

DOTTORATO IN INGEGNERIA STRUTTURALE E GEOTECNICA  
(CICLO XXVI)



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

GUSCI RIBASSATI MULTISTABILI: UN MODELLO PER LA SELEZIONE  
DELLA FORMA OTTIMALE IN PRESENZA DI VINCOLI AL BORDO

Autore:  
MATTEO **BRUNETTI**

Supervisore:  
prof. STEFANO **VIDOLI**



## INDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUZIONE</b>	<b>5</b>
1.1	motivazioni . . . . .	6
1.2	obiettivi e contributi originali . . . . .	8
1.3	struttura della tesi . . . . .	10
<b>2</b>	<b>STATO DELL'ARTE</b>	<b>13</b>
2.1	alcune applicazioni . . . . .	13
2.2	origine della multistabilità . . . . .	24
2.3	modelli matematici . . . . .	27
<b>3</b>	<b>IL MODELLO DI FÖPPL-VON KÁRMÁN GENERALIZZATO</b>	<b>33</b>
3.1	elasticità tridimensionale . . . . .	33
3.2	dall'elasticità tridimensionale alle teorie strutturali di piastra . . . . .	36
3.3	il modello di Föppl-von Kármán . . . . .	44
3.4	il modello di Föppl-von Kármán generalizzato . . . . .	47
<b>4</b>	<b>UN MODELLO RIDOTTO PER L'ANALISI DI STABILITÀ DI GUSCI VINCOLATI</b>	<b>55</b>
4.1	strategia di riduzione . . . . .	55
4.2	parametri di progetto . . . . .	58
4.3	problema progettuale . . . . .	62
4.4	modello ridotto . . . . .	63
4.5	risultati . . . . .	68
4.6	complementi . . . . .	83
<b>5</b>	<b>UN CODICE AGLI ELEMENTI FINITI PER LA CONTINUAZIONE DELLA FORMA INIZIALE</b>	<b>85</b>
5.1	discretizzazione e soluzione delle equazioni di Föppl-von Kármán . . . . .	87
5.2	continuazione dei percorsi di equilibrio . . . . .	93
5.3	complementi . . . . .	96
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONI E PROSPETTIVE FUTURE</b>	<b>101</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>105</b>



Nei problemi di ingegneria una struttura è progettata per essere efficiente in condizioni di esercizio diverse fra loro, ad ognuna delle quali corrisponde una differente richiesta di prestazione.

A ciascuna di queste domande prestazionali è spesso associabile una particolare *configurazione ottimale* della struttura, ad esempio una specifica scelta dell'organizzazione geometrica o della forma degli elementi strutturali componenti che ne rende massima l'efficacia. In genere la forma finale scelta è il risultato di un compromesso, dopo una selezione delle condizioni di esercizio ritenute più importanti o più impegnative.

Può avvenire però che quest'ultime siano tra loro molto differenti o addirittura antitetiche. Quando ciò accade in generale non è più possibile scegliere una sola forma perché la struttura deve essere in grado di modificare in esercizio la propria configurazione geometrica. Tradizionalmente in questi casi si ricorre a meccanismi più o meno complessi, come carrucole, verricelli o ingranaggi, che richiedono costi spesso elevati sia di realizzazione che di manutenzione.

Una soluzione alternativa si può ottenere ricorrendo a strutture a *controllo di forma*. Con questo nome si indica quella categoria di sistemi strutturali in grado di modificare la propria configurazione geometrica in maniera continua, cioè senza che una o più componenti subiscano movimenti relativi (come invece avviene ad esempio nei sistemi con ingranaggi). Naturalmente, affinché una simile soluzione sia competitiva, è necessario che il suo funzionamento richieda in ogni condizione di esercizio un costo energetico modesto.

Come spesso accade la soluzione a un problema ingegneristico è suggerita dall'osservazione del mondo naturale e si ottiene con la sua emulazione. Nella fattispecie il riferimento più interessante è la tecnica di cattura delle prede di una piccola pianta carnivora, la *Dionaea Muscipula* (figura 1.1).

Ciascuna delle sue foglie ha la possibilità di assumere due configurazioni differenti, aventi curvature opposte. Ogni coppia di foglie può quindi aprirsi e chiudersi per consentire la cattura della preda. Poiché ogni configurazione è di equilibrio stabile e la transizione è ottenuta attraverso una instabilità per scatto (indotta variando in maniera impercettibile una delle curvature), ciascuna foglia è in grado di realizzare un cambiamento di configurazione significativo e rapido con una forza di attuazione estremamente modesta.

Le foglie della *Dionaea* sono esempi di *gusci multistabili*, cioè tali



Figura 1.1: la *Dionaea Muscipula*, anche nota con il nome di *Venere acchiappamosche*. Per un'interessante analisi del meccanismo di cattura delle prede, cfr. (Forterre et al. [71]).

da avere più di una configurazione di equilibrio stabile, in generale anche in assenza di azioni esterne. Questi ultimi possono essere efficacemente impiegati come componenti di strutture a controllo di forma, perché coniugano buone proprietà di rigidità e resistenza alla capacità di subire grandi variazioni di forma con un'attuazione modesta, essendo necessaria solo a garantire la transizione tra le diverse configurazioni di equilibrio stabile.

La multistabilità di piastre e gusci ha origine da una complessa competizione cui prendono parte la forma geometrica iniziale, il materiale con le sue caratteristiche di simmetria e, qualora presenti, eventuali stati di sforzo indotti. Questa competizione tra *geometria* e *elasticità* governa infatti l'accumulo e il rilascio dell'energia di deformazione elastica durante i processi deformativi e determina le configurazioni geometriche di equilibrio e la loro stabilità.

Come vedremo, piastre e gusci multistabili possono essere realizzati in diversi modi. Ad esempio *possono* essere, ma non necessariamente sono, multistabili: le piastre realizzate con laminati compositi con sequenza di laminazione antisimmetrica<sup>1</sup>; i gusci isotropi, cilindrici o corrugati, purché presollecitati<sup>2</sup>; i gusci anisotropi<sup>3</sup>.

Salvo diverso avviso in questa sede faremo sempre riferimento a quest'ultimo tipo, per il quale la multistabilità è unicamente dovuta alla reciproca influenza di *forma* e *materiale*: la forma iniziale seleziona i processi deformativi in qualche modo più favorevoli e individua alcune direzioni preferenziali di deformazione che l'eventuale anisotropia del materiale può modificare e correggere. Questa scelta, pur arbitraria, ha una solida motivazione di carattere tecnologico. L'assenza di stati di sforzo residui permette infatti un miglior controllo sulla forma geometrica in fase di produzione<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> La multistabilità dipende dallo stato di sforzo anelastico indotto al termine del processo di raffreddamento dalle differenze nei coefficienti di espansione termica.

<sup>2</sup> La multistabilità dipende dall'interazione tra la geometria iniziale e lo stato di presollecitazione indotto meccanicamente, ad esempio con cicli di plasticizzazione e scarico.

<sup>3</sup> La multistabilità dipende dall'interazione fra la forma geometrica iniziale, priva di qualsiasi stato di sforzo indotto, e le caratteristiche di simmetria del materiale.

<sup>4</sup> Per contro, come vedremo, è in genere richiesta una maggiore potenza di attuazione per realizzare la transizione fra le diverse configurazioni stabili.

## 1.1 MOTIVAZIONI

Preso atto della possibilità di realizzare gusci multistabili occorre definire i *criteri di progettazione* necessari per garantirne un impiego efficiente quali componenti di strutture a controllo di forma. Per la classe di gusci multistabili considerata è indispensabile scegliere:

- i. la forma iniziale del guscio;
- ii. le proprietà di simmetria e le caratteristiche meccaniche del materiale (ad esempio la scelta del tipo di composito e della sequenza di laminazione);
- iii. la strategia di attuazione.

Mentre in generale occorre:

- i. realizzare le configurazioni geometriche necessarie per rendere il sistema efficiente nelle diverse condizioni di esercizio;
- ii. garantire l'efficacia e il controllo delle transizioni fra le diverse configurazioni.

Poiché le configurazioni geometriche da realizzare possono essere tra loro anche molto differenti e la transizione può avvenire secondo percorsi di carico pressoché infiniti, è evidente la necessità di disporre di modelli matematici e strumenti numerici che permettano di rappresentare con l'indispensabile sintesi lo *scenario di stabilità globale*, cioè capaci di fornire indicazioni attendibili sul numero e sul tipo delle configurazioni di equilibrio stabile, sull'entità delle barriere d'energia fra loro interposte e sulla scelta del modo più idoneo per realizzare la transizione, in genere quello che richiede minor potenza all'attuatore.

Questo quadro sinottico dello scenario di stabilità globale non può essere ottenuto né con l'attività sperimentale né utilizzando le tradizionali tecniche di soluzione agli elementi finiti, giacché l'analisi numerica di sistemi non lineari a molti gradi di libertà con equilibri multipli è un compito praticamente impossibile da gestire anche utilizzando i più sofisticati codici commerciali.

Piuttosto si devono utilizzare modelli di guscio semplificati, aventi un numero esiguo di gradi di libertà (e per questo detti *modelli ridotti*) ma ugualmente capaci di descrivere il comportamento globale del sistema, che equivale a chiedere loro una rappresentazione fedele dell'energia di deformazione elastica. Questi ultimi sono generalmente ottenuti limitando la cinematica di modelli più ricchi, ad esempio attraverso l'introduzione di vincoli sulla curvatura del guscio che permettano di selezionare le sole configurazioni ritenute più verosimili.

Allo stato attuale modelli di questo tipo sono però disponibili unicamente per gusci *liberi* al bordo, ossia privi di vincoli. Dal punto di vista progettuale ciò ne pregiudica almeno in parte l'impiego perché le condizioni di vincolo sono sempre presenti quando il guscio viene utilizzato quale componente di un sistema più complesso (come una struttura a controllo di forma) e incidono profondamente sul numero e sulla forma delle configurazioni stabili che il guscio può realizzare<sup>5</sup>, così come sulla potenza richiesta all'attuatore per compiere la transizione tra le diverse configurazioni. Per questa ragione allo stato attuale la progettazione di gusci multistabili procede essenzialmente su base sperimentale ed è assente un criterio di progettazione razionalmente codificato.

<sup>5</sup> Ad esempio possono impedire ad alcune configurazioni di realizzarsi e dunque, in casi estremi, un guscio multistabile se libero al bordo può non esserlo affatto quando vincolato su una parte del bordo.

## 1.2 OBIETTIVI E CONTRIBUTI ORIGINALI

Il lavoro che si presenta intende fornire alcuni strumenti originali, sia semi-analitici che numerici, utili alla progettazione di gusci multistabili *vincolati*.

In questa sede intenderemo la progettazione di questo tipo di elementi strutturali come un processo di selezione della *forma ottimale* consistente nel<sup>6</sup>:

- i. determinare la configurazione naturale del guscio cui corrisponde una *particolare* scelta delle configurazioni di equilibrio stabile da realizzare, considerando la presenza sul bordo delle stesse degli inevitabili vincoli;
- ii. selezionare la più conveniente modalità di attuazione;
- iii. valutare l'influenza del materiale e della tipologia di vincolo.

L'obiettivo principale è la formulazione di un modello non lineare di guscio che sia sufficientemente versatile da consentire l'analisi di stabilità di gusci vincolati. Come anticipato, affinché il processo di selezione della forma ottimale sia gestibile, è necessario che:

- i. la configurazione naturale sia descritta da un numero esiguo di *parametri di progetto*, in parte rappresentativi della *forma* geometrica, in parte rappresentativi delle proprietà del *materiale*;
- ii. le configurazioni geometriche ammissibili siano identificate dal minor numero possibile di *parametri lagrangiani*, per i quali è auspicabile disporre di una chiara interpretazione geometrica.

Per la ricorrenza nelle applicazioni si è scelto di limitare l'attenzione a gusci di *forma pseudo-conica* di pianta rettangolare e *materiale ortotropo*, identificabili con sei parametri di progetto (tre di natura geometrica, tre di natura costitutiva). La stessa ragione ha indotto a considerare come sola condizione di vincolo l'incastro di uno dei lati corti. La curvatura da assegnare al vincolo può assumersi quale ulteriore parametro di progetto.

Il modello è stato generato a partire da un modello non lineare di guscio ribassato con una tecnica di proiezione in grado di garantire un'approssimazione sufficientemente fedele dell'energia di deformazione elastica. Come si avrà modo di osservare, l'efficacia della procedura dipende essenzialmente dalla semplicità del modello genitore, che può considerarsi una generalizzazione del modello di piastra non lineare di Föppl-von Kármán. Le severe ipotesi che è necessario ammettere sulla geometria delle configurazioni ammissibili si rivelano del tutto accettabili nella maggioranza delle applicazioni.

<sup>6</sup> Si ribadisce che il vero dato di partenza nella progettazione di strutture a controllo di forma è l'insieme delle configurazioni che il sistema deve assumere per garantire la propria efficienza meccanica nelle diverse condizioni di esercizio. Questo richiede la possibilità di associare le forme di progetto che il guscio dovrà assumere in esercizio, vincolate, a quella, naturale e priva di vincoli, con cui viene prodotto.



Il modello ha cinque gradi di libertà se il guscio è libero al bordo, che si riducono a tre dopo l'imposizione del vincolo di incastro e assumono il ruolo di parametri lagrangiani del modello *ridotto* vincolato. L'impiego del modello ha permesso:

- i. l'identificazione delle *frontiere di stabilità* nello spazio dei parametri di progetto di natura geometrica, ossia di individuare, assegnato il materiale, la geometria delle configurazioni naturali cui corrispondono gusci multistabili anche dopo l'imposizione del vincolo;
- ii. l'associazione di una *particolare* scelta di due (o più) vettori di parametri lagrangiani, cui corrispondono due (o più) configurazioni geometriche vincolate, alla scelta di parametri di progetto per la quale queste ultime risultano di equilibrio stabile;
- iii. una stima della potenza richiesta all'attuatore per realizzare una transizione reversibile tra le due (o più) configurazioni di equilibrio stabile secondo un generico percorso di carico;
- iv. l'individuazione del percorso di carico cui corrisponde la minore potenza richiesta all'attuatore. Ciò equivale ad individuare anche la più idonea disposizione geometrica dello stesso (o eventualmente degli stessi).
- v. una prima valutazione dell'*influenza combinata* di geometria e materiale sulla multistabilità di gusci vincolati, che consente una maggiore libertà nella progettazione dell'impegno o delle modalità di attuazione. Ciò può ad esempio avvenire calibrando la forma geometrica e le proprietà costitutive del materiale in modo da realizzare il profilo dell'energia di deformazione elastica che meglio corrisponde agli obiettivi di progetto.

Se il ricorso a modelli ridotti è inevitabile quando si vuole ottenere una *predizione* dello scenario di stabilità globale, l'impiego di modelli a molti gradi di libertà rimane indispensabile per la *validazione* numerica delle previsioni ottenute. Quest'ultima esula dagli scopi di questo lavoro. Si è ritenuto tuttavia importante muovere un primo passo in questa direzione ponendosi l'obiettivo di sviluppare e implementare un *codice agli elementi finiti* con caratteristiche idonee all'esecuzione del tipo di analisi necessarie allo scopo, per le quali non è possibile ricorrere a codici commerciali, sia per l'oggettiva difficoltà di condurre con il loro impiego analisi parametriche di sistemi fortemente non lineari che per la necessità di seguire l'evoluzione delle soluzioni al variare di un parametro rappresentativo della forma iniziale o del materiale. Come si vedrà, la soluzione di queste istanze dipende ancora una volta dalla semplicità del modello di guscio ribassato scelto.

### 1.3 STRUTTURA DELLA TESI

Il lavoro è organizzato come segue.

NEL SECONDO CAPITOLO si propone una breve discussione sullo stato dell'arte. Si discutono brevemente alcune applicazioni di gusci multistabili (sia in produzione che disponibili unicamente come prototipi), cercando di porre in evidenza tanto gli aspetti peculiari quanto i principali problemi tecnologici. Si discute quindi l'origine della multistabilità di alcuni gusci elastici sottili allo scopo di individuare le cause e i fattori decisivi. Si conclude con un esame dei principali modelli (ridotti) attualmente disponibili, dei quali viene discussa l'utilità ai fini del conseguimento degli obiettivi che questo lavoro si propone.

NEL TERZO CAPITOLO viene descritto il modello di guscio non lineare successivamente utilizzato per generare, con una opportuna tecnica di proiezione, il modello ridotto. Nello specifico si tratta di una generalizzazione del modello di piastra non lineare di Föppl-von Kármán, che concede la possibilità di considerare configurazioni iniziali *debolmente* curve o la presenza di eventuali stati di presollecitazione. Discutendo in maniera il più possibile omogenea i contributi disponibili in letteratura, una breve introduzione permette di collocare il modello tra le teorie strutturali rigorosamente dedotte dall'elasticità tridimensionale. Si è ritenuto in questo modo possibile dare il giusto rilievo ai concetti geometrici e meccanici che intervengono nello studio della (multi)stabilità dei gusci elastici sottili.

NEL QUARTO CAPITOLO viene presentato il modello ridotto che si intende proporre, insieme ai principali risultati ottenuti. Per la loro ricorrenza nelle applicazioni si sceglie di limitare l'attenzione a gusci di forma pseudo-conica e materiale ortotropo, cosicché sia possibile descrivere la configurazione naturale con al più sei parametri di progetto (tre di natura geometrica, tre di natura costitutiva). Nel modello ridotto, ottenuto generalizzando una tecnica di proiezione proposta recentemente, ogni configurazione ammissibile è individuata da tre parametri lagrangiani, che ne descrivono la curvatura. Il modello consente una gestione efficace del processo di selezione della forma ottimale descritto; inoltre, un procedura di continuazione numerica consente la selezione del percorso di carico cui corrisponde il minor impegno di attuazione.

NEL QUINTO CAPITOLO vengono descritte le caratteristiche principali del codice agli elementi finiti sviluppato e implementato per proce-

dere alla validazione delle previsioni del modello ridotto. Il codice utilizza una tecnica non convenzionale nella discretizzazione delle equazioni di campo (che richiede l'impiego di elementi finiti discontinui) e un algoritmo di minimizzazione alternata per la soluzione del problema algebrico non lineare ottenuto. Quest'ultimo costituisce poi parte dell'algoritmo di continuazione numerica che si è scelto di implementare per procedere allo studio del comportamento post-critico nei casi di interesse. Peculiare è la possibilità di seguire l'evoluzione delle soluzioni delle equazioni di campo al variare di un parametro di forma (o materiale).

NEL SESTO CAPITOLO vengono presentate le conclusioni e discusse alcune possibili prospettive future.



Come quasi sempre accade la scoperta di un fenomeno fisico e la sua applicazione tecnica ne precede la realizzazione dei modelli interpretativi. La multistabilità di (alcuni) gusci elastici sottili non fa eccezione.

Obiettivo di questo capitolo è esporre con sufficiente chiarezza ma con la necessaria sintesi entrambi gli aspetti, evidenziando limiti e difficoltà riscontrati tanto nelle applicazioni quanto nell'elaborazione dei modelli matematici, peraltro indispensabili per svilupparne con criterio scientifico la *tecnologia*. Questo verrà discusso e questo, anche da un punto di vista etimologico, tradisce il titolo.

Si ritiene quindi opportuno far precedere la discussione dei modelli da una breve esposizione delle principali applicazioni, siano esse già in produzione che disponibili unicamente come prototipi. Naturalmente ciò significa posporre anche la discussione sull'origine della multistabilità, scelta che può giustificarsi in nome dell'intimo rapporto esistente tra comprensione delle cause e realizzazione dei modelli. Entrambi, strumenti spesso accessori quando si tratta di comprendere il funzionamento delle applicazioni esistenti e coglierne potenziale, divengono irrinunciabili se si intende ottimizzarne la progettazione o svilupparne di nuove.

## 2.1 ALCUNE APPLICAZIONI

Una qualsiasi struttura può dirsi multistabile quando può assumere più di una configurazione geometrica che, anche in assenza di azioni esterne, si rivela di equilibrio stabile.

L'esempio forse più semplice e noto è la trave con debole curvatura, che può risultare stabile nelle due configurazioni mostrate in figura 2.1.

Non stupisce quindi che le prime applicazioni tecnologiche abbiano principi di funzionamento basati su questo comportamento. È il caso ad esempio di molti dei cosiddetti meccanismi *compliant* (Howell [84]), una particolare classe di meccanismi in cui il traferimento del moto o delle forze avviene sfruttando la flessibilità di elementi deformabili anziché attraverso l'impiego di giunti. Sistemi di questo tipo possono essere utilizzati per realizzare interruttori, valvole di controllo o relè. Tuttavia, data l'assenza di giunti e la conseguente riduzione di attrito, usura, necessità di lubrificazione e complessità,



Figura 2.1: anche in assenza di azioni esterne una trave con debole curvatura può essere in equilibrio stabile in entrambe le configurazioni geometriche rappresentate.

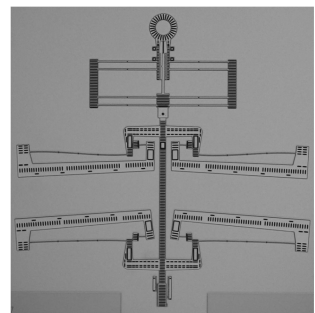
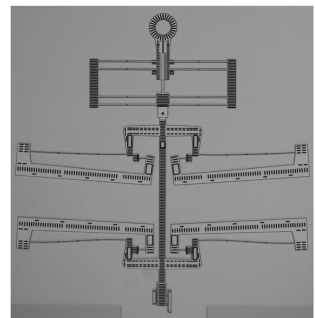
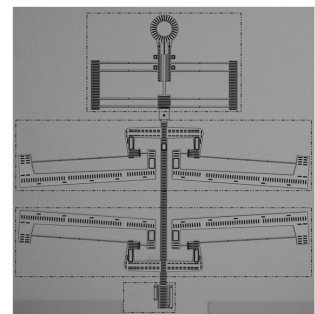


Figura 2.2: vengono mostrate in sequenza le tre configurazioni stabili di un microinterruttore (Chen et al. [28]).

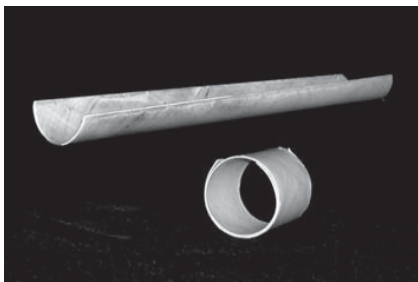


Figura 2.3: le due configurazioni stabili del guscio oggetto del brevetto di [Daton-Lovett \[45\]](#).



Figura 2.4: la configurazione cilindrica chiusa si può ottenere avvolgendo quella aperta dopo averne appiattito il lato corto.



Figura 2.5: nei flessometri classici la struttura di contenimento è necessaria poiché il nastro metallico non è bistabile (da [Kebadze et al. \[91\]](#)).

simili meccanismi si rivelano particolarmente efficaci per applicazioni su scala microscopica, ad esempio per realizzare *MEMS* (*Micro Electro-Mechanical Systems*), quali micro-motori o micro-interruttori come quello rappresentato in figura 2.2 ([Chen et al. \[28\]](#)).

Altrettanto recente è la diffusione e lo sviluppo di applicazioni in grado di trarre vantaggio dalla multistabilità di *gusci* elastici sottili.

Il maggior successo industriale è probabilmente ascrivibile a quelle sviluppate dalla *RolaTube* sulla base del brevetto di Andrew Daton-Lovett ([Daton-Lovett \[45\]](#)). Quest'ultimo riguarda la realizzazione di un guscio *bistabile* in materiale composito, prodotto utilizzando un laminato antisimmetrico. Le due configurazioni stabili che il guscio può assumere sono visibili in figura 2.3, entrambe cilindriche: la prima aperta e nastriforme, che può assumersi naturale, la seconda chiusa, a formare un piccolo rotolo. Quest'ultima si ottiene agevolmente per avvolgimento dopo aver appiattito il lato corto del cilindro aperto (figura 2.4).

La stabilità della configurazione chiusa consente di rinunciare ad ogni struttura di contenimento, tipica ad esempio dei flessometri (figura 2.5). All'aumentare della lunghezza del nastro ciò comporta significativi vantaggi in termini di peso e ingombro e garantisce semplicità di utilizzo ed economia di trasporto.

Per queste ragioni elementi di questo tipo, che possono anche veicolare una sofisticata sensoristica, sono attualmente impiegati nel monitoraggio di grandi condotte idriche (figura 2.6a), nell'ispezione di reattori nucleari (figura 2.6b) e come tubi in pressione negli impianti di perforazione petrolifera (figura 2.6c). Altrettanto promettenti sembrano anche le applicazioni quali componenti di strutture *dispiegabili* (cfr. [Pellegrino \[118\]](#)); a titolo di esempio in figura 2.6d è visibile un prototipo di vela solare ([Fernandez et al. \[69\]](#)).

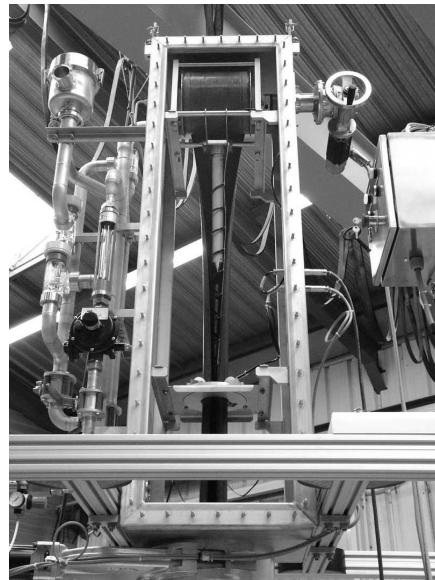
Con la descrizione di queste prime applicazioni emergono le principali caratteristiche dei sistemi realizzati utilizzando elementi multistabili: l'opportunità di disporre di più di una configurazione geometrica; la possibilità di gestirne l'esercizio con un'attuazione limitata nel tempo, perché necessaria solo per compiere la transizione tra le diverse configurazioni geometriche (facoltà, quest'ultima, indotta dalla stabilità delle stesse). Come vedremo l'efficacia di questo tipo di soluzioni dipende dal rapporto (simbiotico) tra multistabilità e gestione dell'attuazione.

Queste considerazioni consentono di allargare il campo delle possibili applicazioni, estendendolo in maniera naturale a tutti i problemi che richiedono di poter disporre di sistema meccanico attivo ed efficiente in più di una configurazione geometrica.

Questi problemi, tipici dell'ingegneria aeronautica e aerospaziale, sono da poco tempo affrontati anche in ambito architettonico, ad



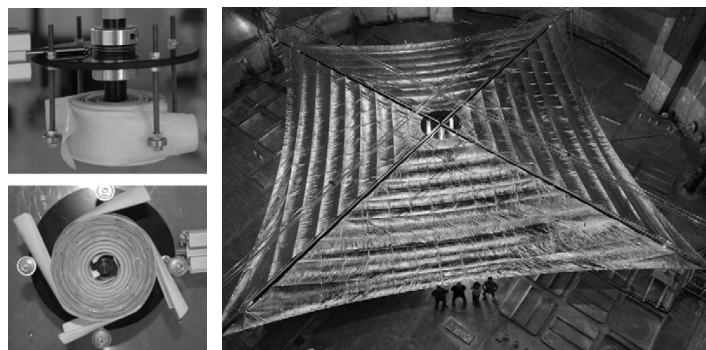
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2.6: alcune applicazioni civili e industriali del guscio bistabile di figura 2.3.

esempio nella progettazione di involucri edilizi *adattivi* (cfr. [Del Grosso and Basso \[52\]](#)). Vengono con questo termine indicati gli involucri edilizi capaci di modificare uno o più aspetti nell'organizzazione geometrica degli elementi componenti e adeguare le prestazioni a specifiche esigenze, in genere riconducibili alla necessità di contenere il consumo energetico degli edifici.

Malgrado la distanza tra i due ambiti di applicazione problemi e soluzioni presentano aspetti comuni, almeno circoscrivendo l'interesse alle possibilità di impiego di gusci multistabili. Appare quindi lecito procedere in parallelo alla descrizione delle opportunità offerte dall'adozione di questo tipo di sistemi, privilegiando la soluzione tecnologica all'ambito di applicazione.

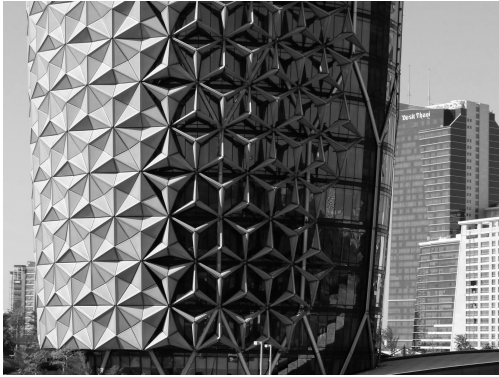
Per iniziare è ragionevole avere come riferimento due soluzioni attualmente utilizzate. Le figure 2.7a e 2.7b mostrano rispettivamente l'involucro edilizio delle *Al Bahar Towers*, realizzate ad Abu Dhabi su un progetto dello studio di architettura *Aedas* e un particolare dell'ipersostentatore di bordo d'uscita installato sul Boeing 737. I due sistemi hanno scopi differenti. Il primo gestisce l'ingresso della luce solare, principalmente per contenere il consumo associato al condizionamento dell'aria, il secondo garantisce un'adeguata superficie alare *portante* anche a basse velocità e elevati valori dell'angolo di incidenza, condizioni che in genere verificate nelle fasi di decollo e atterraggio. Nonostante i principi di funzionamento sono simili: in entrambi i casi sono organizzati in componenti (figure 2.7c e 2.7d) in grado di cambiare configurazione in risposta a un determinato impulso, trasmesso attraverso un sistema di attuazione. Nel primo caso si tratta di pannelli in politetrafluoroetilene montati su un telaio metallico azionato da un attuatore lineare (figura 2.7e), nel secondo di un sistema meccanico montato su un supporto solidale all'ala e azionato da un sistema di attuazione che può comporsi di martinetti a vite e attuatori rotanti o a cremagliera (figura 2.7f).

Sistemi di questo tipo si sono dimostrati efficaci. Migliorarli significa ridurre il peso, il consumo in esercizio o la complessità e aumentarne l'affidabilità e la capacità di gestione e controllo della transizione fra le diverse configurazioni.

Tra le possibili soluzioni, le più interessanti prevedono l'impiego di materiali *intelligenti*, idonei perché consentono di gestire un riflesso controllato in risposta ad uno stimolo esterno (che può essere indotto da un'azione di natura meccanica ma anche da una variazione di temperatura, umidità, campo elettrico, etc.). In figura 2.8 sono illustrate due tra le possibili soluzioni di questo tipo, da intendere in contrapposizione a quelle descritte in precedenza (figura 2.7).

In figura 2.8a e 2.8c due immagini digitali mostrano le modalità di funzionamento dell'involucro edilizio adattivo proposto dalla *Decker*





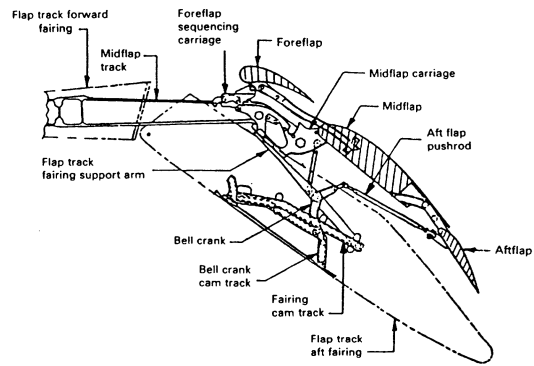
(a) L'involucro edilizio delle *Al Bahar Towers*, Abu Dhabi.



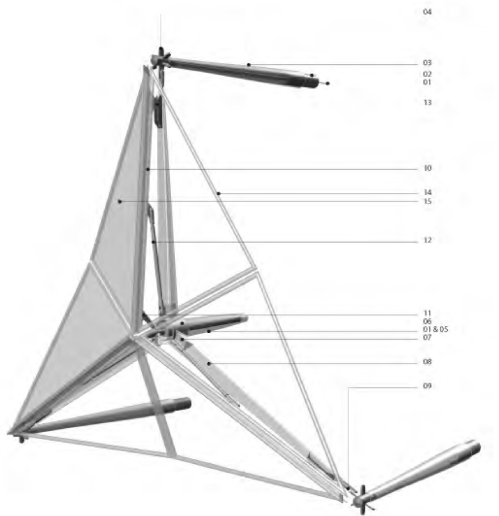
(b) L'ipersostentatore a tripla fessura di un Boeing 737.



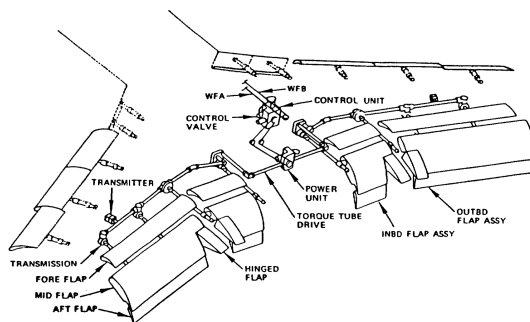
(c) Involucro edilizio delle *Al Bahar Towers*: particolare del singolo modulo.



(d) Schema di funzionamento dell'ipersostentatore di un Boeing 737 (da Rudolph [135]).



(e) Involucro edilizio delle *Al Bahar Towers*: particolare del singolo modulo e schema di attuazione.

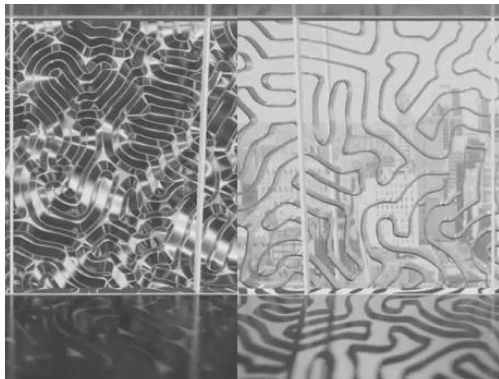


(f) Sistema di attuazione dell'ipersostentatore di un Boeing 737 (da Rudolph [135]).

Figura 2.7: l'involucro edilizio delle *Al Bahar Towers* e l'ipersostentatore di un Boeing 737.



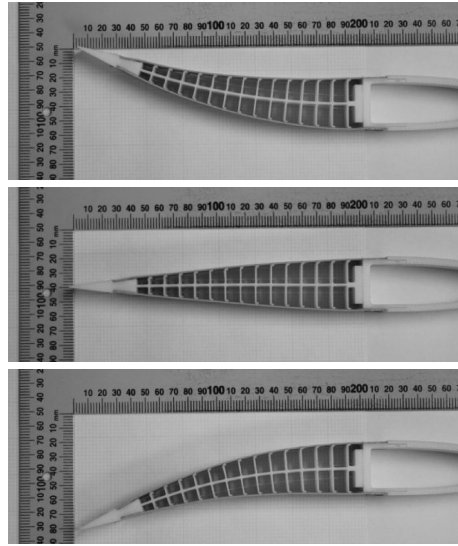
(a) Involucro edilizio adattivo proposto dalla Decker Yeadon LLC, particolare dell'esterno.



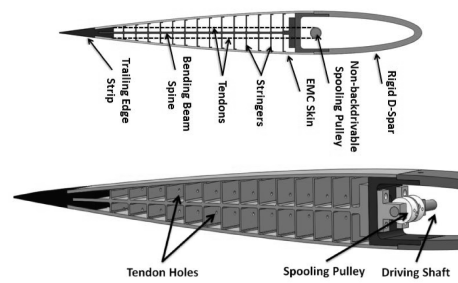
(c) Involucro edilizio adattivo proposto dalla Decker Yeadon LLC, particolare dell'interno.



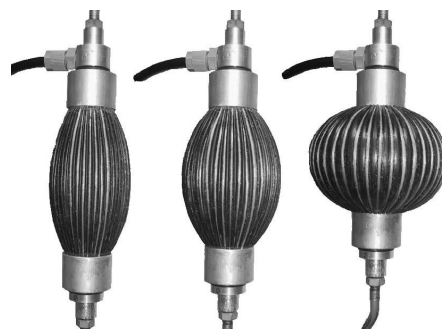
(e) Involucro edilizio adattivo proposto dalla Decker Yeadon LLC, modulo nastriforme in elastomero dielettrico.



(b) Prototipo di profilo alare a controllo di forma (da Woods and Friswell [158]).



(d) Prototipo di profilo alare a controllo di forma: schema (da Woods and Friswell [158]).



(f) Esempio di muscolo pneumatico artificiale.

Figura 2.8: l'involucro edilizio adattivo immaginato dalla Decker Yeadon LLC e il prototipo di profilo alare proposto dalla Woods and Friswell [158].

*Yeadon LLC*. Si tratta di una facciata in vetro a doppia pelle all'interno del quale trova alloggiamento un sistema di nastri realizzati con un elastomero dielettrico avvolto su un nucleo polimerico flessibile e rivestito con una lamina d'argento, agente da elettrodo. L'attuazione si realizza in maniera autonoma, in risposta alle modifiche nella distribuzione di carica elettrica del rivestimento d'argento indotte dalle variazioni di temperatura dell'ambiente esterno: quando la luce solare riscalda l'interno dell'edificio l'elastomero si espande, creando ombra all'interno; quando l'interno si raffredda, l'elastomero si contrae, consentendo una maggiore penetrazione della luce (figura 2.8e).

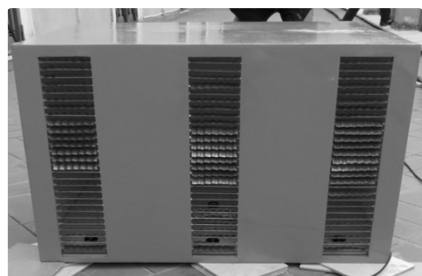
La figura 2.8b mostra invece una prototipo di profilo alare a controllo di forma (Woods and Friswell [158], Woods et al. [159]). Il sistema è controllato dall'azione di due tiranti estremamente rigidi, che gestiscono la flessione di una lamina solidale al corrente rigido del profilo agendo in contrapposizione (con un meccanismo simile a quello realizzato dalla coppia agonista-antagonista nei sistemi muscolari). Un sistema di montanti rigidi rende quindi solidale la lamina alla superficie esterna del profilo alare, rivestita con un composito elastomerico preteso per evitare modifiche indesiderate della forma della sezione (figura 2.8d). I materiali intelligenti trovano in questo caso impiego nella gestione dell'attuazione, che può essere ad esempio realizzata con attuatori pneumatici (Woods et al. [160], figura 2.8f).

Ciascuno di questi sistemi ha almeno un limite, che ne mette in discussione l'economia di esercizio o di manutenzione: nel primo caso l'attuazione, seppur autonoma, richiede una somministrazione *continua* di corrente elettrica; nel secondo la stabilità delle diverse configurazioni geometriche è garantita essenzialmente dalla rigidità dei tiranti e dall'*attrito* indotto nel meccanismo di trasmissione.

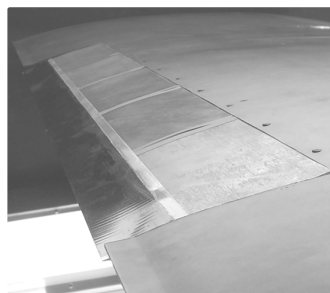
In apparenza differenti, queste due soluzioni rispondono alla stessa necessità, quella di garantire il controllo (questo sì, *continuo*) sulla configurazione geometrica del sistema: rinunciando ad un'attuazione continua è necessario individuarne un surrogato meccanico, e viceversa.

Come si è detto un controllo sulla forma in assenza di un'attuazione continua è conseguibile impiegando componenti multistabili. Il loro impiego in questo tipo di applicazioni è dunque assai interessante e riceve una sempre maggiore attenzione.

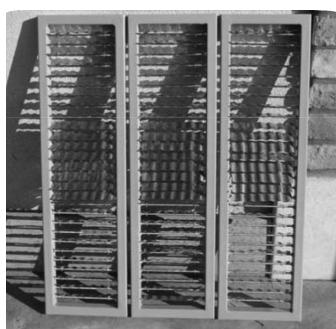
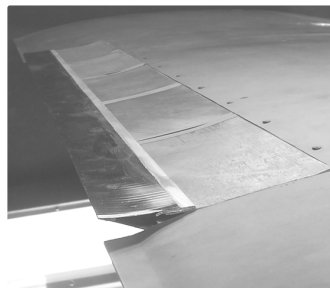
In figura 2.9 sono presentate a titolo di esempio due recenti proposte, questa volta integranti elementi bistabili; per mantenere vivo il parallelo tra applicazioni civili e aeronautiche, si tratta ancora di un involucro edilizio adattivo e di un prototipo di profilo alare a controllo di forma (si tratta in questo caso della pala del rotore di un elicottero).



(a) Involucro edilizio adattivo proposto da (D'Annibale et al. [42]), modello in scala.



(b) Prototipo di profilo alare a controllo di forma (da Daynes et al. [50])



(c) Involucro edilizio adattivo proposto da (D'Annibale et al. [42]), particolare dei telai di supporto delle lamelle bistabili.



(d) Prototipo di profilo alare a controllo di forma (da Daynes et al. [50]), particolare del profilo alare e del supporto degli elementi bistabili.

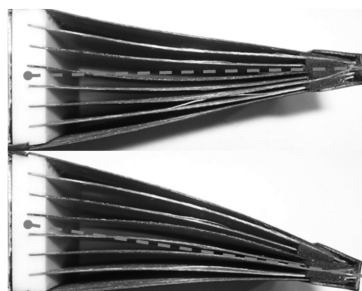


Figura 2.9: esempio di un involucro edilizio adattivo e di un profilo alare integranti elementi bistabili.

Come i precedenti, l'involucro edilizio in figura 2.9a è progettato per gestire in maniera ottimale l'illuminazione naturale negli ambienti interni dell'edificio. In estrema sintesi si compone di una serie di *tende veneziane* realizzate con lamelle corrugate in lega metallica (figura 2.9c). Queste ultime possono essere realizzate (Norman et al. [113]) in modo da garantire l'esistenza di una seconda configurazione di equilibrio stabile, cilindrica, raggiungibile appiattendolo e poi piegando la lamella in direzione ortogonale ai corrugamenti (figura 2.10).

Modificando l'assetto degli elementi componenti è allora possibile modulare l'intensità della radiazione solare riflessa e gestire la qualità dell'illuminazione interna.

L'attuazione, necessaria *solo* per realizzare il cambiamento di configurazione geometrica, può essere effettuata in maniera del tutto autonoma e avvenire a seguito delle variazioni di temperatura associate alle variazioni climatiche stagionali (ad esempio con un attuatore in lega a memoria di forma).

Il prototipo di profilo alare in figura 2.9b (Daynes et al. [48], Daynes et al. [50]) è invece realizzato impiegando una serie di piastre in laminato composito, presollecitate in modo da ottenere le due configurazioni stabili debolmente curve mostrate in figura 2.11.

Nel prototipo le singole piastre formano un ventaglio, che si apre verso l'interno del profilo alare (al cui corrente è solidale) e si chiude in corrispondenza del bordo d'uscita (figura 2.10d). Anche in questo caso l'attuazione è necessaria *unicamente* per consentire la transizione tra le due configurazioni geometriche, quando viene richiesta per ottimizzare il funzionamento in esercizio.

L'interesse verso la realizzazione di strutture a controllo di forma integranti componenti multistabili è quindi mosso essenzialmente dalla promessa di sistemi semplici, affidabili ed economici, sia in termini di esercizio che di manutenzione.

Economia, affidabilità e semplicità consentono peraltro di immaginare impieghi in settori assai diversi. Con poche differenze in termini di materiali impiegati e principio di funzionamento, si può immaginare di utilizzare gusci multistabili per realizzare alette d'estremità (Gatto et al. [79], figura 2.12a-b), prese d'aria (Daynes et al. [51], figura 2.12c-d), schermi flessibili (Norman et al. [113], figura 2.12e-f) o sistemi per il controllo della ventilazione (D'Annibale et al. [42], figura 2.12g).

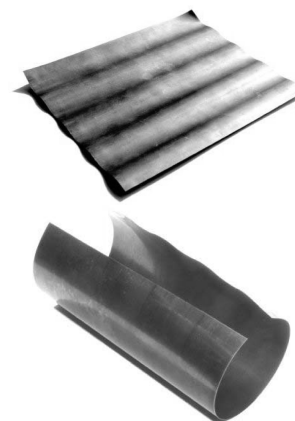


Figura 2.10: esempio di guscio corrugato bistabile (Norman et al. [113]).

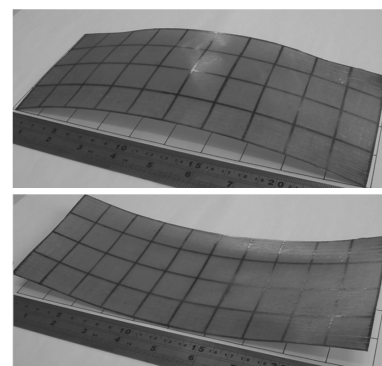


Figura 2.11: esempio di piastra presollecitata bistabile Daynes et al. [47].

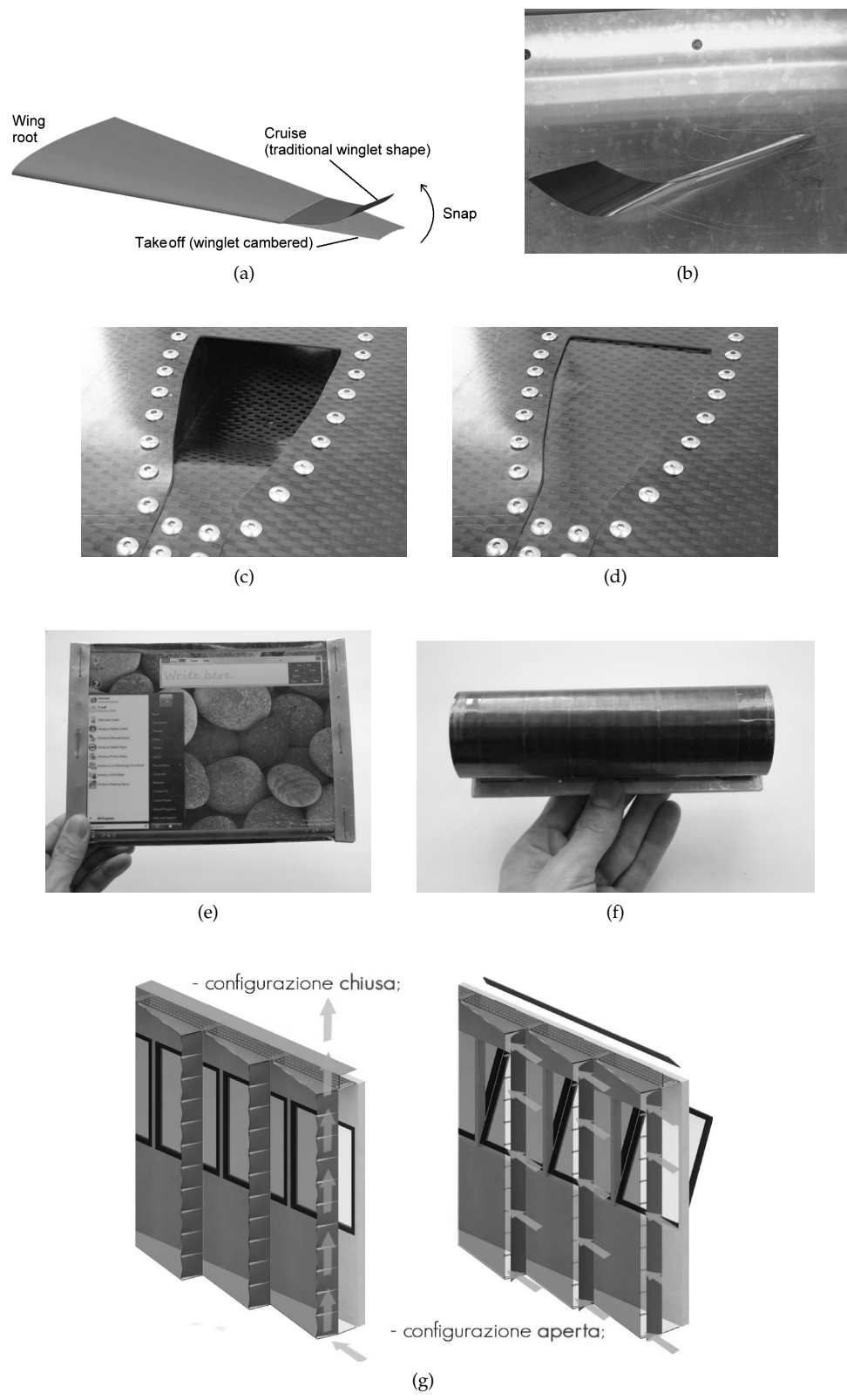


Figura 2.12: ulteriori esempi di applicazioni di gusci multistabili.

## Problemi tecnologici

Seppur breve, la discussione delle applicazioni consente di delineare due requisiti progettuali di validità generale, comuni a tutte le soluzioni descritte indipendentemente dall'ambito di appartenenza. Viene infatti sempre richiesto di:

- i. realizzare le configurazioni geometriche necessarie per rendere il sistema efficiente nelle diverse condizioni di esercizio;
- ii. garantire l'efficacia e il controllo delle transizioni fra le diverse configurazioni.

La due richieste hanno uguale importanza sebbene la seconda abbia senso solo se si è in grado di rispondere alla prima; in ogni caso entrambe sono da considerarsi imprescindibili.

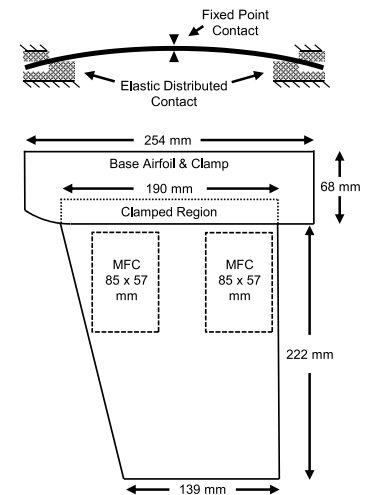
Realizzare configurazioni geometriche *assegnate* è compito tutt'altro che scontato. Per ragioni legate alla manifattura, certamente. Ma anche e soprattutto perché, con rare eccezioni, un guscio multistabile è impiegato quale componente di sistema più complesso, al quale è reso solidale attraverso l'inevitabile imposizione di *vincoli* al bordo. Quest'ultimi, nella migliore delle ipotesi modificano (anche radicalmente) la forma geometrica delle configurazioni stabili che il guscio può assumere, nella peggiore possono condurre alla perdita della multistabilità.

La sola conoscenza delle configurazioni geometriche di equilibrio stabile che è possibile far assumere al guscio *libero* non è quindi sufficiente. Essa deve essere accompagnata da un'adeguata capacità di predizione del comportamento del guscio una volta vincolato, giacché l'*unico* interesse dal punto di vista progettuale risiede nella realizzazione delle configurazioni geometriche (vincolate) di esercizio.

Così, ad esempio, nel valutare le prestazioni aerodinamiche del prototipo di ala in figura 2.13a (Bilgen et al. [18]) si è reso indispensabile realizzare l'incastro con una debole curvatura, per garantire l'*esistenza* e la necessaria *robustezza* alle due configurazioni stabili mostrate in figura 2.13b.

La gestione della transizione tra le diverse configurazioni di equilibrio stabile è altrettanto complessa. Quest'ultima è in genere realizzata inducendo un'instabilità per scatto, innescata attraverso uno o più attuatori. Allo scopo sono attualmente utilizzati attuatori in lega a memoria di forma o piezoelettrici.

I primi permettono di compiere una transizione *reversibile*, ossia ne consentono la realizzazione indipendentemente dalla configurazione di partenza. Hanno tuttavia un intervallo di operatività spesso troppo limitato e presentano alcune difficoltà di integrazione con le



(a) Particolare del vincolo e schema geometrico.

(b) Configurazioni di equilibrio stabile.

Figura 2.13: prototipo di ala bistabile proposto in Bilgen et al. [18].

diverse componenti del sistema (Dano and Hyer [44]). Viceversa gli attuatori piezoelettrici, sebbene facilmente integrabili, hanno in genere una minore capacità di attuazione cosicché in generale non sono in grado di erogare l'energia necessaria per compiere una transizione reversibile (Schultz and Hyer [138], Portela et al. [126]). Quest'ultima può essere tuttavia ottenuta in almeno due modi: attraverso un'accurata selezione dei percorsi di carico meno impegnativi per l'attuatore, al prezzo di una maggiore complessità nella strategia di attuazione (Fernandes et al. [68]); rinunciando ad un'attuazione quasi-statica e accordando la frequenza di eccitazione con la frequenza naturale della configurazione geometrica corrente del guscio, in modo sfruttare l'aumento dell'ampiezza di oscillazione indotto per risonanza per favorire l'innesco dell'instabilità (Senba et al. [141], Arrieta et al. [9], Arrieta et al. [11]). Entrambe le strategie richiedono di disporre di informazioni adeguate riguardo l'impegno richiesto agli attuatori nel realizzare la transizione, eventualmente secondo differenti percorsi di carico, per poterne scegliere potenza e disposizione geometrica.

I problemi tecnologici evindenziati possono tradursi in specifiche richieste progettuali, da considerare nella formulazione o nella scelta dei modelli matematici interpretativi del fenomeno fisico.

Per quanto detto quest'ultimi devono essere selezionati sulla base della qualità delle informazioni che è possibile ottenere riguardo:

- i. il tipo e il numero delle configurazioni stabili *vincolate*;
- ii. la massima potenza richiesta agli attuatori per realizzare la transizione secondo un generico percorso di carico.

Come si vedrà discutendo i modelli attualmente disponibili queste richieste di progetto rimangono ancora, almeno in parte, inevase. Per comprendere la ragione occorre, prima di procedere alla descrizione dei modelli matematici attualmente disponibili, individuare i fattori e le cause che rendono un guscio multistabile.



(a)



(b)

Figura 2.14: esempio di laminato antisimmetrico bistabile, da Mattioni et al. [104].

## 2.2 ORIGINE DELLA MULTISTABILITÀ

Appare legittimo procedere a questa discussione partendo dal presupposto che chiedersi perché un guscio è multistabile è anche un po' ragionare su quanti modi si conoscono per realizzarne uno.

Il primo in ordine di tempo ha avuto origine dall'osservazione del comportamento di alcuni laminati compositi quando l'indurimento viene indotto in autoclave attraverso particolari programmi di temperatura e pressione (Hyer [86]).

Se la sequenza di laminazione non è simmetrica rispetto alla superficie media, al momento del raffreddamento a temperatura am-



biente la differenza nei coefficienti di espansione termica genera uno stato di sollecitazione anelastica capace di piegare il laminato in una configurazione curva, generalmente (ma non necessariamente) cilindrica (figura 2.14a). Non solo: in funzione delle temperature raggiunte nel corso del processo di produzione, il laminato può essere in equilibrio stabile anche in una seconda configurazione geometrica, di consueto anch'essa cilindrica (figura 2.14b).

Il comportamento descritto è molto complesso e di non facile lettura; basti pensare che è sufficiente variare il programma di temperatura o la sequenza di laminazione per ottenere una modifica, anche radicale, nel tipo o nel numero delle configurazioni stabili del laminato (Dano and Hyer [43], Potter and Weaver [127], Pirrera et al. [121]).

Quello che tuttavia appare evidente è che, almeno in questo caso, la multistabilità è il risultato di un qualche tipo di competizione tra forma geometrica e stato di presollecitazione interna, nello specifico di origine termica.

Che questa chiave di lettura sia corretta può essere chiarito con un esempio (Kebadze et al. [91]), prendendo come campione un bracciale a scatto in acciaio, di quelli che è possibile trovare senza troppa difficoltà nei negozi di giocattoli. Le due configurazioni stabili che il bracciale può assumere sono illustrate in figura 2.15. La prima osservazione che è possibile avanzare è che la curvatura trasversale del bracciale disteso e quella longitudinale del bracciale avvolto hanno segno opposto.

Per verificare se questa circostanza è in qualche modo sintomatica della presenza di uno stato di presollecitazione è sufficiente dividere il bracciale in piccole strisce, tagliando prima in direzione longitudinale, poi in direzione trasversale (figura 2.16). Poiché dopo questa operazione le strisce longitudinali presentano curvatura verso l'alto e quelle trasversali verso il basso è evidente che il bracciale disteso è sede di una presollecitazione. Questo significa che, se si appiattisse il bracciale, gli sforzi longitudinali e trasversali tenderebbero a fletterlo in direzioni opposte. La stabilità del bracciale nelle due configurazioni geometriche dipende quindi dal prevalere dell'una o dell'altra azione.

La bontà dell'intuizione è confermata da un'ulteriore prova. La figura 2.17 mostra due serie di strisce metalliche (questa volta realizzate con una lega rame-berillio), di curvatura opposta. È semplice verificare come sia sufficiente saldarle assieme, stirandole con l'ausilio di un telaio in legno, per ottenere un guscio bistabile una volta rimosso il telaio.

Gli esempi commentati confermano che la multistabilità di un guscio non è determinata tanto dall'origine della presollecitazione,



(a)



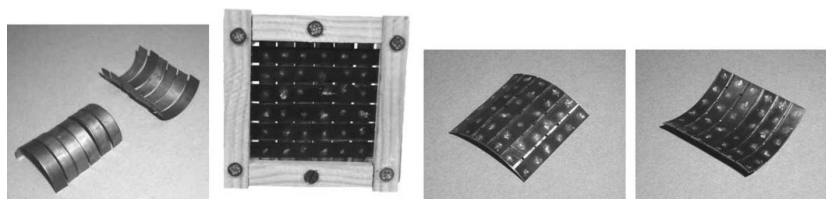
(b)

Figura 2.15: bracciale a scatto, da Kebadze et al. [91].



Figura 2.16: in un bracciale a scatto le strisce longitudinali e trasversali hanno curvature opposte; da Kebadze et al. [91].

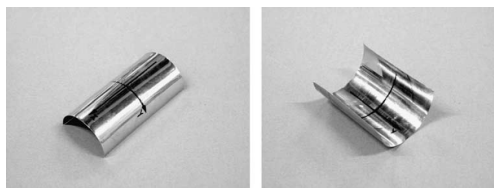
Figura 2.17: interpretazione della bistabilità di gusci isotropi presollecitati, da [Kebadze et al. \[91\]](#).



quanto piuttosto da quella sua competizione con la forma geometrica cui si accennava in precedenza.

Ad esempio, inducendo campi di sforzo residui attraverso ben calibrati cicli di plasticizzazione e scarico, è possibile realizzare gusci multistabili con materiali isotropi (ad esempio leghe metalliche). È il caso del guscio cilindrico in lega rame-berillio in figura 2.18 ([Kebadze et al. \[91\]](#)) o del guscio corrugato già mostrato in figura 2.10 ([Norman et al. \[112\]](#), [Norman et al. \[113\]](#))<sup>1</sup>.

Figura 2.18: esempio di guscio cilindrico isotropo bistabile, da [Kebadze et al. \[91\]](#).



<sup>1</sup> In quest'ultimo caso lo stato di sforzo residuo generato durante il processo di produzione si compone di due contributi: un campo di coppie flettenti, che tende a piegare il guscio nella seconda configurazione stabile, cilindrica; un campo di sforzi membranali, che sfruttando il braccio di leva realizzato dai corrugamenti mantiene equilibrio stabile la prima configurazione geometrica (2.19). Naturalmente è sufficiente appiattire i corrugamenti della prima configurazione per annullare il braccio di leva e consentire un'agevole transizione verso la configurazione cilindrica [Norman et al. \[112\]](#).

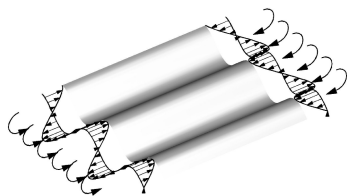


Figura 2.19: stato di presollecitazione nei gusci corrugati bistabili, da [Norman et al. \[112\]](#).

O altrimenti, con un'accurata azione di presollecitazione meccanica sul materiale non ancora indurito, è possibile ottenere gusci multistabili utilizzando laminati compositi con sequenze di laminazione simmetriche, come il guscio bistabile già visto in figura 2.11 ([Daynes et al. \[46\]](#), [Daynes et al. \[49\]](#)), .

Benché convincente questa lettura dell'origine della multistabilità non è ancora sufficientemente generale. Ad esempio non spiega perché è bistabile il guscio in figura 2.3, che non ricade tra gli esempi discussi. Quest'ultimo è infatti prodotto con un laminato composito con sequenza di laminazione antisimmetrica su uno stampo cilindrico e indurito a temperatura ambiente, cosicché la configurazione cilindrica aperta può con buona approssimazione considerarsi naturale, priva di qualsiasi stato di sforzo indotto ([Iqbal and Pellegrino \[87\]](#), [Iqbal et al. \[88\]](#)).

Infatti in questo caso, diversamente da quanto avviene nel bracciale a scatto, la curvatura trasversale della configurazione aperta e quella longitudinale della configurazione chiusa hanno segno concorde (figura 2.20). Le due configurazioni geometriche sono invece molto simili a quelle assunte dal flessometro metallico di figura 2.5.

Giacché quest'ultimo non è bistabile (ne è testimonianza la struttura di contenimento necessaria per mantenere in posizione il nastro nella configurazione avvolta) ed è realizzata con un materiale isotropo, appare evidente come la multistabilità debba essere in questo caso attribuita all'introduzione di una certa anisotropia nel comportamento del materiale.

Quest'ultimo assume dunque un ruolo analogo a quello della presollecitazione nei casi descritti in precedenza, e la multistabilità ha origine da un qualche tipo di competizione tra *forma* e *materiale*.

Questo tipo di soluzione presenta aspetti interessanti dal punto di vista applicativo. In primo luogo per l'assenza di effetti igrotermici significativi; in secondo luogo per la possibilità di ottenere un ottimo controllo sulla forma geometrica del guscio, che può essere prodotta praticamente coincidente con quella di progetto (al netto delle inevitabili tolleranze di manifattura). Ciò non avviene con altrettanta precisione né nel caso dei laminati compositi prodotti per laminazione in autoclave, né per i gusci bistabili ottenuti per presollecitazione meccanica<sup>2</sup>. In entrambi i casi si può ottenere una stima della forma geometrica del prodotto finito solo con una opportuna modellazione del processo produttivo, che introduce inevitabilmente errori superiori alle tolleranze di manifattura citate in precedenza.

Per contro in questi ultimi due casi realizzare la transizione tra le diverse configurazioni di equilibrio stabile richiede in genere agli attuatori una minore potenza.

### 2.3 MODELLI MATEMATICI

Per quanto detto la multistabilità di un guscio dipende in massima parte dalla forma geometrica della configurazione iniziale, dalle proprietà di simmetria della risposta del materiale e dall'eventuale presenza di uno stato di presollecitazione. Si tratta di un gioco piuttosto complesso cui prendono parte in concorso geometria ed elasticità: la forma iniziale seleziona i processi deformativi e le configurazioni geometriche più *favorevoli*, che possono essere modificati (anche radicalmente) con l'introduzione di un certo grado di anisotropia nella risposta del materiale o di un opportuno stato di presollecitazione.

Per le stesse ragioni per le quali è più semplice piegare un foglio di carta piuttosto che stirarlo, i processi deformativi più favorevoli sono quelli che comportano deformazioni nulle o comunque trascurabili delle fibre materiali appartenenti alla superficie media.

La loro selezione è tutt'altro che banale, perché chiama in causa l'accoppiamento (geometrico) tra le suddette deformazioni e la componente del campo di spostamento normale alla superficie media; è

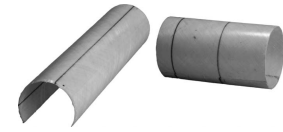


Figura 2.20: esempio di guscio cilindrico bistabile in assenza di presollecitazione, da Guest and Pellegrino [82].

<sup>2</sup> È sufficiente osservare che le due forme geometriche di figura 2.17 hanno curvature *minori* rispetto a quelle delle strisce metalliche dalle quali sono state ottenute.

in ragione di questo accoppiamento che si rivela più comodo avvolgere un foglio di carta attorno ad un cilindro piuttosto che stenderlo su una superficie sferica.

La natura di questo accoppiamento verrà ampiamente discussa nel prossimo capitolo. Per ora è sufficiente riconoscere che finché la curvatura dei gusci si mantiene moderata, condizione in genere rispettata nelle applicazioni presentate in precedenza, il modello di Föppl-von Kármán (Föppl [70], Von Kármán [155], Marguerre [103]) si rivela il più semplice tra quelli in grado di tener conto delle non linearità geometriche associate agli effetti appena descritti. Non stupisce quindi che sia anche il più impiegato nello studio e nell'analisi della multistabilità di gusci elastici sottili.

Ma individuare il modello non basta. Discutendo i più comuni problemi tecnologici, si è avuto modo di sottolineare l'importanza progettuale di ottenere informazioni il più possibile affidabili riguardo lo *scenario di stabilità globale*; si comprende, sotto questo nome, la conoscenza del tipo e del numero delle configurazioni di equilibrio stabile e la stima dell'impegno richiesto all'attuatore per realizzare la transizione fra le stesse secondo un generico percorso di carico.

È di tutta evidenza che questo tipo di informazioni, di carattere *qualitativo* ancor prima che quantitativo, non può ottenersi con l'impiego delle tradizionali tecniche numeriche di discretizzazione e soluzione delle equazioni di campo (e.g. metodo degli elementi finiti, metodo delle differenze finite): l'analisi numerica di sistemi non lineari a molti gradi di libertà con equilibri multipli è compito improbo, difficile da gestire anche con i più sofisticati codici commerciali<sup>3</sup>.

Piuttosto si rende necessario il ricorso a modelli a pochi gradi di libertà, che consentano di ottenere agevolmente le menzionate informazioni e condurre analisi di tipo parametrico.

Il problema è dunque quello di individuare tra le possibili strategie di discretizzazione del modello di Föppl-von Kármán, quelle più utili allo scopo; quelle cioè che consentano di proiettare il funzionale energia di deformazione elastica ad esso associato su spazi di dimensione finita e *ridotta*, preservandone al contempo l'andamento globale (figura 2.21).

A tal fine gli approcci possibili sono almeno due. Il primo, introdotto da (Hyer [86]), si basa su un'espansione polinomiale di tutte le componenti del campo di spostamento: la tecnica di discretizzazione è quindi simile a quella del metodo di Rayleigh-Ritz. Il metodo, per la sua relativa semplicità ha trovato largo impiego ed è stato utilizzato con successo nella predizione della forma e della stabilità delle configurazioni di equilibrio di laminati antisimmetrici prodotti per laminazione in autoclave (Dano and Hyer [43], Peeters et al. [116], Eckstein et al. [63]). Per questa stessa classe di gusci bistabili il mo-

<sup>3</sup> Naturalmente tanto l'attività sperimentale quanto l'impiego di modelli discreti a molti gradi di libertà rimangono imprescindibili in una seconda fase progettuale: quella in cui, selezionate le scelte ritenute più idonee (ad esempio in termini di forma geometrica e proprietà del materiale), occorre prevedere con *accuratezza* la risposta del sistema.

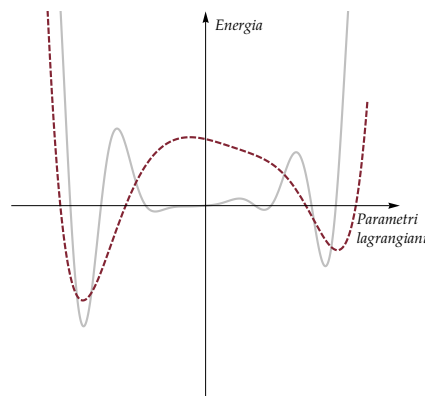


Figura 2.21: in grigio è rappresentato il profilo dell'energia di deformazione elastica di un (ipotetico) guscio multistabile, in rosso la sua proiezione su uno spazio di dimensione finita. Il profilo in rosso rappresenta quindi l'energia di deformazione elastica di un modello di guscio a pochi gradi di libertà. Malgrado la riduzione dimensionale, rimane affidabile sia la predizione del numero di configurazioni di equilibrio stabile (almeno di quelli più robusti, corrispondenti alle *buche* di energia più pronunciate) che del tipo (in qualche modo in relazione alla *distanza* tra le buche di energia). Altrettanto affidabile è la stima della massima potenza richiesta all'attuatore per realizzare la transizione fra le due configurazioni stabili, proporzionale all'altezza della *barriera* di energia che le separa.

dello si è rivelato efficace anche nella valutazione delle capacità di controllo e gestione dell'attuazione, sia statica (Schultz and Hyer [138], Dano and Hyer [44]) che dinamica (Arrieta et al. [10]). Il limite principale è il rapido aumento nel numero di gradi di libertà necessari per mantenere il modello affidabile quando risulta indispensabile considerare le condizioni al bordo<sup>4</sup>, siano esse di tipo cinematico (per la presenza di vincoli, (Mattioni et al. [105]) o statico (Aimmanee and Hyer [1]): i modelli proposti contano rispettivamente venti e ventitre gradi di libertà.

Con tutta evidenza modelli di questo tipo non consentono di delineare quello che si è definito scenario di stabilità globale. Rimangono tuttavia di grande utilità in molti casi specifici, ad esempio per tutte quelle applicazioni che richiedono una valutazione (anche accurata) dell'evoluzione del sistema al variare di un parametro di progetto (temperatura, forza di attuazione, etc.).

Il secondo approccio si basa su un'idea altrettanto semplice, la cui prima applicazione si deve a Mansfield [101]. Si è detto che tra i modelli di guscio non lineari, quello di Föppl-von Kármán consente di tener conto delle non linearità dovute all'accoppiamento geometrico tra estensione e flessione in maniera particolarmente semplice. Quello che non si è ancora detto è che, limitando le configurazioni ammissibili alle sole con *curvatura uniforme*, è spesso possibile esprimere in maniera *esatta* la componente membranale dell'energia di deformazione elastica (quella spesa per deformare le fibre della superficie media del guscio) in funzione dei parametri di curvatura scelti. Finché l'ipotesi di curvatura uniforme può ritenersi accettabile, i modelli così ottenuti permettono di rappresentare fedelmente l'energia di deformazione elastica<sup>5</sup> con al più tre gradi di libertà (le due curvature flessionali e la curvatura torsionale della superficie media del guscio). Non solo: essi permettono di ottenere soluzioni analitiche o comunque semi-analitiche. Per queste ragioni i modelli a curvatura uniforme si sono rivelati uno strumento particolarmente utile nell'analisi della multistabilità di gusci elastici sottili. Modelli di questo tipo sono stati impiegati con successo nella predizione della forma e della stabilità delle configurazioni di equilibrio di laminati antisimmetrici prodotti per laminazione in autoclave (Fernandes et al. [68]), di gusci isotropi presollecitati, sia cilindrici (Kebadze et al. [91]) che corrugati (Norman et al. [113]), e di gusci cilindrici *non* presollecitati, sia isotropi che anisotropi (Iqbal and Pellegrino [87], Iqbal et al. [88], Galletly and Guest [78], Guest and Pellegrino [82]).

Quest'ultimo caso è particolarmente interessante perché consente di iniziare a chiarire la natura di quella competizione tra forma e materiale finora annunciata ma non ben definita. Quello che emerge è che, in assenza di presollecitazione, un guscio di forma *cilindrica*:

<sup>4</sup> Ad esempio per valutare l'influenza del rapporto fra i lati sull'esistenza e la forma delle configurazioni di equilibrio stabile che si ottengono a raffreddamento avvenuto (Gigliotti et al. [80]).

<sup>5</sup> Si deve tener presente che nei gusci elastici sottili il contributo membranale all'energia di deformazione elastica è quello *dominante*. La possibilità di averne una rappresentazione *esatta* (naturalmente nei limiti delle ipotesi cinematiche introdotte) è quindi estremamente interessante ai fini della formulazione di modelli discreti.

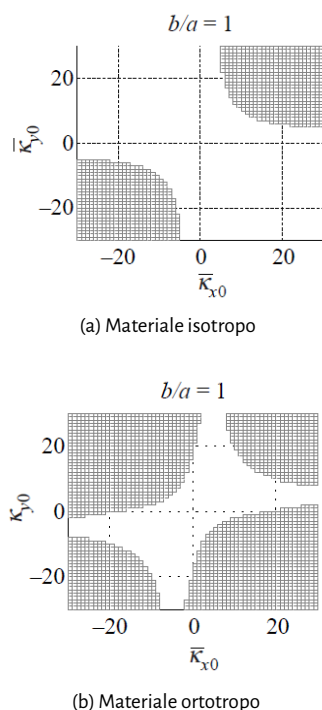


Figura 2.22: per un guscio di pianta ellittica con rapporto fra i semiassi  $b/a$  è possibile individuare le coppie di curvature iniziali (adimensionali)  $\bar{\kappa}_{x0}, \bar{\kappa}_{y0}$  ( $\bar{\kappa}_{xy0} = 0$ ) cui corrispondono gusci bistabili (in grigio), da Seffen [139].

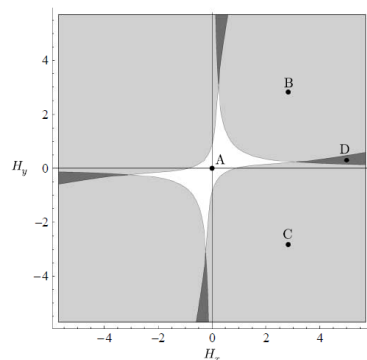


Figura 2.23: il grafico è lo stesso già rappresentato in figura 2.22b: estendendo l'intervallo di indagine è possibile osservare l'esistenza di alcune coppie di curvature iniziali ( $H_x = \bar{\kappa}_{x0}, H_y = \bar{\kappa}_{y0}$ ) cui corrispondono gusci tristabili (in grigio scuro), da Vidoli and Maurini [152].

se *isotropo* ha una sola configurazione di equilibrio stabile, quella naturale; se realizzato con un laminato composito *antisimmetrico* ha due configurazioni di equilibrio stabile, la seconda sempre cilindrica ma chiusa, avvolta come un piccolo rotolo (come quella di figura 2.20); se realizzato con un laminato composito *simmetrico* ha ancora due configurazioni di equilibrio stabile, ma la seconda questa volta tende ad avvolgersi ad elica.

Dal momento che tutte le affermazioni precedenti hanno ottenuto l'indispensabile riscontro sperimentale, questi risultati inducono ad estendere e rendere ancor più sistematica l'indagine sulla relazione tra forma iniziale e materiale. Ciò è possibile assumendo le curvature iniziali del guscio (naturalmente supposte uniformi) quali veri e propri *parametri di progetto*, rispetto ai quali valutare il numero delle configurazioni di equilibrio stabile al variare delle proprietà del materiale.

Procedendo in questa direzione, (Seffen [139]) ha mostrato che: anche in assenza di presollecitazione un guscio isotropo può essere bistabile, purché venga realizzato con curvature concordi e sufficientemente grandi (figura 2.22a); la scelta di curvature iniziali che garantisce la bistabilità aumenta considerevolmente per i gusci ortotropi (figura 2.22b).

L'analisi è stata ulteriormente estesa da (Vidoli and Maurini [152]), che hanno evidenziato come per i gusci ortotropi sia possibile prevedere anche l'esistenza di una terza configurazione di equilibrio stabile (figura 2.23) e hanno contestualmente discusso l'influenza dei parametri materiali sulla tristabilità. Risultati simili per gusci nastriformi sono stati ottenuti da (Giomi and Mahadevan [81]).

Disporre di modelli dotati di una simile capacità di sintesi è estremamente utile in una fase di progettazione preliminare, perché consente di selezionare tra le scelte possibili (in termini di forma e materiale) quelle più idonee al conseguimento degli obiettivi prestabiliti. Ad esempio, sulla base delle indicazioni contenute in (Vidoli and Maurini [152]), con riferimento al punto *D* di figura 2.23) è stato possibile realizzare il guscio ortotropo tristabile in figura 2.24 (Coburn et al. [39]).

L'ipotesi di curvatura uniforme è in genere accettabile in assenza di forze esterne e finché il guscio non è vincolato ed è sufficientemente sottile da rendere trascurabili gli effetti di bordo (Galletly and Guest [77]). Non è più tale in tutti i casi in cui risulta decisivo il rispetto delle condizioni al bordo, sia di tipo statico che cinematico.

Tuttavia, recentemente, (Vidoli [151]) ha mostrato che l'ipotesi può essere indebolita senza indurre il significativo aumento del numero di gradi di libertà che si riscontra nei metodi basati su espansioni polinomiali del campo di spostamento. Si tratta anche in questo ca-

so di sfruttare la semplicità formale dell'accoppiamento geometrico tra estensione e flessione per ottenere una rappresentazione dell'energia membranale fedele e funzione di soli (e pochi) parametri di curvatura. Come si vedrà la strategia di riduzione proposta è, per logica e interpretazione meccanica, simile al metodo di Maxwell-Mohr utilizzato nella soluzione di sistemi di travi iperstatici.

La tecnica è stata impiegata con successo per formulare un modello a due gradi di libertà capace di imporre il rispetto, almeno in media, dell'annullamento delle coppie flettenti di estremità in gusci liberi al bordo, condizione che impone curvature almeno *quadratiche*. È significativo osservare che il modello consente di riprodurre in maniera piuttosto accurata i risultati di (Aimmanee and Hyer [1]), ottenuti con un modello avente un numero di gradi di libertà quasi otto volte superiore.

Modelli con la stessa capacità sintesi non sono attualmente disponibili per gusci vincolati al bordo.

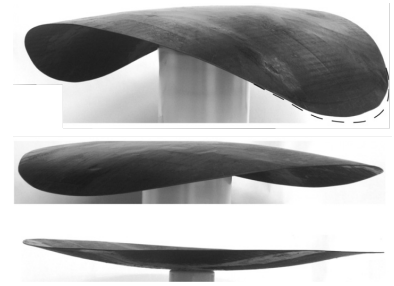


Figura 2.24: esempio di guscio ortotropo tristabile (Coburn et al. [39]).





Sin dalla loro proposta le equazioni di Föppl-von Kármán (Föppl [70], Von Kármán [155]) sono state utilizzate ampiamente e con successo per descrivere i principali fenomeni di instabilità di piastre sottili. Senza grandi complicazioni formali il modello può essere facilmente esteso per tener conto della presenza di deformazioni inelastiche iniziali (Mansfield [102]) o comprendere il caso in cui la forma iniziale sia curva, purché sufficientemente ribassata (Marguerre [103]). Così generalizzato il modello trova impiego in molti campi dell'ingegneria e della fisica applicata. Ad esempio è stato utilizzato per studiare l'instabilità aeroelastica di pannelli (Dowell and Ben-diksen [60]), i fenomeni di corrugamento nei tessuti molli (Dervaux et al. [53]), l'instabilità di laminati compositi soggetti a carichi termici (Dano and Hyer [43]), oppure ancora per valutare gli sforzi residui nei film sottili depositi su un substrato (Freund [73]), mentre la sua utilità nello studio della multistabilità di gusci elastici sottili è stata ampiamente discussa nel capitolo precedente.

Un simile successo è dovuto principalmente alla relativa semplicità delle equazioni di campo<sup>1</sup>, evidente soprattutto nel confronto con le altre teorie non lineari di piastre o gusci, che ne motiva l'impiego in ambiti così apparentemente differenti. Tale semplicità si ottiene tuttavia al prezzo di alcune semplificazioni, di natura sia geometrica che meccanica, la cui reale evidenza, insieme alla coerenza delle relazioni a partire da esse dedotte, è stata per lungo tempo motivo di discussione<sup>2</sup>. Solo in tempi relativamente recenti il modello ha ottenuto una collocazione ben definita tra le teorie strutturali razionalmente dedotte dall'elasticità tridimensionale (Ciarlet [30], Podio-Guidugli [124], Friesecke et al. [74]). Per questa ragione, nel presentare il modello, si è scelto di considerare il minor numero possibile di ipotesi e fare attenzione, nella deduzione delle conseguenze, a non sacrificare né il contenuto geometrico e meccanico delle relazioni ottenute né la chiarezza formale del procedimento seguito.

### 3.1 ELASTICITÀ TRIDIMENSIONALE

Iniziamo richiamando le relazioni fondamentali dell'elasticità tridimensionale (Gurtin [83], Ciarlet [32], Truesdell [146], Podio-Guidugli [123]). Scegliamo in particolare un solido deformabile di forma cilindrica i cui punti materiali siano, in ogni istante, in corrispondenza

<sup>1</sup> Come vedremo si tratta di un sistema di due equazioni *semilineari* con parte principale biarmonica, più semplice dei sistemi di equazioni *quasilineari* tipici di molti problema di elasticità non lineare.

<sup>2</sup> Al punto da poter affermare che le equazioni di von Kármán '*... play an almost mythical role in applied mathematics*' (Ciarlet [33]) e considerare tale teoria '*... as handed down by some higher power (a Hungarian wizard, say) and study it as a matter of pure analysis*' (Truesdell [145]).

biunivoca con i punti geometrici di un sottoinsieme limitato, aperto e connesso dello spazio euclideo tridimensionale, che indichiamo  $\mathcal{E}$ . Indichiamo invece con  $\Omega \subset \mathcal{E}$  la regione occupata dal corpo in assenza di azioni esterne, sia di carattere meccanico (forze) che geometrico (spostamenti o deformazioni imposte), che scegliamo come configurazione di riferimento. Indichiamo con  $\Gamma$  il bordo di  $\Omega$ , di normale  $\underline{\nu}_\Gamma$ , che supponiamo sufficientemente regolare. Introdotta il riferimento cartesiano ortonormale  $\{0; \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ , con  $\underline{e}_z$  diretto secondo l'asse del cilindro, la configurazione di riferimento  $\Omega$  è individuata dal prodotto cartesiano:

$$\Omega = S \times [-t/2, t/2]$$

dove  $S$  e  $t$  sono rispettivamente la sezione e l'altezza del cilindro.

Una qualsiasi altra configurazione è ottenuta a partire dalla configurazione di riferimento per mezzo del trasporto:

$$\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathcal{E}$$

Affinché la configurazione corrente  $\phi(\bar{\Omega})$  sia fisicamente ammissibile la mappa  $\phi$  deve essere continua, biiettiva e tale da preservare l'orientamento. Quest'ultima condizione si esplicita imponendo che sia  $\det \nabla \phi > 0$  in ogni punto  $P \in \bar{\Omega}$ , con  $\nabla \phi$  tensore gradiente del trasporto.

Per operare un confronto tra la configurazione corrente  $\phi(\bar{\Omega})$  e la configurazione di riferimento  $\bar{\Omega}$  occorre stabilire quali trasporti siano meccanicamente rilevabili, ossia non rigidi. Intuitivamente un trasporto rigido si ottiene se la configurazione corrente è ottenuta per semplice rotazione e traslazione della configurazione di riferimento:

$$\phi(P) = \phi_0 + \underline{Q}(P - O) \quad \forall P \in \bar{\Omega}$$

dove  $\underline{Q}$  è un tensore ortogonale proprio.

Se allora  $\phi$  è un trasporto rigido, deve essere  $\nabla \phi(P) = \underline{Q}$  in tutti i punti  $P \in \bar{\Omega}$  e dunque i trasporti rigidi sono caratterizzati dalla condizione:

$$\nabla \phi^T(P) \nabla \phi(P) = \underline{I} \quad \forall P \in \bar{\Omega} \quad (3.1)$$

dove il tensore simmetrico e definito positivo  $\underline{C} := \nabla \phi^T \nabla \phi$  è il tensore destro di Cauchy-Green.

La (3.1) ha un importante significato geometrico. Infatti le coordinate cartesiane  $(x, y, z)$  possono essere considerate un sistema di coordinate curvilineo per la configurazione corrente  $\phi(\bar{\Omega})$  il cui tensore metrico ha componenti covarianti coincidenti con quelle del tensore destro di Cauchy-Green:

$$\nabla \phi \underline{e}_i \cdot \nabla \phi \underline{e}_j = \underline{C} : \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = C_{ij}$$

In altri termini il tensore  $\underline{C}$  rappresenta la *metrica* indotta dal trasporto  $\phi$  sulla configurazione di riferimento  $\bar{\Omega}$  e la (3.1) può leggersi come un confronto tra la metrica preesistente  $\underline{I}$  e la nuova metrica  $\underline{C}$ : quando quest'ultime coincidono il trasporto è rigido.

Il tensore  $\underline{C}$  definisce completamente il trasporto, poiché è possibile dimostrare che due trasporti  $\phi, \tilde{\phi}$  tali che in ogni punto sia  $\underline{C} = \tilde{\underline{C}}$  differiscono unicamente per un trasporto rigido.

Conoscendo  $\underline{C}$  è quindi possibile misurare lunghezze, angoli, aree e volumi sulla configurazione corrente  $\phi(\Omega)$ . Risulta quindi naturale assumere come misura di deformazione il tensore simmetrico di Green-Saint Venant:

$$\underline{E}(\phi) := \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{I})$$

che valuta il *difetto* di rigidità di un trasporto.

In alternativa al trasporto  $\phi$  la configurazione corrente può essere descritta mediante il campo vettoriale di spostamento  $\underline{u} := \phi - \iota$ , con  $\iota$  identità in  $\mathcal{E}$ , rispetto al quale il tensore di Green-Saint Venant si scrive:

$$\underline{E}(\underline{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u}^T + \nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T \nabla \underline{u}) \quad (3.2)$$

Supponiamo ora che il corpo sia sottoposto all'azione di forze di volume  $\underline{f}$  e di superficie  $\underline{g}$  agenti su una porzione del bordo  $\Gamma_N \subset \Gamma$ . Sia invece  $\underline{u} = \underline{u}_0$  sulla restante parte del bordo  $\Gamma_D = \Gamma \setminus \Gamma_N$ .

Se il materiale è iperelastico e le azioni esterne conservative e indipendenti dalla configurazione, il campo incognito  $\underline{u}$  rende stazionario il funzionale energia potenziale totale:

$$\mathcal{W}(\underline{u}) = \int_{\Omega} W(\underline{E}(\underline{u})) - \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{u} - \int_{\Gamma_N} \underline{g} \cdot \underline{u} \quad (3.3)$$

definito sullo spazio dei campi  $\underline{u}$  cinematicamente ammissibili. Nella (3.3) il termine:

$$\mathcal{E}(\underline{u}) := \int_{\Omega} W(\underline{E}(\underline{u}))$$

rappresenta l'energia di deformazione elastica del materiale, supposto omogeneo. La funzione densità di energia di deformazione elastica  $W$  dipende solo dal tensore di Green-Saint Venant e permette di valutare la risposta del materiale in ogni punto della configurazione di riferimento attraverso il secondo tensore di Piola-Kirchhoff:

$$\underline{\Sigma}(\underline{E}(\underline{u})) = \frac{\partial W}{\partial \underline{E}}(\underline{E})$$

Ad esempio, indicando con  $\lambda$  e  $\mu$  le costanti di Lamè, per un materiale isotropo ed omogeneo di Saint Venant-Kirchhoff:

$$W(\underline{E}) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr } \underline{E})^2 + \mu \text{tr } \underline{E}^2$$

e dunque:

$$\underline{\Sigma}(\underline{E}) = \lambda \operatorname{tr} \underline{E} \underline{I} + 2\mu \underline{E} = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr} \underline{E} \underline{I} + \underline{E} \right) \quad (3.4)$$

dove si è indicato con  $E$  e  $\nu$  il modulo di Young e il coefficiente di Poisson.

Nelle ipotesi considerate di iperelasticità del materiale e conservatività delle azioni esterne la condizione di stazionarietà dell'energia potenziale totale  $\mathcal{W}'(\underline{u})\underline{\dot{u}} = 0$  è formalmente equivalente all'espressione del principio dei lavori virtuali:

$$\int_{\Omega} \underline{\Sigma}(\underline{E}) : \underline{E}'(\underline{u})\underline{\dot{u}} = \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{\dot{u}} + \int_{\Gamma_N} \underline{g} \cdot \underline{\dot{u}}$$

e il campo incognito  $\underline{u}$  che rende stazionaria l'energia potenziale totale è soluzione del problema ai valori al bordo<sup>3</sup>:

$$-\operatorname{Div} [(\underline{I} + \nabla \underline{u})\underline{\Sigma}] = \underline{f} \quad \text{in } \Omega \quad (3.5a)$$

$$\underline{u} = \underline{u}_0 \quad \text{su } \Gamma_D \quad (3.5b)$$

$$(\underline{I} + \nabla \underline{u})\underline{\Sigma}\underline{\nu}_\Gamma = \underline{g} \quad \text{su } \Gamma_N. \quad (3.5c)$$

<sup>3</sup> In altre parole se il materiale è iperelastico e le forze esterne conservative risolvere il problema al bordo equivale, almeno formalmente, a cercare i campi vettoriali  $\underline{u}$  ammissibili tali che la derivata di Fréchet  $\mathcal{W}'(\underline{u})$  sia identicamente nulla.

### 3.2 DALL'ELASTICITÀ TRIDIMENSIONALE ALLE TEORIE STRUTTURALI DI PIASTRA

Supponiamo ora che l'altezza del cilindro sia molto inferiore a qualsiasi dimensione caratteristica  $L$  della sezione (ad esempio possiamo definire  $L = \sqrt{\operatorname{area} S}$ ). L'altezza  $t$  diventa allora lo spessore di un corpo cilindrico molto sottile, una piastra, in cui:

$$t \ll L$$

È lecito supporre che sia possibile descrivere il comportamento meccanico di un corpo siffatto, almeno nei suoi tratti essenziali, riducendo la dimensione del problema, ossia considerando un problema bidimensionale ed assumendo che tutta la meccanica possa essere descritta conoscendo unicamente quanto avviene sul piano medio:

$$\omega = S \times \{0\}$$

Questa *riduzione dimensionale* può ottenersi seguendo un approccio diretto, cioè scegliendo di analizzare il comportamento meccanico di corpi intrinsecamente bidimensionali postulandone in maniera assiomatica le caratteristiche cinematiche e inerziali, i principi di bilancio e le relazioni costitutive (Naghdi [109], Naghdi [110]); oppure scegliendo un approccio deduttivo, derivandone formalmente le

relazioni fondamentali a partire da quelle proprie dell'elasticità tridimensionale. Quest'ultima operazione è possibile procedendo ad una espansione asintotica formale dei campi di interesse rispetto al parametro di spessore (*metodo del riscaldamento*, [Ciarlet and Destuynder \[36\]](#), [Ciarlet \[31\]](#), [Ciarlet \[33\]](#)) oppure introducendo un certo numero di condizioni di vincolo interno<sup>4</sup>, imposte in modo da limitare le configurazioni che il corpo può assumere alle sole ritenute ammissibili (*metodo dei vincoli interni*, [Podio-Guidugli \[122\]](#), [Antman and Marlow \[4\]](#), [Lembo and Podio-Guidugli \[95\]](#)). La giustificazione e la validazione dei modelli ottenuti, oltre che con i metodi citati, può poi avvenire con l'impiego di tecniche di convergenza variazionale ([Bourquin et al. \[19\]](#), [Friesecke et al. \[75\]](#), [Friesecke et al. \[76\]](#)) o anche in un contesto più generale che contempli sia le istanze analitiche del metodo di riscaldamento che quelle meccaniche del metodo dei vincoli interni ([Miara and Podio-Guidugli \[107\]](#)).

In questa sede, volendo presentare il modello di Föppl-von Kármán nella maniera più semplice possibile, si ritiene opportuno procedere privilegiando un approccio euristico, evitando per quanto possibile i passaggi formali e facendo leva sull'intuizione per chiarire ed interpretare tanto le ipotesi geometriche e meccaniche quanto le conseguenze da esse indotte. Per farlo si può partire dalla descrizione degli aspetti deformativi della forma cui il solido tridimensionale assomiglia (una regione piana nella configurazione iniziale, una superficie nella configurazione attuale) e definire delle opportune misure di deformazione filtrando i trasporti rigidi. Da questo punto di vista peraltro non c'è differenza con il procedimento seguito nel paragrafo precedente.

### Geometria ed elasticità

Concentriamo quindi l'attenzione sul piano medio, che identifichiamo con la regione  $\omega$  nella configurazione di riferimento e con la superficie  $\underline{\theta}(\omega)$  nella configurazione corrente. Supponiamo che  $\underline{\theta}(\omega)$  non abbia punti singolari cosicché in ogni punto  $p \in \underline{\theta}(\omega)$  i vettori tangenti  $\partial_x \underline{\theta}$  e  $\partial_y \underline{\theta}$  siano linearmente indipendenti<sup>5</sup>. In ogni punto  $p$  risultano quindi ben definiti il piano tangente e la normale alla superficie:

$$T_p \underline{\theta}(\omega) := \text{span}(\partial_x \underline{\theta}) \quad \mathbf{n}(p) := \frac{\partial_x \underline{\theta} \times \partial_y \underline{\theta}}{\|\partial_x \underline{\theta} \times \partial_y \underline{\theta}\|}$$

ed è possibile definire il *riferimento di Gauss*, ossia la base locale  $\{\partial_x \underline{\theta}, \mathbf{n}\}$ .

Come in precedenza occorre distinguere i trasporti rigidi da quelli non rigidi, ossia meccanicamente rilevabili. In completa analogia con

<sup>4</sup> I due metodi sono differenti ma complementari: da una parte l'esame delle soluzioni del problema limite ottenuto con il metodo di riscaldamento può suggerire e giustificare formalmente le ipotesi cinematiche e la scelta delle condizioni di vincolo interno; dall'altra il metodo dei vincoli interni può consentire un'interpretazione meccanica immediata del problema limite e delle leggi di scala a partire dalle quali esso è dedotto ([Podio-Guidugli \[125\]](#)).

<sup>5</sup> In quanto segue utilizzeremo indistintamente  $(x, y)$  e  $(x_1, x_2)$  e ometteremo sistematicamente le dimostrazioni; per un'esposizione più completa si rimanda ad esempio a [Do Carmo \[55\]](#) o [Ciarlet \[35\]](#).

il caso tridimensionale si potrebbe pensare che un trasporto non rigido sia completamente definito dalla conoscenza del tensore metrico superficiale, che indicheremo con  $\underline{A}$ , le cui componenti covarianti sono definite dalle:

$$\partial_\alpha \underline{\theta} \cdot \partial_\beta \underline{\theta} =: a_{\alpha\beta}$$

e che, come il tensore di Cauchy-Green, contiene tutte le informazioni sulla metrica della configurazione corrente  $\underline{\theta}(\omega)$ . Ci chiediamo cioè se due trasporti distinti  $\underline{\theta}, \tilde{\underline{\theta}}$  che condividono lo stesso tensore metrico si possono ottenere l'uno dall'altro semplicemente combinando una rotazione ed una traslazione:

$$\underline{\theta}(p) = \underline{\theta}_0 + \underline{Q}\tilde{\underline{\theta}}(p) \quad \forall p \in \bar{\omega} \quad (3.6)$$

A differenza del caso tridimensionale la risposta è in questo caso negativa: una superficie, che idealmente realizza il nostro corpo bidimensionale nella configurazione corrente, non è infatti univocamente (cioè a meno di un trasporto rigido) definita dalla sua metrica. Ad esempio si può dimostrare che il trasporto che realizza un cilindro o un cono a partire da un piano non altera la metrica ma non è descritto da una legge del tipo (3.6).

L'informazione geometrica persa nella riduzione dimensionale è contenuta in un secondo campo tensoriale superficiale, che introduce il concetto di *curvatura* di una superficie.

Quest'ultimo può essere definito in analogia con il concetto di curvatura principale di una curva: così come in ogni punto di una curva la curvatura principale misura la velocità con la quale varia localmente la tangente alla curva stessa, in ogni punto la curvatura di una superficie misura la velocità con la quale varia localmente il piano tangente alla superficie o, il che è equivalente, la normale alla superficie. Quindi, poiché localmente è possibile confondere superficie e piano tangente, la curvatura di una superficie in ogni suo punto  $p$  è misurata dalla mappa lineare  $\underline{B} : T_p \underline{\theta}(\omega) \rightarrow T_p \underline{\theta}(\omega)$  coincidente, a meno del segno, con il gradiente superficiale della normale in  $p$ :

$$\underline{B} := -\nabla^S \underline{n}$$

le cui componenti covarianti sono definite dalle:

$$b_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha \underline{n} \cdot \partial_\beta \underline{\theta}$$

Il segno meno è introdotto per ragioni di comodo: così facendo infatti, scelta una qualsiasi direzione  $\underline{d} \in T_p \underline{\theta}(\omega)$ , con  $\|\underline{d}\| = 1$ , il termine  $\underline{B}\underline{d} \cdot \underline{d}$  è uguale alla curvatura principale della curva piana che si ottiene intersecando la superficie con il piano individuato da  $\underline{d}$  e dalla normale  $\underline{n}$ . Inoltre, poiché il vettore  $\underline{B}\underline{d}$  descrive la variazione

infinitesima del versore normale nella generica direzione  $\underline{d}$ , che dipende unicamente dalla forma locale della superficie, il tensore  $\underline{B}$  è detto *operatore di forma*<sup>6</sup>.

Il tensore metrico  $\underline{A}$  e l'operatore di forma  $\underline{B}$  definiscono completamente il trasporto  $\underline{\theta}(\omega)$ , nel senso che due trasporti distinti  $\underline{\theta}$ ,  $\tilde{\underline{\theta}}$  che abbiano uguale tensore metrico e operatore di forma differiscono unicamente per un trasporto rigido.

Ma l'esistenza di due campi tensoriali distinti rende lecito chiedersi se il tensore metrico  $\underline{A}$  e l'operatore di forma  $\underline{B}$  siano o meno tra loro indipendenti. Ciò equivale a chiedersi se, comunque scelti un tensore simmetrico e definito positivo  $\tilde{\underline{A}}$  e un tensore simmetrico  $\tilde{\underline{B}}$  questi sono *sempre* il tensore metrico e l'operatore di forma di una superficie.

Anche in questo caso la risposta è negativa, perché si può dimostrare che in ogni punto devono essere verificate le equazioni di Gauss e Codazzi-Mainardi che, in maniera puramente simbolica possiamo scrivere nella forma:

$$\det \underline{B} = F_1(a_{\alpha\beta}, \partial_\alpha a_{\alpha\beta}, \partial_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}) \quad (3.7a)$$

$$F_2(a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, \partial_\alpha b_{\alpha\beta}) = 0 \quad (3.7b)$$

In particolare la (3.7a) stabilisce che in ogni punto della superficie il determinante dell'operatore di forma, detto anche *curvatura gaussiana* e d'ora in avanti indicato con  $K$ , è funzione *solo* dei coefficienti del tensore metrico e delle loro derivate<sup>7</sup>.

Ne segue che ad una variazione di curvatura gaussiana corrisponde necessariamente una variazione delle componenti del tensore metrico. In realtà c'è di più: si può infatti dimostrare che se la curvatura gaussiana rimane invariata tale rimane anche il tensore metrico, cioè la trasformazione è (localmente) isometrica. Vedremo a breve quanto profonde saranno le conseguenze meccaniche di questi risultati.

In analogia a quanto fatto nel caso tridimensionale i campi:

$$\frac{1}{2}(\underline{A} - \underline{I}), \quad \underline{B} \quad (3.8)$$

che misurano il difetto di rigidità del trasporto  $\underline{\theta}$ , risultano essere delle buone misure dello stato di deformazione della configurazione corrente  $\underline{\theta}(\omega)$ .

Si è detto che se il materiale è iperelastico ammette l'esistenza di una funzione densità di energia potenziale elastica che ne caratterizza completamente la risposta meccanica. Si è anche detto che, se il corpo è sottile, si può assumere che l'energia venga spesa principalmente per deformarne il piano medio. Per corpi di questo tipo, quindi, l'energia di deformazione elastica si scinde in maniera naturale in

<sup>6</sup> Noto il tensore  $\nabla \underline{\theta}^T \nabla \underline{\theta}$  tutte le informazioni sulla metrica della superficie  $\underline{\theta}(\omega)$  possono essere dedotte senza mai far riferimento allo spazio di immersione, in questo caso  $\mathbb{R}^3$ . Non è così naturalmente per l'operatore di forma  $\underline{B}$ , che dipende da  $\mathbb{R}^3$ . Da un punto di vista geometrico si dice che  $\underline{B}$  non è una grandezza intrinseca della superficie. È lecito aspettarsi che tali siano anche tutte le grandezze da  $\underline{B}$  derivate. Vedremo che in realtà *non* è così.

<sup>7</sup> Per la (3.7a) la curvatura gaussiana, che per definizione si ottiene dall'operatore di forma  $\underline{B}$ , è una grandezza *intrinseca*, in quanto dipende unicamente dalla metrica della superficie. Il fatto è talmente sorprendente che Gauss definì *egregio* il teorema, di cui è egli stesso autore, che stabilisce la validità della (3.7a).

due contributi:

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega} W(\underline{\mathbf{E}}) \sim \int_{\Omega} \check{W}_m \left( \frac{\underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{I}}}{2} \right) + \int_{\Omega} \check{W}_b(\underline{\mathbf{B}}) \quad (3.9)$$

Il primo misura l'energia che è necessario spendere per modificare la metrica del piano medio, ossia per provocarne elongazioni, accorciamenti o scorrimenti delle fibre. Il secondo misura l'energia che è necessario spendere per modificare la curvatura del piano medio, ossia per fletterlo. Per queste ragioni  $\check{W}_m$  e  $\check{W}_b$  rappresentano rispettivamente i contributi membranale e flessionale alla densità di energia di deformazione elastica.

Ma quanto pesano i due contributi? Poiché stiamo considerando corpi relativamente sottili ( $t \ll L$ ) è lecito assumere che le componenti del tensore di Green-Saint Venant parallele al piano medio, in quanto segue indicate con  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ , siano uniformi sullo spessore se la deformazione è puramente membranale, lineari se la deformazione è puramente flessionale<sup>8</sup>. Possiamo quindi scrivere:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^m(x_\alpha, z) = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta}(x_\alpha) - \delta_{\alpha\beta}) \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^b(x_\alpha, z) = b_{\alpha\beta}(x_\alpha)z \quad (3.10)$$

Poiché  $\check{W}_m$  e  $\check{W}_b$  sono funzioni quadratiche rispettivamente di  $\varepsilon_{\alpha\beta}^m$  e  $\varepsilon_{\alpha\beta}^b$ , integrando sullo spessore si ottiene:

$$\mathcal{E}_m := \int_{\Omega} \check{W}_m \left( \frac{\underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{I}}}{2} \right) \sim \frac{t_e}{2} \int_{\omega} \mathcal{Q}_m \left( \frac{a_{\alpha\beta}(x_\alpha) - \delta_{\alpha\beta}}{2} \right) \quad (3.11a)$$

$$\mathcal{E}_b := \int_{\Omega} \check{W}_b(\underline{\mathbf{B}}) \sim \frac{t_e^3}{24} \int_{\omega} \mathcal{Q}_b(b_{\alpha\beta}(x_\alpha)) \quad (3.11b)$$

dove  $t_e$  rappresenta lo spessore equivalente della piastra, definito come il rapporto tra la rigidità flessionale e membranale, mentre  $\mathcal{Q}$  è una funzione quadratica delle componenti del tensore metrico e dell'operatore di forma. Ad esempio, se il materiale è trasversalmente isotropo lo spessore equivalente coincide con lo spessore effettivo della piastra ed inoltre:

$$\mathcal{Q}_{\text{iso}}(\underline{\mathbf{B}}) = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[ (1 - \nu)(\underline{\mathbf{B}})^2 + \nu(\text{tr } \underline{\mathbf{B}})^2 \right] \quad (3.12)$$

Dalle (3.11) segue che per piastre molto sottili, le deformazioni isometriche (per le quali è  $\mathcal{E}_m = 0$ ) richiedono una spesa energetica estremamente ridotta poiché proporzionale al quadrato dello spessore. Qualora possibili le deformazioni isometriche costituiscono quindi le modalità di deformazione preferenziali.

D'altra parte però, in presenza di vincoli di tipo cinematico, è assai raro che tra le configurazioni ammissibili siano comprese isometrie. In generale quindi, anche in assenza di azioni esterne dirette parallelamente al piano medio, possono nascere deformazioni membranali

<sup>8</sup> Ciò equivale ad assumere nulli gli scorrimenti angolari  $\varepsilon_{\alpha z}$ .



come conseguenza dell'accoppiamento geometrico tra estensione e flessione descritto dalla (3.7a). In questo caso il contributo membranale all'energia di deformazione elastica è proporzionale alla variazione di curvatura gaussiana intervenuta nella superficie media, entrambi i contributi (3.11) concorrono a determinare l'energia elastica spesa durante il processo deformativo e occorre dunque valutarne il peso relativo<sup>9</sup>.

Per adimensionalizzare le (3.11) è sufficiente porre  $\tilde{x}_\alpha := x_\alpha/L$  e definire le curvatures adimensionali  $\tilde{b}_{\alpha\beta} := Rb_{\alpha\beta}$ , con  $R$  raggio caratteristico della superficie che individua la configurazione corrente del piano medio. Definendo:

$$\tilde{\mathcal{E}}_m := \frac{\mathcal{E}_m}{\hat{E}t_eL^2} \quad \tilde{\mathcal{E}}_b := \frac{\mathcal{E}_b}{\hat{E}t_eL^2}$$

dove  $\hat{E}$  ha dimensioni  $[FL^{-2}]$  e coincide, se il materiale è isotropo, con il modulo di Young, si può scrivere l'energia di deformazione elastica in forma adimensionale:

$$\frac{12}{t_e^3\hat{E}}\mathcal{E} = 12\frac{L^2}{t_e^2}\tilde{\mathcal{E}}_m + \frac{L^2}{R^2}\tilde{\mathcal{E}}_b \quad (3.13)$$

È quindi possibile osservare che, almeno a livello qualitativo, il comportamento meccanico di una piastra sottile è completamente definito dallo spessore equivalente  $t_e$ , dalla dimensione caratteristica  $L$  e dal raggio caratteristico  $R$  e in particolare dai coefficienti adimensionali:

$$\zeta := \frac{L}{R} \quad \tau := \frac{t_e}{L} \quad (3.14)$$

che ne valutano il rapporto. Dalla (3.13) si ottiene infatti l'espressione dell'energia di deformazione elastica:

$$\zeta^{-2}\mathcal{E} = \frac{12}{t_e^3\hat{E}}\mathcal{E} = \frac{12}{\zeta^2\tau^2}\tilde{\mathcal{E}}_m + \tilde{\mathcal{E}}_b \quad (3.15)$$

nella quale è il prodotto  $\zeta^2\tau^2$  a misurare il peso relativo dei contributi membranale e flessionale.

Il coefficiente  $\zeta$  è una misura puramente geometrica della distanza tra la configurazione corrente e quella di riferimento poiché dipende solo dalla superficie che si ottiene dal piano medio dopo il processo deformativo. Il coefficiente  $\tau$  misura invece quanto la piastra è sottile ma in un'accezione più ampia del termine, poiché dipende anche dal materiale attraverso lo spessore equivalente  $t_e$ .

Se la piastra è sottile  $\tau$  è comunque piccolo ed è ragionevole supporre che nell'espressione dell'energia prevalga ora il termine flessionale ora quello membranale in funzione dei valori assunti dal coefficiente  $\zeta$  che, come detto, confronta la superficie media della piastra nella configurazione corrente e il piano medio della piastra nella configurazione di riferimento<sup>10</sup>.

<sup>9</sup> Poiché la configurazione di riferimento ha curvatura gaussiana nulla, la variazione di curvatura gaussiana coincide con la curvatura gaussiana della superficie media della configurazione corrente.

<sup>10</sup> Questo spiega perché piegare un foglio di carta in un cilindro o un cono è molto più semplice che stenderlo su una superficie sferica: nel primo caso, non variando in nessun punto la curvatura gaussiana, occorre solo flettere il foglio e la relativa spesa energetica è estremamente modesta perché il prodotto  $\zeta^2\tau^2$  assume valori molto piccoli. Naturalmente affinché ciò avvenga è sufficiente che  $\tau$  sia piccolo, anche perché in generale più la piastra è sottile più tende ad aumentare il valore assunto da  $\zeta$ . Ad esempio, avvolgendo un foglio di carta A4 in modo da formare un cilindro con le generatrici parallele al lato lungo si ottiene  $\zeta \approx 7.5 \sim O(1)$  e  $\tau \approx 4 \times 10^{-4}$  cosicché  $\zeta^2\tau^2 \approx 9 \times 10^{-6}$ .

### Le teorie strutturali e il modello di Föppl-von Kármán

Finché  $\zeta$  si mantiene sufficientemente piccolo da poter trascurare i termini di ordine superiore al primo è senz'altro possibile non solo linearizzare l'espressione dell'operatore di forma:

$$b_{\alpha\beta} = \zeta k_{\alpha\beta} + O(\zeta^2) \quad (3.16)$$

ma anche trascurare la variazione di curvatura gaussiana  $K(x_\alpha) \sim O(\zeta^2)$  e con essa l'accoppiamento tra flessione ed estensione della superficie media dato dalla (3.7a). Sotto queste condizioni l'energia è dunque interamente spesa per flettere la piastra ( $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_b$ ), mentre il piano medio rimane sostanzialmente neutro poiché le azioni membranali generate dalla flessione si mantengono trascurabili. Indicando con  $w$  la componente di spostamento ortogonale al piano medio dei punti appartenenti al piano medio stesso le curvature lineari assumono la consueta espressione  $k_{\alpha\beta} := \partial_{\alpha\beta} w$  e la (3.11b) coincide in questo caso con l'energia di deformazione elastica del modello di piastra lineare di Kirchhoff-Love:

$$\mathcal{E}^{\text{kl}} = \frac{t_e^3}{12} \int_{\omega} \mathcal{Q}_b(\partial_{\alpha\beta} w) \quad (3.17)$$

In particolare, se il materiale è omogeneo e trasversalmente isotropo, dalla (3.12) segue l'espressione classica:

$$\mathcal{E}^{\text{kl}} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \int_{\omega} \left[ (1-\nu)(\partial_{\alpha\beta} w)^2 + \nu(\Delta w)^2 \right]$$

Viceversa quando  $\zeta$  è grande, ad esempio  $\zeta \sim O(1)$ , la curvatura gaussiana della superficie  $K(x_\alpha)$  non è più trascurabile e la piastra tende a comportarsi come una membrana curva. Infatti, poiché il prodotto  $\zeta^2 \tau^2$  è comunque piccolo (perché tale rimane  $\tau$ ) diviene preponderante il contributo energetico associato alle azioni membranali generate nella trasformazione del piano medio in una superficie non sviluppabile e nella (3.15) è lecito trascurare il contributo flessionale ( $\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_m$ ) e porre<sup>11</sup>.

$$\mathcal{E} = t_e \int_{\omega} \mathcal{Q}_m \left( \frac{a_{\alpha\beta}(x_\alpha) - \delta_{\alpha\beta}}{2} \right) \quad (3.18)$$

che rappresenta l'energia di un modello non lineare di membrana (Fox et al. [72], Le Dret and Raoult [94], Ciarlet [33]).

In molti casi, tuttavia, non è possibile trascurare completamente né il contributo flessionale né quello membranale ed occorre considerare l'energia nella sua forma completa (3.15). Tra i modelli che tengono conto dell'accoppiamento geometrico fra flessione ed estensione il più semplice è il modello di Föppl-von Kármán, che per questa

<sup>11</sup> Ciò equivale a trascurare la rigidità flessionale della piastra. Osserviamo che, quando  $\zeta$  è molto piccolo, il contributo membranale all'energia di deformazione elastica viene trascurato perché è modesta la forzante  $K$  delle azioni nel piano, essendo la rigidità membranale comunque elevata.

ragione trova largo impiego (per un'ampia rassegna di casi in cui il modello è applicato con successo si può far riferimento a [Audoly and Pomeau \[12\]](#))<sup>12</sup>.

Le ipotesi alla base del modello sono due, una di carattere geometrico, una di carattere meccanico. La prima prevede che le rotazioni della superficie media siano piccole ma non trascurabili; la seconda, come anticipato, che energia membranale e flessionale siano comparabili, in modo da non poter omettere nessuno dei due contributi.

L'ipotesi geometrica di rotazioni moderate è necessaria per considerare, almeno in forma approssimata, le non linearità geometriche. Equivale a considerare  $\zeta^2 \ll 1$ , circostanza che rende possibile utilizzare il sistema di coordinate cartesiane ortogonali definito sul dominio di riferimento  $\omega$ . Osserviamo che  $\zeta^2$  è trascurabile solo rispetto all'unità, non in generale.

La seconda ipotesi equivale ad imporre che i due membri nella (3.15) siano dello stesso ordine di grandezza. Poiché  $\tilde{\mathcal{E}}_m$  e  $\tilde{\mathcal{E}}_b$  sono quadratiche nelle componenti del tensore metrico e dell'operatore di forma ed è ancora possibile utilizzare la (3.16) deve essere  $(a_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \sim O(\zeta^2)$  cosicché:

$$\frac{12}{\zeta^2 \tau^2} \tilde{\mathcal{E}}_m \sim \frac{\zeta^2}{\tau^2} \quad \tilde{\mathcal{E}}_b \sim \zeta^2$$

e nessuno dei due contributi è a priori trascurabile. In particolare non è trascurabile l'accoppiamento geometrico tra flessione ed estensione della superficie media dato dalla (3.7a), che si ottiene nella forma linearizzata ([Calladine \[27\]](#)):

$$\partial_{xx} w \partial_{yy} w - (\partial_{xy} w)^2 = \partial_{yy} a_x + \partial_{xx} a_y - 2\partial_{xy} a_{xy} \quad (3.19)$$

dove al primo membro compare l'espressione della curvatura gaussiana approssimata nell'ipotesi di rotazioni moderate:

$$K(x_\alpha) = \zeta^2 \det k_{\alpha\beta}$$

In sintesi le due ipotesi avanzate impongono di assumere, per il tensore metrico e l'operatore di forma:

$$\frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \sim O(\zeta^2) \quad b_{\alpha\beta} \sim O(\zeta)$$

e dunque, ricordando le (3.10) e la (3.16), il modello è effettivamente rappresentativo del comportamento meccanico di una piastra sottile finché:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \sim O(\zeta^2) \quad w \sim O(\zeta) \quad (3.20)$$

<sup>12</sup> Anche in casi in cui la rigidità flessionale è evanescente può risultare necessario utilizzare il modello di Föppl-von Kármán (o comunque comprendere il contributo dell'energia flessionale). Lo è naturalmente quando sono possibili deformazioni isometriche, cui altrimenti corrisponderebbero trasporti ad energia nulla; ma lo è anche per descrivere correttamente una serie di fenomeni di interesse applicativo. Ad esempio è fondamentale per prevedere il manifestarsi nelle lamine elastiche sottili di corrugamenti e grinze, come quelle che si realizzano spiegazzando un foglio di carta ([Witten \[157\]](#), figura 3.1); in questi casi l'energia elastica, quasi ovunque nulla, si concentra lungo le creste delle pieghe, in corrispondenza delle quali la curvatura è sufficientemente elevata da rendere il contributo flessionale non più trascurabile. Da un punto di vista analitico quest'ultimo consente di regolarizzare la soluzione del modello di membrana.



Figura 3.1: Malgrado l'estrema sottigliezza, in corrispondenza delle creste di ogni grinza di un foglio di carta spiegazzato i contributi membranale e flessionale all'energia di deformazione elastica sono paragonabili.

### 3.3 IL MODELLO DI FÖPPL-VON KÁRMÁN

Come anticipato il modello di Föppl-von Kármán può essere dedotto razionalmente a partire dalle equazioni dell'elasticità tridimensionale come problema all'ordine dominante di una espansione asintotica formale dei campi di interesse (Ciarlet [30])<sup>13</sup> o, seguendo un approccio differente ma di pari dignità, tramite l'imposizione di un certo numero di condizioni di vincolo interno (Podio-Guidugli [124]); infine, ne può essere dimostrata la consistenza con l'impiego di tecniche di convergenza variazionale. (Friesecke et al. [76]).

Ad esempio, seguendo il primo approccio, dalle sole (3.20) si possono ricavare le leggi di scala di tutte le componenti dei campi di spostamento, deformazione e sforzo:

$$u_\alpha = O(\zeta^2) \quad w = O(\zeta) \quad (3.21a)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = O(\zeta^2) \quad \varepsilon_{\alpha z} = O(\zeta^3) \quad \varepsilon_{zz} = O(\zeta^2) \quad (3.21b)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = O(\zeta^2) \quad \sigma_{\alpha z} = O(\zeta^3) \quad \sigma_{zz} = O(\zeta^4) \quad (3.21c)$$

dove  $(u_\alpha, w)$  sono le componenti del vettore spostamento,  $\varepsilon_{ij}$  le componenti del tensore di Green-Saint Venant e  $\sigma_{ij}$  le componenti del secondo tensore di Piola-Kirchhoff.

In primo luogo osserviamo che, affinché i contributi membranale e flessionale all'energia siano comparabili, la componenti di spostamento nel piano  $u_\alpha$  devono essere di un ordine grandezza più piccole rispetto alla componente di spostamento trasversale. Inoltre, poiché le componenti normali  $\varepsilon_{\alpha z}$  degli scorrimenti angolari sono piccole rispetto alle deformazioni membranali, all'ordine dominante valgono le ipotesi di Kirchhoff:

$$u_\alpha(x_\alpha, z) = v_\alpha(x_\alpha) - z\partial_\alpha w(x_\alpha) \quad (3.22)$$

dove  $v_\alpha$  sono le componenti di spostamento dei punti del piano medio parallele al piano medio stesso. Le componenti di deformazione parallele al piano medio si ottengono allora sostituendo le (3.22) nell'espressione (3.2) del tensore di Green-Saint Venant e tendendo conto delle leggi di scala (3.21). Si ottiene:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(x_\alpha, z) = e_{\alpha\beta}(x_\alpha) - zk_{\alpha\beta}(x_\alpha) \quad (3.23)$$

dove i tensori superficiali  $\underline{e}$  e  $\underline{k}$ , definiti dalle equazioni di congruenza:

$$e_{\alpha\beta}(v_\alpha, w) := \frac{1}{2} (\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) + \frac{1}{2} \partial_\alpha w \partial_\beta w \quad (3.24a)$$

$$k_{\alpha\beta}(w) := \partial_{\alpha\beta} w \quad (3.24b)$$

sono misure di deformazione generalizzate che rappresentano rispettivamente le elongazioni (o accorciamenti) e gli scorrimenti delle fibre

<sup>13</sup> Un'interessante riformulazione della tecnica utilizzata da Ciarlet [30] può trovarsi in Audoly and Pomeau [12]. Per una discussione completa è possibile far riferimento ad Antman [3] e Villaggio [153].

del piano medio (*deformazioni membranali*) e le curvature della superficie da esso generata a seguito del processo deformativo (*deformazioni flessionali*).

Il termine non lineare  $\partial_\alpha w \partial_\beta w$  rappresenta l'accoppiamento geometrico tra deformazioni flessionali e membranali, di cui ne costituisce la *forzante*. Non è infatti difficile verificare come dalla (3.24a) si possa ottenere la condizione di compatibilità (3.19):

$$\partial_{xx} w \partial_{yy} w - (\partial_{xy} w)^2 = \partial_{yy} e_x + \partial_{xx} e_y - 2\partial_{xy} e_{xy} \quad (3.25)$$

che rappresenta la versione linearizzata del Teorema Egregium di Gauss (3.7a). Analogamente, dalla (3.24b) si ottiene la versione linearizzata delle equazioni di Codazzi-Mainardi (3.7b):

$$\partial_y k_x - \partial_x k_{xy} = 0 \quad \partial_x k_y - \partial_y k_{xy} = 0 \quad (3.26)$$

Per la (3.23) le componenti di deformazione parallele al piano medio  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  variano nello spessore con legge lineare. Per la linearità delle relazioni costitutive così deve essere anche per le componenti di sforzo  $\sigma_{\alpha\beta}$ . I tensori  $\underline{n}$  ed  $\underline{m}$  definiti dalle:

$$n_{\alpha\beta} := \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha\beta} dz \quad m_{\alpha\beta} := \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{\alpha\beta} dz$$

descrivono allora completamente le azioni interne agenti nel piano medio della piastra e sono misure superficiali di sforzo e coppia. In assenza di accoppiamento a livello costitutivo le misure generalizzate di deformazione e sforzo sono legate tra loro da relazioni del tipo:

$$n_{\alpha\beta}(v_\alpha, w) = A_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}(v_\alpha, w) \quad m_{\alpha\beta}(w) = D_{\alpha\beta\gamma\delta} k_{\gamma\delta}(w) \quad (3.27)$$

Le componenti dei tensori di elasticità  $\underline{A}$  e  $\underline{D}$  possono essere identificate a partire dalle relazioni valide per il continuo tridimensionale osservando che, poiché per le (3.21) è  $\varepsilon_{zz} = O(\zeta^2)$  e  $\sigma_{zz} = O(\zeta^4)$ , all'ordine dominante il legame costitutivo è piano nelle tensioni. Ad esempio per un materiale isotropo:

$$\sigma_{\alpha\beta}(x_\alpha, z) = \frac{E}{1-\nu^2} [(1-\nu)\varepsilon_{\alpha\beta}(x_\alpha, z) + \nu\varepsilon_{\gamma\gamma}(x_\alpha, z)\delta_{\alpha\beta}]$$

e le (3.27) si scrivono:

$$n_{\alpha\beta}(v_\alpha, w) = \frac{Et}{1-\nu^2} [(1-\nu)e_{\alpha\beta}(v_\alpha, w) + \nu e_{\gamma\gamma}(v_\alpha, w)\delta_{\alpha\beta}] \quad (3.28a)$$

$$m_{\alpha\beta}(w) = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} [(1-\nu)k_{\alpha\beta}(w) + \nu k_{\gamma\gamma}(w)\delta_{\alpha\beta}] \quad (3.28b)$$

L'energia di deformazione elastica di una piastra di Föppl-von Kármán assume quindi l'espressione generale:

$$\mathcal{E}^{\text{fvk}}(v_\alpha, w) = \frac{1}{2} \int_\omega n_{\alpha\beta}(v_\alpha, w) e_{\alpha\beta}(v_\alpha, w) + \frac{1}{2} \int_\omega m_{\alpha\beta}(w) k_{\alpha\beta}(w) \quad (3.29)$$

ed è un funzionale quadratico delle misure di deformazione generalizzate  $\underline{e}$  e  $\underline{k}$ . Il primo e il secondo termine che compaiono nella (3.29) misurano la variazione al primo ordine rispetto al parametro di piccozza  $\zeta$  della metrica e della curvatura del piano medio quando per quest'ultimo si considera il campo di spostamento  $\zeta^2 v_\alpha \underline{e}_\alpha + \zeta w \underline{e}_z$ . Essi rappresentano rispettivamente l'energia membranale e l'energia flessionale di una piastra di Föppl-von Kármán.

I campi  $(v_\alpha, w)$  soluzione rendono stazionario il funzionale energia potenziale totale:

$$\mathcal{U}^{\text{fvk}}(\check{v}_\alpha, \check{w}) = \mathcal{E}^{\text{fvk}}(\check{v}_\alpha, \check{w}) - \int_\omega f w$$

definito su un opportuno spazio di campi ammissibili  $(\check{v}_\alpha, \check{w})$ . Imponendo le condizioni di stazionarietà si ottengono quindi le condizioni di bilancio meccanico per una piastra di Föppl-von Kármán:

$$\partial_\alpha n_{\alpha\beta}(v_\alpha, w) = 0 \quad (3.30a)$$

$$\partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}(w) = n_{\alpha\beta}(v_\alpha, w) k_{\alpha\beta}(w) + f \quad (3.30b)$$

alle quali è necessario aggiungere le opportune condizioni al bordo.

La (3.30a) rappresenta le due equazioni di equilibrio alla traslazione nelle direzioni  $(x, y)$  parallele al piano medio, la (3.30b) l'equazione di equilibrio nella direzione trasversale e comprende il termine di accoppiamento  $n_{\alpha\beta} k_{\alpha\beta}$  rappresentativo del contributo degli sforzi di membrana.

Le equazioni di congruenza (3.24), le relazioni costitutive (3.27) e le equazioni di equilibrio (3.30), insieme alle condizioni al bordo da definire caso per caso, costituiscono un problema differenziale non lineare nel quale l'incognita primaria è il campo di spostamento  $(v_\alpha, w)$  del piano medio della piastra.

Le relazioni citate possono essere scritte in forma più compatta. Si ottengono allora le equazioni di *congruenza*:

$$\underline{e}(\underline{v}, w) = \text{sym grad } \underline{v} + \frac{1}{2} \text{grad } w \otimes \text{grad } w \quad (3.31a)$$

$$\underline{k}(w) = \text{grad grad } w \quad (3.31b)$$

le *relazioni costitutive*:

$$\underline{n}(\underline{v}, w) = \underline{A} \underline{e}(\underline{v}, w) \quad (3.31c)$$

$$\underline{m}(w) = \underline{D} \underline{k}(w) \quad (3.31d)$$

le equazioni di *bilancio meccanico*:

$$\text{div } \underline{n}(\underline{v}, w) = 0 \quad (3.31e)$$

$$\text{div div } \underline{m}(w) = \underline{n}(\underline{v}, w) : \underline{k}(w) + f \quad (3.31f)$$

e le condizioni di *compatibilità cinematica*:

$$\det \underline{\mathbf{k}}(w) = \text{curl curl } \underline{\mathbf{g}}(\underline{\mathbf{v}}, w) \quad (3.31g)$$

$$\text{curl } \underline{\mathbf{k}}(w) = \mathbf{0} \quad (3.31h)$$

che<sup>14</sup> rappresentano la linearizzazione delle (3.7). Inoltre, sulla frontiera libera  $\gamma_N$  di  $\omega$ , di normale  $\underline{\mathbf{v}}_\omega$  e tangente  $\underline{\boldsymbol{\tau}}_\omega$ , devono essere rispettate le *condizioni al bordo*:

$$\underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{v}}, w) \underline{\mathbf{v}}_\omega = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

$$\underline{\mathbf{m}}(w) \underline{\mathbf{v}}_\omega \cdot \underline{\mathbf{v}}_\omega = 0 \quad (3.33)$$

$$\text{div } \underline{\mathbf{m}}(w) \cdot \underline{\mathbf{v}}_\omega + \partial_{\underline{\boldsymbol{\tau}}_\omega} (\underline{\mathbf{m}}(w) \underline{\mathbf{v}}_\omega \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}_\omega) = 0 \quad (3.34)$$

mentre, in corrispondenza di ogni angolo del dominio deve essere verificata la *condizione di spigolo*:

$$\underline{\mathbf{m}}(w) : \llbracket \underline{\mathbf{v}}_\omega \otimes \underline{\boldsymbol{\tau}}_\omega \rrbracket = 0$$

dove con  $\llbracket \cdot \rrbracket$  si è indicato l'operatore salto. Osserviamo infine che, introducendo il potenziale di sforzo di Airy  $\chi$ :

$$n_x = \partial_{yy}\chi \quad n_y = \partial_{xx}\chi \quad n_{xy} = -\partial_{xy}\chi$$

la (3.31e) è automaticamente soddisfatta e si può riformulare il problema utilizzando come incognite primarie i due campi  $(\chi, w)$  in luogo dei tre  $(v_\alpha, w)$ . Ad esempio per un materiale isotropo, ricordando le (3.31a)-(3.31b) e le (3.28), l'equazione di equilibrio in direzione trasversale (3.31f) e la condizione di compatibilità (3.31g) si scrivono rispettivamente:

$$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^4 w = [\chi, w] \quad (3.35a)$$

$$\nabla^4 \chi = -Et \frac{[w, w]}{2} + f \quad (3.35b)$$

dove con  $[\cdot, \cdot]$  si è indicato l'operatore differenziale di Monge-Ampère<sup>15</sup>. Osserviamo che il termine al secondo membro della (3.35b) che, quando  $f = 0$  rappresenta l'unica forzante del problema membranale, è la curvatura gaussiana della superficie  $w(x_\alpha)$ .

Le (3.35) sono note in letteratura come equazioni di Föppl-von Kármán e costituiscono un sistema due equazioni semilineari alle derivate parziali con parte principale biarmonica.

### 3.4 IL MODELLO DI FÖPPL-VON KÁRMÁN GENERALIZZATO

L'energia di deformazione elastica di una piastra di Föppl-von Kármán è rappresentata dal funzionale (3.29) che, tenendo conto delle

<sup>14</sup> dove, ricordando le (3.25)-(3.26):

$$\text{curl curl } \underline{\mathbf{g}} := \partial_{yy}e_x + \partial_{xx}e_y - 2\partial_{xy}e_{xy}$$

mentre:

$$\text{curl } \underline{\mathbf{k}} := \{\partial_y k_x - \partial_x k_{xy}, \partial_x k_y - \partial_y k_{xy}\}$$

<sup>15</sup> Dati due campi scalari  $f$  e  $g$  l'operatore differenziale di Monge-Ampère è definito dalla:

$$[f, g] := \partial_{xx}f \partial_{yy}g + \partial_{yy}f \partial_{xx}g - 2\partial_{xy}f \partial_{xy}g$$

(3.31c)-(3.31d), possiamo scrivere nella forma compatta:

$$\mathcal{E}^{\text{fvk}}(\mathbf{v}, w) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{e}}(\mathbf{v}, w) : \underline{\underline{e}}(\mathbf{v}, w) + \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{k}}(w) : \underline{\underline{k}}(w) \quad (3.36)$$

Come si è visto quest'ultimo è rappresentativo dell'effettivo comportamento di una piastra sottile finché le componenti di spostamento dei punti del piano medio verificano le condizioni:

$$v_{\alpha} \sim \zeta^2 \quad w \sim \zeta$$

Il funzionale (3.36) prevede che la configurazione di riferimento  $\omega$  sia *naturale*. Tuttavia, con lievi modifiche, il modello può essere generalizzato in maniera tale da permettere di considerare la presenza di sforzi e deformazioni anche nella configurazione di riferimento.

Formalmente ciò può essere fatto semplicemente scrivendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\text{fvk}}(\mathbf{v}, w) = & \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\underline{A}} [\underline{\underline{e}}(\mathbf{v}, w) - \underline{\underline{f}}] : [\underline{\underline{e}}(\mathbf{v}, w) - \underline{\underline{f}}] \\ & + \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\underline{D}} [\underline{\underline{k}}(w) - \underline{\underline{h}}] : [\underline{\underline{k}}(w) - \underline{\underline{h}}] \end{aligned} \quad (3.37)$$

e osservando che i campi tensoriali superficiali  $\underline{\underline{f}}$  e  $\underline{\underline{h}}$  introdotti permettono di valutare l'energia di deformazione elastica associata alla configurazione di riferimento:

$$\mathcal{E}_{\omega}^{\text{fvk}} = \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{f}} : \underline{\underline{f}} + \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{h}} : \underline{\underline{h}}$$

Quest'ultima non è ovviamente naturale in presenza di deformazioni inelastiche di natura membranale  $\underline{\underline{f}}_i$  e/o flessionale  $\underline{\underline{h}}_i$ , indipendentemente dalla loro origine<sup>16</sup>. In questo caso, peraltro, una configurazione naturale in generale non esiste perché i campi  $\underline{\underline{f}}_i$  e  $\underline{\underline{h}}_i$  non sono vincolati al rispetto delle condizioni di compatibilità cinematica (3.31g)-(3.31h). L'energia di deformazione elastica si scrive allora:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\text{fvk}}(\mathbf{v}, w) = & \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\underline{A}} [\underline{\underline{e}}(\mathbf{v}, w) - \underline{\underline{f}}_i/2] : [\underline{\underline{e}}(\mathbf{v}, w) - \underline{\underline{f}}_i/2] \\ & + \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\underline{D}} [\underline{\underline{k}}(w) - \underline{\underline{h}}_i/2] : [\underline{\underline{k}}(w) - \underline{\underline{h}}_i/2] \end{aligned} \quad (3.38)$$

e, se il materiale è isotropo, le (3.35) assumono la forma (Liang and Mahadevan [99]):

$$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} [\nabla^4 w - \text{div div}(\underline{\underline{h}}_i + \nu \text{ cof } \underline{\underline{h}}_i)] = [\chi, w] \quad (3.39a)$$

$$\nabla^4 \chi = -\frac{Et}{2} ([w, w] + 2 \text{ curl curl } \underline{\underline{f}}_i) \quad (3.39b)$$

<sup>16</sup> I campi  $\underline{\underline{f}}_i$  e  $\underline{\underline{h}}_i$  possono essere utilizzati per descrivere una grande varietà di fenomeni. Ad esempio sono stati impiegati per studiare le possibili forme indotte da fenomeni di crescita materiale in dischi sottili (Seffen and Maurini [140], Efrati et al. [64]).



Osserviamo che, finché risulta  $\text{curl curl } \underline{f}_i = 0$ , ad esempio per campi  $\underline{f}_i$  uniformi o lineari, l'unica forzante del problema membranale rimane la variazione di curvatura gaussiana  $[w, w]/2$ .

Sotto opportune ipotesi sui campi  $\underline{f}_i$  e  $\underline{h}_i$  il modello non lineare di piastra che si ottiene assumendo quale espressione dell'energia di deformazione elastica il funzionale (3.38) può essere dedotto razionalmente dall'elasticità tridimensionale (Lewicka et al. [96]).

Ma la configurazione di riferimento  $\omega$  non è naturale anche nel caso in cui la piastra presenti una debole curvatura iniziale. In questo caso, scritta l'energia di deformazione elastica (3.37) nella forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\text{fvk}}(\underline{v}, w) = & \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{A}[\underline{e}(\underline{v}, w) - \underline{f}_0] : [\underline{e}(\underline{v}, w) - \underline{f}_0] \\ & + \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{D}[\underline{k}(w) - \underline{h}_0] : [\underline{k}(w) - \underline{h}_0] \quad (3.40) \end{aligned}$$

i campi tensoriali superficiali  $\underline{f}_0$  e  $\underline{h}_0$  devono verificare le equazioni di Gauss e Codazzi-Mainardi:

$$\det \underline{h}_0 = \text{curl curl } \underline{f}_0 \quad \text{curl } \underline{h}_0 = \underline{0} \quad (3.41)$$

che garantiscono l'esistenza della configurazione iniziale curva, che è anche naturale. Se indichiamo con  $w_0(x_\alpha)$  il campo che descrive la superficie media della configurazione iniziale e ammettiamo che  $w_0$  sia sufficientemente piccolo (ed in particolare dell'ordine di grandezza dello spessore) il modello non lineare di guscio ribassato che si ottiene può essere dedotto razionalmente dall'elasticità tridimensionale (Ciarlet and Paumier [37], Lewicka et al. [98]) e per i campi  $\underline{f}_0$  e  $\underline{h}_0$  si ottengono le espressioni<sup>17</sup>:

$$\underline{f}_0 = \frac{1}{2} \text{grad } w_0 \otimes \text{grad } w_0 \quad \underline{h}_0 = \text{grad grad } w_0 \quad (3.42)$$

In particolare il campo  $\underline{h}_0$  rappresenta la curvatura della superficie media del guscio nella sua configurazione iniziale naturale. Se il materiale è *isotropo* le (3.35) assumono la forma (Marguerre [103])

$$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} [\nabla^4 w - \nabla^4 w_0] = [\chi, w] \quad (3.43a)$$

$$\nabla^4 \chi = -\frac{Et}{2} ([w, w] - [w_0, w_0]) \quad (3.43b)$$

Se si pone  $\underline{f} = \underline{f}_0 + \underline{f}_i$  e  $\underline{h} = \underline{h}_0 + \underline{h}_i$  e si assume il funzionale (3.37) quale definizione di energia di deformazione elastica si ottiene un modello non lineare di guscio ribassato in grado di considerare anche la presenza di pre-deformazioni nella configurazione iniziale curva. In questo caso, se il materiale è isotropo, le (3.35) assumono la forma:

<sup>17</sup> Osserviamo che aggiungendo un campo del tipo:

$$\underline{f}^* = \frac{1}{2} \text{sym grad } \underline{v}^*$$

non viene alterata l'energia (3.40) poiché  $\text{curl curl } \underline{f}^* = 0$ . Naturalmente però viene modificato il dominio di riferimento ( $\omega^* \neq \omega$ ).

$$\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}[\nabla^4 w - \nabla^4 w_0 - \operatorname{div} \operatorname{div}(\underline{h}_i + \nu \operatorname{cof} \underline{h}_i)] = [\chi, w] \quad (3.44a)$$

$$\nabla^4 \chi = -\frac{Et}{2}([w, w] - [w_0, w_0] + 2 \operatorname{curl} \operatorname{curl} \underline{f}_i) \quad (3.44b)$$

Il modello rappresenta una generalizzazione del modello non lineare di piastra di Föppl-von Kármán e anch'esso può essere dedotto razionalmente dall'elasticità tridimensionale (Lewicka et al. [97]).

Oltre che per tener conto di eventuali stati di sforzo o deformazione nella configurazione di riferimento il modello di Föppl-von Kármán può essere agevolmente generalizzato anche per comprendere il caso in cui l'accoppiamento tra estensione e flessione abbia origine non solo geometrica ma anche costitutiva. Ciò può avvenire ad esempio se la piastra o il guscio sono realizzati utilizzando laminati compositi. Continuando ad assumere valide relazioni costitutive lineari il modo più semplice per tener conto di tale accoppiamento è introdurre il tensore di elasticità  $\underline{\underline{B}}$  e scrivere:

$$\underline{n}(\underline{v}, w) = \underline{\underline{A}}[\underline{e}(\underline{v}, w) - \underline{f}] + \underline{\underline{B}}[\underline{k}(w) - \underline{h}] \quad (3.45a)$$

$$\underline{m}(\underline{v}, w) = \underline{\underline{B}}[\underline{e}(\underline{v}, w) - \underline{f}] + \underline{\underline{D}}[\underline{k}(w) - \underline{h}] \quad (3.45b)$$

il che equivale a definire il funzionale energia di deformazione elastica:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{\text{fvk}} = & \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\underline{A}}[\underline{e}(\underline{v}, w) - \underline{f}] : [\underline{e}(\underline{v}, w) - \underline{f}] \\ & + \int_{\omega} \underline{\underline{B}}[\underline{e}(\underline{v}, w) - \underline{f}] : [\underline{k}(w) - \underline{h}] \\ & + \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\underline{D}}[\underline{k}(w) - \underline{h}] : [\underline{k}(w) - \underline{h}] \end{aligned} \quad (3.46)$$

anch'esso deducibile razionalmente dall'elasticità tridimensionale (Lewicka et al. [97]). Nell'energia (3.46) è ancora possibile separare i contributi membranale e flessionale; a tale scopo è sufficiente definire  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}}$  per ottenere dopo alcune sostituzioni<sup>18</sup>:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{n}(\underline{v}, w) : \underline{n}(\underline{v}, w) + \frac{1}{2} \int_{\omega} \underline{\underline{C}}[\underline{k}(w) - \underline{h}] : [\underline{k}(w) - \underline{h}] \quad (3.47)$$

Osserviamo che il termine  $\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{n}$  rappresenta la componente elastica delle deformazioni membranali, che deve rispettare la condizione di compatibilità:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \operatorname{curl} \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{n}(\underline{v}, w) = & (\det \underline{k}(w) - \det \underline{h}_0) \\ & + \operatorname{curl} \operatorname{curl} [\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}}(\underline{k}(w) - \underline{h})] - \operatorname{curl} \operatorname{curl} \underline{f}_i \end{aligned} \quad (3.48)$$

<sup>18</sup> D'ora in avanti si ometterà l'apice e l'energia di deformazione elastica si indicherà semplicemente con  $\mathcal{E}$ .

che si ottiene dalla (3.31g) semplicemente sostituendo la (3.45a) e la prima delle (3.41). Quest'ultima si riduce alla condizione di compatibilità dell'elasticità piana classica:

$$\text{curl curl } \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{n}(\underline{v}) = 0$$

quando sono nulli i tre termini al secondo membro, che tengono conto rispettivamente dell'accoppiamento geometrico, dell'accoppiamento costitutivo e della presenza di deformazioni inelastiche nella configurazione di riferimento. È importante sottolineare che l'unico termine non lineare nella (3.48), che costituisce una generalizzazione della (3.44b) valida nel caso in cui il materiale sia anisotropo, è rappresentato dall'accoppiamento geometrico, ossia dalla variazione di curvatura gaussiana.

In definitiva, le configurazioni di equilibrio stabile del modello di Föppl-von Kármán generalizzato sono i minimizzatori locali dell'energia di deformazione elastica definita dalla (3.47) che in assenza di azioni esterne risulta coincidente con l'energia potenziale totale.

### Adimensionalizzazione

Il funzionale energia di deformazione elastica del modello di Föppl-von Kármán generalizzato, sia nella forma (3.46) che (3.47), può essere convenientemente scritto in notazione di Voigt. A tale scopo è sufficiente collezionare le componenti dei tensori simmetrici che misurano le deformazioni generalizzate nei vettori:

$$\begin{aligned} \underline{e}(v_\alpha, w) &= \{e_x, e_y, 2e_{xy}\} & \underline{k}(w) &= \{k_x, k_y, 2k_{xy}\} \\ \underline{f} &= \{f_x, f_y, 2f_{xy}\} & \underline{h} &= \{h_x, h_y, 2h_{xy}\} \end{aligned}$$

le componenti dei tensori simmetrici che misurano gli sforzi e le coppie di superficie nei vettori:

$$\underline{n}(v_\alpha, w) = \{n_x, n_y, n_{xy}\} \quad \underline{m}(v_\alpha, w) = \{m_x, m_y, m_{xy}\}$$

e le componenti dei tensori simmetrici di elasticità nelle matrici  $\underline{\underline{A}}$ ,  $\underline{\underline{B}}$ ,  $\underline{\underline{C}}$  e  $\underline{\underline{D}}$ , che con sufficiente generalità possiamo assumere coincidenti con quelle della teoria dei laminati compositi (Berthelot [17]), per cui ad esempio poniamo:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} \end{bmatrix}$$

L'energia di deformazione elastica (3.47) si può scrivere allora nella forma:

$$\mathcal{E}(v_\alpha, w) = \frac{1}{2} \int_\omega \underline{n}^T \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{n} + \frac{1}{2} \int_\omega (\underline{k} - \underline{h})^T \underline{\underline{C}} (\underline{k} - \underline{h}) \quad (3.49)$$

Per ottenere una versione adimensionale della (3.49), tenendo presente il significato geometrico della lunghezza caratteristica  $L$  e del raggio caratteristico  $R$ , definiamo le quantità adimensionali:

$$\tilde{x}_\alpha := x/L \quad \tilde{v} := v_\alpha/L \quad \tilde{k} := R\mathbf{k} \quad \tilde{h} = R\mathbf{h} \quad (3.50a)$$

$$\tilde{n} := \mathbf{n}/A_{11} \quad \tilde{A} := \underline{A}/A_{11} \quad \tilde{C} := \underline{C}/C_{11} \quad (3.50b)$$

e osserviamo che la scelta di utilizzare  $R$  per definire le curvaturе adimensionali  $\tilde{k}$  e  $\tilde{h}$  si riflette sull'adimensionalizzazione della componente di spostamento  $w$  ortogonale al piano di riferimento. Ricordando l'equazione di congruenza (3.31b) risulta infatti<sup>19</sup>:

$$\tilde{w} = \frac{R}{L^2} w$$

che non sorprende, se si osserva che in questo modo si ottiene la legge di scala che permette di derivare il modello di Föppl-von Kármán:

$$\frac{v_\alpha}{w} = \zeta \frac{\tilde{v}_\alpha}{\tilde{w}}$$

Sostituendo le (3.50), l'energia di deformazione elastica (3.49) si scrive nella forma adimensionale:

$$\zeta^{-2} \frac{\mathcal{E}(\tilde{v}_\alpha, \tilde{w})}{C_{11}} = \frac{1}{2} \frac{R^2 A_{11}}{C_{11}} \int_{\tilde{\omega}} \tilde{n}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{n} + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\omega}} (\tilde{k} - \tilde{h})^T \tilde{C} (\tilde{k} - \tilde{h}) \quad (3.51)$$

dove  $\tilde{\omega}$  indica il dominio che descrive la configurazione di riferimento nelle coordinate  $\tilde{x}_\alpha$ . Dal confronto con la (3.15) si ottiene immediatamente la definizione di spessore equivalente:

$$t_e := \sqrt{12 \frac{C_{11}}{A_{11}}} \quad (3.52)$$

e le relazioni  $C_{11} = \hat{E} t_e^3 / 12$  e  $A_{11} = \hat{E} t_e$ .

Indicando con  $\tilde{\mathcal{E}} := \zeta^{-2} \mathcal{E} / C_{11}$  l'energia elastica adimensionale, dalla (3.51) si ottiene allora:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{v}_\alpha, \tilde{w}) = 6 \frac{R^2}{t_e^2} \int_{\tilde{\omega}} \tilde{n}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{n} + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\omega}} (\tilde{k} - \tilde{h})^T \tilde{C} (\tilde{k} - \tilde{h}) \quad (3.53)$$

In conclusione, due osservazioni. In primo luogo rileviamo che, se indichiamo con  $A_\omega$  l'area di  $\omega$  e assumiamo quale definizione di lunghezza caratteristica:

$$L := \sqrt{A_\omega} \quad (3.54)$$

è immediato verificare che il dominio  $\tilde{\omega}$  ha area unitaria e quindi descrive unicamente la *forma in pianta* della del guscio o della piastra. In secondo luogo evidenziamo che, ricordando la (3.48), la condizione di compatibilità cinematica di Gauss si scrive in forma adimensionale:

$$\begin{aligned} \text{CURL CURL } \tilde{A}^{-1} \tilde{n} &= \zeta^2 (\det \tilde{k} - \det \tilde{h}_0) \\ &+ \text{CURL CURL } [\tilde{A}^{-1} \tilde{B} (\tilde{k} - \tilde{h}) - \tilde{f}] \quad (3.55) \end{aligned}$$

<sup>19</sup> Osserviamo che quando  $\zeta \sim \tau$  risulta  $(R/L^2) \sim 1/t_e$ . Per questa ragione spesso in letteratura (Landau et al. [93], Mansfield [102], Ventsel and Krauthammer [148]) si definisce:

$$\tilde{w} = \frac{w}{t_e}$$

e quindi, come atteso, il coefficiente  $\zeta^2$  rappresenta il fattore di scala dell'accoppiamento non lineare di natura geometrica tra deformazioni (e sforzi) membranali e variazione di curvatura gaussiana.



Si è detto che l'assenza di modelli ridotti in grado di fornire indicazioni attendibili sull'insieme degli equilibri stabili di un guscio *vincolato* costituisce una forte limitazione all'impiego degli stessi quali componenti multistabili di sistemi più complessi, come ad esempio le strutture a controllo di forma. Nella progettazione di questo tipo di strutture sono infatti note le configurazioni che l'elemento dovrà assumere in esercizio per ottimizzare la risposta del sistema a specifici, e diversi fra loro, requisiti prestazionali. Queste configurazioni hanno in genere una più parti del bordo vincolate al resto del sistema (in modo da costituire un vero e proprio assemblaggio) e la presenza di vincoli sul bordo non è compatibile con l'ipotesi di *curvatura uniforme*, circostanza che impedisce l'impiego dei modelli ridotti a partire da essa generati.

Ma l'efficacia di tali modelli è essenzialmente dovuta alla possibilità di esprimere in maniera esatta la componente membranale dell'energia di deformazione elastica del modello di Föppl-von Kármán in funzione dei soli parametri di curvatura<sup>1</sup>, e dipende quindi dalla struttura formale delle equazioni del modello piuttosto che dalle ipotesi cinematiche assunte. È stato infatti recentemente mostrato (Vidoli [151]) come l'ipotesi sulla curvatura possa essere indebolita senza compromettere in maniera determinante la qualità dell'approssimazione dell'energia membranale. Ciò consente una maggiore libertà nella scelta dello spazio delle configurazioni ammissibili che, con un'opportuna generalizzazione, si può scegliere compatibile con l'imposizione di vincoli interni.

Il modello che in questo capitolo si presenta, insieme con i principali risultati ottenuti, costituisce il primo contributo in questa direzione.

#### 4.1 STRATEGIA DI RIDUZIONE

Il punto di partenza è naturalmente il funzionale energia di deformazione elastica del modello di Föppl-von Kármán generalizzato:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{v}_\alpha, \tilde{w}) = \frac{6}{\zeta^2 \tau^2} \int_{\tilde{\omega}} \tilde{\mathbf{n}}^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{n}} + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\omega}} (\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\mathbf{h}})^T \tilde{\mathbf{C}} (\tilde{\mathbf{k}} - \tilde{\mathbf{h}}) \quad (4.1)$$

<sup>1</sup> Come evidenziato nel capitolo dedicato, tra i modelli non lineari di guscio quello di Föppl-von Kármán è il più semplice a tener conto dell'accoppiamento geometrico tra estensione e flessione, decisivo nel determinare la stabilità delle configurazioni di equilibrio di un guscio elastico sottile. Giacché, come si è visto, nei gusci sottili l'energia è essenzialmente spesa nell'indurre stiramenti o scorrimenti delle fibre della superficie media, questa circostanza garantisce un'accurata rappresentazione del comportamento meccanico.

che le configurazioni di equilibrio stabile rendono minimo. Nella (4.1) i coefficienti adimensionali  $\zeta$  e  $\tau$  sono definiti dalle:

$$\zeta := \frac{L}{R} \quad \tau := \frac{t_e}{L} \quad (4.2)$$

e misurano rispettivamente il grado di curvatura e la sottigliezza del guscio<sup>2</sup>. È allora possibile osservare che:

- i. se il guscio è sottile e ribassato,  $\zeta^2 \tau^2 \ll 1$  e il contributo membranale all'energia di deformazione nella (4.1) è dominante.
- ii. per ogni *assegnato* campo di spostamento trasversale  $\tilde{w}$ , per determinare gli sforzi membranali  $\tilde{n}$  e dunque il contributo membranale all'energia di deformazione elastica, è sufficiente risolvere un *problema ellittico lineare di elasticità piana*<sup>3</sup> definito sul dominio di riferimento  $\tilde{\omega}$ . Infatti, assegnato  $\tilde{w}$ , la stazionarietà del funzionale (4.1) e la condizione di compatibilità di Gauss (3.55) impongono:

$$\text{DIV } \tilde{n} = 0 \quad \text{in } \tilde{\omega} \quad (4.3a)$$

$$\tilde{n} \{v_{\tilde{x}}, v_{\tilde{y}}\} = 0 \quad \text{su } \tilde{\gamma} \quad (4.3b)$$

$$\text{CURL CURL } \tilde{\underline{\underline{A}}}^{-1} \tilde{n} = g(\tilde{x}_\alpha) \quad \text{in } \tilde{\omega}. \quad (4.3c)$$

dove  $v_{\tilde{x}}$  e  $v_{\tilde{y}}$  sono le componenti della normale  $\underline{v}_{\tilde{\omega}}$  relativa alla bordo  $\tilde{\gamma}$  del dominio  $\tilde{\omega}$ , che si suppone uscente, mentre  $g(\tilde{x}_\alpha)$  è il campo scalare definito dalla:

$$g(\tilde{x}_\alpha) := \zeta^2 (\det \tilde{\underline{\underline{k}}} - \det \tilde{\underline{h}}_0) + \text{CURL CURL } [\tilde{\underline{\underline{A}}}^{-1} \tilde{\underline{\underline{B}}}(\tilde{\underline{k}} - \tilde{\underline{h}}) - \tilde{\underline{f}}] \quad (4.4)$$

Per scrivere il problema (4.3) come un (classico) problema lineare di elasticità piana è sufficiente introdurre la sostituzione:

$$\tilde{n} = \tilde{\underline{\underline{A}}} \underline{e}^* + \underline{n}^*$$

Così facendo si ottiene infatti:

$$\text{DIV } (\tilde{\underline{\underline{A}}} \underline{e}^*) + \text{DIV } \underline{n}^* = \{0, 0\} \quad \text{in } \tilde{\omega} \quad (4.5a)$$

$$(\tilde{\underline{\underline{A}}} \underline{e}^*) \{v_{\tilde{x}}, v_{\tilde{y}}\} = -\underline{n}^* \{v_{\tilde{x}}, v_{\tilde{y}}\} \quad \text{su } \tilde{\gamma} \quad (4.5b)$$

$$\text{CURL CURL } \underline{e}^* = 0 \quad \text{in } \tilde{\omega}. \quad (4.5c)$$

dove le azioni di superficie,  $\text{DIV } \underline{n}^*$ , e di bordo,  $-\underline{n}^* \{v_{\tilde{x}}, v_{\tilde{y}}\}$ , sono note per ogni tensore simmetrico  $\underline{n}^*$  che soddisfi la condizione:

$$\text{CURL CURL } (\tilde{\underline{\underline{A}}}^{-1} \underline{n}^*) = g \quad (\text{in } \tilde{\omega}) \quad (4.6)$$

Come vedremo questa condizione è spesso assai semplice da verificare, giacché si dispone di tre funzioni (le componenti indipendenti di  $\underline{n}^*$ ) per soddisfare una singola equazione scalare.

<sup>2</sup> Ricordiamo che lo spessore equivalente  $t_e := \sqrt{12C_{11}/A_{11}}$  è un parametro *costitutivo*, la lunghezza caratteristica  $L := \sqrt{A_{\tilde{\omega}}}$  un parametro *geometrico* e il raggio caratteristico  $R$  il fattore di scala delle curvature.

<sup>3</sup> Il problema membranale è lineare anche ammettendo curvature non lineari, ossia scegliendo modelli più generali di quello di Föppl-von Kármán, purché siano nulli i termini di accoppiamento costitutivo, ossia  $\tilde{\underline{\underline{B}}} = 0$  (Rega and Saetta [131]). Se lo schema di laminazione è simmetrico la tecnica di condensazione statica impiegata è quindi applicabile anche per gusci non ribassati. All'aumentare delle curvature in gioco, tuttavia, cresce sensibilmente l'impegno di attuazione richiesto, cosicché l'impiego nelle applicazioni di gusci di media o grande curvatura è limitato dalla tecnologia disponibile.



La prima osservazione esprime formalmente quanto già affermato, ossia che affinché possa essere effettivamente rappresentativo dello scenario di stabilità globale, il modello ridotto deve garantire un stima accurata del contributo membranale all'energia di deformazione elastica. La seconda osservazione consente di ovviare a questa difficoltà; infatti il problema ellittico lineare di elasticità piana (4.5) può essere risolto numericamente una volta per tutte e con il grado di accuratezza voluto (ad esempio impiegando il metodo degli elementi finiti).

Questo significa che gli sforzi membranali  $\tilde{n}$  associati ad un assegnato campo di spostamento trasversale  $\tilde{w}$  possono essere determinati con la precisione richiesta, almeno per ogni scelta del dominio  $\tilde{\omega}$ . In questo modo si è in grado non solo di valutare con estrema accuratezza il contributo membranale all'energia di deformazione elastica ma anche di limitare il numero dei gradi di libertà del modello discreto ai soli necessari a definire il campo di spostamento trasversale  $\tilde{w}$  (o il campo di curvatura associato).

La strategia di riduzione opera quindi come segue:

- i. si sceglie un *ansatz* per il campo di spostamento trasversale:

$$\tilde{w}(\tilde{x}_\alpha; \mathbf{q}) = \mathbf{q}_i \phi_i(\tilde{x}_\alpha) \quad (4.7)$$

dove le incognite  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$  rappresentano i parametri lagrangiani del modello ridotto;

- ii. si valuta la forzante  $g(\tilde{x}_\alpha)$  del problema membranale; poiché la curvatura gaussiana è una funzione quadratica delle derivate di  $\tilde{w}$ , tale deve essere anche  $g$ ;
- iii. si risolve il problema membranale per ogni scelta dei parametri lagrangiani. Ciò richiede la soluzione di una serie di problemi ellittici lineari<sup>4</sup> nella forma (4.5). Il numero dei problemi ellittici da risolvere equivale al numero di funzioni indipendenti contenute nella forzante  $g(\tilde{x}_\alpha)$ . La linearità permette di esprimere il campo di sforzi membranali  $\tilde{n}$  associato all'*ansatz*  $\tilde{w}$  come somma delle diverse soluzioni:

$$\tilde{n}(\tilde{x}_\alpha; \mathbf{q}) = \boldsymbol{\sigma}(\tilde{x}_\alpha) + \mathcal{S}_i(\tilde{x}_\alpha) \mathbf{q}_i + \mathcal{S}_{ij}(\tilde{x}_\alpha) \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j \quad (4.8)$$

Naturalmente il campo  $\tilde{n}$ , come la forzante  $g$ , è quadratico nei parametri lagrangiani.

- iv. sostituendo la (4.8) nella (4.1) si ottiene la cercata approssimazione discreta del funzionale energia di deformazione elastica, che a meno di un termine costante si può scrivere come un polinomio del quarto grado nei parametri lagrangiani:

$$E(\mathbf{q}) = \mathbb{L}_i \mathbf{q}_i + \frac{1}{2} \mathbb{K}_{ij} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j + \frac{1}{2} \mathbb{M}_{ijh} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j \mathbf{q}_h + \frac{1}{2} \mathbb{N}_{ijhk} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_j \mathbf{q}_h \mathbf{q}_k \quad (4.9)$$

<sup>4</sup> Questi ultimi hanno lo stesso ruolo dei problemi ausiliari nel metodo di Maxwell-Mohr, utilizzato nella soluzione di sistemi di travi iperstatici.

i cui coefficienti sono definiti dagli integrali:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_i &:= \frac{12}{\zeta^2 \tau^2} \int_{\tilde{\omega}} \underline{s}_i^T \tilde{\underline{A}}^{-1} \underline{\sigma} - \int_{\tilde{\omega}} (\text{GRAD GRAD } \phi_i)^T \tilde{\underline{D}} \tilde{\underline{h}} \\
\mathbb{K}_{ij} &:= \frac{12}{\zeta^2 \tau^2} \int_{\tilde{\omega}} (\underline{s}_i^T \tilde{\underline{A}}^{-1} \underline{s}_j + 2 \underline{\sigma}^T \tilde{\underline{A}}^{-1} \underline{s}_{ij}) \\
&\quad + \int_{\tilde{\omega}} (\text{GRAD GRAD } \phi_i)^T \tilde{\underline{D}} \text{GRAD GRAD } \phi_j \\
\mathbb{M}_{ijh} &:= \frac{24}{\zeta^2 \tau^2} \int_{\tilde{\omega}} \underline{s}_{ij}^T \tilde{\underline{A}}^{-1} \underline{s}_h \quad \mathbb{N}_{ijhk} := \frac{12}{\zeta^2 \tau^2} \int_{\tilde{\omega}} \underline{s}_{ij}^T \tilde{\underline{A}}^{-1} \underline{s}_{hk}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

## 4.2 PARAMETRI DI PROGETTO

Prima di presentare il modello è d'obbligo premettere alcune scelte preliminari, sia di carattere geometrico (sulla forma iniziale) che costitutivo (sul grado di simmetria materiale), che trovano piena giustificazione nella frequenza del loro impiego nelle applicazioni.

### Geometria iniziale

La prima scelta riguarda la *forma iniziale* del guscio che, come osservato nel capitolo dedicato allo stato dell'arte, ne condiziona fortemente le proprietà di multistabilità.

Nelle applicazioni trovano spesso impiego gusci cilindrici di forma rettangolare in pianta e con diversi rapporti fra i lati. Non sono però rari esempi di utilizzo di gusci di forma differente, cosicché si è ritenuto opportuno operare una scelta un poco più generale.

Per questa ragione per la configurazione iniziale si è scelta la forma *pseudo-conica* descritta, sul dominio rettangolare :

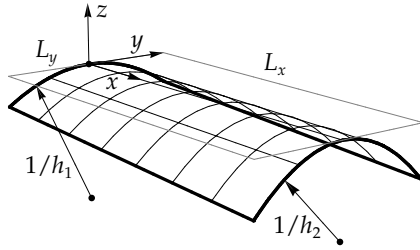


Figura 4.1: la forma geometrica della configurazione iniziale del guscio è completamente definita dalle curvature  $h_1$  e  $h_2$  dei lati  $x = 0$  e  $x = L_x$  e dal rapporto d'aspetto  $\eta := L_x/L_y$ .

$$\omega = [0, L_x] \times \left[ -\frac{L_y}{2}, \frac{L_y}{2} \right] \tag{4.11}$$

dal campo:

$$w(x_\alpha) = \left( h_1 - (h_2 - h_1) \frac{x}{L_x} \right) \frac{y^2}{2} \tag{4.12}$$

dove  $h_1$  e  $h_2$  rappresentano le curvature dei lati  $x = 0$  e  $x = L_x$  rispettivamente (figura 4.2).

Se indichiamo con  $R$  il raggio di curvatura caratteristico, con  $L = \sqrt{L_x L_y}$  e  $\eta := L_x/L_y$  la dimensione caratteristica il rapporto tra i lati del dominio e definiamo:

$$\tilde{x}_\alpha = \frac{x_\alpha}{L} \quad \tilde{h}_i = R h_i \quad \alpha = x, y \quad i = 1, 2$$

possiamo scrivere la (4.12) nella forma adimensionale:

$$\tilde{w}_0(\tilde{x}_\alpha) = \left( \tilde{h}_1 - (\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1) \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\eta}} \right) \frac{\tilde{y}^2}{2} \quad (4.13)$$

che risulta definita sul dominio rettangolare di area unitaria:

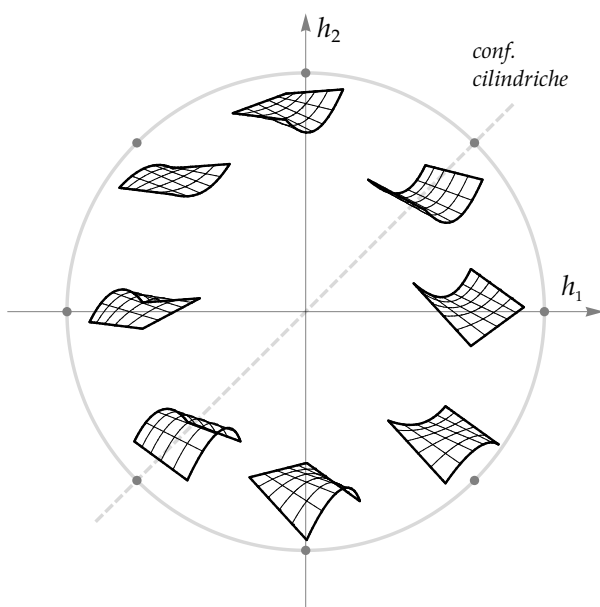
$$\tilde{\omega}(\eta) = [0, \sqrt{\eta}] \times \left[ -\frac{1}{2\sqrt{\eta}}, \frac{1}{2\sqrt{\eta}} \right] \quad (4.14)$$

La forma iniziale della configurazione iniziale è quindi completamente definita dai tre parametri  $\{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \eta\}$  che ne definiscono la curvatura  $\tilde{h}_0$ . Quest'ultima, ricordando la seconda delle (3.42), ha per componenti<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{0\tilde{x}} &= 0 & \tilde{h}_{0\tilde{y}} &= \tilde{h}_1 - \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\eta}}(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1) \\ \tilde{h}_{0\tilde{x}\tilde{y}} &= \frac{\tilde{y}}{\sqrt{\eta}}(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1) \end{aligned} \quad (4.15)$$

I tre *parametri di forma*, come detto, rappresentano le curvatures adimensionali dei lati  $\tilde{x} = 0$  e  $\tilde{x} = \sqrt{\eta}$  e il rapporto di forma: ad ogni punto dello spazio  $\{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \eta\}$  corrisponde una particolare geometria della configurazione iniziale del guscio.

Le diverse scelte che la (4.13) consente di effettuare possono essere rappresentate in maniera efficace nel piano delle curvatures  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$ , per ogni valore del rapporto d'aspetto  $\eta$  (figura 4.2).



Quest'ultimo infatti varia nelle applicazioni in un intervallo limitato di valori ed è quindi lecito limitare l'attenzione ai casi compresi

<sup>5</sup> Osserviamo che il campo (4.13) non descrive un cono. Infatti si ha:

$$\det \tilde{h}_0 = -\frac{\tilde{y}^2}{\eta} (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)^2 \neq 0$$

e quindi la superficie che descrive la configurazione iniziale non è sviluppabile. D'altra parte è in generale più semplice realizzare gusci che abbiano forma iniziale sviluppabile. In questo caso l'errore che si introduce considerando la (4.13) può essere stimato calcolando la norma  $L_2$ :

$$\|\det \tilde{h}_0\|_2 = \frac{1}{4\sqrt{5}} \frac{|\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2|^2}{\eta^2}$$

Figura 4.2: per ogni valore del rapporto d'aspetto  $\eta$  ( $\eta = 1$  in questo caso) è possibile rappresentare nel piano delle curvatures  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$  le diverse configurazioni iniziali ammesse dalla (4.13); i punti giacenti sulla bisettrice sono rappresentativi delle configurazioni *cilindriche*, particolarmente frequenti nelle applicazioni.

tra  $\eta = 1$  (pianta quadrata) e  $\eta = 4$  (pianta rettangolare allungata). Particolare attenzione occorre invece rivolgere alla valutazione della massima curvatura accettabile per considerare il guscio ribassato. Un valore ragionevole si può ottenere in maniera piuttosto semplice, ad esempio scegliendo un valore limite per il rapporto tra la freccia massima, che indicheremo con  $W$  e la lunghezza in pianta  $L_y$  del lato curvo, ossia imponendo:

$$\frac{W}{L_y} < \alpha \quad (4.16)$$

con  $\alpha$  sufficientemente piccolo<sup>6</sup>. Se allora indichiamo con  $H = \max(h_1, h_2)$  la maggiore tra le due curvature dei lati estremi, essendo  $W = HL_y^2/8$ , possiamo scrivere la condizione (4.16) nella forma:

$$H < \frac{8\alpha}{L_y}$$

dalla quale, moltiplicando ambo i membri per il raggio caratteristico  $R$  e osservando che  $L_y = \sqrt{L^2/\eta}$ , è immediato ottenere il massimo valore accettabile per le curvature adimensionali:

$$\tilde{h}_{\max} = 8\alpha \frac{R}{L_y} = 8\alpha \sqrt{\frac{\eta}{\zeta^2}} \quad (4.17)$$

In altre parole, finché  $\tilde{h}_i \leq \tilde{h}_{\max}$  ( $i = 1, 2$ ), il guscio può considerarsi *ribassato*.

### Materiale

La seconda scelta è di natura *costitutiva*. In quanto segue, salvo diverso avviso, assumeremo che il materiale costituente il guscio sia *omogeneo* ed *ortotropo*, con le direzioni principali di ortotropia allineate con gli assi  $x$  e  $y$ . Non è un'ipotesi particolarmente restrittiva, giacché comprende molte applicazioni, e permette di contenere il numero di parametri di progetto di natura costitutiva.

Il materiale è quindi descritto dai moduli di elasticità longitudinale  $E_x, E_y$ , dal modulo di elasticità tangenziale  $G$  e dai coefficienti di Poisson  $\nu_x, \nu_y$ , con la condizione che:

$$\frac{\nu_x}{E_x} = \frac{\nu_y}{E_y}$$

Più in generale, un simile materiale è completamente caratterizzato dai tre coefficienti adimensionali:

$$\beta := \frac{E_y}{E_x} \quad \rho := \frac{G}{E_x} \quad \nu := \nu_y = \beta\nu_x \quad (4.18)$$

Per definizione  $\beta$  e  $\rho$  misurano rispettivamente il rapporto tra i moduli di elasticità longitudinale e il rapporto tra il modulo di elasticità

<sup>6</sup> Scegliere il valore  $\alpha = 1/5$ , indicato in Vlasov [154] come limite per considerare il guscio ribassato è piuttosto conservativo; valori leggermente più grandi (fino ad  $\alpha = 1/3$ ) possono essere utilizzati senza incorrere in grandi errori nelle previsioni del modello.

tangenziale e il modulo di elasticità longitudinale nella direzione  $x$ ;  $\nu$  è invece una misura dell'effetto Poisson.

Se, come quasi sempre avviene nelle applicazioni, il guscio è realizzato utilizzando laminati compositi occorre fare alcune ulteriori precisazioni. In quanto segue assumeremo sempre nullo l'accoppiamento costitutivo ( $\underline{\tilde{\beta}} = 0$ ), cosicché  $\underline{\tilde{\zeta}} \equiv \underline{\tilde{D}}$ . Per questa classe di laminati ortotropi le matrici costitutive  $\underline{\tilde{A}}$  e  $\underline{\tilde{C}}$  si possono scrivere nella forma:

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} 1 & \nu_A & 0 \\ \nu_A & \beta_A & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_A \end{bmatrix} \quad \underline{\tilde{C}} = \begin{bmatrix} 1 & \nu_C & 0 \\ \nu_C & \beta_C & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_C \end{bmatrix} \quad (4.19a)$$

dove:

$$\gamma_A := \rho_A \left( 1 - \frac{\nu_A^2}{\beta_A} \right) \quad \gamma_C := \rho_C \left( 1 - \frac{\nu_C^2}{\beta_C} \right) \quad (4.19b)$$

Nelle (4.19),  $\beta_A, \beta_C$  rappresentano i rapporti tra le rigidezze membranali e flessionali nelle due direzioni,  $\rho_A, \rho_C$  sono misure adimensionali della rigidezza allo scorrimento nel piano e della rigidezza a torsione, e  $\nu_A, \nu_C$  misurano l'effetto Poisson in direzione parallela e ortogonale al piano medio. Poiché  $\underline{\tilde{A}}$  e  $\underline{\tilde{C}}$  devono essere definite positive i coefficienti elastici devono rispettare le condizioni:

$$\beta_A > \nu_A^2 \quad \beta_C > \nu_C^2 \quad \rho_A > 0 \quad \rho_C > 0$$

Limiteremo inoltre l'attenzione alla classe di laminati ortotropi *quasi omogenei* (Kandil and Verchery [89], Kandil and Verchery [90], Vannucci and Verchery [147]); per la quale risulta:

$$\beta := \beta_A = \beta_C \quad \gamma := \gamma_A = \gamma_C \quad \nu := \nu_A = \nu_C$$

I laminati appartenenti a questa classe possiedono dunque uguale rigidezza membranale e flessionale ( $\underline{\tilde{A}} = \underline{\tilde{C}}$ ) ossia, ricordando le (3.50b),  $\underline{\tilde{C}} = (C_{11}/A_{11})\underline{\tilde{A}}$ .

### Stato di presolleccitazione

Infine, si considera il guscio libero da qualsiasi stato di presolleccitazione. Come conseguenza, la configurazione iniziale è anche *naturale*. Pur escludendo un certo numero di casi applicativi, questa assunzione ha una piena giustificazione di natura tecnologica. Infatti, come già osservato nel capitolo dedicato allo stato dell'arte, l'assenza di uno stato di presolleccitazione implica la possibilità di trascurare gli effetti igrotermici e concede un ottimo controllo sulla forma geometrica del prototipo da produrre, che può realizzarsi coincidente con quella di progetto.

### Riepilogo delle scelte preliminari

In sintesi, il modello verrà dedotto nelle ipotesi di:

- i. *forma iniziale pseudo-conica di pianta rettangolare*, descritta dai parametri geometrici  $\{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \eta\}$ ;
- ii. *materiale ortotropo*, descritto dai parametri costitutivi  $\{\beta, \gamma, \nu\}$ ;
- iii. *assenza di presollecitazione*, che implica l'esistenza di una configurazione naturale, coincidente con la configurazione iniziale.

È bene sottolineare che queste scelte non costituiscono un limite del modello per quanto, com'è ovvio che sia, scelte diverse e altrettanto legittime avrebbero potuto complicare alcune espressioni e alcune relazioni.

#### 4.3 PROBLEMA PROGETTUALE

Introdotti i parametri di progetto, possiamo meglio definire cosa, d'ora in avanti, si intenderà per *progettazione* di un guscio multistabile.

Osserviamo che se, come anticipato nell'introduzione al capitolo, sono note le configurazioni geometriche *vincolate* che il guscio dovrà assumere in esercizio, rimangono invece incognite la configurazione iniziale del guscio (naturale in assenza di stati di presollecitazione) e, nel caso di utilizzo di materiali compositi, le proprietà meccaniche omogeneizzate del laminato capaci di garantire l'esistenza e la stabilità delle configurazioni richieste. Può infatti accadere che un guscio multistabile in assenza di vincoli esterni perda in tutto o in parte questa proprietà una volta vincolato su una parte del bordo.

Per queste ragioni progettare un guscio multistabile consiste essenzialmente nel:

- i. determinare la configurazione *naturale* del guscio cui corrisponde una *particolare* scelta delle configurazioni di equilibrio stabile da realizzare, considerando la presenza sul bordo delle stesse degli inevitabili vincoli;
- ii. selezionare la più *conveniente* modalità di attuazione.

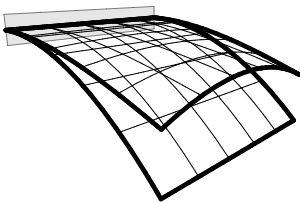


Figura 4.3: configurazioni *vincolate* da realizzare.

Può esser d'aiuto ricorrere ad un esempio: si supponga di dover realizzare le due configurazioni geometriche illustrate in figura 4.3. Si tratta di due gusci aventi forma in pianta rettangolare ed uno dei lati corti vincolato con un incastro; possiamo immaginare che ognuna delle due forme geometriche sia necessaria per ottimizzare la risposta del sistema ad una particolare condizione di esercizio.

Si potrebbe provare a realizzare le configurazioni cercate appiattendendo ed incastrandone uno dei lati corti, ad esempio il lato  $\tilde{x} = 0$ , per una particolare scelta dei parametri di progetto, ossia per una *particolare* configurazione naturale. Questa operazione descrive bene quanto avviene nella pratica sperimentale e, attualmente, anche nella pratica progettuale. Tuttavia, così facendo non c'è alcuna garanzia di raggiungere l'obiettivo prestabilito, poiché:

- i. una volta vincolato il guscio potrebbe non essere più multistabile;
- ii. qualora il guscio vincolato fosse multistabile, le configurazioni (stabili) ottenute potrebbero essere differenti da quelle richieste;
- iii. la transizione tra le diverse configurazioni stabili potrebbe essere poco robusta, ossia avvenire con troppa semplicità, o viceversa potrebbe richiedere un impegno eccessivo ed essere quindi difficile da realizzare.

Come anticipato è allora necessario adottare, almeno da un punto di vista progettuale, una prospettiva differente, se vogliamo inversa, e porre il problema in questi termini: assegnate due (o più) configurazioni vincolate (ad esempio quelle di figura 4.3), determinare la geometria della configurazione naturale (i.e. la *forma*) e le proprietà del laminato (i.e. le caratteristiche meccaniche del *materiale*) che permettono di realizzare le configurazioni cercate e valutare la possibilità di realizzare la transizione dall'una alle altre. In altre parole, seguendo questo approccio, occorre in primo luogo determinare i parametri di progetto:

$$\mathbf{p} = \{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \eta; \beta, \gamma, \nu\} \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^6$$

che definiscono un guscio tale da ammettere, dopo l'imposizione del vincolo, due configurazioni di equilibrio stabile di forma assegnata e garantire che quest'ultime siano separate da barriera energetica di entità opportuna.

#### 4.4 MODELLO RIDOTTO

Si è detto che il problema può essere affrontato e risolto con la formulazione di modelli non lineari di guscio in grado di fornire una rappresentazione fedele dello scenario di stabilità globale con un numero limitato di gradi di libertà. Per un guscio libero al bordo l'obiettivo può essere raggiunto seguendo la strategia di riduzione descritta in precedenza, che permette di ottenere modelli ridotti

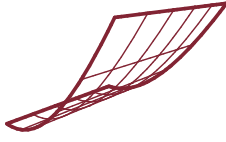
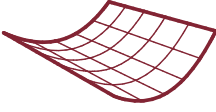
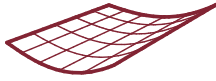
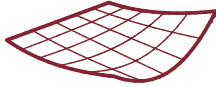
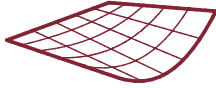

 (a)  $q_1 = 1$  ( $q_j = 0, j \neq 1$ )

 (b)  $q_2 = 1$  ( $q_j = 0, j \neq 2$ )

 (c)  $q_3 = 1$  ( $q_j = 0, j \neq 3$ )

 (d)  $q_4 = 1$  ( $q_j = 0, j \neq 4$ )

 (e)  $q_5 = 1$  ( $q_j = 0, j \neq 5$ )

Figura 4.4: il significato geometrico dei cinque parametri lagrangiani che definiscono la (4.20) emerge valutandone separatamente i contributi:  $q_1$  e  $q_2$  rappresentano la parte uniforme di  $\tilde{k}_{\tilde{x}}$  e  $\tilde{k}_{\tilde{y}}$ ;  $q_3$  rappresenta la parte lineare in  $\tilde{x}$  di  $\tilde{k}_{\tilde{x}}$ ;  $q_4$  rappresenta la parte quadratica in  $\tilde{y}$  di  $\tilde{k}_{\tilde{x}}$  e la parte quadratica in  $\tilde{x}$  di  $\tilde{k}_{\tilde{y}}$ ;  $q_5$  rappresenta la parte lineare in  $\tilde{x}$  di  $\tilde{k}_{\tilde{y}}$ . Osserviamo che la curvatura torsionale  $\tilde{k}_{\tilde{x}\tilde{y}}$  è diversa da zero solo negli ultimi due casi.

di gusci di Föppl-von Kármán. Come vedremo, in presenza di vincoli l'approccio richiede alcune modifiche. Per le ragioni esposte è tuttavia importante preservarne la logica di fondo.

Il funzionale energia di deformazione elastica è ora funzione dei parametri di progetto, sia materiali che geometrici; quest'ultimi sono peraltro presenti anche per la dipendenza del dominio (4.14) dal rapporto d'aspetto  $\eta$ .

Per ottenere la versione (4.9) della (4.1) occorre innanzitutto scegliere l'*ansatz* per il campo di spostamento in direzione trasversale, in modo da definire le configurazioni ammesse dal modello ridotto. Nel nostro caso si ritiene accettabile scegliere un polinomio del quarto grado in  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$ , del quale non si considerano i termini costanti e lineari, perché associati a trasporti rigidi, e i termini dispari in  $\tilde{y}$ , per ragioni di simmetria. Non solo. Data la geometria scelta per la configurazione naturale si ritiene accettabile trascurare ogni dipendenza da  $\tilde{y}$  della curvatura  $\tilde{k}_{\tilde{y}}$  del lato corto e assumere al più lineare la variazione lungo  $\tilde{x}$  della curvatura del lato lungo  $\tilde{k}_{\tilde{x}}$ . Ciò equivale a trascurare rispettivamente i termini  $\tilde{y}^4$  e  $\tilde{x}^4$  nel polinomio scelto per descrivere lo spostamento in direzione trasversale, che quindi è completamente definito da cinque *parametri lagrangiani* (o gradi di libertà):

$$\tilde{w}(\tilde{x}_\alpha, \mathbf{q}) = q_1 \frac{\tilde{x}^2}{2} + q_2 \frac{\tilde{y}^2}{2} + q_3 \frac{\tilde{x}^3}{6} + q_5 \frac{\tilde{x}\tilde{y}^2}{2} + q_4 \frac{\tilde{x}^2\tilde{y}^2}{2} \quad (4.20)$$

Per il campo di curvatura si ottengono dunque le componenti:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{\tilde{x}} &= q_1 + q_3\tilde{x} + q_4\tilde{y}^2 & \tilde{k}_{\tilde{y}} &= q_2 + q_5\tilde{x} + q_4\tilde{x}^2 \\ \tilde{k}_{\tilde{x}\tilde{y}} &= q_5\tilde{y} + q_4\tilde{x}\tilde{y} \end{aligned} \quad (4.21)$$

ed è possibile associare ad ogni grado di libertà il relativo significato geometrico (figura 4.4). Osserviamo che la configurazione naturale scelta è compresa tra le configurazioni ammissibili e corrisponde ai valori dei parametri lagrangiani:

$$q_2 = \tilde{h}_1 \quad q_5 = \frac{\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1}{\sqrt{\eta}} \quad q_i = 0 \quad \text{con } i = 1, 3, 4 \quad (4.22)$$

ossia al vettore:

$$\mathbf{q}^n = \{0, \tilde{h}_1, 0, 0, (\tilde{h}_2 - \tilde{h}_1)/\sqrt{\eta}\}$$

I gradi di libertà  $q_2$  e  $q_5$  hanno un significato geometrico particolarmente importante. Non solo definiscono completamente la forma della configurazione naturale, ma rappresentano rispettivamente la curvatura e la rotazione del lato  $\tilde{x} = 0$ :

$$q_2 = \tilde{k}_{\tilde{y}}(0, \tilde{y}) \quad q_5 = \partial_{\tilde{x}}\tilde{w}|_{(0, \tilde{y})}$$



Ne segue che l'introduzione del vincolo di incastro equivale ad imporre:

$$q_2 = 0 \quad q_5 = 0 \quad (4.23)$$

ossia ad annullare due dei cinque gradi di libertà. Ciò ha due conseguenze importanti:

- i. una volta imposto il vincolo il modello discreto avrà unicamente tre gradi di libertà, contro i cinque del modello non vincolato. Indicheremo con:

$$q_c = \{q_1, q_3, q_4\} \quad (4.24)$$

il vettore dei parametri lagrangiani del modello vincolato. Così, ad esempio, potremo indicare con  $\tilde{k}(q_c)$  il campo di curvatura che descrive la generica configurazione vincolata del guscio; per le (4.21), le componenti di  $\tilde{k}(q_c)$  si scrivono:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{\tilde{x}}(\tilde{x}_\alpha; q_c) &= q_1 + q_3 \tilde{x} + q_4 \tilde{y}^2 & \tilde{k}_{\tilde{y}}(\tilde{x}; q_c) &= q_4 \tilde{x}^2 \\ \tilde{k}_{\tilde{x}\tilde{y}}(\tilde{x}_\alpha; q_c) &= q_4 \tilde{x} \tilde{y} \end{aligned} \quad (4.25)$$

- ii. l'energia del modello vincolato si può ottenere da quella del modello libero al bordo semplicemente imponendo le due semplici relazioni (4.23): non sarà dunque necessario, per ottenere le configurazioni di equilibrio, ricorrere a minimizzazioni vincolate. Inoltre non è difficile indagare l'effetto sulle proprietà di stabilità di eventuali vincoli di incastro aventi curvatura non nulla: per comprendere questo caso è infatti sufficiente imporre  $q_2 = \chi$ , avendo indicato con  $\chi$  la curvatura del lato incastrato.

Vediamo quindi nel dettaglio quali conseguenze ha l'imposizione del vincolo di incastro sulla formulazione del modello ridotto.

### Il contributo flessionale all'energia di deformazione elastica

Note le espressioni (4.25) valide per le componenti di  $\tilde{k}(q_c)$ , il contributo flessionale all'energia di deformazione elastica si ricava immediatamente integrando il secondo membro della (4.1) sul dominio  $\tilde{\omega}(\eta)$ . Si ottiene allora un polinomio quadratico nei parametri lagrangiani e dipendente dai parametri di progetto che possiamo scrivere nella forma:

$$E_b(q_c, p) = \mathbb{L}_i(p)q_i + \mathbb{K}_{ij}^b(p)q_iq_j \quad i, j = 1, 3, 4 \quad (4.26)$$

L'espressione dei coefficienti  $\mathbb{L}_i(p)$  e  $\mathbb{K}_{ij}^b(p)$  diversi da zero si riporta per completezza al termine del capitolo.

### Il contributo membranale all'energia di deformazione elastica

Per valutare il contributo membranale all'energia di deformazione elastica occorre invece risolvere, per via numerica, il problema lineare di elasticità piana (4.3). Le scelte effettuate riguardo geometria e materiale implicano:

$$\text{CURL CURL} [\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{k}} - \underline{\underline{h}}) - \underline{\underline{f}}] = 0$$

e dunque la forzante  $g(\tilde{x}_\alpha)$  del problema membranale, definita dalla (4.4), è direttamente proporzionale alla variazione di curvatura gaussiana. Poiché, ricordando le (4.15) e (4.25), quest'ultima si scrive:

$$\det \underline{\underline{k}} - \det \underline{\underline{h}}_0 = q_1 q_4 \tilde{x}^2 - \frac{(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)^2}{\eta} \tilde{y}^2 + q_3 q_4 \tilde{x}^3 - 3q_4^2 \tilde{x}^2 \tilde{y}^2 \quad (4.27)$$

$g(\tilde{x}_\alpha)$  risulta espressa nella base di monomi:

$$g(\tilde{x}_\alpha) := \{\tilde{x}^2, \tilde{y}^2, \tilde{x}^3, \tilde{x}^2 \tilde{y}^2\}^T$$

Questa circostanza consente di calcolare agevolmente le forzanti  $\text{DIV } \underline{\underline{u}}^*$  e  $-\underline{\underline{u}}^* \{v_{\tilde{x}}, v_{\tilde{y}}\}$  del problema (4.5), cui si può sempre ridurre il problema (4.3). Ciò richiede l'integrazione della (4.6) che si dimostra particolarmente semplice. Senza perdere di generalità si può infatti scegliere  $\underline{\underline{u}}^*$  in modo che sia  $n_{\tilde{x}\tilde{y}}^* = 0$  e  $n_{\tilde{y}}^* = v n_{\tilde{y}}^*$  cosicché risulti  $\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{u}}^* = \{n_{\tilde{x}}, 0, 0\}$ . In questo modo la (4.6) si scrive:

$$\partial_{\tilde{y}\tilde{y}} n_{\tilde{x}}^* = g(\tilde{x}_\alpha)$$

ed è immediato calcolarne l'integrale generale se, come nel caso in esame,  $g$  è espressa in una base di monomi<sup>7</sup>.

A ciascuno dei quattro campi  $g_i(\tilde{x}_\alpha)$  è dunque associato un problema lineare di elasticità piana (*problema ausiliario*); gli sforzi di membrana  $\tilde{n}(\tilde{x}_\alpha)$  si ottengono allora semplicemente sommandone le rispettive soluzioni. Indicando con  $\tilde{n}^{jk}(\tilde{x}_\alpha)$  il campo di sforzo membranale che si ottiene come soluzione del problema ausiliario associato alla forzante  $g_i = \tilde{x}^j \tilde{y}^k$  e ricordando la (4.27), si può infatti scrivere semplicemente:

$$\tilde{n}(\tilde{x}_\alpha) = \zeta^2 \left[ q_1 q_4 \tilde{n}_{20} - \frac{(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)^2}{\eta} \tilde{n}_{02} + q_3 q_4 \tilde{n}_{30} - 3q_4^2 \tilde{n}_{22} \right] \quad (4.28)$$

La (4.28) può porsi nella forma compatta:

$$\tilde{n}(\tilde{x}_\alpha) = \zeta^2 \mathbf{N}(\tilde{x}_\alpha; \eta) \mathbf{a}(q_c, p) \quad (4.29)$$

dopo aver indicato con:

$$\mathbf{N}(\tilde{x}_\alpha; \eta) := \begin{bmatrix} \tilde{n}_{20} & \tilde{n}_{02} & \tilde{n}_{30} & \tilde{n}_{22} \end{bmatrix}$$

<sup>7</sup> Ad esempio, per:

$$\mathbf{g}_1 = \tilde{x}^2$$

si ottiene:

$$n_{\tilde{x}}^* = \tilde{x}^2 \tilde{y}^2 / 2$$

da cui:

$$\text{DIV } \underline{\underline{u}}^* = \{\tilde{x} \tilde{y}^2, v \tilde{x}^2 \tilde{y}\}$$

$$\underline{\underline{u}}^* \{v_{\tilde{x}}, v_{\tilde{y}}\} = \frac{\tilde{x}^2 \tilde{y}^2}{2} \{v_{\tilde{x}}, v_{\tilde{y}}\}$$

la matrice che colleziona le componenti dei campi di sforzo membranale soluzione dei problemi ausiliari e con:

$$\mathbf{a}(\mathbf{q}_c, \mathbf{p}) := \{q_1 q_4, (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)^2 / \eta, q_3 q_4, -3q_4^2\}^T$$

il vettore dei coefficienti del polinomio che definisce la forzante (4.27).

Sostituendo l'espressione (4.29) nella (4.1) si ottiene il contributo membranale all'energia di deformazione elastica del modello discreto:

$$E_m(\mathbf{q}_c, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{q}_c, \mathbf{p})^T \tilde{\mathbf{C}}(\eta) \mathbf{a}(\mathbf{q}_c, \mathbf{p}) \quad (4.30)$$

dove  $\tilde{\mathbf{C}}(\eta)$  è la matrice simmetrica normalizzata<sup>8</sup>:

$$\tilde{\mathbf{C}}(\eta) := \|\mathbf{C}\|^{-1} \int_{\tilde{\omega}(\eta)} \mathbf{N}(\tilde{x}_\alpha, \eta)^T \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{N}(\tilde{x}_\alpha, \eta)$$

ed inoltre si è imposto:

$$\frac{\zeta^2 \|\mathbf{C}\|}{\tau^2} = \frac{1}{12} \quad (4.31)$$

il che, ricordando le (4.2), equivale ad assumere per il raggio caratteristico la definizione:

$$R := A_\omega \sqrt{\frac{A_{11}}{C_{11}} \|\mathbf{C}\|} \quad (4.32)$$

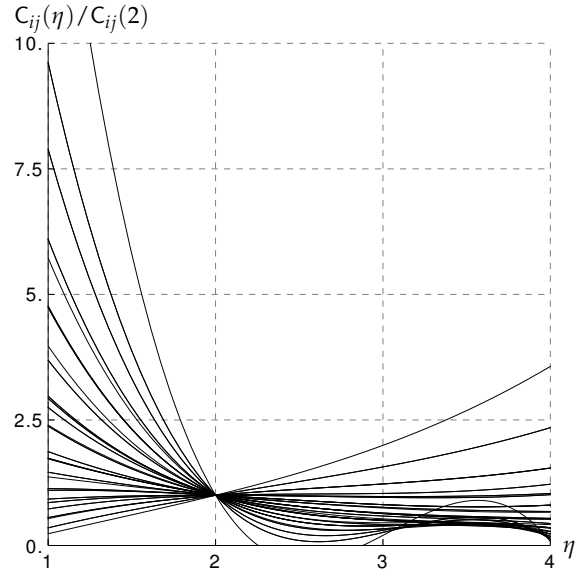
Si è detto che per calcolare le componenti della matrice  $\tilde{\mathbf{C}}(\eta)$  è necessario conoscere la soluzione dei quattro problemi ellittici ausiliari, in generale non disponibile in forma chiusa. D'altra parte, essendo problemi ordinari di elasticità piana, quest'ultima si può agevolmente ottenere utilizzando metodi numerici, ed in particolare il metodo degli elementi finiti. Nel caso in esame l'unica difficoltà è rappresentata dalla dipendenza del dominio di riferimento  $\tilde{\omega}$  dal rapporto d'aspetto  $\eta$ , dipendenza che naturalmente si estende anche alla matrice  $\tilde{\mathbf{C}}$ . L'ostacolo può essere superato risolvendo ciascuno dei quattro problemi ausiliari in corrispondenza di valori noti del parametro di progetto  $\eta$  e ricostruendo la dipendenza funzionale di  $\tilde{\mathbf{C}}$  da  $\eta$  mediante interpolazione. Assumendo  $\eta = 1, 2, 3, 4$  e indicando con  $\mathbf{C}_{(\eta=i)}$  le matrici associate possiamo infatti scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\eta) = & \left(4 - \frac{13}{3}\eta + \frac{3}{2}\eta^2 - \frac{1}{6}\eta^3\right) \mathbf{C}_{(\eta=1)} \\ & - \left(6 - \frac{19}{2}\eta + 4\eta^2 - \frac{1}{2}\eta^3\right) \mathbf{C}_{(\eta=2)} \\ & \left(4 - 7\eta + \frac{7}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\eta^3\right) \mathbf{C}_{(\eta=3)} \\ & + \left(1 - \frac{11}{6}\eta + \eta^2 - \frac{1}{6}\eta^3\right) \mathbf{C}_{(\eta=4)} \quad (4.33) \end{aligned}$$

<sup>8</sup> Nel seguito  $\|\mathbf{C}\|$  verrà assunto coincidente con la norma  $\|\mathbf{C}_f(2)\|$  della matrice  $\mathbf{C}$  calcolata per  $\eta = 2$  e in condizioni di bordo libero. La scelta può essere giustificata:  $\eta = 2$  è il valore intermedio tra  $\eta = 1$ , che assumiamo come limite inferiore, e  $\eta = 3$ , valore del rapporto d'aspetto oltre il quale i gusci cilindrici liberi al bordo cessano di essere multistabili.

cosicché risulti  $C(i) = C(\eta=i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . La ragionevolezza dell'approssimazione può essere valutata rappresentando in un grafico l'andamento delle componenti di  $C(\eta)$ . Come si vede in figura 4.5, que-

Figura 4.5: il grafico mostra la dipendenza delle componenti della matrice  $C(\eta)$  dal rapporto d'aspetto  $\eta$  che si ottiene interpolando rispetto ai valori calcolati per  $\eta = 1, 2, 3, 4$ .



st'ultimo è sufficientemente regolare da legittimare l'approssimazione introdotta.

Data l'assenza dei termini lineari nell'espressione della forzante, la (4.30) è un polinomio di quarto grado nei parametri lagrangiani avente i termini lineari e cubici identicamente nulli, cioè del tipo:

$$E_m(q_c, p) = \mathbb{K}_{ij}^m(p)q_iq_j + \mathbb{N}_{ijhk}(p)q_iq_jq_hq_k \quad i, j, h, k = 1, 3, 4 \quad (4.34)$$

i cui coefficienti<sup>9</sup>, definiti dalle (4.10), si ottengono calcolando le componenti della matrice  $\tilde{C}(\eta)$  ed utilizzando le espressioni riportate per completezza al termine del capitolo.

#### 4.5 RISULTATI

Una volta imposto il vincolo di incastro in corrispondenza del lato  $\tilde{x} = 0$  l'energia di deformazione elastica del guscio assume la forma (4.9) ed è rappresentata da un polinomio di quarto grado nei parametri lagrangiani<sup>10</sup>  $q_c = \{q_1, q_3, q_4\}$  e dipendente dai parametri di progetto  $p = \{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \eta, \beta, \nu, \gamma\}$ .

Questi ultimi sono equamente divisi in parametri geometrici e costitutivi e in quanto segue verranno considerati separatamente; procedendo in questo modo è infatti possibile misurare l'importanza relativa dei due contributi sulle proprietà di multistabilità e com-

<sup>9</sup> Come si è già avuto modo di osservare questi ultimi svolgono, all'interno della strategia di riduzione cui ci si attiene, un ruolo simile a quello assolto dagli integrali di Mohr nella soluzione di telai iperstatici di travi.

<sup>10</sup> Tenendo presenti le (4.21), ricordiamo che  $q_1$  permette di considerare curvature  $\tilde{k}_{\tilde{x}}$  uniformi,  $q_3$  permette di considerare curvature  $\tilde{k}_{\tilde{x}}$  variabili linearmente secondo  $\tilde{x}$ ,  $q_4$  permette di considerare curvature  $\tilde{k}_{\tilde{x}}$  variabili linearmente secondo  $\tilde{y}$  e curvature  $\tilde{k}_{\tilde{y}}$  variabili con legge quadratica secondo  $x$  (figura 4.4); per la condizione di compatibilità di Codazzi-Mainardi (3.26)  $q_4$  misura anche la curvatura torsionale nei punti del guscio che rispettano la condizione  $\tilde{x}, \tilde{y} \neq 0$ .

prendere ad esempio se è preferibile, in fase progettuale, privilegiare l'ottimizzazione della forma geometrica della configurazione naturale oppure l'ottimizzazione delle proprietà del laminato costituente il guscio.

Inizieremo restringendo lo spazio dei parametri di progetto ai soli parametri geometrici  $p_g = \{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \eta\}$ : salvo diverso avviso i risultati numerici che verranno mostrati faranno riferimento ai seguenti parametri costitutivi<sup>11</sup>:

$$\beta = 1.0 \quad \nu = 0.908 \quad \gamma = 0.931 \quad (4.35)$$

Le configurazioni di equilibrio del modello vincolato coincidono con i punti di stazionarietà dell'energia di deformazione elastica e sono quindi soluzione del sistema non lineare di equazioni algebriche:

$$\partial_{q_c} E_c(q_c, p) = 0 \quad (4.36)$$

Il calcolo di tutte le radici reali di un sistema di questo tipo, cui corrispondono altrettante configurazioni di equilibrio, richiede in genere un onere computazionale elevato, soprattutto se ha interesse svolgere un'indagine di tipo parametrico, piuttosto che valutare una singola soluzione. Ottimi risultati in termini di efficienza e tempo di calcolo possono essere raggiunti scegliendo l'algoritmo di ricerca delle soluzioni tra quelli appartenenti alla classe dei *metodi di continuazione per omotopia* (cfr. ad esempio [Vershelde \[150\]](#), [Vershelde \[149\]](#)). Calcolate le configurazioni di equilibrio, la relativa stabilità dipende dal segno assunto dal determinante dei minori della matrice Hessiana:

$$H(q_c, p) := \partial_{q_c q_c} E_c(q_c, p)$$

che in corrispondenza di una configurazione di equilibrio stabile è definita positiva. Così, ad esempio, ad ogni particolare scelta dei parametri di progetto  $p_g$  che definiscono la configurazione naturale corrispondono una o più configurazioni di equilibrio stabile compatibili con l'imposizione del vincolo di incastro (figura 4.6).

Ciò non basta e ne abbiamo già rilevato le ragioni discutendo il problema progettuale; da quelle stesse ragioni emergono, chiari, gli obiettivi che è necessario raggiungere. Nella fattispecie deve essere possibile:

- i. individuare le regioni dello spazio dei parametri di progetto cui corrispondono gusci multistabili anche dopo l'imposizione del vincolo;
- ii. determinare i valori dei parametri di progetto cui corrisponde una particolare scelta delle configurazioni (stabili) assunte dal guscio dopo l'imposizione del vincolo;

<sup>11</sup> I valori riportati corrispondono a un laminato in fibra di carbonio e resina epossidica con sequenza di laminazione simmetrica:

$$[+45/-45_2/+45/-45/+45_2/-45]$$

con:

$$E_1 = 207 \text{ GPa} \quad E_2 = 5.17 \text{ GPa} \\ \nu_{12} = 0.25 \quad G_{12} = 2.59 \text{ GPa}$$

e con ciascuna lamina di spessore pari a 0.125 mm. Il laminato è stato progettato per garantire la necessaria robustezza alla trisabilità di gusci liberi al bordo ([Maurini et al. \[106\]](#)).

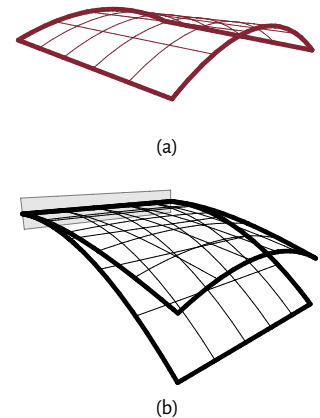


Figura 4.6: ad ogni particolare scelta dei parametri geometrici di progetto, che definiscono la configurazione naturale (a), è possibile associare le corrispondenti configurazioni di equilibrio stabile del guscio vincolato (b).

- iii. valutare l'impegno richiesto dalla transizione da una configurazione all'altra, in modo da poter gestire e ottimizzare le modalità di attuazione.

### Valutazione delle frontiere di stabilità

Iniziamo considerando il primo obiettivo. Ad ogni punto dello spazio dei parametri di progetto corrisponde una particolare scelta della geometria della configurazione naturale del guscio, individuata dalle curvature  $\tilde{h}_1$  e  $\tilde{h}_2$  del lato iniziale e terminale e dal rapporto tra i lati  $\eta$ . D'altra parte abbiamo già commentato come nelle applicazioni  $\eta$  venga scelto in un insieme piuttosto ristretto di valori cosicché può considerarsi ragionevole scegliere di rappresentare i risultati in un numero finito di piani  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$ , ciascuno associato ad una particolare scelta del rapporto d'aspetto  $\eta = \bar{\eta}$ .

In ciascuno di questi piani  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \bar{\eta})$  è possibile separare l'insieme delle curvature iniziali cui corrispondono gusci in grado di conservare la propria multistabilità anche dopo l'imposizione del vincolo, dall'insieme delle curvature iniziali cui corrispondono gusci che, all'opposto, sono in grado di mantenere una sola configurazione di equilibrio stabile. Il primo obiettivo richiede quindi di tracciare le frontiere che segnano il confine tra le due regioni. L'attraversamento di ognuna di queste frontiere implica la perdita di stabilità di almeno una delle configurazioni di equilibrio stabile (naturalmente avviene il contrario procedendo in senso opposto), cui corrisponde l'annullarsi del determinante della matrice hessiana. Questo significa che ciascuna frontiera rappresenta il luogo dei punti del piano  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \bar{\eta})$  che verificano simultaneamente le condizioni:

$$\partial_{q_c} E_c(q_c, p) = 0 \quad \det H(q_c, p) = 0$$

e si ottiene quindi come soluzione di un problema del tipo:

$$b(q_c, p) = 0 \quad b(q_c, p) := \begin{cases} \partial_{q_c} E_c \\ \det H \end{cases}$$

Quest'ultimo può essere scritto esplicitando la dipendenza da una delle due curvature, ad esempio  $\tilde{h}_1$ :

$$b(q_c, \tilde{h}_2, \bar{\eta}; \tilde{h}_1) = 0$$

ed essere risolto per via numerica utilizzando un algoritmo di continuazione, nel quale  $\tilde{h}_1$  assume il ruolo di parametro di controllo.

I risultati ottenuti per valori del rapporto d'aspetto  $\eta = 1, 2, 3, 4$  sono rappresentati in forma grafica nelle figura 4.7.

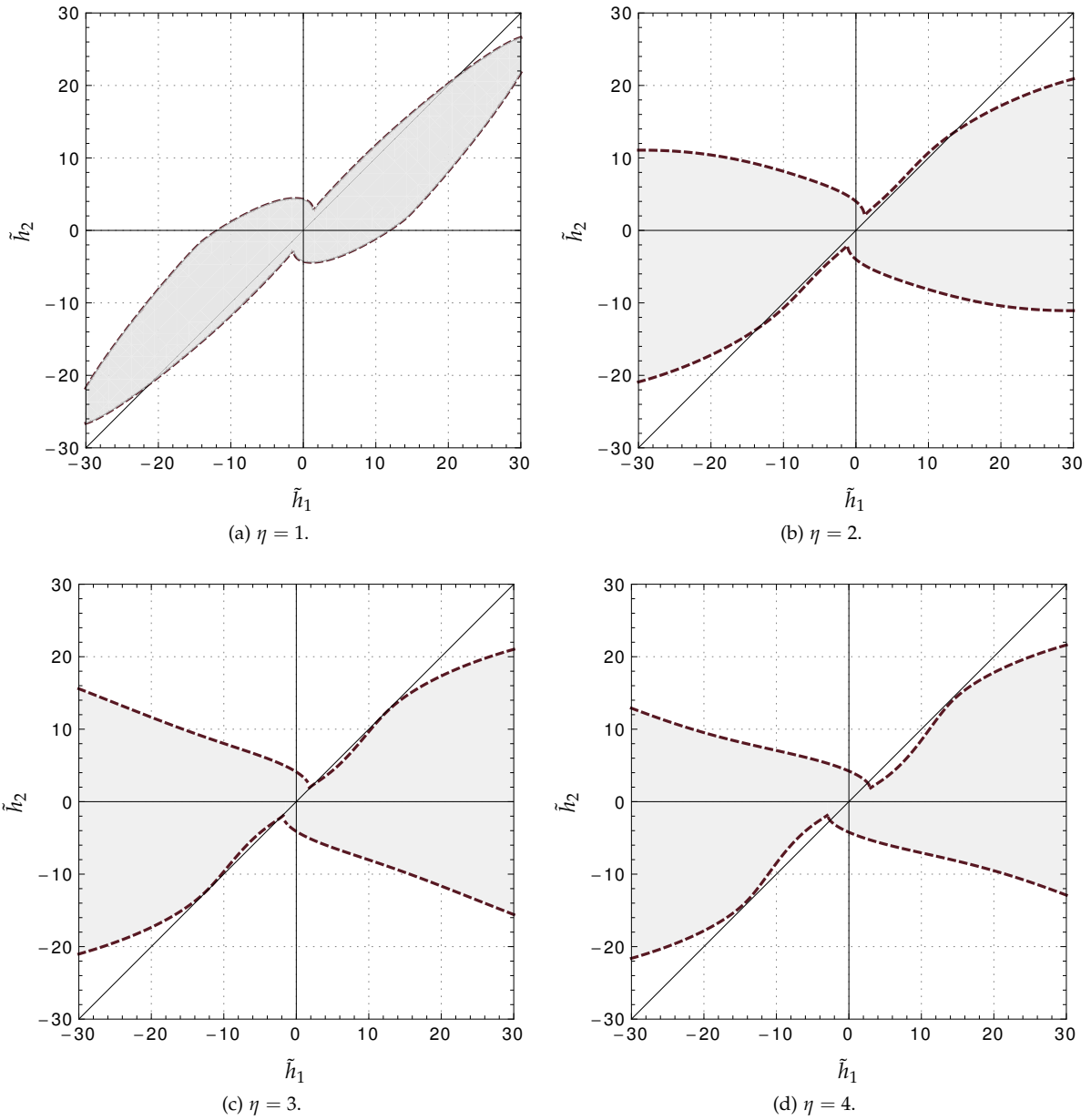


Figura 4.7: diagrammi di mono (in grigio) e bistabilità *vincolata* (in bianco) nel piano delle curvature  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$  che definiscono la configurazione naturale del guscio per diversi valori del rapporto d'aspetto. La bisettrice corrisponde alle configurazioni *cilindriche*.

In grigio è evidenziata la regione del piano che individua l'insieme delle curvatures iniziali cui corrispondono gusci che dopo l'imposizione del vincolo di incastro hanno una sola configurazione di equilibrio stabile. Per ogni altra scelta della coppia  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$  il guscio incastrato risulta al più bistabile. Emerge piuttosto chiaramente la riduzione della zona di bistabilità all'aumentare del rapporto d'aspetto. Questa tendenza non è peraltro uniforme, essendo più marcata nel passaggio da gusci a pianta quadrata ( $\eta = 1$ ) a gusci a pianta rettangolare con rapporto fra i lati due a uno ( $\eta = 2$ ); per valori più alti di  $\eta$  l'estensione e la forma della zona di bistabilità risultano sostanzialmente indipendenti dal rapporto d'aspetto. In tutti i casi le frontiere presentano simmetria centrale rispetto all'origine del piano, motivo per il quale d'ora in avanti ci si limiterà a rappresentare solo il primo e il quarto quadrante.

Per la frequenza riscontrabile nelle applicazioni, ha interesse porre in evidenza l'insieme dei gusci aventi configurazione naturale di forma cilindrica, rappresentati dai punti appartenenti alla bisettrice del piano dei parametri di progetto. Quest'ultima risulta sempre estremamente vicina alla frontiera di stabilità, almeno per valori delle curvatures iniziali non troppo grandi. Questa circostanza rappresenta una giustificazione a posteriori della scelta di una forma pseudoconica per la configurazione naturale: è infatti sufficiente una piccola variazione nel rapporto tra le curvatures iniziali per rendere assai più robusta la bistabilità del guscio vincolato. D'altra parte non è possibile aumentare eccessivamente la curvatura iniziale del guscio: da un punto di vista progettuale, ciò rende molto più difficile realizzare la transizione, che richiede un impegno energetico via via sempre maggiore. Ciò giustifica l'impiego di modelli di guscio ribassato e impone un'attenta valutazione della curvatura massima che è ragionevole ammettere: all'aumentare della curvatura del guscio cade in difetto una delle ipotesi assunte nel formulare il modello di Föppl-von Kármán, il che rende sempre meno attendibili le previsioni del modello ridotto, che ne è emanazione.

Sostituendo la (4.31) nella (4.17), per la curvatura massima si ottiene l'espressione:

$$\tilde{h}_{\max} = 16\sqrt{3}\alpha\sqrt{\|C\|}\frac{\eta}{\tau^2} \quad (4.37)$$

che ne evidenzia la dipendenza dal rapporto d'aspetto  $\eta$  e dal coefficiente di snellezza  $\tau$ . Ad ogni scelta di  $\eta$  e  $\tau$  corrisponde dunque un valore massimo di curvatura, che si può assumere come limite per le curvatures  $\tilde{h}_i$  che definiscono la configurazione naturale.

La (4.37), rappresentata in grafico in figura 4.8, può essere utilizzata per circoscrivere le regioni del generico piano  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \eta)$  in cui è

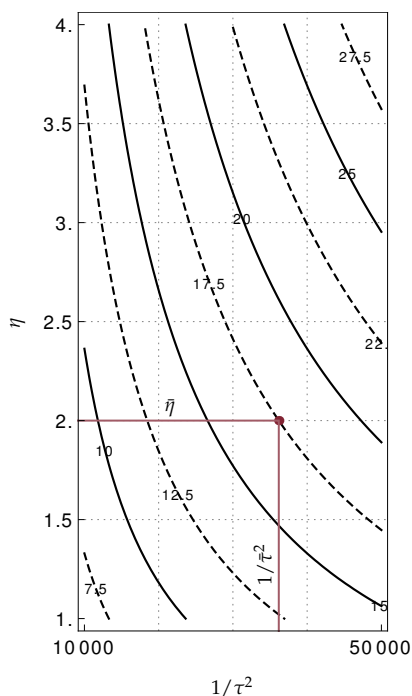


Figura 4.8: nel grafico sono rappresentate le isocurve della massima curvatura adimensionale ammissibile  $\tilde{h}_{\max}$ . Quest'ultima dipende dal rapporto d'aspetto  $\eta$  e dal coefficiente di snellezza  $\tau$  (e quindi dall'area  $A_w$  e dallo spessore equivalente  $t_e$ ). Ad ogni coppia  $(\tau, \eta)$  è possibile associare un valore massimo di curvatura (sinistra) e individuare la regione del piano  $\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2$  cui corrispondono gusci ribassati.



massima l'affidabilità del modello ridotto.

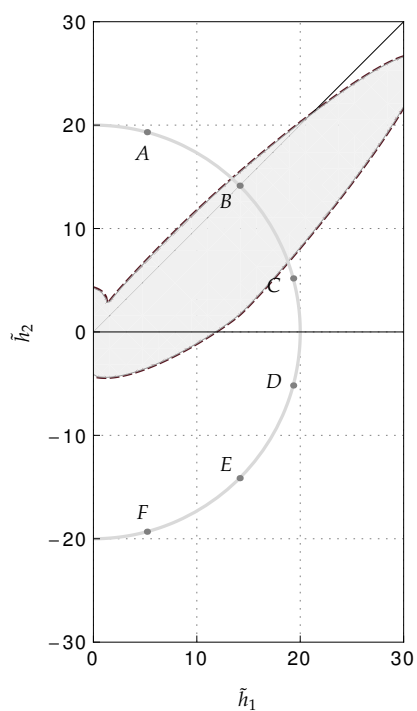
Naturalmente affinché il modello ridotto sia pienamente attendibile il limite sulla curvatura si estende ad ogni configurazione assunta dal guscio. Vedremo successivamente in che modo è possibile verificarne il rispetto.

### Selezione della forma ottimale

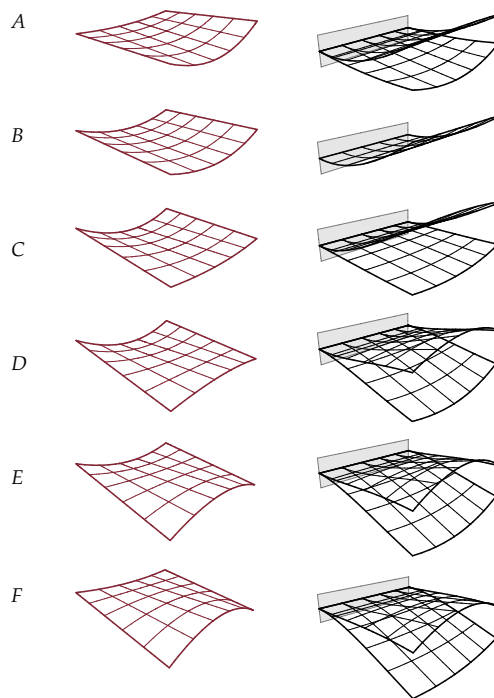
Aver definito le regioni dello spazio dei parametri di progetto cui corrispondono gusci bistabili dopo l'imposizione del vincolo d'incastro è importante ma non è sufficiente. Occorre infatti affrontare il secondo degli obiettivi fissati in precedenza, che nasce dall'esigenza progettuale di scegliere la forma geometrica della configurazione naturale del guscio in grado di realizzare due *particolari e assegnate* configurazioni vincolate. Anche in questo caso il modello ridotto è in grado di fornire una risposta sintetica, garantendo informazioni altrimenti difficilmente raggiungibili. Abbiamo visto che ad ogni punto dello spazio dei parametri di progetto, relativo ad una particolare scelta della configurazione naturale, è possibile associare le configurazioni di equilibrio stabile compatibili con l'imposizione del vincolo (figura 4.6). Calcolando quest'ultime lungo una generica traiettoria nello spazio dei parametri di progetto emerge immediatamente la cercata corrispondenza tra dati (le configurazioni di equilibrio stabile compatibili con il vincolo che è necessario ottenere) ed incognite (i parametri geometrici che definiscono la configurazione naturale da realizzare) del processo progettuale<sup>12</sup>. Questa corrispondenza è rappresentata in forma grafica in figura 4.9.

Non è tutto. Spesso le configurazioni vincolate da realizzare devono rispettare ulteriori condizioni, anche di natura geometrica, che traggono origine da requisiti di tipo prestazionale, specifici del particolare ambito di applicazione. Ad esempio può essere necessario limitare l'inflessione dell'estremo libero, oppure garantire in una delle configurazioni un certo livello di curvatura e così via; si tratta in ogni caso di richieste pertinenti con l'obiettivo che si intende raggiungere. La natura semianalitica del modello ridotto permette di arricchire ulteriormente il livello di informazione contenuto nelle rappresentazioni mostrate in figura 4.9, in modo da garantire una risposta efficace anche a questo tipo di esigenze. Allo scopo è sufficiente definire in maniera opportuna un grandezza rappresentativa dello specifico requisito che è necessario soddisfare, valutarla in ogni punto dello spazio dei parametri di progetto e rappresentare i risultati ottenuti mediante un grafico per linee di livello. Naturalmente ciò richiede di eseguire migliaia di minimizzazioni dell'energia di

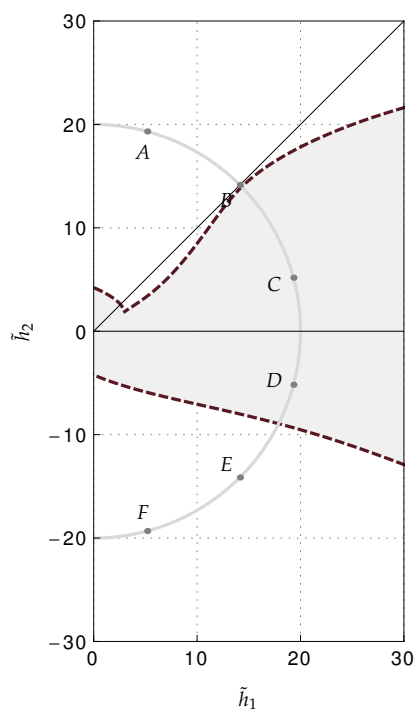
<sup>12</sup> È importante osservare che se il processo progettuale è *inverso* (impone di risalire dalle configurazioni vincolate che si intende realizzare alla soggiacente configurazione naturale), la metodologia semi-analitica impiegata è *diretta* (si determinano le configurazioni vincolate associate ad ogni possibile configurazione naturale).



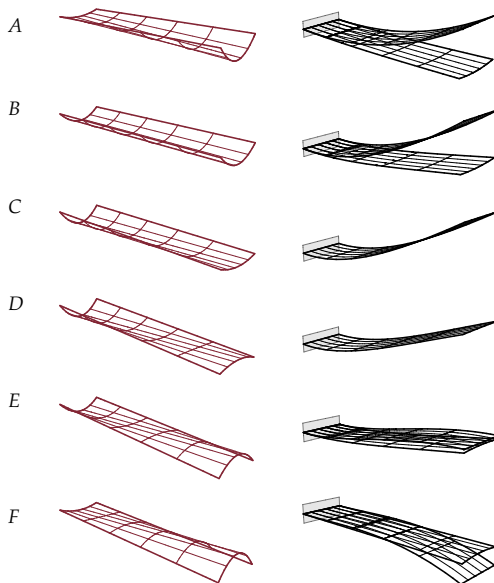
(a) Diagramma di stabilità,  $\eta = 1$ .



(b) Configurazione naturale (sinistra) e corrispondenti configurazioni stabili vincolate,  $\eta = 1$ .



(c) Diagramma di stabilità,  $\eta = 4$ .



(d) Configurazione naturale (sinistra) e corrispondenti configurazioni stabili vincolate,  $\eta = 4$ .

Figura 4.9: ad ogni coppia di configurazioni stabili vincolate da realizzare è possibile associare la corrispondente configurazione naturale.

deformazione elastica, ciascuna relativa ad una particolare forma della configurazione naturale del guscio: emerge evidente il vantaggio di disporre di un modello discreto di guscio con solo tre gradi di libertà. A titolo di esempio in figura 4.10 è stata scelta la norma- $L_2$  della differenza tra i campi di spostamento trasversale associati alle configurazioni di equilibrio stabile da realizzare, che si intende come misura della distanza tra le stesse.

Allo stesso modo e senza difficoltà ulteriori è possibile verificare il rispetto del vincolo sulla curvatura massima, necessario per considerare il guscio ribassato e accettare le previsioni del modello.

### Valutazione delle barriere energetiche e gestione dell'attuazione

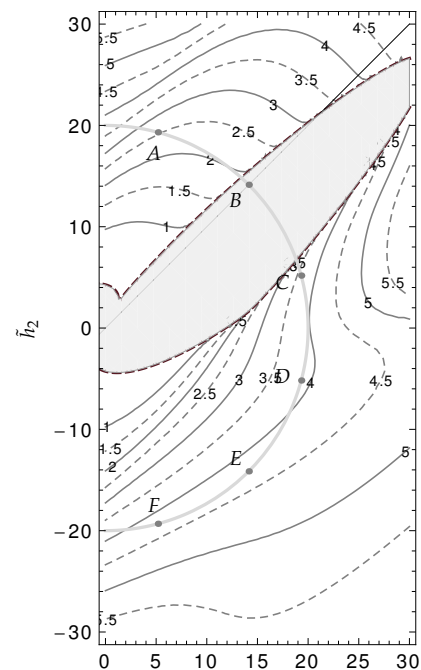
Nei paragrafi precedenti si è visto come il modello ridotto consenta non solo di individuare le regioni dello spazio dei parametri di progetto cui corrispondono gusci multistabili anche dopo l'imposizione del vincolo, ma anche di determinarne il valore (e quindi la forma della configurazione naturale ad essi associata) cui corrisponde una particolare scelta delle configurazioni stabili vincolate.

La realizzazione delle configurazioni geometriche volute costituisce l'obiettivo principe del processo progettuale ma non ne esaurisce le richieste. Di grande importanza è anche il controllo e la gestione della transizione da una configurazione all'altra, ossia la progettazione dell'attuazione, intesa come la scelta della disposizione geometrica e della potenza degli attuatori.

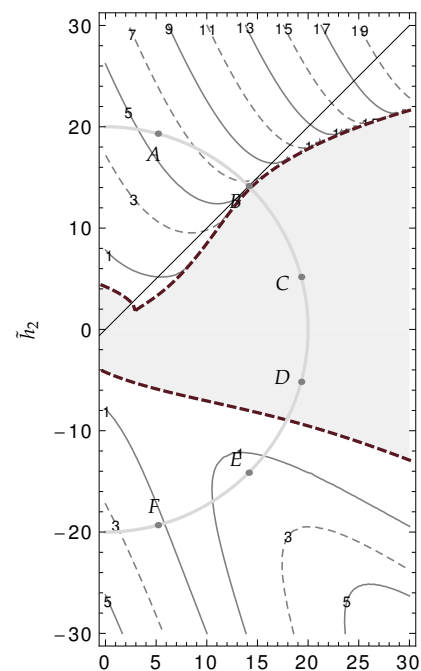
Da un punto di vista fisico ciò richiede la conoscenza delle barriere energetiche interposte fra i minimi corrispondenti alle due (o più) configurazioni stabili individuate.

Se si considera un modello ad un grado di libertà di una struttura bistabile, quest'ultime si possono valutare con estrema semplicità (figura 4.11) e con altrettanta semplicità è possibile interpretarne il significato meccanico:  $\Delta E_1$  è l'energia che è necessario spendere per realizzare la transizione della prima configurazione (cui corrisponde il minimo  $m_1$ ) alla seconda configurazione ( $m_2$ );  $\Delta E_2$  è l'energia che è necessario spendere per realizzare la transizione opposta; infine  $\Delta E_{12} = |\Delta E_1 - \Delta E_2|$  ne misura la differenza.

Per quanto detto in precedenza  $\Delta E_1$  e  $\Delta E_2$  possono considerarsi a tutti gli effetti degli ulteriori parametri di progetto: ne hanno dignità perché attraverso la loro calibrazione può essere gestita la robustezza della transizione fra le configurazioni stabili e valutata la potenza richiesta agli attuatori. In questo senso il controllo delle barriere energetiche completa la selezione della forma iniziale ottimale: senza la loro calibrazione la transizione tra le configurazioni stabili potrebbe



(a)  $\eta = 1$ .



(b)  $\eta = 4$ .

Figura 4.10: differenza in norma- $L_2$  dei campi di spostamento trasversale associati ad ogni coppia di configurazioni di equilibrio stabile.

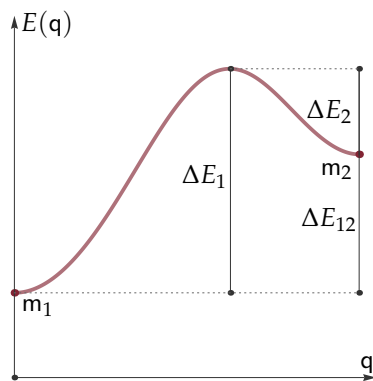


Figura 4.11: profilo dell'energia di deformazione elastica di un modello di struttura bistabile ad un grado di libertà.

<sup>13</sup> Inteso in termini di costo energetico necessario per realizzare la transizione tra le configurazioni stabili.

avvenire con troppa semplicità o, all'opposto, richiedere un impegno eccessivo.

Naturalmente un modello ad un grado di libertà difficilmente consente di valutare con l'accuratezza necessaria all'applicazione tecnologica tanto l'una quanto l'altra domanda progettuale. Adottare un modello di questo tipo equivale infatti a scegliere a priori la modalità con cui realizzare la transizione; in altri termini equivale ad assumere già nota la disposizione geometrica degli attuatori.

L'adozione di un modello a più di un grado di libertà muta radicalmente la situazione perché in questo caso il cambiamento di configurazione non avviene più secondo una traiettoria unica e prestabilita nello spazio dei parametri lagrangiani e ad ogni percorso possibile corrisponde non solo una particolare disposizione geometrica degli attuatori ma anche una diversa potenza ad essi richiesta.

Tra tutti i percorsi possibili ha quindi interesse determinare quello cui corrisponde l'impegno minimo<sup>13</sup>, in modo da individuare la disposizione migliore degli attuatori e la loro potenza, attraverso la stima dei corrispondenti valori di  $\Delta E_1$  e  $\Delta E_2$ ; in questo senso parleremo di *percorso ottimale*. Evidentemente ciò è possibile se il modello ha pochi gradi di libertà, il che esclude il ricorso a modelli discreti ottenuti utilizzando il metodo degli elementi finiti o espansioni polinomiali delle componenti dei campi di spostamento. Anche in questo caso, dunque, emerge l'utilità del modello e della procedura proposta.

Avendo chiarito il *perché*, occorre ragionare sul *come*. La valutazione del percorso ottimale ha infatti richiesto l'elaborazione di un algoritmo appropriato che naturalmente ha la massima efficacia computazionale quando il modello possiede un numero ridotto di gradi di libertà ma che in linea di principio può essere utilizzato qualunque sia il numero degli stessi. L'algoritmo procede secondo la logica che segue:

- i. si valutano i minimi, cui corrispondono i punti  $m_1$  e  $m_2$  nello spazio dei parametri lagrangiani;
- ii. si opera un cambio di sistema di riferimento. Il nuovo sistema di riferimento ha origine in  $m_1$  e uno degli assi orientato secondo la retta congiungente i due minimi, la cui direzione è individuata dal vettore  $i = (m_1 - m_2) / \|(m_1 - m_2)\|$ . Gli altri assi sono scelti in modo da costituire un sistema di riferimento ortogonale per l'iperpiano  $\Pi$  di direzione ortogonale  $i$ . Nel nuovo sistema di riferimento risulta  $m_2 = m_1 + \|(m_1 - m_2)\|i$ ;
- iii. ad ogni punto  $q(\xi) = m_1 + \xi i$  viene associato il punto  $q^*$  cui corrisponde il minimo locale della proiezione dell'energia di deformazione elastica  $E$  sull'iperpiano  $\Pi_q$ , più vicino al punto  $q$ ;

iv. alla traiettoria dello spazio dei parametri lagrangiani  $q^*(\xi)$  corrisponde una particolare modalità di attuazione cui è possibile associare una stima del percorso ottimale. La funzione  $\xi \rightarrow E(q^*(\xi))$  permette di valutare le barriere energetiche  $\Delta E_1$  e  $\Delta E_2$ .

Il procedimento è illustrato in figura 4.12 con riferimento al modello di guscio vincolato a tre gradi di libertà. In questo caso l'iperpiano  $\Pi$  ha dimensione due (è, cioè, un piano) e la relativa proiezione dell'energia di deformazione elastica si può descrivere rappresentandone le curve di livello.

Osserviamo che ha interesse anche procedere al confronto tra la funzione  $\xi \rightarrow E(q^*(\xi))$ , che rappresenta il percorso ottimale, e la funzione  $\xi \rightarrow E(q(\xi))$ , che si ottiene immediatamente valutando l'energia di deformazione elastica lungo la congiungente i due minimi. La funzione ottenuta è infatti rappresentativa dell'energia di deformazione elastica del modello ad un solo grado di libertà che si ottiene scegliendo quale ansatz per lo spostamento trasversale il campo:

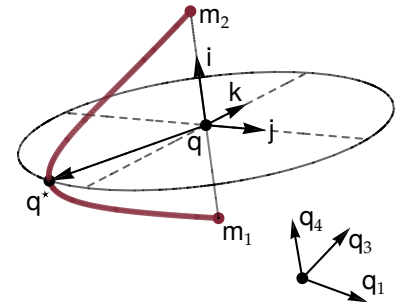
$$\tilde{w}(\tilde{x}_\alpha; \mathbf{q}) = \frac{W_1(\tilde{x}_\alpha) - W_2(\tilde{x}_\alpha)}{\|m_1 - m_2\|} \mathbf{q} + W_1(\tilde{x}_\alpha) \quad (4.38)$$

dove  $W_1(\tilde{x}_\alpha)$  e  $W_2(\tilde{x}_\alpha)$  rappresentano i campi di spostamento trasversale corrispondenti ai minimi  $m_1$  e  $m_2$ . Il confronto tra i due profili di energia permette quindi di valutare l'attendibilità di modelli monodimensionali di questo tipo nel dimensionamento dell'attuatore<sup>14</sup>.

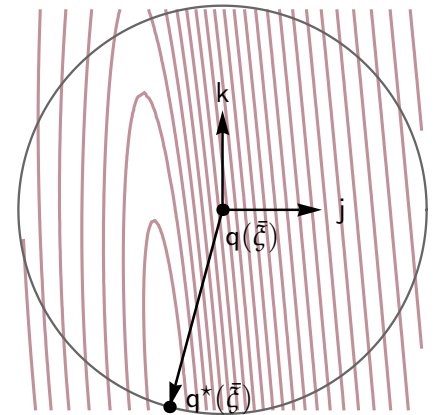
Prima di discutere della possibilità di ottimizzare la forma iniziale attraverso la calibrazione delle barriere di energia  $\Delta E_1$  e  $\Delta E_2$  è opportuno chiarire con due esempi le informazioni che è possibile ottenere utilizzando l'algoritmo. Per farlo, fissiamo l'attenzione sulle due diverse scelte della configurazione naturale cui corrispondono i punti  $A$  e  $B$  del piano delle curvature iniziali  $\eta = 1$  indicati in figura 4.13a insieme alla rappresentazione per linee di livello del divario energetico  $\Delta E_{12}$  tra i minimi delle configurazioni stabili vincolate.

Ai punti  $A$  e  $B$  risultano associate le configurazioni stabili  $(m_{1A}, m_{2A})$  e  $(m_{1B}, m_{2B})$  rispettivamente (figura 4.13b); come emerge dalla lettura della differenza  $\Delta E_{12}$  le due configurazioni sono molto più vicine nel primo caso.

In figura 4.13c-d viene rappresentato, per le due scelte, il profilo dell'energia di deformazione elastica corrispondente ad un modello monodimensionale del tipo (4.38) (in grigio) e quello che si ottiene utilizzando l'algoritmo per la ricerca del percorso ottimale (in rosso). In entrambi i casi emerge in maniera netta la riduzione delle barriere di energia che è possibile conseguire guidando la transizione tra le configurazioni stabili secondo la traiettoria ottimale. Inoltre l'algoritmo consente di avanzare un'ipotesi sulla natura della transizione



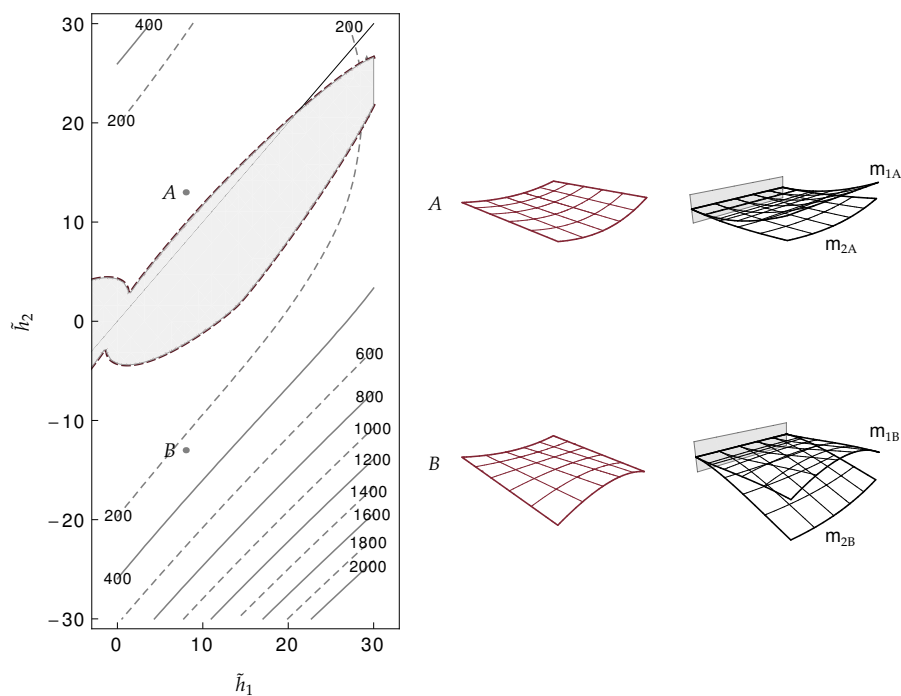
(a) Traiettoria dello spazio dei parametri lagrangiani corrispondente al percorso ottimale.



(b) Linee di livello della proiezione dell'energia di deformazione elastica sul generico iperpiano  $\Pi_q$ .

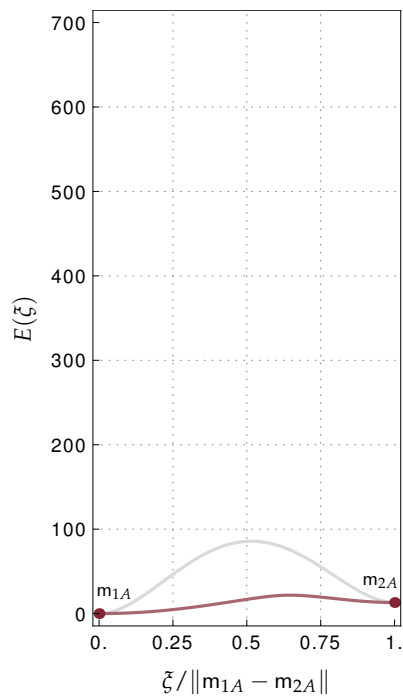
Figura 4.12: illustrazione dell'algoritmo per la valutazione del percorso ottimale.

<sup>14</sup> Come si è già osservato utilizzando un modello ad un grado di libertà non si possono ottenere informazioni sulla disposizione geometrica degli attuatori ma solo sulla loro potenza.

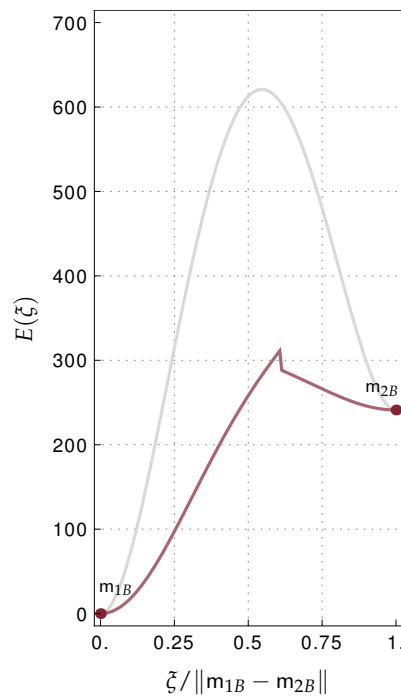


(a) Linee di livello della differenza di energia tra i minimi  $\Delta E_{12}$  ( $\eta = 1$ ).

(b) Configurazione naturale e corrispondenti configurazioni stabili vincolate.



(c) Proiezioni di  $E(\xi)$ ; percorso ottimale (rosso) e modello monodimensionale (4.38)



(d) Proiezioni di  $E(\xi)$ ; percorso ottimale (rosso) e modello monodimensionale (4.38)

Figura 4.13: esempio di applicazione dell'algoritmo di ricerca del percorso ottimale.

stessa: la discontinuità nel profilo dell'energia che si osserva nel secondo caso segnala l'innescò di una stabilità per scatto, assente nel primo caso (per il quale la transizione può avvenire in maniera quasi-statica). È evidente l'interesse, anche progettuale, che ha questo tipo di previsioni.

Si è detto che, con la valutazione delle barriere di energia e della natura della transizione, è possibile avere informazioni utili per il dimensionamento degli attuatori. Per stabilire la loro collocazione occorre invece considerare la traiettoria nello spazio dei parametri lagrangiani associata al percorso ottimale, ad esempio rappresentandone la proiezione in un piano significativo, di immediata interpretazione geometrica. Se si osserva che, date le (4.25), le:

$$\tilde{k}_{\tilde{x},med} := \frac{1}{\sqrt{\eta}} \int_0^{\sqrt{\eta}} \tilde{k}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, 0) d\tilde{x} = q_1 + \frac{\sqrt{\eta}}{2} q_3$$

$$\tilde{k}_{\tilde{y},med} := \sqrt{\eta} \int_{-1/(2\sqrt{\eta})}^{1/(2\sqrt{\eta})} \tilde{k}_{\tilde{y}}(\sqrt{\eta}) d\tilde{y} = \eta q_4$$

rappresentano rispettivamente le curvatures medie delle curve di superficie  $\tilde{y} = 0$  e  $\tilde{x} = \sqrt{\eta}$ , evidenziate in rosso in figura 4.5, è ragionevole valutare la proiezione della traiettoria ottimale nel piano  $(\tilde{k}_{\tilde{x},med}, \tilde{k}_{\tilde{y},med})$ .

Si ottengono in questo modo, per i due casi considerati, le curve in rosso di figura 4.15, nella quale sono anche rappresentate le diverse configurazioni assunte durante la transizione corrispondente al percorso ottimale.

Nel primo caso quest'ultima deve essere realizzata variando contemporaneamente entrambe le curvatures; nel secondo invece può essere con buona approssimazione compiuta variando unicamente la curvatura  $\tilde{k}_{\tilde{y},med}$ , prima e dopo il sopraggiungere dell'instabilità per scatto. Le informazioni ottenute in questo modo, pur incomplete, possono essere comunque utilizzate per procedere ad una prima valutazione della disposizione degli attuatori.

### Influenza combinata di forma e materiale

Il modello proposto consente, assegnate le proprietà meccaniche del materiale, di associare due particolari configurazioni geometriche vincolate alla configurazione naturale che, dopo l'imposizione del vincolo, ne garantisce la stabilità. Quest'ultima corrisponde ad una particolare scelta dei parametri di progetto  $\{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \eta\}$  che individuano rispettivamente la curvatura (iniziale) del lato che verrà incastrato, la curvatura (iniziale) del lato ad esso opposto e il rapporto di forma del dominio di riferimento. Quanto alla gestione dell'attuazione, il modello permette una valutazione del percorso di carico cui cor-

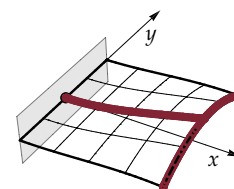


Figura 4.14: evidenziate in rosso le curve di superficie  $\tilde{y} = 0$  e  $\tilde{x} = \sqrt{\eta}$ , aventi curvatura  $\tilde{k}_{\tilde{x},med}$  e  $\tilde{k}_{\tilde{y},med}$  rispettivamente.

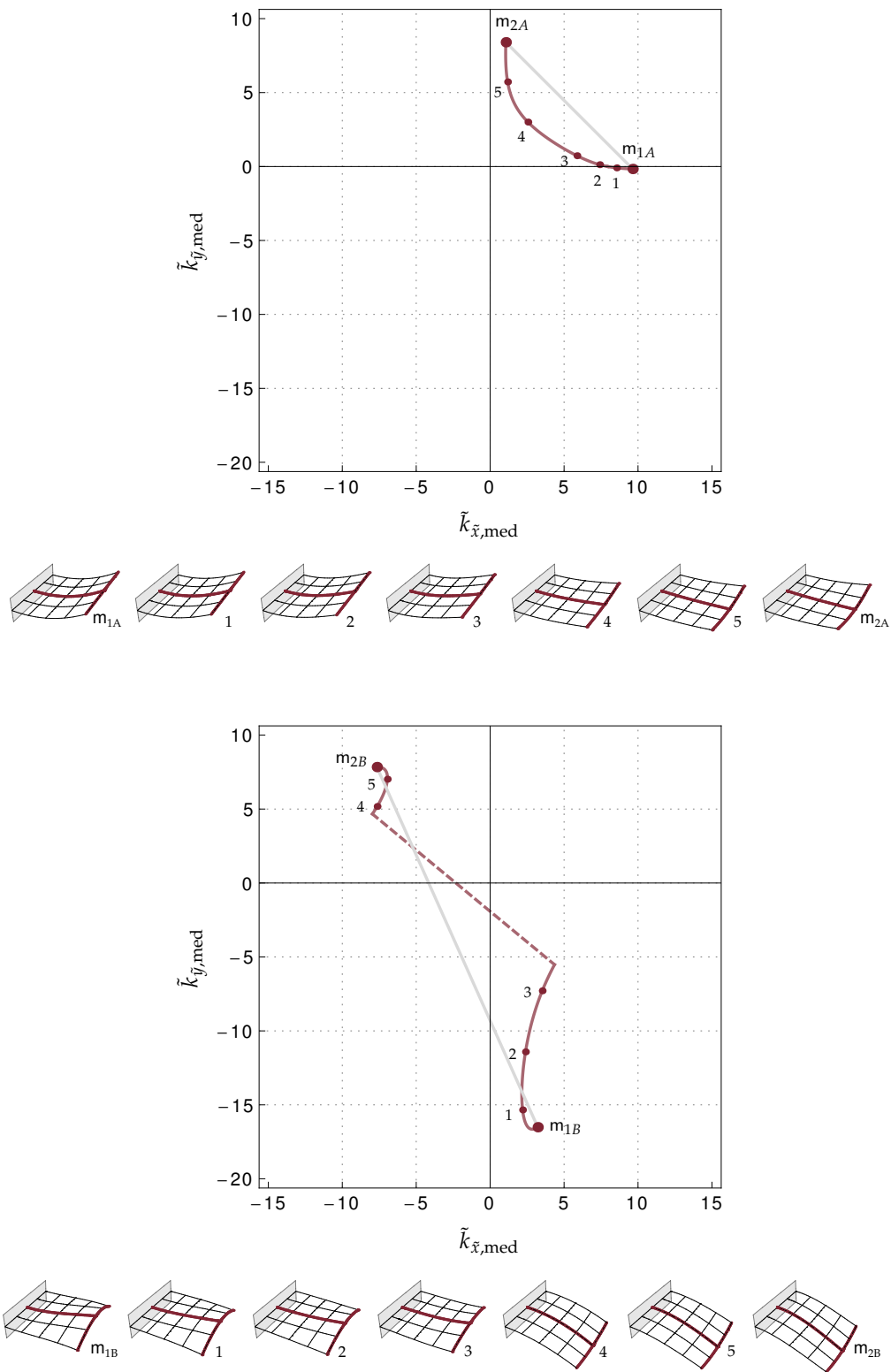


Figura 4.15: proiezione della traiettoria associata al percorso ottimale sul piano  $(\tilde{k}_{\bar{x},med}, \tilde{k}_{\bar{y},med})$  e corrispondenti configurazioni assunte dal guscio.



risponde la minore richiesta di potenza, percorso che è possibile rappresentare nel piano delle curvatures medie  $\tilde{k}_{\bar{x},med}, \tilde{k}_{\bar{y},med}$ .

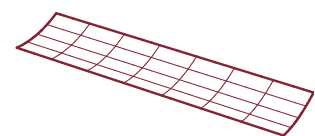
Tutte queste operazioni possono evidentemente essere eseguite procedendo in senso opposto, ossia assumendo una particolare forma geometrica per la configurazione naturale e valutando la scelta dei parametri costitutivi che rende stabili, dopo l'imposizione del vincolo, le configurazioni vincolate scelte quali obiettivi di progetto.

Si ritiene tuttavia più interessante, almeno in questa fase, procedere considerando assegnato uno dei parametri di progetto geometrici, nella fattispecie il rapporto di forma  $\eta$ , e valutando l'effetto sulla *multistabilità vincolata* di uno dei parametri di progetto costitutivi, nello specifico il rapporto tra i moduli di elasticità longitudinale  $\beta$ . D'ora in avanti si assumerà dunque  $\eta = 4$  (cui corrispondono gusci allungati, quasi nastriformi), mentre per  $\nu$  e  $\gamma$  si riterranno ancora validi i valori indicati nella (4.35).

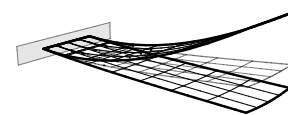
In figura 4.18 sono quindi confrontate per quattro valori del rapporto  $\beta$  le frontiere di stabilità che separano, nel piano delle curvatures iniziali, le scelte cui corrispondono gusci vincolati monostabili (in grigio) da quelle cui corrispondono gusci vincolati bistabili (in bianco). Giacché si è scelto  $\beta = 1, 1.25, 1.5, 1.75$  i grafici in figura 4.18 misurano l'influenza sulla stabilità delle configurazioni vincolate di un incremento di rigidezza in direzione  $\bar{y}$ , cui corrisponde in generale un aumento del dominio di bistabilità. Calibrando opportunamente il rapporto fra i moduli di elasticità longitudinale è allora possibile *irrobustire* la bistabilità di alcune scelte. A titolo di esempio in figura 4.18 è indicato il punto B già indicato nelle figure 4.10b e 4.9c e corrispondente ad un guscio cilindrico di curvatura iniziale  $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2 = 10\sqrt{2}$  (figura 4.16a). L'aumento del rapporto fra i moduli di elasticità longitudinale comporta in questo caso un allontanamento dalla frontiera di stabilità, rispetto alla quale, data la natura approssimata del modello, è necessario che ogni scelta progettuale conservi un margine opportuno.

Naturalmente, variando  $\beta$  nell'intervallo considerato, viene alterata la forma geometrica delle configurazioni di equilibrio stabile che si ottengono dopo l'imposizione del vincolo di incastro (la configurazione naturale è infatti in questo caso *assegnata*). Queste modifiche, sensibili nel passaggio da  $\beta = 1$  a  $\beta = 1.25$ , subiscono una drastica riduzione per valori di  $\beta$  più alti (figura 4.16b-c).

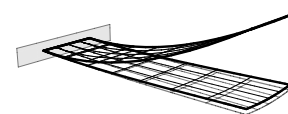
Si osserva che, all'aumento di  $\beta$ , corrisponde un aumento della potenza minima di attuazione e una diminuzione della differenza di energia tra le due configurazioni di equilibrio stabile (figura 4.17). È interessante osservare che un comportamento simile si riscontra imponendo l'incastro con una lieve curvatura  $\chi$  residua (di segno positivo, cioè concorde con  $\tilde{h}_1$ , curvatura del lato del guscio sul quale si considera applicato l'incastro).



(a) Configurazione naturale.



(b) Configurazioni stabili:  $\beta = 1.0$  (chiaro),  $\beta = 1.25$  (scuro).



(c) Configurazioni stabili:  $\beta = 1.25$  (chiaro),  $\beta = 1.75$  (scuro).

Figura 4.16: configurazioni naturale e configurazioni stabili vincolate corrispondenti al punto B di figura 4.18 per diverse scelte del rapporto  $\beta$ .

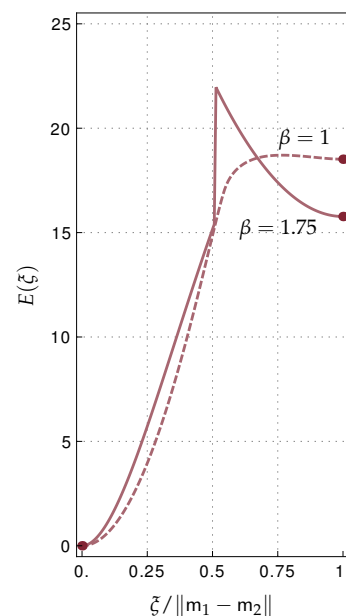


Figura 4.17: profili di energia (percorso ottimale) dopo l'imposizione del vincolo sul guscio cilindrico di figura 4.16a, per due valori del rapporto  $\beta$  (le configurazioni corrispondenti sono confrontate in figura 4.16b).

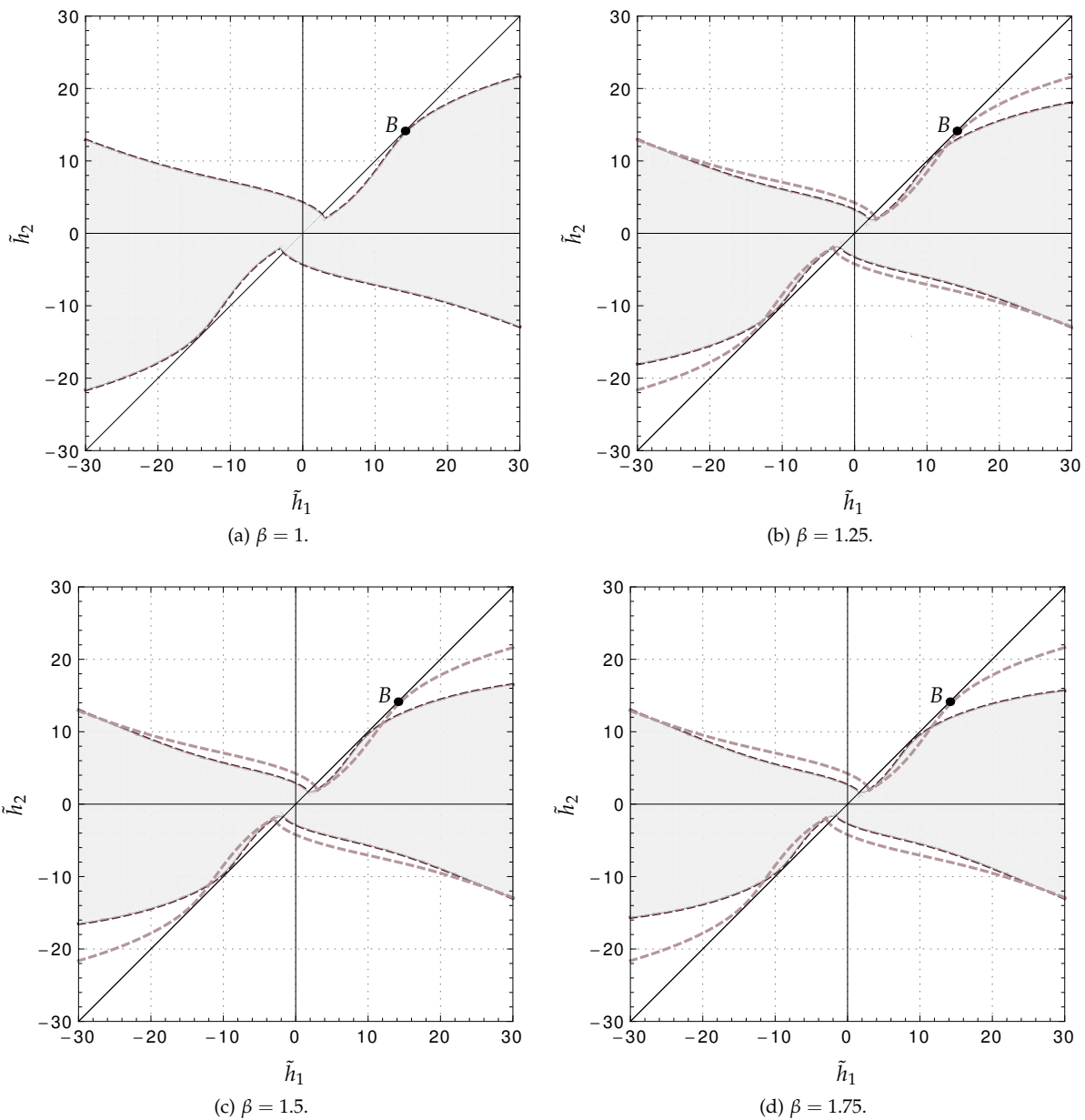


Figura 4.18: diagrammi di mono (in grigio) e bistabilità *vincolata* (in bianco) nel piano delle curvature  $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \eta = 4)$  che definiscono la curvatura naturale del guscio per diversi valori del rapporto tra i moduli di elasticità longitudinale. La bisettrice corrisponde alle configurazioni cilindriche. In chiaro la frontiera corrispondente a  $\beta = 1$ .

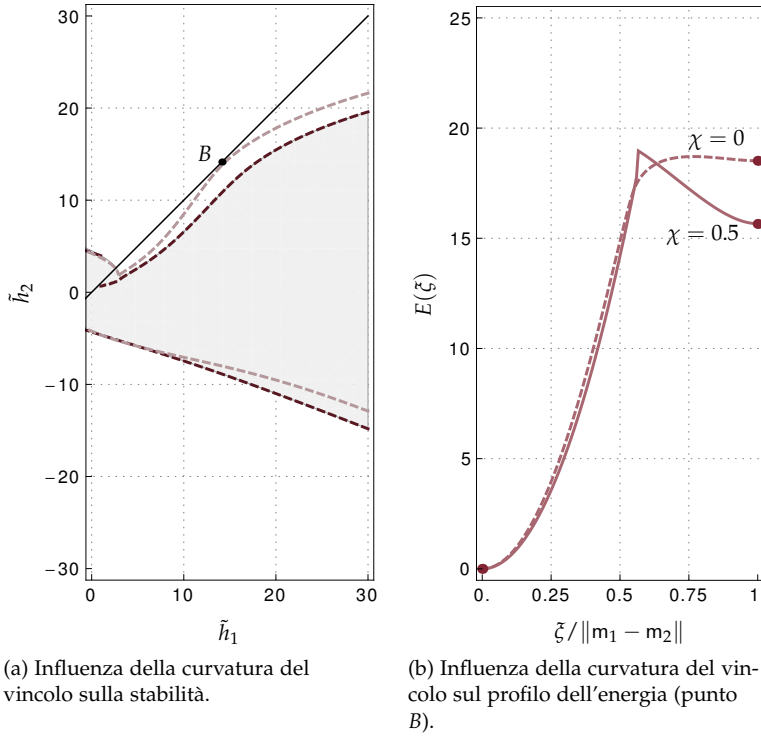


Figura 4.19: diagramma di mono (in grigio) e bistabilità vincolata (bianco); a sinistra vengono rappresentati i profili di energia (percorso ottimale) che si ottengono dopo l'imposizione del vincolo sul guscio cilindrico di figura 4.16a, per due valori della curvatura dell'incastro  $\chi$ .

#### 4.6 COMPLEMENTI

Si riportano le espressioni dei coefficienti del polinomio rappresentativo dell'energia di deformazione elastica del modello ridotto vincolato. Per il contributo flessionale (4.26), si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_1 &= \frac{\nu(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2)}{2} & \mathbb{L}_3 &= -\frac{\nu\sqrt{\eta}(\tilde{h}_1 + 2\tilde{h}_2)}{6} \\ \mathbb{L}_4 &= -\frac{2\eta^2\beta(\tilde{h}_1 + 3\tilde{h}_2) + (\nu - 8\gamma)\tilde{h}_1 + (\nu + 8\gamma)\tilde{h}_2}{24\eta} \\ \mathbb{K}_{11}^b &= 1 & \mathbb{K}_{13}^b &= \sqrt{\eta} & \mathbb{K}_{14}^b &= \frac{1}{6\eta} + \frac{2\eta\nu}{3} & \mathbb{K}_{33}^b &= \frac{\eta}{3} \\ \mathbb{K}_{34}^b &= \frac{1 + 6\eta^2\nu}{12\sqrt{\eta}} & \mathbb{K}_{44}^b &= \frac{1 + 28\beta\eta^4 + 8\eta^2(\nu + 8\gamma)}{144\eta^2} \end{aligned}$$

mentre, per il contributo membranale (4.34):

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{14}^m &= 2\frac{(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)^2}{\eta}\tilde{\mathcal{C}}_{12} & \mathbb{K}_{34}^m &= 2\frac{(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)^2}{\eta}\tilde{\mathcal{C}}_{23} & \mathbb{K}_{44}^m &= 6\frac{(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2)^2}{\eta}\tilde{\mathcal{C}}_{24} \\ \mathbb{N}_{1414} &= \tilde{\mathcal{C}}_{11} & \mathbb{N}_{1434} &= \tilde{\mathcal{C}}_{13} & \mathbb{N}_{1444} &= \tilde{\mathcal{C}}_{14} & \mathbb{N}_{3434} &= \tilde{\mathcal{C}}_{33} \\ & & \mathbb{N}_{3444} &= -3\tilde{\mathcal{C}}_{34} & \mathbb{N}_{4444} &= 9\tilde{\mathcal{C}}_{44} \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 \check{C}_{11} &= \|C\|^{-1} \int_{\tilde{\omega}(\eta)} \tilde{n}_{20}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{n}_{20} & \check{C}_{12} &= \|C\|^{-1} \int_{\tilde{\omega}(\eta)} \tilde{n}_{20}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{n}_{02} \\
 \check{C}_{13} &= \|C\|^{-1} \int_{\tilde{\omega}(\eta)} \tilde{n}_{20}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{n}_{30} & \check{C}_{14} &= \|C\|^{-1} \int_{\tilde{\omega}(\eta)} \tilde{n}_{20}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{n}_{22} \\
 \check{C}_{23} &= \|C\|^{-1} \int_{\tilde{\omega}(\eta)} \tilde{n}_{02}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{n}_{30} & \check{C}_{24} &= \|C\|^{-1} \int_{\tilde{\omega}(\eta)} \tilde{n}_{02}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{n}_{22} \\
 \check{C}_{33} &= \|C\|^{-1} \int_{\tilde{\omega}(\eta)} \tilde{n}_{30}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{n}_{30} & \check{C}_{34} &= \|C\|^{-1} \int_{\tilde{\omega}(\eta)} \tilde{n}_{30}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{n}_{22} \\
 \check{C}_{44} &= \|C\|^{-1} \int_{\tilde{\omega}(\eta)} \tilde{n}_{22}^T \tilde{A}^{-1} \tilde{n}_{22}
 \end{aligned}$$

Come si è avuto modo di osservare, progettare un guscio multistabile equivale a determinare la configurazione naturale<sup>1</sup> cui corrisponde, dopo l'imposizione degli inevitabili vincoli cinematici sul bordo, le due (o più) configurazioni stabili che si intende realizzare. Si è anche detto che questa operazione non esaurisce l'attività progettuale, giacché ha importanza anche la gestione della transizione fra le diverse configurazioni, ossia il controllo e la predisposizione delle modalità di attuazione. Si è inoltre evidenziato come entrambi gli obiettivi possano essere raggiunti unicamente facendo ricorso a modelli aventi pochi gradi di libertà, gli unici che garantiscano la necessaria sintesi nella rappresentazione dello scenario globale di stabilità (numero e posizione di configurazioni stabili, valutazione delle barriere energetiche e stima del percorso cui corrisponde il minimo impegno di attuazione).

Il modello presentato nel capitolo precedente risponde a tutti i requisiti richiesti e rappresenta uno strumento di grande utilità nella prima fase progettuale, quella in cui è necessario circoscrivere le scelte possibili e selezionare quelle sostanzialmente equivalenti, ugualmente valide per raggiungere gli obiettivi prestabiliti.

Naturalmente la sintesi richiesta a modelli di questo tipo può essere raggiunta solo al prezzo di alcune ipotesi; nella fattispecie queste riguardano le configurazioni geometriche ammesse e ne restringono lo spazio a quelle ritenute più verosimili. Per questa ragione alla prima fase progettuale in precedenza descritta deve seguirne una seconda, necessaria per verificare le predizioni ottenute e giustificare le ipotesi avanzate. Il modo più diretto per ampliare lo spazio delle configurazioni ammissibili è utilizzare il metodo degli elementi finiti per la discretizzazione delle equazioni di campo (qualunque sia il modello strutturale scelto) e impiegare tecniche di continuazione numerica per il tracciamento dei percorsi di equilibrio ad esse associati.

Codici di calcolo in grado di eseguire analisi di questo tipo per problemi convenzionali esistono in gran numero. Tuttavia la loro efficacia diminuisce radicalmente ogni volta si renda necessario effettuare analisi di tipo parametrico, e ancor di più quando i parametri debbano descrivere la geometria iniziale o le caratteristiche del materiale, come nel caso che in questa sede ha interesse considerare<sup>2</sup>.

Per questa ragione, malgrado la validazione numerica delle pre-

<sup>1</sup> In termini di geometria della forma iniziale e caratteristiche meccaniche del materiale.

<sup>2</sup> Si è infatti osservato che la forma della configurazione naturale e le proprietà meccaniche del laminato costituente il guscio ne determinano le proprietà di multistabilità.

visioni ottenute con l'impiego del modello ridotto esuli dagli scopi di questo lavoro, si è ritenuto necessario muovere un primo passo in questa direzione procedendo allo sviluppo e all'implementazione di un codice di calcolo agli elementi finiti con caratteristiche idonee, ossia avente il duplice obiettivo di:

- i. approssimare la soluzione delle equazioni del modello di Föppl-von Kármán (generalizzato);
- ii. seguirne l'evoluzione al variare di un parametro rappresentativo della forma iniziale (o del materiale).

Nel capitolo dedicato alla descrizione del modello di Föppl-von Kármán si è avuto modo di descriverne la genesi e segnalare le controversie sulla legittimità dello stesso. Discussioni, queste, che non ne hanno comunque pregiudicato l'impiego, diffuso e continuo.

Non deve quindi stupire che altrettanto consolidata sia la letteratura dedicata all'analisi delle relative tecniche di approssimazione, con riferimento tanto alle procedure di discretizzazione agli elementi finiti (Brezzi [23], Brezzi et al. [25], Ciarlet et al. [38])<sup>3</sup> quanto alla loro integrazione con più o meno sofisticate tecniche di continuazione numerica (Reinhart [132], Dossou and Pierre [58], Chien and Shih [29]).

Con riferimento al primo dei due obiettivi in precedenza evidenziati, la principale difficoltà è rappresentata dalla necessità di assecondare due richieste fra loro in contrapposizione. Da un lato l'elevato ordine differenziale delle equazioni del modello impone elementi con un notevole numero di gradi di libertà, per garantire la continuità richiesta alla soluzione approssimata; dall'altro la non linearità esige di contenere quanto più possibile le dimensioni del problema discreto approssimante. Per questa ragione hanno trovato impiego anche formulazioni ibride (Quarteroni [128]) o miste (Miyoshi [108], Kesavan [92]).

La soluzione alternativa che qui si propone distingue i problemi membranale e flessionale e utilizza un algoritmo di minimizzazione alternata di tipo convenzionale (Csiszár and Tusnády [41]) per risolvere in maniera iterativa il problema di partenza; la scelta di un algoritmo di questo tipo permette di sfruttare i vantaggi computazionali offerti dalla linearità del problema membranale. Non convenzionale ma efficace si è rivelato l'impiego del metodo degli elementi finiti *discontinui* (Arnold et al. [6], Cockburn et al. [40], Engel et al. [65]) per la soluzione del problema flessionale: la scelta consente di indebolire le richieste sulla continuità della soluzione approssimata (da ripristinare con l'introduzione di una penalizzazione interna) e quindi di contenere il numero dei gradi di libertà del problema discreto.

<sup>3</sup> Non si faranno distinzioni fra il modello di Föppl-von Kármán e le sue generalizzazioni quando le differenze tra le formulazioni saranno irrilevanti ai fini della discussione sulle tecniche di approssimazione numerica.

Alla descrizione dell'algoritmo per la soluzione delle equazioni di Föppl-von Kármán è dedicata la prima parte del capitolo.

Il secondo obiettivo è stato invece raggiunto implementando una tecnica di continuazione numerica convenzionale, seppur sofisticata. Non convenzionale è in questo caso è la natura del parametro evolutivo che si è scelto rappresentativo della forma iniziale<sup>4</sup>, presente in modo esplicito nel funzionale energia di deformazione elastica del modello di Föppl-von Kármán. Alla descrizione dell'algoritmo di continuazione numerica è dedicata la seconda parte del capitolo.

A scopo esemplificativo, si descrive al termine del capitolo un estratto del codice scritto e implementato per la soluzione delle equazioni di Föppl-von Kármán.

<sup>4</sup> Ma senza sostanziali modifiche è possibile scegliere un parametro di natura costitutiva.

## 5.1 DISCRETIZZAZIONE E SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI FÖPPL-VON KÁRMÁN

Consideriamo un guscio sottile ribassato, la cui superficie media nella configurazione iniziale abbia curvatura  $\underline{h}_0(x_\alpha)$  e sia definita sul dominio  $(x_\alpha) \in \omega \subseteq \mathbb{R}^2$  di frontiera  $\gamma$ , che si assume quale configurazione di riferimento.

Trascuriamo, unicamente per semplicità di esposizione, la presenza di pre-deformazioni inelastiche ( $\underline{f}_i = 0$ ,  $\underline{h}_i = 0$ ) e la possibilità di accoppiamenti tra estensione e flessione di natura costitutiva ( $\underline{B} = 0$ ); assumiamo inoltre nulle le azioni esterne.

Abbiamo visto che sotto queste condizioni la configurazione iniziale del guscio è anche naturale, mentre alla configurazione di riferimento compete uno stato di sforzo proporzionale ai campi di deformazione  $\underline{f}_0$  e  $\underline{h}_0$ . In accordo con il modello generalizzato di Föppl-von Kármán le configurazioni di equilibrio stabile del guscio sono allora individuate dal campo di spostamento  $(\underline{v}, w)$  che rende minimo il funzionale energia di deformazione elastica:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_\omega \underline{A}^{-1} \underline{n}(\underline{v}, w) : \underline{n}(\underline{v}, w) + \frac{1}{2} \int_\omega \underline{C}[\underline{k}(w) - \underline{h}_0] : [\underline{k}(w) - \underline{h}_0] \quad (5.1)$$

nel quale:

$$\underline{n}(\underline{v}, w) := \underline{A}[\underline{e}(\underline{v}, w) - \underline{f}_0] \quad (5.2)$$

è una misura superficiale di sforzo membranale e:

$$\begin{aligned} \underline{e}(\underline{v}, w) &:= \text{sym grad } \underline{v} + \frac{1}{2} \text{grad } w \otimes \text{grad } w \\ \underline{k}(w) &:= \text{grad grad } w \end{aligned} \quad (5.3)$$

sono misure superficiali di deformazione membranale e flessionale, rispettivamente. Stanti la (5.1) e le (5.3), i campi soluzione  $(\underline{v}, w)$  devono essere cercati negli insiemi<sup>5</sup>:

<sup>5</sup> Nella (5.4)  $H^1(\omega)$  e  $H^2(\omega)$  indicano gli spazi di Sobolev:

$$\begin{aligned} H^1(\omega) &:= \{\xi \in L^2(\omega); \partial_i \xi \in L^2(\omega), i = 1, 2\} \\ H^2(\omega) &:= \{\zeta \in H^1(\omega); \partial_{ij} \zeta \in L^2(\omega), (i, j) = 1, 2\} \end{aligned}$$

con  $L^2(\omega)$  spazio delle funzioni a quadrato sommabile.

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \{\underline{\zeta} \in \underline{H}^1(\omega) : \underline{\zeta} = \mathbf{0} \text{ su } \gamma_{\underline{\zeta}}\} \\ W &= \{\zeta \in H^2(\omega) : \zeta = 0 \text{ su } \gamma_{\zeta}\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

in modo da garantire che l'energia di deformazione elastica (5.1) rimanga *finita*. In altri termini si richiede di trovare i campi  $(\underline{v}, w) \in (\underline{V}, W)$  tali che:

$$\mathcal{E}(\underline{v}, w) = \inf_{(\underline{\zeta}, \zeta) \in (\underline{V}, W)} \mathcal{E}(\underline{\zeta}, \zeta)$$

ad esempio generando una sequenza  $\{(\underline{v}_n, w_n)\}$  che assicuri:

$$\mathcal{E}(\underline{v}_n, w_n) \rightarrow \mathcal{E}(\underline{v}, w)$$

Se si utilizza il modello di Föppl-von Kármán, distinguere i problemi membranale e flessionale ha senso non solo da un punto di vista meccanico. Abbiamo visto infatti che per ogni assegnato campo di spostamento trasversale il problema membranale può sempre essere scritto come il problema *lineare* di elasticità piana<sup>6</sup> (4.5). Questa circostanza risulta particolarmente vantaggiosa dal punto di vista computazionale se si utilizza un *algoritmo di minimizzazione alternata*, che permette di separare i due problemi nella procedura di soluzione. L'algoritmo è concettualmente semplice: si considera una soluzione di partenza  $w_0 \in W \subset H^2(\omega)$  e si procede in maniera iterativa alla soluzione dei problemi, che richiedono alternativamente di:

<sup>6</sup> In particolare gli sforzi di membrana sono proporzionali alla variazione di curvatura gaussiana subita dalla superficie media nella trasformazione dalla configurazione iniziale (naturale) alla configurazione attuale (descritta dal campo di spostamento trasversale assegnato).

i. valutare  $\underline{v} = \underline{v}_n \in \underline{V} \subset \underline{H}^1(\omega)$  tale che:

$$\mathcal{E}(\underline{v}, w_{n-1}) = \inf_{\underline{\zeta} \in \underline{V}} \mathcal{E}(\underline{\zeta}, w_{n-1})$$

ossia risolvere il *problema membranale*, noto  $w = w_{n-1}$ ;

ii. valutare  $w = w_n \in W \subset H^2(\omega)$  tale che:

$$\mathcal{E}(\underline{v}_n, w) = \inf_{\zeta \in W} \mathcal{E}(\underline{v}_n, \zeta)$$

ossia risolvere il *problema flessionale*, noto  $\underline{v} = \underline{v}_n$ .

In altre parole, anziché risolvere il problema di minimo originale nelle due variabili  $(\underline{v}, w)$ , l'algoritmo prevede la soluzione di una sequenza di problemi di minimo in una sola variabile di cui uno, il primo, lineare. Alcune indicazioni di carattere generale sulle condizioni che garantiscono la convergenza, i.e. tali che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(\underline{v}_n, w_n) = \inf_{(\underline{\zeta}, \zeta) \in (\underline{V}, W)} \mathcal{E}(\underline{\zeta}, \zeta)$$



sono disponibili in letteratura (Csiszár and Tusnády [41], Niesen et al. [111]); la loro discussione esula dagli scopi di questo lavoro di tesi.

Ciascuno dei due problemi è formalmente equivalente ad un problema variazionale, che si ottiene valutando le derivate di Gateaux  $\mathcal{E}'(\underline{v}, w_{n-1})\check{v}$  e  $\mathcal{E}'(\underline{v}_n, w)\check{w}$  dell'energia di deformazione elastica. In definitiva la procedura iterativa impone la soluzione di due problemi, che richiedono alternativamente di<sup>7</sup>:

i. valutare  $\underline{v} = \underline{v}_n \in \underline{V} \subset \underline{H}^1(\omega)$  tale che:

$$a(\underline{v}, \check{v}) = F(\check{v}) \quad \forall \check{v} \in \check{V} \subset \underline{H}_0^1(\omega) \quad (5.5)$$

con:

$$a(\underline{v}, \check{v}) := \int_{\omega} \underline{\underline{A}} \nabla^{\text{sym}} \underline{v} : \nabla^{\text{sym}} \check{v} \quad F(\check{v}) := \int_{\omega} \underline{\underline{b}}(w_{n-1}, \underline{\underline{f}}_0) \cdot \check{v}$$

ii. valutare  $w = w_n \in W \subset H^2(\omega)$  tale che:

$$f(w; \check{w}) = 0 \quad \forall \check{w} \in \check{W} \subset H_0^2(\omega) \quad (5.6)$$

con:

$$f(w; \check{w}) := \int_{\omega} \underline{\underline{C}}(\nabla \nabla w - \underline{\underline{h}}_0) : \nabla \nabla \check{w} + \int_{\omega} [\underline{\underline{h}}(\underline{v}_n, w) : \nabla \nabla w] \check{w}$$

<sup>7</sup> Le derivate sono da intendere nel senso delle distribuzioni. Per questa ragione, a differenza delle (5.3), l'operatore gradiente è indicato con il simbolo  $\nabla$ .

### Discretizzazione con il metodo degli elementi finiti

Ciascuno dei due problemi può essere risolto in maniera approssimata utilizzando il metodo degli elementi finiti.

Tra i metodi di Galërkin, il metodo degli elementi finiti (Zienkiewicz and Taylor [162], Bathe [16], Brenner and Scott [21], Ern and Guermond [67]) si distingue essenzialmente nel modo impiegato per realizzare lo spazio finito-dimensionale in cui cercare la soluzione approssimata. In estrema sintesi, quest'ultimo viene costruito istituendo una partizione del dominio di riferimento e componendo un insieme di spazi funzionali locali finito-dimensionali definiti sugli elementi della partizione. Lo spazio approssimante è quindi costituito da funzioni definite a tratti la cui continuità globale dipende dalla scelta degli spazi funzionali locali e dalle modalità del loro assemblaggio. Per funzioni siffatte definite su un dominio limitato  $\omega$ , l'appartenza a  $H^k(\omega)$  richiede che la funzione sia di classe  $C^{k-1}(\omega)$  (cfr. Braess [20],

Quarteroni [129]).

Nel caso in esame, giacché  $V \subset H^1(\omega)$  e  $W \subset H^2(\omega)$ , è necessario garantire la continuità  $C^0(\omega)$  per la funzione approssimante le componenti di spostamento parallele al dominio di riferimento e la continuità  $C^1(\omega)$  per la funzione approssimante la componente di spostamento ortogonale al piano di riferimento. Questa differenza è tutt'altro che irrilevante: se infatti è relativamente semplice assicurare la prima, non altrettanto può dirsi per la seconda. In quest'ultimo caso la principale difficoltà è costituita dalla necessità di garantire in corrispondenza di ciascun bordo comune a due elementi adiacenti delle partizione, la continuità della derivata nella direzione normale (al bordo stesso)<sup>8</sup>. Ciò richiede uno spazio funzionale locale di dimensione elevata o di grande complessità (cfr. Ciarlet [34]). Il problema è in genere risolto utilizzando metodi di tipo *misto* (cfr. Brezzi and Fortin [24]), ossia con l'impiego di formulazioni che richiedono per i campi incogniti primari la sola continuità  $C^0(\omega)$ . Usualmente l'obiettivo è raggiunto introducendo le rotazioni quali incognite indipendenti (Malkus and Hughes [100], Hughes and Franca [85], Arnold and Falk [5]) al prezzo di un aumento delle dimensioni del problema algebrico da risolvere; complica in questo caso la formulazione l'introduzione degli accorgimenti necessari per evitare problemi di *shear-locking*.

Naturalmente per le strutture sottili, di espedienti computazionali si tratta. Per questa ragione, in tempi relativamente recenti ha riscontrato interesse un approccio differente (Engel et al. [66], Brenner and Sung [22]), che richiede alla soluzione la sola continuità  $C^0(\omega)$  e impone le ulteriori richieste sulla continuità in maniera debole, mutuando concetti e tecniche tanto dal *metodo degli elementi finiti discontinui* (Reed and Hill [130], Bassi and Rebay [15], Brezzi et al. [26], Arnold et al. [7]), quanto dal *metodo degli elementi finiti con penalizzazione interna* (Babuška and Zlamal [13], Douglas and Dupont [59], Baker [14], Arnold [8])<sup>9</sup>. Il metodo risulta consistente, stabile e convergente<sup>10</sup>, ha il pregio di evitare l'introduzione di incognite ausiliarie e risulta particolarmente efficiente dal punto di vista computazionale. Per queste ragioni è stato scelto come strategia di soluzione del problema flessionale: così facendo la componente di spostamento ortogonale al dominio di riferimento può essere approssimata utilizzando lo stesso tipo di elemento (a continuità  $C^0$ ) impiegato nell'approssimazione delle componenti di spostamento parallele al piano stesso.

L'idea è estremamente semplice: si cerca la soluzione approssimata tra le funzioni globalmente continue, ammettendo dunque che le derivate siano discontinue in corrispondenza dei bordi della partizione in cui si è suddiviso il dominio<sup>11</sup>; si penalizza quindi l'entità di tali discontinuità attraverso l'introduzione di un opportuno peso, da

<sup>8</sup> Garantita la continuità globale della funzione approssimante la continuità della derivata in direzione tangente al bordo comune di due elementi adiacenti consegue.

<sup>9</sup> Sono possibili anche approcci diversi, in grado comunque di lasciare *liberi* i gradi di libertà associati alle rotazioni (cfr. Phaal and Calladine [119], Phaal and Calladine [120], Oñate and Zárate [115]).

<sup>10</sup> In particolare di tipo *quasi-ottimale*.

<sup>11</sup> Come si è già avuto modo di notare tali discontinuità sono in realtà limitate alla sola derivata nella direzione normale al bordo comune di due elementi adiacenti.

intendersi alla stregua di una *rigidezza elastica* capace di ripristinare il grado di continuità richiesto, seppur in maniera debole. Naturalmente ciò impone alcune modifiche alla formulazione variazionale classica, che qui si discutono brevemente.

Iniziamo considerando una partizione  $\mathcal{T}_h$  del dominio di riferimento  $\omega$ , composta da  $N$  elementi  $T$  di frontiera  $\partial T$  e dimensione caratteristica  $h$ . Indichiamo con  $\mathcal{E}_h$  l'insieme dei bordi in  $\mathcal{T}_h$ ; tra questi distinguiamo l'insieme dei bordi interni, di seguito indicato con  $\mathcal{E}'_h$ , cosicché si abbia:

$$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}'_h \cup \gamma \quad \mathcal{E}'_h = \bigcup_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^N \partial T_i \cap \partial T_j$$

Per ogni sotto-dominio  $T$  è possibile scrivere<sup>12</sup>:

$$\int_T \underline{\mathbb{C}}(\nabla \nabla w - \underline{\mathbf{h}}_0) : \nabla \nabla \check{w} + \int_T [\underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{v}}_n, w) : \nabla \nabla w] \check{w} + \int_{\partial T} \underline{\mathbb{C}}(\nabla \nabla w - \underline{\mathbf{h}}_0) \cdot \underline{\mathbf{v}} \check{w} - \int_{\partial T} \underline{\mathbb{C}}(\nabla \nabla w - \underline{\mathbf{h}}_0) \underline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \check{w} = 0 \quad (5.7)$$

dove la normale  $\underline{\mathbf{v}}_{(T)}$  è supposta uscente. Finché  $W \subset H^2(\omega)$  e  $\check{W} \subset H_0^2(\omega)$ , sommando su tutti gli elementi della partizione i termini al bordo si elidono e si ottiene nuovamente il problema flessionale nella forma (5.6).

Viceversa se si ammette  $\check{W} \subset H_0^1(\omega)$ , ossia se vengono indebolite le richieste sulla continuità della funzione test e si accetta ad esempio  $\check{w} \in C^0(\omega)$ , sommando su tutti gli elementi della partizione la (5.6) diviene:

$$f_*(w; \check{w}) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \int_T \underline{\mathbb{C}}(\nabla \nabla w - \underline{\mathbf{h}}_0) : \nabla \nabla \check{w} + \int_T [\underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{v}}_n, w) : \nabla \nabla w] \check{w} \right) + \sum_{e \in \mathcal{E}'_h} \int_e \underline{\mathbb{C}}(\nabla \nabla w - \underline{\mathbf{h}}_0) : (\underline{\mathbf{v}} \otimes \underline{\mathbf{v}}) \llbracket \partial_{\underline{\mathbf{v}}} \check{w} \rrbracket = 0 \quad \forall \check{w} \in W \subset H_0^1(\omega) \quad (5.8)$$

Il termine supplementare è legato alle discontinuità nella derivata normale introdotte in corrispondenza di ogni bordo della partizione e misurate dall'operatore salto:

$$\llbracket \bullet \rrbracket := \begin{cases} (\bullet_+)|_e - (\bullet_-)|_e & \text{se } e \in \mathcal{E}'_h \\ -(\bullet)|_e & \text{se } e \in \gamma \end{cases}$$

Su tali singolarità spende lavoro la componente normale della coppia superficiale<sup>13</sup>; il termine supplementare tiene conto di questo contributo, evidentemente esteso a tutti i bordi della partizione.

<sup>12</sup> La (5.7) si ottiene immediatamente integrando due volte per parti l'equazione di bilancio meccanico (3.31f); possiamo considerare  $w$  soluzione *forte* del problema flessionale (risolto per un campo di spostamenti nel piano  $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}}_n$  assegnato).

<sup>13</sup> Poiché infatti:

$$\underline{\mathbf{m}}(w) := \underline{\mathbb{C}}(\nabla \nabla w - \underline{\mathbf{h}}_0)$$

il termine supplementare può scriversi:

$$\sum_{e \in \mathcal{E}'_h} \int_e m_{vv}(w) \llbracket \partial_{\underline{\mathbf{v}}} \check{w} \rrbracket$$

Non solo. Poiché  $W \subset H^2(\omega)$ , il gradiente di  $w \in W$  è continuo in ogni punto del dominio e quindi è ovunque  $[[\partial_{\underline{\nu}} w]] = 0$ . La soluzione del problema flessionale verifica anche la relazione:

$$f_h(w; \tilde{w}) := f_*(w; \tilde{w}) + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e \langle \underline{\zeta} \nabla \nabla \tilde{w} : (\underline{\nu} \otimes \underline{\nu}) \rangle [[\partial_{\underline{\nu}} w]] \\ + \alpha |e|^{-1} \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e [[\partial_{\underline{\nu}} w]] [[\partial_{\underline{\nu}} \tilde{w}]] = 0 \quad \forall \tilde{w} \in W \subset H_0^1(\omega) \quad (5.9)$$

che può assumersi come formulazione variazionale *alternativa* alla (5.6). Nella (5.9) l'operatore:

$$\langle \bullet \rangle := \begin{cases} \frac{(\bullet_-)|_e + (\bullet_+)|_e}{2} & \text{se } e \in \mathcal{E}'_h \\ (\bullet)|_e & \text{se } e \subset \gamma \end{cases}$$

misura la media dei valori assunti dal termine  $\underline{\zeta} \nabla \nabla \tilde{w} : (\underline{\nu} \otimes \underline{\nu})$  sul generico bordo  $e$  della partizione.

Il primo dei due termini è aggiunto al solo scopo di rendere la forma semilineare  $f_h(w; \tilde{w})$  simmetrica; il secondo ne implica la dipendenza dalla dimensione caratteristica della partizione, come denuncia il pedice apposto. La costante positiva  $\alpha$  assume il ruolo di *parametro di penalizzazione*: da un punto di vista computazionale rende stabile il metodo; da un punto di vista meccanico può essere interpretata come una opportuna rigidità elastica fittizia, introdotta per limitare le discontinuità del gradiente della soluzione approssimata. Quest'ultime, assenti finché  $W \subset H^2(\omega)$ , possono essere introdotte indebolendo le richieste sulla continuità della funzione approssimante, ossia scegliendo  $W \subset H^1(\omega)$ . In questo modo, tanto per le componenti di spostamento nel piano quanto per la componente di spostamento trasversale è sufficiente garantire la sola continuità della funzione. Lo spazio finito-dimensionale nel quale cercare le soluzioni approssimate risulta allora particolarmente semplice da realizzare e conveniente dal punto di vista computazionale<sup>14</sup>. In definitiva, indicando con  $\underline{v}_h \in C^0(\omega)$  e  $w_h \in C^0(\omega)$  le soluzioni *approssimate* dei problemi membranale e flessionale e con  $\underline{V}_h$  e  $W_h$  i rispettivi spazi globali, la procedura iterativa stabilita dall'algoritmo di minimizzazione impone la soluzione di due problemi *algebrici*, che richiedono alternativamente di:

<sup>14</sup> Ad esempio, limitando l'attenzione agli elementi finiti di tipo *lagrangiano*, è sufficiente scegliere come spazio funzionale locale quello dei polinomi lineari e come gradi di libertà i valori delle funzioni nei vertici.

i. valutare  $\underline{v}_h = \underline{v}_n \in \underline{V}_h \subset \underline{H}^1(\omega)$  tale che:

$$a(\underline{v}_h, \check{v}) = F(\check{v}) \quad \forall \check{v} \in \check{V} \subset \underline{H}_0^1(\omega) \quad (5.10)$$

ii. valutare  $w_h = w_n \in W_h \subset H^1(\omega)$  tale che:

$$f_h(w_h; \check{w}) = 0 \quad \forall \check{w} \in \check{W} \subset H_0^1(\omega) \quad (5.11)$$

## 5.2 CONTINUAZIONE DEI PERCORSI DI EQUILIBRIO

L'algoritmo di minimizzazione alternata consente di raggiungere il primo dei due obiettivi prefissati: il calcolo, in via approssimata, delle configurazioni di equilibrio (stabili o instabili) associate ad una particolare scelta della geometria e delle proprietà materiali di un guscio di Föppl-von Kármán. Come vedremo la procedura descritta svolge un ruolo anche nella tecnica numerica utilizzata per conseguire il secondo obiettivo, che richiede di valutarne l'evoluzione al variare di un parametro *speciale*, perché rappresentativo della geometria iniziale (o del materiale).

È infatti sufficiente scegliere una relazione del tipo  $h_0 = \mu \bar{h}_0$  con  $\mu \in \mathbb{R}$ , e riconoscere che il coefficiente  $\mu$ , che è possibile scegliere quale parametro evolutivo, compare esplicitamente nella forma semilineare (in  $w$ )  $f_h(w, \check{w})$  del problema flessionale e implicitamente<sup>15</sup> nella forma lineare (in  $v$ ) del problema membranale. Emerge anche in questo caso l'efficacia dell'impiego del modello di Föppl-von Kármán: il funzionale (5.1), pur essendo definito su un dominio piano (con gli ovvi vantaggi computazionali che questo comporta), consente l'esplicitazione di un parametro rappresentativo della *curvatura naturale* del guscio.

Procedendo alla discretizzazione con il metodo degli elementi finiti, le condizioni di equilibrio (5.10) e (5.6) richiedono dunque la soluzione di un problema algebrico non-lineare del tipo:

$$s(q, \mu) = 0 \quad (5.12)$$

nella quale  $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  è la mappa che traduce la risposta elastica del guscio e  $q \in \mathbb{R}^n$  il vettore dei parametri lagrangiani, ossia la collezione dei gradi di libertà necessari per definire univocamente le funzioni approssimanti le componenti di spostamento.

La letteratura dedicata alla soluzione di problemi di questo tipo è ampia e ben consolidata (cfr. ad esempio Rheinboldt [133], Zangwill and Garcia [161], Ortega and Rheinboldt [114], Doedel et al. [56]). Problemi di questo tipo sono in genere affrontati utilizzando tecniche di continuazione numerica (cfr. Allgower and Georg [2]), tra le quali è possibile distinguere i metodi *Predictor-Corrector* (Scarf [137], Eaves and Saigal [62]) e i metodi *Simpliciali* (Peitgen and Prüfer [117], Todd

<sup>15</sup> È sufficiente ricordare che la forzante del problema membranale è la variazione di curvatura gaussiana.

<sup>16</sup> Codici che implementano metodi di tipo *Predictor-Corrector* si possono trovare ad esempio in (Doedel et al. [57], Watson et al. [156], Seydel [142], Rheinboldt [134], Dhooge et al. [54]); codici che implementano metodi di tipo *simpliciale* si possono trovare ad esempio in ((Saupe [136]), Todd et al. [144]).

<sup>17</sup> Da un punto di vista numerico sono ammissibili anche altre parametrizzazioni analitiche, purché non troppo *distanti* dall'ascissa curvilinea cui si riconosce il ruolo di parametrizzazione privilegiata (*pseudo-arclength methods*).

<sup>18</sup> Quali ad esempio il metodo di Newton o il metodo di minimizzazione alternata discusso in precedenza.

[143])<sup>16</sup>. I primi divengono in genere più efficaci all'aumentare delle dimensioni del sistema, ragion per cui sono in genere privilegiati nelle applicazioni di meccanica strutturale. Poiché non fa eccezione il caso in esame l'algoritmo implementato utilizza una strategia di soluzione di questo tipo. Seppur sufficientemente sofisticato lo schema adottato è convenzionale e verrà di seguito descritto nei suoi tratti essenziali. Si rimanda alla letteratura specializzata per ulteriori approfondimenti.

Risolvere il problema (5.12) (nella fattispecie seguire l'evoluzione delle configurazioni di equilibrio al variare del parametro di forma  $\mu$ ) equivale a ricostruire la curva soluzione  $c(\sigma) = (q(\sigma), \mu(\sigma))$  definita in maniera implicita dal sistema e che si assume parametrizzata nell'ascissa curvilinea<sup>17</sup>  $\sigma \in \mathbb{R}$ . Giacché:

$$s(c(\sigma)) = 0 \quad (5.13)$$

se si assume la mappa  $s$  sufficientemente liscia la curva  $c(\sigma)$  è anche, almeno localmente, soluzione del problema ai valori iniziali che si ottiene differenziando rispetto a  $\sigma$ :

$$j_s(c)\dot{c} = 0, \quad \|\dot{c}\| = 1, \quad c(0) = c_0. \quad (5.14)$$

nel quale  $j_s(c) := s'(c)$  è lo jacobiano associato alla mappa  $s$  e  $\dot{c}$  la tangente alla curva soluzione. Questa circostanza, apparentemente di poca importanza, è in verità essenziale. La strategia di soluzione dei metodi di tipo *Predictor-Corrector* prevede infatti dapprima l'integrazione numerica del problema (5.14) e quindi l'utilizzo di una procedura iterativa per rispettare la condizione (5.13) a meno di una tolleranza prefissata. Il vantaggio, e la ragione del successo di simili schemi di soluzione, risiede nella possibilità di sfruttare le potenti proprietà di contrazione mostrate dalle procedure di tipo iterativo<sup>18</sup> nella soluzione di problemi di tipo (5.13); ciò consente un'integrazione numerica delle (5.14) assai grossolana.

Se  $u_i \in c(\sigma)$  è l'ultima soluzione calcolata è infatti in genere sufficiente limitare il primo passo (*predictor*) al semplice calcolo della stima iniziale:

$$u_i^p := u_i + a\dot{c}(u_i) \quad (5.15)$$

dove l'ampiezza  $a \approx \|u_i - u_i^p\|$  deve essere sufficientemente piccola e la tangente alla curva in  $u_i$  è soluzione del problema:

$$j_s(c)\dot{c} = 0 \quad \|\dot{c}\| = 1 \quad \det \begin{pmatrix} j_s(c) \\ \dot{c}^T \end{pmatrix} > 0 \quad (5.16)$$

con l'ultima condizione necessaria per stabilire univocamente il verso secondo il quale la curva soluzione viene percorsa<sup>19</sup>. Il problema (5.16) può essere risolto agevolmente se è possibile procedere ad una decomposizione-QR della matrice trasposta dello jacobiano  $j_s(c)$ .

Il secondo passo (*corrector*) consiste allora nel cercare il punto  $u_{i+1} = u_i^c$  sulla curva soluzione avente distanza minima dalla stima iniziale  $u_i^p$ , ossia nel risolvere il problema:

$$\min_{u_i^c} \{ \|u_i^p - u_i^c\| \mid s(u_i^c) = 0 \}. \quad (5.17)$$

di cui è possibile ottenere soluzione (a meno di una tolleranza prefissata) utilizzando uno schema iterativo, come la procedura di minimizzazione alternata descritta in precedenza. Valido, seppur meno efficiente dal punto di vista computazionale, è l'impiego di metodi di minimizzazione libera, come quelli di Newton. In questo caso la correzione  $u_i^c$  si ottiene ponendo ad ogni iterazione:

$$u_i^c := u_i^p - j_s^+(u_i^p) s(u_i^p) \quad (5.18)$$

dove  $j_s^+$  è l'inversa di Moore-Penrose dello jacobiano  $j_s$  di  $s$ .

### Aggiornamento dell'ampiezza del passo

Per migliorare l'efficienza computazionale l'algoritmo consente di aggiornare l'ampiezza  $a$  della stima iniziale in funzione delle prestazioni della procedura iterativa, valutate ad esempio sulla base della velocità di contrazione  $\kappa(u_i, a)$  e dell'ampiezza  $\delta(u_i, a)$  delle prime due iterazioni:

$$\kappa(u_i, a) := \frac{\|j_s^+(u_i^p(a)) s(u_i^c(a))\|}{\|j_s^+(u_i^p(a)) s(u_i^p(a))\|}, \quad \delta(u_i, a) := \|j_s^+(u_i^p(a)) s(u_i^p(a))\|. \quad (5.19)$$

Utilizzando una espansione asintotica delle (5.19) e scegliendo opportunamente i valori  $\tilde{\kappa}$  e  $\tilde{\delta}$  della velocità di contrazione e dell'ampiezza della fase di correzione che si intende mantenere costanti durante il tracciamento numerico della curva è possibile calcolare, per ogni parametro di riferimento, un valore ottimale dell'ampiezza della successiva fase di predizione:

$$\tilde{a}_\kappa = a \sqrt{\frac{\tilde{\kappa}}{\kappa(u_i, a)}}, \quad \tilde{a}_\delta = a \sqrt{\frac{\tilde{\delta}}{\delta(u_i, a)}}. \quad (5.20)$$

Il valore di  $\tilde{a}$  effettivamente scelto sarà il minimo tra quelli così calcolati.

<sup>19</sup> Per la condizione di ortogonalità:

$$j_s(c)c = 0$$

la matrice:

$$\begin{pmatrix} j_s(c) \\ c^T \end{pmatrix}$$

non è mai singolare. Il segno del determinante associato può essere quindi utilizzato per stabilire il verso di percorrenza della curva soluzione.

### Identificazione dei punti di biforcazione

L'algoritmo permette in grado di individuare lungo la curva  $c(\sigma)$  eventuali punti di biforcazione semplice e proseguire nella costruzione del percorso fondamentale. Poiché in corrispondenza di un punto di biforcazione semplice cambia segno il determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} j_s(c) \\ \dot{c}^T \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

è possibile dimostrare che un punto di biforcazione semplice tra due soluzioni successive  $u_i$  e  $u_{i+1} = w_i^c$  può essere individuato mediante una semplice prova sul segno assunto dalla tangente al percorso nei due punti.

Se inoltre l'ampiezza del passo  $a$  è sufficientemente piccola la stima iniziale  $u_i^p$  appartiene al cono di attrazione della procedura iterativa di correzione, il punto di biforcazione viene oltrepassato e l'algoritmo prosegue nella costruzione del percorso fondamentale.

### Costruzione del percorso diramato

In corrispondenza dei punti di biforcazione semplice l'algoritmo è in grado di tracciare il percorso diramato utilizzando una tecnica basata sul teorema di Sard.

Poiché l'introduzione di una perturbazione  $p \in \mathbb{R}^n$  distrugge la singolarità (ossia  $p$  risulta un punto *regolare* di  $s$ ), quando viene individuato un punto di biforcazione tra due soluzioni successive  $u_i$  e  $u_{i+1} = w_i^c$ , si può introdurre una perturbazione  $p$  e tracciare la curva  $c_p(\sigma) \in s^{-1}(p)$  a partire dalla soluzione  $\tilde{w}_i^c$  del problema:

$$\min_{\tilde{w}_i^c} \{ \|w_i^c - \tilde{w}_i^c\| \mid s(\tilde{w}_i^c) = p \}. \quad (5.22)$$

Purché  $\|p\|$  sia sufficientemente piccola, la curva  $c_p(\sigma)$  approssima adeguatamente la soluzione  $c(\sigma) \in s^{-1}(0)$  e permette di raggiungere il cono di attrazione del percorso diramato, che può essere tracciato rimuovendo la perturbazione introdotta.

## 5.3 COMPLEMENTI

Si propone in ultimo una breve descrizione del codice FEniCS (Dupont et al. [61])<sup>20</sup> scritto ed implementato per la soluzione delle equazioni di Föppl-von Kármán. Poiché l'unico scopo è illustrarne l'organizzazione e le peculiarità si considera il caso, semplice, di una piastra quadrata completamente incastrata al bordo e sottoposta all'azione di una forza per unità di superficie trasversale e uniforme<sup>21</sup>.

<sup>20</sup> Il progetto FEniCS, sviluppato in condivisione tra più gruppi di ricerca (Simula Research Laboratory, University of Cambridge, University of Chicago, Texas Tech University, KTH Royal Institute of Technology) utilizza la struttura matematica del metodo degli elementi finiti per mettere a disposizione dell'utente un ambiente di programmazione orientato alla soluzione numerica di equazioni alle derivate parziali, con l'obiettivo di automatizzare la generazione di codici agli elementi finiti. Si tratta in definitiva di una collezione organica e strutturata di librerie scritte in linguaggio C++ e Python. Il codice che si riporta è scritto in linguaggio Python.

<sup>21</sup> Naturalmente nella sua versione completa il codice consente di tener conto della curvatura iniziale e della presenza di campi di sforzo o deformazione nella configurazione di riferimento o di considerare piastre o gusci anisotropi.



Con la prima riga si importano le classi definite nella libreria DOLFIN:

```
from dolfin import *
```

Quindi si definisce la triangolazione che definisce la mesh  $\mathcal{T}_h$ , la sua dimensione caratteristica  $h$  e la normale  $\underline{\nu}$  ad ogni bordo<sup>22</sup>:

```
mesh = UnitSquare(15, 15, "left")
14 h = CellSize(mesh)
h_avg = (h('+') + h('-'))/2.0
16 n = FacetNormal(mesh)
```

Le righe seguenti definiscono gli spazi funzionali  $V$  e  $W$  e lo spazio prodotto  $U$ , cui appartengono rispettivamente lo spostamento nel piano  $\underline{v} = (v_\alpha)$  con  $\alpha = 1, 2$ , lo spostamento trasversale  $w$ , e lo spostamento  $\underline{u} = (\underline{v}, w)$ <sup>23</sup>:

```
V = VectorFunctionSpace(mesh, "CG", 1)
20 W = FunctionSpace(mesh, "CG", 2)
U = V*W
```

Si definiscono quindi le funzioni *trial*  $(\underline{v}, w)$  e *test*  $(\underline{v}_t = \underline{\check{v}}, w_t = \check{w})$ :

```
(v, w) = TrialFunctions(U)
30 (v_t, w_t) = TestFunctions(U)
```

e la funzione spostamento  $\underline{u}_f = (\underline{v}_f, w_f)$  alla prima iterazione.

```
u = Function(U)
34 v_f, w_f = u.split()
```

Le condizioni di Dirichlet al bordo possono essere imposte definendo un'opportuna funzione, qui chiamata `boundary`, che individua tutti i nodi appartenenti al bordo esterno:

```
24 def boundary(x, on_boundary):
    return on_boundary
26 bc = DirichletBC(U, Constant((0.0, 0.0, 0.0)), boundary)
```

mentre la forza per unità superficie  $\underline{f} = (\underline{f}_v, f_w)$  viene definita mediante le righe di codice:

```
f_v = Function(V)
38 f_v = interpolate(Expression(("0.0", "0.0")), V)
f_w = Function(W)
40 f_w = interpolate(Expression("15.0"), W)
```

Si definiscono quindi le misure generalizzate di deformazione utilizzando le funzioni `eps` e `kap`<sup>24</sup>:

<sup>22</sup> Come visto ciò è necessario se si vuole utilizzare il metodo degli elementi finiti discontinui nella versione descritta in precedenza.

<sup>23</sup> Osserviamo che si utilizza per entrambi i campi di spostamento lo stesso tipo di elemento lagrangiano a continuità  $C^0$ . Cambia, ma non è indispensabile, solo l'ordine del polinomio approssimante.

<sup>24</sup> FEniCS mette a disposizione alcune funzioni (nella fattispecie quella che restituisce il gradiente di un campo, vettoriale o scalare) la cui sintassi rende particolarmente snello e semplice da leggere il codice.

```

44 def eps(v, w):
    return sym(grad(v)) + 0.5*outer(grad(w), grad(w))
46 def kap(w):
    return grad(grad(w))

```

e i tensori sforzo normale e momento. Ad esempio nel caso di piastra trasversalmente isotropa è facile definire le funzioni sig e mom:

```

54 def sig(e):
    return t*((E/(1 + nu))*e + ((E*nu)/(1 - pow(nu,2)))*tr(e)*Identity(2))
56
58 def mom(k):
    return (pow(t, 3)/12.)*((E/(1 + nu))*k + ((E*nu)/(1 - pow(nu, 2)))*tr(k)*Identity(2))

```

con  $E, \nu$  modulo di Young e coefficiente di Poisson del materiale e  $t$  spessore della piastra, ad esempio:

```

50 E, nu = 210000000., 0.3
    t = 0.05

```

A questo punto è possibile definire la densità di energia elastica di deformazione e l'energia potenziale totale:

```

psi = 0.5*inner(sig(eps(v_f, w_f)), eps(v_f, w_f)) + 0.5*inner(mom(kap(w_f)), kap(w_f))
62 Ept = psi*dx - dot(f_v, v_f)*dx - f_w*w_f*dx

```

del quale è possibile scrivere la variazione prima  $\mathcal{U}'(\underline{u})$ , comprensiva del termine associato alle discontinuità della derivata normale del campo  $w$  in corrispondenza dei bordi della partizione, qui indicata con CDGform (cfr. (5.8), (5.9)); ciò può essere fatto con le righe di codice:

```

alpha = Constant(8.0)
68 CDGform = - inner(avg(inner(mom(kap(w_f))), outer(n, n)), jump(grad(w_t), n))*dS \
    - inner(jump(grad(w_f), n), avg(inner(mom(kap(w_t))), outer(n, n)))*dS \
70 + alpha('+' )/h_avg*inner(jump(grad(w_f), n), jump(grad(w_t), n))*dS

```

```

dEpt_dv = derivative(Ept, v_f, v_t)
74 dEpt_dw = derivative(Ept, w_f, w_t) + CDGform
F = dEpt_dv + dEpt_dw

```

In maniera altrettanto semplice è possibile scrivere la variazione seconda, ossia lo jacobiano, con le righe di codice:

```

78 dF_dv = derivative(F, v_f, v)
dF_dw = derivative(F, w_f, w)
80 dF = dF_dv + dF_dw

```

La soluzione del problema variazionale viene quindi ottenuta utilizzando il solutore non lineare di tipo Newton-Raphson disponibile<sup>25</sup>:

```
84 problem = NonlinearVariationalProblem(F, u, bcs=bc, J=dF)
   solver = NonlinearVariationalSolver(problem)
   solver.solve()
```

<sup>25</sup> Si riporta questa scelta per rendere più compatta l'esposizione del codice, giacché il solutore scelto è già disponibile in una delle librerie DOLFIN. Come si è osservato la soluzione può essere più efficiente se si impiega un algoritmo di minimizzazione alternata. Non essendo quest'ultimo disponibile, si è scelto di scriverlo e implementarlo in maniera autonoma (in linguaggio Python). Come detto, non si riporta unicamente per ragioni di sintesi.



I gusci sottili multistabili rappresentano una valida alternativa alle soluzioni tradizionalmente adottate nella progettazione di strutture a controllo di forma. In queste applicazioni infatti, disporre di elementi in equilibrio stabile in più di una configurazione geometrica consente una gestione particolarmente efficiente dell'attuazione, giacché risulta necessario somministrare energia al sistema unicamente per compiere la transizione da una configurazione geometrica all'altra, e non per mantenerne in posizione una o più parti. Questa opportunità si traduce in un notevole risparmio in termini di peso, complessità e richiesta di manutenzione.

La progettazione di gusci sottili multistabili è tuttavia un compito piuttosto difficile perché, almeno in una fase preliminare, è richiesta una conoscenza dello *scenario di stabilità globale*<sup>1</sup> che non è conseguibile né con l'attività sperimentale né con l'impiego delle tradizionali tecniche numeriche di soluzione delle equazioni di campo (e.g. metodo degli elementi finiti, metodo delle differenze finite); la stessa può essere raggiunta solo utilizzando modelli di guscio a pochi gradi di libertà, in genere ottenuti limitando le configurazioni geometriche ammissibili a quelle con *curvatura uniforme*. Questo tipo di modelli si è dimostrato particolarmente efficace; in particolare ha contribuito a chiarire quella competizione tra *forma e materiale* cui si deve la multistabilità di (alcuni) gusci elastici sottili.

Tuttavia l'ipotesi di curvatura uniforme non permette di considerare l'inevitabile presenza di *vincoli* sul bordo che, d'altra parte, condizionano tanto la multistabilità quanto le modalità di attuazione. Evidentemente, ciò contrae le possibilità di un impiego diretto nelle applicazioni dei modelli a curvatura uniforme.

## Conclusioni

Il presente lavoro si è posto l'obiettivo di fornire alcuni strumenti originali, sia semi-analitici che numerici, utili alla progettazione di gusci multistabili vincolati. Quest'ultima è stata intesa come la ricerca della forma geometrica e del materiale cui corrisponde un particolare scelta delle configurazioni di equilibrio stabile da realizzare. D'altronde da un punto di vista progettuale è richiesta la possibilità di associare le forme di progetto che il guscio dovrà assumere in esercizio, vincolate, a quella, eventualmente naturale e comunque priva di vincoli,

<sup>1</sup> Ossia la conoscenza del tipo e del numero delle configurazioni di equilibrio stabile così come della modalità più conveniente di attuazione.

con cui viene prodotto.

Allo scopo si è scelto di concentrare l'attenzione su gusci di forma *pseudo-conica* di pianta rettangolare e materiale *ortotropo*, per i quali la configurazione iniziale (*naturale* per la decisione di non considerare presollecitazioni) è completamente definita da sei parametri di progetto, tre di natura geometrica, tre di natura costitutiva<sup>2</sup>. È stato quindi formulato un modello di guscio ribassato a cinque gradi di libertà, ottenuto con un'opportuna tecnica di proiezione a partire da una generalizzazione del modello di piastra non lineare di Föppl-von Kármán; si è osservato che per ciascuno dei cinque gradi di libertà è possibile fornire un'interpretazione geometrica di semplice lettura. L'imposizione del vincolo, rappresentato dall'incastro di uno dei lati corti, ha ulteriormente ridotto a tre il numero dei gradi di libertà; questi ultimi assumono il ruolo di parametri lagrangiani del modello ridotto vincolato.

Il modello ha consentito di identificare le *frontiere di stabilità* nello spazio dei parametri di progetto, ossia di selezionare tra gli stessi le scelte cui corrispondono gusci multistabili. È stato così possibile osservare una drastica riduzione del dominio di stabilità all'aumentare del rapporto di forma. Questa tendenza si è peraltro rivelata assai sensibile nel passaggio da gusci a pianta quadrata a gusci di pianta rettangolare con rapporto fra i lati due a uno. Si è inoltre mostrato come, per qualsiasi valore del rapporto di forma e per curvature iniziali non troppo grandi, i gusci cilindrici siano ai limiti della frontiera di stabilità; questa circostanza costituisce una giustificazione a posteriori della scelta di considerare gusci di forma iniziale pseudo-conica.

Il modello ha inoltre permesso di ottenere la cercata corrispondenza tra una qualsiasi scelta di configurazioni geometriche compatibili con il vincolo (rappresentative degli obiettivi progettuali) e la configurazione naturale soggiacente, ossia la scelta dei parametri di progetto che ne garantisce la stabilità. Si inoltre mostrato come a questa corrispondenza siano agevolmente sovrapponibili ulteriori informazioni di interesse applicativo; ad esempio una qualsiasi misura della distanza fra le configurazioni stabili considerate.

Informazioni simili sono utili nella *gestione dell'attuazione*. Non sono tuttavia sufficienti, giacché assumono implicitamente la traiettoria dello spazio dei parametri lagrangiani secondo la quale realizzare la transizione. Poiché la gestione e il controllo dell'attuazione è requisito essenziale nella progettazione di gusci multistabili, è evidente la necessità di disporre di strumenti capaci di distinguere tra diverse possibili modalità di realizzare la stessa. Allo scopo è stato implementato un algoritmo di continuazione numerica in grado di selezionare, nello spazio dei parametri lagrangiani, la traiettoria cui

<sup>2</sup> Data la ricorrenza nelle applicazioni questa scelta non costituisce un limite significativo.

corrisponde la *minor potenza* di attuazione. È in questo modo possibile ottenere contestualmente informazioni riguardo: la presenza di eventuali fenomeni di instabilità per scatto; la più conveniente disposizione geometrica dell'attuatore; la massima potenza ad esso richiesta.

Infine, il modello ha consentito una prima valutazione dell'influenza combinata della geometria iniziale e delle proprietà costitutive (nella fattispecie del rapporto fra i moduli di elasticità longitudinale nelle direzioni principali di ortotropia) sulla multistabilità di gusci vincolati. In questo contesto appare possibile calibrare opportunamente forma e materiale per imporre uno scenario di stabilità di progetto (scelto ad esempio per garantire la necessaria robustezza alla stabilità di una o entrambe le configurazioni di equilibrio).

### Prospettive future

Il modello proposto è da intendersi come un primo contributo verso la codifica di un criterio razionale di progettazione di gusci multistabili vincolati.

I risultati presentati sono immediatamente generalizzabili ampliando l'indagine relativa all'influenza combinata di forma e materiale. Peraltro, se quest'ultimi legittimano un cauto ottimismo riguardo una più o meno diretta applicazione del modello all'attività progettuale, è altrettanto vero che per ottenerne conferma è necessario validarne le previsioni attraverso l'indispensabile *verifica sperimentale*. Nello specifico, si intende procedere alla validazione sperimentale sia con l'impiego di prototipi in gomma da realizzarsi mediante stampa tridimensionale, sia con l'impiego di prototipi laminati compositi da realizzarsi in collaborazione con laboratori specializzati.

Ugualmente importante è però l'esigenza di una *validazione numerica*, da acquisire con l'impiego di modelli a molti gradi di libertà. Allo scopo è stato sviluppato e implementato un codice agli elementi finiti di guscio di Föppl-von Kármán, le cui caratteristiche sono discusse in appendice. Caratteristica peculiare del codice è la possibilità di seguire l'evoluzione delle soluzioni delle equazioni di campo al variare di un parametro rappresentativo della forma iniziale del guscio<sup>3</sup>: nell'immediato l'intenzione è di valutare l'attendibilità delle frontiere di stabilità individuate con il modello ridotto nel piano dei parametri di progetto<sup>4</sup>.

Ulteriore approfondimento merita anche la valutazione dell'accuratezza con la quale il modello ridotto è in grado di stimare l'entità delle barriere di energia interposte tra le diverse configurazioni di equilibrio stabile. Oltre all'indispensabile verifica di casi specifici,

<sup>3</sup> Ma in luogo del parametro di forma è possibile anche scegliere, senza grandi problemi, un parametro costitutivo.

<sup>4</sup> È proprio l'oggettiva difficoltà di procedere ad analisi parametriche di questo tipo (che, è bene sottolineare, coinvolgono un parametro di forma iniziale) con i codici commerciali attualmente disponibile che ha indotto lo sviluppo e l'implementazione autonoma del codice.

appare interessante esaminare la possibilità di stabilire una sequenza di modelli di complessità crescente (in termini di numero di gradi di libertà) in cui l'informazione contenuta in un generico modello venga trasferita nella maniera più *fedele* possibile al modello immediatamente inferiore. Questo significa guidare la selezione delle configurazioni ammissibili che avviene riducendo il numero di gradi di libertà di un modello in maniera da rendere in qualche modo minime le modifiche nella rappresentazione dell'energia di deformazione elastica. Questa selezione ottimale delle configurazioni ammissibili si ritiene possibile con l'impiego di un procedimento analogo a quello utilizzato nel metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. L'obiettivo è di ottenere il più rappresentativo tra i possibili *modelli ad un grado di libertà*; Un modello simile potrebbe rivelarsi di estrema utilità nell'analisi dell'effetto indotto dall'imposizione di vincoli esterni sul comportamento dinamico dei gusci elastici sottili, la cui comprensione diviene fondamentale in tutte le applicazioni in cui l'attuazione è indotta per risonanza.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] S. Aimmanee and M. W. Hyer. Analysis of the manufactured shape of rectangular thunder-type actuators. *Smart Materials and Structures*, 13(6):1389, 2004.
- [2] E. L. Allgower and K. Georg. *Introduction to Numerical Continuation Methods*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [3] S. S. Antman. *Nonlinear problems of elasticity*. Applied mathematical sciences. Springer, 2005.
- [4] S. S. Antman and R. S. Marlow. Material constraints, lagrange multipliers, and compatibility. applications to rod and shell theories. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 116(3): 257–299, 1991.
- [5] D. Arnold and R. Falk. A uniformly accurate finite element method for the reissner–mindlin plate. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 26(6):1276–1290, 1989.
- [6] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini. Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5):1749–1779, 2001.
- [7] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5):1749–1779, 2002.
- [8] D.N. Arnold. *An Interior Penalty Finite Element Method with Discontinuous Elements*. University of Chicago, Department of Mathematics, 1979.
- [9] A. F. Arrieta, D. J. Wagg, and S. A. Neild. Dynamic snap-through for morphing of bi-stable composite plates. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 22(2):103–112, 2011.
- [10] A. F. Arrieta, O. Bilgen, M. I. Friswell, and P. Ermanni. Modelling and configuration control of wing-shaped bi-stable piezoelectric composites under aerodynamic loads. *Aerospace Science and Technology*, 29(1):453–461, 2013.
- [11] A. F. Arrieta, O. Bilgen, M. I. Friswell, and P. Hagedorn. Dynamic control for morphing of bi-stable composites. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 24(3):266–273, 2013.

- [12] B. Audoly and Y. Pomeau. *Elasticity and Geometry: From Hair Curls to the Non-linear Response of Shells*. OUP Oxford, 2010.
- [13] I. Babuška and M. Zlamal. Nonconforming elements in the finite element method with penalty. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 10(5):863–875, 1973.
- [14] G. Baker. Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements. *Math. Comp.*, 31:44–59, 1977.
- [15] F. Bassi and S. Rebay. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 131:267–279, March 1997.
- [16] K. J. Bathe. *Finite element procedures*. Prentice Hall, 1996. ISBN 9780133014587.
- [17] J. M. Berthelot. *Composite Materials: Mechanical Behavior and Structural Analysis*. Mechanical engineering series. Springer, 1999.
- [18] O. Bilgen, A. F. Arrieta, M. I. Friswell, and P. Hagedorn. Dynamic control of a bistable wing under aerodynamic loading. *Smart Materials and Structures*, 22(2):025020, 2013.
- [19] F. Bourquin, P. G. Ciarlet, G. Geymonat, and A. Raoult.  $\gamma$ -convergence et analyse asymptotique des plaques minces. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 315(9):1017–1024, 1992.
- [20] D. Braess. *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*. Cambridge University Press, 2007.
- [21] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*. Texts in applied mathematics. Springer-Verlag, 1994.
- [22] S. C. Brenner and L. Y. Sung. Interior penalty methods for fourth order elliptic boundary value problems on polygonal domains. *Journal of Scientific Computing*, 22-23:83–118, 2005.
- [23] F. Brezzi. Finite element approximations of the von kármán equations. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 12(4): 303–312, 1978.
- [24] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer London, Limited, 2011.

- [25] F. Brezzi, J. Rappaz, and P. A. Raviart. Finite dimensional approximation of nonlinear problems. *Numerische Mathematik*, 36(1):1–25, March 1980.
- [26] F. Brezzi, G. Manzini, D. Marini, P. Pietra, and A. Russo. Discontinuous galerkin approximations for elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 16(4):365–378, 2000.
- [27] C. R. Calladine. *Theory of Shell Structures*. Cambridge University Press, 1989.
- [28] G. Chen, D. L. Wilcox, and L. L. Howell. Fully compliant double tensural tristable micromechanisms (dttm). *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 19(2), 2009.
- [29] C. S. Chien and Y. T. Shih. A cubic hermite finite element-continuation method for numerical solutions of the von kármán equations. *Applied Mathematics and Computation*, 209(2):356 – 368, 2009.
- [30] P. G. Ciarlet. A justification of the von kármán equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 73:349–389, 1980.
- [31] P. G. Ciarlet. Recent progress in the two-dimensional approximation of three-dimensional plate models in nonlinear elasticity. *North-Holland Mathematics Studies*, 133:3–19, 1987.
- [32] P. G. Ciarlet. *Three-dimensional elasticity*, volume 1. Elsevier, 1988.
- [33] P. G. Ciarlet. Mathematical elasticity, vol. ii: Theory of plates. *Studies in Mathematics and its Applications*, 27, 1997.
- [34] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. Classics in applied mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [35] P. G. Ciarlet. An introduction to differential geometry with applications to elasticity. *Journal of Elasticity*, 78-79(1-3):1–207, 2005. cited By (since 1996) 6.
- [36] P. G. Ciarlet and P. Destuynder. A justification of a nonlinear model in plate theory. *Computer methods in Applied Mechanics and engineering*, 17:227–258, 1979.
- [37] P. G. Ciarlet and J. C. Paumier. A justification of the marguerre-von kármán equations. *Computational Mechanics*, 1:177–202, 1986.

- [38] P. G. Ciarlet, L. Gratie, and S. Kesavan. Numerical analysis of the generalized von kármán equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 341(11):695 – 699, 2005.
- [39] B. H. Coburn, A. Pirrera, P. M. Weaver, and S. Vidoli. Tristability of an orthotropic doubly curved shell. *Composite Structures*, 96:446–454, 2013.
- [40] B. Cockburn, G. E. Karniadakis, and C. W. Shu. *Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2011.
- [41] I. Csiszár and G. Tusnády. Information Geometry and Alternating minimization procedures. *Statistics and Decisions*, Supplement Issue 1, 1984.
- [42] F. D’Annibale, D. Di Tullio, and M. Mastrella. *Comportamento meccanico multistabile: applicazioni e sistemi per architetture adatte*. Tesi di Laurea Magistrale in Architettura, Relatore: prof. F. Romeo, Sapienza Università di Roma, 2012.
- [43] M. L. Dano and M. W. Hyer. Thermally-induced deformation behavior of unsymmetric laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 35(17):2101 – 2120, 1998.
- [44] M. L. Dano and M. W. Hyer. Sma-induced snap-through of unsymmetric fiber-reinforced composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 40(22):5949–5972, 2003.
- [45] A. J. Daton-Lovett. Extendible member, 2001. US Patent 6,217,975.
- [46] S. Daynes, K. D. Potter, and P. M. Weaver. Bistable prestressed buckled laminates. *Composites Science and Technology*, 68(15–16): 3431 – 3437, 2008.
- [47] S. Daynes, K. D. Potter, and P. M. Weaver. Bistable prestressed buckled laminates. *Composites Science and Technology*, 68(15): 3431–3437, 2008.
- [48] S. Daynes, P. M. Weaver, and K. D. Potter. Aeroelastic study of bistable composite airfoils. *Journal of Aircraft*, 46(6):2169–2174, 2009.
- [49] S. Daynes, C. G. Diaconu, K. D. Potter, and P. M. Weaver. Bistable prestressed symmetric laminates. *Journal of composite materials*, 44(9):1119–1137, 2010.

- [50] S. Daynes, S. J. Nall, P. M. Weaver, K. D. Potter, P. Margaris, and P. H. Mellor. Bistable composite flap for an airfoil. *Journal of Aircraft*, 47(1):334–338, 2010.
- [51] S. Daynes, K. D. Potter, and P. M. Weaver. A morphing composite air inlet with multiple stable shapes. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 22(9):961 – 973, 2011.
- [52] A. E. Del Grosso and P. Basso. Adaptive building skin structures. *Smart Materials and Structures*, 19(12):124011, 2010.
- [53] J. Dervaux, P. Ciarletta, and M. Ben Amar. Morphogenesis of thin hyperelastic plates: A constitutive theory of biological growth in the föppl–von kármán limit. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(3):458 – 471, 2009.
- [54] A. Dhooge, W. Govaerts, and Y. A. Kuznetsov. Matcont: A matlab package for numerical bifurcation analysis of odes. *ACM Trans. Math. Softw.*, 29(2):141–164, 2003.
- [55] M. P. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*, volume 2. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1976.
- [56] E. Doedel, H. B. Keller, and J. P. Kernevez. Numerical analysis and control of bifurcation problems (ii): bifurcation in infinite dimensions. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 01(03): 493–520, 1991.
- [57] E. J. Doedel, A. R. Champneys, T. F. Fairgrieve, Y. A. Kuznetsov, B. Sandstede, and X. Wang. Auto97, continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with homcont). 1997.
- [58] K. Dossou and R. Pierre. A newton-gmres approach for the analysis of the postbuckling behavior of the solutions of the von kármán equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(6):1994–2012, 2003.
- [59] J. Douglas and T. Dupont. Interior penalty procedures for elliptic and parabolic galerkin methods. In R. Glowinski and J.L. Lions, editors, *Computing Methods in Applied Sciences*, volume 58 of *Lecture Notes in Physics*, pages 207–216. Springer Berlin Heidelberg, 1976.
- [60] E. H. Dowell and O. Bendiksen. *Panel Flutter*. John Wiley & Sons, Ltd, 2010.
- [61] T. Dupont, J. Hoffman, C. Johnson, R. C. Kirby, M. G. Larson, A. Logg, and L. R. Scott. *The FEniCS project*. Chalmers Finite Element Centre, Chalmers University of Technology, 2003.

- [62] B. C. Eaves and R. Saigal. Homotopies for computation of fixed points on unbounded regions. *Mathematical Programming*, 3(1): 225–237, 1972.
- [63] E. Eckstein, A. Pirrera, and P. M. Weaver. Multi-mode morphing using initially curved composite plates. *Composite Structures*, 109:240–245, 2014.
- [64] E. Efrati, E. Sharon, and R. Kupferman. Elastic theory of unconstrained non-euclidean plates. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(4):762–775, 2009.
- [65] G. Engel, K. Garikipati, T. J. R. Hughes, M. G. Larson, L. Mazzei, and R. L. Taylor. Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(34):3669 – 3750, 2002.
- [66] G. Engel, K. Garikipati, T. J. R. Hughes, M. G. Larson, L. Mazzei, and R. L. Taylor. Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(34):3669 – 3750, 2002.
- [67] A. Ern and J. L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*. Number v. 159 in Applied Mathematical Sciences. Springer, 2004.
- [68] A. Fernandes, C. Maurini, and S. Vidoli. Multiparameter actuation for shape control of bistable composite plates. *International Journal of Solids and Structures*, 47(10):1449–1458, 2010.
- [69] J. M. Fernandez, V. J. Lappas, and A. J. Daton-Lovett. Completely stripped solar sail concept using bi-stable reeled composite booms. *Acta Astronautica*, 69(1):78–85, 2011.
- [70] A. Föppl. *Vorlesungen über technische Mechanik*. B. G. Teubner, 1907.
- [71] Y. Forterre, J. M. Skotheim, J. Dumais, and L. Mahadevan. How the venus flytrap snaps. *Nature*, 433(7024):421–425, 2005.
- [72] D. D. Fox, A. Raoult, and J. C. Simo. A justification of nonlinear properly invariant plate theories. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 124(2):157–199, 1993.

- [73] L. B. Freund. Substrate curvature due to thin film mismatch strain in the nonlinear deformation range. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(6–7):1159 – 1174, 2000.
- [74] G. Friesecke, R. D. James, and S. Müller. The föppl–von kármán plate theory as a low energy  $\gamma$ -limit of nonlinear elasticity. *Comptes Rendus Mathematique*, 335(2):201–206, 2002.
- [75] G. Friesecke, R. D. James, and S. Müller. A theorem on geometric rigidity and the derivation of nonlinear plate theory from three-dimensional elasticity. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 55(11):1461–1506, 2002.
- [76] G. Friesecke, R. D. James, and S. Müller. A hierarchy of plate models derived from nonlinear elasticity by gamma-convergence. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 180: 183–236, 2006.
- [77] D. A. Galletly and S. D. Guest. Bistable composite slit tubes. ii. a shell model. *International Journal of Solids and Structures*, 41(16):4503–4516, 2004.
- [78] D. A. Galletly and S. D. Guest. Bistable composite slit tubes. i. a beam model. *International journal of solids and structures*, 41(16):4517–4533, 2004.
- [79] A. Gatto, F. Mattioni, and M. I. Friswell. Experimental investigation of bistable winglets to enhance aircraft wing lift takeoff capability. *Journal of Aircraft*, 46(2):647–655, 2009.
- [80] M. Gigliotti, M. R. Wisnom, and K. D. Potter. Loss of bifurcation and multiple shapes of thin [0/90] unsymmetric composite plates subject to thermal stress. *Composites Science and Technology*, 64(1):109–128, 2004.
- [81] L. Giomi and L. Mahadevan. Multi-stability of free spontaneously curved anisotropic strips. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 468(2138):511–530, 2012.
- [82] S. D. Guest and S. Pellegrino. Analytical models for bistable cylindrical shells. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 462(2067):839–854, 2006.
- [83] M. E. Gurtin. *An introduction to continuum mechanics*. Academic press, 1982.
- [84] L. L. Howell. *Compliant mechanisms*. John Wiley & Sons, 2001.

- [85] T. J. R. Hughes and L. P. Franca. A mixed finite element formulation for reissner-mindlin plate theory: Uniform convergence of all higher-order spaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(2):223–240, 1988.
- [86] M. W. Hyer. Some observations on the cured shape of thin unsymmetric laminates. *Journal of Composite Materials*, 15(2):175–194, 1981.
- [87] K. Iqbal and S. Pellegrino. Bi-stable composite shells. In *Proc. 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, volume 3, 2000.
- [88] K. Iqbal, S. Pellegrino, and A. Daton-Lovett. Bi-stable composite slit tubes. In *IUTAM-IASS Symposium on deployable structures: Theory and Applications*, pages 153–162. Springer, 2000.
- [89] N. Kandil and G. Verchery. New methods of design for stacking sequences of laminates. *Proceedings of Computer Aided Design in Composite Materials*, 88, 1988.
- [90] N. Kandil and G. Verchery. Design of stacking sequences of laminated plates for thermoelastic effects. *Proceedings of the 2nd Int. Conf. On Computer Aided Design in Composite Materials Technology*, pages 565–76, 1990.
- [91] E. Kebabze, S. D. Guest, and S. Pellegrino. Bistable prestressed shell structures. *International Journal of Solids and Structures*, 41(11):2801–2820, 2004.
- [92] S. Kesavan. La méthode de kikuchi appliquée aux équations de von karman. *Numerische Mathematik*, 32(2):209–232, 1979.
- [93] L. D. Landau, L. P. Pitaevskii, E. M. Lifshitz, and A. M. Kosevich. *Theory of Elasticity*. Butterworth-Heinemann, 3 edition, 1986.
- [94] H. Le Dret and A. Raoult. The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 74(6):549–578, 1995.
- [95] M. Lembo and P. Podio-Guidugli. Plate theory as an exact consequence of three-dimensional linear elasticity. *European journal of mechanics. A. Solids*, 10(5):485–516, 1991.
- [96] M. Lewicka, L. Mahadevan, and M. R. Pakzad. The föppl-von kármán equations for plates with incompatible strains. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 467(2126):402–426, 2011.



- [97] M. Lewicka, L. Mahadevan, and R. Pakzad. Models for elastic shells with incompatible strains. 2012.
- [98] M. Lewicka, L. Mahadevan, and M. R. Pakzad. The monge-ampere constrained elastic theories of shallow shells. 2013.
- [99] H. Liang and L. Mahadevan. The shape of a long leaf. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(52):22049–22054, 2009.
- [100] D. S. Malkus and T. J. R. Hughes. Mixed finite element methods — reduced and selective integration techniques: A unification of concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 15(1):63 – 81, 1978.
- [101] E. H. Mansfield. Bending, buckling and curling of a heated thin plate. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 268(1334):316–327, 1962.
- [102] E. H. Mansfield. *The Bending and Stretching of Plates*. The Bending and Stretching of Plates. Cambridge University Press, 2005.
- [103] K. Marguerre. *Zur Theorie der gekrümmtten Platte großer Form in derung*. In: Proc. of the Fifth Intern. Congr. for Appl. Mech. 1938.
- [104] F. Mattioni, P. M. Weaver, K. D. Potter, and M. I. Friswell. Analysis of thermally induced multistable composites. *International Journal of Solids and Structures*, 45(2):657–675, 2008.
- [105] F. Mattioni, P. M. Weaver, and M. I. Friswell. Multistable composite plates with piecewise variation of lay-up in the planform. *International Journal of Solids and Structures*, 46(1):151–164, 2009.
- [106] C. Maurini, S. Vidoli, and A. Vincenti. Modelling and design of anisotropic multistable shells. In *Proceedings ECCM*, 2010.
- [107] B. Miara and P. Podio-Guidugli. Deduction by scaling: a unified approach to classic plate and rod theories. *Asymptotic Analysis*, 51(2):113–131, 2007.
- [108] T. Miyoshi. A mixed finite element method for the solution of the von kármán equations. *Numerische Mathematik*, 26(3): 255–269, 1976.
- [109] P. M. Naghdi. The theory of plates and shells. *Handbuch der Physik, vol. VIa/2*, pages 425–640, 1972.

- [110] P. M. Naghdi. Finite deformation of elastic rods and shells. In *Proceedings of the IUTAM Symposium on Finite Elasticity*, pages 47–103. Springer, 1982.
- [111] U. Niesen, D. Shah, and G. Wornell. Adaptive alternating minimization algorithms. In *Information Theory, 2007. ISIT 2007. IEEE International Symposium on*, pages 1641–1645, 2007.
- [112] A. D. Norman, S. D. Guest, and K. A. Seffen. Novel multistable corrugated structures. In *Proceedings of the 48th AIAA/ASME/A-SCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, April 23C26, Waikiki, Hawaii, 2007*.
- [113] A. D. Norman, K. A. Seffen, and S. D. Guest. Multistable corrugated shells. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 464(2095):1653–1672, 2008.
- [114] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [115] E. Oñate and F. Zárate. Rotation-free triangular plate and shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3):557–603, 2000. ISSN 1097-0207.
- [116] L. J. B. Peeters, P. C. Powell, and L. Warnet. Thermally-induced shapes of unsymmetric laminates. *Journal of composite materials*, 30(5):603–626, 1996.
- [117] H. O. Peitgen and M. Prüfer. *The Leray-Schauder continuation method is a constructive element in the numerical study of nonlinear eigenvalue and bifurcation problems*. Springer, 1979.
- [118] S. Pellegrino. *Deployable structures*. Number 412. Springer, 2001.
- [119] R. Phaal and C. R. Calladine. A simple class of finite elements for plate and shell problems. i: Elements for beams and thin flat plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(5):955–977, 1992.
- [120] R. Phaal and C. R. Calladine. A simple class of finite elements for plate and shell problems. ii: An element for thin shells, with only translational degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35(5):979–996, 1992.
- [121] A. Pirrera, D. Avitabile, and P. M. Weaver. On the thermally induced bistability of composite cylindrical shells for morphing structures. *International Journal of Solids and Structures*, 49(5): 685–700, 2012.

- [122] P. Podio-Guidugli. An exact derivation of the thin plate equation. *Journal of Elasticity*, 22(2-3):121–133, 1989.
- [123] P. Podio-Guidugli. *A primer in elasticity*. Springer, 2000.
- [124] P. Podio-Guidugli. A new quasilinear model for plate buckling. *Journal of Elasticity*, 71:157–182, 2003. 10.1023/B:ELAS.0000005554.76200.9e.
- [125] P. Podio-Guidugli. Concepts in the mechanics of thin structures. In *Classical and Advanced Theories of Thin Structures*, pages 77–109. Springer, 2008.
- [126] P. Portela, P. Camanho, P. Weaver, and I. Bond. Analysis of morphing, multi stable structures actuated by piezoelectric patches. *Computers & structures*, 86(3):347–356, 2008.
- [127] K. D. Potter and P. M. Weaver. A concept for the generation of out-of-plane distortion from tailored frp laminates. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 35(12):1353–1361, 2004.
- [128] A. Quarteroni. Hybrid finite element methods for the von karman equations. *CALCOLO*, 16(3):271–288, 1979.
- [129] A. Quarteroni. *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*. UNITEXT. Springer, 2009.
- [130] W. H. Reed and T. R. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. 1973.
- [131] Giuseppe Rega and Eduardo Saetta. Nonlinear curvature-based model and resonant finite-amplitude vibrations of symmetric cross-ply laminates. *Journal of Sound and Vibration*, 331(12):2836–2855, 2012.
- [132] L. Reinhart. On the numerical analysis of the von karman equations: Mixed finite element approximation and continuation techniques. *Numerische Mathematik*, 39(3):371–404, 1982.
- [133] W. C. Rheinboldt. *Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations*. University of Arkansas lecture notes in the mathematical sciences. J. Wiley, 1968.
- [134] W. C. Rheinboldt. Manpak: a set of algorithms for computations on implicitly defined manifolds. *Computers & Mathematics with Applications*, 32(12):15–28, 1996.

- [135] P. Rudolph. High-lift systems on commercial subsonic airliners. 1996.
- [136] D. Saupe. On accelerating pl continuation algorithms by predictor—corrector methods. *Mathematical Programming*, 23(1): 87–110, 1982.
- [137] H. Scarf. The approximation of fixed points of a continuous mapping. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 15(5):1328–1343, 1967.
- [138] M. R. Schultz and M. W. Hyer. Snap-through of unsymmetric cross-ply laminates using piezoceramic actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 14(12):795–814, 2003.
- [139] K. A. Seffen. ‘morphing’bistable orthotropic elliptical shallow shells. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 463(2077):67–83, 2007.
- [140] K. A. Seffen and C. Maurini. Growth and shape control of disks by bending and extension. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 61(1):190–204, 2013.
- [141] A. Senba, T. Ikeda, and T. Ueda. A two-way morphing actuation of bi-stable composites with piezoelectric fibers. *Proceedings 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conferences*, 2010.
- [142] R. Seydel. *BIFPACK: A Program Package for Continuation Bifurcation and Stability Analysis; Version 2.3*. Math. Inst., 1988.
- [143] M. J. Todd. An introduction to piecewise-linear homotopy algorithms for solving systems of equations. In *Topics in numerical analysis*, pages 149–202. Springer, 1982.
- [144] M. J. Todd, Cornell University. School of Operations Research, and Industrial Engineering. *PLALGO: A FORTRAN Implementation of a Piecewise-linear Homotopy Algorithm for Solving Systems of Nonlinear Equations*. School of Operations Research and Industrial Engineering, College of Engineering, Cornell University, 1985.
- [145] C. Truesdell. *Comments on rational continuum mechanics*. In: *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations*. 1978.
- [146] C. Truesdell. *A first course in rational continuum mechanics*, volume 1. Academic Press, 1992.

- [147] P. Vannucci and G. Verchery. A special class of uncoupled and quasi-homogeneous laminates. *Composites Science and Technology*, 61(10):1465 – 1473, 2001.
- [148] E. Ventsel and T. Krauthammer. *Thin Plates and Shells: Theory: Analysis, and Applications*. Taylor & Francis, 2001.
- [149] J. Verschelde. Algorithm 795: Phcpack: A general-purpose solver for polynomial systems by homotopy continuation. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 25(2):251–276, 1999.
- [150] J. Verschelde. Polynomial homotopy continuation with phcpack. *ACM Communications in Computer Algebra*, 44(3/4): 217–220, 2011.
- [151] S. Vidoli. Discrete approximations of the föppl–von kármán shell model: From coarse to more refined models. *International Journal of Solids and Structures*, 50(9):1241 – 1252, 2013.
- [152] S. Vidoli and C. Maurini. Tristability of thin orthotropic shells with uniform initial curvature. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 464(2099): 2949–2966, 2008.
- [153] P. Villaggio. *Mathematical Models for Elastic Structures*. Cambridge University Press, 2005.
- [154] V. Z. Vlasov. *General theory of shells and its applications in engineering*, volume 99. National Aeronautics and Space Administration, 1964.
- [155] T. Von Kármán. *Festigkeitsprobleme im maschinenbau*. Encyklopädie der mathematischen wissenschaften. 1910.
- [156] L. T. Watson, S. C. Billups, and A. P. Morgan. Algorithm 652: Hompack: A suite of codes for globally convergent homotopy algorithms. *ACM Trans. Math. Softw.*, 13(3):281–310, 1987.
- [157] T. A. Witten. Stress focusing in elastic sheets. *Reviews of Modern Physics*, 79(2):643, 2007.
- [158] B. K. S. Woods and M. I. Friswell. Preliminary investigation of a fishbone active camber concept. In *ASME 2012 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems*, pages 555–563. American Society of Mechanical Engineers, 2012.
- [159] B. K. S. Woods, O. Bilgen, and M. Friswell. I., “wind tunnel testing of the fishbone active camber morphing concept,”.

In *Proceedings of the 23rd International Conference on Adaptive Structures and Technologies*, 2012.

- [160] B. K. S. Woods, M. I. Friswell, and N. M. Wereley. Advanced kinematic tailoring for morphing aircraft actuation. *AIAA Journal*, pages 1–11, 2014.
- [161] W. I. Zangwill and C. B. Garcia. *Pathways to solutions, fixed points, and equilibria*. Prentice-Hall series in computational mathematics. Prentice-Hall, 1981.
- [162] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The Finite Element Method: The Basis*. John Wiley & Sons Australia, Limited, 2000.