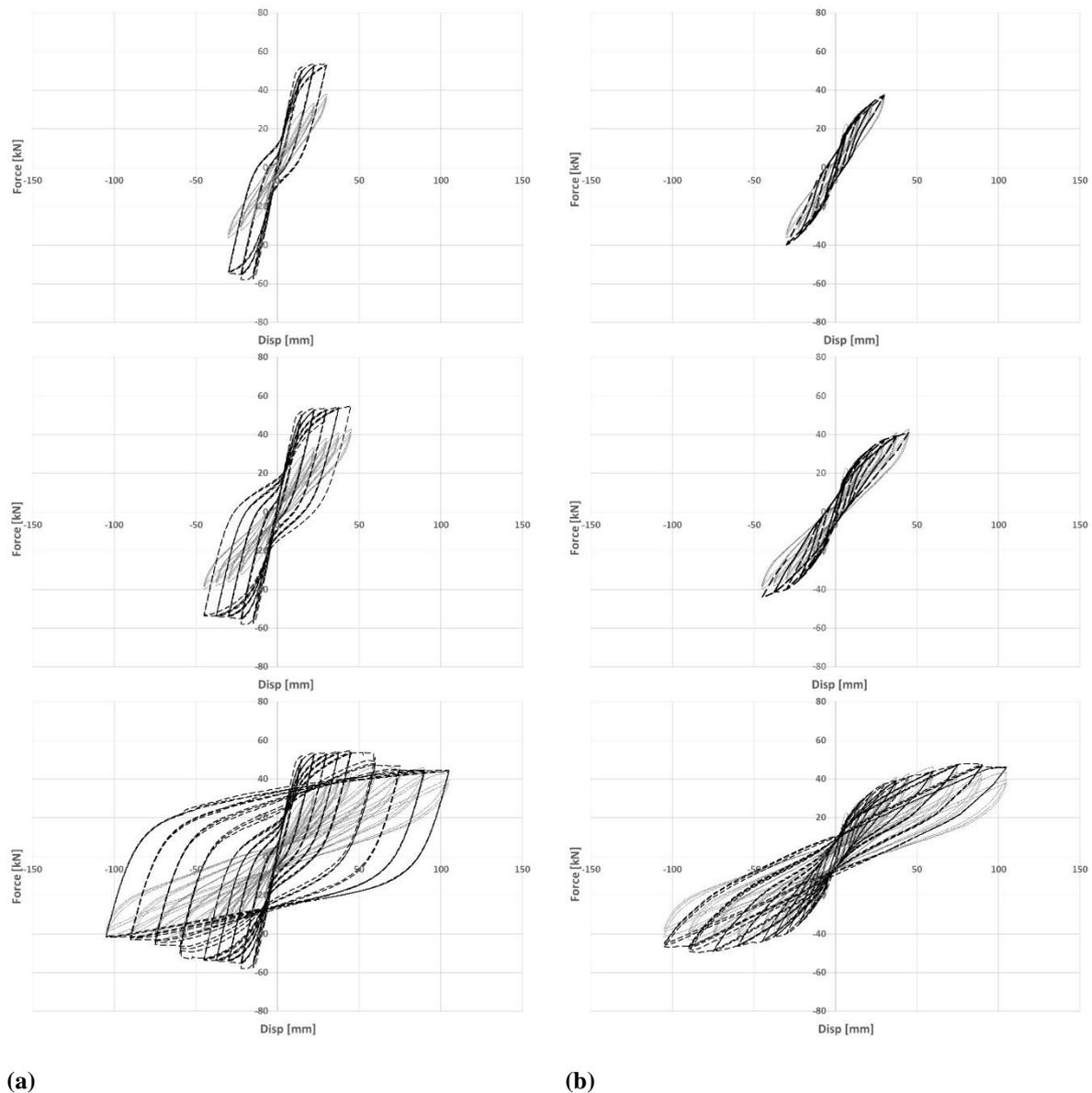


Figura 137: Forza orizzontale alla base della colonna- spostamento in testa: comparazione tra perfetta aderenza (a) e scorrimenti (b).

4.3 Domanda di deformazione delle barre in condizioni sismiche: influenza della perdita di aderenza

La relazione analitica tensioni scorrimenti, trova, tra l'altro un'utile applicazione. La valutazione della domanda di deformazione delle barre in condizioni sismiche[35]. È infatti possibile considerando la risposta dell'elemento strutturale, valutare a partire dagli scorrimenti ottenuti, la tensione nell'acciaio della barra, e da questi la deformazione tramite la legge dell'acciaio.

Un esempio è fornito di seguito, in cui sono mostrati i risultati di analisi di pushover effettuate su una colonna in calcestruzzo armato di lunghezza pari a 1000 mm, e sezione rettangolare costante,

con 6 barre di diametro pari a 25 mm (tre superiormente e tre inferiormente). La colonna è stata modellata tramite il software di calcolo OpenSees usando elementi *BeamWithHinge*, in cui la lunghezza di cerniera plastica è stata calcolata in base alla formulazione di Park et al. Tre differenti casi sono stati analizzati: perfetta aderenza, residuo di barre ad aderenza migliorata ($\tau_d = 1.70$ MPa) e barre lisce ($\tau_d = 0.4$ MPa). Come è evidente, l'ipotesi di perfetta aderenza tende a sovrastimare la deformazione dell'acciaio, rispetto al modello con scorrimenti di circa il 40 %.

In pratica, se volessi valutare la deformazione delle barre in condizioni sismiche, seguendo l'ipotesi di perfetta aderenza la barra potrebbe essere addirittura già rotta, mentre con gli scorrimenti (con incrudimento) otterrei valori di deformazione più verosimili.

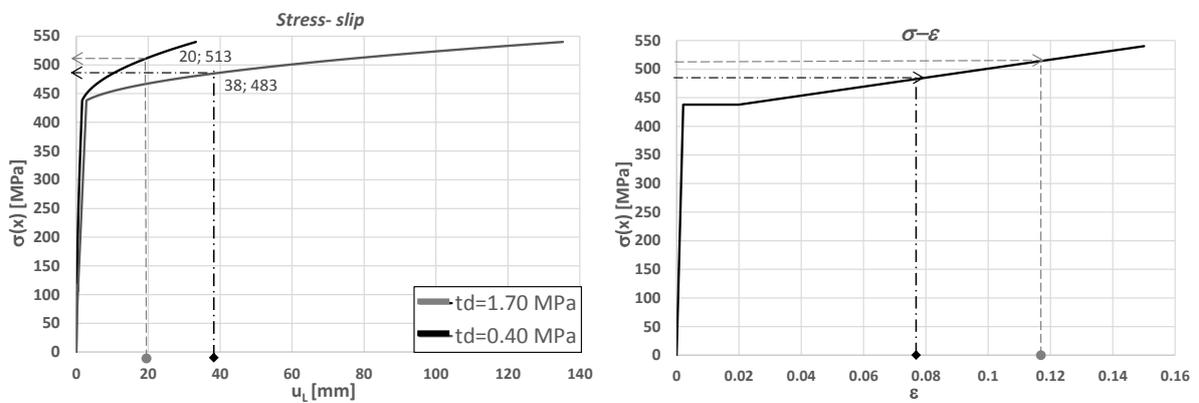


Figura 138: Leggi di tensioni-scorrimenti sulla barra per diversi livelli di tensione di aderenza (a sinistra); modello costitutivo dell'acciaio (a destra)

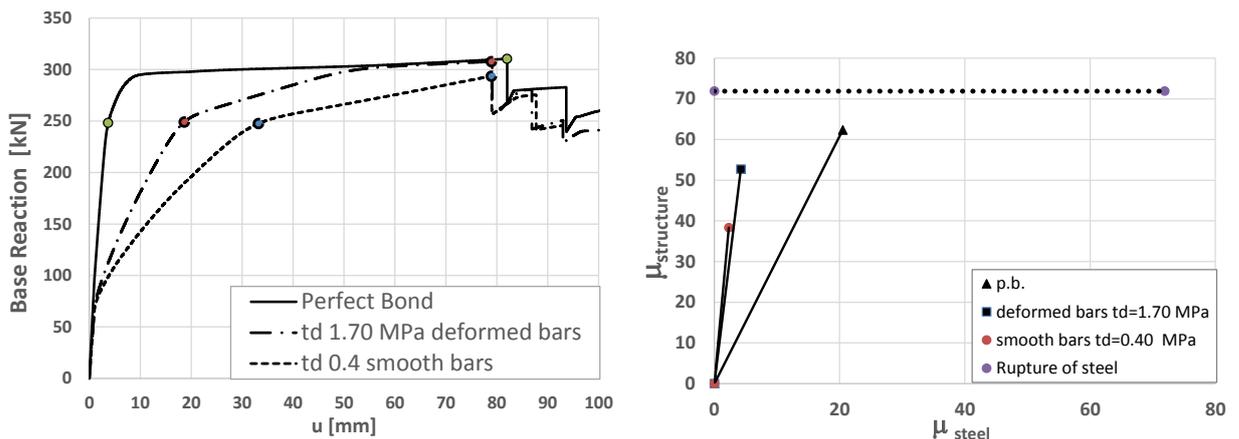


Figura 139. Analisi di Pushover su una mensola per differenti casi di aderenza (a sinistra) ; incrocio della duttilità di struttura con la duttilità dell'acciaio nei casi indagati (a destra)

5 LUNGHEZZA DI CERNIERA PLASTICA: INQUADRAMENTO DELLA PROBLEMÁTICA

Nel Capitolo IV sono stati introdotti i modelli a plasticità diffusa e i modelli a plasticità concentrata. Nel primo caso, la lunghezza del primo tratto di integrazione, rappresenta quanto di più vicino c'è alla lunghezza di cerniera plastica nei modelli a plasticità concentrata.

Nell'impiego del legame modificato dell'acciaio proposto (ma in generale ogni volta che si voglia descrivere la perdita di aderenza) negli elementi a fibre, è fondamentale passare da un legame tensioni-scorrimenti a un legame tensioni-deformazioni: dal momento che questi si verificano nella zona di plasticizzazione dell'elemento strutturale, il passaggio (come già descritto nel Capitolo 3), si effettua dividendo lo scorrimento totale per la lunghezza del primo tratto di integrazione nel caso dei modelli a plasticità diffusa, per la lunghezza di cerniera plastica nei modelli a plasticità concentrata.

Il problema della lunghezza di cerniera plastica è una problematica tutt'ora non del tutto conclusa, soprattutto ai fini dell'impiego del legame modificato dell'acciaio proposto.

L'utilizzo del legame tensioni scorrimenti consentirebbe, infatti, di determinare in maniera oggettiva la rotazione della sezione in corrispondenza della fessura se quest'ultima non fosse influenzata anche dall'accorciamento del calcestruzzo.

Per determinare il valore corretto da attribuire alla lunghezza di cerniera plastica, sono in corso delle analisi numeriche attraverso il codice di calcolo ABAQUS: attraverso analisi parametriche non lineari di dettaglio su un modello piano opportunamente pensato, l'obiettivo è individuare delle relazioni per il tratto di integrazione, basate sull'equivalenza tra la rotazione misurata e quella ottenuta a partire dalla curvatura della sezione di calcolo nelle ipotesi classiche di perfetta aderenza (rimossa attraverso il legame modificato dell'acciaio) e conservazione delle sezioni piane.

Nel primo paragrafo viene descritto lo stato dell'arte sulla lunghezza di cerniera plastica, mentre nei paragrafi successivi vengono descritti i legami costitutivi e il modello numerico proposto per le analisi.

5.1 *Stato dell'arte sulla lunghezza di cerniera plastica*

La stima del valore della lunghezza di cerniera plastica non è affatto semplice, e influenza in maniera importante la risposta di un elemento strutturale, in particolar modo lo spostamento laterale dell'elemento.

Quando una colonna (in generale un elemento) è soggetto ad azioni crescenti, ad esempio ad una forza laterale applicata in testa, le sollecitazioni crescono lungo l'elemento, fino alla formazione delle cosiddette "cerniere plastiche" nella zona in cui il momento flettente è massimo.

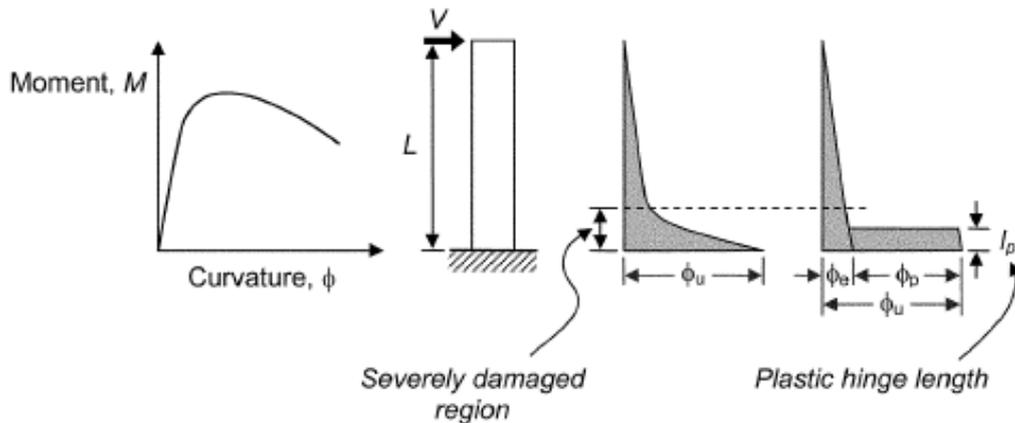
Infatti, immaginando una sperimentazione in cui, si fa crescere la forza applicata, il momento al piede cresce fino a raggiungere il momento di prima plasticizzazione M_y (corrispondente allo snervamento delle armature) e, successivamente incrementando ancora la forza, il momento ultimo M_u (cui corrisponde la deformazione ultima del calcestruzzo). A questo punto la zona plasticizzata si estende da una sola sezione di partenza verso l'alto e verso il basso, creando la zona di "cerniera plastica".

Misurando il valore di spostamento in testa e nota l'evoluzione della forza, si è in grado di ottenere un grafico Forza-Spostamento sperimentale: se volessimo ottenere lo stesso grafico in maniera analitica, dovremmo partire dal legame Momento – Curvatura, passare al legame Momento – rotazione, ed infine al legame Forza-spostamento.

Il punto cruciale è proprio il passaggio dalla curvatura alla rotazione, ossia da una grandezza di sezione a una grandezza di elemento, il che avviene proprio per il tramite della lunghezza di cerniera plastica L_p , ottenuta dalla sperimentazione. Dunque la lunghezza di cerniera plastica è, in questo senso, un "numero magico" che consente di passare dalla curvatura alla rotazione, puramente convenzionale, per adattare appunto dati sperimentali a quelli teorici/analitici, ma dipendente da moltissimi fattori, che verranno analizzati in seguito.

In queste zone il livello di danneggiamento può essere più o meno alto, in generale legato all'entità delle deformazioni a compressione del calcestruzzo, nella sezione suddetta. La conseguenza di questo incremento delle deformazioni, è che al raggiungimento di un valore critico di deformazione, anche le barre d'acciaio in compressione si snervano e inoltre che il calcestruzzo va incontro allo schiacciamento (crushing).

A questo punto si formano le cerniere plastiche, che sperimentalmente si è visto nascere in quando si raggiunge il massimo momento flettente.

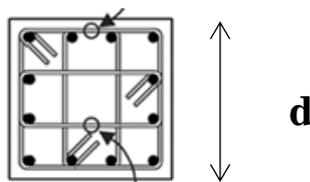


Il **CEB FIP** nel 1960, diede vita a una campagna di indagini che comprendeva ben 94 elementi tra travi/colonne, che differivano per alcuni parametri fondamentali, quali il contenuto di armatura, il carico assiale, le dimensioni della sezione, resistenza del calcestruzzo, rapporto L/h (lunghezza dell'elemento/ altezza efficace sezione), vari punti di applicazione del carico.

Da questi risultati, derivano diverse formulazioni per la valutazione della rotazione plastica ne derivò l'espressione di Baker, secondo la quale la lunghezza di cerniera plastica dipende dal quantitativo di armatura in trazione e compressione, livello del carico assiale agente, tipo di lavorazione dell'acciaio (a caldo o a freddo), resistenza del calcestruzzo, resistenza dell'acciaio:

Baker

$$L_p = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \left(\frac{z}{d} \right)^{0.25} \cdot d \quad (5.1)$$



in cui **d** rappresenta l'altezza efficace della sezione dell'elemento, mentre z la luce di taglio (distanza tra sezione in cui il momento è massimo e sezione in cui il momento è nullo).

$k_1 = 0.7$ per acciai lavorati a caldo

$k_1 = 0.9$ per acciai lavorati a freddo

$$k_2 = 0.5 \cdot \left(\frac{P}{P_u} \right)$$

$$k_3 = 0.9 \cdot \left(\frac{0.3}{23.5} \right) \cdot (f'_c - 11.7)$$

I valori tipici di questa formulazione conducono a lunghezze di cerniera plastica da 0,4 d fino a 2,5 d, per tipici valori di z/d :

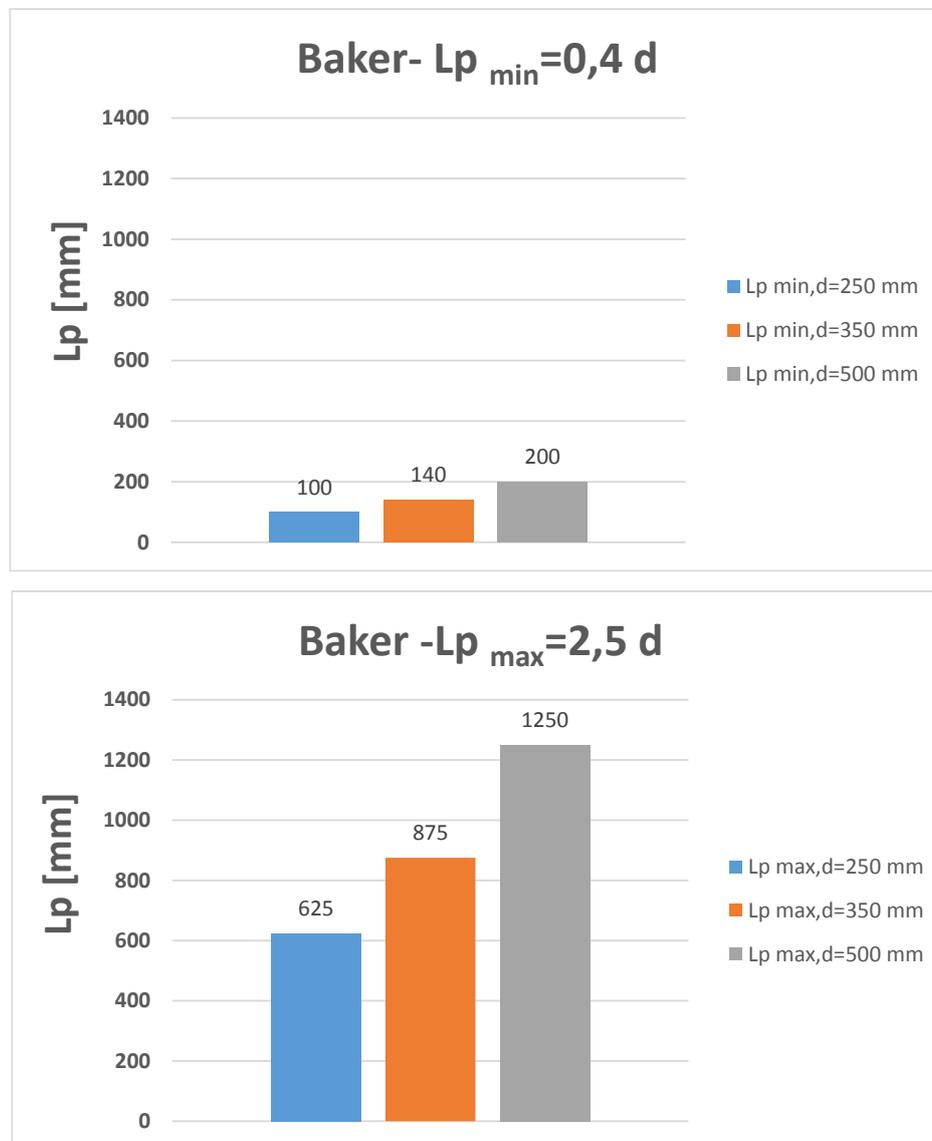


Figura 140- Variazione del valore di lunghezza di cerniera plastica per differenti altezze di sezione, secondo il range di variazione valutato da Baker

Baker e Amarakone

La formulazione (1) proposta da Baker, è stata poi semplificata da Baker e Amarakone :

$$L_p = 0.8 \cdot k_1 \cdot k_3 \cdot \left(\frac{z}{d} \right)^{0.25} \cdot c \quad (5.2)$$

Dove c rappresenta l'asse neutro.

Mattock

Mattock (1965) eseguì 37 prove sperimentali su travi, variando alcuni parametri fondamentali. In particolare: la resistenza a compressione del calcestruzzo f_c [28-41 MPa], l'altezza della trave d [254 e 508 mm], il rapporto z/d [2.75 a 11], la percentuale di armatura ρ [1% - 3%] e la tensione a snervamento delle barre d'acciaio f_y [324 e 414 MPa].

Da tale sperimentazione concluse che la diffusione della plasticità lungo la lunghezza dell'elemento si incrementa se z/d aumenta, esattamente come al decremento del quantitativo netto di armature $(q - q')/q_b$ e dedusse la seguente formulazione (di natura empirica):

$$L_p = \frac{d}{2} \cdot \left\{ 1 + \left(1.14 \sqrt{\frac{z}{d}} - 1 \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{q - q'}{q_b} \right) \cdot \sqrt{\frac{d}{16.2}} \right] \right\} \quad (5.3)$$

Dove z e d sono espressi in [inch], mentre :

$$q = \left(\frac{A_s \cdot f_y}{b \cdot d \cdot f_c'} \right)$$

$$q' = \left(\frac{A_s' \cdot f_y}{b \cdot d \cdot f_c'} \right)$$

Ove A_s e A_s' rappresentano l'area delle barre in trazione e compressione rispettivamente.

Successivamente (1967) l'autore introdusse una nuova formulazione semplificata, tramite regressione sui dati raccolti (pur ammettendo che la dispersione sui dati stessi era notevole):

$$L_p = \frac{d}{2} + 0.05 \cdot z \quad (5.4)$$

Corley

Corley approfondisce il lavoro di Mattock, effettuando altre 40 sperimentazioni su travi semplicemente appoggiate con un solo punto di applicazione del carico.

Giunge alla conclusione che le dimensioni in pianta non influenzano molto la capacità rotazionale dell'elemento, esattamente come il rapporto $(q - q')/q_b$.

L'espressione a cui giunge è la seguente:

$$L_p = \frac{d}{2} + 0.2 \cdot \frac{z}{\sqrt{d}} \quad (5.5)$$

Park et al.

Park et al. effettuarono una campagna sperimentale su colonne di dimensioni 550 x 550 [mm²] e L/h pari a 2 e in cui il carico assiale variava da $0.2 \cdot f_c' \cdot A_g$ a $0.6 \cdot f_c' \cdot A_g$.

Ne conclusero che il valore sperimentale di L_p non dipendeva significativamente dallo sforzo assiale N, e dunque che il valore medio della lunghezza di cerniera plastica, semplificato, è dato da:

$$L_p = 0.4 \cdot h \quad (5.6)$$

Dove h rappresenta proprio la profondità della sezione della colonna.

Priestley and Park

Priestley and Park, con un approccio simile, propongono per il calcolo di L_p delle colonne in c.a. l'espressione data da:

$$L_p = 0.08 \cdot L + 6 \cdot d_b \quad (5.7)$$

in cui il primo termine riguarda la capacità flessionale della colonna, il secondo è relazionato agli scorrimenti delle barre (che tendono ad ancorarsi nel nodo o al piede della fondazione).

Paulay and Priestley

Paulay and Priestley approfondiscono la formulazione precedente, tenendo in conto anche di diversi valori di tensione di snervamento dell'acciaio f_y :

$$L_p = 0.08 \cdot L + 0.022 \cdot d_b \cdot f_y \quad (f_y \text{ in MPa}) \quad (5.8)$$

Per tipiche delle colonne in c.a., questa espressione fornisce un valore che è all'incirca pari a $0.5 \cdot h$.

Sakai and Sheikh

Trovano una formulazione di lunghezza di cerniera plastica dipendente dal rapporto L/h e dalla quantità di armatura trasversale, livello di carico assiale, rapporto tra le dimensioni della sezione in pianta b/h.

Sheikh and Khoury

Secondo Sheikh and Khoury, in base a test sperimentali su colonne, la lunghezza di cerniera plastica è approssimativamente uguale a $1.0 \cdot h$. La peculiarità è che nelle loro sperimentazioni si avevano livelli di carico assiale molto elevati.

Mendis

Mendis condusse 13 prove sperimentali su travi appoggiate, con un solo punto di applicazione del carico.

L_p si incrementa se L/h o il la percentuale di armatura longitudinale si incrementano, ma decresce se la percentuale di staffe diminuisce. Secondo l'autore L_p non varia in funzione del livello di carico assiale ($P/(f'_c \cdot A_g) = 0.06 - 0.20$).

Panagiotakos and Fardis (2001)

$$L_p = 0.18 \cdot L + 0.021 \cdot d_b \cdot f_y \quad (5.9)$$

L'espressione trovata dai due autori, insieme a quelle trovate da Priestley and Park e Paulay and Priestley, presenta due contributi: uno per cui L_p è proporzionale alla lunghezza L dell'elemento, l'altro legato a caratteristiche delle barre di armatura, precisamente al diametro e alla tensione di snervamento.

Vediamo di approfondire questo secondo aspetto: in linea del tutto teorica, infatti, la lunghezza di cerniera plastica dovrebbe essere proporzionale alla lunghezza dell'elemento, tuttavia accade nella realtà un fenomeno interessante e importante: la penetrazione delle barre in trazione nella fondazione, detta anche "yield penetration".

Questo fenomeno è dovuto all'allungamento delle barre in trazione oltre il vincolo di base teorico, a causa degli scorrimenti: tale fenomeno contribuisce a estendere la zona plasticizzata (che invece dovrebbe fermarsi con la fine dell'elemento) e, di conseguenza, ad aumentare la rotazione e lo spostamento totale dell'elemento. Per questo motivo è presente il secondo termine nell'equazione (5.9), gli autori individuano come principali fattori descrittivi del fenomeno della rotazione dell'elemento, il diametro delle barre e la tensione di snervamento dell'acciaio.

Si è già visto nel [Capitolo 3](#) la dipendenza degli scorrimenti dal diametro delle barre (seppure solo lisce) e dalla tensione di snervamento, in particolare si è visto che all'aumentare del diametro aumenta anche lo scorrimento ultimo, esattamente come all'aumentare della tensione di scorrimento.

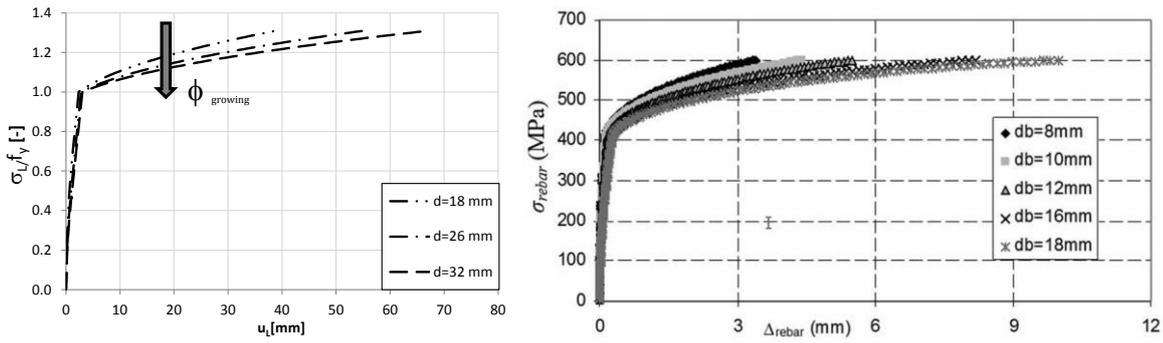


Figura 141: Variazione della legge di tensione scorrimento con il diametro : sinistra, barre lisce (Mattei et al.), destra barre nervate (Oehlers)

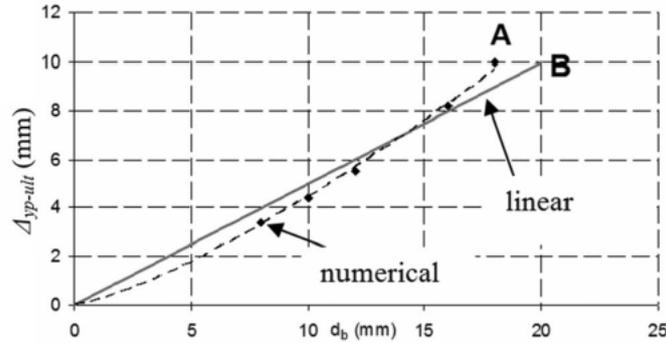


Figura 142: Influenza del diametro delle barre sullo scorrimento ultimo

Oehlers et al.

Oehlers et al. concludono incrociando risultati di analisi numeriche e campagna sperimentale che le espressioni usate per trovare la quota parte di lunghezza di cerniera plastica dovuta alla penetrazione degli scorrimenti in fondazione, $(6d_b, 0.021 d_b f_y)$ sono abbastanza in accordo con i risultati della sua indagine numerica, in particolare l'espressione trovata dagli autori è la seguente:

$$\left(L_{hinge}\right)_{yp-ult} = \frac{\Delta_{yp-ult}}{\varepsilon_{fract}} \quad (5.10)$$

Ove il numeratore rappresenta lo scorrimento ultimo per cui si ha rottura dell'acciaio, mentre il denominatore rappresenta la deformazione per cui si ha frattura dell'acciaio.

In Figura 143, è possibile notare la variazione della rotazione di elemento valutata per differenti valori della massima tensione di aderenza ($1.25\sqrt{f_c}$ o $2.5\sqrt{f_c}$), a seconda della diversa formulazione. E' importante dunque stabilire il valore della τ_{max} .

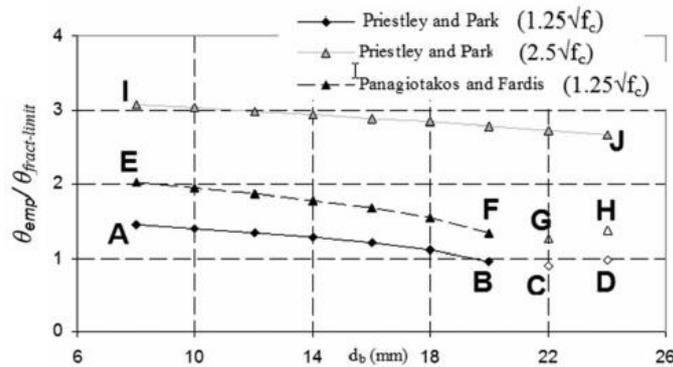


Figura 143 : Dipendenza della rotazione dal diametro delle barre

Sungjin Bae/Oguzhan Bayrak (2008)

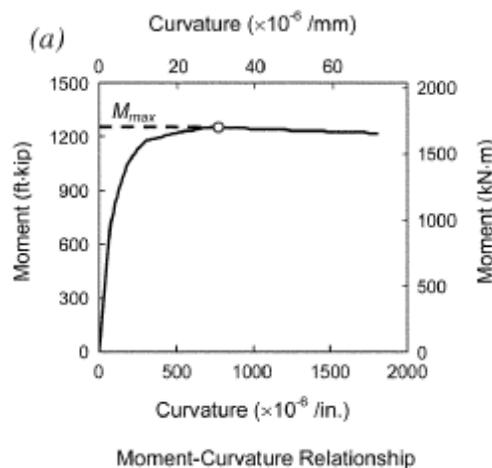
Gli autori propongono un metodo per il calcolo di L_p di una colonna basato sul *profilo di deformazione a compressione del calcestruzzo (e quindi delle barre in compressione)*.

Il profilo di deformazioni in compressione della sezione in cui si raggiunge il massimo momento flettente può dare buone informazioni sull'entità della cerniera plastica.

Generalmente la lunghezza di cerniera plastica è derivata da prove sperimentali, perché è piuttosto complicato calcolarla analiticamente. Anche in questo caso gli autori hanno svolto prove sperimentali da cui attingere, in particolare valutando l'andamento delle sollecitazioni e il profilo di deformazioni, ma *la procedura per il calcolo di L_p è prevalentemente analitica*.

Gli autori stessi, propongono una procedura a steps per definire il valore di L_p :

- **Step 1:** Si ottiene il diagramma momento curvatura di una sezione in cui si può creare la cerniera plastica.



- **Step 2:** Si grafica il diagramma dell'andamento del momento flettente lungo l'elemento, e ad un'altezza pari a $0.5h$ dalla base (centro della cerniera plastica) si assume che il momento sia il medesimo che nel grafico $M-x$ rappresenta il valore massimo.(fig.c)

- **Step 3:** dai primi due step si ottiene il profilo di deformazioni della fibra estrema del calcestruzzo.(fig.d)
- **Step 4:** questo andamento è uguale a quello nella barra compressa, e, individuando il valore di deformazione a snervamento (ϵ_y), si ottiene il tratto di elemento in cui le barre in compressione sono snervate (esempio 1.2 h dalla base).
- **Step 5:** Si sottrae a questo valore, la zona in cui non c'è danno per effetto del confinamento in prossimità dell'incastro, pari a 0.25 h.

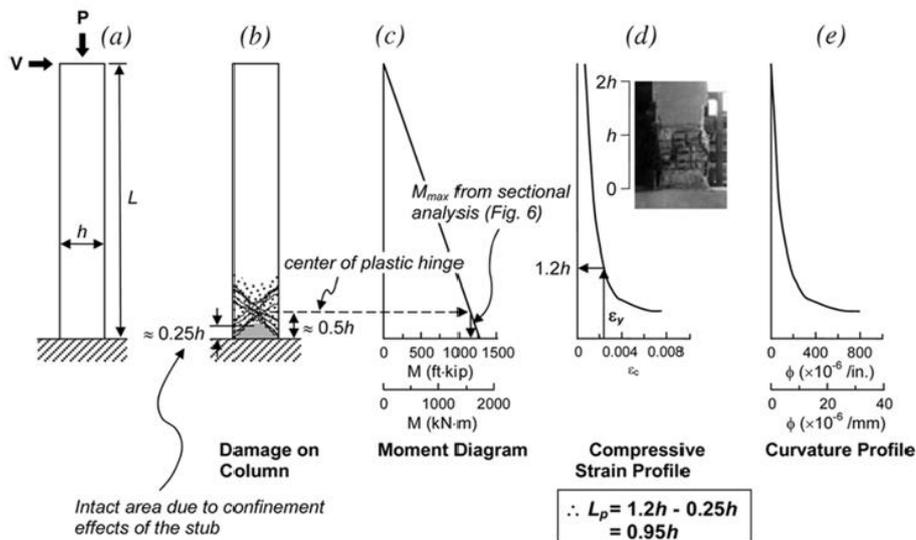


Figura 144: Valutazione di L_p per i casi sperimentali analizzati

Per cui, si giunge alla prima basilica conclusione circa l'espressione di L_p :

$$L_p = 1.2 \cdot h - 0.25 \cdot h = 0.95 \cdot h \quad (5.11)$$

Effettuando poi analisi parametriche variando i parametri più rilevanti (% di armatura, sforzo normale, dimensioni della sezione, lunghezza dell'elemento), gli autori giungono a un'espressione di L_P che tenga conto di tutti questi parametri.

$$\frac{L_P}{h} = \left[0.3 \cdot \left(\frac{P}{P_0} \right) + 3 \cdot \left(\frac{A_s}{A_g} \right) - 0.1 \right] \cdot \left(\frac{L}{h} \right) + 0.25 \geq 0.25 \quad (5.12)$$

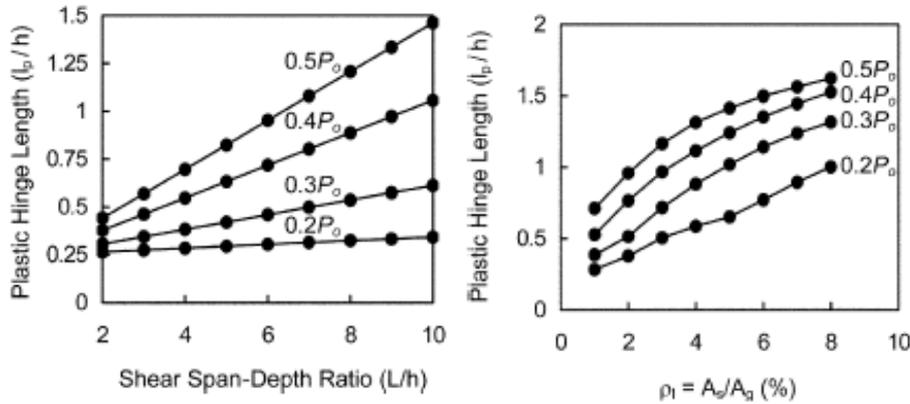


Figura 145: Variazione della lunghezza di cerniera plastica in funzione di alcuni parametri caratteristici

In generale, quasi tutte le formulazioni viste sono indipendenti dallo sforzo normale, spesso perché sono state ricavate per le travi, ma anche perché l'influenza dello sforzo normale sull'espressione di L_P è piuttosto controversa, ad esempio, secondo Park et al. e Mendis è pressoché inesistente mentre secondo Sungjin Bae e Oguzhan Bayrak, la dipendenza c'è, giustificando inoltre la mancata correlazione tra lo sforzo normale e L_P secondo Park et al. con il fatto che avevano indagato valori di sforzo normale piuttosto bassi. In particolare, la lunghezza di cerniera plastica aumenta all'aumentare dello sforzo normale:

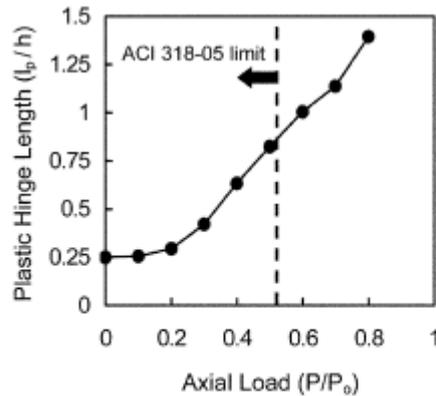


Figura 146: Influenza della lunghezza di cerniera plastica in funzione dello sforzo normale agente

EC8:
$$L_{pl} = \frac{L_v}{30} + 0.2 \cdot h + a_{sl} \cdot \frac{0.11 \cdot d_{bl} \cdot f_{yL}}{\sqrt{f_c}} \quad (5.13)$$

NTC 08:
$$L_{pl} = 0.1 \cdot L_v + 0.17 \cdot h + a_{sl} \cdot \frac{0.24 \cdot d_{bl} \cdot f_{yL}}{\sqrt{f_c}} \quad (5.14)$$

In cui l'ultimo contributo è riferito agli scorrimenti.

Nei grafici successivi si nota come tutte queste espressioni, che, ad ogni modo, non esauriscono tutta la casistica sulle formulazioni, portino a valori piuttosto differenti. Questa variazione induce ovviamente serie perplessità circa il valore di lunghezza di cerniera plastica da adottare per le analisi a plasticità concentrata: L_P è un parametro che dipende da molteplici fattori, tra cui gli scorrimenti, la fessurazione, il contenuto di armatura, lo sforzo normale, etc., e proprio per questo, non solo la sua definizione risulta complessa ma sempre e comunque legata alle peculiarità delle sperimentazioni condotte.

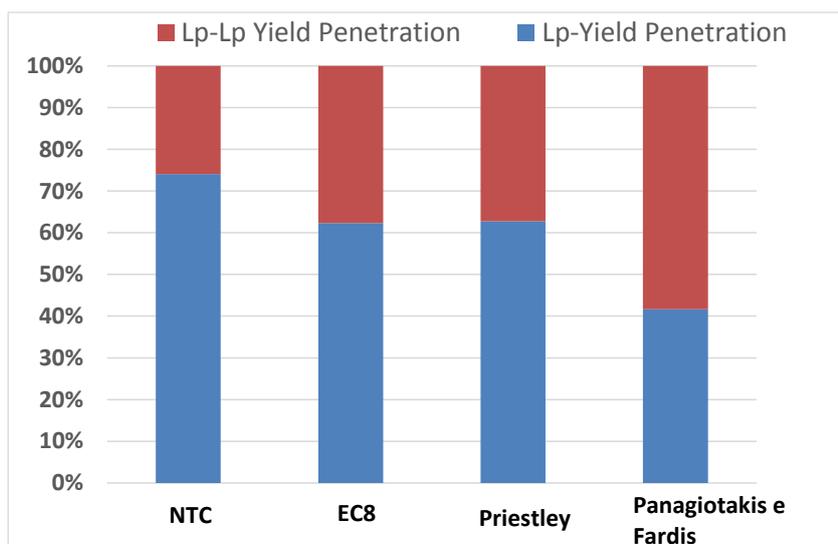
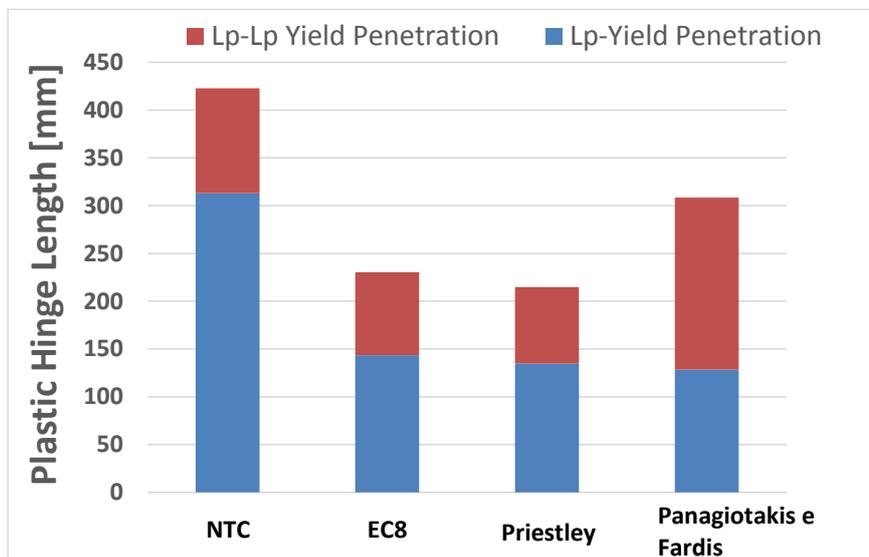


Figura 147: Confronto tra diverse formulazioni di lunghezza di cerniera plastica

In Figura 147 è riportato il confronto tra diverse formulazioni di cerniera plastica, in particolare secondo NTC ,EC8 ,Priestley , Panagiotakis e Fardis , per una sezione 350 x 350 , diametro medio delle barre 18 mm, resistenza del calcestruzzo pari a 22 MPa, tensione di snervamento dell'acciaio pari a 340 MPa, lunghezza dell'elemento pari a 1000 mm.

Queste specifiche formulazioni sono state confrontate perché hanno in comune la quota parte imputata alla penetrazione delle barre in tensione, pur ricordando che quest'ultima stata valutata su barre ad aderenza migliorata per cui gli scorrimenti sono inferiori rispetto alle barre lisce .

Nella stessa figura si nota invece come la differenza tra le formulazioni sia abbastanza significativa, tranne che tra Priestley ed EC8, ed è inoltre evidente come il contributo degli scorrimenti sulla lunghezza di cerniera plastica, incide dal 42% al 75%.

Si nota come, pur essendo state formulate principalmente in base a prove su colonne, queste formulazioni non tengono in conto dello sforzo normale, o perché lo si riteneva influente o perché il valore dello sforzo applicato era piuttosto piccolo.

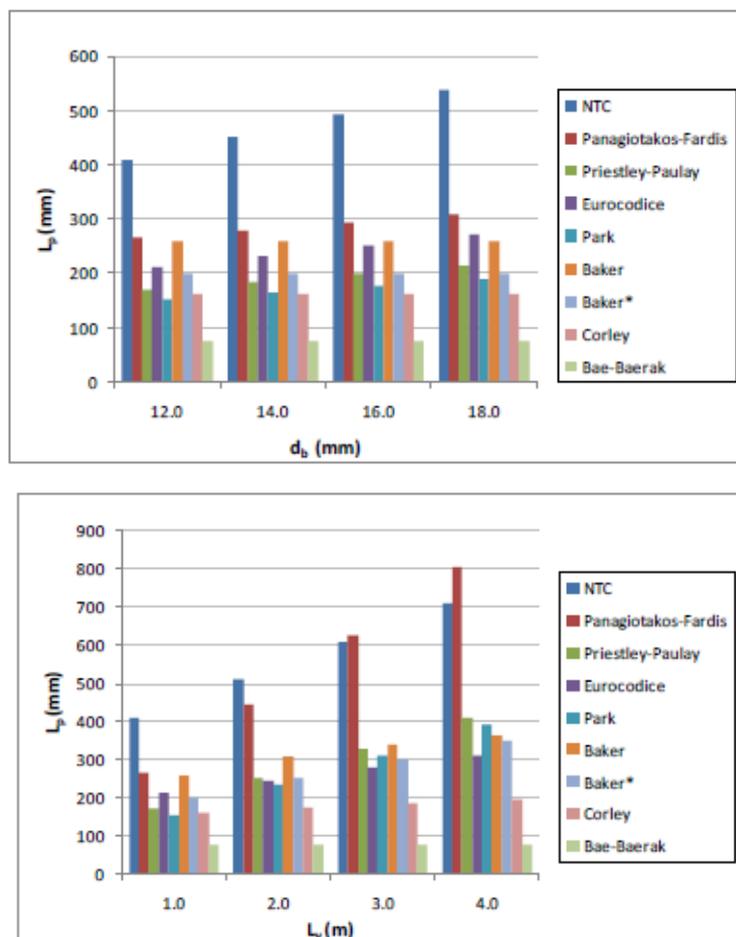


Figura 148: Lunghezza di cerniera plastica per differenti formulazioni, in relazione a diversi parametri (diametro delle barre, lunghezza di snervamento)

Di seguito, si riportano le enormi dispersioni dei valori della lunghezza di cerniera plastica disponibili in letteratura:

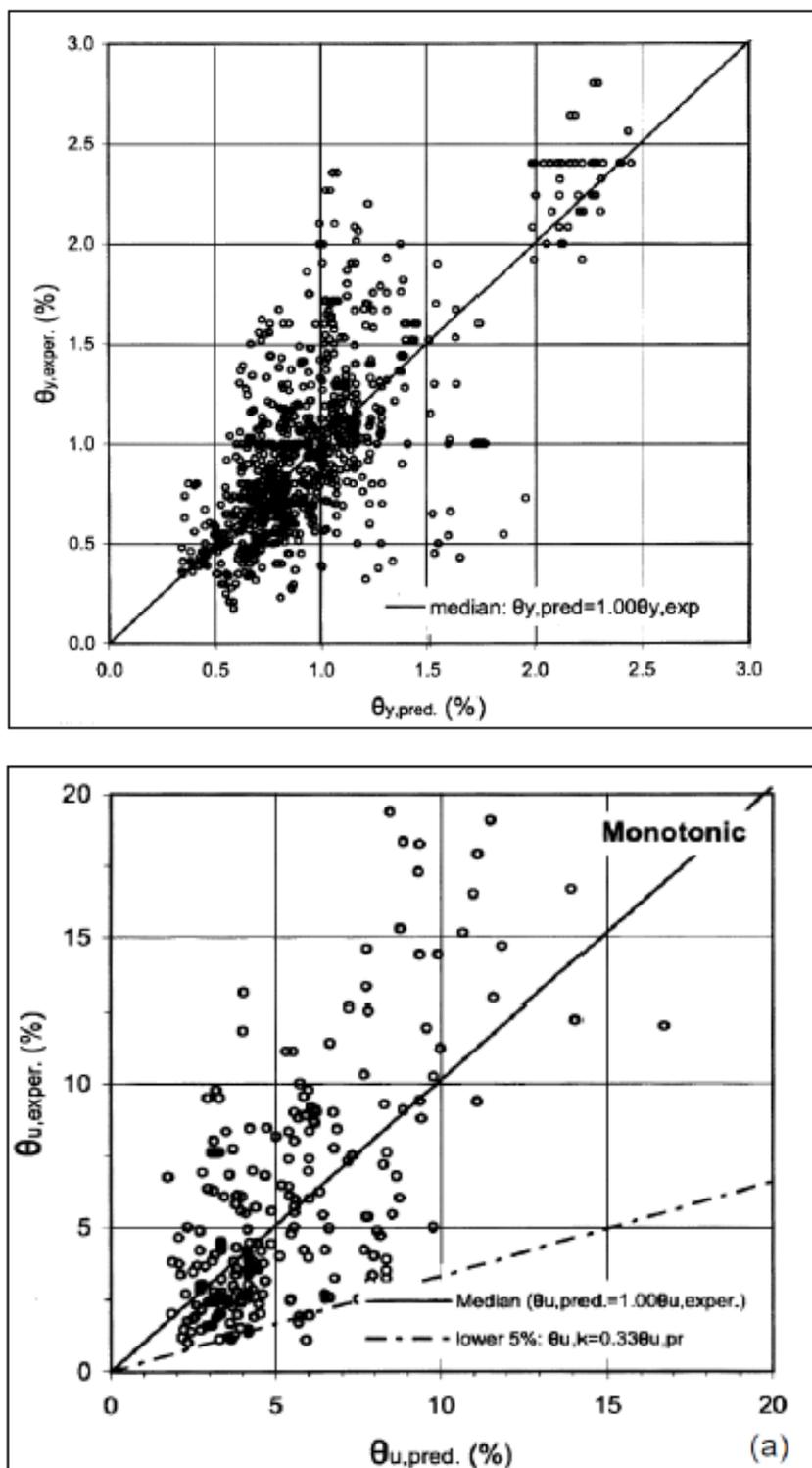


Figura 149: Dispersione dei valori di rotazione a snervamento e ultima dell'elemento, e quindi del valore di lunghezza di cerniera plastica

In base alle dispersioni viste precedentemente, anche l'influenza sul comportamento strutturale è piuttosto importante: in Figura 150 è rappresentata la risposta in termini forza spostamento su un telaio piano, variando la lunghezza di cerniera plastica, sia nel caso di perfetta aderenza (linee continue) sia nel caso di scorrimenti (linee tratteggiate):

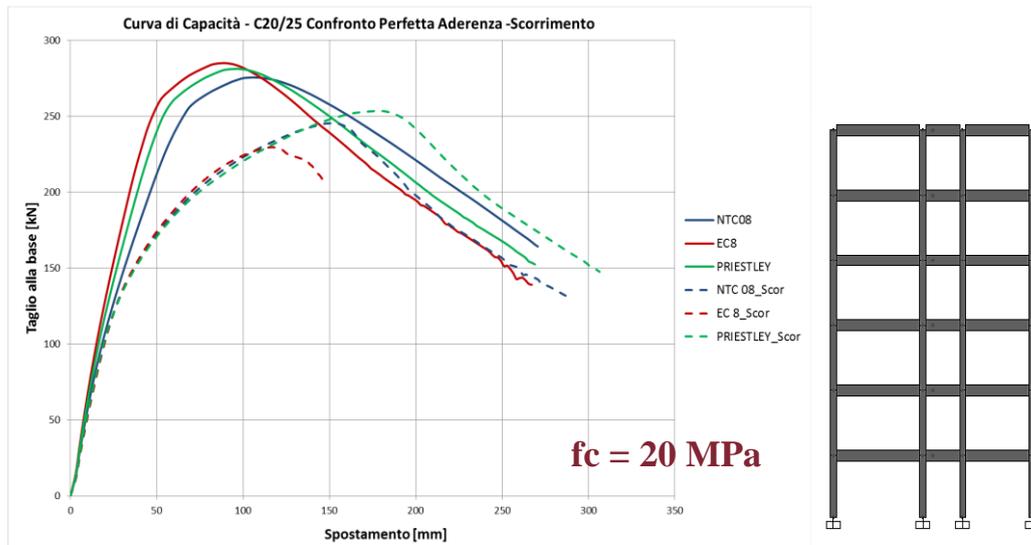


Figura 150: Risposta strutturale per diverse lunghezze di cerniera plastica

5.2 Modellazione numerica di una colonna con plinto in ambiente Abaqus

Al fine di valutare l'andamento delle deformazioni, rotazioni e curvature di elemento per poter trovare delle relazioni oggettive equivalenti per la lunghezza di cerniera plastica, è stato creato un modello 2D in ambiente Abaqus[47].

Il modello è di tipo piano e consiste in una colonna con annesso plinto, in cui il calcestruzzo presenta legame non lineare e reagente a trazione, le barre sono modellate anch'esse tramite elementi 2D con legame costitutivo non lineare elasto plastico incrudente, mentre l'interfaccia acciaio calcestruzzo è stata modellata tramite opportuni elementi che vogliono riprodurre gli scorrimenti relativi. Il modello è descritto in Figura 151, Figura 152 e Figura 153.

L'uncino di estremità è stato modellato con una molla di rigidezza equivalente, tramite la formulazione descritta nel Capitolo 3.

Il modello è stato soggetto a una storia di spostamenti ciclica e a uno sforzo normale costante pari a $0.2 N_c$, ove $N_c = f_{cd} / \text{Area sezione}$.

Data l'elevata non linearità del problema, soprattutto relazionata alle elevate non linearità dei materiali, molto tempo è stato investito nello studio degli stessi, o meglio in particolare (dato che i modelli disponibili in letteratura per l'acciaio sono già stati studiati in precedenza per la formulazione ciclica del modello della barra con scorrimenti) si è approfondito il comportamento non lineare del calcestruzzo, che come già si è accennato è stato considerato reagente a trazione, e sono state fatte diverse prove e valutazioni su quale fosse il legame più adatto da implementare, tra i tanti disponibili nella libreria del software.

Oltre allo studio dei legami costitutivi adatti, si è valutato quale fosse il mezzo migliore per descrivere gli scorrimenti tra barra e calcestruzzo, se tramite formulazioni basate sul "contatto" tra le due superfici, o tramite elementi connettori di interfaccia.

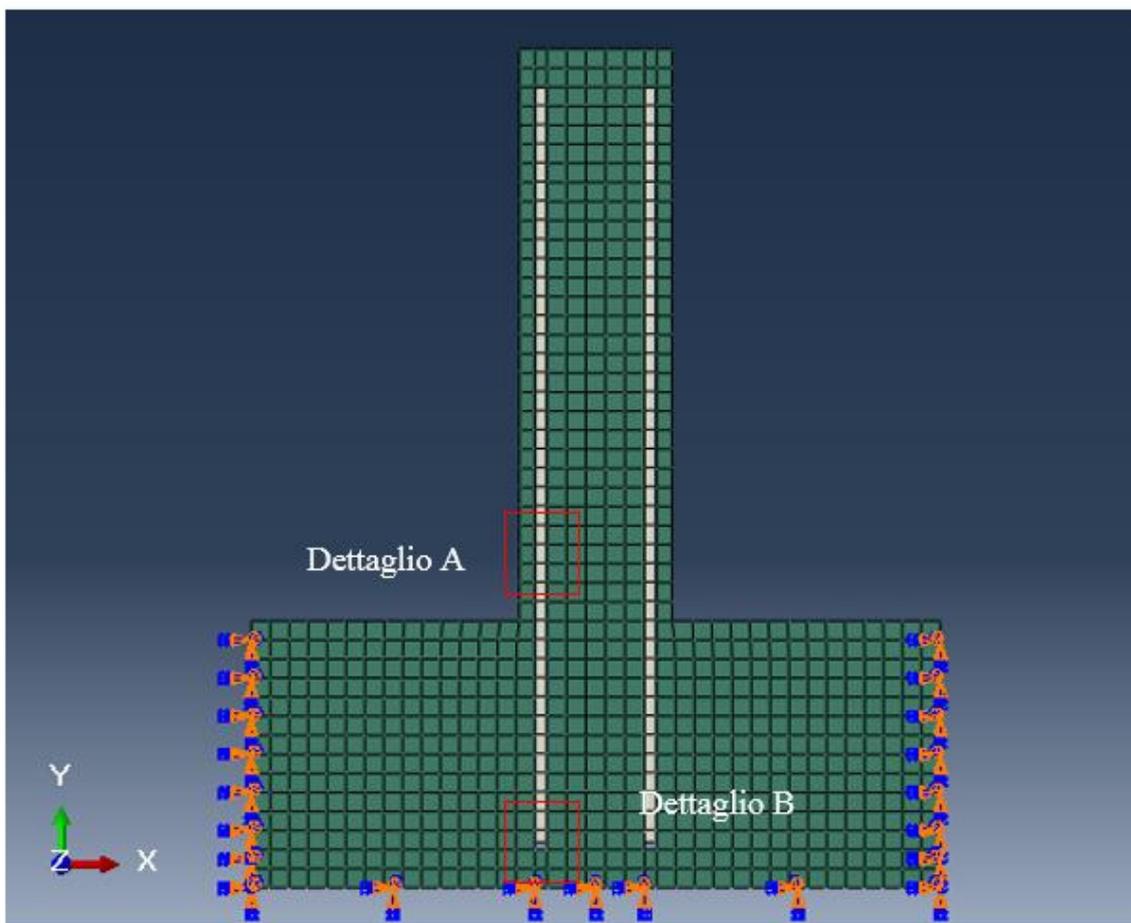


Figura 151: Modello numerico per la lunghezza di cerniera plastica

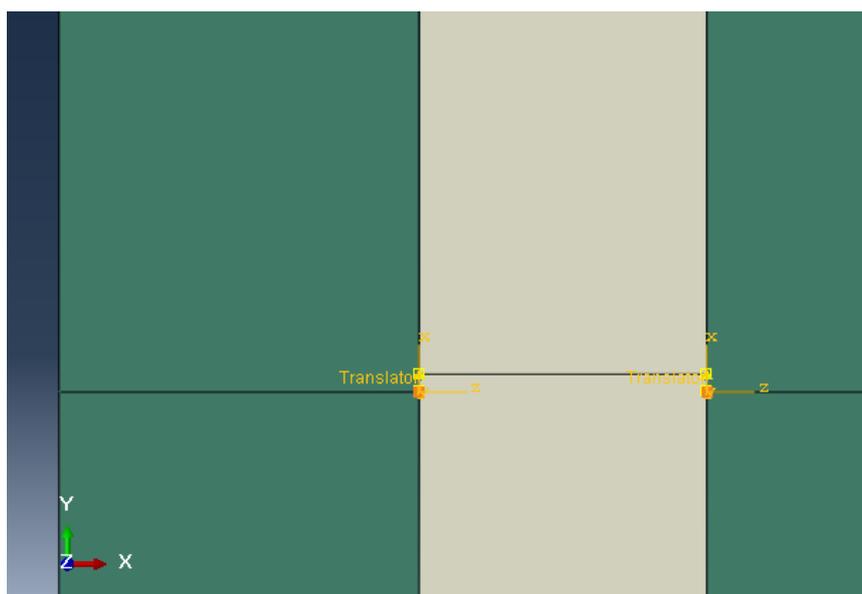


Figura 152: Dettaglio A: descrizione dell'aderenza tramite connettori

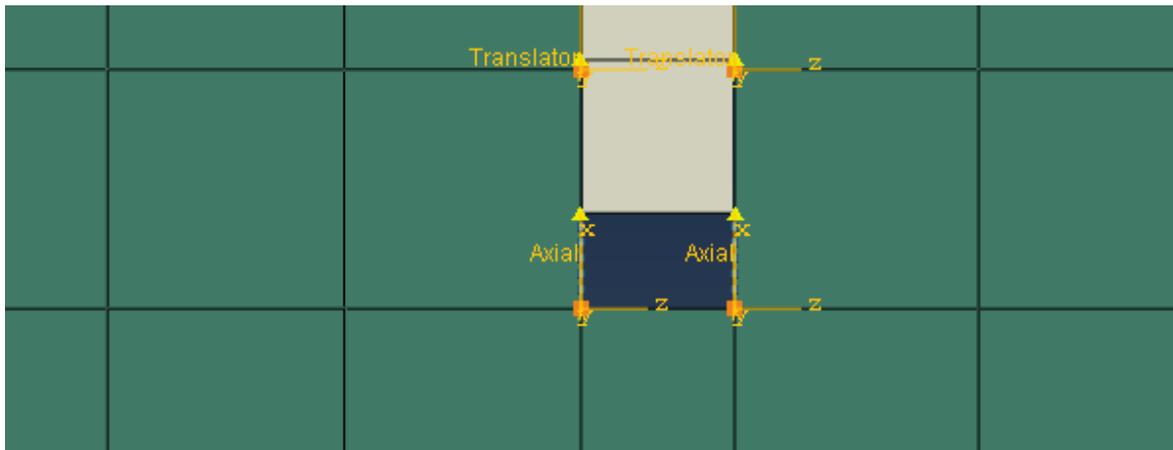


Figura 153: Dettaglio B: modellazione dell'uncino tramite molla di rigidità equivalente

5.2.1 Modellazione dell'aderenza

Abaqus non fornisce un metodo diretto o un legame costitutivo ad hoc per la modellazione dell'aderenza tra acciaio e calcestruzzo, per cui si è proceduto per tentativi indagando e scoprendo via via quali fossero tutte le possibili tecniche.

In particolare la modellazione può avvenire tramite:

- Superfici di contatto, cui attribuire un legame di interazione adeguato, che può essere di tipo Friction o di tipo Cohesive;
- Elementi non lineari di tipo Spring 2;
- Connettori di tipo Translator;

Friction

La modellazione consiste nell'attribuire un legame di tipo attritivo al contratto tra due superfici: questa tecnica potrebbe essere corretta ai fini della descrizione del modello analitico dell'aderenza delle barre lisce, essendo il loro comportamento prevalentemente attritivo.

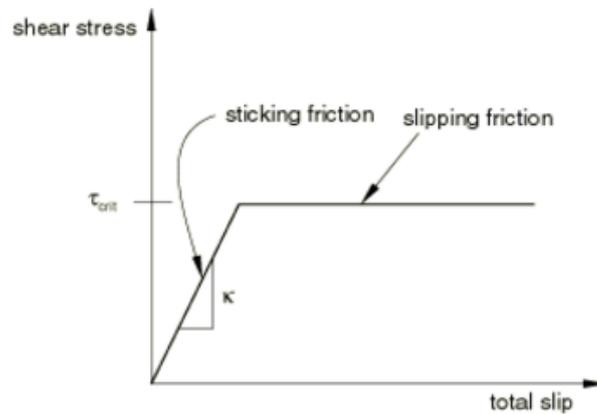


Figura 154: Proprietà di tipo attritivo da attribuire all'interfaccia calcestruzzo barre

Il problema connesso a questa tecnica è che il legame varia in funzione dello sforzo normale: in particolare si riesce ad evitare che la massima tensione di aderenza resti costante per un aumento di sforzo normale, ma in caso di decremento dello stesso, non si ha più un'aderenza costante lungo l'elemento.

Translators

Gli elementi translators sono connettori atti a descrivere lo spostamento relativo tra due elementi in una direzione, in particolare consentono lo spostamento in direzione 1 (locale all'elemento) mentre vincolano tutti gli altri g.d.l.:

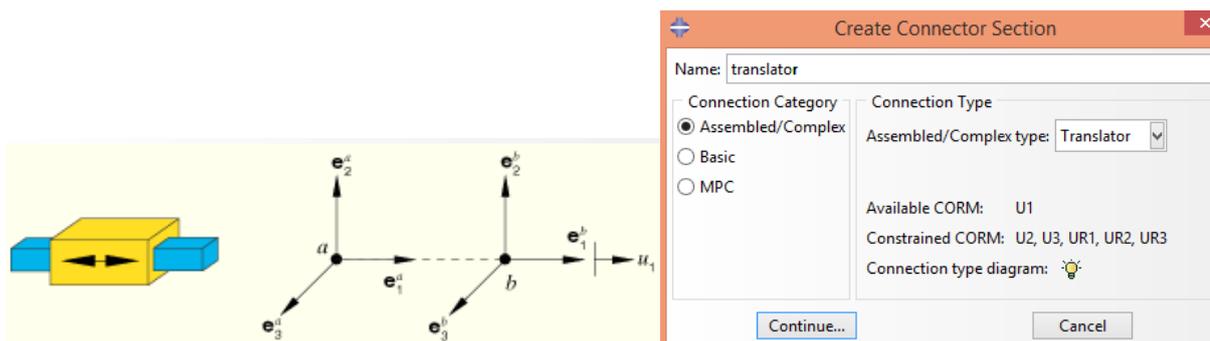


Figura 155: Elementi translators per definire gli scorrimenti relativi acciaio calcestruzzo

A questi elementi si deve associare un comportamento in una direzione, che può essere lineare, non lineare, con danno, etc.

Il comportamento attribuito a tali elementi è stato pertanto quello delle tensioni di aderenza-scorrimenti.

Tra le varie soluzioni, gli elementi di tipo translators sembrano i più adatti a descrivere il problema, sia da un punto di vista monotono che ciclico (il ciclo degli elementi coesivi non è relazionabile a quello dell'aderenza, mentre la non linearità delle molle necessita di un file di input ad hoc).

Per poter validare i modelli e le tecniche impiegate, sono state dapprima effettuate prove semplici e controllabili su una barra immersa nel calcestruzzo soggetta a uno spostamento di estremità.

In particolare il benchmark ha coinvolto una barra di 300 mm immersa in un blocco di calcestruzzo con un'aderenza di 0.68 MPa: il calcolo dell'integrale delle tensioni tangenziali è piuttosto semplice questo il caso in cui si sviluppa aderenza lungo tutta la barra e la stessa si sfilava.

Ad ogni link è stata attribuita una Forza pari a:

$$T = \tau \cdot L_i \cdot s$$

Ove L_i rappresenta la lunghezza di influenza di ogni link, s lo spessore della superficie di contatto.

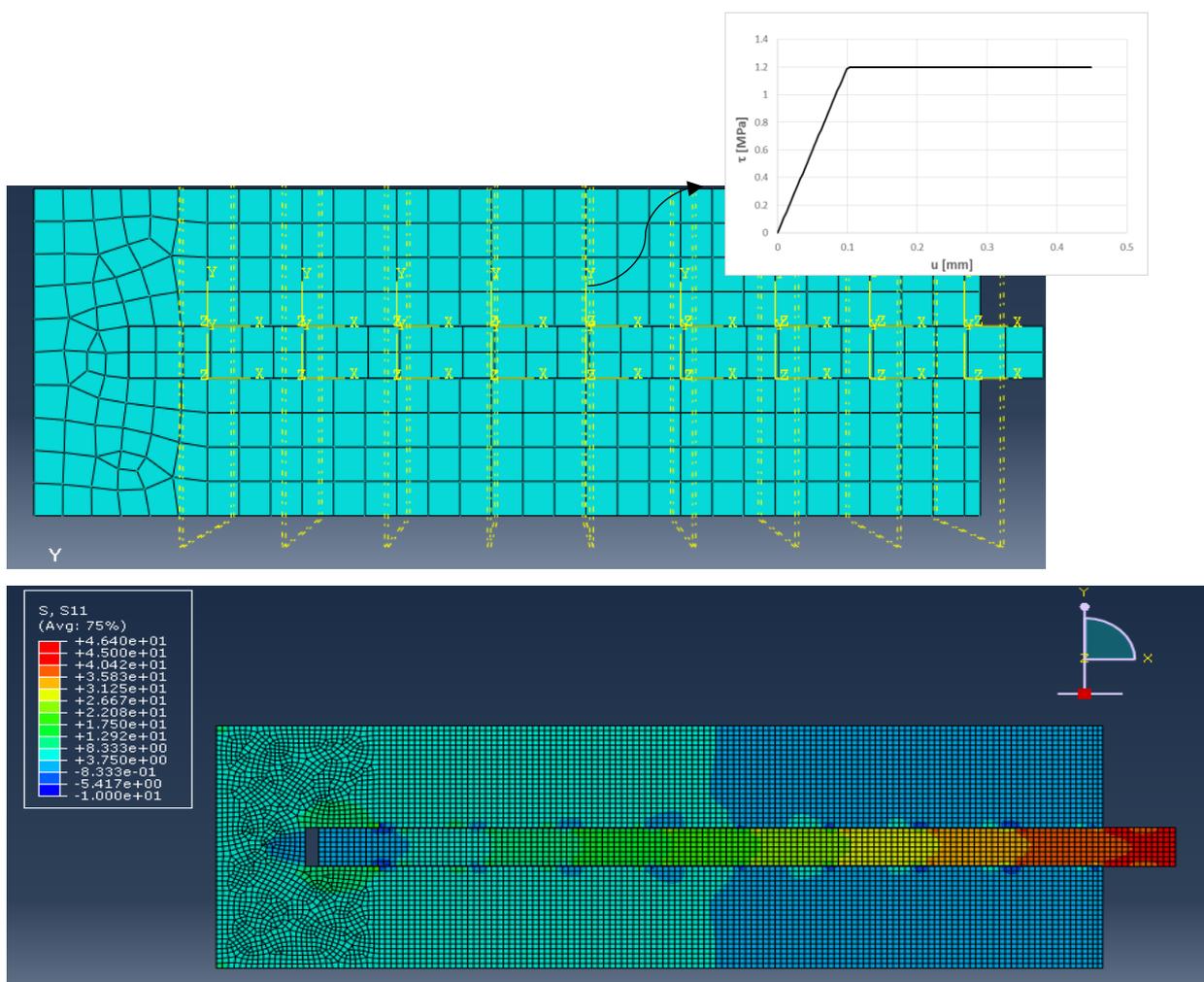
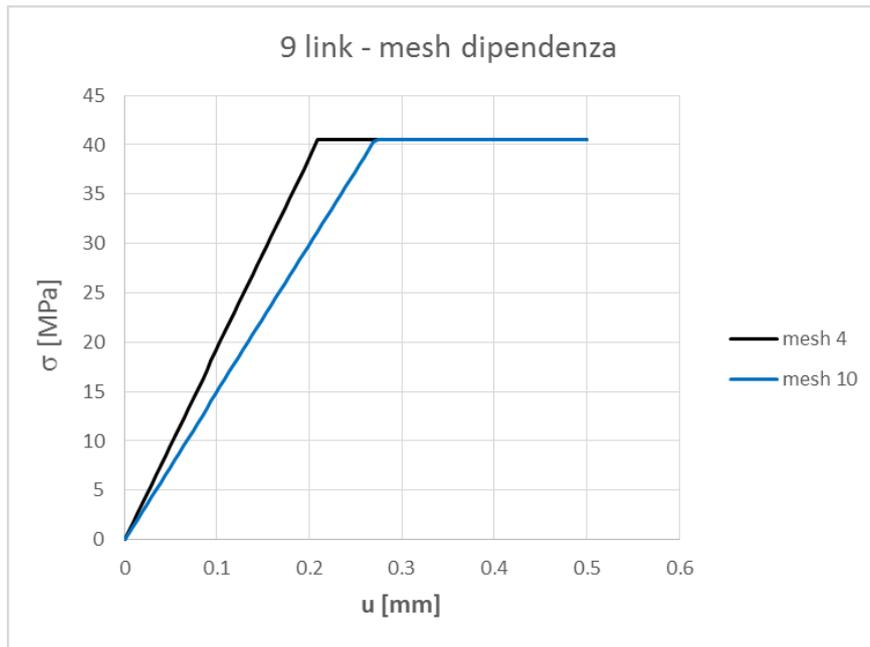
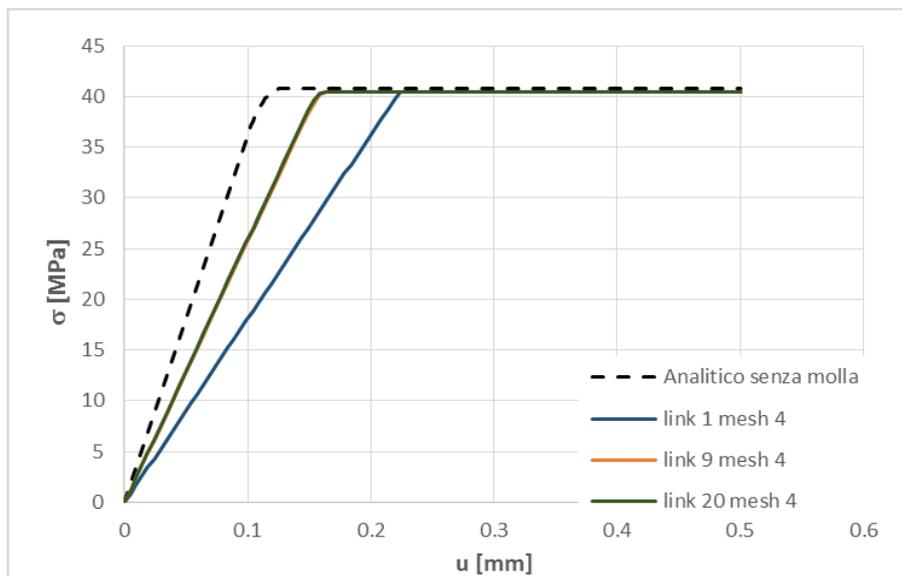


Figura 156: Barra lunga 300 mm soggetta a N translators



(a)



(b)

Figura 157: (a) Analisi parametrica sulle dimensioni della mesh; (b) Analisi parametrica sul numero di link

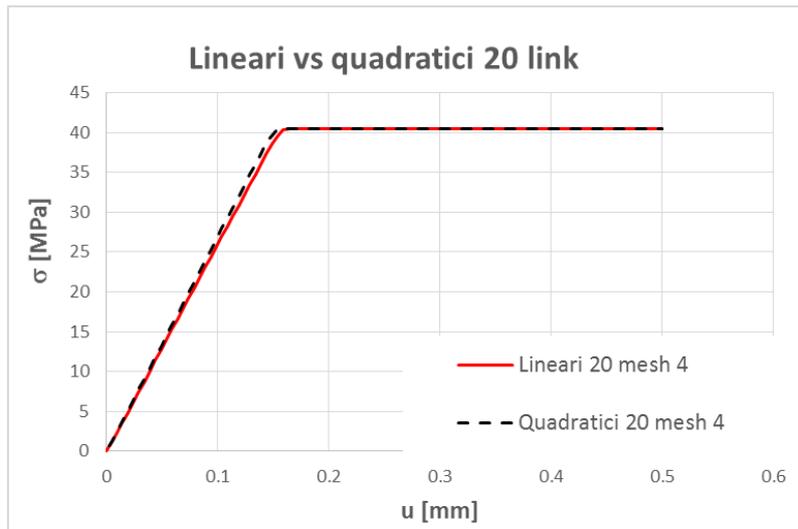


Figura 158: Formulazione quadratica vs lineare della mesh

Nelle Figura 157 e Figura 158 sono descritte le analisi numeriche effettuate per tarare il modello in funzione della grandezza della mesh (fattore principale) ed in seguito in base al numero di link e al tipo di elemento finito (lineare o quadratico), in base alla coppia tensione normale-scorrimento letta in prossimità dell'estremità libera per cui $x=L$.

Come è evidente dal confronto con il modello analitico, ci sono alcune differenze in termini di rigidità: la barra immersa nel calcestruzzo di fatto, risente della deformabilità maggiore dello stesso, infatti aumentandone il modulo elastico le differenze si attenuano:

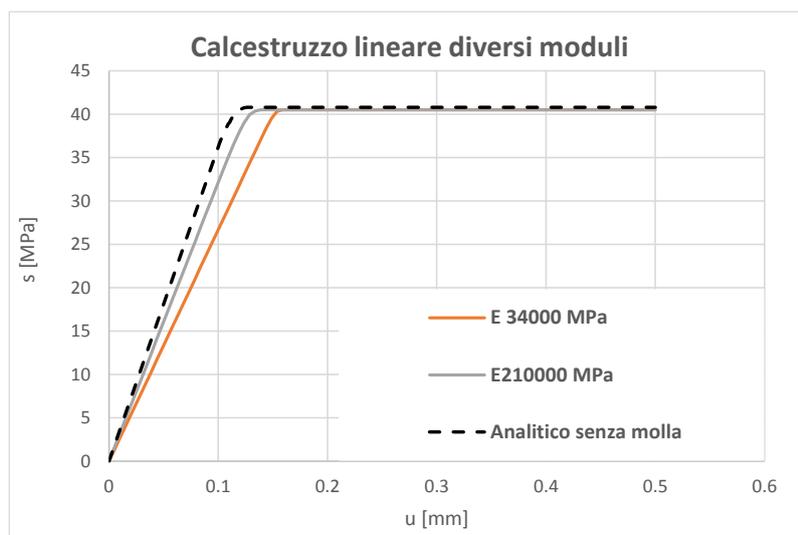


Figura 159: Legame tensioni scorrimenti barra immersa nel calcestruzzo: deformabilità offerta dal calcestruzzo

La medesima analisi è stata effettuata su una barra più lunga, per la quale la lunghezza di ancoraggio è più piccola della lunghezza totale dell'elemento, e anche in questo caso i risultati sembrano soddisfacenti:

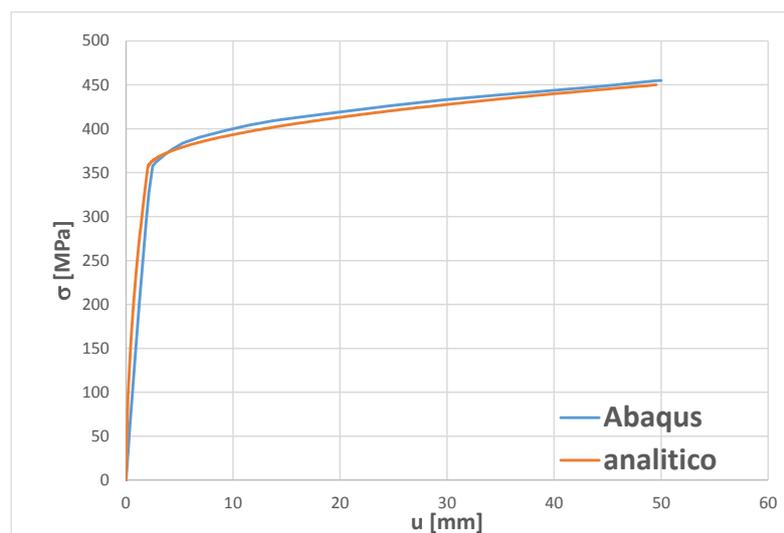
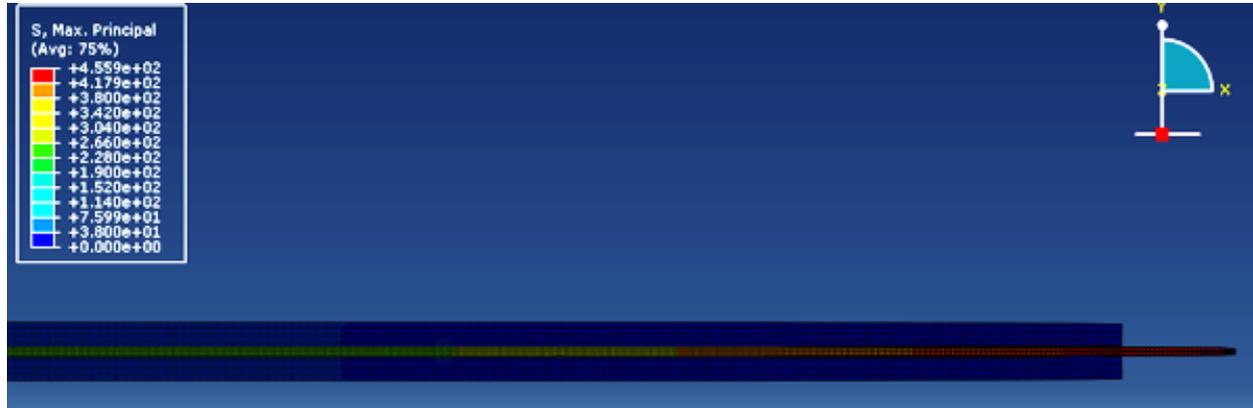


Figura 160: Barra di lunghezza tale che $L > L_0$: confronto analitico vs numerico

5.2.2 Modellazione del calcestruzzo non lineare reagente a trazione

La descrizione dell'andamento delle curvature realistico sezione per sezione lungo l'elemento strutturale, comporta di fatto la possibilità di leggere o almeno di quantificare le fessure nella parte del calcestruzzo soggetta a trazione, e l'accorciamento del calcestruzzo nella zona compressa.

La modellazione del comportamento a trazione di un elemento può avvenire in Abaqus attraverso diverse modalità: in particolare per il calcestruzzo esistono modelli non lineari specifici in cui le fessure sono tipo "distribuito", oppure, in alternativa, c'è la possibilità di modellare la fessura

attraverso un approccio "discreto", ad esempio attraverso gli XFEM (Extended Finite Element Method).

Il metodo degli Extended Finite Element è vantaggioso sotto diversi punti di vista, ad esempio può accadere che a causa dell'elevata non linearità del modello e della propagazione della fessura si renda necessario rigenerare una mesh che non tenga conto delle distorsioni eccessive degli elementi: ebbene gli XFEM non necessitano di questa opzione (in Abaqus si chiama Adaptive Mesh), poiché creano dei nodi interni agli elementi, aggiuntivi attraverso cui si propaga la fessura senza stravolgere la geometria dell'elemento finito. D'altro canto, l'indagine puntuale dei nodi aggiuntivi creati (ad esempio lo spostamento) non è direttamente quantificabile poiché non sono appunto nodi della mesh, oltretutto come generalmente avviene nella meccanica della frattura c'è la necessità di indicare a priori la zona in cui partirà la fessura.

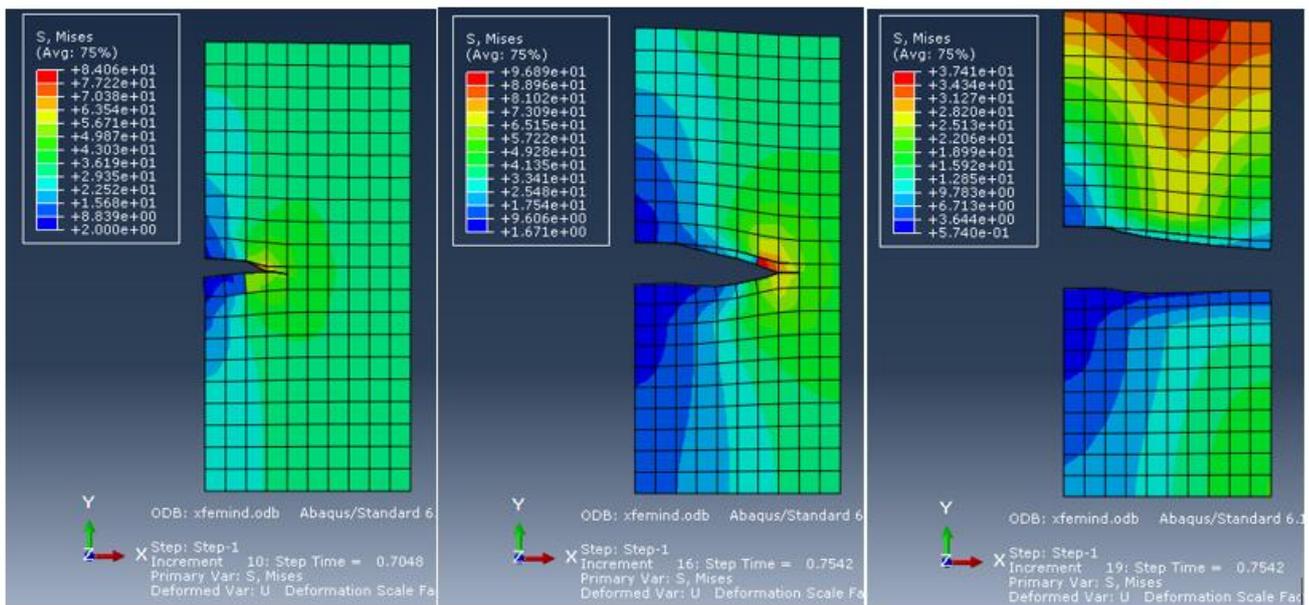
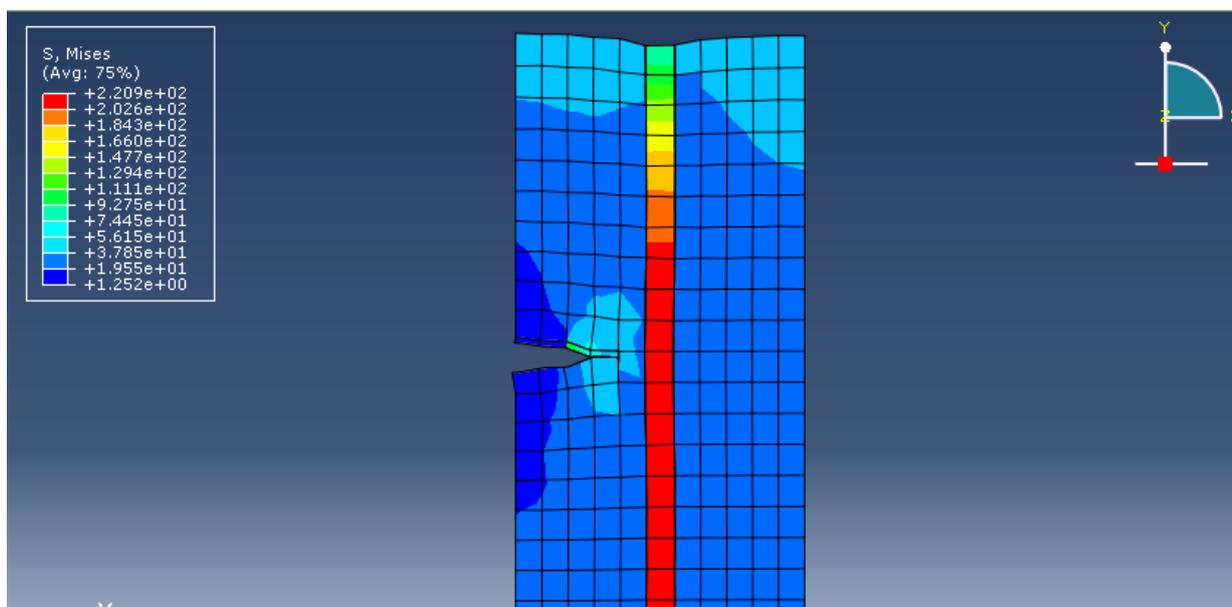
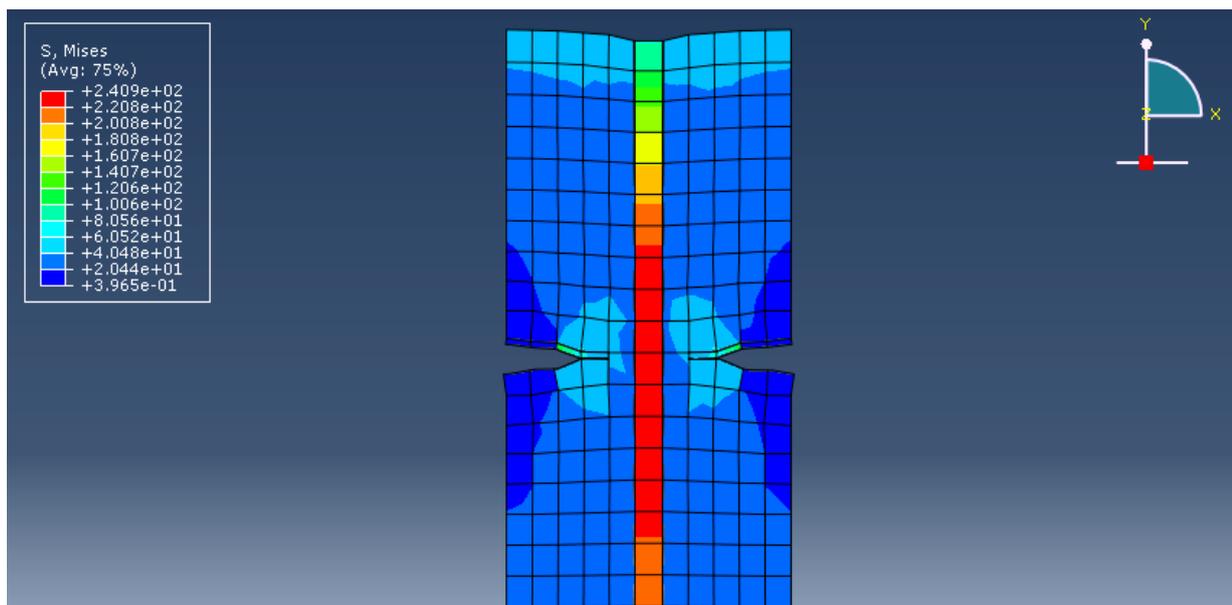


Figura 161: Propagazione della fessura con metodo XFEM



(a)



(b)

Figura 162: Propagazione della fessura con metodo XFEM: (a) Barra passante con una fessura (b) Barra passante con due fessure simmetriche

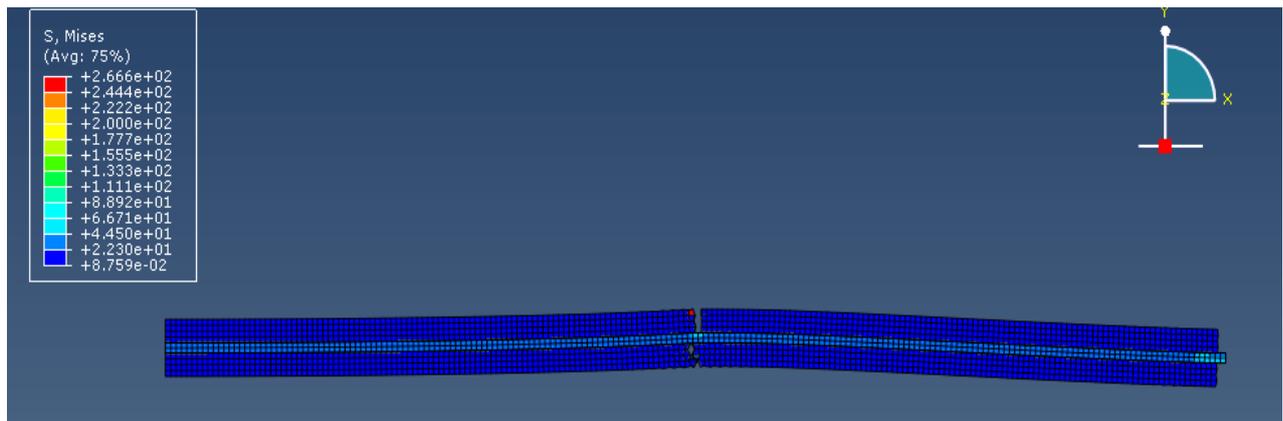


Figura 163: Barra immersa nel calcestruzzo: fessura centrale

Gli altri modelli per la descrizione del calcestruzzo non lineare sono di tipo “diffuso” per quanto riguarda le fessure, pertanto non descrivono in maniera così netta ed evidente la fessura stessa , (piuttosto si pensa a una diffusione del quadro fessurativo tra gli elementi finiti nei punti di intergrazione) , ma hanno il vantaggio di stabilire autonomamente dove nascono le fessure e in generale sono in grado di fornire un gran numero di informazioni circa lo stato degli elementi finiti coinvolti.

I due modelli principali sono:

- Smearred Crack Model;
- Concrete Damage Plasticity Model;

Il primo non è stato preso in considerazione a causa dell’onerosità dell’elaborazione degli output a livello di fessure, la cui apertura è descritta quantitativamente in un file di testo che si genera in automatico nella cartella di lavoro, per ogni punto di integrazione (e che dunque va elaborato volta per volta).

Il Concrete Damage Plasticity Model è stato in definitiva giudicato il miglior compromesso tra onere computazionale ed efficacia dei risultati.

5.2.2.1 Legame costitutivo del calcestruzzo: Concrete Plasticity Damage

Il modello è di tipo continuo, isotropico basato sulla teoria della plasticità. Esso utilizza i concetti della teoria del danno isotropica, in combinazione con il comportamento inelastico a trazione e a compressione del calcestruzzo.

Il comportamento monotono uniaassiale si basa su un modello di danneggiamento (riduzione delle proprietà meccaniche del materiale assegnata una certa legge) che vede due meccanismi di rottura possibili: la rottura per trazione e lo schiacciamento per compressione.

L'evoluzione della superficie di snervamento e quindi della plasticizzazione (o il collasso) è controllata dalla crescita di due deformazioni plastiche equivalenti ε_t^{pl} e ε_c^{pl} che regolano i due fenomeni di rottura possibili.

In Figura 164 sono mostrati gli andamenti dei legami a trazione e a compressione del calcestruzzo.

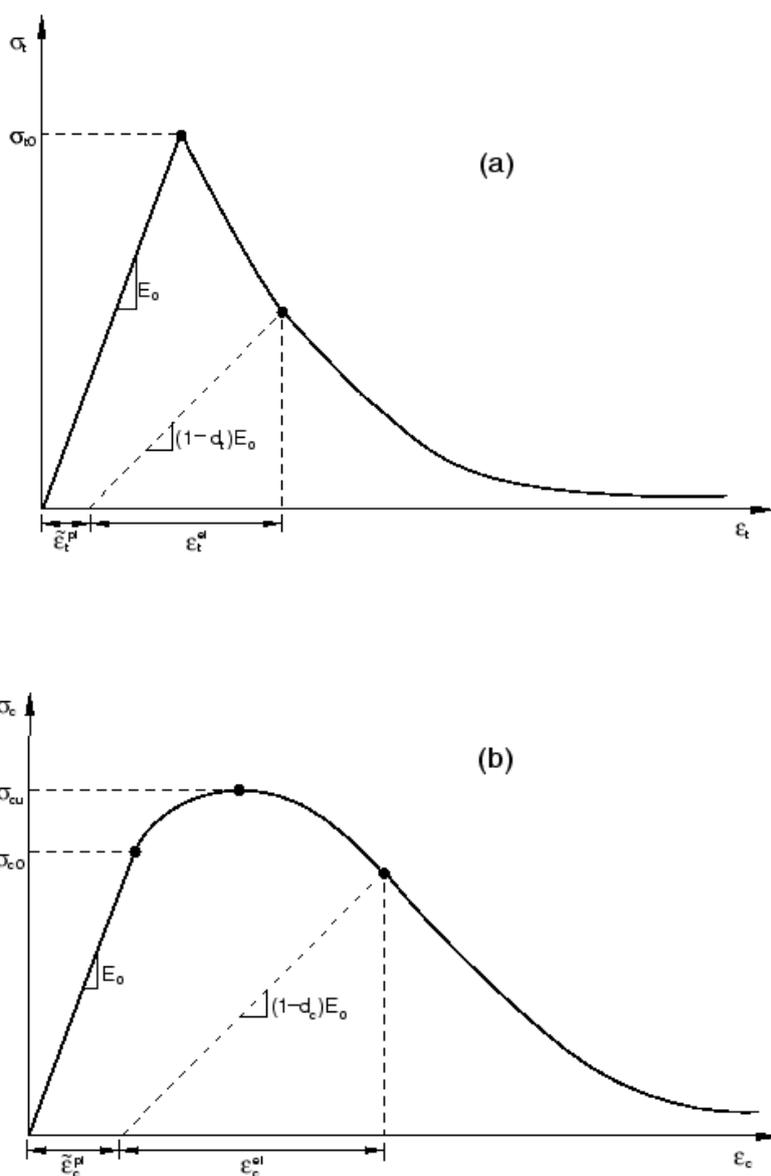


Figura 164 –Legame costitutivo del calcestruzzo: (a) a trazione;(b) a compressione

Localizzazione delle deformazioni: ramo di softening del legame a trazione del calcestruzzo

Il legame a trazione del calcestruzzo segue l'andamento classico dello stesso soggetto a una prova di trazione, Figura 165:

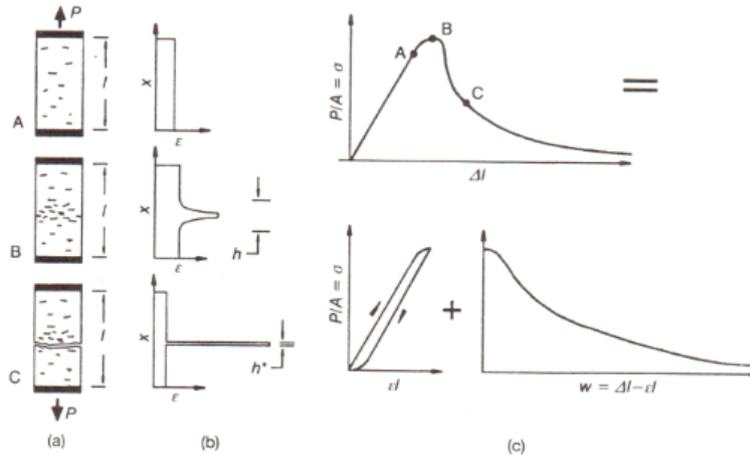


Figura 165: Comportamento a trazione del calcestruzzo

La prova di trazione su un provino di calcestruzzo, infatti, evidenzia un comportamento di questo tipo: la tensione di trazione cresce fino a un valore di picco (ramo elastico) per poi decadere in maniera più o meno brusca a seconda di una serie di fattori (rottura fragile o duttile), in cui si ha l'accumulo delle fessure. In particolare se si considera l'effetto irrigidente delle barre in prossimità delle fessure la rottura sarà duttile altrimenti è di tipo fragile.

In prossimità del raggiungimento della tensione massima a trazione, iniziano a crearsi delle microfessurazioni che vanno via via aumentando fino alla apertura massima della fessura stessa (il cui valore dipende dall'energia di frattura).

Con riferimento alla Figura 164(a), per l'implementazione del comportamento a trazione del calcestruzzo nella fase post elastica, è necessario introdurre nel software il legame tensioni - deformazioni tramite il valore $\tilde{\varepsilon}_t^{ck}$.

Esso ha il seguente significato fisico:

$$\tilde{\varepsilon}_t^{ck} = \varepsilon_t - \varepsilon_{0t}^{el}$$

In cui

$$\varepsilon_{0t}^{el} = \sigma_t / E_0$$

E_0 rappresenta il modulo elastico iniziale del calcestruzzo.

Il programma converte automaticamente il valore di deformazione assegnato (ε_t^{ck}) in deformazione plastica equivalente (precedentemente descritta) tramite:

$$\varepsilon_t^{pl} = \varepsilon_t^{ck} - \frac{d_t}{(1 - d_t)} \frac{\sigma_t}{E_0}.$$

In cui il termine d_t rappresenta il degrado del materiale al variare della tensione di trazione presente e ha la funzione principale di regolare la pendenza del ramo di scarico.

Tuttavia, poichè il ramo di softening del legame a trazione, induce a livello di elemento finito una localizzazione delle deformazioni, anziché implementare nel programma agli elementi finiti un legame di tipo $\sigma - \varepsilon_t^{ck}$ come descritto sopra, si introduce un legame di tipo tensioni- apertura delle fessure $\sigma - u_t^{ck}$: il passaggio dalla deformazione all'apertura delle fessure avviene per il tramite della cosiddetta lunghezza caratteristica L_h . e ha proprio lo scopo di distribuire la non linearità sui vari elementi finiti ed eludere il problema della localizzazione (se si ha un'idea dell'ampiezza delle fessure stesse). In realtà i criteri di gestione della localizzazione delle deformazioni sono molteplici e in genere basati su approcci non locali: questo richiederebbe l'implementazione di un criterio ad hoc da parte dell'utente, criterio che sarebbe comunque affetto da molteplici incertezze.

La lunghezza caratteristica rappresenta un valore prossimo alla dimensione dell'elemento e dipende da molteplici fattori, tra cui la formulazione dell'elemento finito e il numero di punti di integrazione dell'elemento stesso.

Questa formulazione deriva dal "fictitious crack model" ideato da Hillerborg, secondo cui la zona dove avvengono nella realtà le microfessure (crack band) viene pensata condensata in una sola fessura di larghezza w .

Numerosi sono i modelli disponibili in letteratura per descrivere questo ramo di softening (Figura 166):

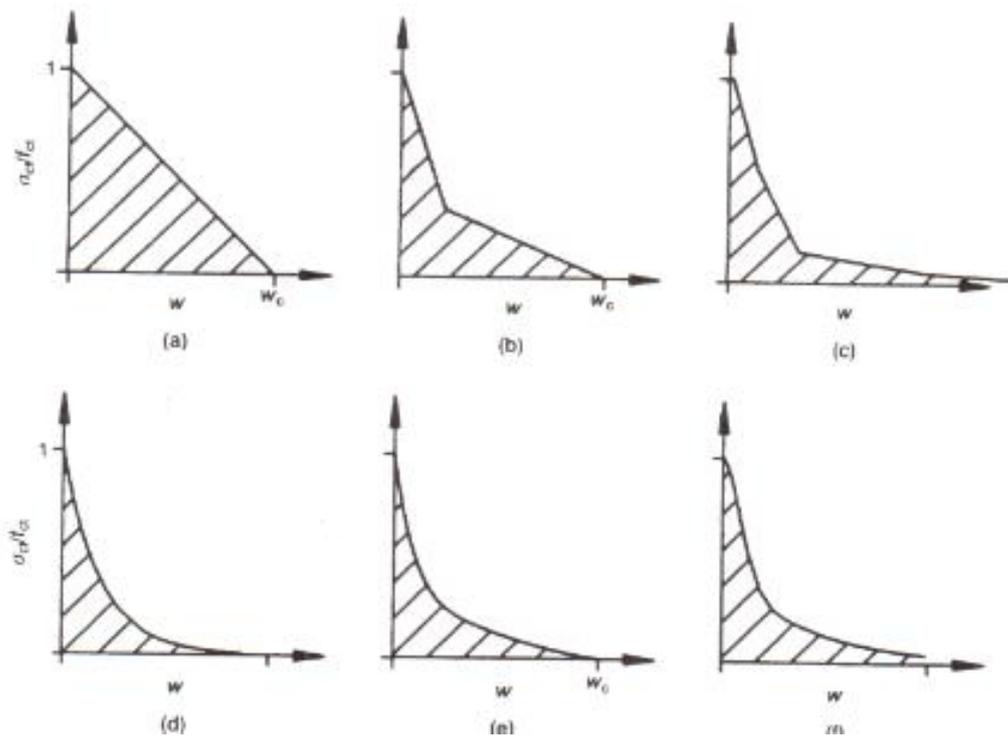


Figura 166: Modellazione del ramo di softening (a) Lineare; b) Petersson

Discorso del tutto analogo per il comportamento a compressione:

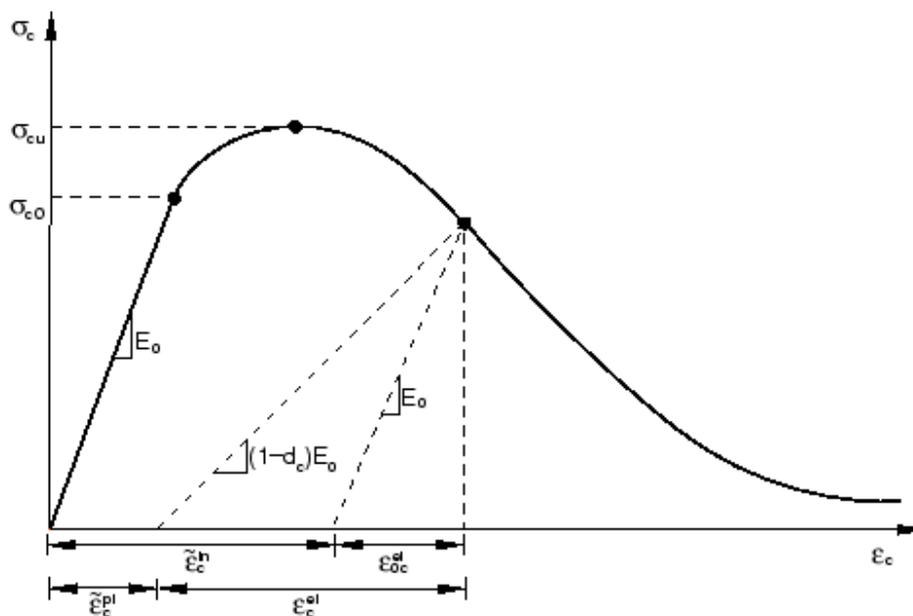


Figura 167 - Legame implementato a compressione del calcestruzzo

Con riferimento alla Figura 167, per descrivere la curva del calcestruzzo si definisce il valore $\tilde{\epsilon}_c^{in}$.

Esso viene calcolato come:

$$\tilde{\epsilon}_c^{in} = \epsilon_c - \epsilon_{0c}^{el}$$

In cui:

$$\varepsilon_{0c}^{el} = \sigma_c / E_0$$

Il programma dunque converte il valore di deformazione assegnato ($\tilde{\varepsilon}_c^{in}$) in deformazione plastica equivalente (precedentemente descritta) con la seguente espressione:

$$\tilde{\varepsilon}_c^{pl} = \tilde{\varepsilon}_c^{in} - \frac{d_c}{(1 - d_c)} \frac{\sigma_c}{E_0}$$

Il termine d_c ha lo stesso significato del termine d_t (visto precedentemente).

Dunque, le due variabili che descrivono la riduzione del modulo elastico sono rispettivamente per la trazione e per la compressione d_t e d_c . Le espressioni di queste due funzioni sono le seguenti:

$$d_t = d_t(\tilde{\varepsilon}_t^{pl}, \theta, f_i); \quad 0 \leq d_t \leq 1,$$

$$d_c = d_c(\tilde{\varepsilon}_c^{pl}, \theta, f_i); \quad 0 \leq d_c \leq 1.$$

Il significato dei parametri d_t e d_c può essere interpretato così come è riportato nella figura sottostante.

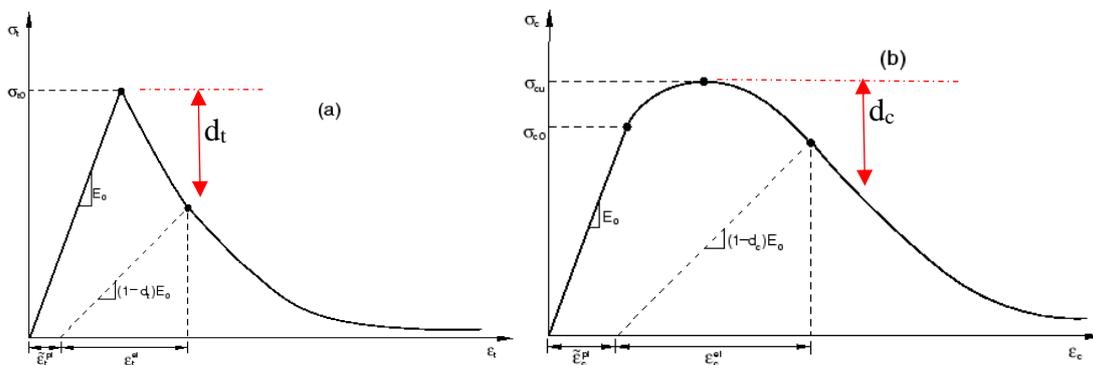


Figura 168 – Legame costitutivo del calcestruzzo a trazione; Legame costitutivo del calcestruzzo a compressione

In particolare, d_t e d_c sono forniti dalla seguente espressione :

$$d_t, d_c = \frac{\sigma_0 - \sigma_i}{\sigma_0}$$

In cui σ_i rappresenta la tensione in un punto qualsiasi del ramo di softening. Per questo motivo d_t e d_c sono sempre compresi tra 0 e 0.99, in quanto se fosse uno violerebbero l'equazione che consente il passaggio alle deformazioni plastiche.

Le tensioni (di trazione e di compressione) in funzione del modulo elastico iniziale (E_0) sono:

$$\begin{aligned}\sigma_t &= (1 - d_t)E_0(\varepsilon_t - \tilde{\varepsilon}_t^{pl}), \\ \sigma_c &= (1 - d_c)E_0(\varepsilon_c - \tilde{\varepsilon}_c^{pl}).\end{aligned}$$

Le tensioni "effettive" di coesione sono:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_t &= \frac{\sigma_t}{(1 - d_t)} = E_0(\varepsilon_t - \tilde{\varepsilon}_t^{pl}), \\ \bar{\sigma}_c &= \frac{\sigma_c}{(1 - d_c)} = E_0(\varepsilon_c - \tilde{\varepsilon}_c^{pl}).\end{aligned}$$

Queste due variabili determinano la dimensione delle zone di snervamento e/o di collasso del materiale.

Discorso più complesso va fatto per il comportamento del calcestruzzo sotto carichi ciclici. Il legame utilizzato assume che il degrado abbia la seguente espressione:

$$(1 - d) = (1 - s_t d_c)(1 - s_c d_t),$$

Le espressioni di s_t e s_c sono:

$$\begin{aligned}s_t &= 1 - w_t r^*(\sigma_{11}); \quad 0 \leq w_t \leq 1, \\ s_c &= 1 - w_c (1 - r^*(\sigma_{11})); \quad 0 \leq w_c \leq 1,\end{aligned}$$

Inoltre si pone:

$$r^*(\sigma_{11}) = H(\sigma_{11}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma_{11} > 0 \\ 0 & \text{if } \sigma_{11} < 0 \end{cases}$$

Un esempio di come i parametri w_t e w_c influenzino il comportamento ciclico del materiale viene illustrato nella figura sottostante.

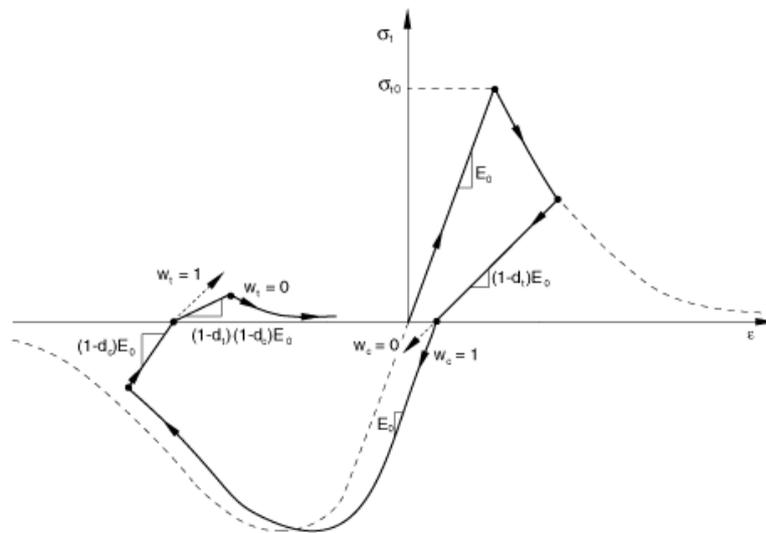


Figura 169 – Esempio di come i parametri w_c e w_t influenzano il comportamento ciclico del materiale post-elastico

5.3 Risultati delle analisi numeriche

Di seguito vengono riportati i primi risultati ottenuti sui alcuni modelli realizzati.

In particolare, vengono riportate le mappe tensionali per un modello con solo calcestruzzo (elastico lineare e non lineare, rispettivamente Figura 170 e Figura 171 e le deformazioni plastiche sviluppate alla base della colonna per effetto della trazione Figura 172:

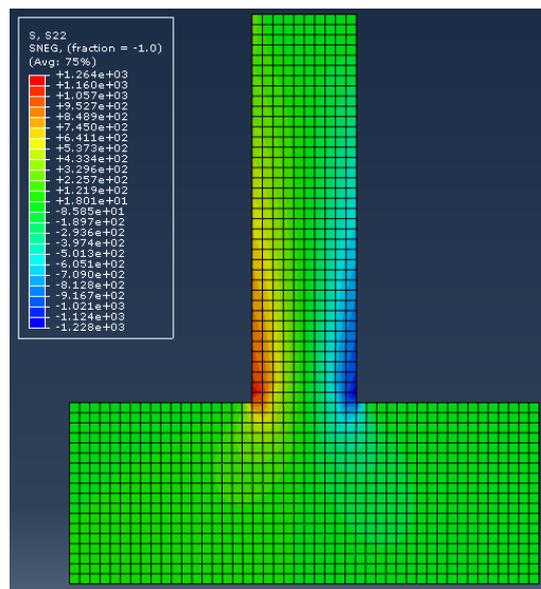


Figura 170: Calcestruzzo elastico

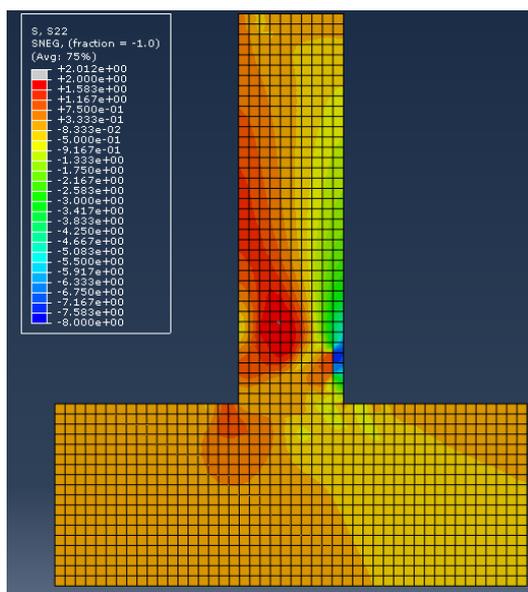


Figura 171: Calcestruzzo non lineare

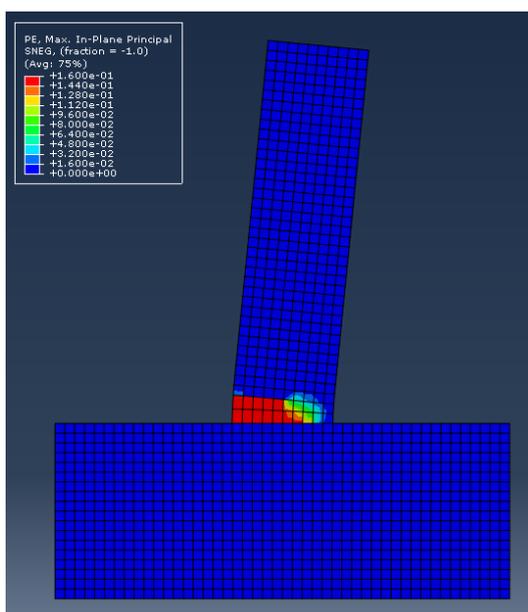


Figura 172: Deformazioni plastiche degli elementi soggetti a trazione: solo calcestruzzo

Si riportano inoltre i legami costitutivi implementati in Abaqus in una delle modellazioni effettuate:

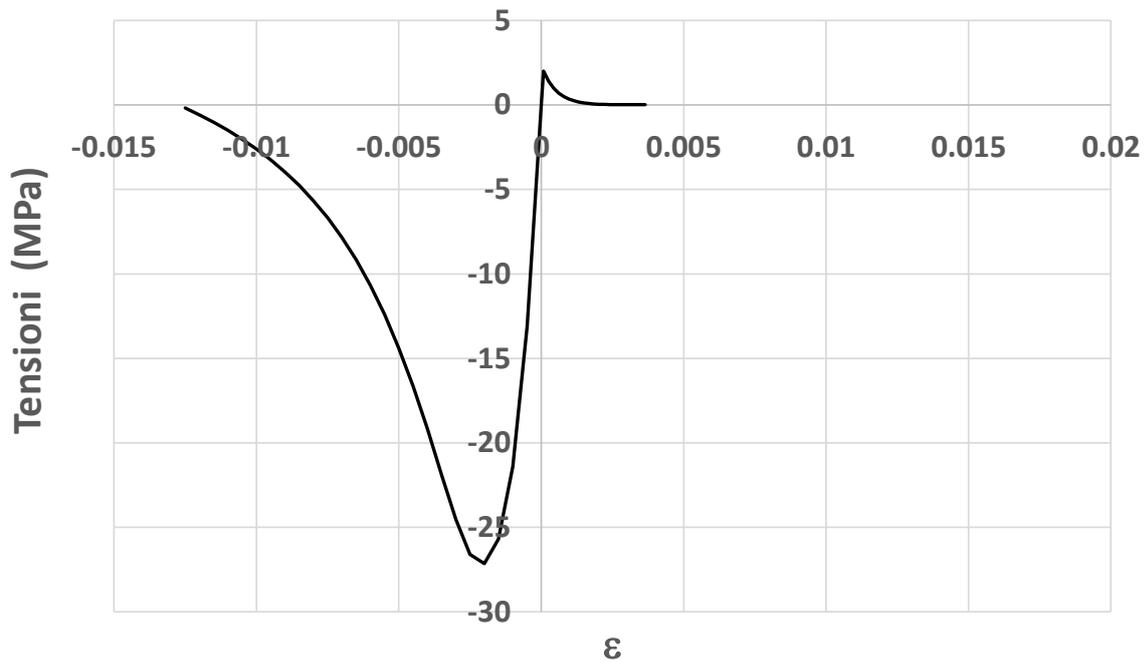


Figura 173: Legame a trazione e a compressione del calcestruzzo

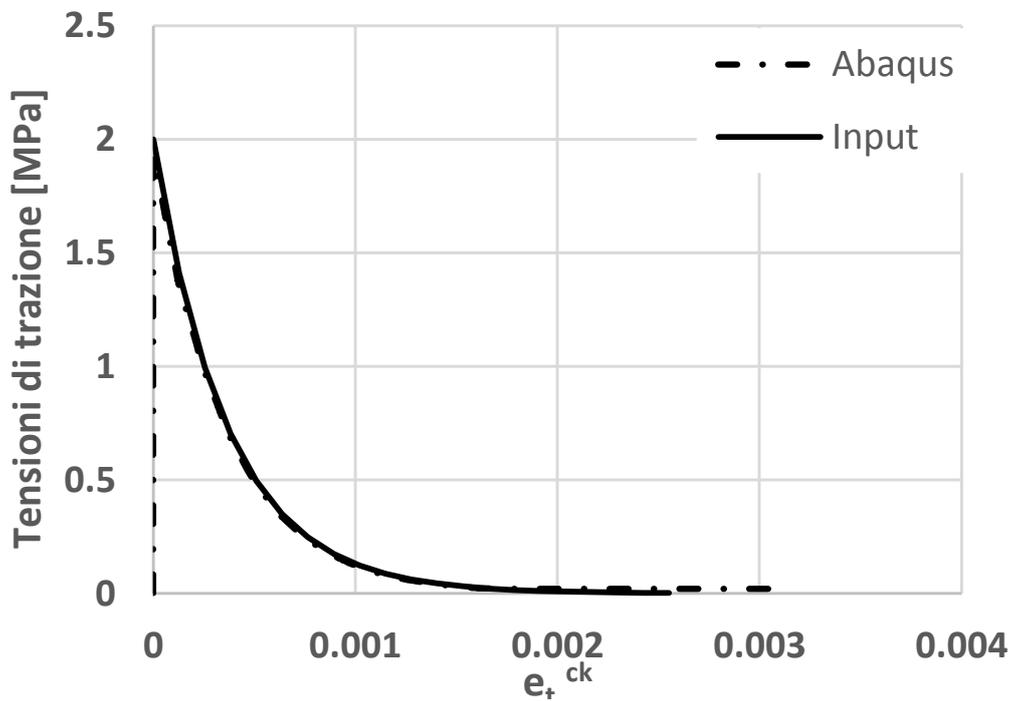


Figura 174. Legame a trazione del calcestruzzo: Legame implementato di tipo esponenziale e risposta dell'elemento finito

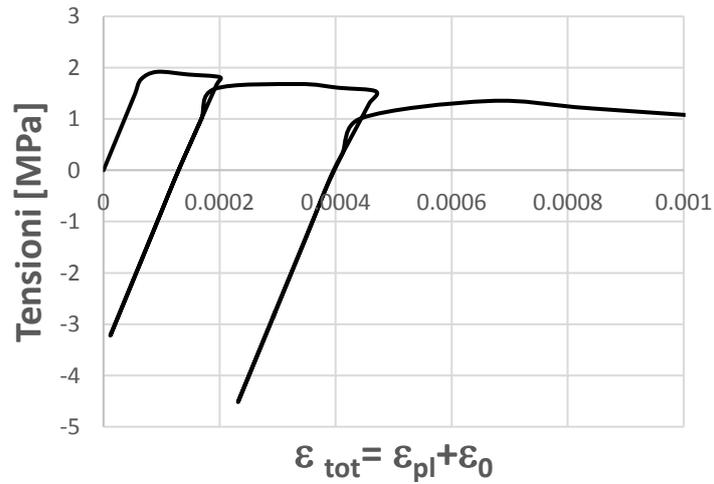


Figura 175: Comportamento ciclico del legame a trazione del calcestruzzo

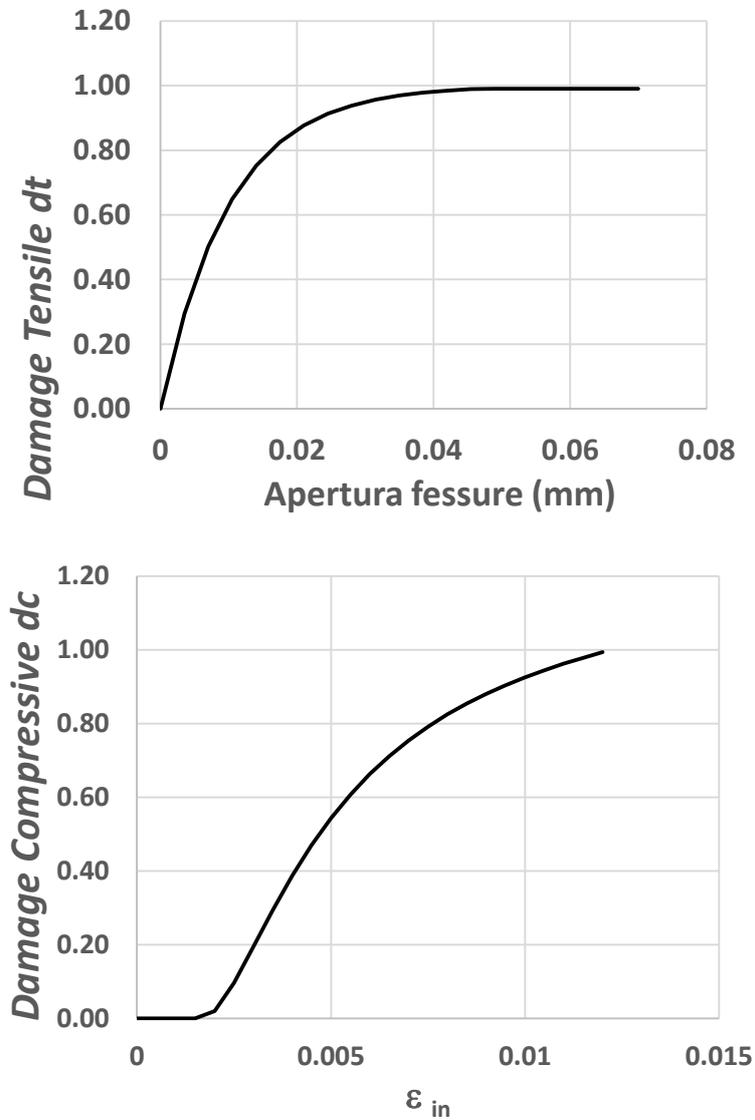
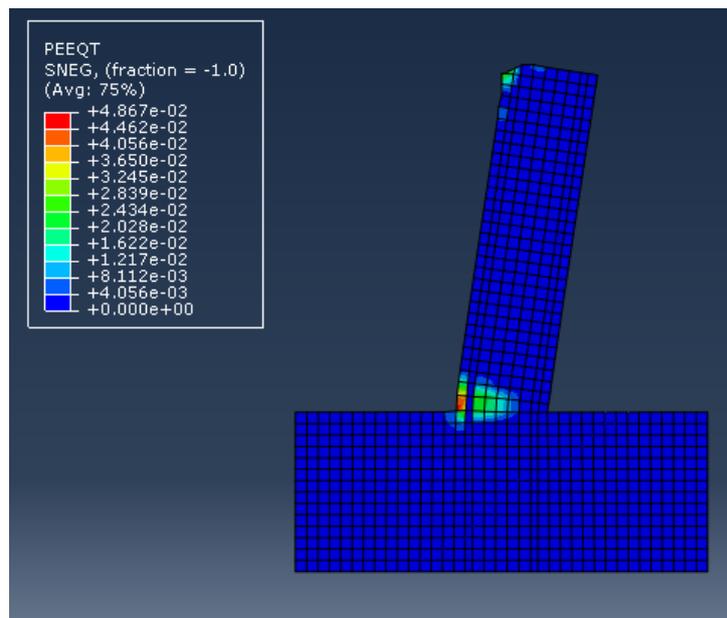


Figura 176: Andamento del parametro di danno a trazione (dt) e a compressione (dc)

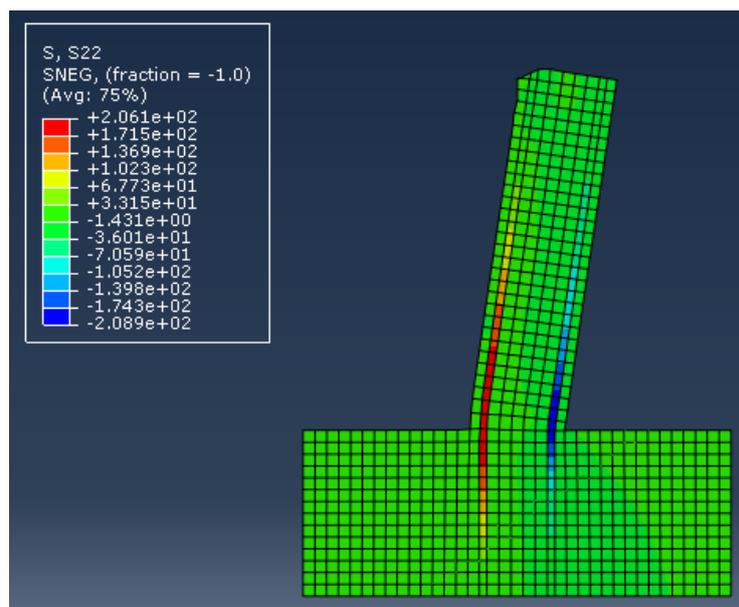
In particolare, si evince come il legame di tensioni-apertura delle fessure attribuito al materiale sia perfettamente restituito dall'elemento finito, indice del fatto che i materiali sono implementati in maniera adeguata.

Tra gli output di Abaqus, PE rappresenta le deformazioni ϵ_t^{ck} , PEEQT le deformazioni plastiche ϵ_t^{pl} a trazione, PEEQ le deformazioni plastiche a compressione ϵ_c^{pl} , mentre Damaget e Damgec rappresentando d_t e d_c .

Per il modello "calcestruzzo più barre" vengono infine riportati i risultati in Figura 177 :



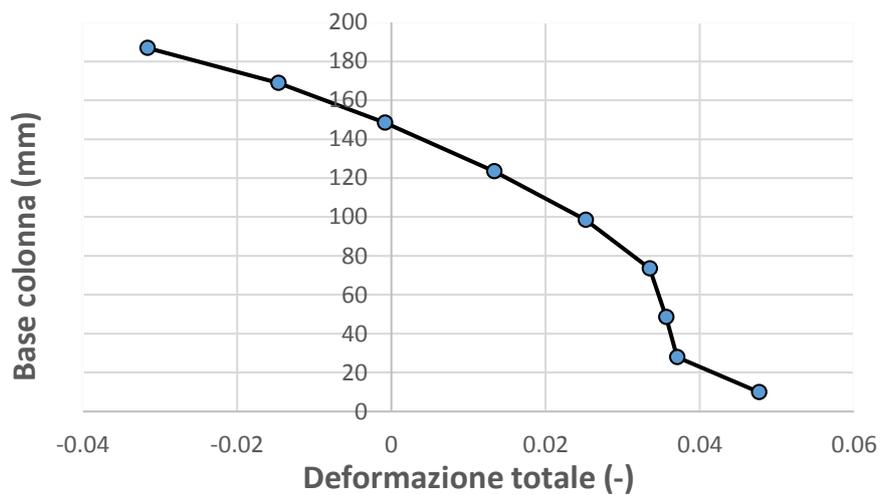
(a)



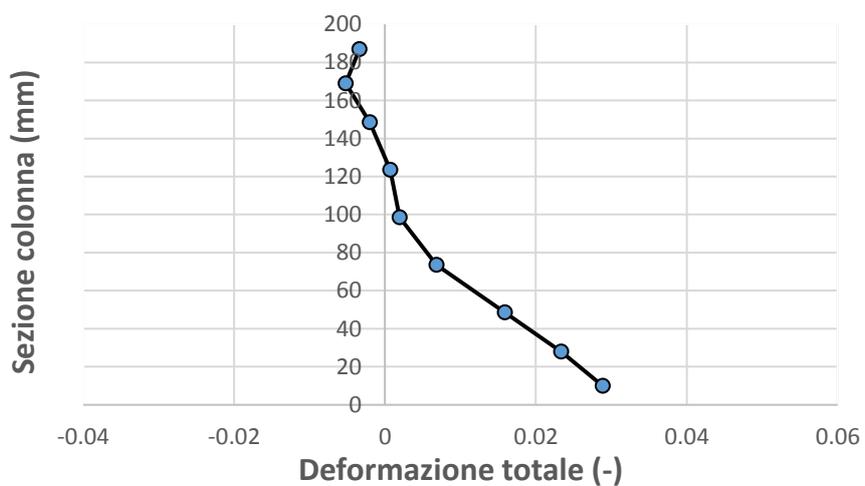
(b)

Figura 177: Calcestruzzo e barre: deformazioni plastiche a trazione (a); tensioni verticali (b)

Di seguito, i risultati circa il profilo di deformazioni alla base della colonna, ad un sezione più in alto della base e l'andamento delle deformazioni di compressione e di trazione lungo l'altezza della colonna.



(a)



(b)

Figura 178: Profilo di deformazione alla base della colonna (a) e ad una sezione più alta (b)

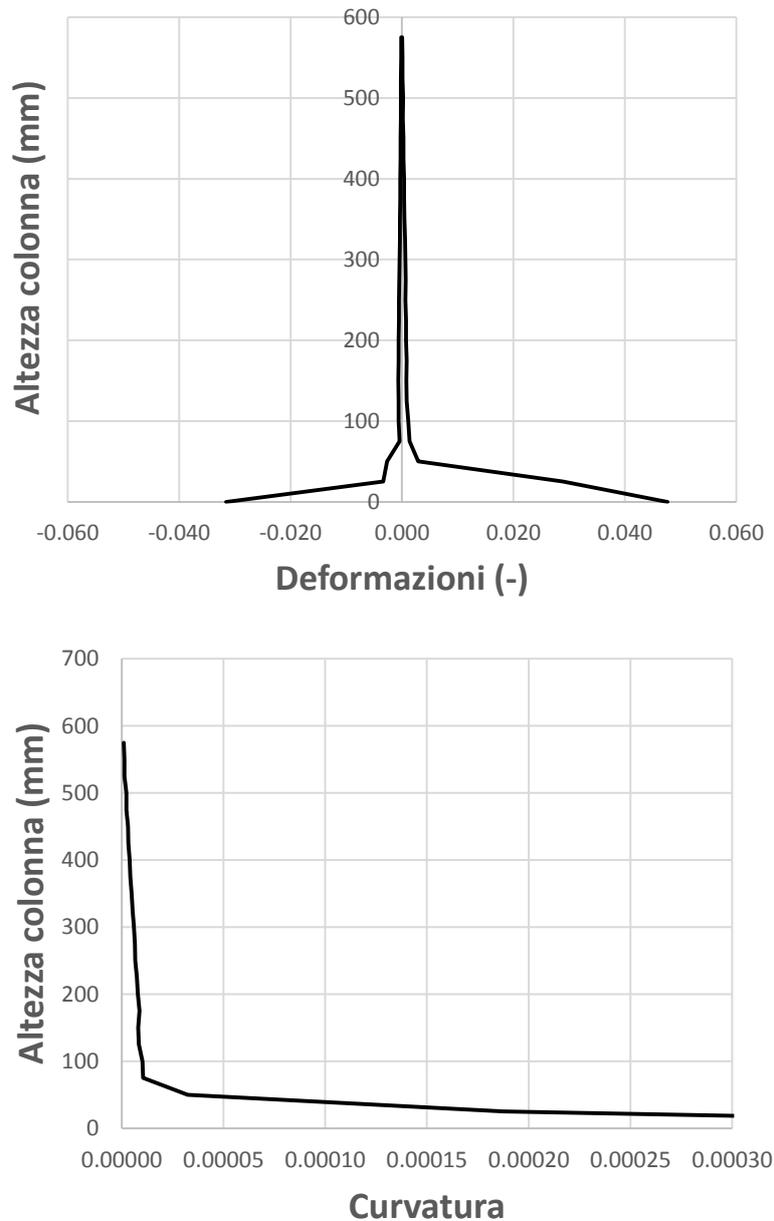


Figura 179: Profilo di deformazioni e di curvatura (media) lungo l'altezza della colonna

Le analisi successive vogliono concludere la trattazione, spingendo di più l'analisi verso le condizioni di plasticizzazione, riducendo i disturbi dovuti all'applicazione del carico in testa e descrivendo più nel dettaglio la rappresentazione di allungamenti, accorciamenti, deformazioni, curvatura e rotazione puntuali: in particolare dal lato acciaio si vuole pesare lo "yield penetration" ossia il fatto che la barra, volendosi ancorare nel plinto estende la sua zona di plasticizzazione oltre il limite teorico della base della colonna, e dal lato calcestruzzo l'accorciamento che contribuisce in maniera altrettanto significativa alla lunghezza di cerniera plastica.

CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

Il lavoro svolto durante la tesi di dottorato ha riguardato la tematica della modellazione delle non linearità di materiale per le analisi non lineari sia statiche che dinamiche di strutture intelaiate in calcestruzzo armato.

Per poter affrontare le problematiche è stato necessario un certo approfondimento teorico sia delle evidenze sperimentali, che dei modelli, che delle tecniche di modellazione impiegate.

Un ruolo particolarmente importante sulla risposta strutturale, è rivestito dalla perdita di aderenza tra le barre e il calcestruzzo, come mostrano tra l'altro numerose sperimentazioni effettuate nel corso degli anni; il fenomeno influenza più o meno negativamente la risposta strutturale, in particolare confrontando i risultati di analisi numeriche in ipotesi di perfetta aderenza piuttosto che di scorrimenti si è visto che l'adozione della prima ipotesi comporta una sovrastima della rigidità iniziale, dell'energia dissipata per isteresi dall'elemento e una sottostima degli spostamenti.

Il fenomeno della perdita di aderenza è ancora più rilevante se ci si riferisce a barre lisce, le quali offrono una resistenza ancora minore allo scorrimento rispetto alle barre ad aderenza migliorata.

Oltretutto esse si trovano in edifici costruiti in genere antecedentemente alla prima normativa antisismica ('74) e progettati quindi per soli carichi verticali, in assenza di staffe nel nodo trave colonna e con materiali scadenti.

La letteratura fornisce poche informazioni circa la modellazione delle barre lisce, che di fatto presentano un comportamento non assimilabile a quello delle barre nervate, inoltre le tecniche di modellazione esistenti nell'ambito degli elementi finiti per la simulazione della perdita di aderenza risultano o poco precise o troppo dettagliate e quindi computazionalmente onerose. Tale onere spesso non consente proprio di giungere alla modellazione dell'intera struttura, presentando un aspetto così molto limitato della tecnica stessa.

Il modello con scorrimenti (legame modificato dell'acciaio) descritto nella tesi è una modifica e approfondimento di un modello già esistente, che risulta ora completo, presentando anche una formulazione ciclica, che si è cercato di rendere il più semplice possibile ai fini di un facile impiego.

Il modello modificato (campo di spostamenti imposto lungo la barra di tipo esponenziale) infatti, riduce al minimo (se non addirittura rimuove in molti casi) le incongruenze presenti nel modello iniziale (campo di spostamenti di tipo lineare), che basandosi su un campo di scorrimenti imposto lineare ledeva l'equilibrio e la congruenza lungo l'ascissa della barra.

Inoltre, è stata introdotta la formulazione ciclica, che era stata precedentemente solo ipotizzata (di tipo Takeda) in base a considerazioni basate su qualche evidenza sperimentale presente in letteratura

(senza particolare riferimento alle barre lisce). A differenza del modello monotono che è di derivazione analitica, il comportamento ciclico è stato dedotto tramite regressione su risultati di analisi numeriche che riguardano una barra d'acciaio vincolata a una molla (uncino) e soggetta a perdita di aderenza tramite N links.

Il modello esponenziale conserva di fatto la semplicità di impiego del precedente, ma lo migliora. Esso è particolarmente adatto all'utilizzo negli elementi a fibre, in cui a ogni barra è associata una specifica fibra d'acciaio con un legame tensioni- deformazioni opportuno: in particolare la modellazione a fibre necessita del passaggio dalle tensioni-scorrimenti a tensioni deformazioni per mezzo di una lunghezza, che è ragionevole assumere proprio come lunghezza di cerniera plastica per i modelli a plasticità concentrata e la lunghezza del primo tratto di integrazione per i modelli a plasticità diffusa.

Le deformazioni che ne derivano sono delle pseudo deformazioni, non solo perché tengono già in conto dello scorrimento, ma perché verranno moltiplicate nuovamente dal programma per la lunghezza del tratto di integrazione ottenendo nuovamente gli scorrimenti. Di fatto, la lunghezza di cerniera plastica rappresenta in questo caso solo un tramite per implementare il legame nel software. Sono state poi effettuate delle analisi numeriche tramite elementi finiti a fibre a plasticità concentrata che hanno consentito di ottenere una validazione abbastanza efficace del modello proposto: la risposta strutturale dei sotto assemblaggi studiati conferma quanto già noto dalla letteratura: l'ipotesi di perfetta aderenza racconta un mondo completamente diverso da quello avviene nella realtà, risultando dunque inadeguata, sovrastimando di circa il 30% l'energia dissipata dall'elemento strutturale nei cicli nonché la rigidità degli stessi.

Per completare la trattazione si è passati alla valutazione dell'influenza dell'accorciamento del calcestruzzo sulla rotazione complessiva dell'elemento: se infatti dal lato acciaio, questo non è influenzato dalla lunghezza di cerniera plastica essendo quest'ultima solo un mezzo per implementare il legame (si dividono gli scorrimenti per L_p al fine di ottenere le deformazioni, che tuttavia il programma provvederà a rimoltiplicare per la stessa L_p), non si sa dal lato calcestruzzo come influenzi la risposta.

Inoltre tale parametro è solo un accordo tra risultati sperimentali e trattazione teorica, tuttavia le formulazioni proposte in letteratura risultano piuttosto diverse l'una dall'altra conducendo a una grandissima dispersione dei risultati.

Ai fini del modello proposto se non ci fosse l'accorciamento del calcestruzzo tale tratto plastico sarebbe descritto completamente dagli scorrimenti, ma così non è.

E' in corso una campagna di analisi numeriche parametrica, effettuate su un modello 2D plinto colonna che tiene conto sia del comportamento non lineare a trazione e a compressione del calcestruzzo sia degli scorrimenti delle barre.

Tale modellazione ha lo scopo di trovare una relazione per la lunghezza di cerniera plastica univoca e adottabile per il modello proposto, che tenga conto dell'influenza dell'accorciamento del calcestruzzo.

Gli sviluppi futuri possono essere molteplici: dato che il modello analitico è ora a disposizione si può pensare di poter effettuare analisi strutturali cicliche su strutture intelaiate, per approfondire la risposta strutturale ed eventualmente effettuate analisi di scenario di rischio.

Attualmente è in corso l'analisi parametrica per la ricerca del tratto di integrazione, dunque l'ultimo problema di modellazione non risolto, ma per il quale è necessario sia il modello semplificato di scorrimenti sia la definizione della lunghezza di cerniera plastica, rimarrebbe la modellazione degli scorrimenti all'interno del pannello nodale trave colonna, ossia tra le barre passanti e il calcestruzzo circostante.

In realtà questo problema è stato inquadrato durante il dottorato, impostando una possibile via di descrizione analitico- numerica del fenomeno nel programma agli elementi finiti che tuttavia deve ancora essere confermata ed eventualmente implementata e verificata.

Tale lavoro è stato portato avanti, in particolare, con la collaborazione della Professoressa Addessi e del suo dottorando Paolo Di Re, esperti nella modellazione agli elementi finiti, che hanno contribuito all'individuazione delle possibili insidie che il modello analitico potrebbe nascondere a livello di elementi finiti, nonché alla promozione di nuove strade operative che potrebbero consentire di rendere il problema computazionalmente risolvibile.

Modellazione degli scorrimenti all'interno del pannello nodale trave colonna

L'effetto della perdita di aderenza influenza negativamente il comportamento strutturale globale, ma un effetto particolarmente delicato e potenzialmente nocivo, è legato agli scorrimenti delle barre passanti all'interno del nodo trave colonna.

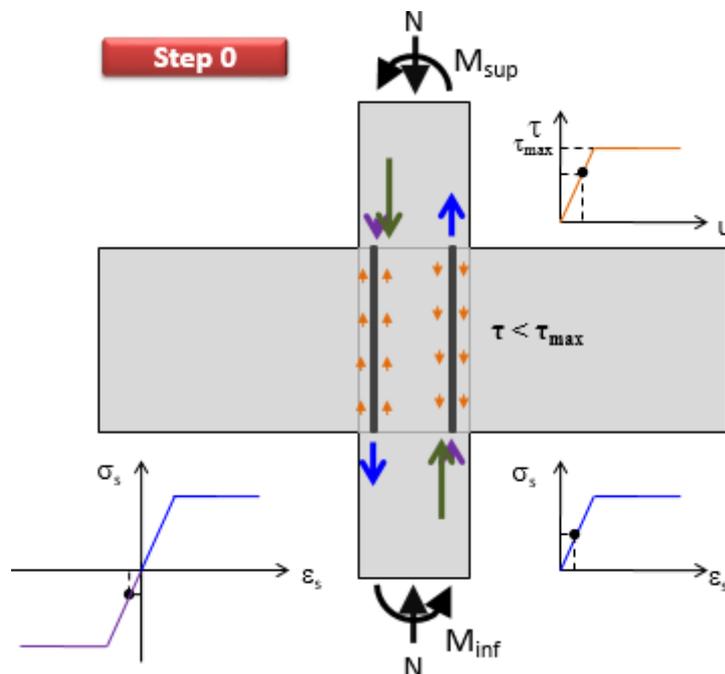
A causa di questi ultimi, infatti, il rischio è di trovarsi di fronte a una situazione inaspettata e potenzialmente pericolosa: molti sono stati gli studi condotti a riguardo, in particolare il primo ad evidenziare la problematica è stato Hakuto [4], seguito da molti altri studiosi tra cui Calvi, Pampanin e Magenes[48], Fabbrocino et al.[9] etc.

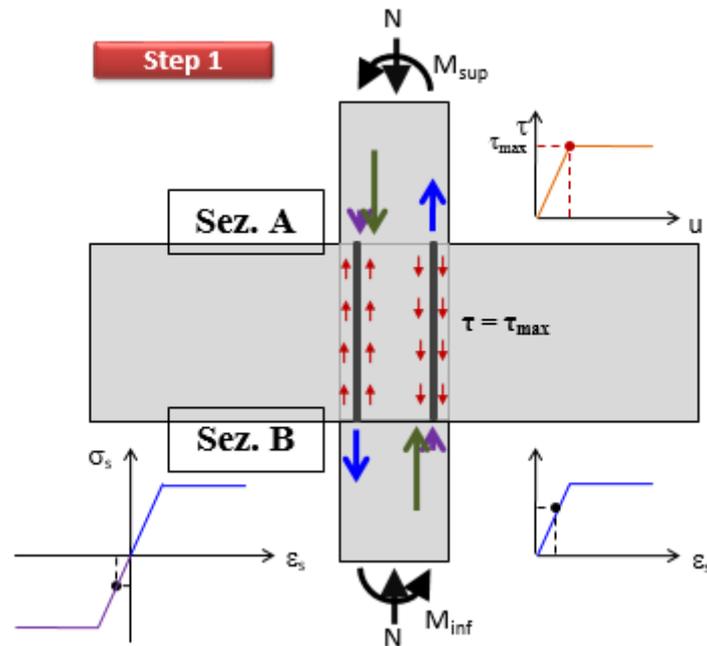
Anche in questo caso le modellazioni disponibili sono molteplici, ma nessuna delle quali realmente efficiente e/o completa.

Il problema principale è legato al fatto che gli elementi finiti "si parlano" solo tramite i nodi, per cui la modellazione di ciò che avviene all'interno del pannello nodale, oltretutto in presenza degli scorrimenti, è piuttosto insidiosa.

L'idea è quella di sfruttare il modello semplificato dell'aderenza proposto nel lavoro di tesi per descrivere almeno una procedura più semplice di quanto non si faccia di solito, che faccia da base per il problema, in modo da ottenere uno strumento efficiente e poco oneroso computazionalmente. Uno degli effetti peggiori degli scorrimenti delle barre longitudinali nel nodo, soprattutto considerando le geometrie tipiche degli edifici dell'epoca in cui si avevano pilasti più piccoli rispetto alle travi, è che l'armatura compressa può non essere più tale (alleggerendo il momento resistente) o può addirittura andare in trazione, comportando così una drastica riduzione della capacità dell'elemento.

Il meccanismo può essere descritto come segue:

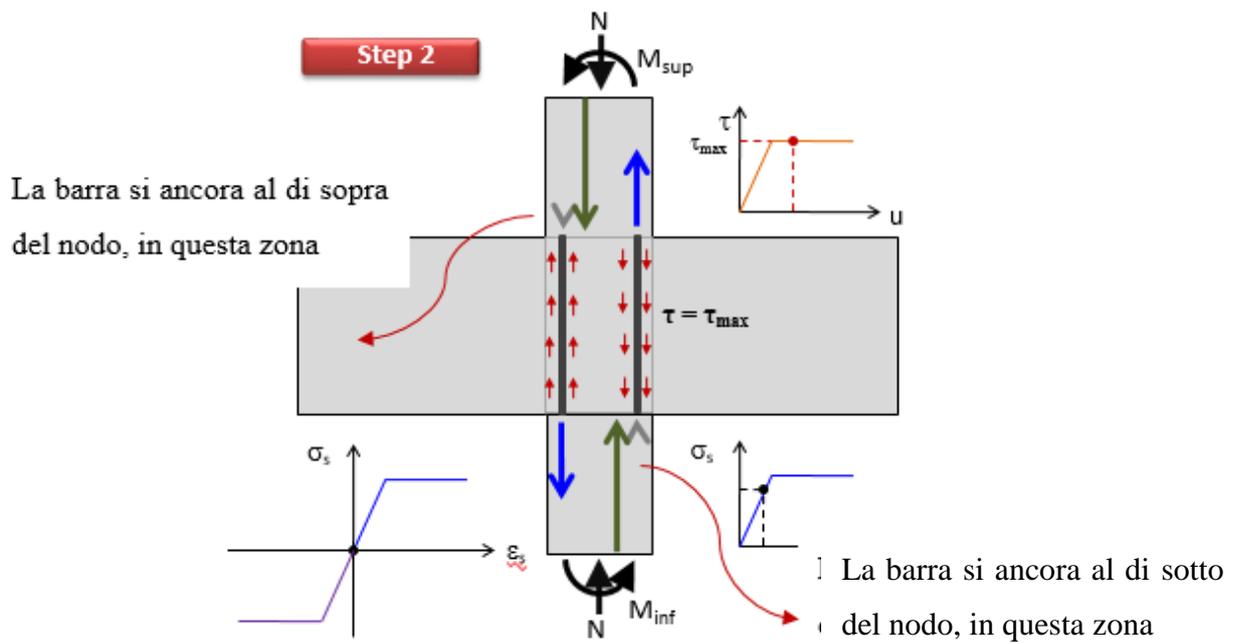




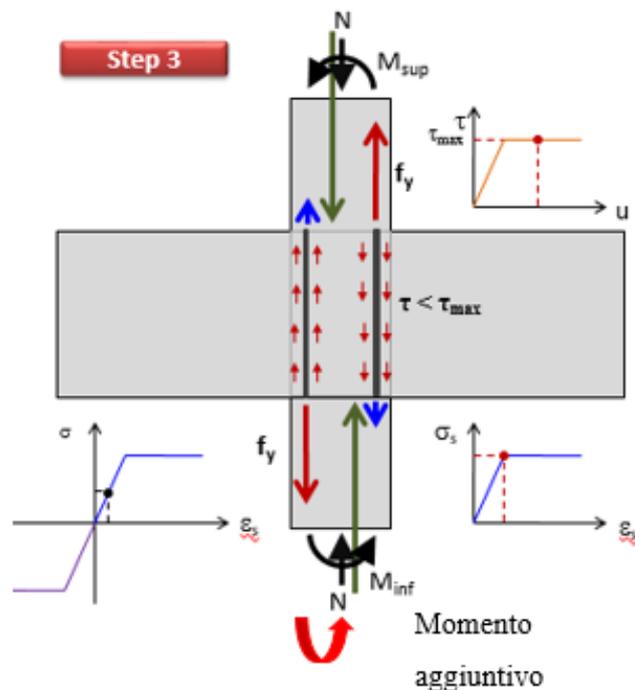
Si immagini una barra soggetta a un momento in testa e a uno sforzo normale: ovviamente una barra risulterà tesa e l'altra risulterà compressa, anzi rispetto alle sezioni sopra e sotto il pannello nodale, rispettivamente A e B una stessa barra risulterà tesa da un estremo e compressa dall'altro.

Inizialmente (step 0), la lunghezza disponibile lungo la barra all'interno del pannello nodale è sufficiente per ancorare la stessa all'interno del pannello e far sviluppare le tensioni di aderenza ($\tau < \tau_{max}$).

Tuttavia nello step succesivo (step 1), al crescere del carico, le tensioni di aderenza aumentano fino al valore massimo.



In seguito al raggiungimento della tensione massima di aderenza, poiché la barra non sa più dove ancorarsi all'interno del pannello nodale, inizia a farlo al di sotto (o al di sopra, dipende dalla sezione e dal lato che si sta guardando) della sezione estrema del pannello nodale stesso (step 2): a questo punto per mantenere l'equilibrio la barra inizia a perdere il suo contributo a compressione (mentre cresce quello a trazione alla faccia opposta, dallo stesso lato), finché addirittura rischia di andare in trazione e insieme alla sua gemella tesa dalla parte opposta del nodo (step 3).



La perdita della barra in compressione, anzi addirittura l'inversione del comportamento della stessa possono avere gravi ripercussioni sulla capacità flessionale dell'elemento, in particolare si può addirittura dire che il fenomeno induce un momento che "aiuta" il momento applicato, abbassando ulteriormente le risorse dell'elemento stesso.

Il meccanismo del nodo in presenza di barre lisce si può di fatto configurare come un meccanismo di rotazione rigida, in cui a ruotare sono le sezioni sopra e sotto lo stesso (oltre che ai lati), che da un lato si inquadrano con l'apertura della fessura, la cui ampiezza è proprio uguale allo scorrimento totale della barra, dall'altro è imputato, al solito, all'accorciamento del calcestruzzo.

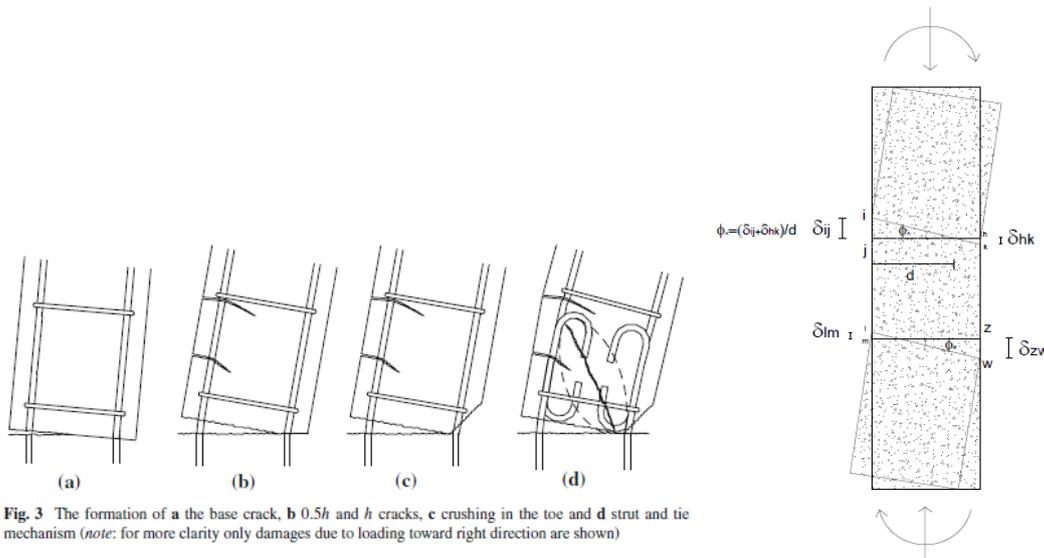


Fig. 3 The formation of **a** the base crack, **b** 0.5h and h cracks, **c** crushing in the toe and **d** strut and tie mechanism (note: for more clarity only damages due to loading toward right direction are shown)

Figura 180: Meccanismo di rotazione rigida del nodo

Da un punto di vista di impostazione analitica del problema (sempre nell'ottica dell'elemento a fibre), si è pensato di sfruttare il modello analitico semplificato degli scorrimenti per ottenere una procedura analitica relativamente semplice che faccia da base per descrivere il comportamento delle barre passanti.

La difficoltà principale sta nel fatto che le barre al sopra e al sotto della sezione nodale (A e B precedenti) "gemelle" ossia con lo stesso stato tensionale non si "parlano" a livello di elementi finiti. Si immagini di dividere l'elemento strutturale (ad esempio la colonna) in tre zone: le zone di elemento indicate con E e la zona del pannello nodale, indicata con P (Figura 181). In prossimità della fessura, ad esempio nella sezione A-A, la barra 1 ha subito uno scorrimento totale $u_{1L,TOT}^A$, dato dalla somma, come si è visto in precedenza, di due contributi. Il primo contributo, che può essere indicato con $u_{1L,E}^A$ è legato allo scorrimento del blocco E rispetto alla barra 1, mentre il contributo $u_{1L,P}^A$ è dato dallo scorrimento della barra rispetto al pannello nodale.

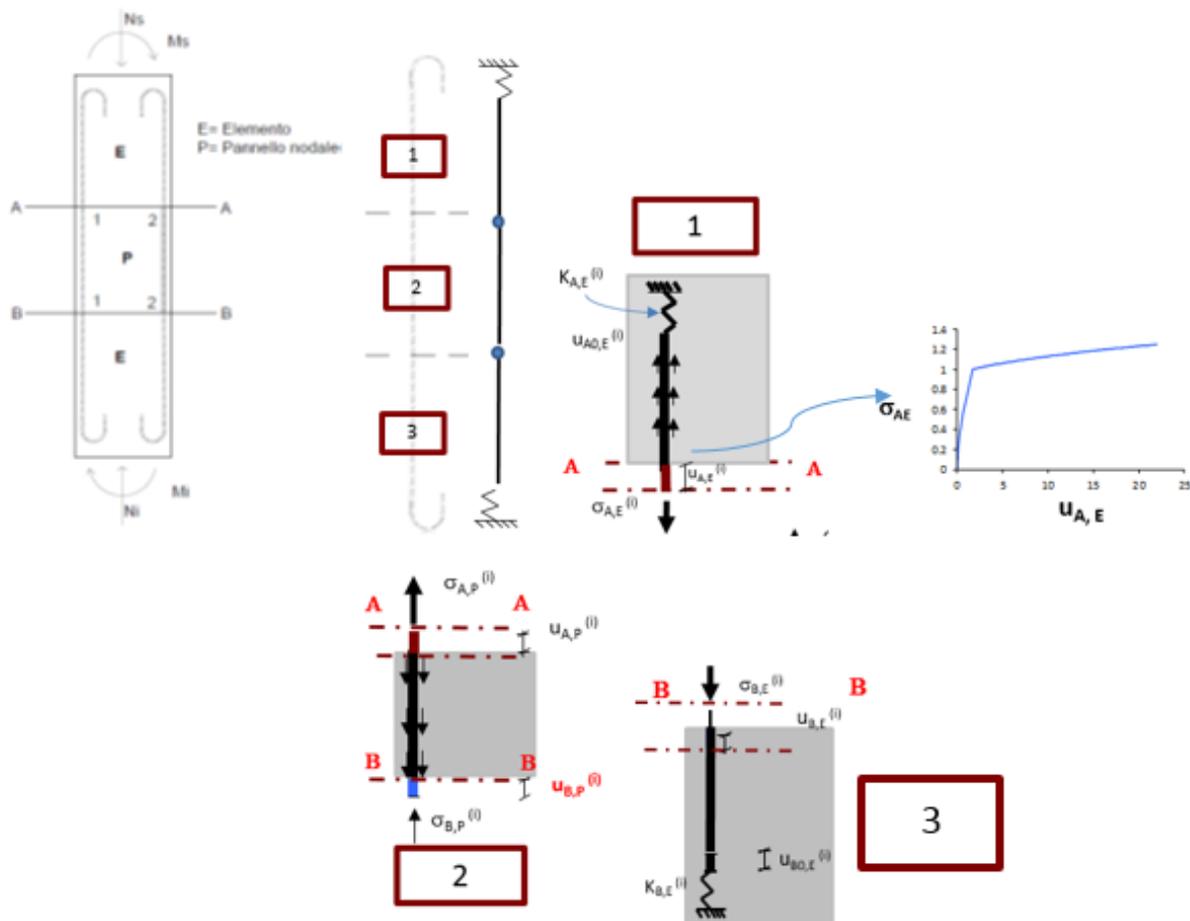


Figura 181- Schematizzazione ideale della barra passante in termini di scorrimenti

Lo stesso vale per la sezione B. In sostanza, l'idea di base è quella di volersi ricondurre al modello "noto" ossia al modello con la barra rettilinea e l'uncino di estremità: considerando una delle due barre presenti nella schematizzazione proposta, quindi ad esempio quella di sinistra, l'idea è quella di scomporla in tre contributi: due di cui si conosce la trattazione perché rappresentano esattamente il problema della barra uncinata di cui si è parlato fino ad ora, il problema della trattazione rimane come trattare la barra centrale.

A questo proposito una via, almeno per stabilire il punto di partenza, riguarderebbe l'inserimento di molle fittizie alle estremità della barra centrale stessa, la cui rigidità potrebbe essere ad esempio data dal rapporto tra tensione e scorrimento nella barra dell'estremità opposta alla faccia del nodo che si sta considerando (in cui per equilibrio le tensioni devono essere uguali) allo step precedente (come punto iniziale dell'analisi).

Questo approccio potrebbe ricondurre al problema noto della barra ancorata.

In generale i dati noti del problema sono:

$$u_{Ltot}^A = u_{L,E}^A + u_{L,P}^A$$

$$u_{Ltot}^B = u_{L,E}^B + u_{L,P}^B$$

e che le tensioni tra un'estremità e l'altra della barra sono uguali per l'equilibrio: $\sigma_{A,E}^{(i)} = \sigma_{A,P}^{(i)} = \sigma_A^{(i)}$

Le incognite invece sono date da: σ_A ; σ_B e $u_{L,p}^A$, $u_{L,E}^A$, $u_{L,p}^B$, $u_{L,E}^B$, per cui, essendo il numero di incognite maggiore del numero di equazioni la via risolutiva è l'impostazione di un sistema ad hoc.

Il problema quindi risulta inquadrato, in prima battuta, e sono stati effettuati anche dei primi tentativi analitici di risoluzione, i quali tuttavia potrebbero non essere efficienti e quindi condurre all'idea di costruire un elemento finito ad hoc per la modellazione del pannello nodale.

Bibliografia

- [1] G.M. Verderame, I.Iervolino, P.Ricci (2009), Report on the damages on buildings following the seismic event of 6th of April 2009, V1.20
- [2] Filippou, F.C., Popov, E.P., & Bertero, V.V. (1983). Effects of Bond Deterioration on Hysteretic Behaviour of Reinforced Concrete Joints. Earthquake Engineering Research Center . Rep. UCB/EERC-83/19, Univ. of Calif., Berkeley, 184 pp.
- [3] Eligehausen, R., Popov, E.P., & Bertero, V.V. (1982). Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations. In Proceedings of the 7th European Conference on Earthquake Engineering. 69–80.
- [4] Hakuto, S., Park, R., & Tanaka, H. (2000). Seismic load tests on interior and exterior beam-column joints with substandard reinforcing details. ACI Structural Journal, 97(1), 11–25.
- [5] Calvi, G. M., G. Magenes, and S. Pampanin. "Studio sperimentale sulla risposta sismica a di edifici a telaio in cemento armato progettati per soli carichi da gravita'." (2001).
- [6] Gigliotti, R. (2002). Strutture in c.a. progettate per soli carichi verticali: sperimentazioni su nodi trave-pilastro. PhD Thesis, University of Salerno and University of Basilicata, Italy.
- [7] Fernandes, C., Varum, H., & Costa, A. (2013). Importance of the bond-slip mechanism in the numerical simulation of the cyclic response of RC elements with plain reinforcing bars. Engineering Structures, 56, 396–406.
- [8] Melo, J., Varum, H., & Rossetto, T. (2015). Cyclic behaviour of interior beam–column joints reinforced with plain bars. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 44(9): 1351-1371
- [9] Fabbrocino, Giovanni, et al. "Structural models of critical regions in old-type rc frames with smooth rebars." Engineering Structures 26.14 (2004): 2137-2148.
- [10] Rehm, Gallus, and Rolf Eligehausen. "Bond of ribbed bars under high cycle repeated loads." (1979).
- [11] Morita, S., & Kaku, T. (1973, September). Local bond stress-slip relationship under repeated loading. In Proceedings (pp. 221-226).
- [12] Tassios, Theodosios P. "Properties of bond between concrete and steel under load cycles idealizing seismic actions." Bulletin d'information du CEB,(131)(1979): 65-122.

- [13] Ciampi, Vincenzo, et al. "Analytical model for concrete anchorages of reinforcing bars under generalized excitations." (1982).
- [14] Hawkins, Neil M., I. J. Lin, and F. L. Jeang. "Local bond strength of concrete for cyclic reversed loadings." *Bond in concrete* (1982): 151-161.
- [15] Balazs, G. L. "Bond softening under reversed load cycles." *Studi e Ricerche, Periodical of a Post-Graduate Course for Design of Reinforced Concrete Structures, Politecnico di Milano, Italy* 100 (1989): 503-524.
- [16] Abrams D. Test of bond between concrete and steel bulletin No. 71. *Univ Illinois Bull* 1 1913;XI(6).
- [17] Stoker MF, Sozen MA. Investigation of prestressed reinforced concrete for highway bridges part V: bond characteristics of prestressing strand. Urbana-Champaign:University of Illinois; 1970 [Bulletin 503].
- [18] Melo, J., Rossetto, T., & Varum, H. (2015). Experimental study of bond-slip in RC structural elements with plain bars. *Materials and Structures*, 48(8), 2367-2381
- [19] Verderame, G.M., Ricci, P., De Carlo, G., & Manfredi, G. (2009). Cyclic bond behaviour of plain bars. Part I: Experimental investigation. *Construction and Building Materials*, 23(12), 3499-3511.
- [20] Verderame, G.M., De Carlo, G., Ricci, P., & Fabbrocino, G. (2009). Cyclic bond behaviour of plain bars. Part II: Analytical investigation. *Construction and building Materials*, 23(12), 3512-3522.
- [21] Braga, F., Gigliotti, R., Laterza, M., D'Amato, M. and Kunnath, S. (2012), "Modified steel bar model incorporating bond-slip for seismic assessment of concrete structures. *Journal of Structural Engineering* 138(11), 1342-1350.
- [22] Braga, F., Caprili, S., Gigliotti, R., & Salvatore, W. (2015). Hardening slip model for reinforcing steel bars. *Earthquake and Structures*, 9(3), 503-539.
- [23] Rubiano-Benavides N.R. (1998). Predictions of the inelastic seismic response of concrete structures including shear deformations and anchorage slip, PhD Thesis, Department of Civil Engineering, University of Texas, Austin, USA.
- [24] Lowes, L., & Altoontash, A. (2003), Modeling reinforced-concrete beam-column joint

ts subjected to cyclic loading. *Journal of Structural Engineering*, 129(12), 1686-1697.

[25] Mitra, N., & Lowes L. (2007). Evaluation, Calibration, and Verification of a Reinforced Concrete Beam–Column Joint Model. *Journal of Structural Engineering*, 133:1(105), 105-120.

[26] Sezen, H., & Setzler, E. J. (2008). Reinforcement slip in reinforced concrete columns. *ACI Structural Journal*, 105(3), 280–289.

[27] Alsiwat, Jaber M., and Murat Saatcioglu. "Reinforcement anchorage slip under monotonic loading." *Journal of Structural Engineering* 118.9 (1992): 2421-2438.

[28] Monti, G., & Spacone, E. (2000). Reinforced concrete fiber beam element with bond-slip, *Journal of Structural Engineering*, 126(6):654-661.

[29] Monti, G., Filippou, F.C., & Spacone, E. (1997). Analysis of Hysteretic Behavior of Anchored Reinforcing Bars, *ACI Structural Journal*, 123(5):248-260.

[30] Spacone, E., V. Ciampi, and F. C. Filippou. "Mixed formulation of nonlinear beam finite element." *Computers & Structures* 58.1 (1996): 71-83.

[31] Spacone, Enrico, Filip C. Filippou, and Fabio F. Taucer. "Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I. Formulation." *Earthquake engineering and structural dynamics* 25.7 (1996): 711-726.

[32] Dehestani, M., & Mousavi, S. S. (2015). Modified steel bar model incorporating bond-slip effects for embedded element method. *Construction and Building Materials*, 81, 284–290.

[33] Mazzoni, S., McKenna, F., Scott, M.H., Fenves, G.L. et al. (2007). *OpenSees Command and Language Manual*, University of California, Berkeley, USA.

[34] Prota, A., De Cicco, F., & Cosenza, E. (2009). Cyclic Behavior of Smooth Steel Reinforcing Bars: Experimental Analysis and Modeling Issues. *Journal of Earthquake Engineering*, 13:4, 500-519.

[35] Braconi, A., Braga, F., Caprili, S., Gigliotti, R., & Salvatore, W. (2014). Seismic demand on steel reinforcing bars in reinforced concrete frame structures. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 12(6), 2633–2664.

[36] Menegotto, M. & Pinto, P.E. (1973). Method of analysis for cyclically loaded RC plan

e frames including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending. In Proceedings of Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well-Defined Repeated Loads, IABSE Reports, 13:15-22

[37] Kolozvari, K., Orakcal, K., & Wallace J.W. (2015). Shear-Flexure Interaction Modeling of reinforced Concrete Structural Walls and Columns under Reversed Cyclic Loading", Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, PEER Report No. 2015/12.

[38] Scott, Michael H., and Gregory L. Fenves. "Plastic hinge integration methods for force-based beam-column elements." *Journal of Structural Engineering* 132.2 (2006): 244-252.

[39] Coleman, J., and Enrico Spacone. "Localization issues in force-based frame elements." *Journal of Structural Engineering* 127.11 (2001): 1257-1265.

[40] Saatcioglu, M., & Ozcebe, G. (1989). Response of reinforced concrete columns to simulated seismic loading, *ACI Structural Journal*, 86(1):3-12.

[41] Pauley, T., & Priestley, M. J. N. (1992). *Seismic design of reinforced concrete and masonry buildings*, John Wiley and Sons, New York.

[42] Braga, F., Gigliotti, R., & Laterza, M. (2006). Analytical Stress-Strain Relationship for Concrete Confined by Steel Stirrups and/or FRP Jackets, *Journal of Structural Engineering*, 132:1402-1416.

[43] Baker, Arthur Lemprière Lancey. *The Ultimate Load Theory Applied to the Design of Reinforced & Prestressed Concrete Frames*. Concrete Publ. Lmd., 1956.

[44] Baker, A. L. L., and A. M. N. Amarakone. "Inelastic hyperstatic frames analysis." *Special Publication 12* (1965): 85-142.

[45] Mattock, Alan H. "Rotational capacity of hinging regions in reinforced concrete beams." *Special Publication 12* (1965): 143-181.

[46] Hillerborg, Arne, Mats Modéer, and P-E. Petersson. "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements." *Cement and concrete research* 6.6 (1976): 773-781.

[47] Simulia, D. S. "ABAQUS 6.13 user's manual." Dassault Systems, Providence, RI (2013).

[48] Calvi Gian Michele, Guido Magenes, and Stefano Pampanin. "Relevance of beam-column joint damage and collapse in RC frame assessment." *Journal of Earthquake Engineering* 6.spec01 (2002): 75-100.