

DISSERTAZIONE PRESENTATA PER IL CONSEGUIMENTO DEL TITOLO DI
DOTTORE DI RICERCA IN INGEGNERIA DELLE STRUTTURE

**METODI DI ANALISI DINAMICA E DI PROGETTO
PER SISTEMI INTERAGENTI
TERRENO-FONDAZIONE-STRUTTURA**

ARMANDO LANZI

ROMA, MARZO 2013

CICLO XXV

SUPERVISORI

PROF. FRANCO BRAGA
PROF. J. ENRIQUE LUCO
DR. ROSARIO GIGLIOTTI

IL COORDINATORE DEL DOTTORATO

PROF. GIUSEPPE REGA

INDICE DEI CONTENUTI

| | |
|---|-------------|
| INDICE DELLE FIGURE | vii |
| INDICE DELLE TABELLE | xi |
| ABSTRACT DELLA DISSERTAZIONE | xiii |
| SOMMARIO ESTESO | xv |
| 1 INTRODUZIONE | |
| 1.1. Interazione dinamica terreno-struttura: generalità | 1 |
| 1.2. Stato dell'arte e della pratica | 4 |
| 1.2.1. La ricerca scientifica (Stato dell'arte)..... | 4 |
| 1.2.2. Riflessi in ambito normativo e professionale (Stato della pratica) | 8 |
| 1.3. Effetti dell'interazione sulla risposta strutturale | 16 |
| 1.3.1. Effetti cinematici..... | 16 |
| 1.3.2. Effetti inerziali | 18 |
| 1.4. Obiettivi e contributi del lavoro | 22 |
| 1.5. Letteratura di riferimento | 23 |
| 1.6. Organizzazione della tesi | 26 |
| 2 FORMULAZIONE E SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI INTERAZIONE LINEARE TERRENO-STRUTTURA | |
| 2.1. Generalità | 29 |
| 2.2. L'approccio per sottostrutture | 30 |
| 2.3. Moto di input in campo libero..... | 34 |
| 2.4. Moto di input in fondazione | 38 |
| 2.5. Impedenze della fondazione | 41 |
| 2.6. Struttura in elevazione..... | 45 |
| 2.7. Formulazione del problema di interazione | 48 |
| 2.7.1. Il caso delle vibrazioni in un piano | 50 |

| | |
|--|-----|
| 2.8. Metodi di soluzione | 52 |
| 2.8.1. Metodo di soluzione esatto nel dominio della frequenza | 53 |
| 2.8.2. Analisi modale classica..... | 55 |
| 3 VALIDAZIONE DEL METODO E CONFRONTO CON RISULTATI DI LETTERATURA | |
| 3.1. Generalità | 59 |
| 3.2. Descrizione dei casi studio | 60 |
| 3.3. Validazione della soluzione esatta | 63 |
| 3.4. Validazione della soluzione approssimata | 69 |
| 3.5. Discussione sull'accuratezza dell'analisi modale | 72 |
| 3.6. Conclusioni..... | 76 |
| 4 ANALISI MODALE PER PROBLEMI DI INTERAZIONE TERRENO-STRUTTURA | |
| 4.1. Generalità | 78 |
| 4.2. Descrizione della struttura campione | 79 |
| 4.3. Analisi della risposta del caso studio | 82 |
| 4.3.1. Analisi modale | 84 |
| 4.3.2. Funzioni di trasferimento | 85 |
| 4.4. Discussione sull'accuratezza dell'analisi modale | 92 |
| 4.5. Studio parametrico dell'analisi modale | 98 |
| 4.5.1. Descrizione dei casi limite | 98 |
| 4.5.2. Analisi delle frequenze proprie e delle forme modali | 101 |
| 4.5.3. Analisi dei fattori di partecipazione e dei coefficienti di smorzamento | 108 |
| 4.6. Conclusioni..... | 112 |
| 5 MODELLO 1-DOF EQUIVALENTE PER ANALISI MULTI-MODALE APPROSSIMATA | |
| 5.1. Generalità | 116 |
| 5.2. Obiettivi del lavoro | 117 |
| 5.3. Formulazione analitica | 119 |
| 5.4. Interpretazione fisica del modello 1-DOF equivalente | 122 |

| | |
|---|-----|
| 5.5. Risultati numerici | 123 |
| 5.5.1. Andamento dei termini aggiuntivi di massa, rigidezza e smorzamento | 124 |
| 5.5.2. Validazione del modello mediante confronto della risposta stazionaria..... | 127 |
| 5.5.3. Validazione del modello mediante confronto delle frequenze proprie | 128 |
| 6 ANALISI APPROSSIMATA MEDIANTE APPROCCIO PERTURBATIVO | |
| 6.1. Generalità | 132 |
| 6.2. Approccio perturbativo per strutture deformabili su terreni rigidi..... | 133 |
| 6.3. Perturbazione intorno ai modi della struttura | 136 |
| 6.3.1. Espressioni approssimate delle grandezze modali – Modi Strutturali..... | 137 |
| 6.3.2. Confronto con i risultati di letteratura | 139 |
| 6.4. Perturbazione intorno ai modi della fondazione | 141 |
| 6.4.1. Espressioni approssimate delle grandezze modali – Modi della Fondazione | 144 |
| 6.4.2. Interpretazione fisica dei modi della fondazione | 145 |
| 6.4.3. Il caso delle vibrazioni in un piano | 145 |
| 6.5. Risultati numerici | 149 |
| 6.5.1. Confronto delle proprietà modali del sistema..... | 150 |
| 6.5.2. Confronto della risposta stazionaria | 155 |
| 6.6. Conclusioni..... | 159 |
| 7 MODALITÀ APPLICATIVE ED ESEMPI | |
| 7.1. Generalità | 162 |
| 7.2. Procedura semplificata di progetto | 163 |
| 7.2.1. Forma della fondazione..... | 164 |
| 7.2.2. Caratterizzazione del sottosuolo | 164 |
| 7.2.3. Impedenze della fondazione | 166 |
| 7.2.4. Flessibilità della fondazione | 169 |
| 7.2.5. Analisi della risposta del sistema interagente | 171 |
| 7.2.6. Caso delle vibrazioni in un piano: analisi del modo fondamentale | 175 |
| 7.3. Esempi applicativi | 185 |
| 7.3.1. Pila da ponte su fondazione a pozzo..... | 185 |
| 7.3.2. Edificio multipiano con distribuzione asimmetrica delle rigidezze | 193 |

8 CONCLUSIONI

| | |
|--|-----|
| 8.1. Generalità | 205 |
| 8.2. Analisi modale classica per SSI | 206 |
| 8.3. Modello 1-DOF equivalente..... | 208 |
| 8.4. Approccio perturbativo per terreni rigidi | 209 |
| 8.5. Applicazioni | 212 |
| 8.6. Sviluppi futuri | 214 |

BIBLIOGRAFIA

217

INDICE DELLE FIGURE

| | | |
|-------------------|--|----|
| Figura 1.1 | Modello di riferimento: struttura 1-DOF su fondazione rigida diretta su semispazio elastico omogeneo..... | 19 |
| Figura 1.2 | Risposta in frequenza di una struttura interagente al variare di σ e di h/a | 21 |
| Figura 1.3 | Risposta in frequenza in termini di spostamento assoluto all'ultimo livello di una struttura multipiano..... | 22 |
| Figura 2.1 | Sistema interagente terreno-fondazione-struttura. | 30 |
| Figura 2.2 | Problemi base dell'approccio per sottostrutture. | 32 |
| Figura 2.3 | Input sismico basato sulla propagazione di onde equivalenti non verticali. | 36 |
| Figura 2.4 | Schematizzazione del problema di scattering. | 39 |
| Figura 2.5 | Equilibrio della fondazione..... | 49 |
| Figura 2.6 | Modello shear-type per vibrazioni accoppiate traslazione-rocking. | 51 |
| Figura 3.1 | Coefficienti di impedenza utilizzati da Bielak [Velesztos e Verbic (1974)]. | 62 |
| Figura 3.2 | Funzioni di trasferimento per la struttura a tre piani ($\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$). 65 | |
| Figura 3.3 | Funzioni di trasferimento per la struttura a cinque piani ($\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$)...... | 66 |
| Figura 3.4 | Funzioni di trasferimento per la struttura a tre piani ($\rho = 204 \text{ Kg/m}^3$). 67 | |
| Figura 3.5 | Funzioni di trasferimento per la struttura a cinque piani ($\rho = 204 \text{ Kg/m}^3$)...... | 68 |
| Figura 3.6 | Funzioni di trasferimento per la struttura a 3 piani: confronto tra soluzione esatta e soluzione approssimata, $\rho = 204 \text{ Kg/m}^3$ | 73 |
| Figura 3.7 | Funzioni di trasferimento per la struttura a 5 piani: confronto tra soluzione esatta e soluzione approssimata, $\rho = 204 \text{ Kg/m}^3$ | 74 |
| Figura 4.1 | Modello della struttura campione. | 80 |
| Figura 4.2 | Coefficienti di impedenza per una fondazione cilindrica rigida ($\nu = 0.25$, $h/a = 0.5$), [Apsel e Luco (1987)]. | 82 |
| Figura 4.3 | Coefficienti di scattering per una fondazione cilindrica rigida ($\nu = 0.25$, $h/a = 0.5$) e onde SH verticali, [Luco and Wong (1987)]. | 83 |

| | | |
|--------------------|--|-----|
| Figura 4.4 | Funzioni di trasferimento dell'ampiezza degli spostamenti relativi normalizzati (linee continue: soluzione esatta; linee tratteggiate: analisi modale); input in accelerazione unitaria. | 87 |
| Figura 4.5 | Funzioni di trasferimento degli angoli di fase degli spostamenti relativi normalizzati (linee continue: soluzione esatta; linee tratteggiate: analisi modale); input in accelerazione unitaria. | 88 |
| Figura 4.6 | Funzioni di trasferimento dell'ampiezza degli spostamenti assoluti normalizzati (linee continue: soluzione esatta; linee tratteggiate: analisi modale); input in spostamento unitario. | 90 |
| Figura 4.7 | Funzioni di trasferimento degli angoli di fase degli spostamenti assoluti normalizzati (linee continue: soluzione esatta; linee tratteggiate: analisi modale); input in spostamento unitario. | 91 |
| Figura 4.8 | Rappresentazione schematica del modello ausiliario Fixed-Superstructure. | 99 |
| Figura 4.9 | Grafico delle frequenze proprie normalizzate $\tilde{\omega}_i/\omega_1$ in funzione di $\beta/(\omega_1 a)$ | 102 |
| Figura 4.10 | Forme modali del sistema, modi da 1 a 5. Linee verdi: forme modali per terreno perfettamente flessibile; linee rosse: forme modali per struttura su base fissa. | 104 |
| Figura 4.11 | Forme modali del sistema, modi da 6 a 11. Linee verdi: forme modali per terreno perfettamente flessibile; linee rosse: forme modali per struttura su base fissa. | 105 |
| Figura 4.12 | Forme modali per il caso Rigid Superstructure (blu) e Fixed Superstructure (rosso)..... | 106 |
| Figura 4.13 | Transizione tra quarta e quinta forma modale. | 108 |
| Figura 4.14 | Contributo delle componenti di smorzamento per i modi da 1 a 3. | 111 |
| Figura 4.15 | Contributo delle componenti di smorzamento per i modi da 4 a 6. | 112 |
| Figura 5.1 | Modelli equivalenti del sistema interagente: (a) esprimendo i gradi di libertà della sovrastruttura in termini dei modi della struttura a base fissa (Tajimi, 1967), e (b) utilizzando il modello 1-DOF proposto. | 118 |
| Figura 5.2 | Rappresentazione schematica del modello 1-DOF equivalente per vibrazioni verticali. | 123 |
| Figura 5.3 | Termini aggiuntivi di massa e rigidità per i modelli 1-DOF equivalenti della struttura campione. | 125 |
| Figura 5.4 | Valori delle rigidità aggiuntive normalizzate per i modi 2 e 9 in funzione della velocità delle onde di taglio normalizzata. | 126 |
| Figura 5.5 | Valori dei termini di smorzamento aggiuntivi normalizzati per i modi 2 e 9 in funzione della velocità delle onde di taglio normalizzata. | 127 |

| | | |
|-------------------|--|-----|
| Figura 5.6 | Funzioni di trasferimento dello spostamento assoluto normalizzato in sommità della struttura campione, per effetto di uno spostamento di input unitario..... | 128 |
| Figura 5.7 | Funzioni di trasferimento dello spostamento assoluto normalizzato in sommità della struttura campione, per effetto di una rotazione di input unitaria. | 128 |
| Figura 5.8 | Soluzioni dei problemi agli autovalori relativi ai modelli 1-DOF equivalenti..... | 130 |
| Figura 5.9 | Confronto tra le frequenze proprie del sistema ottenute attraverso il modello equivalente (punti), e quelle calcolate mediante la soluzione del problema agli autovalori completo (linee). I colori indicano l'autosoluzione scelta in base al criterio formulato (blu: prima; rosso: seconda; verde: terza). | 131 |
| Figura 6.1 | Frequenze proprie del sistema. Linee continue: analisi modale; punti: approccio perturbativo. | 151 |
| Figura 6.2 | Forme modali, $\beta = 360$ e 720 m/sec. | 153 |
| Figura 6.3 | Funzioni di trasferimento per $\beta = 360$ m/sec (spostamenti relativi, accelerazione armonica di input in campo libero unitaria)..... | 157 |
| Figura 6.4 | Funzioni di trasferimento per $\beta = 720$ m/sec (spostamenti relativi, accelerazione armonica di input in campo libero unitaria)..... | 158 |
| Figura 7.1 | Coefficienti per il calcolo delle impedenze ($v_s = 0.45$), dalla soluzione di Luco e Mita (1987). I valori per $\xi_s = 0.05$ sono ottenuti attraverso le espressioni approssimate (7.3) e (7.4). | 171 |
| Figura 7.2 | Variazione dell'ordinata spettrale per l'i-esimo modo. | 174 |
| Figura 7.3 | Variazione del periodo e dello smorzamento di un oscillatore elementare per effetto dell'interazione con il terreno, $M/\rho_s\pi r^2H = 0.20$ | 180 |
| Figura 7.4 | Variazione del periodo e dello smorzamento di un oscillatore elementare su fondazione rettangolare al variare di r_M/r_H ($M/\rho_s\pi r^2H = 0.20$; $H/r_H = 1.0$). | 182 |
| Figura 7.5 | Variazione del periodo e dello smorzamento di un oscillatore elementare su fondazione rettangolare al variare di r_M/r_H ($M/\rho_s\pi r^2H = 0.20$; $H/r_H = 1.5$). | 183 |
| Figura 7.6 | Variazione del periodo e dello smorzamento di un oscillatore elementare su fondazione rettangolare al variare di r_M/r_H ($M/\rho_s\pi r^2H = 0.20$; $H/r_H = 2.0$). | 183 |
| Figura 7.7 | Variazione del periodo e dello smorzamento di un oscillatore elementare su fondazione rettangolare al variare di r_M/r_H ($M/\rho_s\pi r^2H = 0.20$; $H/r_H = 3.0$). | 184 |

| | | |
|--------------------|--|-----|
| Figura 7.8 | Modello 3-DOF di pila su fondazione a pozzo..... | 186 |
| Figura 7.9 | Coefficienti di scattering per una fondazione cilindrica rigida ($v_s = 0.25$, $h/a = 2$), e onde SH verticali [Luco e Wong (1987)]. | 188 |
| Figura 7.10 | Coefficienti di impedenza per una fondazione cilindrica rigida ($v_s = 0.25$, $h/a = 2$) [Apsel e Luco (1987)]. | 189 |
| Figura 7.11 | Risposta stazionaria del sistema interagente, caso di pila alta ($h_1 = 30$ m). | 190 |
| Figura 7.12 | Risposta stazionaria del sistema interagente, caso di pila bassa ($h_1 = 15$ m). | 191 |
| Figura 7.13 | Variazione della frequenza fondamentale e del coefficiente di smorzamento del sistema in funzione della velocità delle onde di taglio nel terreno. | 192 |
| Figura 7.14 | Carpenteria schematica del piano tipo dell'edificio. | 194 |
| Figura 7.15 | Vista 3D dall'alto delle deformate modali della struttura su base fissa: modi 1-6..... | 196 |
| Figura 7.16 | Funzioni di trasferimento degli spostamenti relativi normalizzati, $V_s = 180$ m/sec. Ordinate in scala logaritmica (a sinistra) e lineare (a destra). | 201 |
| Figura 7.17 | Moto di input in fondazione per effetto di un'onda SH viaggiante nel piano xz (moto delle particelle in direzione y), in direzione verticale ($\phi_v = 90^\circ$) e orizzontale ($\phi_v = 0^\circ$) [Luco e Sotiropoulos (1980)]. | 202 |
| Figura 7.18 | Funzioni di trasferimento degli spostamenti relativi normalizzati, $V_s = 180$ m/sec, per effetto di un'onda SH verticale ($\phi_v = 90^\circ$) e orizzontale ($\phi_v = 0^\circ$) viaggiante nel piano xz | 204 |

INDICE DELLE TABELLE

| | | |
|---------------------|--|----|
| Tabella 3.1 | Valori riportati da Bielak (1975) per le masse e le quote dei piani dei due casi studio, e valori desunti delle rigidezze di piano. | 61 |
| Tabella 3.2 | Frequenze proprie e coefficienti di smorzamento delle strutture su base fissa. | 61 |
| Tabella 3.3 | Spostamenti relativi statici normalizzati della fondazione $\beta = 600$ m/sec. | 64 |
| Tabella 3.4 | Frequenze proprie della fondazione per $\beta=600$ m/sec, e confronto con le corrispondenti frequenze riportate in Bielak (1975). | 70 |
| Tabella 3.5 | Frequenze proprie in Hertz, struttura a tre piani. | 71 |
| Tabella 3.6 | Frequenze proprie in Hertz, struttura a cinque piani. | 71 |
| Tabella 3.7 | Coefficienti di smorzamento modale, struttura a tre piani. | 71 |
| Tabella 3.8 | Coefficienti di smorzamento modale, struttura a cinque piani. | 72 |
| Tabella 3.9 | Misure di errore per la struttura a tre piani ($\rho = 204 \text{ Kg/m}^3$). | 75 |
| Tabella 3.10 | Misure di errore per la struttura a cinque piani ($\rho = 204 \text{ Kg/m}^3$). | 76 |
| Tabella 3.11 | Misure di errore per la struttura a tre piani ($\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$). | 76 |
| Tabella 3.12 | Misure di errore per la struttura a cinque piani ($\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$). | 76 |
| Tabella 4.1 | Masse, momenti di inerzia, rigidezze, coordinate e altezze dei piani della struttura. | 80 |
| Tabella 4.2 | Proprietà dinamiche della struttura su base fissa. | 81 |
| Tabella 4.3 | Proprietà dinamiche del sistema interagente, per $\beta = 360$ m/sec. | 85 |
| Tabella 4.4 | Proprietà dinamiche del sistema interagente, per $\beta = 720$ m/sec. | 85 |
| Tabella 4.5 | Spostamenti e rotazioni relativi normalizzati della fondazione in condizione statica. | 89 |
| Tabella 4.6 | Misure di errore della risposta in spostamenti relativi, input in accelerazione unitario. | 93 |
| Tabella 4.7 | Misure di errore della risposta in spostamenti assoluti, input in spostamento unitario. | 93 |
| Tabella 4.8 | Coefficienti \bar{c}_{ij} della matrice di dissipazione modale, per $\beta = 360$ m/sec. | 95 |

| | | |
|---------------------|---|-----|
| Tabella 4.9 | Coefficienti \bar{c}_{ij} della matrice di dissipazione modale, per $\beta = 720$ m/sec. | 95 |
| Tabella 4.10 | Coefficienti di smorzamento $\tilde{\xi}_{ij}$, per $\beta = 360$ m/sec. | 96 |
| Tabella 4.11 | Coefficienti di smorzamento $\tilde{\xi}_{ij}$, per $\beta = 720$ m/sec. | 96 |
| Tabella 4.12 | Rapporto massimo tra termini fuori diagonale e termini in diagonale $\max(\tilde{\xi}_{ij}/\tilde{\xi}_i)$ | 97 |
| Tabella 4.13 | Frequenze proprie del sistema (Hz). | 101 |
| Tabella 4.14 | Frequenze proprie (Hz) per i casi Rigid Superstructure e Fixed Superstructure. | 101 |
| Tabella 4.15 | Fattori di partecipazione normalizzati per traslazione. | 109 |
| Tabella 4.16 | Fattori di partecipazione normalizzati per rotazione. | 109 |
| Tabella 4.17 | Coefficienti di smorzamento modale. | 110 |
| Tabella 4.18 | Confronto tra il presente caso studio (edificio a nove piani) con i casi analizzati da Bielak. I valori relativi alle strutture di Bielak sono ricavati utilizzando la densità di massa nominale del terreno pari a $\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$ | 114 |
| Tabella 6.1 | Frequenze proprie del sistema in Hertz. | 152 |
| Tabella 6.2 | Coefficienti di smorzamento, $\beta = 360$ m/sec. | 154 |
| Tabella 6.3 | Coefficienti di smorzamento, $\beta = 720$ m/sec. | 154 |
| Tabella 6.4 | Fattori di partecipazione normalizzati, $\beta = 360$ m/sec. | 155 |
| Tabella 6.5 | Fattori di partecipazione normalizzati, $\beta = 720$ m/sec. | 155 |
| Tabella 6.6 | Confronto della misura di errore μ_1 | 159 |
| Tabella 6.7 | Confronto della misura di errore μ_2 | 159 |
| Tabella 7.1 | Valori medi del rapporto di smorzamento e del fattore di riduzione della rigidezza del terreno secondo EN 1998-5. | 166 |
| Tabella 7.2 | Caratteristiche dei casi studio. | 187 |
| Tabella 7.3 | Confronto tra le misure di errore della densità di potenza spettrale. .. | 191 |
| Tabella 7.4 | Proprietà dinamiche della struttura su base fissa. | 195 |
| Tabella 7.5 | Frequenze proprie (in Hertz) e coefficienti di smorzamento dei primi dieci modi del sistema ($V_s=180$ m/sec). | 198 |
| Tabella 7.6 | Masse partecipanti dei primi dieci modi del sistema ($V_s=180$ m/sec). | 199 |

ABSTRACT DELLA DISSERTAZIONE

METODI DI ANALISI DINAMICA E DI PROGETTO PER SISTEMI INTERAGENTI TERRENO-FONDAZIONE-STRUTTURA

di

Armando Lanzi

Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Strutture - XV Ciclo

Sapienza Università di Roma, Roma, 2013

Il presente lavoro tratta i metodi di analisi e di progetto di sistemi dinamici interagenti terreno-fondazione-struttura. Nel contesto di una formulazione per sottostrutture, l'attenzione è rivolta alla valutazione della risposta del sistema mediante metodi basati sulla classica decomposizione in modi ortogonali. Nonostante per tale classe di problemi l'approccio modale classico fornisca una soluzione approssimata e non rigorosa, esso è particolarmente significativo in quanto, oltre ad essere largamente diffuso, permette un'interpretazione fisica degli effetti di interazione.

Dopo un'attenta validazione degli algoritmi utilizzati attraverso il confronto con risultati di letteratura, viene presentato uno studio completo dell'approccio modale classico, particolarizzato all'analisi della risposta di un edificio multipiano. L'accuratezza del metodo è quantificata introducendo due misure di errore della risposta stazionaria. L'origine della mancanza di accuratezza è esaminata analizzando i termini fuori-diagonale della matrice di dissipazione modale. Gli effetti dell'interazione sulle proprietà dinamiche del sistema sono illustrati attraverso un'analisi parametrica della struttura campione, e sono interpretati mediante il confronto con diversi casi limite.

Una migliore comprensione degli effetti di interazione viene proposta attraverso la formulazione analitica di un modello equivalente, costituito da un

oscillatore elementare su fondazione rigida e semispazio elastico. Il modello equivalente permette di calcolare la risposta in corrispondenza di ciascuna frequenza di risonanza del sistema.

Attraverso l'applicazione di un'analisi perturbativa, vengono formulate nuove espressioni analitiche per stimare le frequenze proprie, le forme modali, i coefficienti di smorzamento e i fattori di partecipazione del sistema interagente a partire dalle grandezze modali della struttura su base fissa. Le espressioni qui formulate rappresentano una generalizzazione di quelle già proposte da altri autori per l'analisi del modo fondamentale di un modello piano.

Infine, i risultati analitici e numerici ottenuti vengono riorganizzati per agevolarne la diretta applicazione in fase progettuale. Viene proposta una procedura che consente di tenere conto degli effetti di interazione nell'ambito dell'analisi lineare statica e dinamica con spettro di risposta. L'approccio, applicabile alla maggior parte delle strutture ordinarie, si presta ad essere incorporato in documenti normativi e linee guida.

SOMMARIO ESTESO

L'interazione terreno-struttura è un fenomeno che può essere rilevante nella progettazione antisismica delle strutture, soprattutto nel caso di edifici e infrastrutture di importanza strategica. Nella tesi, il problema della valutazione degli effetti della interazione terreno-struttura è affrontato nell'ambito di una formulazione per sottostrutture. L'attenzione è rivolta all'applicazione dell'analisi modale classica alla valutazione della risposta dinamica di una struttura elastica-lineare, vincolata ad una fondazione rigida immersa in un mezzo viscoelastico lineare.

Nella pratica corrente, per l'analisi dell'interazione terreno-struttura, viene comunemente impiegato un metodo approssimato basato sulla decomposizione in modi ortogonali. Nonostante la mancanza di rigore analitico, connessa al fatto di trascurare la dipendenza dalla frequenza delle funzioni d'impedenza della fondazione e il contributo dei termini fuori diagonale della matrice di dissipazione modale, l'approccio permette di cogliere il significato fisico degli effetti d'interazione e rappresenta una naturale estensione dell'analisi modale di strutture su base fissa, che è familiare alla maggior parte degli ingegneri strutturalisti.

In dettaglio, a seguito degli studi di Jennings e Bielak (1973), Bielak (1975, 1976), Veletsos e Meek (1974) e Veletsos e Nair (1975), è stata sviluppata una procedura semplificata di progetto, basata sull'analisi del modo fondamentale di vibrazione di un sistema piano, che è stata anche adottata, innovativamente, nel codice di progettazione ATC 3-06 (1978). La procedura originale è stata oggetto di successivi studi di calibrazione e validazione [Stewart et al (1999a, b); Stewart (2003)], ed è ancora oggi incorporata in diversi documenti normativi [ASCE 7-10, NEHRP-2009].

Nonostante quindi l'applicazione dell'analisi modale classica a problemi d'interazione terreno-struttura sia un tema affrontato in numerosi studi, rimangono ancora irrisolti diversi aspetti: (i) la definizione del campo di validità del metodo; (ii) la stima degli errori connessi con la sua applicazione; (iii) lo sviluppo di espressioni approssimate per la valutazione dei contributi dei modi superiori al primo e per l'applicazione dell'approccio a strutture tridimensionali; (iv) la formulazione di stime

dei coefficienti di smorzamento modale che permettano di compensare gli errori indotti dal trascurare l'accoppiamento tra i modi. I primi tre aspetti sono quelli affrontati in dettaglio nella tesi.

Dopo una rassegna dello stato dell'arte (Cap. 1), viene descritta la formulazione per sottostrutture del problema d'interazione lineare terreno-struttura (Cap. 2). Vengono discussi gli aspetti principali dei singoli problemi elementari in cui il sistema è scomposto (moto di input in fondazione, impedenze della fondazione, struttura in elevazione), formulate le equazioni del moto del sistema e descritti alcuni metodi di soluzione.

Nel seguito (Cap. 3), si esegue la validazione degli algoritmi utilizzati per l'analisi d'interazione lineare, confrontando i risultati ottenuti con quelli presentati da Bielak (1975, 1976). Il confronto è significativo non solo ai fini della validazione, ma anche perchè i risultati di Bielak, che sembrano indicare una buona accuratezza dell'approccio modale classico per la soluzione dei problemi di interazione, sono stati largamente citati e necessitano di essere compresi a fondo. Nel processo di validazione, è emerso che le strutture analizzate da Bielak possiedono caratteristiche peculiari e sono poco rappresentative di strutture reali.

L'analisi modale classica è stata quindi applicata a un modello di telaio a nove piani (Cap. 4). Il caso studio riprende le caratteristiche della struttura portante di un edificio reale, la Millikan Library, di Pasadena (CA), la cui risposta dinamica è stata studiata da diversi ricercatori in termini analitici e sperimentali [ad esempio, Luco et al (1987); Bradford et al (2004)].

Dal confronto della soluzione approssimata, ottenuta mediante l'analisi modale, con la soluzione esatta, ottenuta mediante inversioni multiple della matrice d'impedenza, è emerso che l'approccio modale è molto accurato in corrispondenza della prima frequenza di risonanza, mentre può fornire risultati poco accurati nel campo delle frequenze medie o alte. In particolare, il campo di frequenze in cui l'approccio modale fornisce risultati accurati si rivela fortemente condizionato dalla significatività degli effetti d'interazione, misurata attraverso un parametro adimensionale di rigidezza relativa terreno-struttura. Viene quindi esaminata la causa della perdita di accuratezza dell'approccio modale, valutando l'effetto dei termini

fuori-diagonale della matrice di dissipazione modale. In conclusione, l'approccio modale classico può rappresentare in molti casi un valido strumento per la progettazione, considerato che il dimensionamento strutturale è spesso condizionato dai soli modi a bassa frequenza; nel caso di grandezze progettuali sensibili alle alte frequenze, il metodo può o meno fornire previsioni accurate, a seconda della rigidità relativa terreno-struttura.

Per una migliore interpretazione dell'approccio modale, nella seconda parte del Cap. 4 viene presentata un'analisi parametrica eseguita con riferimento alla struttura campione. Le variazioni di frequenze proprie, forme modali, fattori di partecipazione e coefficienti di smorzamento del sistema in funzione della velocità di propagazione delle onde di taglio nel terreno sono esaminate e interpretate attraverso l'esame di alcuni casi limite: struttura su base fissa, struttura su base perfettamente flessibile, struttura rigida.

Inoltre, è proposto un modello ausiliario (a sovrastruttura fissa) che si rivela particolarmente utile per la comprensione dei risultati ottenuti. Si evidenzia che, nel caso di terreni relativamente rigidi, è possibile distinguere tra i modi che coinvolgono prevalentemente le deformazioni della sovrastruttura e i modi connessi alle deformazioni della fondazione. I primi corrispondono ai modi della struttura su base fissa, perturbati per effetto dell'interazione; i secondi corrispondono ai modi del modello ausiliario, e sono caratterizzati da un elevato smorzamento. Al progressivo diminuire della rigidità del terreno, la distinzione tende a essere meno chiara. Il campo di validità dell'analisi modale classica appare limitato dalla più bassa delle frequenze proprie del modello ausiliario.

Il Cap. 5 presenta la formulazione di un modello equivalente a tre gradi di libertà, che permette di valutare la risposta di un sistema M-DOF interagente in corrispondenza di ciascuna frequenza di risonanza $\tilde{\omega}_i$. Il modello è costituito da un oscillatore elementare, che schematizza l' i -esimo modo della sovrastruttura su base fissa, e da una fondazione equivalente, la cui massa e rigidità sono modificate per tenere conto dei rimanenti modi della sovrastruttura ($j \neq i$). La formulazione analitica rivela che l'effetto dei modi a base fissa a frequenza superiore a quella considerata ($j > i$) è assimilabile a un incremento della massa della fondazione;

l'effetto dei modi a frequenza inferiore ($j < i$) è assimilabile a un incremento di rigidità e smorzamento della fondazione.

Il modello può essere utilizzato, note le grandezze modali della sovrastruttura su base fissa, per eseguire un'analisi d'interazione risolvendo sistemi equivalenti di dimensione 3. L'accuratezza del modello è verificata attraverso il confronto con la soluzione esatta del sistema di equazioni completo. Sebbene i vantaggi computazionali connessi all'utilizzo del modello siano piuttosto modesti, esso si rivela significativo per due aspetti: (i) fornisce elementi per una comprensione fisica degli effetti d'interazione; (ii) si presta ad ulteriori sviluppi analitici mirati ad formulare espressioni in forma chiusa per l'analisi approssimata dell'interazione.

Il Cap. 6 presenta l'applicazione di un metodo perturbativo per la soluzione del problema agli autovalori di un sistema interagente. L'ipotesi di base, valida nel caso di terreni relativamente rigidi, è che la soluzione possa essere ottenuta a partire dalle autosoluzioni della sovrastruttura su base fissa, con l'aggiunta di piccoli termini perturbativi.

L'approccio porta alla formulazione di espressioni in forma chiusa per stimare le grandezze modali del sistema interagente, utilizzando i risultati dell'analisi modale della struttura su base fissa e le funzioni d'impedenza della fondazione. Le espressioni proposte generalizzano quelle ottenute da Bielak (1971), Jennings e Bielak (1973) e Veletsos e Meek (1974) per diversi aspetti: (i) sono valide per sistemi tridimensionali e per input applicato a tutti i gradi di libertà della fondazione rigida; (ii) sono applicabili anche ai modi superiori al primo; (iii) tengono conto dei termini di accoppiamento delle impedenze e, in generale, di termini di ordine superiore per le forme modali e i fattori di partecipazione. L'accuratezza delle espressioni proposte è analizzata mediante il confronto della risposta stazionaria della struttura campione a nove piani, ottenuta mediante l'approccio perturbativo, l'analisi modale classica e l'analisi nel dominio delle frequenze. Si rileva che il campo di validità dell'approccio perturbativo coincide con quello dell'analisi modale classica, e che gli errori connessi a ciascuno dei metodi approssimati sono sostanzialmente gli stessi.

L'ultima parte della tesi (Cap. 7) riguarda le modalità di utilizzo dei metodi analitici precedentemente formulati per la progettazione sismica di strutture ordinarie, eseguita considerando gli effetti di interazione terreno-struttura e utilizzando l'analisi lineare statica e dinamica con spettro di risposta. Le indicazioni fornite hanno carattere prettamente applicativo, e si prestano a essere incorporate in documenti normativi e linee guida.

Dapprima, sono date indicazioni su come valutare i parametri caratteristici del terreno e le funzioni d'impedenza della fondazione. Le approssimazioni proposte riprendono, in maniera sostanziale, quelle suggerite da documenti normativi di comprovata validità. Quindi, sono descritti i modi attraverso cui l'analisi dinamica con spettro di risposta del sistema interagente può essere effettuata a partire da un modello della sola struttura su base fissa. L'approccio utilizza le funzioni d'impedenza per fondazioni rigide disponibili in letteratura e le espressioni analitiche delle grandezze modali ricavate attraverso l'approccio perturbativo. Per facilitare ulteriormente l'utilizzo del metodo, sono proposti alcuni grafici adimensionali che permettono una stima immediata delle grandezze d'interesse in funzione dei parametri caratteristici del sistema. Sono infine presentati alcuni esempi applicativi, che evidenziano le potenzialità della procedura.

In sintesi, lo studio svolto ha l'obiettivo di fornire un contributo allo sviluppo di metodi di analisi e di progetto di sistemi interagenti terreno-struttura. Nonostante con la potenza di calcolo disponibile sia possibile effettuare un'analisi di interazione rigorosa con relativa semplicità, la disponibilità di un metodo di progetto basato sull'analisi modale classica rimane desiderabile per due ordini di motivi. Primo perché l'analisi modale con spettro di risposta rappresenta il metodo più diffuso per la progettazione antisismica delle strutture, e può essere facilmente effettuata utilizzando comuni codici di calcolo. Poi perché l'analisi modale fornisce grandezze di chiaro significato fisico (frequenze proprie, fattori di partecipazione, coefficienti di smorzamento), che permettono di comprendere gli aspetti fondamentali della risposta dinamica del sistema. Pertanto, rappresenta uno strumento utile non solo in fase di verifica, ma anche in fase di progetto.

Lo studio svolto chiarisce molteplici aspetti dell'analisi d'interazione, sia pure eseguita in modo approssimato, ma lascia aperte almeno due questioni di

importanza fondamentale. La prima è legata alla definizione di una migliore stima dei coefficienti di smorzamento, che permetta di compensare gli errori indotti dall'ipotesi di trascurare i termini fuori diagonale della matrice di dissipazione modale. La seconda, di più ampia portata, riguarda la possibilità di effettuare l'analisi in campo lineare, e di utilizzare i fattori di comportamento (q , R) prescritti dalle normative e formulati con riferimento alle strutture su base fissa [Crouse (2002)].

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

1.1. Interazione dinamica terreno-struttura: generalità

Fornire una definizione, concisa ma al contempo sufficientemente completa e rigorosa, del termine *interazione terreno-struttura* rappresenta il primo ostacolo del presente lavoro di tesi. Nell'ambito di qualunque percorso di ricerca bibliografica, è comune imbattersi in espressioni del tipo: "*l'interazione terreno-struttura comprende quei fenomeni il cui effetto è di modificare la risposta della struttura rispetto a quella che si otterrebbe considerando la stessa su base fissa*". Tale definizione, seppur ampiamente generalista, non risulta priva di punti deboli. Si potrebbe infatti obiettare che essa definisce un concetto (l'interazione terreno-struttura) in termini relativi rispetto ad una condizione (struttura su base fissa), che di per sè è una idealizzazione; inoltre, la definizione sembra escludere dall'insieme dei problemi di interazione terreno-struttura i fenomeni legati alla cosiddetta *risposta sismica locale*, che pure da alcuni vengono considerati parte di esso. È chiaro, comunque, che l'interazione terreno-struttura comprende i fenomeni, in ambito sia statico sia dinamico, che coinvolgono un sottosuolo e una sovrastruttura (compresa la sua fondazione) caratterizzati da un certo rapporto finito di rigidità relativa.

Appare pertanto opportuno, piuttosto che ricercare una definizione sintetica, elencare i principali problemi che vengono comunemente associati all'interazione terreno-struttura [Kausel, 2010]:

- risposta di un volume di sottosuolo alle vibrazioni indotte da sorgenti interne, quali ad esempio i terremoti, prima ancora che alcuna struttura sia presente (problema del *free-field*);
- risposta di fondazioni ideali, rigide e prive di massa, all'eccitazione indotta da onde elastiche che nascono e si propagano all'interno del sottosuolo (*interazione cinematica*);
- risposta di un volume di sottosuolo ad un'eccitazione, di natura statica o dinamica, indotta da una sorgente posta sulla superficie del terreno (ricerca delle *soluzioni fondamentali*);
- risposta di fondazioni ideali, superficiali o profonde, immerse in tutto o in parte in un sottosuolo deformabile, all'azione di carichi, statici o dinamici, applicati alle fondazioni stesse (*impedenze della fondazione*);
- calcolo delle deformazioni aggiuntive nel sottosuolo, in vicinanza di una struttura in movimento, connesse al campo d'onda generato dalle forze di inerzia agenti sulla struttura stessa (*interazione inerziale*);
- metodi numerici per l'analisi dei problemi suddetti (elementi finiti, elementi al contorno, contorni trasmettenti etc.).

Appare quindi evidente come l'interazione terreno-struttura (indicata comunemente come *SSI*) abbracci una straordinaria varietà di discipline; d'altronde, i maggiori contributi alla conoscenza dei fenomeni di *SSI* provengono da personalità appartenenti a diversi campi della scienza, da matematici puri ad ingegneri.

L'interazione terreno-struttura è in definitiva un elemento importante per il progetto di strutture sismoresistenti, specialmente nel caso di edifici e infrastrutture di importanza strategica. Diverse procedure di analisi sono state proposte e utilizzate per prevedere la risposta del sistema interagente. Tali procedure differiscono nelle assunzioni alla base della modellazione, nei metodi di soluzione delle equazioni del moto e, in generale, nel numero e natura delle approssimazioni coinvolte. Tipicamente, i metodi di analisi possono essere classificati in due gruppi, approccio diretto ed approccio per sottostrutture.

L'approccio diretto si basa su una modellazione integrale, in genere attraverso elementi finiti, del sottosuolo, della fondazione e della sovrastruttura. La soluzione viene ottenuta, di norma, nel dominio del tempo mediante integrazione

diretta delle equazioni del moto. L'approccio diretto permette di considerare legami costitutivi non lineari per il terreno e per la sovrastruttura, e di modellare l'attuale geometria della fondazione, degli strati di terreno e della superficie topografica; tuttavia esso richiede particolare attenzione nella modellazione delle condizioni al contorno, per eliminare riflessioni spurie delle onde e per introdurre l'eccitazione sismica. Inoltre, a causa dei vincoli sulla grandezza massima degli elementi finiti di terreno, connessi con la necessità di cogliere il contributo delle armoniche a frequenza elevata, i modelli tridimensionali di strutture molto estese in pianta (ad es. ponti) risultano caratterizzati da elevatissimi oneri computazionali.

L'approccio per sottostrutture prevede che gli elementi chiave della risposta del terreno, della fondazione e della sovrastruttura siano ottenuti indipendentemente e successivamente combinati per soddisfare la compatibilità di forze e spostamenti. L'approccio per sottostrutture è tipicamente limitato al comportamento lineare e comporta la formulazione delle equazioni del moto nel dominio della frequenza e la successiva trasformazione nel dominio del tempo attraverso una sintesi di Fourier. Gli effetti di interazione sono presi in considerazione aggiungendo, al modello della sovrastruttura a base fissa, un certo numero di molle e smorzatori, con caratteristiche dipendenti dalla frequenza, che rappresentano la flessibilità del suolo e lo smorzamento dell'energia dalla fondazione per radiazione (*radiation damping*). L'approccio conta su una grande varietà di ricerche che forniscono tabelle e grafici delle rigidità dinamiche della fondazione (*impedenze*) per diverse condizioni al contorno. I vantaggi sono essenzialmente connessi con le minime modifiche necessarie rispetto al modello a base fissa e con la possibilità di utilizzare tecniche consolidate per la ricerca della soluzione. Per contro, deve essere accettato un certo numero di approssimazioni, principalmente riguardanti la modellazione della fondazione (geometria, rigidità) e del legame costitutivo del sottosuolo (viscoelastico lineare).

Il presente lavoro di tesi si pone come contributo allo sviluppo e all'ottimizzazione dei metodi di analisi e di progetto delle strutture in presenza di fenomeni di interazione con il terreno. La ricerca è condotta nell'ambito dell'approccio per sottostrutture che, allo stato attuale, appare la via più efficace e praticamente perseguibile per l'analisi SSI. Oltre ai vantaggi sopra riportati, la

significatività dell'approccio è legata al fatto che esso permette una comprensione fisica degli effetti dell'interazione, grazie alla possibilità di analizzare per fasi intermedie sottosistemi più semplici. Inoltre, alcune delle limitazioni connesse al metodo (non-linearità strutturali, effettiva geometria della fondazione e degli strati di sottosuolo) possono essere superate introducendo poche, semplici e controllabili approssimazioni. L'utilizzo dell'approccio diretto, per quanto apparentemente più completo, risulta ancora limitato, in pratica, dagli elevati oneri computazionali, e non permette alcuna comprensione generale dei risultati se non in relazione al singolo caso in esame.

1.2. Stato dell'arte e della pratica

1.2.1. La ricerca scientifica (Stato dell'arte)

La grande varietà delle discipline che interessano, in maniera diretta o indiretta, il settore dell'interazione terreno-struttura si riflette in una vastissima produzione scientifica che, iniziata con la pubblicazione delle prime soluzioni fondamentali nella seconda metà del XIX secolo, ha continuato ad arricchirsi fino ai giorni nostri con lavori che inevitabilmente si concentrano su aspetti più specifici. È singolare constatare, non appena si intraprenda un percorso di ricerca bibliografica, l'esistenza di un certo numero di filoni di ricerca i quali talvolta, pur avendo in comune lo stesso oggetto di studio (l'interazione terreno-struttura), appaiono alquanto scollegati tra loro e privi di comunicazione. Pertanto, è opportuno un breve richiamo generale alle origini dell'interazione terreno-struttura, seguito da una sintesi dei principali lavori che maggiormente influenzano la ricerca attuale. Ulteriori riferimenti, riguardanti aspetti specifici, verranno forniti nei successivi capitoli della tesi e, in particolare, nel Capitolo 2 per ciò che riguarda i sotto-problemi tipici dell'approccio per sottostrutture.

Una rassegna completa degli sviluppi storici dell'interazione terreno-struttura, di seguito in parte richiamata, è fornita in Kausel (2010), a cui si rimanda per alcuni riferimenti non espressamente citati. La storia dell'interazione terreno-struttura inizia con la pubblicazione delle prime *soluzioni fondamentali*. Per soluzione fondamentale si intende un'espressione analitica per valutare la risposta nei punti di un solido eccitato da un'azione puntiforme applicata in posizione

arbitraria. Tali soluzioni, note anche come funzioni di Green, sono gli strumenti essenziali per la soluzione di problemi più complessi (ad es. carichi distribuiti). Esse, oltre ad aver reso possibile lo sviluppo successivo della SSI, sono alla base dei moderni metodi degli elementi al contorno (BEM). Le principali soluzioni fondamentali, in ambito statico, sono state ottenute da illustri scienziati a cavallo del XIX e XX secolo: tra loro, Thomson, Stokes, Boussinesq, Cerruti, Lamb e Mindlin. Alcune di queste soluzioni sono estremamente diffuse e hanno trovato applicazione in diversi campi dell'ingegneria.

Lo sviluppo dell'interazione terreno-struttura prosegue quindi con riferimento al problema statico di fondazioni supportate da un semispazio elastico soggette a diverse distribuzioni di carico. Tra le principali soluzioni vale la pena ricordare quelle di: Boussinesq, per il caso di carico verticale uniformemente distribuito su un'area circolare; Steinbrenner, per le formule dello stato tensionale nel semispazio sotto l'azione di un'impronta di carico rettangolare; Boronicka, per fondazioni nastriformi e circolari soggette a carichi verticali eccentrici; Reissner e Sagoci, per il disco soggetto a torsione; Mindlin, per il disco soggetto a forze orizzontali.

La ricerca di soluzioni analitiche nel campo dell'elastodinamica [Kausel, 2006] è iniziata nella prima metà del XX secolo con i lavori di Reissner, il quale affronta il problema del semispazio soggetto a carichi dinamici verticali e torcenti applicati in superficie. Bycroft (1956) fornisce soluzioni approssimate per tutti e quattro i modi di vibrazione (verticale, torsionale, orizzontale e rocking) di fondazioni circolari sulla superficie del semispazio. Più recentemente, gli influenti lavori di Veletsos e Wei (1971) e Luco e Westmann (1971), che riportano soluzioni rigorose a problemi di vibrazioni armoniche di una piastra circolare su un semispazio elastico per un ampio intervallo di frequenze e di coefficienti di Poisson, hanno stimolato l'avvio di numerose ricerche sull'interazione terreno-struttura. Le soluzioni disponibili in forma chiusa, relative a pochi casi semplici, sono significative non soltanto per i loro risvolti applicativi, ma soprattutto perchè costituiscono il riferimento con cui validare metodi numerici. Luco (1976) ottiene la soluzione esatta del problema di fondazioni emisferiche soggette a coppie torcenti e a onde SH non verticali. Ulteriori soluzioni rigorose per fondazioni emisferiche, ottenute anche utilizzando metodi numerici, sono quelle di Apsel e Luco (1976) e Luco e Wong

(1986). È opportuno sottolineare che molte soluzioni, comunemente indicate come “analitiche”, sono disponibili sotto forma di grafici e tabelle delle impedenze per fondazioni di forma semplice, superficiali o immerse in terreni omogenei o stratificati. Tali soluzioni, pur basandosi su un approccio analitico per la formulazione del problema elastodinamico, necessitano di tecniche numeriche per la risoluzione delle equazioni integrali risultanti [es. Apsel e Luco, 1987].

Una volta poste le basi teoriche per lo studio della risposta del complesso fondazione-terreno, la ricerca ha iniziato ad interessarsi agli effetti dell’interazione sulla risposta sismica delle strutture. Kausel (2010) attribuisce a Sezawa e Kanai, nel 1935, i primi studi sugli effetti di interazione dinamica terreno-struttura. Ulteriori approfondimenti, basati sulle rare registrazioni accelerometriche al tempo disponibili, sono quelli di Martel nel 1940. Significativi sviluppi si sono registrati negli anni Cinquanta grazie a Merrit e Housner, i quali dimostrarono l’importanza del terreno nella risposta di rocking della struttura, e provarono l’esistenza di fenomeni legati al passaggio delle onde al di sotto della fondazione (oggi noti come interazione cinematica). Newmark, nel 1969, evidenziò come, a causa di tali effetti, strutture perfettamente simmetriche esibiscano una risposta torsionale. Successivamente Iguchi (1982) formulò un metodo approssimato per l’analisi dell’interazione cinematica. Parmelee (1967, 1968, 1969) fu il primo a considerare un semplice modello a tre gradi di libertà per l’analisi approssimata di strutture su fondazioni rigide e semispazio elastico.

Lo studio del problema della propagazione e dell’amplificazione delle onde nel sottosuolo, ancor prima che la struttura o la fondazione siano presenti (problema del *free field*), risente, tra gli altri, dei contributi fondamentali di Seed e Idriss (1969) e Schnabel, Lysmer e Seed (1972). Gli effetti topografici, legati alla presenza di inclusioni di varia natura in terreni omogenei o stratificati sono stati studiati, fra gli altri, da Trifunac (1971, 1973), Wong, Trifunac e Lo (1976), Luco e de Barros (1993).

Il numero di pubblicazioni inerenti il calcolo delle impedenze di fondazioni rigide, dirette o immerse in terreni omogenei o stratificati è elevatissimo. Alcuni tra i lavori più influenti sono quelli di Luco (1974), Kausel e Roesset (1976), Gazetas e Roesset (1976), Apsel e Luco (1987), Mita e Luco (1989). La risposta di fondazioni

rigide a onde elastiche che si propagano nel semispazio è trattata in Wong e Luco (1978), Luco e Wong (1987), Luco e Mita (1987). Luco (1986) chiarisce la relazione esistente tra i problemi del calcolo delle impedenze della fondazione e del calcolo della risposta ad onde elastiche. Egli dimostra che la risposta ad onde elastiche può essere valutata utilizzando alcuni risultati intermedi ottenuti nel processo di calcolo delle impedenze.

Riguardo le fondazioni su pali, una soluzione in forma chiusa per i coefficienti di impedenza è stata ottenuta da Novak (1974), modellando il terreno come mezzo generalizzato alla Winkler. Novak e Aboul-Ella (1978) considerano il problema delle impedenze di pali in terreni stratificati. Altre soluzioni di riferimento [Kaynia & Kausel (1982), Kaynia e Kausel (1991)] sono ottenute mediante la combinazione di un approccio analitico con tecniche numeriche. Gazetas e Makris (1991) e Makris e Gazetas (1992) hanno proposto metodi semplici per l'analisi di palificate in terreni di varia natura: basandosi su alcune assunzioni cruciali, essi formulano una procedura approssimata, calibrata con risultati più rigorosi, per determinare coefficienti di influenza che permettano di considerare l'effetto di gruppo.

In merito allo sviluppo dei metodi numerici per l'analisi di problemi di interazione terreno-struttura, senza considerare l'ampia letteratura relativa allo sviluppo di metodi degli elementi al contorno, la prima formulazione di contorni locali non riflettenti è quella ben nota dovuta a Lysmer e Kuhlemeyer (1969), da cui sono derivate numerosissime altre proposte. In epoca recente, Wolf ha apportato diversi contributi originali allo sviluppo di metodi numerici approssimati per l'analisi SSI, basati principalmente su FEM e BEM. Tra gli altri: Wolf (1988) riporta metodi e modelli per l'analisi SSI nel dominio del tempo (*Lumped Parameter Models, Hybrid frequency-time-domain analysis*); Wolf e Chongmin (1996) introducono alcune tecniche innovative per la modellazione di domini infiniti mediante FEM (*Consistent Infinitesimal Finite-Element Cell Method, Damping Solvent Extraction Method, Doubly Asymptotic Multi-directional Transmitting Boundary*); Wolf e Deeks (2004) descrivono modelli approssimati basati sulla teoria dell'elasticità (*cone models*). Un ulteriore merito da riconoscere all'autore è quello di aver contribuito ad una maggiore diffusione della conoscenza dell'interazione

terreno-struttura, tramite la pubblicazione di alcune monografie che oggi rappresentano riferimenti bibliografici essenziali; in aggiunta alle precedenti, si ricorda Wolf (1985). Ciononostante, molte delle tecniche proposte, seppur approssimate, sono caratterizzate da un'elevata complessità che ne ha di fatto condizionato l'applicazione pratica.

L'applicazione dell'analisi modale classica a problemi di interazione terreno-struttura è stata oggetto di numerose ricerche, iniziate con i lavori pionieristici di Roesset, Whitman, e Dobry (1973). Dal momento che tale approccio costituisce il principale oggetto del presente lavoro di tesi, il relativo stato dell'arte è presentato separatamente, e in maggior dettaglio, al successivo paragrafo §1.5.

Infine, vanno riconosciuti i meriti di Gazetas e dei suoi collaboratori i quali, piuttosto che concentrarsi nella ricerca di ulteriori soluzioni, hanno compiuto un notevole sforzo compilativo. Raccogliendo soluzioni analitiche e metodi numerici già disponibili, hanno sviluppato semplici procedure, di taglio prettamente ingegneristico, che permettono attraverso grafici e tabelle una valutazione immediata delle impedenze di fondazioni di varia tipologia in diverse configurazioni di sottosuolo [Gazetas (1991)]. La disponibilità di tali informazioni, per quanto approssimate, per una valutazione qualitativa immediata degli effetti di interazione, ha permesso una maggiore diffusione delle analisi SSI nella pratica professionale.

1.2.2. Riflessi in ambito normativo e professionale (Stato della pratica)

Nonostante l'intensa produzione scientifica di cui si è parlato, la diffusione delle analisi di interazione terreno-struttura è stata generalmente limitata ad alcuni settori specialistici. In particolare, esse vengono condotte con un adeguato livello di accuratezza per il progetto delle fondazioni di macchine vibranti e, soprattutto, di strutture di contenimento di reattori nucleari. Nel campo delle costruzioni civili, invece, si assume generalmente che l'interazione abbia un effetto benefico sulla risposta strutturale e, pertanto, trascurarla comporti un incremento del livello di sicurezza. È evidente che tale ridotto impiego è connesso alla relativa complessità di un'analisi rigorosa, nonché alla mancanza di prescrizioni specifiche all'interno dei codici di progettazione. Metodi semplificati sono stati introdotti in alcuni documenti normativi, ma il loro utilizzo è condizionato dal limitato campo di applicabilità e

dalla necessità, da parte dell'analista, di formulare assunzioni cruciali e difficilmente controllabili.

In generale, è possibile affermare che i moderni codici di progettazione, nonostante prevedano la facoltà di condurre analisi SSI, assumono implicitamente che ignorarne gli effetti comporti un incremento del livello di sicurezza. Data la complessità dei fenomeni di interazione, è impossibile stabilire, a priori, se il suo effetto sulla risposta strutturale sia benefico o dannoso [Milonakis e Gazetas (2000)]. È pertanto conveniente passare in rassegna lo stato della pratica della SSI, distinguendo i settori professionali caratterizzati da diversi livelli di sviluppo.

1.2.2.1. *Settore dell'industria nucleare*

Il periodo di maggiore sviluppo delle analisi SSI in ambito professionale è quello compreso tra fine anni Settanta e fine anni Novanta, in occasione della progettazione e realizzazione di numerose centrali nucleari. Tali strutture, caratterizzate da massa, rigidità ed estensione in pianta molto elevate, risentono in maniera significativa dell'interazione con il terreno. Stimolata dalla necessità di conseguire, in maniera economicamente sostenibile, adeguati livelli di sicurezza per tali strutture, l'attività di ricercatori, professionisti ed enti di regolamentazione è stata molto intensa. Lo stato dell'arte dell'interazione terreno-struttura è stato documentato nel 1980 da diversi ricercatori (Luco, Lysmer, Roesset e Seed), e sintetizzato in un compendio [Johnson (1981)]. Tale lavoro ha costituito la piattaforma di riferimento per i successivi sviluppi negli anni Ottanta e Novanta, caratterizzati da un'intensa attività teorica e sperimentale.

In tale periodo vedono la luce i primi software per le analisi SSI, quali FLUSH e ALUSH (Lysmer), CLASSI (Wong & Luco), e SASSI (Lysmer), che ancora oggi rappresentano lo stato della pratica nell'industria nucleare. La versione originale di tali software risentiva di diverse limitazioni e della mancanza di un'interfaccia utente adeguata; successivi sviluppi hanno permesso di estendere il campo di applicabilità dei programmi e ne hanno agevolato la diffusione. In particolare, diverse versioni di SASSI e CLASSI rappresentano oggi gli strumenti di calcolo più utilizzati, anche a seguito della loro validazione da parte di istituti quali la *U.S. Nuclear Regulatory Commission*. Il principale limite di tali software è la

modellazione lineare di terreno e struttura, necessaria per condurre l'analisi nel dominio della frequenza.

Eventi chiave per la comprensione dei fenomeni di SSI e per la validazione dei metodi di analisi sono state le sperimentazioni, condotte nella seconda metà degli anni Ottanta da EPRI (*Electric Power Research Institute*), TPC (*Taiwan Power Company*) e NRC (*U.S. Nuclear Regulatory Commission*), ai siti di Lotung e Hualien (Taiwan). Modelli in scala (1/4 e 1/12) di strutture di contenimento di reattori nucleari sono stati realizzati e strumentati per registrare la risposta sotto l'azione di vibrazioni forzate e terremoti naturali. Diversi gruppi di ricerca sono stati chiamati a fornire previsioni; i risultati sperimentali e analitici sono stati raccolti in numerose pubblicazioni. Le conoscenze acquisite hanno permesso un aggiornamento dello stato dell'arte [Johnson e Chang (1991)], al fine di implementare procedure di analisi più accurate e meno conservative.

Negli ultimi anni, i codici commerciali ad elementi finiti stanno acquisendo crescente popolarità nel mondo della SSI. Le analisi condotte con tali software si basano su una modellazione diretta dell'intero sistema, che consente di tenere conto del comportamento non lineare di terreno e struttura. Tuttavia, il principale limite risiede nell'elevato onere computazionale connesso alla modellazione di volumi sufficientemente grandi di terreno.

In conclusione, è lecito affermare che nell'ambito dell'industria nucleare dovuta attenzione è rivolta all'interazione terreno-struttura, il cui effetto viene regolarmente analizzato mediante approcci e strumenti sufficientemente completi e adeguatamente validati.

1.2.2.2. *Settore delle costruzioni civili: edifici*

Nel campo delle costruzioni civili, la diffusione delle analisi SSI è tuttora piuttosto limitata, fatta eccezione per gli aspetti connessi con la definizione dell'input sismico in condizioni di campo libero. L'importanza della risposta sismica locale è stata adeguatamente riconosciuta a seguito degli eventi sismici del 1985 (Mexico City) e 1989 (Loma Prieta), caratterizzati da elevate amplificazioni registrate in corrispondenza di sottosuoli deformabili. Tali eventi hanno stimolato gli enti normatori internazionali ad adottare una migliore definizione dell'input sismico. A

titolo esemplificativo, la normativa Italiana (NTC08) prescrive di valutare l'effetto della risposta sismica locale mediante specifiche analisi; in alternativa, è possibile adottare un approccio semplificato basato sull'individuazione di categorie di sottosuolo. Le principali normative internazionali contengono prescrizioni simili.

Per esaminare lo stato della pratica delle analisi SSI per le costruzioni civili è conveniente distinguere le strutture aventi un'unica fondazione (o più fondazioni collegate tra loro), quali gli edifici, e quelle aventi supporti multipli indipendenti, quali i ponti.

Nel caso degli edifici una procedura di analisi che considera, in parte, gli effetti di SSI è apparsa inizialmente nel codice ATC 3-06 (1978). Tale procedura permette di considerare, nell'ambito di un'analisi lineare statica, gli effetti di interazione inerziale legati (1) alla variazione del periodo fondamentale della struttura per effetto della rigidità della fondazione, e (2) alla variazione dello smorzamento viscoso equivalente per effetto dello smorzamento per radiazione. La procedura consente in definitiva una riduzione del taglio alla base corrispondente al modo fondamentale, che comunque non deve essere preso minore del 70% di quello relativo alla struttura su base fissa.

L'approccio si basa sui lavori di Bielak (1971, 1975, 1976), Jennings e Bielak (1973), Veletsos & Meek (1974) e Veletsos e Nair (1975), secondo cui la risposta strutturale con SSI può essere calcolata modellando la struttura come un oscillatore equivalente ad un grado di libertà supportato da una fondazione rigida su semispazio elastico. Nel caso di strutture a più gradi di libertà, il sistema equivalente è individuato dal modo fondamentale di vibrazione della struttura su base fissa. Un aspetto cruciale della procedura è la valutazione delle impedenze della fondazione, disponibili in forma semplice soltanto per certe condizioni al contorno. Opportune correzioni permettono di generalizzare il metodo ad una maggiore varietà di casi (fondazioni non circolari, immerse, flessibili, su pali).

Mantenendo gli stessi elementi-base, l'approccio descritto è stato negli anni aggiornato, in particolare per ciò che riguarda i metodi con cui valutare le impedenze della fondazione reale a partire da quelle relative ad un disco ideale rigido su semispazio omogeneo. Stewart et al (1999a,b) hanno condotto una serie di studi,

calibrati con risultati sperimentali, e proposto le revisioni da apportare alle ATC3 per garantire una maggiore affidabilità [Stewart et al (2003)]. La procedura aggiornata è inclusa negli attuali codici statunitensi, fra cui NEHRP 2000-2003-2009 e ASCE 7-05 e 7-10. Nonostante il metodo sia sufficientemente semplice da implementare, esso viene raramente applicato nella pratica professionale per diversi motivi: (1) necessità di particolare cautela nella scelta dei coefficienti correttivi delle impedenze, (2) comporta sempre una riduzione del taglio alla base, quindi non applicarlo è cautelativo. Un ulteriore punto debole della procedura risiede nel fatto che essa permette di “sommare” alla riduzione delle forze elastiche connessa alla duttilità (fattore di struttura) quella dovuta allo smorzamento per radiazione. Tale assunzione può risultare non conservativa, se si considera che i valori del fattore di struttura forniti dalle Norme contengono implicitamente l’effetto dello smorzamento per radiazione [Crouse (2002)].

Un metodo semplificato per la valutazione degli effetti di interazione cinematica è contenuto nella FEMA-440, che fornisce anche indicazioni per considerare l’interazione inerziale nell’ambito dell’analisi statica non lineare. Gli effetti cinematici vengono considerati modificando lo spettro di risposta elastico di riferimento tramite un coefficiente correttivo *RSS (Ratio of Response Spectra)* che dipende dall’estensione della fondazione e dal suo approfondimento. Il metodo non è applicabile alle fondazioni su pali. Un aspetto cruciale è che la procedura permette una riduzione delle componenti traslazionali del moto di input dovuta agli effetti cinematici, ma non introduce le componenti rotazionali del moto ad essi associati.

In ambito Italiano, le NTC08 riconoscono in diversi punti l’importanza dell’interazione dinamica terreno struttura. In particolare, esse richiedono attenzione nella valutazione dei momenti flettenti nei pali di fondazione indotti dall’interazione cinematica (§7.11.5.2). In casi particolari (strutture alte e snelle, terreni molto deformabili) la Norma consiglia di tenere conto della SSI nella modellazione della struttura, e permette di schematizzare il contributo della fondazione mediante vincoli viscoelastici (§7.2.6). La mancanza di procedure semplificate per l’analisi SSI ne ha di fatto limitato la diffusione. L’unico aspetto considerato nella prassi progettuale è quello relativo alla rigidità della fondazione, modellata in maniera approssimata utilizzando molle alla Winkler. L’approccio ha in genere un effetto benefico sulla

risposta strutturale in termini di forze, dal momento che all'allungamento del periodo fondamentale della struttura è associata una riduzione dell'accelerazione spettrale di input (eccetto che per strutture estremamente rigide).

1.2.2.3. *Settore delle costruzioni civili: ponti*

Una caratteristica peculiare dei ponti è quella di avere supporti multipli indipendenti (pile e spalle), le cui fondazioni possono essere di diversa tipologia e su sottosuoli di caratteristiche diverse. Tale circostanza, in generale, aumenta il numero dei fenomeni in cui l'interazione con il terreno è significativa e, di conseguenza, ne complica l'analisi. Un aspetto cruciale per i ponti è legato alla caratterizzazione della variabilità spaziale del moto sismico.

Le metodologie di analisi descritte precedentemente per gli edifici possono essere rigorosamente applicate ai ponti soltanto nel caso di strutture isostatiche (ad. es. impalcati composti da campate semplicemente appoggiate e prive di soletta di continuità). In tali condizioni, poichè la struttura è costituita da parti indipendenti, ognuna con la sua fondazione, l'analisi SSI viene condotta separatamente per ciascuna sottostruttura. L'effetto della variabilità spaziale del moto può essere considerato in via approssimata combinando gli spostamenti ottenuti per ciascun supporto con quelli pseudo-statici dovuti alla variabilità dell'input.

Nel caso dei ponti continui, invece, la metodologia descritta non è più applicabile, in quanto presuppone che la fondazione possa essere caratterizzata dai soli sei gradi di libertà di un elemento rigido. Metodi approssimati per strutture da ponte non sono ancora stati sviluppati, e le principali normative internazionali si limitano a fornire indicazioni di natura generale. Analogamente a quanto descritto per gli edifici, l'unico aspetto di interazione che viene regolarmente preso in considerazione è la rigidità della fondazione. Diversi codici (ad. es. FEMA 356, ATC-40) contengono indicazioni per valutare i parametri di rigidità e resistenza per ciascuna tipologia di fondazione. Tale rigidità è tipicamente considerata nel modello numerico redatto per l'analisi strutturale.

La maniera più rigorosa di analizzare il sistema interagente si basa sulla modellazione diretta di struttura, fondazione e di una porzione sufficientemente grande di terreno; ciò consente di simulare la risposta dei singoli elementi adottando

appropriati legami costitutivi non lineari. Un applicazione dell'approccio diretto per l'analisi dell'*Humboldt Brigde* è documentata in Elgamal et al. (2008). Di recente, Lu, Mackie, ed Elgamal (2011), ricercatori afferenti al PEER, hanno sviluppato un software, in ambiente *OpenSees*, per l'analisi di affidabilità di ponti a singola campata con effetti di interazione. Il principale limite di tali modellazioni numeriche è che la massima frequenza (*cutoff*) per cui la soluzione si mantiene attendibile è condizionata dalla grandezza degli elementi finiti che modellano il terreno. Per cogliere il contributo delle armoniche ad alta frequenza è quindi necessario utilizzare elementi piccoli, aumentando così gli oneri computazionali richiesti. Nonostante l'elevata potenza di calcolo attualmente disponibile, ciò costituisce un serio limite a tali modellazioni.

Per condurre analisi SSI con un certo livello di attendibilità, è conveniente utilizzare un approccio per sottostrutture, attraverso cui è possibile trattare separatamente: (1) la definizione dell'input e della sua variabilità; (2) il complesso fondazione-terreno; (3) la risposta della struttura interagente con la fondazione.

Diverse strategie sono perseguibili per la definizione dell'input in condizioni di campo libero, e le principali normative internazionali forniscono le indicazioni necessarie in tal senso. In primo luogo, le componenti del moto di un punto di controllo sulla superficie del bedrock (*rock outcrop motion at control-point location*) sono rappresentate da accelerogrammi spetrocompatibili artificiali, simulati o naturali. La variabilità spaziale di tale moto è caratterizzata in base alla velocità apparente di propagazione delle onde (*wave passage*) e a una funzione di coerenza (*coherency function*). In ambito europeo, alcune indicazioni sono fornite in EN1998-2. Infine, il moto in superficie in corrispondenza di ciascuna fondazione è ottenuto attraverso analisi di risposta sismica locale, in genere effettuate in condizioni monodimensionali (come nell'approccio adottato nel software SHAKE). Gli effetti connessi alla effettiva geometria della superficie topografica, sebbene possano essere rilevanti, sono spesso trascurati, a meno di effettuare complesse analisi di risposta sismica locale in condizioni tridimensionali.

L'analisi del complesso fondazione-terreno viene normalmente effettuata separatamente per ciascun supporto. In tal modo, qualora sia necessario ricorrere a simulazioni numeriche, l'onere computazionale si mantiene limitato. L'analisi è volta

a determinare il moto di input in fondazione -diverso da quello free-field per effetto dell'interazione cinematica- e le matrici di impedenza di ciascuna fondazione. Il primo problema, talvolta trascurato, può essere risolto utilizzando le soluzioni dell'elastodinamica di cui al paragrafo precedente; nel caso in cui una soluzione analitica non sia sufficientemente rappresentativa, è necessario ricorrere alle simulazioni numeriche descritte con riferimento al settore delle centrali nucleari. Il calcolo delle matrici di impedenza può avvenire secondo due approcci [Tseng e Penzien (2000)]: il metodo elastodinamico e il metodo delle curve p - y . Il primo metodo è quello sviluppato per l'analisi delle centrali nucleari, e permette di tenere conto di massa, rigidità e smorzamento dei vari elementi del sistema interagente; la dinamica del sistema è colta in maniera rigorosa, ma non è ammessa una risposta non lineare del terreno. Il secondo metodo, sviluppato per l'analisi di strutture offshore, permette di tenere conto di plasticizzazioni del terreno, ma trascura gli effetti dinamici di interazione (radiation damping). Secondo Tseng e Penzien (2000), il primo approccio è adatto all'analisi globale della domanda imposta alla struttura, quando le nonlinearità attese per il terreno siano modeste; viceversa, il secondo approccio è adatto a valutazioni di capacità delle fondazioni e all'analisi della domanda quando si preveda che le plasticizzazioni locali del terreno diano un contributo prevalente (fondazioni su pali di piccolo-medio diametro).

Note le impedenze e il moto di input di ciascuna fondazione, l'analisi della struttura può essere condotta mediante modelli numerici ad elementi finiti, risolti nel dominio della frequenza o del tempo. Le impedenze della fondazione sono modellate attraverso vincoli viscoelastici, mentre l'eccitazione di input è costituita da una storia temporale di forze applicate ai nodi della fondazione (*driving forces*).

Quanto sopra riportato evidenzia la notevole complessità connessa con le analisi SSI di ponti, che in ogni caso necessitano di un certo numero di approssimazioni. Inoltre, quando non siano disponibili soluzioni analitiche per la soluzione del problema elastodinamico, è necessario ricorrere a modellazioni numeriche che spesso non sono alla portata del professionista. Tali fattori hanno contribuito ad una scarsa diffusione delle analisi SSI in ambito professionale.

1.3. Effetti dell'interazione sulla risposta strutturale

In generale, la risposta di un sistema interagente struttura-fondazione-terreno differisce da quella della sola struttura su base fissa a causa dei seguenti fenomeni: (1) modifica del moto di input in fondazione per effetti di *scattering*, (2) variazione delle frequenze proprie del sistema per effetto della deformabilità della fondazione, e (3) variazione dello smorzamento del sistema per effetto della radiazione di energia dalla struttura al terreno. È prassi comune riferirsi al primo fenomeno con il termine *interazione cinematica*, e ai restanti due con il termine *interazione inerziale*. È opportuno sottolineare che gli effetti locali, stratigrafici e topografici, di modifica del moto di input in condizioni di campo libero sono da considerarsi separatamente in quanto agirebbero allo stesso modo sul sistema interagente e sulla struttura a base fissa.

Per un'analisi qualitativa degli effetti di SSI sulla risposta sismica delle strutture, è conveniente riferirsi in primo luogo ad un sistema ideale costituito da una sovrastruttura deformabile, supportata da una fondazione rigida posta sulla superficie di un semispazio elastico omogeneo (si assume un contatto perfetto); il sistema è eccitato da onde elastiche viaggianti nel sottosuolo e/o da forze, di natura dinamica, direttamente applicate alla struttura e alla sua fondazione.

1.3.1. Effetti cinematici

La presenza di una fondazione rigida impone dei vincoli agli spostamenti dei punti in corrispondenza delle superfici a contatto con il terreno. I campi di spostamento, velocità e accelerazione generati dalle onde nel sottosuolo sono pertanto modificati rispetto a quelli che si avrebbero in assenza della fondazione. Tale fenomeno è a rigore l'espressione di un problema elastodinamico con condizioni al contorno miste di *scattering* (risposta di una fondazione ideale priva di massa ad onde elastiche). Nell'ambito di un approccio per sottostrutture, gli effetti cinematici sono descritti da una funzione di trasferimento, dipendente dalla frequenza, che lega il moto free-field di un punto di controllo a quello di input per la fondazione ideale (*coefficienti di scattering*). Gli effetti cinematici sono connessi alla variabilità spaziale del moto, all'inclinazione delle onde nel sottosuolo e all'approfondimento della fondazione.

La modellazione dell'azione sismica più comunemente adottata assume che le componenti accelerometriche di free-field siano il risultato di onde di volume P, SH o SV focalizzate in direzione verticale. Poichè, in tal caso, tutti i punti sulla superficie del semispazio sono soggetti alla stessa storia di spostamenti, il vincolo cinematico imposto dalla fondazione rigida superficiale è automaticamente soddisfatto. Conseguentemente, il moto di input in fondazione coincide con il moto free-field del punto di controllo (effetti cinematici nulli).

Modellazioni dell'azione sismica più avanzate consentono di tenere conto di una certa inclinazione della direzione di focalizzazione delle onde. In presenza di onde P, SH, SV non verticali, al generico istante di tempo lo spostamento di ciascun punto sulla superficie è diverso, in funzione della direzione e della velocità apparente di propagazione. Per poter soddisfare il vincolo di spostamento rigido imposto dalla fondazione, le onde subiscono rifrazioni e riflessioni (*scattering*); il moto rigido risultante della fondazione è il risultato di una "media" del moto di free-field di tutti i punti dell'interfaccia (*averaging effect*). È chiaro che la significatività dell'interazione cinematica dipende dalla variabilità del moto di free-field (lunghezza dell'onda incidente) in relazione ad una lunghezza caratteristica della fondazione; pertanto, gli effetti di scattering sono in generale significativi per fondazioni molto estese e/o alle alte frequenze (piccole lunghezze d'onda).

Lo scattering comporta, in generale, una riduzione delle componenti traslazionali del moto, maggiore alle alte frequenze, rispetto a quelle massime in condizioni di campo libero; per contro, si ha la nascita di componenti di moto rotazionali. In particolare, lo scattering di onde P e SV non verticali induce un moto della fondazione traslazionale verticale e di rocking intorno ad un asse orizzontale; lo scattering di onde SH non verticali induce un moto della fondazione traslazionale orizzontale e di torsione intorno a un asse verticale. L'effetto dello scattering di onde di superficie di tipo Rayleigh è lo stesso di quello di onde P e SV non verticali; quello connesso alle onde di Love è assimilabile a quello indotto da onde SH non verticali.

In presenza di una fondazione rigida immersa nel terreno, i fenomeni di scattering sono più significativi, poichè essi dipendono anche dalla variazione con la profondità del moto di free-field (*embedment effect*). Per fondazioni profonde, lo

scattering è significativo anche in presenza di onde focalizzate in direzione verticale. In presenza di fondazioni su pali, gli effetti cinematici possono essere rilevanti, e dipendono dai rapporti di rigidità relativa palo-terreno e dalla distanza tra i pali.

1.3.2. Effetti inerziali

Le forze di inerzia agenti su una sovrastruttura in movimento originano delle reazioni alla base che, a loro volta, provocano spostamenti e deformazioni della fondazione e del terreno. Se la struttura è eccitata per effetto di un moto alla base, tali spostamenti sono da intendersi come relativi rispetto a quelli di input. Grazie a tali deformazioni, parte dell'energia cinetica della sovrastruttura è trasmessa al terreno per radiazione. Il fenomeno, comunemente indicato come *interazione inerziale*, è espressione di un problema elastodinamico con condizioni al contorno miste di *radiation* (risposta di una fondazione ideale priva di massa ad azioni dinamiche ad essa applicate). Nell'ambito dell'approccio per sottostrutture, gli effetti inerziali sono descritti attraverso una matrice di impedenza, dipendente dalla frequenza, che lega gli spostamenti della fondazione alle forze applicate. La parte reale delle impedenze contiene i termini di rigidità della fondazione dovuti alla flessibilità del terreno; la parte immaginaria contiene i termini legati allo smorzamento per radiazione e isteretico del terreno.

Per un'analisi qualitativa dei principali fattori alla base dell'interazione inerziale, è conveniente riferirsi al modello rappresentato in Figura 1.1, costituito da una struttura monopiano, su fondazione rigida superficiale o parzialmente immersa in un semispazio elastico omogeneo. Con riferimento alle vibrazioni nel piano, il sistema possiede tre gradi di libertà: lo spostamento orizzontale relativo della sovrastruttura, lo spostamento orizzontale e la rotazione della fondazione. È utile definire alcuni parametri adimensionali che permettono di caratterizzare il sistema in relazione ai possibili effetti di interazione:

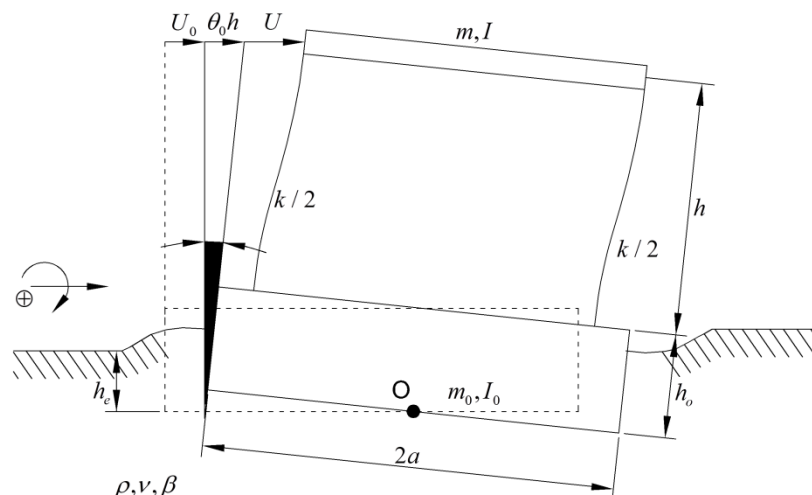


Figura 1.1 Modello di riferimento: struttura 1-DOF su fondazione rigida diretta su semispazio elastico omogeneo.

- 1) *Rigidezza relativa terreno-struttura*: è il parametro che maggiormente determina la significatività dell'interazione. Esso è in genere definito come:

$$\frac{\beta}{\omega d} \quad (1.1)$$

dove β è la velocità delle onde di taglio nel terreno, ω è la frequenza propria della struttura su base fissa, e d è una dimensione caratteristica della struttura o della fondazione. Esprimendo la frequenza in Hertz e utilizzando come dimensione caratteristica l'altezza della struttura, si ottiene il parametro d'onda utilizzato da Velestos & Meek (1974):

$$\sigma = \frac{\beta}{fh} \quad (1.2)$$

Tale parametro può essere esteso al caso di strutture multipiano, indicando con f e h rispettivamente la frequenza e la quota del baricentro delle forze di inerzia del modo fondamentale della struttura su base fissa. Dal momento che la condizione a base fissa corrisponde a $\sigma = \infty$, è lecito attendersi che la significatività degli effetti di interazione aumenti al diminuire di σ . Secondo Velestos e Meek (1974), gli effetti dell'interazione sono trascurabili quando $\sigma > 20$;

- 2) *Snellezza relativa della struttura* h/a , dove h è l'altezza della struttura e a il raggio della fondazione. Il parametro è un indice di snellezza: valori elevati di h/a corrispondono a strutture snelle, valori bassi a strutture tozze;
- 3) *Rapporto di approfondimento della fondazione* h_e/a , fornisce indicazioni sulle variazioni attese delle funzioni di impedenza per fondazioni immerse;
- 4) *Densità di massa struttura-terreno* $m/\rho\pi a^3$, dove m è la massa della struttura e $\rho\pi a^3$ è la massa di un volume di terreno di riferimento;
- 5) *Rapporto di massa fondazione-struttura* m_o/m , *Coefficiente di Poisson* ν , *Coefficiente di smorzamento viscoso della struttura su base fissa* ξ , sono altri parametri caratterizzanti il sistema.

A titolo esemplificativo, si considera la risposta di una struttura ad un grado di libertà, caratterizzata da una frequenza fondamentale ω_1 , supportata da una fondazione rigida su semispazio elastico. In Figura 1.2 è rappresentata la risposta in frequenza, in termini di spostamenti relativi normalizzati ($\omega_1^2 U_1$) della massa strutturale, per effetto di un'onda armonica alla base di ampiezza unitaria in accelerazione ($\ddot{U}_g = e^{i\omega t}$), per tre valori di rigidità relativa terreno-struttura ($\sigma = 3, 5, \infty$), e due valori di snellezza ($h/a = 1, 5$). La risposta in spostamenti relativi è direttamente correlabile al taglio alla base della struttura. Per effetto della flessibilità del terreno, la frequenza fondamentale del sistema interagente si riduce, al diminuire di σ , rispetto a quella della struttura su base fissa. L'ampiezza della risposta in risonanza può invece essere maggiore o minore rispetto a quella della struttura su base fissa, in funzione della snellezza h/a . Tale risultato è conseguenza di due meccanismi contrapposti: da un lato la presenza dello smorzamento per radiazione induce una diminuzione della risposta, dall'altro la flessibilità per rocking della fondazione induce un aumento della risposta, legata alla maggiore accelerazione a cui la massa strutturale è soggetta. Per strutture tozze il primo effetto è dominante, poichè il contributo alla risposta dato dal rocking è modesto e, allo stesso tempo, lo smorzamento per radiazione del modo traslazionale è in genere elevato. Per strutture snelle, invece, il secondo effetto è dominante, in quanto la risposta è principalmente dovuta alla componente di rocking, caratterizzata da basso

smorzamento per radiazione. Va comunque sottolineato che le considerazioni svolte non tengono conto dell'eventuale smorzamento materiale interno del terreno.

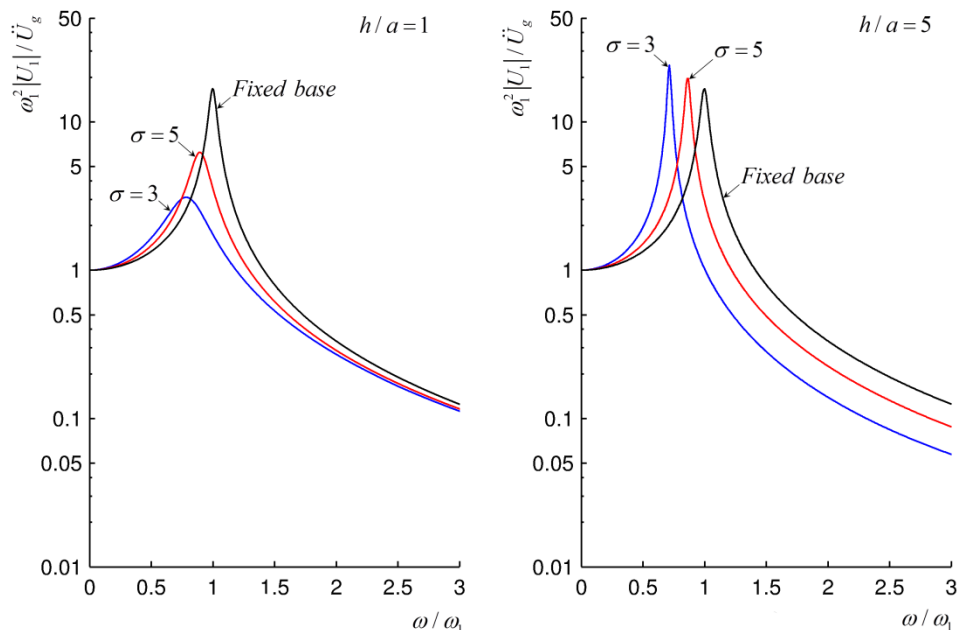


Figura 1.2 Risposta in frequenza di una struttura interagente al variare di σ e di h/a .

Come ulteriore esempio si considera un edificio multipiano, avente frequenza fondamentale su base fissa ω_1 e snellezza $h/a \approx 4$, soggetto ad un'onda armonica di ampiezza in spostamento unitaria ($U_g = e^{i\omega t}$). In Figura 1.3 è rappresentata la risposta in frequenza, in termini di spostamenti assoluti normalizzati dell'ultimo livello, per i casi $\sigma = 3, 5, \infty$. Gli effetti di interazione sulla risposta in corrispondenza della frequenza fondamentale del sistema sono analoghi a quelli osservati per la struttura ad un grado di libertà. Inoltre, è possibile osservare l'influenza dell'interazione sulla risposta dei modi superiori. Come osservato da Jennings e Bielak (1973), le frequenze di risonanza superiori a quella fondamentale subiscono modeste variazioni rispetto a quelle della struttura su base fissa. Tali variazioni possono essere di segno sia positivo che negativo [Hradilek e Luco (1970)]. È tuttavia importante evidenziare che l'ampiezza dei picchi di risonanza può risultare significativamente ridotta a causa dell'interazione.

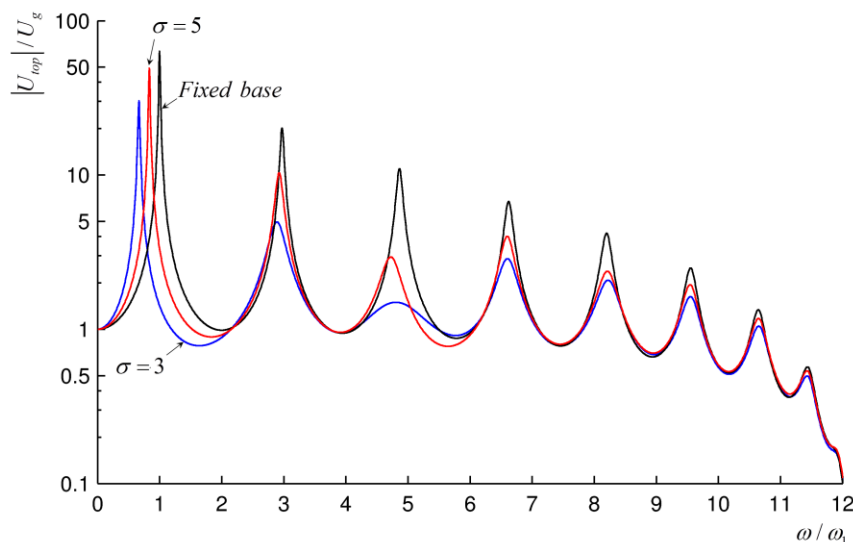


Figura 1.3 Risposta in frequenza in termini di spostamento assoluto all'ultimo livello di una struttura multipiano.

1.4. Obiettivi e contributi del lavoro

Uno dei metodi maggiormente diffusi per l'analisi della risposta di sistemi interagenti terreno-struttura è quello, approssimato, basato sulla classica decomposizione in modi ortogonali. Nonostante la mancanza di rigore analitico, connessa alla necessità di trascurare la dipendenza dalla frequenza delle funzioni di impedenza della fondazione e il contributo dei termini fuori diagonale della matrice di dissipazione modale, l'approccio permette di cogliere il significato fisico degli effetti di interazione e rappresenta una naturale estensione dell'analisi modale di strutture su base fissa, familiare alla gran parte degli ingegneri strutturisti.

Il presente lavoro riguarda principalmente l'applicazione dell'analisi modale classica a problemi di interazione terreno-struttura, e in particolare a problemi di vibrazioni accoppiate traslazione-rocking di strutture supportate da una fondazione rigida su un mezzo viscoelastico lineare. Gli obiettivi di una completa rivisitazione dell'approccio modale classico sono: (i) una migliore definizione dei limiti di validità dell'approccio; (ii) l'introduzione di misure quantitative degli errori associati al metodo; (iii) la formulazione di nuove semplici espressioni analitiche delle grandezze di interesse (frequenze proprie, coefficienti di smorzamento, fattori di partecipazione e forme modali del sistema) valide anche per i modi superiori e più

generali rispetto a quelle già disponibili; (iv) una migliore comprensione degli effetti di interazione.

I principali contributi del lavoro consistono in derivazioni analitiche e risultati numerici originali che, in aggiunta a quanto già noto, contribuiscono ad una migliore comprensione dell'approccio modale classico e ad una sua più semplice implementazione in ambito progettuale. In particolare: (i) vengono studiati gli effetti di interazione attraverso l'analisi parametrica delle caratteristiche modali del sistema in funzione della deformabilità del terreno, con riferimento ad una struttura campione a nove piani; (ii) i risultati di tale analisi vengono interpretati mediante confronto con diversi casi limite; (iii) viene formulato un nuovo modello equivalente ad un grado di libertà che consente di valutare la risposta in corrispondenza di ciascuna frequenza di risonanza, e che introduce nuovi elementi di comprensione degli effetti di interazione; (iv) vengono formulate nuove espressioni analitiche per stimare le grandezze modali di interesse a partire da quelle del modello su base fissa; (v) viene proposta e analizzata una procedura semplificata per l'analisi lineare statica e dinamica con spettro di risposta, applicabile alla progettazione di gran parte delle strutture ordinarie.

1.5. Letteratura di riferimento

L'analisi modale approssimata di problemi di interazione lineare terreno-struttura ha origine con i lavori fondamentali di Roesset et al (1973), Tsai (1974), Novak (1974), Rainer (1975), Bielak (1975, 1976), Clough and Mojtahedi (1976), Beredugo (1976) e Warburton e Soni (1977). Secondo tale approccio, i coefficienti di smorzamento modale corrispondono ai termini diagonali della matrice di dissipazione modale, ottenuta pre- e post-moltiplicando la matrice di dissipazione reale per gli autovettori del sistema non smorzato.

Roesset et al (1973) hanno prestato particolare attenzione ai termini di smorzamento viscoso ed isteretico. In seguito, Novak (1974) ha utilizzato l'approccio modale classico per l'analisi di fondazioni immerse nel terreno. Egli ha dapprima testato la procedura, con successo, nel caso di una struttura rigida parzialmente immersa nel terreno; quindi la ha utilizzata per studiare la risposta di una ciminiera all'azione di sisma e vento. Tsai (1974) ha proposto un approccio

iterativo per valutare i coefficienti di smorzamento effettivi, basato sulla corrispondenza tra le funzioni di trasferimento ottenute mediante un metodo esatto e quelle ottenute attraverso l'analisi modale. Inoltre, egli ha analizzato gli errori connessi all'uso di coefficienti di impedenza indipendenti dalla frequenza. Bielak (1975, 1976) ha formalizzato l'approccio modale classico e ha derivato i coefficienti di smorzamento in termini delle proprietà del terreno e della sovrastruttura. Egli ha inoltre dimostrato l'equivalenza tra tale definizione dei coefficienti di smorzamento e quella relativa al criterio energetico proposto da Jacobsen nel 1960. Chopra e Gutierrez (1974) hanno proposto un approccio alternativo basato sul metodo di Ritz.

Variazioni dell'approccio modale classico mediante l'uso dell'analisi modale complessa (metodo di Foss) sono state presentate da Bielak (1971), Jennings e Bielak (1973), Itoh (1973), Tsai et al (1975), e Novak and El Hifnawy (1983). La validità della decomposizione in modi ortogonali per problemi di SSI è stata studiata, tra gli altri, da Warburton and Soni (1977) e Vaidya et al (1986). Ulteriori contributi relativi al problema di strutture non classicamente smorzate, in contesti differenti da quelli dell'interazione terreno-struttura, sono stati forniti da Thomson et al (1974), Cronin (1976, 1990), Hasselman (1976), e Meirovitch e Ryland (1979).

Alcuni dei principali riferimenti alla base delle procedure semplificate, incorporate in svariati documenti normativi per l'analisi di strutture con SSI, sono i lavori di Veletos e Verbic (1973), Veletos e Meek (1974), e Veletos e Nair (1975). Tali pubblicazioni, oltre a fornire procedure per l'analisi preliminare e la progettazione, sono tutt'ora utili per comprendere gli effetti dell'interazione sulla risposta strutturale.

Nella letteratura scientifica, sussiste ancora una certa mancanza di consenso in merito all'accuratezza dell'approccio modale classico. Roesset et al (1973), dopo aver analizzato la risposta di tre cilindri rigidi supportati dal terreno, di un edificio a cinque piani su terreno soffice, e di un edificio a quindici piani su terreni di diverse caratteristiche, conclusero che l'approccio risultava ragionevolmente accurato nonostante la mancanza di rigore analitico. Ad esempio, per l'edificio a cinque piani, essi riscontrarono errori nell'ordine del 10% per il taglio alla base, e del 20% per le forze all'ultimo livello. Bielak (1975, 1976), considerando la risposta di una struttura a tre piani e di una a cinque piani supportate da terreni a diversa rigidità, trovò un

eccellente accordo tra le funzioni di trasferimento esatte e quelle approssimate, e concluse che l'analisi modale classica costituiva un metodo ragionevolmente accurato per determinare la risposta di sistemi interagenti. In contrasto, Tsai (1974), usando come caso studio una struttura di contenimento di un reattore nucleare, supportata da terreni di diversa rigidezza, riscontrò che l'approccio modale classico poteva portare ad errori massimi nell'ordine del 3% per le accelerazioni di picco e per le forze interne, ma solo se i coefficienti di smorzamento venivano adeguatamente selezionati facendo corrispondere i picchi della funzione di trasferimento esatta e di quella approssimata (modale). I coefficienti di smorzamento così calcolati potevano risultare significativamente inferiori (fino al 50%) rispetto a quelli ottenuti con altre procedure. Sulla stessa linea, Clough e Mojtahedi (1976) considerarono la risposta sismica di un sistema diga-fondazione e riscontrarono che le forze indotte dallo smorzamento potevano causare un significativo accoppiamento tra i modi di vibrare che non poteva essere ignorato come previsto dall'approccio modale classico. Nel caso in cui la roccia di fondazione fosse caratterizzata da alto smorzamento (nell'ordine del 40%), essi riscontrarono deviazioni nella deformazione della cresta dell'ordine del 15%. Warburton e Soni (1977) cercarono di spiegare tali differenze sulla base di una disuguaglianza che indicava quando trascurare i termini fuori diagonale della matrice di dissipazione modale non influenzava significativamente l'accuratezza dei risultati.

Nonostante il tema dell'analisi modale classica per problemi di interazione terreno-struttura sia un ambito di ricerca piuttosto maturo, diversi aspetti importanti rimangono irrisolti: (i) una migliore comprensione del campo di parametri fisici e di frequenze per cui l'approccio è valido; (ii) una migliore quantificazione degli errori introdotti attraverso l'approccio modale; (iii) lo sviluppo di semplici espressioni approssimate, simili a quelle proposte da Bielak (1971), Jennings e Bielak (1973), Veletsos e Meek (1974) per il modo fondamentale, per stimare le grandezze di interesse (frequenze, coefficienti di smorzamento, fattori di partecipazione e forme modali) per tutto l'intervallo di modi per cui l'analisi si mantiene valida; e (iv) la formulazione di migliori stime dei coefficienti di smorzamento modali che possano correggere gli errori eventualmente indotti dall'ipotesi di trascurare l'accoppiamento tra modi.

1.6. Organizzazione della tesi

Il presente lavoro di tesi è suddiviso in sette capitoli (in aggiunta alla presente introduzione), il cui contenuto è riassunto di seguito.

Il Capitolo 2 presenta la formulazione e soluzione del problema dinamico relativo ad una sovrastruttura, elastica-lineare, supportata da una fondazione rigida su mezzo viscoelastico. In primo luogo, viene introdotto l'approccio per sottostrutture, e vengono esaminati i singoli problemi elementari da cui esso è costituito. Vengono quindi formulate le equazioni del moto del sistema interagente, e vengono descritti diversi metodi di soluzione. Viene presentato un metodo di soluzione esatto, basato sull'analisi nel dominio della frequenza attraverso l'applicazione della sintesi di Fourier; la soluzione ottenuta con tale metodo è presa come riferimento per i successivi confronti con l'analisi modale. Infine, viene descritta l'analisi modale classica per problemi di SSI.

Il Capitolo 3 presenta la validazione degli algoritmi sviluppati mediante confronto con risultati di letteratura. Vengono analizzate, sia con il metodo esatto che con l'approccio modale, le due strutture, a tre e cinque piani, considerate da Bielak (1975). Le funzioni di trasferimento per diversi gradi di libertà della struttura così ottenute sono messe a confronto con quelle pubblicate dall'autore.

Il Capitolo 4 presenta uno studio dettagliato dell'approccio modale classico, basato sull'analisi di un edificio campione di nove piani. In primo luogo, il confronto della risposta stazionaria mostra chiaramente i limiti di applicabilità dell'analisi modale, la cui accuratezza diminuisce al crescere della flessibilità del terreno e della significatività degli effetti di interazione. Viene investigata l'origine della perdita di accuratezza, legata all'ipotesi di trascurare il contributo dei termini fuori diagonale della matrice di dissipazione modale. In seguito, vengono presentati i risultati di una dettagliata analisi parametrica. Le variazioni delle proprietà dinamiche del sistema (frequenze proprie, forme modali, coefficienti di smorzamento e fattori di partecipazione) sono analizzate in funzione della velocità delle onde di taglio nel terreno. Gli effetti di interazione sono interpretati confrontando le grandezze così ottenute con quelle relative a diversi casi limite (terreno perfettamente rigido e flessibile, sovrastruttura rigida). Viene introdotto un ulteriore modello ausiliario

(sovrastuttura fissa), che consente una maggiore comprensione del ruolo della rigidità della fondazione nel perturbare la risposta modale a base fissa.

Il Capitolo 5 presenta un nuovo modello equivalente a tre gradi di libertà che permette di approssimare la risposta del sistema nelle vicinanze di ciascuna frequenza di risonanza. Attraverso modello proposto, si dimostra che l'effetto dei modi a base fissa a frequenza inferiore a quella considerata può essere descritto attraverso un incremento della rigidità e dello smorzamento della fondazione; viceversa, l'effetto dei modi superiori è schematizzabile con un incremento della massa della fondazione. Il modello equivalente consiste in un oscillatore elementare supportato da una fondazione le cui matrici di massa, rigidità e smorzamento sono modificate rispetto a quelle originali. Il modello si rivela efficace nel calcolo della risposta del sistema, e fornisce nuovi elementi di comprensione della fisica del problema.

Il Capitolo 6 presenta l'applicazione di un'analisi perturbativa per la soluzione del classico problema agli autovalori per sistemi interagenti. Vengono derivate espressioni, approssimate al primo ordine, per il calcolo delle frequenze proprie, dei coefficienti di smorzamento e dei fattori di partecipazione del sistema interagente. Tali espressioni generalizzano quelle proposte da Bielak (1971, 1976), Jennings e Bielak (1973) e Veletsos and Meek (1974) per l'analisi del modo fondamentale di un modello piano. Le espressioni proposte sono state validate confrontando i risultati ottenuti con quelli forniti dalla soluzione numerica del problema agli autovalori; l'accuratezza della risposta stazionaria del sistema è stata esaminata mediante confronto con la soluzione esatta.

Il Capitolo 7 descrive le modalità attraverso cui i metodi precedentemente formulati possono essere utilizzati nella progettazione sismica di strutture ordinarie, considerando gli effetti di interazione terreno-struttura nell'ambito dell'analisi lineare statica e dinamica con spettro di risposta. Le indicazioni fornite, pur mantenendo un certo livello di rigore, hanno carattere prettamente applicativo, e si prestano ad essere incorporate in documenti normativi e linee guida. Vengono presentati una serie di grafici adimensionalizzati che consentono la valutazione immediata delle grandezze di interesse in funzione di pochi parametri caratteristici del sistema. Vengono infine presentati alcuni esempi applicativi, che mettono in

evidenza la maggiore generalità delle espressioni formulate nel presente lavoro rispetto a quelle già disponibili.

Le principali conclusioni del lavoro sono sintetizzate al Capitolo 8.

CAPITOLO 2

FORMULAZIONE E SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI INTERAZIONE LINEARE TERRENO-STRUTTURA

2.1. Generalità

Le equazioni del moto di un sistema interagente terreno-struttura possono essere formulate e risolte attraverso approcci differenti. Nel presente capitolo viene presentata una formulazione basata sull'approccio per sottostrutture formalizzato da Luco (1980), che verrà utilizzata estensivamente nel seguito del lavoro. Dopo una breve descrizione dell'approccio, vengono forniti elementi di comprensione dei singoli problemi-base oggetto di studio. Vengono formulate le equazioni fondamentali che governano un sistema dinamico composto da una sovrastruttura, supportata da una fondazione rigida, interagente con un terreno di fondazione deformabile. Le equazioni vengono quindi riorganizzate in diverse forme, in maniera da essere più facilmente utilizzabili per la soluzione del problema in oggetto. Sono infine descritti due metodi di soluzione: l'analisi nel dominio della frequenza e l'analisi modale classica basata sulla sovrapposizione di modi ortogonali. Il primo metodo fornisce una soluzione esatta del problema di interazione, potendo considerare in maniera rigorosa sia la dipendenza dalla frequenza dei coefficienti di impedenza, sia lo smorzamento dovuto alla radiazione di onde nel sottosuolo; il secondo metodo fornisce soltanto una soluzione approssimata e non rigorosa, dal

momento che considera coefficienti di impedenza costanti e trascura l'accoppiamento tra modi indotto dallo smorzamento per radiazione.

2.2. L'approccio per sottostrutture

In Figura 2.1 è rappresentato schematicamente il sistema interagente terreno-fondazione-struttura oggetto di studio. Esso è costituito da una struttura in elevazione, a comportamento elastico, supportata da una fondazione rigida, diretta o parzialmente immersa nel terreno, a sua volta interagente con il terreno di fondazione, schematizzato come un semispazio tridimensionale viscoelastico omogeneo o stratificato. Il sistema è eccitato da un campo di onde che si propagano nel sottosuolo con diversi angoli di incidenza e, eventualmente, da forze esterne direttamente applicate alla sovrastruttura e alla fondazione. Alcune delle suddette assunzioni possono essere rimosse attraverso opportune modifiche alla procedura.

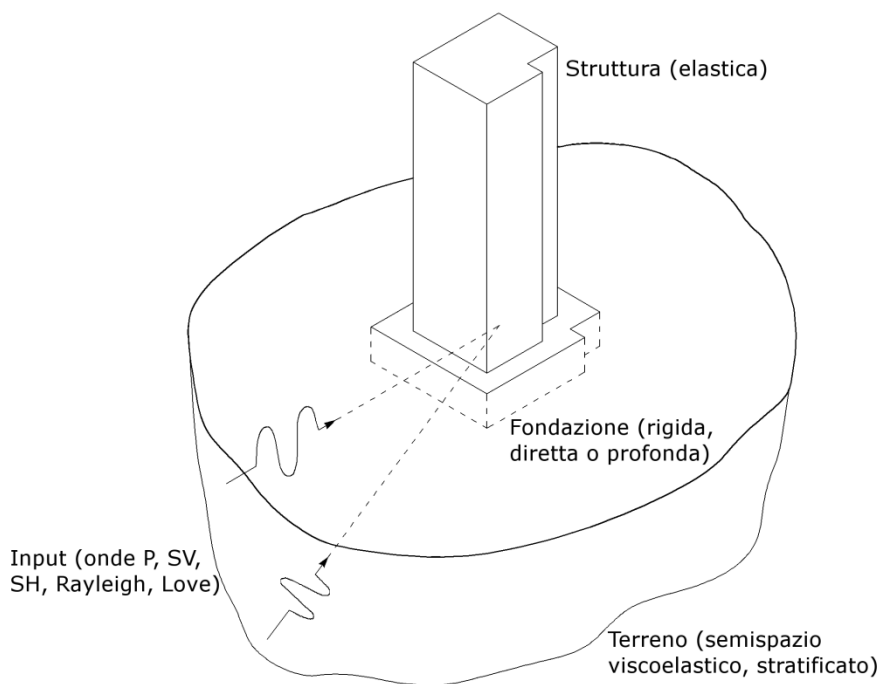


Figura 2.1 Sistema interagente terreno-fondazione-struttura.

Tipicamente, è possibile adottare due approcci per modellare e risolvere il problema di interazione. Il primo, noto come *approccio diretto*, consiste nel realizzare un unico modello numerico, in genere attraverso elementi finiti, di struttura, fondazione e terreno. La soluzione viene ottenuta, di norma, in un unico passo, mediante integrazione diretta delle equazioni del moto nel dominio del tempo.

I principali vantaggi dell'approccio diretto risiedono nella possibilità di modellare geometrie complesse e legami costitutivi non lineari. Per contro, le notevoli difficoltà di modellazione legate alla necessità di schematizzare il semispazio attraverso un dominio finito, nonché gli elevati oneri computazionali, ne limitano fortemente l'impiego nella pratica ingegneristica.

Il secondo metodo, qui esaminato e noto come *approccio per sottostrutture*, trae vantaggio del principio di sovrapposizione degli effetti conseguente all'ipotesi di linearità, e si basa su una suddivisione del sistema completo in una serie di sottosistemi più semplici. Il problema viene risolto in due passi: nel primo, gli elementi caratteristici della risposta di struttura, fondazione e terreno sono ottenuti indipendentemente; nella seconda fase, le risposte dei singoli elementi vengono combinate in modo da soddisfare la compatibilità di forze e spostamenti, e ricostruire così la risposta del sistema completo. Uno dei vantaggi dell'approccio è che l'analisi dei singoli componenti (sovrastuttura, fondazione, terreno) può essere effettuata secondo la particolare tecnica più appropriata. Inoltre, l'approccio fornisce una serie di risultati intermedi che permettono di acquisire una profonda comprensione degli effetti di interazione, oltre che una certa confidenza nei risultati ottenuti.

In Figura 2.2 sono schematizzati i diversi problemi base dell'approccio per sottostrutture. Tipicamente, ciascun problema base viene formulato e risolto nel dominio della frequenza, assumendo un'eccitazione e una risposta armoniche con dipendenza temporale del tipo $e^{i\omega t}$. Tale ipotesi consente notevoli semplificazioni analitiche senza perdita di generalità dei risultati. Infatti, nota la soluzione per un numero sufficientemente elevato di frequenze, la risposta transitoria del sistema può essere facilmente ricostruita attraverso una sintesi di Fourier.

Il primo problema base consiste nella determinazione dell'input sismico in condizioni di campo libero, ovvero nel calcolo della risposta di un deposito di terreno sotto l'azione del campo d'onde incidente, prima che lo scavo della fondazione venga eseguito. Nel caso standard di sottosuolo uniforme o stratificato orizzontalmente e onde piane, il moto in campo libero può essere caratterizzato attraverso: (1) le tre componenti del vettore spostamento $\{U_g\}$ di un punto caratteristico della superficie del semispazio, (2) la direzione di propagazione

dell'onda incidente (proiezione sull'orizzontale), e (3) la velocità apparente c nella direzione di propagazione (ovvero l'angolo di inclinazione rispetto alla verticale).

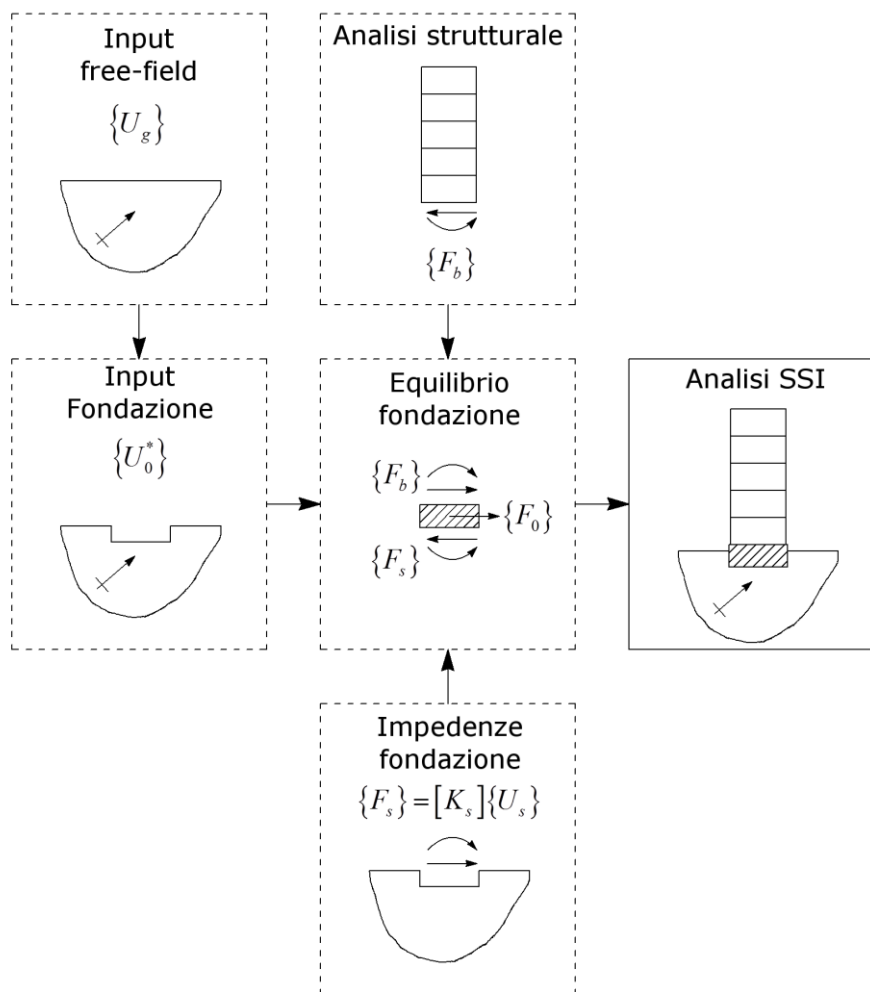


Figura 2.2 Problemi base dell'approccio per sottostrutture.

Il secondo problema base consiste nel calcolo della risposta della fondazione rigida, assunta priva di massa, sotto l'azione del campo d'onde incidente. Tale problema è mirato a determinare la modifica del moto di input, rispetto a quello in campo libero, dovuta al vincolo cinematico imposto dalla fondazione rigida all'interfaccia con il terreno (*interazione cinematica*). Gli effetti di *interazione inerziale*, dovuti all'inerzia della fondazione e della sovrastruttura vengono incorporati in un passo di analisi successivo. La risposta della fondazione ideale prende il nome di *moto di input in fondazione*, ed è descritta da un vettore

spostamento $\{U_o^*\}$, le cui sei componenti descrivono il moto rispetto ad un punto caratteristico O della fondazione.

Il terzo problema base consiste nel calcolo del legame forza-spostamento della fondazione ideale (rigida e priva di massa). Il legame è espresso da una trasformazione lineare nel dominio della frequenza, definita attraverso la matrice di impedenza della fondazione $[\bar{K}_s]$. I coefficienti della matrice sono grandezze complesse; la parte reale e quella immaginaria sono legate, rispettivamente, alla rigidezza e allo smorzamento della fondazione. I coefficienti di impedenza dipendono dalla frequenza di eccitazione, dalla geometria della fondazione e dalle proprietà del terreno. A seconda del metodo di soluzione adottato, il legame forza-spostamento della fondazione è espresso equivalentemente in termini di funzioni di impedenza o di flessibilità (*compliances*):

$$\{F_s\} = [\bar{K}_s] \{U_s\} \quad \text{ovvero} \quad \{U_s\} = [\bar{C}_s] \{F_s\} \quad (2.1)$$

dove $[\bar{K}_s(\omega)] = [\bar{C}_s(\omega)]^{-1}$. $\{F_s\}$ e $\{U_s\}$ sono, rispettivamente, i vettori di forze e di spostamenti rispetto al punto caratteristico O .

Il quarto problema base consiste nella determinazione delle forze $\{F_b\}$ trasmesse dalla struttura in elevazione alla fondazione. Tali azioni derivano sia dalle eventuali forze esterne direttamente applicate alla struttura, sia dalle forze di inerzia indotte dal moto alla base. Poichè, in questa fase, il moto risultante della fondazione non è ancora noto (è la soluzione del problema di interazione), due alternative sono possibili. Per strutture aventi un elevato numero di gradi di libertà, una volta caratterizzate le matrici di massa, rigidezza e smorzamento della sovrastruttura, è conveniente risolvere il problema agli autovalori della struttura su base fissa, e utilizzare le relative autosoluzioni per formulare una matrice di massa equivalente $[\bar{M}_b(\omega)]$. Tale matrice viene utilizzata per tenere conto degli effetti inerziali nella determinazione del moto totale della fondazione. Per strutture a ridotto numero di gradi di libertà, è altresì possibile portare in conto direttamente i gradi di libertà strutturali, oltre a quelli della fondazione, nel sistema di equazioni del moto da risolvere. I due approcci sono equivalenti da un punto di vista analitico, ma

differiscono per l'onere computazionale legato alle dimensioni delle matrici da invertire per ciascuna frequenza di analisi. Per maggiori dettagli si rimanda al successivo paragrafo §2.8.

A questo punto, formulati tutti gli elementi base per la soluzione del problema di interazione, è necessario imporre l'equilibrio della fondazione rigida, sotto l'effetto delle forze trasmesse dalla sovrastruttura $\{F_b\}$, delle forze di inerzia agenti sulla fondazione $\{F_o\}$, e delle forze trasmesse dal terreno a seguito delle deformazioni indotte dal moto della fondazione $\{F_s\}$. Imponendo le condizioni di equilibrio, si ricava il sistema di equazioni da cui è possibile ricavare il moto totale della fondazione e, in sequenza, tutte le altre grandezze di risposta.

L'approccio proposto può essere facilmente adattato al caso di fondazioni flessibili o fondazioni multiple, mediante opportune modifiche delle matrici di impedenza.

2.3. Moto di input in campo libero

Il primo passo per condurre l'analisi sismica di un sistema interagente consiste nella caratterizzazione del moto di input in condizioni di campo libero. La particolare rappresentazione utilizzata per l'input ha un effetto molto marcato sulla valutazione della risposta del sistema. È evidente che una caratterizzazione precisa e rigorosa è, all'attuale stato delle conoscenze, impossibile; pertanto, è necessario ricorrere a modellazioni approssimate che permettano di definire le tre componenti del moto di un punto di controllo appartenente al semispazio e di caratterizzarne la variabilità spaziale (in superficie e in profondità).

L'ipotesi alla base della maggior parte dei metodi oggi utilizzati per analizzare il sistema interagente è che l'eccitazione sismica possa essere rappresentata mediante onde piane, di compressione P e di taglio S, che si propagano in verticale. Tale modello di riferimento trascura la reale natura del moto di input, che è il risultato di una complessa interazione di diversi tipi di onde che arrivano in superficie secondo angoli di incidenza variabili. Per caratterizzare l'input in accordo a tale modello è necessario definire: (1) le tre componenti del moto di un punto di riferimento; (2) le velocità di propagazione delle onde nei diversi strati di terreno. In

genere, si assume che il punto di riferimento sia situato in profondità, sulla superficie del *bedrock* (*rock outcrop*). In conseguenza dell'ipotesi di onde piane verticali, tutti i punti appartenenti a superfici orizzontali (compresa la superficie libera) sono soggetti simultaneamente alla stessa storia di spostamenti, mentre la variazione del moto in profondità può essere ricavata mediante semplici analisi di propagazione monodimensionale. Tale modello rappresenta una ragionevole approssimazione per l'analisi di strutture compatte, caratterizzate da piccole dimensioni in pianta della fondazione.

Da un punto di vista operativo, l'azione sismica viene definita attraverso un insieme di componenti accelerometriche (due orizzontali e una verticale) che descrivono il moto all'outcrop. Le storie temporali devono essere compatibili con una serie di parametri dello scuotimento caratteristici del terremoto atteso al sito, e principalmente: magnitudo, distanza epicentrale, accelerazione, velocità e spostamento di picco al suolo, durata del segnale. Tali parametri possono essere definiti attraverso specifici studi di caratterizzazione sismica, ovvero utilizzando le mappe di scuotimento e gli spettri di risposta standard forniti dalle varie normative antisismiche. Le storie temporali compatibili possono essere ottenute con diverse modalità, principalmente attraverso: (1) la generazione di accelerogrammi artificiali, compatibili con un assegnato spettro di risposta di riferimento, (2) la generazione di accelerogrammi simulati, ottenuti modellando i meccanismi di sorgente e di propagazione, e (3) la selezione di registrazioni accelerometriche naturali. Un'analisi di risposta sismica locale in condizioni monodimensionali consente quindi di calcolare il moto in superficie e in profondità del semispazio.

La suddetta rappresentazione dell'input è tuttavia inadeguata nel caso di strutture estese in pianta, per cui è necessario caratterizzare anche la variabilità del moto sulle superfici orizzontali. Un modello a maggiore grado di complessità è quello rappresentato in Figura 2.3, secondo cui:

- una componente di moto orizzontale, nella direzione perpendicolare alla linea congiungente sito ed epicentro è rappresentata da un'onda SH equivalente, con velocità di propagazione apparente c_H . Tale onda rappresenta il contributo delle onde SH e delle onde di Love;

- l'altra componente orizzontale e quella verticale sono rappresentate da un'onda equivalente SV, con velocità di propagazione apparente c_v . Tale onda rappresenta il contributo delle onde P, SV e delle onde di Rayleigh.

Il modello necessita della definizione delle tre componenti del moto di un punto di controllo, di due velocità apparenti di propagazione e della direzione epicentrale. Il moto risultante dei punti della superficie è caratterizzato dalla stessa ampiezza massima e da differenze di fase; il moto dei punti in profondità varia sia in ampiezza che in fase. Questo modello di input è stato proposto da Luco e Sotiropoulos (1980), i quali hanno inoltre investigato la variabilità dei valori numerici delle velocità di propagazione apparente, e gli effetti indotti dalle onde non verticali sulla risposta di fondazioni rigide.

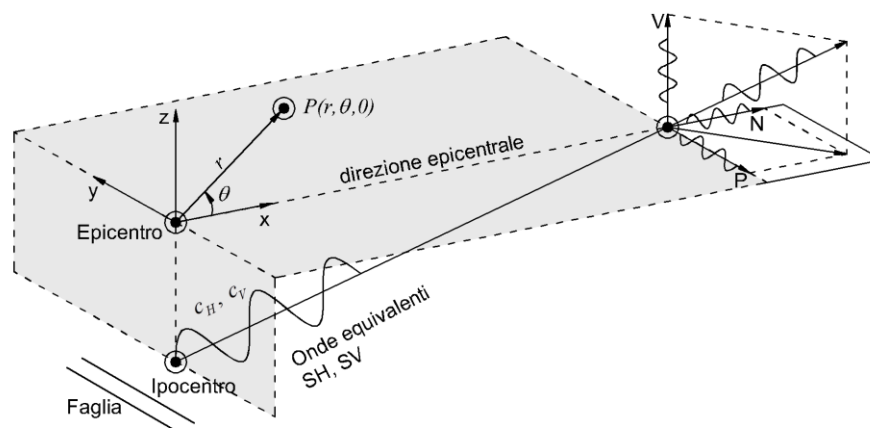


Figura 2.3 Input sismico basato sulla propagazione di onde equivalenti non verticali.

Dal punto di vista operativo, è prima necessario definire le tre componenti del moto $\{U_{go}(\omega)\} = (U_{ro}, U_{\theta o}, U_{zo})^T$ di un punto di controllo O sulla superficie del semispazio, di coordinate $(r_o, \theta_o, 0)$. Si utilizza un sistema di coordinate cilindrico, avente origine nell'epicentro, in cui r, θ, z rappresentano, rispettivamente, la distanza epicentrale, l'azimuth rispetto alla direzione epicentrale e la quota di un punto P del semispazio. Le componenti del moto di un punto P di coordinate $(r, \theta, 0)$ si calcolano attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned}
U_r(r, \theta, \omega) &\approx U_r(r_o, \theta_o, \omega) \exp[-i\omega(r - r_o)/c_H] \\
U_\theta(r, \theta, \omega) &\approx U_\theta(r_o, \theta_o, \omega) \exp[-i\omega(r - r_o)/c_V] \\
U_z(r, \theta, \omega) &\approx U_z(r_o, \theta_o, \omega) \exp[-i\omega(r - r_o)/c_V]
\end{aligned} \tag{2.2}$$

in cui le velocità di propagazione apparenti assumono valori normalmente compresi tra 2.5 e 5 Km/sec.

Per caratterizzare in maniera completa la variabilità spaziale del moto di input, è infine necessario considerare, oltre agli effetti primari dovuti al passaggio dell'onda, quelli secondari connessi con la dispersione delle onde nel percorso di propagazione. Si utilizza a tal fine un approccio basato sulla dinamica aleatoria, per cui il moto di un punto O della superficie può essere rappresentato come un processo stocastico, avente densità di potenza spettrale $S_o = |U_o(\omega)|^2$. La cross-correlazione del moto tra due punti i e j della superficie viene caratterizzata attraverso una funzione di coerenza:

$$\Gamma_{ij}(\omega) = \frac{S_{ij}(\omega)}{\sqrt{S_{ii}(\omega)}\sqrt{S_{jj}(\omega)}} \tag{2.3}$$

del tipo di quella proposta da Luco e Wong (1986) o da Der Kiureghian (1996).

Infine, per l'analisi di strutture aventi fondazioni multiple, quali i ponti, Tseng e Penzien (2000) hanno proposto una modellazione mista, in cui si considera la variabilità del moto sulla superficie del bedrock, dovuta alla propagazione non verticale delle onde al suo interno, e si calcola la risposta del deposito di terreno soprastante assumendo una propagazione monodimensionale in direzione verticale. La definizione dell'input prevede i seguenti passi:

1. si definiscono le tre componenti del moto di un punto di controllo sulla superficie del bedrock (rock outcrop), generando le storie temporali compatibili con i parametri di scuotimento locali;
2. si caratterizza la variabilità del moto a livello dell'outcrop, attraverso la definizione delle velocità di propagazione apparenti e della funzione di coerenza. Si generano così le storie temporali del moto a livello dell'outcrop in corrispondenza di ciascun supporto della struttura (pila e spalle);

3. si calcola il moto, in superficie e in profondità, in corrispondenza di ciascun supporto mediante un'analisi di propagazione monodimensionale.

Risulta evidente che i modelli descritti, anche se a crescente grado di complessità, non consentono di tenere conto adeguatamente di tutti i fenomeni che influenzano la caratterizzazione dell'azione sismica in superficie. In particolare, la variabilità dell'azione sismica connessa con l'effettiva distanza dalla sorgente è presa in conto solo implicitamente attraverso un'opportuna scelta delle componenti accelerometriche del punto di controllo. Inoltre, gli effetti topografici di rifrazione e riflessione delle onde connessi con l'orografia della superficie libera vengono generalmente ignorati.

2.4. Moto di input in fondazione

Il passo successivo in un'analisi di interazione è quello di determinare il moto di input della fondazione (*Foundation Input Motion, FIM*). Nel caso di fondazioni rigide, esso può essere interpretato come la risposta della fondazione rigida al campo di onde incidente. A questo livello di analisi, la fondazione è assunta priva di massa e la sovrastruttura non è presente. La risposta della fondazione può essere descritta attraverso il vettore spostamento:

$$\{U_o^*\} = (\Delta_x^*, \Delta_y^*, \Delta_z^*, \theta_x^*, \theta_y^*, \theta_z^*)^T \quad (2.4)$$

in cui Δ_x^*, Δ_y^* e Δ_z^* rappresentano le componenti traslazionali della risposta di un punto di riferimento O della fondazione, mentre θ_x^*, θ_y^* e θ_z^* rappresentano le componenti rotazionali intorno ad O .

La determinazione del moto di input in fondazione rappresenta un problema elastodinamico di *scattering*, con condizioni al contorno miste su forze e spostamenti. Con riferimento allo schema in Figura 2.4, il moto risultante $\{U(\bar{x})\}$ di un punto della fondazione $\bar{x} \in \Sigma$, può essere decomposto nella somma del contributo $\{U_g(\bar{x})\}$ relativo al campo di moto free-field e del contributo $\{U_s(\bar{x})\}$ relativo al moto di scattering. Poichè la fondazione è rigida, vale la relazione:

$$\{U(\bar{x})\} = \{U_g(\bar{x})\} + \{U_s(\bar{x})\} = [\alpha(\bar{x})] \{U_o^*\} \quad , \quad \bar{x} \in \Sigma \quad (2.5)$$

dove $[\alpha(\bar{x})]$ è una matrice di spostamento rigido. Le equazioni di campo del problema sono le equazioni di Navier nel volume del semispazio Ω . Le altre condizioni al contorno del problema di scattering sono:

- tensione nulla sulla superficie libera del semispazio $\{T(\bar{x})\}=0$, per $x \in \Sigma_f$;
- all'infinito, il campo di moto coincide con quello di campo libero $\{U_s(\bar{x})\} \rightarrow 0$, per $|\bar{x}| \rightarrow \infty$;
- risultante nulla delle forze agenti sulla fondazione:

$$\int_{\Sigma} [\alpha(\bar{x})]^T \{T_s(\bar{x})\} d\Sigma + \int_{\Sigma} [\alpha(\bar{x})]^T \{T_g(\bar{x})\} d\Sigma = 0 \quad (2.6)$$

dove $\{T_g(\bar{x})\}$ e $\{T_s(\bar{x})\}$ indicano, rispettivamente, il vettore della tensione associato al moto in campo libero e a quello di scattering.

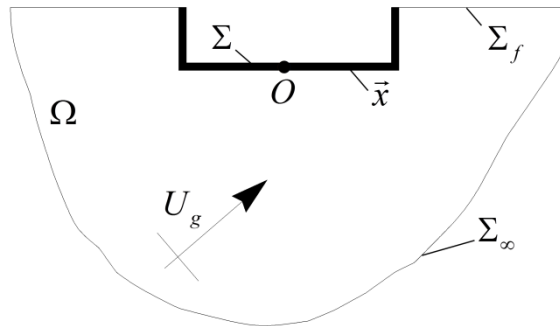


Figura 2.4 Schematizzazione del problema di scattering.

Una conveniente interpretazione fisica del problema di scattering può essere formulata considerando la risposta della fondazione ideale (rigida e priva di massa) ad onde sismiche e a forze esterne. Lo spostamento totale della fondazione è dato da:

$$\{U_o\} = \{U_o^*\} + [\bar{C}_s(\omega)] \{F_s\} \quad (2.7)$$

dove $\{F_s\}$ è il vettore delle forze esterne e $[\bar{C}_s(\omega)]$ è la matrice di flessibilità della fondazione. L'equazione (2.7) può essere scritta nella forma

$$\{U_o\} = [\bar{C}_s(\omega)] (\{F_s\} + \{F_s^*\}) \quad (2.8)$$

dove è stato introdotto il vettore delle *Driving Forces* $\{F_s^*\} = [\bar{K}_s(\omega)] \{U_o^*\}$. Nel caso in cui la fondazione viene mantenuta ferma sotto l'azione del campo d'onda

incidente, allora $\{U_o\} = 0$, e $\{F_s\} = -\{F_s^*\}$. Le *Driving Forces* rappresentano quindi le forze che il terreno esercita sulla fondazione, quando questa è mantenuta ferma e soggetta al campo di onde incidente. Il problema della determinazione del moto di input in fondazione può quindi essere riformulato come il problema di scattering delle onde incidenti, per effetto di un'intrusione rigida all'interno del semispazio che viene mantenuta fissa.

È possibile dimostrare [Luco (1986)] che tale problema è analogo a quello relativo alla valutazione delle impedenze della fondazione. Pertanto, gli stessi metodi utilizzati per il calcolo delle impedenze sono utilizzabili per la determinazione del moto di input in fondazione.

Il problema di scattering relativo a fondazioni rigide, dirette o immerse in terreni omogenei o stratificati è stato risolto, adottando approcci differenti, da un certo numero di autori. Risultati disponibili in letteratura forniscono grafici e tabelle dei coefficienti di scattering che consentono di determinare il moto di input in fondazione a partire da quello in campo libero. La relazione è tipicamente espressa nella forma:

$$\{U_o^*\} = [S(\omega)]\{U_g\} \quad (2.9)$$

dove $[S(\omega)]_{6 \times 3}$ è la matrice di scattering e $\{U_g\}$ è il vettore delle componenti del moto in campo libero. Tra le soluzioni di letteratura, si ricordano: Luco e Wong (1987) per fondazioni di diversa tipologia immerse in un semispazio stratificato, Luco e Mita (1987) per la risposta di fondazioni circolari sulla superficie del semispazio, Mita e Luco (1989) per fondazioni quadrate immerse in un semispazio, Wong e Luco (1978) per la risposta di fondazioni rettangolari ad onde non verticali.

In generale, il moto di input in fondazione dipende dalla geometria della fondazione, dalle caratteristiche del terreno e da quelle del moto in campo libero. Alcune considerazioni qualitative possono essere effettuate, distinguendo il caso delle fondazioni superficiali da quello delle fondazioni immerse nel terreno.

Per fondazioni superficiali soggette a onde verticali, gli effetti di scattering sono nulli: poichè tutti i punti della superficie sono soggetti alla stessa storia di spostamenti, il moto di free-field automaticamente soddisfa anche il vincolo

cinematico imposto dalla fondazione rigida. Il moto di input della fondazione coincide dunque con quello di campo libero.

Nel caso di eccitazione composta da onde non verticali, il moto di input in fondazione è caratterizzato da una riduzione dell'ampiezza delle componenti traslazionali rispetto a quelle del moto di input, senza una sostanziale variazione della fase; tale riduzione è più marcata alle alte frequenze. Alla riduzione delle componenti traslazionali è però associata l'introduzione di componenti rotazionali, assenti in condizioni di campo libero. In particolare, le onde SH non verticali possono indurre una significativa componente torsionale, mentre le onde non verticali di tipo P e SV possono indurre marcate componenti di rotazione attorno agli assi orizzontali. Le componenti rotazionali sono approssimativamente 90° fuori fase rispetto alle relative componenti traslazionali. L'effetto delle onde di Rayleigh non verticali è simile a quello delle onde P e SV. Tipicamente, la riduzione delle componenti traslazionali è poco influenzata dai fattori di forma della fondazione, mentre le componenti rotazionali dipendono fortemente dalla dimensione della fondazione rispetto alla direzione di propagazione delle onde.

Effetti cinematici analoghi possono essere riscontrati per fondazioni rigide immerse nel terreno. Rispetto al caso delle fondazioni superficiali, la riduzione delle componenti traslazionali e la nascita di quelle rotazionali si hanno anche in presenza di onde che si propagano in verticale. Inoltre, la risposta di rocking può essere molto marcata in funzione dell'approfondimento della fondazione.

2.5. Impedenze della fondazione

Il successivo problema fondamentale dell'approccio per sottostrutture è la valutazione della matrice di impedenza $[\bar{K}_s]$ (o di flessibilità $[\bar{C}_s] = [\bar{K}_s]^{-1}$) della fondazione. Nel caso di una fondazione rigida tale matrice, di dimensioni 6×6 , lega il vettore delle forze generalizzate $\{F_s\} = (F_{sx}, F_{sy}, F_{sz}, M_{sx}, M_{sy}, M_{sz})^T$ che la fondazione esercita sul terreno al vettore degli spostamenti generalizzati della fondazione $\{U_s\} = (U_{sx}, U_{sy}, U_{sz}, \theta_{sx}, \theta_{sy}, \theta_{sz})^T$. Forze, momenti, spostamenti e rotazioni sono relativi ad un punto di controllo O della fondazione rigida.

La determinazione della matrice di impedenza della fondazione rappresenta un problema elastodinamico di *radiation*, con condizioni al contorno miste su forze e spostamenti. Poichè la fondazione è rigida, vale la relazione:

$$\{U_s(\bar{x})\} = [\alpha(\bar{x})]\{U_s\}, \quad \bar{x} \in \Sigma \quad (2.10)$$

Le equazioni di campo del problema sono le equazioni di Navier nel volume del semispazio Ω . Le altre condizioni al contorno sono:

- tensione nulla sulla superficie libera del semispazio $\{T(\bar{x})\} = 0$, per $x \in \Sigma_f$;
- all'infinito, il campo di moto coincide con quello di campo libero $\{U_s(\bar{x})\} \rightarrow 0$, per $|\bar{x}| \rightarrow \infty$;
- risultante delle tensioni agenti sulla fondazione pari alle forze applicate:

$$\int_{\Sigma} [\alpha(\bar{x})]^T \{T_s(\bar{x})\} d\Sigma = \{F_s\} \quad (2.11)$$

dove $\{T_s(\bar{x})\}$ indica il vettore della tensione nel punto \bar{x} .

Il problema descritto corrisponde alla determinazione della risposta della fondazione rigida soggetta alle forze applicate $\{F_s\}$ in assenza di input sismico. Il vettore della tensione $\{T_s(\bar{x})\}$, soluzione del problema di scattering, può essere espresso come:

$$\{T_s(\bar{x})\} = [\Gamma_s(\bar{x})]\{U_s\} \quad (2.12)$$

in cui le colonne della matrice $[\Gamma_s(\bar{x})]$ rappresentano la tensione nel punto \bar{x} indotta da una variazione unitaria del corrispondente grado di libertà della fondazione. Sostituendo la (2.12) nella (2.11), si ricava la relazione forza-spostamento della fondazione:

$$\{F_s\} = [\bar{K}_s]\{U_s\}, \quad \text{ovvero} \quad \{U_s\} = [\bar{C}_s]\{F_s\} \quad (2.13)$$

in cui:

$$[\bar{K}_s] = \int_{\Sigma} [\alpha(\bar{x})]^T [\Gamma_s(\bar{x})] d\Sigma \quad (2.14)$$

è la matrice di impedenza della fondazione.

Il problema di radiation relativo a fondazioni rigide, dirette o immerse in terreni omogenei o stratificati è stato risolto, adottando approcci differenti, da un certo numero di autori. Risultati disponibili in letteratura forniscono grafici e tabelle per la determinazione dei coefficienti di impedenza. Il generico coefficiente è tipicamente espresso nella forma:

$$\bar{K}_{ij} = Ga(k_{ij} + ia_0 c_{ij}) \quad (2.15)$$

dove G è il modulo caratteristico di rigidezza a taglio del terreno, a è una dimensione caratteristica della fondazione, $a_0 = \omega a / \beta$ è una frequenza normalizzata, e $k_{ij}(\omega)$ e $c_{ij}(\omega)$ sono i coefficienti di impedenza normalizzati (dipendenti dalla frequenza). Nel caso di fondazioni aventi due assi di simmetria, la matrice di impedenza assume la forma:

$$[\bar{K}_s] = Ga \begin{bmatrix} \bar{K}_{HH}^{xz} & 0 & 0 & 0 & -a\bar{K}_{HM}^{xz} & 0 \\ 0 & \bar{K}_{HH}^{yz} & 0 & a\bar{K}_{HM}^{yz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{K}_{VV} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a\bar{K}_{HM}^{yz} & 0 & a^2\bar{K}_{MM}^{xz} & 0 & 0 \\ -a\bar{K}_{HM}^{xz} & 0 & 0 & 0 & a^2\bar{K}_{MM}^{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{K}_{TT} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Il calcolo della matrice di impedenza per fondazioni rigide di varia tipologia è stato affrontato da numerosi ricercatori adottando tecniche di soluzione differenti. Soluzioni analitiche in forma chiusa sono disponibili soltanto per alcune geometrie di fondazione e per particolari condizioni di carico [Luco (1976); Apsel e Luco (1976)]. Altre soluzioni sono state ricavate attraverso formulazioni analitiche basate su equazioni integrali, risolte attraverso metodi di integrazione numerica [Apsel e Luco (1987)]. Inoltre, grazie allo sviluppo di speciali contorni non-riflettenti, avviato da Lysmer e Kuhlemeyer (1969), diversi autori hanno proposto soluzioni ottenute attraverso il metodo degli elementi finiti. Una rassegna completa dei principali lavori è riportata nello stato dell'arte.

In generale, la matrice di impedenza della fondazione dipende dalla sua geometria, dalle caratteristiche del terreno e dalla frequenza di eccitazione. Vengono

di seguito riportate alcune indicazioni qualitative sulla variabilità delle impedenze per le condizioni più comuni riscontrabili in pratica.

Nel caso di fondazioni superficiali su semispazio omogeneo, la dipendenza dalla frequenza è più marcata per i termini di rigidità verticale e di rocking. L'accoppiamento traslazione-rocking è poco significativo. Lo smorzamento per radiazione assume valori piuttosto elevati per i modi traslazionali (orizzontale e verticale), mentre è basso per quelli rotazionali (rocking e torsione). Lo smorzamento interno del materiale ha effetti significativi sulle impedenze, e comporta una diminuzione della rigidità alle alte frequenze e un aumento dello smorzamento alle basse frequenze (al limite, tende a ∞ per $\omega \rightarrow 0$).

Nel caso di fondazioni immerse in un semispazio omogeneo (altezza di approfondimento h_e), le reazioni del terreno sulla superficie laterale della fondazione hanno un notevole effetto di incremento della rigidità e dello smorzamento. Inoltre, i termini di accoppiamento della matrice di impedenza sono più significativi. Un aspetto cruciale delle fondazioni immerse è la definizione della superficie laterale effettivamente a contatto con il terreno. In funzione delle modalità costruttive e delle proprietà del terreno superficiale, infatti, l'area delle pareti della fondazione a perfetto contatto con il terreno è spesso minore della superficie di contatto nominale. Specialmente negli strati di terreno superficiali, possono aversi scorrimenti e separazioni che hanno l'effetto di ridurre rigidità e smorzamento della fondazione. Al limite, quando il contatto laterale è scarso per tutta l'altezza della fondazione, le impedenze corrispondono a quelle di una fondazione superficiale posta alla profondità h_e .

La presenza di un contrasto di rigidità del terreno ad una profondità h/a relativamente bassa ha un marcato effetto sui coefficienti di impedenza. Tale situazione è rappresentativa della presenza di uno strato di terreno deformabile supportato da uno strato di roccia. In genere, si ha una marcata dipendenza dalla frequenza delle funzioni di impedenza, che risultano caratterizzate da picchi e valli indotti da fenomeni di risonanza in prossimità delle frequenze naturali dello strato deformabile. Gli effetti del layering sono più pronunciati per i termini traslazionali; la profondità critica dello strato rigido, oltre la quale il sottosuolo può essere

assimilato ad un semispazio omogeneo, è maggiore per i modi traslazionali. Alle basse frequenze, la presenza dello strato rigido induce un aumento dei coefficienti di rigidezza e una drastica diminuzione dei coefficienti di smorzamento. La diminuzione dello smorzamento per radiazione è dovuta alla presenza del bedrock che non permette alle onde a bassa frequenza di fuoriuscire dallo strato deformabile. In pratica, per frequenze minori delle corrispondenti frequenze proprie dello strato deformabile, lo smorzamento per radiazione è trascurabile per tutti i modi di vibrazione della fondazione. Per frequenze maggiori delle frequenze proprie dello strato, i valori dei coefficienti di smorzamento oscillano intorno a quelli relativi al semispazio.

Il caso di una fondazione immersa in un terreno la cui rigidezza aumenta con la profondità in maniera continua presenta analogie al caso di strato elastico su bedrock. L'aumento della rigidezza del terreno con la profondità comporta un incremento dei termini di rigidezza e una drastica diminuzione dello smorzamento per radiazione alle basse frequenze. Infatti, la presenza di uno strato rigido non è strettamente necessaria affinché si abbia riflessione delle onde in profondità. In funzione del gradiente di variazione della rigidezza del terreno e della frequenza di eccitazione, si crea uno strato riflettente fittizio assimilabile ad un bedrock. Alle alte frequenze, invece, la risposta della fondazione coincide con quella che si avrebbe in un semispazio omogeneo con rigidezza pari a quella dello strato superficiale.

2.6. Struttura in elevazione

Uno dei vantaggi dell'approccio per sottostrutture è che la caratterizzazione della sovrastruttura avviene in maniera indipendente dalla soluzione del problema di interazione. Di norma, la struttura in elevazione viene modellata e analizzata come un sistema discreto mediante il metodo degli elementi finiti.

La sovrastruttura è discretizzata in un insieme di L masse nodali collegate da elementi elastici. La sua configurazione deformata è descritta dal vettore $\{U_b\} = \left(\{u_1\}^T, \{u_2\}^T, \dots, \{u_L\}^T \right)^T$, di dimensioni $N \times 1$, ($N = 6L$), contenente gli spostamenti relativi generalizzati dei nodi $\{u_i\} = \left(\Delta_{ix}, \Delta_{iy}, \Delta_{iz}, \theta_{ix}, \theta_{iy}, \theta_{iz} \right)^T$ rispetto ad un sistema di riferimento solidale alla fondazione rigida. Il vettore degli spostamenti

assoluti della sovrastruttura $\{U_{bt}\}$, che descrive il moto dei nodi rispetto ad un sistema di riferimento esterno inerziale, si ottiene sommando al vettore degli spostamenti relativi il contributo del moto rigido della struttura indotto dagli spostamenti della fondazione:

$$\{U_{bt}\} = [\alpha]\{U_o\} + \{U_b\} \quad (2.17)$$

dove $\{U_o\} = (\Delta_{ox}, \Delta_{oy}, \Delta_{oz}, \theta_{ox}, \theta_{oy}, \theta_{oz})^T$ è il vettore degli spostamenti assoluti generalizzati di un punto caratteristico O della fondazione, e $[\alpha]$ è una matrice di spostamento rigido, di dimensioni $N \times 6$, data da:

$$[\alpha]^T = ([\alpha_1]^T, [\alpha_2]^T, \dots, [\alpha_L]^T) \quad (2.18)$$

dove:

$$[\alpha_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_i & -y_i \\ 0 & 1 & 0 & -z_i & 0 & x_i \\ 0 & 0 & 1 & y_i & -x_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

in cui (x_i, y_i, z_i) sono le coordinate dell' i -esimo nodo della struttura rispetto ad un sistema di riferimento solidale con la fondazione e avente origine nel punto caratteristico O .

Utilizzando tali definizioni, il sistema di equazioni del moto della struttura in elevazione, soggetta al moto alla base $\{U_o\}$ e alle forze esterne $\{F_b^e\}$ risulta:

$$[M_b]\{\ddot{U}_b\} + [C_b]\{\dot{U}_b\} + [K_b]\{U_b\} = \{F_b^e\} - [M_b][\alpha]\{\ddot{U}_o\} \quad (2.20)$$

dove $[M_b], [C_b], [K_b]$ sono le matrici di massa, smorzamento e rigidezza della sovrastruttura su base fissa. Le matrici di massa e rigidezza possono essere costruite, in maniera classica, attraverso un modello ad elementi finiti della struttura su base fissa. Diverse opzioni sono possibili per la costruzione della matrice di smorzamento. È possibile formulare la matrice di smorzamento come proporzionale alle matrici di

massa e rigidezza, attraverso i classici modelli di Rayleigh o di Caughey. Alternativamente, è possibile caratterizzare le proprietà di smorzamento strutturale definendo opportuni coefficienti di smorzamento modale.

Una serie di vantaggi nella formulazione e soluzione del problema di interazione possono essere conseguiti applicando al sistema (2.20) la classica trasformazione modale relativa alla struttura a base fissa. Sia $\{\phi_i\}$ l' i -esimo modo e ω_i la corrispondente frequenza propria della sovrastruttura su base fissa, risultanti dalla soluzione del problema agli autovalori:

$$[K_b]\{\phi_i\} = \omega_i^2 [M_b]\{\phi_i\} \quad (2.21)$$

Il vettore degli spostamenti relativi della sovrastruttura può essere rappresentato nello spazio modale come:

$$\{U_b\} = [\Phi]\{\eta\} \quad (2.22)$$

dove la matrice modale $[\Phi]$ è normalizzata in modo che $[\Phi]^T [M_b] [\Phi] = [I]$. In assenza di forze esterne, utilizzando la trasformazione (2.22) e pre-moltiplicando per $[\Phi]^T$, l'equazione (2.20) può essere scritta come:

$$[I]\{\ddot{\eta}\} + [2D\Omega]\{\dot{\eta}\} + [\Omega^2]\{\eta\} = [\Phi]^T \{F_b^e\} - [\beta]^T \{\ddot{U}_o\} \quad (2.23)$$

in cui $[D] = [\xi_i]$ e $[\Omega] = [\omega_i]$ sono matrici diagonali contenenti rispettivamente i coefficienti di smorzamento modale e le frequenze proprie della sovrastruttura su base fissa, e $[\beta] = [\alpha]^T [M_b] [\Phi]$ è la corrispondente matrice dei coefficienti di partecipazione. Un vantaggio di tale rappresentazione è che le proprietà di smorzamento della sovrastruttura possono essere specificate in termini di coefficienti di smorzamento modale ξ_i . È opportuno sottolineare che la matrice di smorzamento nello spazio normale può essere ricostruita attraverso la relazione:

$$[C_b] = [M_b] [\Phi] [2D\Omega] [\Phi]^T [M_b] \quad (2.24)$$

Per la successiva formulazione delle equazioni del moto del sistema interagente, è necessario calcolare il vettore delle forze generalizzate $\{F_{bf}\}$ che la sovrastruttura esercita sulla fondazione. Tali forze sono date dalla seguente relazione:

$$\{F_{bf}\} = [\alpha]^T \{F_b^e\} - [\alpha]^T [M_b] \{\ddot{U}_b\} = [\alpha]^T \{F_b^e\} - [\alpha]^T [M_b] (\{\ddot{U}_b\} + \{\ddot{U}_o\}) \quad (2.25)$$

2.7. Formulazione del problema di interazione

Si considera il problema, schematizzato in Figura 2.1, di vibrazioni forzate di una struttura, lineare ed elastica, supportata da una fondazione rigida poggiante su di un mezzo visco-elastico lineare. Il sistema è eccitato da onde elastiche che si propagano all'interno del semispazio e/o da forze esterne direttamente applicate ad esso. La sovrastruttura è discretizzata in un insieme di L masse nodali collegate da elementi elastici; la fondazione può essere parzialmente immersa nel terreno; il sottosuolo è rappresentato da un semispazio continuo tridimensionale. Il moto della sovrastruttura, governato dal sistema (2.20), è indotto dalle forze esterne applicate e dal moto della fondazione descritto dal vettore:

$$\{U_o\} = \{U_o^*\} + \{U_s\} \quad (2.26)$$

dove $\{U_o^*\}$ è il vettore del moto di input della fondazione, e $\{U_s\} = (\Delta_{sx}, \Delta_{sy}, \Delta_{sz}, \theta_{sx}, \theta_{sy}, \theta_{sz})^T$ è il vettore degli spostamenti relativi generalizzati della fondazione rispetto al moto di input. In altre parole, il moto della fondazione rispetto ad un sistema di riferimento inerziale può essere decomposto in due contributi: (1) il moto di input $\{U_o^*\}$, dovuto al campo d'onde nel semispazio e che tiene conto dei fenomeni di scattering, e (2) il moto aggiuntivo $\{U_s\}$, dovuto alle deformazioni del terreno provocate dalle forze trasmesse dalla sovrastruttura e dalla fondazione a causa della loro inerzia. Il primo contributo rappresenta l'interazione cinematica, il secondo l'interazione inerziale.

Per formulare le equazioni del moto del sistema interagente, è necessario imporre l'equilibrio della fondazione rigida, sotto l'effetto delle forze trasmesse dalla sovrastruttura, delle forze trasmesse dal terreno, delle forze di inerzia e di quelle esterne agenti sulla fondazione stessa. Con riferimento al free-body diagram di

Figura 2.5, utilizzando le relazioni (2.25) e (2.26), l'equilibrio della fondazione è espresso come:

$$\begin{aligned} ([M_o] + [\alpha]^T [M_b]) \{\ddot{U}_o\} + [C_s] \{\dot{U}_o\} + [K_s] \{U_o\} + [\alpha]^T [M_b] \{\ddot{U}_b\} = \dots \\ \dots = \{F_o^e\} + [\alpha]^T \{F_b^e\} + [C_s] \{\dot{U}_o^*\} + [K_s] \{U_o^*\} \end{aligned} \quad (2.27)$$

dove $[M_o]$ è la matrice di massa della fondazione, $[K_s] = \text{Re}([\bar{K}_s])$, e $[C_s] = 1/\omega \cdot \text{Im}[\bar{K}_s]$.

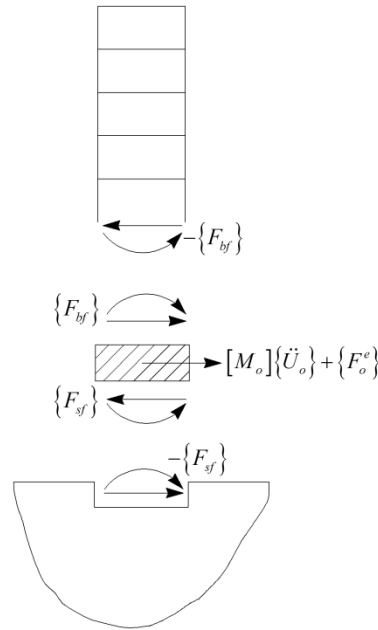


Figura 2.5 Equilibrio della fondazione.

Combinando l'equazione (2.27) e la (2.20), il sistema di equazioni che governa il moto della sovrastruttura e della fondazione risulta:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_b & M_b \alpha \\ \alpha^T M_b & M_o + \alpha^T M_b \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_b \\ \ddot{U}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_b & 0 \\ 0 & C_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_b \\ \dot{U}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_b & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_b \\ U_o \end{Bmatrix} = \dots \\ \dots = \begin{Bmatrix} F_b^e \\ F_o^e + \alpha^T F_b^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ C_s \dot{U}_o^* + K_s U_o^* \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

dove le parentesi indicanti matrici e vettori sono omesse per semplicità di notazione. Il primo termine del secondo membro della (2.28) rappresenta il contributo alla forzante delle azioni esterne agenti rispettivamente sulla struttura e sulla fondazione; il secondo termine rappresenta le forze di inerzia indotte dal moto alla base. Si

ricorda che $\left([C_s]\{\dot{U}_o^*\} + [K_s]\{U_o^*\}\right)$ è il vettore delle *Driving Forces*. La soluzione del sistema (2.28) consente di determinare la risposta del sistema interagente, in termini di deformazioni della sovrastruttura $\{U_b\}$ relative al moto della fondazione, e del moto assoluto della fondazione $\{U_o\}$.

Una formulazione talvolta più conveniente delle equazioni del moto [Lee e Wesley (1971); Luco (1980)] può essere derivata esprimendo la parte inferiore del sistema (2.28) in termini degli spostamenti della fondazione $\{U_s\}$ relativi al moto di input. Utilizzando la (2.26), si ha il seguente risultato fondamentale:

$$\begin{bmatrix} M_b & M_b \alpha \\ \alpha^T M_b & M_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_b \\ \ddot{U}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_b & 0 \\ 0 & C_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_b \\ \dot{U}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_b & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_b \\ U_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_b^e \\ F_o^e + \alpha^T F_b^e \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} M_b \alpha \\ M_{oo} \end{bmatrix} \{\ddot{U}_o^*\} \quad (2.29)$$

in cui $[M_{oo}] = [M_o] + [\alpha]^T [M_b] [\alpha]$. L'equazione (2.29) rappresenta una generalizzazione di un'equazione formulata originariamente da Parmelee et al (1969) per il caso di una fondazione superficiale e in assenza di scattering.

Nel caso di eccitazione armonica (analisi nel dominio della frequenza) e in assenza di forze esterne, la (2.29) diventa:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} M_b & M_b \alpha \\ \alpha^T M_b & M_{oo} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} C_b & 0 \\ 0 & C_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_b & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_b \\ U_s \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M_b \alpha \\ M_{oo} \end{bmatrix} \{U_o^*\} \quad (2.30)$$

in cui il termine di dipendenza temporale $e^{i\omega t}$ è stato omissso per semplicità.

2.7.1. Il caso delle vibrazioni in un piano

Si considera ora il sistema strutturale descritto in Figura 2.6, rappresentativo di un telaio piano, a comportamento tipo shear-type, soggetto a traslazione orizzontale e rotazione alla base. Tale modello approssima il comportamento nel piano orizzontale di un telaio per cui sia possibile ignorare la deformabilità assiale delle colonne. Si assume inoltre che la fondazione sia rigida e parzialmente immersa nel terreno. Il moto di input della fondazione $\{U_o^*\} = (U_{0y}^*, \theta_{0x}^*)^T$ è supposto noto, quale risulta dalla soluzione di un problema di scattering. Il principale vantaggio di

tale modello risiede nel ridotto numero di gradi di libertà: infatti, essendo N il numero di piani, la configurazione della struttura è univocamente determinata dal vettore $\{U_b\}_{N \times 1}$ di traslazioni orizzontali dei piani e da un vettore $\{U_s\}_{2 \times 1}$ che descrive la traslazione orizzontale e la rotazione della fondazione intorno al punto O .

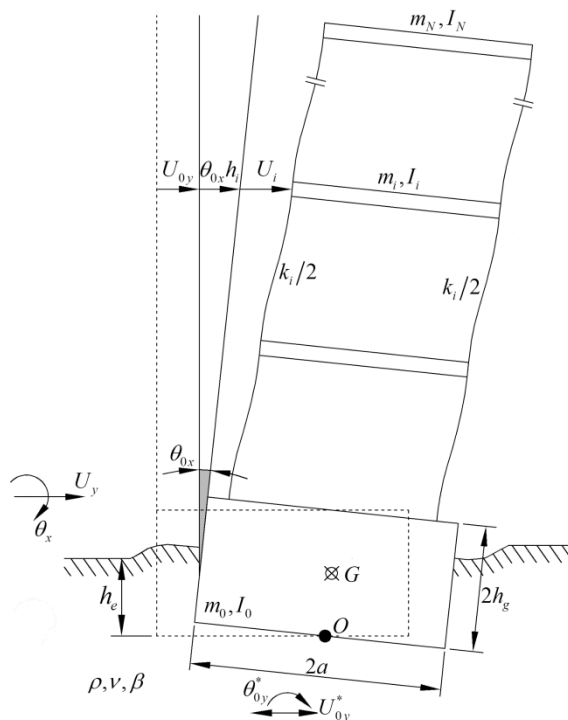


Figura 2.6 Modello shear-type per vibrazioni accoppiate traslazione-rocking.

Per tale classe di problemi il sistema ridotto di equazioni del moto può essere specificato come segue:

$$\begin{bmatrix} M_b & M_{bo} \\ M_{bo}^T & M_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_b \\ \ddot{U}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_b & 0 \\ 0 & C_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_b \\ \dot{U}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_b & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_b \\ U_s \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{bo} \\ M_o \end{bmatrix} \{U_0^*\} \quad (2.31)$$

Il vettore di spostamenti relativi generalizzati possiede $N+2$ componenti

$\begin{Bmatrix} U_b \\ U_s \end{Bmatrix} = (U_1, \dots, U_N, U_s, \theta_s)^T$. La matrice di massa risultante del sistema è data da:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_b & M_{bo} \\ M_{bo}^T & M_{oo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \vdots & m_1 h_1 & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & m_N & m_N & m_N h_N & \\ \hline m_1 & \cdots & m_N & m_o + \sum_{i=1}^N m_i & m_o h_g + \sum_{i=1}^N m_i h_i & \\ m_1 h_1 & \cdots & m_N h_N & m_o h_g + \sum_{i=1}^N m_i h_i & I_o + \sum_{i=1}^N m_i h_i^2 & \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

dove h_i, m_i, I_i ($i=1, N$) sono rispettivamente la quota, la massa e il momento di inerzia baricentrico di ciascun piano; h_o, m_o sono l'altezza e la massa della fondazione; $I_o = I_g + m_o h_g^2 + \sum_{i=1}^N I_i$ è il momento di inerzia della fondazione rispetto al punto O . Il modello descritto dall'Equazione (2.31) è da considerarsi come il modello di riferimento per le analisi che saranno presentate nel seguito della tesi.

2.8. Metodi di soluzione

Nel contesto di un approccio per sottostrutture, le matrici di massa, smorzamento e rigidezza della struttura e della fondazione sono calcolate indipendentemente; le prime attraverso un modello della sovrastruttura su base fissa, le seconde attraverso approcci analitici o numerici. I coefficienti di rigidezza e smorzamento della fondazione che ne derivano dipendono dalla frequenza di eccitazione; pertanto appare naturale ricercare la soluzione dell'Eq. (2.29) nel dominio della frequenza, per poi ricostruire la risposta nel dominio del tempo attraverso una sintesi di Fourier, come suggerito da Liu e Fagel (1971). Nel caso in cui i coefficienti di impedenza vengano approssimati con valori costanti, indipendenti dalla frequenza, l'Eq. (2.29) può anche essere risolta mediante integrazione diretta nel dominio del tempo, come descritto in Parmelee et al (1969), oppure attraverso un metodo alternativo, basato sulla soluzione di un problema agli autovalori complesso attraverso il metodo di Foss, come suggerito da Jennings e Bielak (1973).

2.8.1. Metodo di soluzione esatto nel dominio della frequenza

Il sistema di equazioni (2.29) può essere espresso nella forma più generale:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C(\omega)]\{\dot{u}(t)\} + [K(\omega)]\{u(t)\} = \{P(t)\} \quad (2.33)$$

dove il vettore degli spostamenti relativi generalizzati $\{u\}$ contiene componenti relative sia alla struttura che alla fondazione e il vettore forzante $\{P(t)\}$ include l'effetto delle forze esterne direttamente applicate al sistema e quelle indotte dal moto del suolo. Le matrici $[K(\omega)]$ e $[C(\omega)]$ contengono termini legati alle proprietà di rigidità e smorzamento della sovrastruttura, più termini aggiuntivi legati alla rigidità e allo smorzamento della fondazione, valutati a livello dell'interfaccia tra fondazione e terreno (impedenze della fondazione). In generale, dal momento che i coefficienti di impedenza sono dipendenti dalla frequenza, tali risultano anche le matrici globali di rigidità e smorzamento. Pertanto, l'Eq. (2.33) non può essere risolta attraverso integrazione diretta nel dominio del tempo, a meno che non si accetti di approssimare le impedenze della fondazione con valori costanti, o che l'eccitazione sia di per sé armonica.

Un efficace metodo di soluzione prevede di applicare una trasformazione di Fourier ad entrambi i termini dell'Eq. (2.33), ottenendo così:

$$-\omega^2 [M]\{U(\omega)\} + i\omega [C(\omega)]\{U(\omega)\} + [K(\omega)]\{U(\omega)\} = \{P(\omega)\} \quad (2.34)$$

la cui soluzione fornisce la risposta stazionaria della struttura soggetta ad eccitazione armonica:

$$\{U(\omega)\} = \left(-\omega^2 [M] + i\omega [C(\omega)] + [K(\omega)] \right)^{-1} P(\omega) \quad (2.35)$$

Risolta l'Eq. (2.35) per un numero sufficientemente elevato di frequenze, la risposta transitoria può essere ricavata attraverso una sintesi di Fourier:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.36)$$

È chiaro che questo metodo di soluzione non comporta alcuna approssimazione, e permette di considerare in maniera rigorosa la dipendenza dalla frequenza dei coefficienti di impedenza. Per contro, l'aspetto critico è che, per avere

una sufficiente accuratezza della risposta transitoria, la (2.35) deve essere computata per un numero molto grande di frequenze.

Per diminuire l'onere computazionale legato alle inversioni multiple della matrice di impedenza globale in (2.35), è conveniente operare una trasformazione delle equazioni del moto relative alla sovrastruttura, proiettando il vettore degli spostamenti relativi nello spazio dei modi della sovrastruttura su base fissa. Tale approccio, nel contesto di analisi di interazione terreno-struttura, è stato per primo introdotto da Tajimi (1967), ed in termini più generali da Lee e Wesley (1971, 1972). Tra gli altri, Parmelee (1967), Meek e Veletsos (1972), e Chopra e Gutiérrez (1974), hanno sfruttato il metodo per ridurre le dimensioni del problema descritto dall'Eq. (2.29). Bielak (1975, 1976) ha introdotto i modi della struttura su base fissa per ricavare espressioni in forma chiusa dei coefficienti di smorzamento modale del sistema interagente.

Le equazioni del moto della sovrastruttura proiettate nello spazio modale (2.23) possono essere risolte, in assenza di forze esterne e per eccitazione armonica, in funzione degli spostamenti assoluti della fondazione, ottenendo:

$$\{\eta\} = \left(-\omega^2 [I] + i\omega [2D\Omega] + [\Omega]^2 \right)^{-1} \omega^2 [\beta]^T \{U_0\} = [\tilde{D}(\omega)] [\beta]^T \{U_0\} \quad (2.37)$$

dove $[\tilde{D}(\omega)]$ è una matrice diagonale il cui r -esimo elemento è dato da:

$$\tilde{D}_r(\omega) = \frac{(\omega/\omega_r)^2}{1 - (\omega/\omega_r)^2 + 2i\xi_r(\omega/\omega_r)} \quad (2.38)$$

Dalla (2.37) e (2.22), si ha che $\{U_b\} = [\Phi] [\tilde{D}(\omega)] [\beta]^T \{U_0\}$. Utilizzando tale risultato per eliminare la parte superiore del sistema (2.28), si ottiene la seguente equazione risolvente:

$$\left(-\omega^2 ([M_0] + [\bar{M}_b]) + i\omega [C_s] + [K_s] \right) \{U_0\} = (i\omega [C_s] + [K_s]) \{U_0^*\} \quad (2.39)$$

da cui:

$$\{U_0\} = \left([I] - \omega^2 [\bar{C}_s(\omega)] ([M_0] + [\bar{M}_b(\omega)]) \right)^{-1} \{U_0^*\} \quad (2.40)$$

in cui $[\bar{C}_s(\omega)]$ è la matrice di flessibilità della fondazione. Nelle (2.39) e (2.40), è stata definita una matrice di massa equivalente della sovrastruttura:

$$[\bar{M}_b(\omega)] = [\alpha]^T [M_b] [\alpha] + [\beta] [\tilde{D}(\omega)] [\beta]^T \quad (2.41)$$

Nel caso di sovrastrutture a molti gradi di libertà, l'Eq. (2.40) fornisce un metodo efficace per la soluzione del problema di interazione. L'analisi della sovrastruttura deve essere condotta una sola volta per determinare la matrice di massa equivalente; il moto della fondazione viene ottenuto mediante inversione, a ogni frequenza di analisi, della matrice 6×6 in (2.40); gli spostamenti della sovrastruttura possono quindi essere ricavati attraverso la (2.37). La (2.40) mette chiaramente in evidenza i due effetti dell'interazione: gli effetti cinematici di scattering sono contenuti nel vettore moto di input in fondazione $\{U_o^*\}$, mentre gli effetti inerziali nel termine $[\bar{C}_s(\omega)]([\bar{M}_0] + [\bar{M}_b(\omega)])$.

In merito alla matrice di massa equivalente della sovrastruttura, è possibile dimostrare che, se l'insieme dei modi della struttura a base fissa è completo, $[\bar{M}_b] \rightarrow 0$ per $\omega \rightarrow \infty$. Ovvero la risposta della fondazione alle alte frequenze è essenzialmente indipendente dalla sovrastruttura. Nel caso in cui venga considerato un numero di modi $n < N$, la matrice di massa equivalente tende, alle alte frequenze, ad una matrice di massa residua che rappresenta il contributo alla base dei modi non considerati. Un vantaggio della formulazione adottata è che, per frequenze inferiori a quelle dei modi esclusi, il contributo di questi ultimi viene comunque considerato approssimativamente attraverso il termine $[\alpha]^T [M_b] [\alpha]$.

2.8.2. *Analisi modale classica*

L'analisi modale è senza dubbio il metodo più diffuso per l'analisi dinamica di strutture lineari. La sua applicabilità a problemi di interazione terreno-struttura è limitata dal momento che le impedenze sono dipendenti dalla frequenza e che il sistema non è a rigore classicamente smorzato. Ciononostante, il metodo rimane di interesse poichè, quando le approssimazioni possono essere accettate, permette una comprensione fisica degli effetti di interazione.

Sia $\{\tilde{\phi}_j\}$ il j -esimo modo e $\tilde{\omega}_j$ la corrispondente frequenza naturale del sistema fondazione-terreno non smorzato. Tali grandezze sono definite come la soluzione del seguente problema agli autovalori:

$$[K(\tilde{\omega}_1)]\{\tilde{\phi}_j\} = \tilde{\omega}_j^2 [M]\{\tilde{\phi}_j\} \quad (2.42)$$

in cui la matrice di rigidità, dipendente dalla frequenza, è approssimata con un valore costante corrispondente alla frequenza fondamentale del sistema. Per valutare $\tilde{\omega}_1$ e ottenere la corrispondente stima della matrice di rigidità è necessario adottare una procedura iterativa. Una strada alternativa prevede di aggiornare la matrice di rigidità e derivare ciascuna soluzione del problema (2.42) risolvendo indipendentemente $N+2$ problemi agli autovalori del tipo:

$$[K(\tilde{\omega}_j)]\{\tilde{\phi}_j\} = \tilde{\omega}_j^2 [M]\{\tilde{\phi}_j\}, \quad j=1, N+2 \quad (2.43)$$

in cui una procedura iterativa deve essere applicata per ciascuna soluzione $\tilde{\omega}_j$. Tale secondo approccio risulta più accurato nel calcolo delle frequenze proprie del sistema, dal momento che tiene conto della dipendenza dalla frequenza della rigidità della fondazione, ma conduce a forme modali non ortogonali. In generale, la maggiore complessità dell'approccio non permette un significativo incremento di accuratezza, dal momento che i termini di $[K(\omega)]$ non variano significativamente nell'intervallo di frequenze di interesse. Inoltre, il contributo del modo fondamentale è solitamente il più significativo per la risposta globale.

Assumendo ora che il sistema ammetta una decomposizione in modi ortogonali (cioè che il sistema sia classicamente smorzato), il vettore di spostamenti generalizzati può essere scritto come:

$$\{U_b\} = [\tilde{\Phi}]\{\tilde{\eta}\} = \sum_{j=1}^{N+2} \{\tilde{\phi}_j\} \tilde{\eta}_j \quad (2.44)$$

in cui $[\tilde{\Phi}]$ è la matrice modale e $\{\tilde{\eta}\}$ è il vettore delle ampiezze modali. Sostituendo l'Eq. (2.44) in (2.34) e pre-moltiplicando per $[\tilde{\Phi}]^T$, si ottiene il sistema di equazioni del moto proiettato nello spazio modale.

$$[\tilde{\Phi}]^T [M][\tilde{\Phi}]\{\ddot{\tilde{\eta}}\} + [\tilde{\Phi}]^T [C][\tilde{\Phi}]\{\dot{\tilde{\eta}}\} + [\tilde{\Phi}]^T [K][\tilde{\Phi}]\{\tilde{\eta}\} = -[\tilde{\Phi}]^T \begin{bmatrix} M_b \alpha \\ M_{oo} \end{bmatrix} \{\ddot{U}_o^*\} \quad (2.45)$$

Ignorando i termini fuori diagonale della matrice di smorzamento modale $[\tilde{\Phi}]^T [C][\tilde{\Phi}]$, il sistema consiste di $N+2$ equazioni disaccoppiate, che possono essere scritte in forma canonica come:

$$\ddot{\tilde{\eta}}_j + 2\tilde{\omega}_j \tilde{\xi}_j \dot{\tilde{\eta}}_j + \tilde{\omega}_j^2 \tilde{\eta}_j = \tilde{\beta}_j, \quad j=1, N+2 \quad (2.46)$$

dove i coefficienti di smorzamento modale e i fattori di partecipazione sono dati da:

$$2\tilde{\omega}_j \tilde{\xi}_j = \frac{\{\tilde{\phi}_j\}^T [C(\tilde{\omega}_j)] \{\tilde{\phi}_j\}}{\{\tilde{\phi}_j\}^T [M] \{\tilde{\phi}_j\}} \quad \tilde{\beta}_j = \frac{\{\tilde{\phi}_j\}^T \begin{bmatrix} M_b \alpha \\ M_{oo} \end{bmatrix}}{\{\tilde{\phi}_j\}^T [M] \{\tilde{\phi}_j\}}$$

È opportuno notare che, per ottenere i coefficienti di smorzamento modale, la matrice di smorzamento del sistema viene valutata in corrispondenza di ciascuna frequenza propria, al fine di considerare, seppur in maniera approssimata, la dipendenza dalla frequenza della parte immaginaria della matrice di impedenza.

I coefficienti di smorzamento modale $\tilde{\xi}_j$ possono essere ricavati a partire da quelli della struttura su base fissa ξ_j e dalle proprietà di smorzamento del terreno attraverso la relazione [Bielak (1975, 1976)]:

$$2\tilde{\xi}_j \tilde{\omega}_j \tilde{M}_j = \{\mu_j\}^T [2D\Omega] \{\mu_j\} + \{\tilde{\phi}_{sj}\}^T [C_s] \{\tilde{\phi}_{sj}\} \quad (2.47)$$

dove:

$$\tilde{M}_j = \{\tilde{\phi}_j\}^T [M] \{\tilde{\phi}_j\} \quad (2.48)$$

$$\{\mu_j\} = [\Phi]^T [M_b] \{\tilde{\phi}_{bj}\} \quad (2.49)$$

$$\{\phi_j\}^T = \left(\{\phi_{bj}\}^T, \{\phi_{sj}\}^T \right) \quad (2.50)$$

Nell'equazione (2.47), $[D] = \text{diag}(\xi_j)$ e $[\Omega] = \text{diag}(\omega_j)$.

Infine, è necessario sottolineare che una forte approssimazione viene introdotta ignorando i termini fuori diagonale della matrice di smorzamento nello spazio modale. L'effetto di tale assunzione nella variazione della risposta strutturale calcolata rispetto a quella esatta sarà analizzato nei capitoli successivi; sarà evidente come, per le alte frequenze, l'analisi modale classica possa comportare una significativa perdita di accuratezza quando l'interazione è molto marcata.

L'approccio modale classico descritto dalle precedenti equazioni (2.42)-(2.50) permette di valutare la risposta strutturale di un sistema interagente attraverso una procedura familiare alla maggior parte degli ingegneri strutturisti. Il metodo presuppone la conoscenza, a priori, dei coefficienti di impedenza della fondazione e del moto di input in fondazione. Tali dati, nell'ottica delle approssimazioni comunemente adottate in fase progettuale, possono essere facilmente desunti a partire da una delle tante soluzioni analitiche disponibili in letteratura. Per un'analisi rigorosa, è invece opportuno utilizzare metodi più accurati sia per lo studio delle caratteristiche della fondazione (determinazione delle impedenze e soluzione del problema di scattering) che per l'analisi della risposta del sistema interagente.

CAPITOLO 3

VALIDAZIONE DEL METODO E CONFRONTO CON RISULTATI DI LETTERATURA

3.1. Generalità

Nel prosieguo del presente lavoro di tesi verranno presentati numerosi risultati numerici, relativi al problema di interazione dinamica di una struttura campione. Tali risultati sono stati ottenuti attraverso codici di calcolo sviluppati dall'autore e implementati in *Matlab*. In particolare, saranno presentate e confrontate due diverse soluzioni delle equazioni del moto del sistema interagente: la soluzione esatta, ottenuta mediante l'analisi nel dominio della frequenza, ed una soluzione approssimata, ottenuta mediante l'applicazione dell'analisi modale classica. Per valutare la correttezza dei codici sviluppati, è stato condotto un confronto con una delle più complete serie di risultati numerici disponibili in letteratura. In particolare, si è tentato di ricostruire la risposta delle due strutture multipiano analizzate da Bielak (1975, 1976). Il confronto con i risultati presentati in tali lavori risulta particolarmente significativo non solo come strumento di validazione, ma anche perchè i risultati di Bielak, che sembrano indicare una buona accuratezza dell'approccio modale classico nell'analisi di problemi di interazione, sono stati largamente ripresi e necessitano di essere compresi a fondo.

3.2. Descrizione dei casi studio

Nei suoi lavori sull'analisi modale classica per problemi di SSI, Bielak (1975) ha considerato due casi studio, una struttura a tre ed una a cinque piani. I dati, riportati da Bielak, relativi alle masse e alle coordinate dei piani sono riassunti in Tabella 3.1; i corrispondenti valori delle frequenze proprie e dei coefficienti di smorzamento relativi alle strutture su base fissa sono riportati in Tabella 3.2. Dal momento che il report originale di Bielak non contiene informazioni sulla rigidità delle strutture, è stato necessario applicare una procedura di identificazione delle rigidità di piano, basandosi sulle frequenze proprie delle strutture su base fissa. A tale scopo è stato utilizzato un algoritmo iterativo di ottimizzazione, in cui le rigidità dei piani venivano ottenute minimizzando la differenza tra il vettore delle frequenze riportate da Bielak $\{f_0\}$ e quello delle frequenze calcolate $\{f(k)\}$ per un dato vettore $\{k\}$ di rigidità di piano. Tale procedura ha permesso di desumere i valori di rigidità riportati in Tabella 3.1. È possibile osservare che, mentre per la struttura a tre piani la rigidità diminuisce linearmente con l'altezza, la struttura a cinque piani è caratterizzata da una distribuzione delle rigidità peculiare, con una forte variazione a cavallo del secondo piano. Sebbene sia noto che con una tale procedura di identificazione, basata sulle frequenze proprie, l'unicità della soluzione non è garantita [Udwadia (1978)], la validità dei valori di rigidità desunti può essere confermata dall'ottimo accordo con i risultati di Bielak relativi ad altre grandezze modali e di risposta. Tale confronto sarà presentato in seguito.

Entrambe le strutture oggetto di studio sono supportate da fondazioni dirette circolari, aventi raggio rispettivamente pari ad $a = 1.75$ m e 4 m. Si assume che l'altezza della fondazione, non riportata nel report originale, sia stata trascurata. Il terreno di fondazione ha una densità di massa ρ di 2000 Kg/m^3 e un coefficiente di Poisson $\nu = 0.45$. Sono stati considerati quattro diversi valori di rigidità del terreno, definiti attraverso le velocità di propagazione delle onde di taglio $\beta = 100$ m/sec, 150 m/sec, 300 m/sec, e 600 m/sec.

Tabella 3.1 Valori riportati da Bielak (1975) per le masse e le quote dei piani dei due casi studio, e valori desunti delle rigidezze di piano.

| n° massa | Struttura a 3 piani | | | Struttura a 5 piani | | |
|----------|---------------------|--------------------|-----------|---------------------|--------------------|-----------|
| | j | m_j [10^3 Kg] | h_j [m] | k_j [MN/m] | m_j [10^3 Kg] | h_j [m] |
| 5 | --- | --- | --- | 50 | 17.3 | 39.64 |
| 4 | --- | --- | --- | 50 | 14.1 | 39.64 |
| 3 | 15 | 10.5 | 8.00 | 50 | 10.9 | 39.64 |
| 2 | 15 | 7.0 | 9.00 | 50 | 7.7 | 124.96 |
| 1 | 15 | 3.5 | 10.00 | 50 | 4.5 | 44.92 |
| Base | 30 | ---- | ---- | 125 | ---- | ---- |

Tabella 3.2 Frequenze proprie e coefficienti di smorzamento delle strutture su base fissa.

| n° modo | Smorzamento | Struttura a 3 piani | | Struttura a 5 piani | |
|---------|-------------|---------------------|-----------|---------------------|--------------------|
| | | j | ξ [%] | f_j [cps] | ω_j [rad/s] |
| 1 | 2.0 | 1.771 | 11.128 | 1.466 | 9.211 |
| 2 | 2.0 | 4.787 | 30.078 | 3.857 | 24.234 |
| 3 | 2.0 | 6.946 | 43.643 | 6.074 | 38.164 |
| 4 | 2.0 | --- | --- | 8.125 | 51.051 |
| 5 | 2.0 | --- | --- | 12.245 | 76.938 |

Per l'analisi del sistema interagente, Bielak ha utilizzato i coefficienti di impedenza proposti da Veletsos e Verbic (1974). Le corrispondenti matrici di rigidezza e smorzamento della fondazione sono espresse come:

$$[K_s] = \begin{bmatrix} K_{H0} \cdot k_H(a_0, \nu, D) & 0 \\ 0 & K_{M0} \cdot k_M(a_0, \nu, D) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

e

$$[C_s] = \begin{bmatrix} \frac{K_{H0} a}{\beta} \cdot c_H(a_0, \nu, D) & 0 \\ 0 & \frac{K_{M0} a}{\beta} \cdot c_M(a_0, \nu, D) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

in cui $a_0 = \frac{\omega a}{\beta}$ è una frequenza normalizzata, D è un coefficiente che tiene conto

dello smorzamento materiale interno al terreno, $K_{H0} = \frac{8Ga}{2-\nu}$ e $K_{M0} = \frac{8Ga^3}{3(1-\nu)}$

sono le rigidezze traslazionali e rotazionali statiche della fondazione, k_H, k_M, c_H, c_M sono i coefficienti di impedenza diagrammati in Figura 3.1, e $G = \rho\beta^2$ è il modulo di rigidezza a taglio del terreno. È opportuno notare che la matrice di impedenza della fondazione è diagonale, avendo trascurato i termini di accoppiamento fra traslazione orizzontale e rotazione. Si considera soltanto il caso $D=0$ (assenza di smorzamento interno del terreno).

Infine, il report originale di Bielak non riporta i valori del momento di inerzia delle masse, di ciascun piano e della fondazione, intorno agli assi orizzontali passanti per i rispettivi baricentri. Una stima della somma di tali momenti di inerzia (termine I_0 della matrice delle masse) è data da:

$$I_0 = I_g + \sum_{j=1}^N I_i = \frac{\sum_{j=1}^{N+1} m_j \cdot a^2}{4} \quad (3.3)$$

dove la somma è estesa a tutte le masse, inclusa la fondazione. Tale stima è ottenuta ipotizzando che sia i piani sia la fondazione siano assimilabili a dischi circolari di raggio a e massa m_i distribuita uniformemente. L'espressione (3.3) fornisce valori di $5.742 \cdot 10^4 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$ e $1.5 \cdot 10^6 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$ per le strutture a tre e cinque piani, rispettivamente.

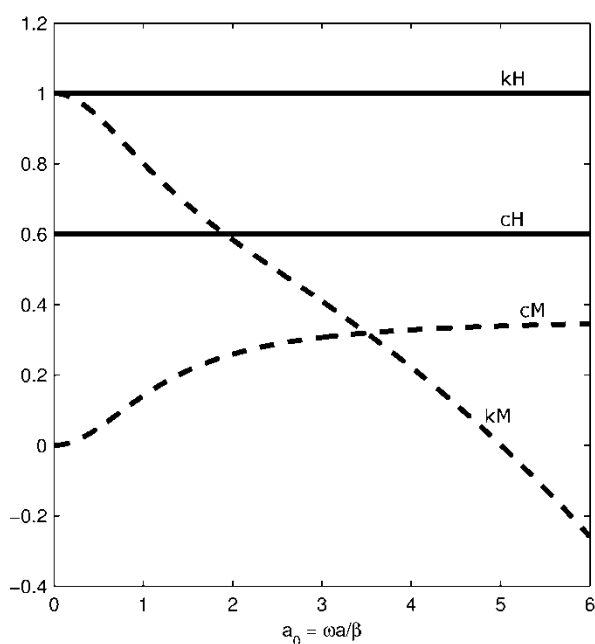


Figura 3.1 Coefficienti di impedenza utilizzati da Bielak [Velesztos e Verbic (1974)].

3.3. Validazione della soluzione esatta

La soluzione esatta delle equazioni del moto per le strutture a tre e cinque piani è stata ottenuta mediante l'analisi nel dominio della frequenza, come descritto al precedente §2. La risposta stazionaria è stata computata per un moto di input alla base costituito da un'accelerazione traslazionale unitaria. Le funzioni di trasferimento normalizzate degli spostamenti relativi di diversi gradi di libertà (primo piano, ultimo piano, traslazione e rotazione della fondazione), sono riportate in Figura 3.2 e Figura 3.3. I risultati di Bielak sono sovrapposti a quelli ottenuti nel presente lavoro.

È immediato osservare che l'accordo tra i due gruppi di risultati è alquanto scarso per entrambi i casi studio. I risultati presenti mostrerebbero infatti che l'interazione terreno-struttura ha effetti trascurabili sia sull'ampiezza degli spostamenti al primo e all'ultimo piano del sistema interagente, sia sulla variazione delle frequenze di risonanza. Per contro, i risultati riportati da Bielak mostrano significativi effetti di interazione, con marcate variazioni delle frequenze di risonanza al diminuire della velocità delle onde di taglio nel terreno da 600 m/sec a 150 m/sec. In aggiunta, i risultati di Bielak per gli spostamenti relativi della fondazione sono circa dieci volte più grandi dei risultati ottenuti.

Per determinare quale delle due serie di risultati sia quella corretta, è conveniente analizzare il caso limite della risposta statica della fondazione. In assenza dei termini di accoppiamento traslazione-rocking, valgono le relazioni:

$$\omega_1^2 U_0 / \ddot{U}_g = \omega_1^2 (m_0 + \sum m_i) / K_{H0} \quad (3.4)$$

$$\omega_1^2 h_1 \theta_0 / \ddot{U}_g = \omega_1^2 h_1 (\sum m_i h_i) / K_{M0} \quad (3.5)$$

Il confronto degli spostamenti relativi statici della fondazione ottenuti mediante le equazioni (3.4) e (3.5) con i risultati numerici ottenuti mediante il codice sviluppato e con i corrispondenti risultati di Bielak è riportato in Tabella 3.3. Il confronto mostra che i risultati ottenuti sono in pieno accordo con i valori limite dati dalle equazioni (3.4) e (3.5), mentre i risultati di Bielak sono approssimativamente 9.8 volte più grandi. Tale evidenza suggerirebbe che Bielak abbia in realtà utilizzato valori di masse e momenti di inerzia della fondazione 9.8 volte maggiori di quelli nominali, o che, equivalentemente, abbia utilizzato una densità del terreno 9.8 volte più piccola

di quella nominale di 2000 kg/m^3 . A conferma di tale possibilità, l'analisi numerica mediante il codice di calcolo sviluppato è stata condotta utilizzando una densità pari a $2000/9.81 = 204 \text{ Kg/m}^3$. I confronti, riportati in Figura 3.4 e Figura 3.5, mostrano un ottimo accordo tra i risultati ottenuti con una densità di massa del terreno ridotta e quelli riportati da Bielak. Un'ulteriore evidenza a conferma del fatto che Bielak abbia usato un'erronea densità del terreno sarà presentata nel paragrafo successivo relativo all'analisi modale. Infine, si segnala che nel report e nell'articolo di Bielak le etichette relative alle velocità di 150 m/sec e 300 m/sec sono invertite, nel grafico delle funzioni di trasferimento della rotazione della fondazione per la struttura a 3 piani.

Tabella 3.3 Spostamenti relativi statici normalizzati della fondazione $\beta = 600 \text{ m/sec}$.

| Grandezza di risposta | Struttura a 3 piani | | | Struttura a 5 piani | | |
|--|---------------------|----------------|---------------|---------------------|----------------|---------------|
| | Eq. (3.4)-(3-5) | Risultati num. | Bielak (1975) | Eq. (3.4)-(3-5) | Risultati num. | Bielak (1975) |
| $\omega_1^2 U_0 / \ddot{U}_g$ | 0.00143 | 0.00143 | 0.01414 | 0.00214 | 0.00214 | 0.02171 |
| $\omega_1^2 h_1 \theta_0 / \ddot{U}_g$ | 0.0073 | 0.0073 | 0.0722 | 0.0047 | 0.0047 | 0.0435 |

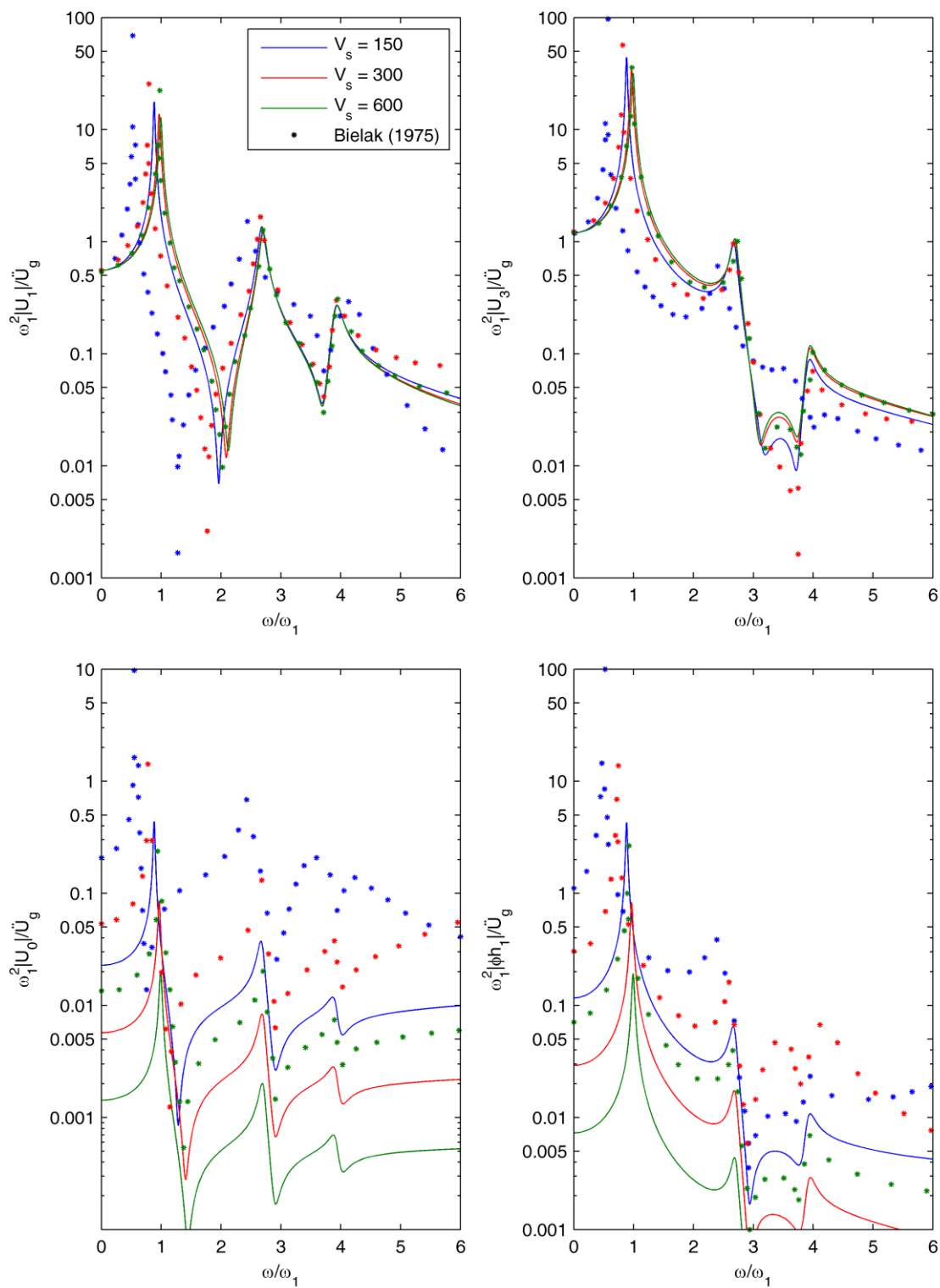


Figura 3.2 Funzioni di trasferimento per la struttura a tre piani ($\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$).

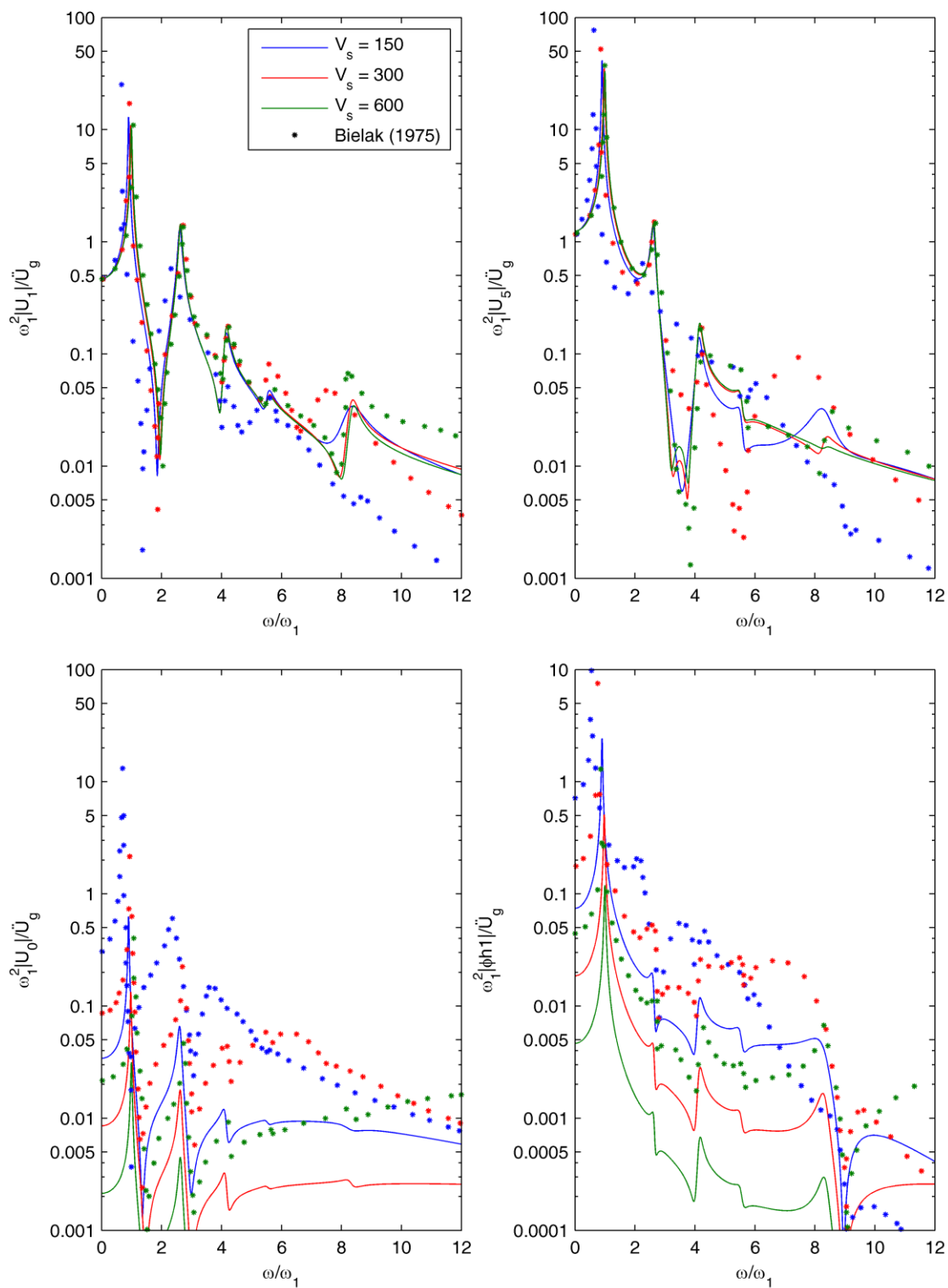


Figura 3.3 Funzioni di trasferimento per la struttura a cinque piani ($\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$).

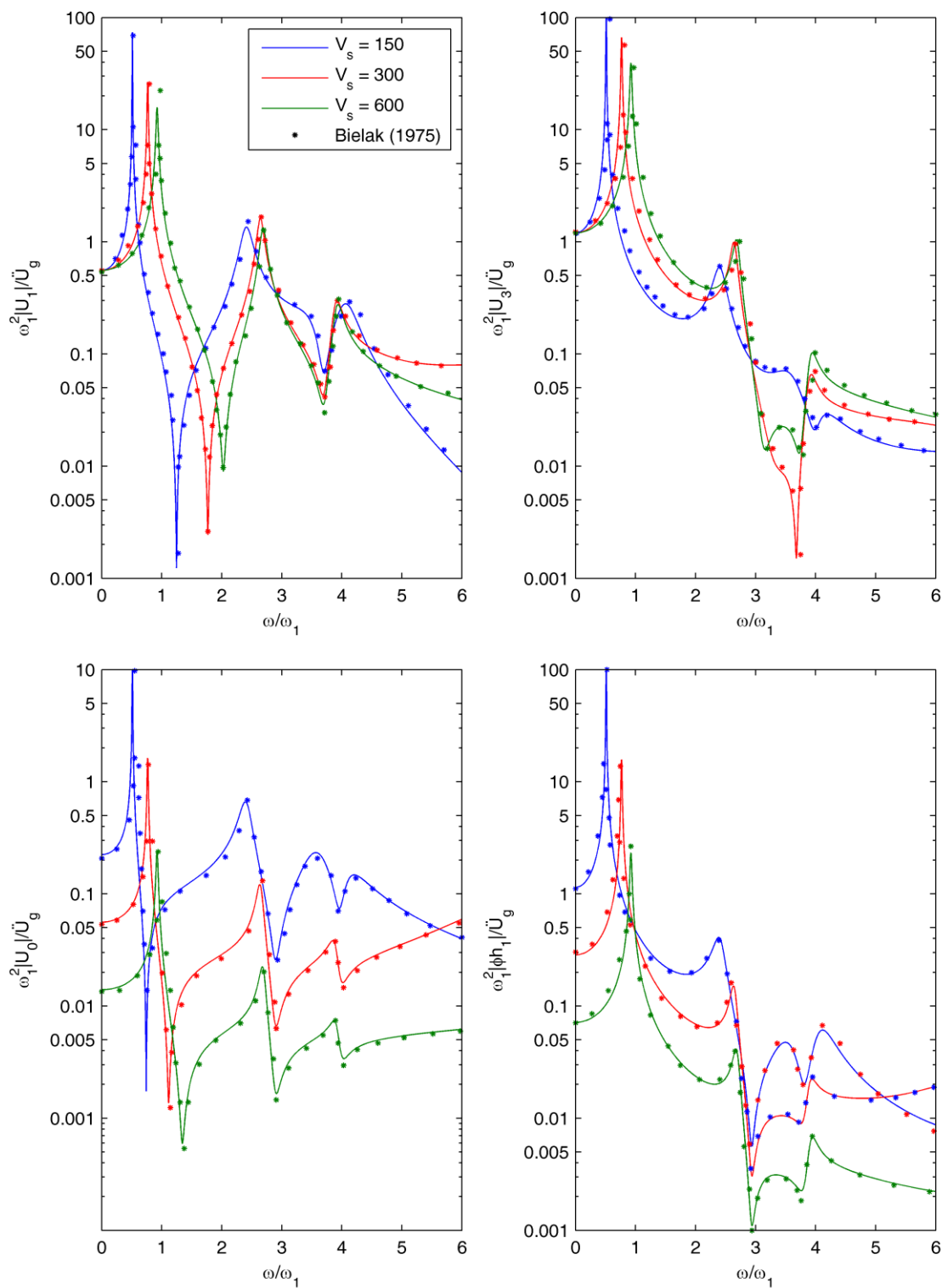


Figura 3.4 Funzioni di trasferimento per la struttura a tre piani ($\rho = 204 \text{ Kg/m}^3$).

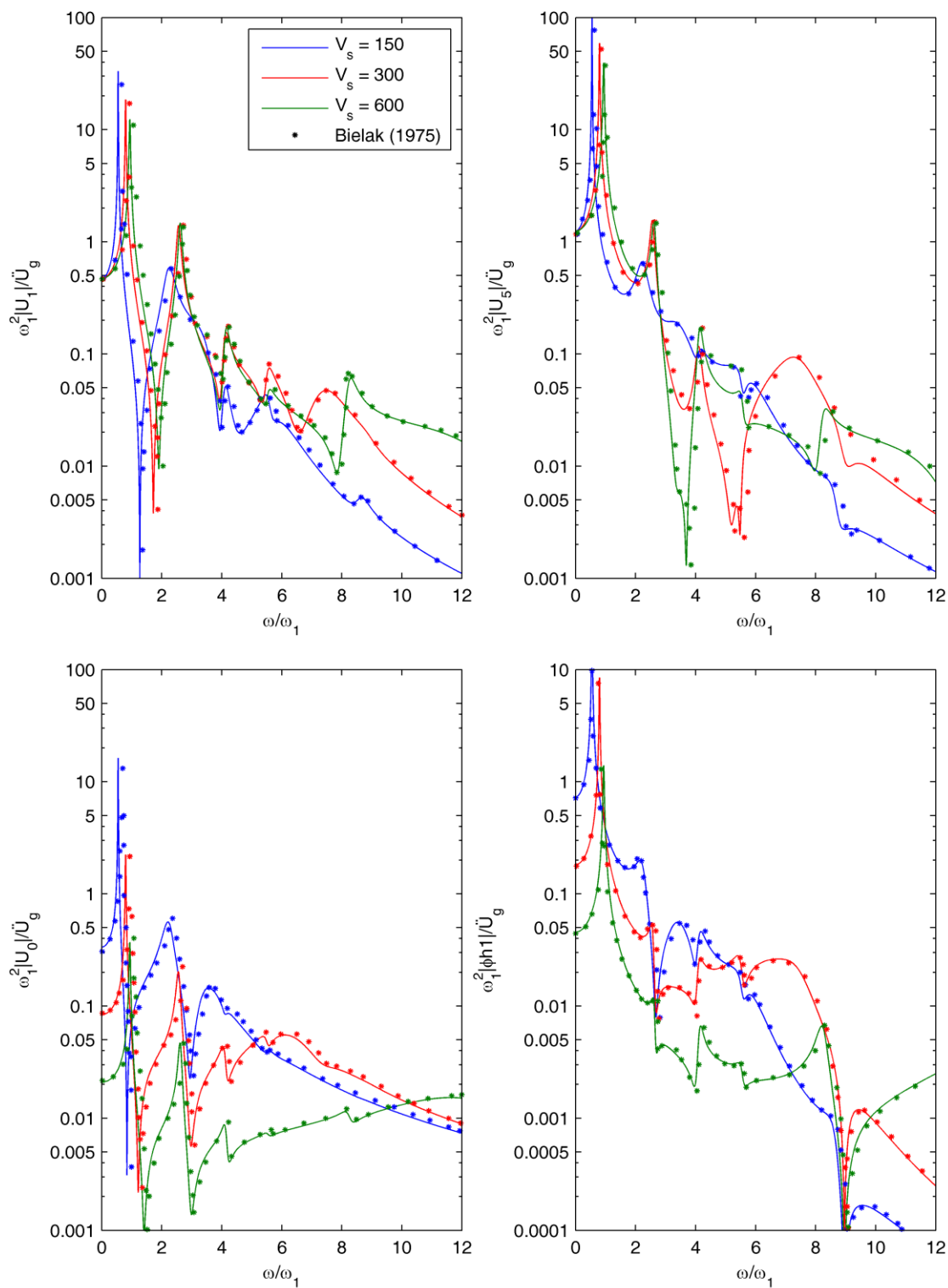


Figura 3.5 Funzioni di trasferimento per la struttura a cinque piani ($\rho = 204 \text{ Kg/m}^3$).

3.4. Validazione della soluzione approssimata

Prima di procedere con la validazione della soluzione approssimata ottenuta mediante l'analisi modale, la questione relativa alla densità del terreno utilizzata da Bielak è affrontata nuovamente, seguendo un approccio diverso. In base al confronto riportato al paragrafo precedente, sembrerebbe che Bielak (1975) abbia considerato nei suoi calcoli un valore di densità di massa del terreno molto basso (pari a quello nominale diviso per l'accelerazione di gravità g). Un'ulteriore evidenza a supporto di tale deduzione può essere ottenuta considerando la risposta alle alte frequenze delle strutture campione nel caso di un terreno di fondazione molto rigido. In tale circostanza, i due modi a frequenza più elevata sono tali che gli spostamenti assoluti delle masse della sovrastruttura sono trascurabili (al limite, tendono a zero al crescere della rigidità del terreno). Le equazioni del moto che descrivono le vibrazioni libere non smorzate del sistema si riducono, in questo caso, ad un sistema 2×2 che coinvolge soltanto i gradi di libertà della fondazione:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} m_0 & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_H + k_1 & k_1 h_1 \\ k_1 h_1 & K_M + \sum_{i=1}^n k_i (h_i - h_{i-1})^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_s \\ \theta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

dove m_0 e I_0 sono la massa e il momento di inerzia della fondazione intorno al punto di riferimento O , e K_H e K_M sono, rispettivamente, la rigidità traslazionale e rotazionale della fondazione. L'espressione dei termini legati alle rigidità di piano (k_i) tiene conto dell'ipotesi per cui la rotazione dei piani è uguale a quella della fondazione. Il corrispondente problema agli autovalori possiede due soluzioni, che possono essere approssimate come:

$$\omega_H = \sqrt{\frac{K_H + k_1}{m_0}} \quad (3.7)$$

e

$$\omega_M = \sqrt{\frac{K_M + \sum_{i=1}^n k_i (h_i - h_{i-1})^2}{I_0}} \quad (3.8)$$

Applicando l'equazione (3.8) alle due strutture campione, nel caso $\beta = 600 \text{ m/sec}$, si ottengono i risultati mostrati in Tabella 3.4. È evidente come le frequenze riportate da Bielak siano ottenute utilizzando una densità del terreno pari a 204 Kg/m^3 . Il buon accordo riscontrato tra i risultati riportati da Bielak e quelli qui ottenuti serve anche a validare i valori desunti per il momento di inerzia totale delle due strutture, pari rispettivamente a $I_0 = 5.742 \cdot 10^4 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$ e $1.5 \cdot 10^6 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$.

Tabella 3.4 Frequenze proprie della fondazione per $\beta=600 \text{ m/sec}$, e confronto con le corrispondenti frequenze riportate in Bielak (1975).

| Caso | ρ [Kg/m ³] | f_H [hz] | f_R [hz] | f_{N+1} [hz] | f_{N+2} [hz] |
|---------|--------------------------------|---------------|---------------|-------------------|-------------------|
| 3 piani | 204 | 23.84 | 30.24 | 23.82 | 31.43 |
| | 2000 | 74.16 | 87.67 | | |
| 5 piani | 204 | 17.78 | 19.43 | 17.79 | 21.12 |
| | 2000 | 54.97 | 56.53 | | |

Una volta chiarita tale problematica, l'analisi modale classica è stata applicata per l'analisi dei due casi studio. Al fine di testare il codice sviluppato, riproducendo i risultati presentati da Bielak, è stato necessario utilizzare un valore della densità di massa del terreno pari a 204 Kg/m^3 . Le frequenze proprie del sistema interagente, per diversi valori di velocità delle onde di taglio nel terreno, sono riportate nelle Tabelle 3.5 e 3.6. L'interazione terreno-struttura comporta una riduzione generalizzata delle frequenze di risonanza al diminuire della rigidità del terreno. I risultati ottenuti coincidono con quelli di Bielak in entrambi i casi.

I coefficienti di smorzamento del sistema sono riportati nelle Tabelle 3.7 e 3.8, rispettivamente per il caso a tre e cinque piani. Lo smorzamento totale del sistema è decomposto nelle componenti relative a ciascun modo di vibrare della struttura a base fissa (smorzamento strutturale) e in quelle relative alla traslazione e rotazione della fondazione (smorzamento per radiazione). Anche in questo caso, i risultati coincidono con quelli di Bielak. Si fa presente che i risultati di Tab. 3.8 per la struttura a cinque piani non sono contenuti nel report di Bielak, e sono qui inclusi per completezza.

Tabella 3.5 Frequenze proprie in Hertz, struttura a tre piani .

| β [m/sec] | Modo | | | | |
|--------------------|-------|-------|-------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ∞ | 1.771 | 4.787 | 6.946 | ∞ | ∞ |
| 600 | 1.634 | 4.760 | 6.935 | 23.819 | 31.443 |
| 300 | 1.357 | 4.682 | 6.898 | 12.142 | 18.973 |
| 150 | 0.904 | 4.249 | 6.302 | 7.289 | 14.298 |
| 100 | 0.651 | 3.356 | 5.483 | 7.056 | 13.266 |

Tabella 3.6 Frequenze proprie in Hertz, struttura a cinque piani.

| β [m/sec] | Modo | | | | | | |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|--------|----------|----------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ∞ | 1.466 | 3.857 | 6.074 | 8.125 | 12.245 | ∞ | ∞ |
| 600 | 1.371 | 3.833 | 6.056 | 8.117 | 12.086 | 17.786 | 21.124 |
| 300 | 1.168 | 3.749 | 6.001 | 8.041 | 9.070 | 11.310 | 13.522 |
| 150 | 0.802 | 3.235 | 5.114 | 6.059 | 8.071 | 8.865 | 12.724 |
| 100 | 0.584 | 2.451 | 4.540 | 5.965 | 7.895 | 8.388 | 12.665 |

Tabella 3.7 Coefficienti di smorzamento modale, struttura a tre piani.

| β m/sec | Modo | Smorzamento del modo a base fissa | | | Smorzamento per radiazione | | Totale |
|------------------|------|-----------------------------------|----------|----------|----------------------------|-----------|----------|
| | | 1 | 2 | 3 | Traslazione | Rotazione | η_j |
| 600 | 1 | 1.57E-02 | 7.00E-08 | 4.11E-09 | 5.79E-05 | 4.41E-07 | 1.58E-02 |
| | 2 | 3.53E-05 | 1.97E-02 | 2.24E-08 | 1.57E-04 | 3.80E-07 | 1.98E-02 |
| | 3 | 2.13E-05 | 2.39E-07 | 1.99E-02 | 9.72E-05 | 1.72E-07 | 2.00E-02 |
| | 4 | 1.01E-03 | 6.38E-04 | 1.70E-04 | 1.29E-01 | 3.27E-05 | 1.31E-01 |
| | 5 | 5.12E-02 | 6.87E-04 | 9.84E-05 | 2.53E-04 | 1.54E-02 | 6.77E-02 |
| 300 | 1 | 8.96E-03 | 2.85E-07 | 1.75E-08 | 2.67E-04 | 5.63E-06 | 9.24E-03 |
| | 2 | 2.47E-04 | 1.86E-02 | 1.01E-06 | 1.72E-03 | 7.01E-06 | 2.05E-02 |
| | 3 | 2.08E-04 | 1.77E-05 | 1.95E-02 | 1.18E-03 | 1.92E-06 | 2.09E-02 |
| | 4 | 6.90E-04 | 1.80E-03 | 5.53E-04 | 1.24E-01 | 1.30E-04 | 1.27E-01 |
| | 5 | 8.63E-02 | 1.13E-03 | 2.18E-04 | 8.25E-04 | 1.70E-02 | 1.06E-01 |
| 150 | 1 | 2.63E-03 | 2.44E-07 | 1.57E-08 | 6.33E-04 | 2.38E-05 | 3.28E-03 |
| | 2 | 3.63E-04 | 1.14E-02 | 3.31E-05 | 2.97E-02 | 8.84E-05 | 4.17E-02 |
| | 3 | 1.56E-03 | 6.37E-03 | 5.50E-03 | 5.96E-02 | 3.14E-05 | 7.30E-02 |
| | 4 | 5.27E-06 | 2.66E-03 | 1.44E-02 | 3.48E-02 | 1.60E-04 | 5.20E-02 |
| | 5 | 1.15E-01 | 1.55E-03 | 3.91E-04 | 9.42E-04 | 1.94E-02 | 1.37E-01 |
| 100 | 1 | 9.75E-04 | 1.20E-07 | 7.84E-09 | 7.97E-04 | 3.50E-05 | 1.81E-03 |
| | 2 | 6.80E-05 | 2.90E-03 | 3.98E-05 | 8.29E-02 | 2.06E-04 | 8.61E-02 |
| | 3 | 2.01E-03 | 1.68E-02 | 6.29E-04 | 3.48E-02 | 1.54E-05 | 5.43E-02 |
| | 4 | 3.97E-04 | 8.13E-04 | 1.92E-02 | 4.75E-03 | 1.28E-04 | 2.53E-02 |
| | 5 | 1.24E-01 | 1.70E-03 | 4.71E-04 | 7.58E-04 | 1.93E-02 | 1.46E-01 |

Tabella 3.8 Coefficienti di smorzamento modale, struttura a cinque piani.

| β m/sec | Modo | Smorzamento del modo a base fissa | | | | | Smorzamento per radiazione | | Totale |
|------------------|------|-----------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------------------------|-----------|----------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Traslazione | Rotazione | η_j |
| 600 | 1 | 1.64E-02 | 7.57E-09 | 7.36E-09 | 2.94E-10 | 5.25E-10 | 1.85E-04 | 2.50E-06 | 1.66E-02 |
| | 2 | 3.32E-06 | 1.96E-02 | 1.66E-07 | 6.68E-09 | 3.89E-09 | 6.13E-04 | 1.13E-07 | 2.02E-02 |
| | 3 | 5.37E-05 | 2.99E-06 | 1.98E-02 | 6.43E-09 | 1.23E-08 | 2.63E-04 | 4.30E-06 | 2.01E-02 |
| | 4 | 1.44E-05 | 8.79E-07 | 3.67E-08 | 1.99E-02 | 3.24E-07 | 8.06E-05 | 6.51E-06 | 2.00E-02 |
| | 5 | 4.33E-04 | 1.20E-05 | 9.65E-07 | 6.55E-06 | 1.89E-02 | 1.38E-03 | 3.69E-04 | 2.11E-02 |
| | 6 | 1.47E-03 | 1.17E-03 | 1.90E-04 | 3.92E-05 | 3.35E-04 | 2.14E-01 | 2.50E-04 | 2.18E-01 |
| | 7 | 3.33E-02 | 1.61E-06 | 2.30E-04 | 7.25E-05 | 1.01E-03 | 1.27E-03 | 4.50E-02 | 8.09E-02 |
| 300 | 1 | 1.01E-02 | 3.73E-08 | 3.78E-08 | 1.53E-09 | 2.75E-09 | 9.33E-04 | 3.63E-05 | 1.10E-02 |
| | 2 | 3.12E-05 | 1.81E-02 | 2.51E-06 | 1.35E-07 | 8.46E-08 | 6.04E-03 | 7.81E-06 | 2.42E-02 |
| | 3 | 6.26E-04 | 8.53E-05 | 1.90E-02 | 3.57E-08 | 1.22E-08 | 3.35E-03 | 5.97E-05 | 2.31E-02 |
| | 4 | 2.77E-04 | 2.09E-04 | 1.88E-05 | 1.81E-02 | 2.48E-05 | 1.11E-02 | 5.30E-04 | 3.03E-02 |
| | 5 | 3.51E-06 | 2.66E-03 | 4.75E-04 | 1.74E-03 | 4.70E-04 | 1.71E-01 | 2.45E-03 | 1.79E-01 |
| | 6 | 3.17E-02 | 1.62E-04 | 5.64E-04 | 8.83E-05 | 7.61E-03 | 2.13E-02 | 1.79E-02 | 7.93E-02 |
| | 7 | 2.82E-02 | 8.22E-06 | 2.37E-04 | 1.18E-04 | 1.22E-02 | 6.77E-05 | 2.61E-02 | 6.70E-02 |
| 150 | 1 | 3.20E-03 | 3.98E-08 | 4.26E-08 | 1.75E-09 | 3.19E-09 | 2.48E-03 | 1.79E-04 | 5.86E-03 |
| | 2 | 8.98E-05 | 8.58E-03 | 2.10E-05 | 1.93E-06 | 1.41E-06 | 7.35E-02 | 5.03E-04 | 8.27E-02 |
| | 3 | 5.75E-05 | 1.23E-02 | 1.16E-03 | 3.59E-05 | 1.72E-05 | 1.10E-01 | 1.63E-03 | 1.25E-01 |
| | 4 | 4.26E-03 | 6.27E-04 | 1.70E-02 | 4.41E-05 | 1.86E-05 | 8.86E-03 | 2.93E-03 | 3.38E-02 |
| | 5 | 7.95E-03 | 1.08E-04 | 4.33E-04 | 1.74E-02 | 2.38E-05 | 4.61E-03 | 2.88E-03 | 3.34E-02 |
| | 6 | 6.57E-02 | 8.70E-05 | 1.67E-03 | 2.59E-03 | 7.58E-04 | 7.82E-03 | 3.29E-02 | 1.12E-01 |
| | 7 | 6.45E-03 | 1.23E-05 | 4.76E-05 | 3.88E-05 | 1.96E-02 | 1.12E-04 | 5.31E-03 | 3.15E-02 |
| 100 | 1 | 1.22E-03 | 2.11E-08 | 2.31E-08 | 9.53E-10 | 1.75E-09 | 3.25E-03 | 2.79E-04 | 4.75E-03 |
| | 2 | 4.27E-05 | 2.04E-03 | 1.38E-05 | 1.68E-06 | 1.37E-06 | 1.42E-01 | 1.44E-03 | 1.46E-01 |
| | 3 | 2.72E-05 | 1.95E-02 | 1.79E-04 | 1.26E-05 | 7.46E-06 | 4.81E-02 | 1.42E-03 | 6.92E-02 |
| | 4 | 8.17E-03 | 1.29E-04 | 1.70E-02 | 2.87E-05 | 1.50E-05 | 7.47E-04 | 3.61E-03 | 2.97E-02 |
| | 5 | 4.11E-02 | 1.79E-04 | 1.99E-03 | 8.85E-03 | 1.61E-04 | 6.50E-03 | 1.53E-02 | 7.40E-02 |
| | 6 | 3.82E-02 | 2.66E-05 | 1.13E-03 | 1.12E-02 | 3.04E-04 | 2.06E-03 | 1.65E-02 | 6.94E-02 |
| | 7 | 5.00E-03 | 1.15E-05 | 3.59E-05 | 3.14E-05 | 1.99E-02 | 8.31E-05 | 3.23E-03 | 2.83E-02 |

3.5. Discussione sull'accuratezza dell'analisi modale

Le funzioni di trasferimento ottenute mediante l'analisi nel dominio della frequenza e l'analisi modale sono messe a confronto in Fig. 3.6 e 3.7. I grafici qui ottenuti coincidono con quelli riportati da Bielak. È opportuno notare che, per i due sistemi esaminati, l'applicazione dell'analisi modale classica non comporta significativi scostamenti dalla soluzione esatta, come osservato in origine da Bielak.

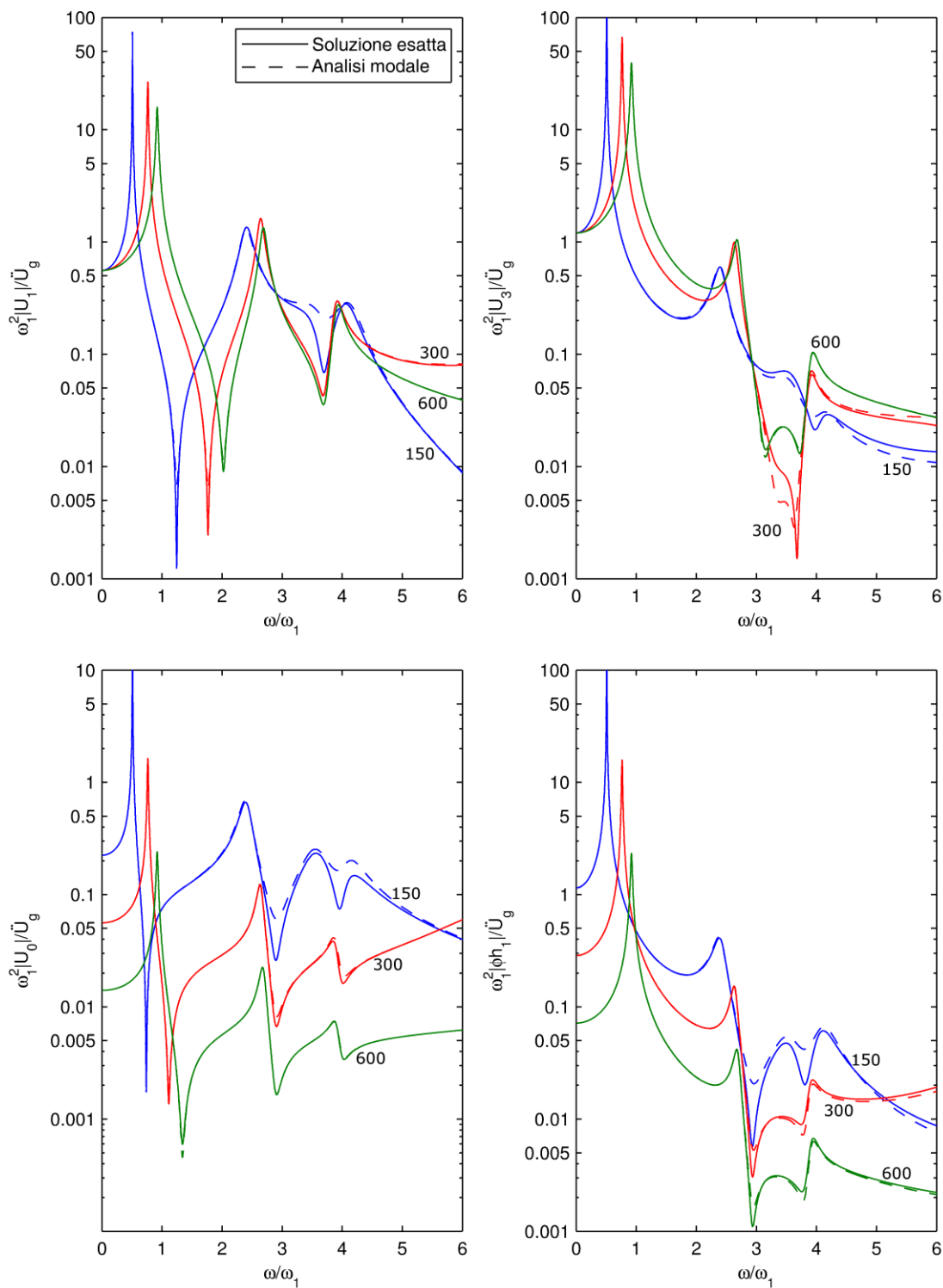


Figura 3.6 Funzioni di trasferimento per la struttura a 3 piani: confronto tra soluzione esatta e soluzione approssimata, $\rho = 204 \text{ Kg/m}^3$.

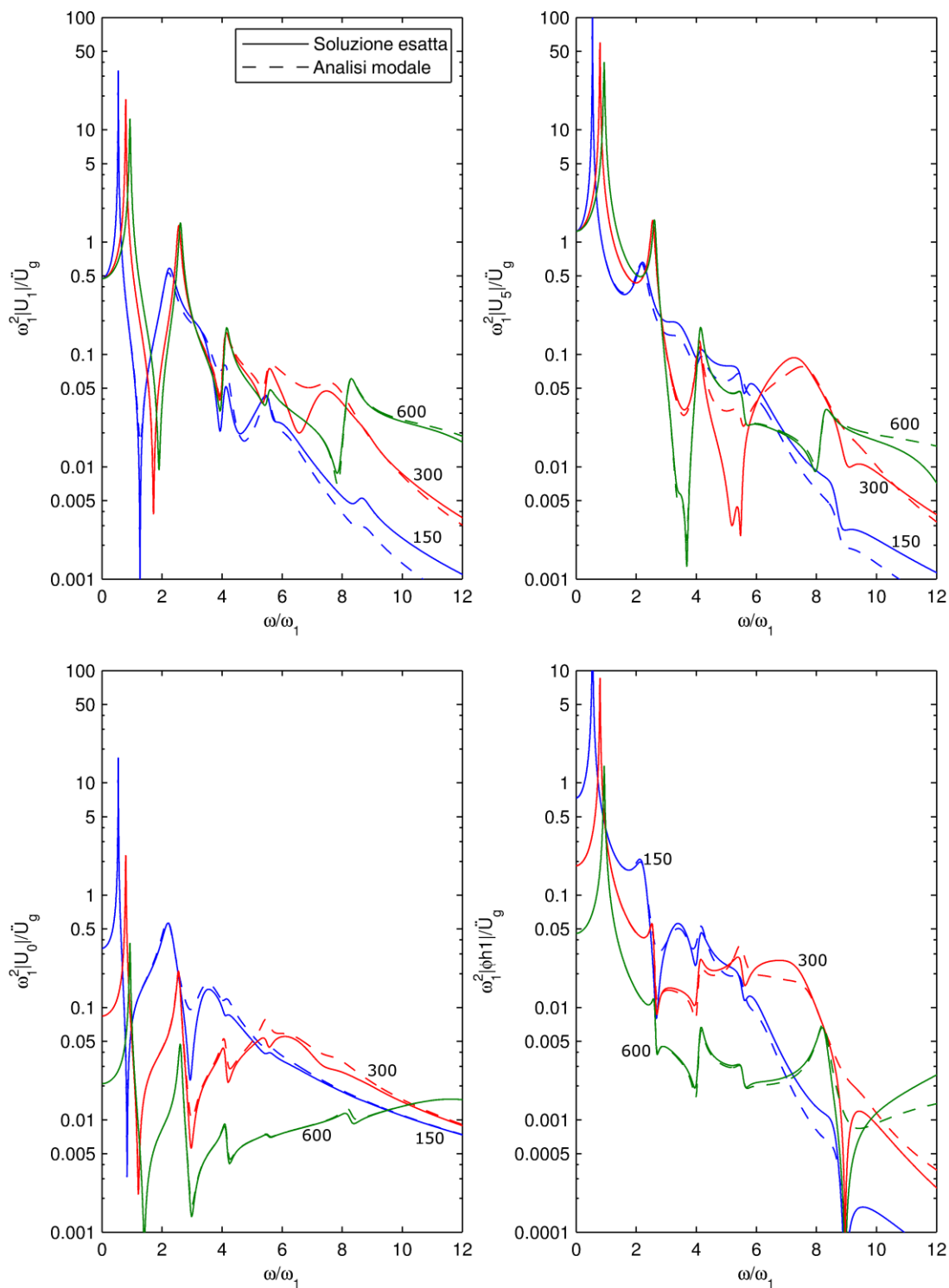


Figura 3.7 Funzioni di trasferimento per la struttura a 5 piani: confronto tra soluzione esatta e soluzione approssimata, $\rho = 204 \text{ Kg/m}^3$.

Due differenti grandezze vengono introdotte per fornire una misura quantitativa dell'errore connesso con l'applicazione dell'analisi modale:

$$\mu_1 = \frac{\sum_i \left| |H_{ex}^i|^2 - |H^i|^2 \right| \Delta\omega_i}{\sum_i |H_{ex}^i|^2 \Delta\omega_i}, \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{\sum_i (H_{ex}^i - H^i)(\bar{H}_{ex}^i - \bar{H}^i) \Delta\omega_i}{\sum_i H_{ex}^i \bar{H}_{ex}^i \Delta\omega_i}} \quad (3.9)$$

dove H_{ex} e H_{ma} indicano i valori delle funzioni di trasferimento, rispettivamente ottenuti con il metodo esatto e con l'analisi modale, e \bar{H} indica il complesso coniugato. La prima grandezza corrisponde ad una misura di errore della densità di potenza spettrale, la seconda grandezza contiene anche informazioni riguardo la fase. I valori numerici delle misure di errore sono elencati in Tab. 3.9 e 3.10 per le funzioni di trasferimento riportate nelle figure. L'accordo tra la soluzione esatta e quella ottenuta mediante l'analisi modale è sempre molto buono, e, come atteso, migliora all'aumentare della rigidità del terreno e al diminuire degli effetti di interazione. Anche per il suolo più flessibile considerato, l'errore nella misura μ_1 è dell'ordine dello 0.5% per la struttura a tre piani e dello 1% per la struttura a cinque piani. La seconda misura suggerisce che l'errore è leggermente maggiore per la traslazione della fondazione. Le tabelle 3.11 e 3.12 riportano infine le misure di errore ottenute usando la corretta densità del terreno pari a 2000 Kg/m³; in tal caso, gli effetti di interazione sono ancora meno significativi e l'errore è praticamente nullo.

Tabella 3.9 Misure di errore per la struttura a tre piani ($\rho = 204 \text{ Kg/m}^3$).

| Grandezza di risposta | μ_1 | | | μ_2 | | |
|-----------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| | $\beta = 150 \text{ m/s}$ | $\beta = 300 \text{ m/s}$ | $\beta = 600 \text{ m/s}$ | $\beta = 150 \text{ m/s}$ | $\beta = 300 \text{ m/s}$ | $\beta = 600 \text{ m/s}$ |
| U_1 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.027 | 0.009 | 0.004 |
| U_3 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.010 | 0.009 | 0.004 |
| U_0 | 0.004 | 0.002 | 0.001 | 0.071 | 0.018 | 0.016 |
| θ_0 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.018 | 0.025 | 0.034 |

Tabella 3.10 Misure di errore per la struttura a cinque piani ($\rho = 204 \text{ Kg/m}^3$).

| Grandezza di risposta | μ_1 | | | μ_2 | | |
|-----------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| | $\beta = 150 \text{ m/s}$ | $\beta = 300 \text{ m/s}$ | $\beta = 600 \text{ m/s}$ | $\beta = 150 \text{ m/s}$ | $\beta = 300 \text{ m/s}$ | $\beta = 600 \text{ m/s}$ |
| U_1 | 0.011 | 0.002 | 0.001 | 0.039 | 0.019 | 0.004 |
| U_5 | 0.011 | 0.002 | 0.001 | 0.020 | 0.011 | 0.004 |
| U_0 | 0.011 | 0.002 | 0.000 | 0.083 | 0.074 | 0.019 |
| θ_0 | 0.011 | 0.002 | 0.001 | 0.032 | 0.031 | 0.038 |

Tabella 3.11 Misure di errore per la struttura a tre piani ($\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$).

| Grandezza di risposta | μ_1 | | | μ_2 | | |
|-----------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| | $\beta = 150 \text{ m/s}$ | $\beta = 300 \text{ m/s}$ | $\beta = 600 \text{ m/s}$ | $\beta = 150 \text{ m/s}$ | $\beta = 300 \text{ m/s}$ | $\beta = 600 \text{ m/s}$ |
| U_1 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.006 | 0.002 | 0.000 |
| U_3 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.005 | 0.002 | 0.000 |
| U_0 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.047 | 0.011 | 0.019 |
| θ_0 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.032 | 0.037 | 0.039 |

Tabella 3.12 Misure di errore per la struttura a cinque piani ($\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$).

| Grandezza di risposta | μ_1 | | | μ_2 | | |
|-----------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| | $\beta = 150 \text{ m/s}$ | $\beta = 300 \text{ m/s}$ | $\beta = 600 \text{ m/s}$ | $\beta = 150 \text{ m/s}$ | $\beta = 300 \text{ m/s}$ | $\beta = 600 \text{ m/s}$ |
| U_1 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.011 | 0.002 | 0.000 |
| U_5 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.007 | 0.001 | 0.000 |
| U_0 | 0.004 | 0.001 | 0.000 | 0.129 | 0.046 | 0.013 |
| θ_0 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.038 | 0.038 | 0.039 |

3.6. Conclusioni

Il codice qui sviluppato per il calcolo della soluzione esatta è stato validato attraverso un confronto dettagliato con i risultati di Bielak (1975, 1976) per due casi studio, una struttura a tre ed una a cinque piani. Nel processo di validazione, è emerso che i casi studio esaminati da Bielak non posseggono le caratteristiche di strutture reali; inoltre, è emerso che i risultati di Bielak sono stati ottenuti utilizzando un valore della densità del terreno pari a quello nominale diviso per l'accelerazione di gravità g (o, equivalentemente, considerando masse e rigidzze aumentate di un fattore pari a g). Il codice è stato testato anche mediante confronto con alcuni casi limite. Il codice sviluppato per l'analisi modale è stato validato analogamente, mediante il confronto con i risultati di Bielak (tenendo conto del problema appena discusso).

L'accordo trovato da Bielak tra la soluzione esatta e quella approssimata è stato confermato in tutti i casi. Sono state introdotte due misure quantitative dell'errore associato all'utilizzo dell'analisi modale. È emerso che il massimo errore μ_1 è nell'ordine dello 0.5% per la struttura a tre piani e dello 1% per quella a cinque piani, nel caso di un sottosuolo con velocità di propagazione delle onde di taglio pari a 150 m/sec.

CAPITOLO 4

ANALISI MODALE PER PROBLEMI DI INTERAZIONE TERRENO-STRUTTURA

4.1. Generalità

Il presente capitolo tratta l'applicazione dell'analisi modale classica ai sistemi interagenti terreno-struttura. Per tale classe di problemi, l'analisi modale fornisce una soluzione approssimata e non rigorosa, in quanto ignora la dipendenza dalla frequenza delle funzioni di impedenza della fondazione, e in quanto trascura i termini fuori diagonale della matrice di dissipazione nello spazio modale. Ciononostante, quando tali approssimazioni non comportano significative deviazioni dalla soluzione esatta, la sovrapposizione modale rimane un metodo di analisi di estremo interesse, in quanto ampiamente diffuso e, soprattutto, in quanto fornisce elementi per una comprensione fisica degli effetti di interazione. Lo studio è condotto con riferimento al modello di un edificio a nove piani, supportato da una fondazione rigida poggiante su un terreno omogeneo. Le proprietà della struttura e del terreno di fondazione sono scelte in maniera da riprodurre approssimativamente le caratteristiche di un edificio reale.

In primo luogo, viene fornita una descrizione completa e dettagliata della struttura campione, quindi vengono presentati alcuni risultati di analisi di interazione, condotte sia con il metodo esatto sia con l'analisi modale. In seguito, viene condotta un'analisi parametrica sui risultati dell'analisi modale, studiando l'effetto della flessibilità del terreno nella variazione delle grandezze di risposta. Vengono

analizzate le variazioni delle proprietà dinamiche del sistema (frequenze proprie, forme modali, coefficienti di smorzamento e fattori di partecipazione) con la velocità delle onde di taglio nel terreno. I risultati ottenuti sono interpretati attraverso il confronto con alcuni casi limite (terreno perfettamente flessibile e perfettamente rigido; sovrastruttura rigida) e con un modello ausiliario (*sovrastruttura bloccata*) che sarà introdotto in seguito. Infine, l'accuratezza dell'analisi modale è valutata qualitativamente e quantitativamente; si dimostra che, quando gli effetti di interazione sono marcati, l'analisi modale può portare a significative deviazioni dalla soluzione esatta nel campo di frequenze medio-alto.

4.2. Descrizione della struttura campione

La struttura campione considerata nel presente studio riflette le proprietà di un edificio regolare a nove piani, supportato da una fondazione rigida, parzialmente immersa in un semispazio lineare, elastico e omogeneo. Viene considerato il problema di vibrazioni nel piano (traslazioni orizzontali e rotazioni) indotte da onde elastiche che si propagano nel semispazio. Una rappresentazione schematica del modello strutturale è fornita in Figura 4.1. I dati relativi a coordinate, masse, e rigidezze dei vari piani sono riportati in Tabella 4.1.

La sovrastruttura è supportata da una fondazione modellata come un cilindro equivalente rigido, di raggio $a = 11$ m e altezza $h_0 = 5.5$ m; la base della fondazione è posta 5.5 m al di sotto del piano campagna; il rapporto di approfondimento è quindi pari a $h_e/a = 0.5$. Il terreno di fondazione è caratterizzato da una densità di massa $\rho = 1850$ Kg/m³ e un coefficiente di Poisson $\nu = 0.25$. I risultati presentati nel seguito fanno riferimento a due diversi valori di rigidezza del terreno, definiti attraverso le velocità di propagazione delle onde di taglio pari rispettivamente a $\beta = 360$ m/sec e 720 m/sec. Due parametri adimensionali, che sintetizzano la geometria della struttura, sono: 1) il rapporto tra l'altezza della sovrastruttura e il raggio della fondazione $H_t/a = 4.15$; 2) il rapporto tra la massa totale (12.2×10^6 Kg) e la massa di un volume di terreno di riferimento $M_t/\rho a^3 = 4.95$.

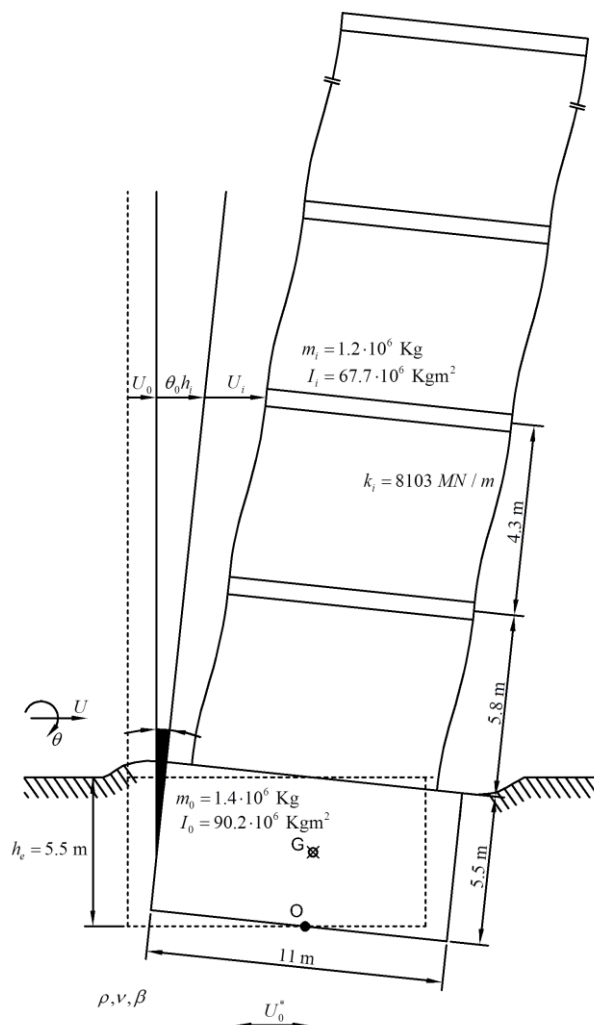


Figura 4.1 Modello della struttura campione.

Tabella 4.1 Masse, momenti di inerzia, rigidezze, coordinate e altezze dei piani della struttura.

| n° massa | Edificio a 9 piani | | | | |
|----------|-------------------------|----------------------------|---------------------|------------------|------------------|
| i | $m_i [10^6 \text{ Kg}]$ | $I_i [10^6 \text{ Kgm}^2]$ | $k_i [\text{MN/m}]$ | $Z_i [\text{m}]$ | $h_i [\text{m}]$ |
| 9 | 1.20 | 67.70 | 8103 | 45.70 | 4.30 |
| 8 | 1.20 | 67.70 | 8103 | 41.40 | 4.30 |
| 7 | 1.20 | 67.70 | 8103 | 37.10 | 4.30 |
| 6 | 1.20 | 67.70 | 8103 | 32.80 | 4.30 |
| 5 | 1.20 | 67.70 | 8103 | 28.50 | 4.30 |
| 4 | 1.20 | 67.70 | 8103 | 24.20 | 4.30 |
| 3 | 1.20 | 67.70 | 8103 | 19.90 | 4.30 |
| 2 | 1.20 | 67.70 | 8103 | 15.60 | 4.30 |
| 1 | 1.20 | 67.70 | 8103 | 11.30 | 5.80 |
| G | 1.40 | 90.20 | --- | 2.75 | --- |

Una più completa descrizione delle proprietà della sovrastruttura può essere fornita attraverso le sue proprietà dinamiche nell'ipotesi di vincolo alla base fisso. La Tabella 4.2 elenca le frequenze proprie ω_j , i coefficienti di smorzamento modale assunti ξ_j , i coefficienti di partecipazione normalizzati per traslazione $\beta_{1j}/\sqrt{M_{tot}}$ e rotazione $\beta_{2j}/(H_{tot}\sqrt{M_{tot}})$, e l'ampiezza normalizzata dello spostamento modale all'ultimo livello $\phi_{j,9}\sqrt{M_{tot}}$. La massa totale M_{tot} e l'altezza totale H_{tot} usate per la normalizzazione rappresentano rispettivamente la massa (10.8×10^6 Kg) e l'altezza (40.2 m) della sovrastruttura. Le frequenze proprie sono ben separate tra loro. I bassi valori dei coefficienti di smorzamento strutturale sono giustificati dall'ipotesi di comportamento elastico della struttura e dal fatto che il contributo dello smorzamento per radiazione nel terreno sarà preso in conto direttamente nell'analisi di interazione. È importante osservare che i fattori di partecipazione modale per la rotazione β_{2j} sono molto piccoli per i modi superiori al primo ($j \geq 2$).

Tabella 4.2 Proprietà dinamiche della struttura su base fissa.

| n° modo | Frequenze proprie | | Smorzamento | Fattori di partecipazione | | Ampiezze modali |
|---------|-------------------|----------------------|-------------|---------------------------|-------------|-----------------|
| | j | ω_j [rad/sec] | | f_j [hz] | ξ_j [-] | |
| 1 | 13.57 | 2.16 | 0.01 | 0.9229 | 0.7584 | 1.3718 |
| 2 | 40.34 | 6.42 | 0.01 | -0.3020 | 0.0132 | 1.3344 |
| 3 | 66.02 | 10.51 | 0.01 | 0.1743 | 0.0536 | 1.2606 |
| 4 | 89.89 | 14.31 | 0.01 | -0.1170 | -0.0089 | 1.1524 |
| 5 | 111.31 | 17.72 | 0.01 | 0.0831 | 0.0210 | 1.0127 |
| 6 | 129.69 | 20.64 | 0.01 | -0.0595 | -0.0063 | 0.8455 |
| 7 | 144.54 | 23.00 | 0.01 | 0.0414 | 0.0097 | 0.6551 |
| 8 | 155.44 | 24.74 | 0.01 | -0.0263 | -0.0031 | 0.4469 |
| 9 | 162.11 | 25.80 | 0.01 | 0.0128 | 0.0029 | 0.2266 |

NOTA: la massa totale non include la massa della fondazione

Per tenere conto degli effetti di interazione terreno-struttura, vengono utilizzati i coefficienti di impedenza forniti in Apsel e Luco (1987). La matrice di impedenza della fondazione viene espressa come:

$$[\bar{K}_s] = Ga \left(\begin{bmatrix} k_{HH} & ak_{HM} \\ ac_{HM} & a^2k_{HM} \end{bmatrix} + ia_0 \begin{bmatrix} c_{HH} & ac_{HM} \\ ac_{HM} & a^2c_{MM} \end{bmatrix} \right) \quad (4.1)$$

dove $G = \rho\beta^2$ è il modulo di rigidezza a taglio del terreno, a è il raggio della fondazione, $a_0 = \frac{\omega a}{\beta}$ è la frequenza normalizzata e $k_{HH}, k_{HM}, k_{MM}, c_{HH}, c_{HM}, c_{MM}$ sono i coefficienti di impedenza diagrammati in Figura 4.2 in funzione della frequenza normalizzata. Le corrispondenti matrici di rigidezza e smorzamento della fondazione sono espresse come:

$$[K_s] = Ga \begin{bmatrix} k_{HH} & a \cdot k_{HM} \\ a \cdot k_{HM} & a^2 \cdot k_{MM} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

e

$$[C_s] = Ga \frac{a_0}{\omega} \begin{bmatrix} c_{HH} & a \cdot c_{HM} \\ a \cdot c_{HM} & a^2 \cdot c_{MM} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

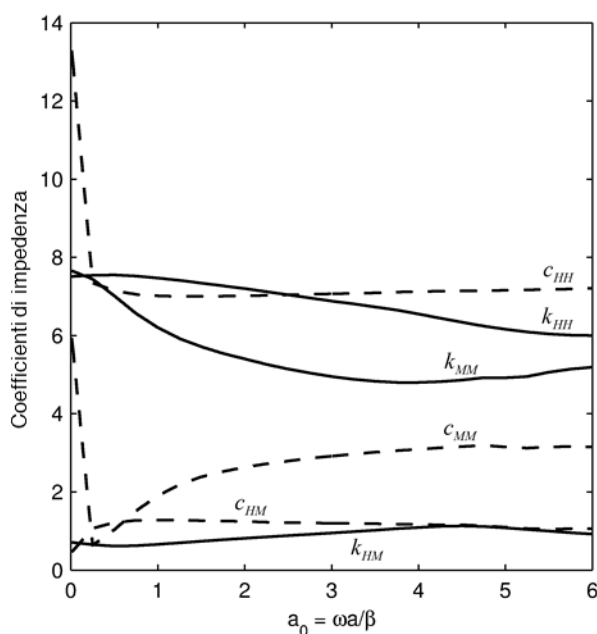


Figura 4.2 Coefficienti di impedenza per una fondazione cilindrica rigida ($\nu = 0.25$, $h/a = 0.5$), [Apsel e Luco (1987)].

4.3. Analisi della risposta del caso studio

L'analisi SSI della struttura campione è stata condotta per due valori di velocità delle onde di taglio: $\beta = 360$ m/sec e 720 m/sec. Un indice di rigidezza relativa tra terreno e struttura è rappresentato dal parametro adimensionale $\beta / \omega_1 a$, che, per i due casi esaminati, vale rispettivamente 2.41 e 4.82. Il primo caso corrisponde a un terreno di rigidezza intermedia, per cui è lecito attendersi che la

risposta strutturale sia influenzata significativamente dall'interazione; il secondo caso corrisponde invece ad un terreno relativamente rigido. Viene calcolata la risposta stazionaria del sistema soggetto ad un'eccitazione indotta da onde elastiche incidenti in direzione verticale. Il moto di input in campo libero è costituito da un'onda armonica, a frequenza variabile, con ampiezza in accelerazione unitaria.

Nel contesto di un'analisi di interazione completa mediante l'approccio per sottostrutture, devono essere considerati gli effetti di scattering delle onde all'interfaccia tra la fondazione e il terreno. Il moto di input risultante della fondazione viene calcolato utilizzando la soluzione di Luco e Wong (1987). Per onde SH incidenti in direzione verticale, il moto di input traslazionale e rotazionale della fondazione è dato da:

$$\begin{Bmatrix} U_{0y}^*(\omega) \\ \theta_{0x}^*(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{yy}(\omega) \\ R_{xy}(\omega)/a \end{Bmatrix} U_{gy}(\omega) \quad (4.4)$$

dove $U_{gy}(\omega)$ è il moto di input in campo libero, e $S_{yy}(\omega)$ e $R_{xy}(\omega)$ sono i coefficienti di scattering diagrammati in Figura 4.3.

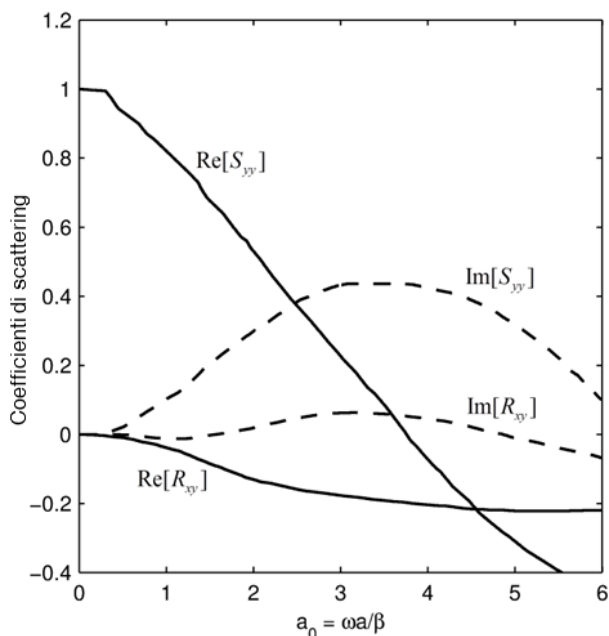


Figura 4.3 Coefficienti di scattering per una fondazione cilindrica rigida ($\nu = 0.25$, $h/a = 0.5$) e onde SH verticali, [Luco and Wong (1987)].

L'analisi della risposta è condotta attraverso i due metodi di soluzione descritti al Capitolo 2: l'analisi modale approssimata e l'analisi nel dominio della frequenza.

4.3.1. *Analisi modale*

Le Tabelle 4.3 e 4.4 elencano le proprietà dinamiche del sistema interagente, ottenute mediante l'analisi modale classica per i casi $\beta = 360$ e 720 m/sec. Il sistema possiede 11 gradi di libertà, 9 legati alle masse della sovrastruttura e 2 legati alla traslazione e alla rotazione della fondazione; poichè il modello considerato trascura la deformabilità assiale delle colonne, la rotazione di ciascun piano è uguale a quella della fondazione. I valori elencati nelle tabelle sono le frequenze proprie, i coefficienti di smorzamento modale, i fattori di partecipazione normalizzati per traslazione e rotazione (basati sulle forme modali espresse in spostamenti relativi), gli spostamenti assoluti normalizzati di quattro gradi di libertà (spostamento del primo e dell'ultimo piano della struttura in elevazione, traslazione e rotazione della fondazione).

I fattori di partecipazione e le forme modali sono normalizzati rispetto alla massa totale del sistema (12.2×10^6 Kg) e all'altezza totale misurata dalla base della fondazione (45.70 m). L'interazione con il terreno comporta, al diminuire della velocità di propagazione delle onde di taglio, una riduzione delle frequenze proprie del sistema e un incremento dei coefficienti di smorzamento. La riduzione delle frequenze è maggiormente pronunciata per il modo fondamentale. I coefficienti di smorzamento risultanti dall'analisi modale possono essere molto elevati, per alcuni modi fino al 28% ($\beta = 360$ m/sec). Analizzando gli spostamenti modali della fondazione, si osserva che la rotazione influenza la risposta maggiormente alle basse frequenze, mentre la traslazione influenza maggiormente la risposta alle alte frequenze. Infatti, per $\beta = 360$ m/sec, i modi 3 e 4 sono caratterizzati da significative rotazioni della fondazione, mentre nei modi ad alta frequenza si registrano elevate traslazioni della fondazione. Per $\beta = 720$ m/sec, si osservano forti rotazioni della fondazione nei modi 6 e 7, mentre la traslazione della fondazione interessa significativamente soltanto l'undicesimo modo. È opportuno notare che l'undicesimo modo per $\beta = 720$ m/sec corrisponde ad un moto di pura traslazione della

fondazione, con spostamenti assoluti della sovrastruttura trascurabili. Il coefficiente di smorzamento per tale modo è molto elevato, e legato essenzialmente allo smorzamento per radiazione nel terreno.

Tabella 4.3 Proprietà dinamiche del sistema interagente, per $\beta = 360$ m/sec.

| Modo | $\beta = 360$ m/sec | | | | | | | |
|------|---------------------------|---------------------|-------------------------------------|--|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|---|
| | $\beta/\omega_1 a = 2.41$ | | | | | | | |
| j | \tilde{f}_j [hz] | $\tilde{\xi}_j$ [-] | $\tilde{\beta}_{1j}/\sqrt{M_{tot}}$ | $\tilde{\beta}_{2j}/H_{tot}\sqrt{M_{tot}}$ | $\tilde{\phi}_{j,U1}\sqrt{M_{tot}}$ | $\tilde{\phi}_{j,U9}\sqrt{M_{tot}}$ | $\tilde{\phi}_{j,U0}\sqrt{M_{tot}}$ | $H_1\tilde{\phi}_{j,\theta0}\sqrt{M_{tot}}$ |
| 1 | 1.58 | 0.0187 | 0.8811 | 0.6441 | 0.337 | 1.495 | 0.040 | 0.678 |
| 2 | 6.12 | 0.0597 | -0.3273 | 0.0181 | -0.862 | 1.379 | -0.305 | 0.401 |
| 3 | 9.71 | 0.0903 | 0.1338 | 0.0531 | 1.272 | 1.148 | 0.263 | 2.052 |
| 4 | 12.48 | 0.2708 | 0.1541 | -0.0789 | 0.371 | 0.381 | 0.694 | -5.521 |
| 5 | 13.77 | 0.1149 | -0.1312 | -0.0107 | -1.417 | 1.236 | -0.589 | -0.659 |
| 6 | 17.10 | 0.1871 | 0.1288 | -0.0021 | 1.243 | 1.092 | 0.924 | -0.604 |
| 7 | 19.93 | 0.2028 | -0.1046 | -0.0037 | -0.781 | 0.931 | -1.001 | -0.265 |
| 8 | 22.29 | 0.2563 | 0.1004 | 0.0023 | 0.086 | 0.734 | 1.206 | 0.056 |
| 9 | 24.12 | 0.2743 | -0.0918 | -0.0032 | 0.642 | 0.556 | -1.287 | -0.326 |
| 10 | 25.34 | 0.2782 | 0.0860 | 0.0027 | -1.224 | 0.328 | 1.332 | 0.254 |
| 11 | 26.00 | 0.1752 | -0.0648 | -0.0022 | 1.214 | 0.154 | -1.055 | -0.261 |

Tabella 4.4 Proprietà dinamiche del sistema interagente, per $\beta = 720$ m/sec.

| Modo | $\beta = 720$ m/sec | | | | | | | |
|------|---------------------------|---------------------|-------------------------------------|--|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|---|
| | $\beta/\omega_1 a = 4.82$ | | | | | | | |
| j | \tilde{f}_j [hz] | $\tilde{\xi}_j$ [-] | $\tilde{\beta}_{1j}/\sqrt{M_{tot}}$ | $\tilde{\beta}_{2j}/H_{tot}\sqrt{M_{tot}}$ | $\tilde{\phi}_{j,U1}\sqrt{M_{tot}}$ | $\tilde{\phi}_{j,U9}\sqrt{M_{tot}}$ | $\tilde{\phi}_{j,U0}\sqrt{M_{tot}}$ | $H_1\tilde{\phi}_{j,\theta0}\sqrt{M_{tot}}$ |
| 1 | 1.97 | 0.0134 | 0.8748 | 0.6349 | 0.278 | 1.474 | 0.015 | 0.252 |
| 2 | 6.35 | 0.0155 | -0.2944 | 0.0129 | -0.740 | 1.411 | -0.074 | 0.082 |
| 3 | 10.30 | 0.0220 | 0.1640 | 0.0482 | 1.164 | 1.311 | 0.095 | 0.504 |
| 4 | 14.19 | 0.0212 | -0.1187 | -0.0081 | -1.386 | 1.230 | -0.142 | -0.120 |
| 5 | 17.41 | 0.0380 | 0.0755 | 0.0454 | 1.417 | 0.996 | 0.109 | 1.408 |
| 6 | 20.34 | 0.1462 | -0.0116 | -0.0968 | -0.724 | 0.838 | 0.061 | -4.235 |
| 7 | 20.70 | 0.1206 | -0.0767 | 0.0830 | -1.140 | 0.502 | -0.281 | 3.844 |
| 8 | 23.02 | 0.0258 | 0.0553 | -0.0188 | 1.182 | 0.733 | 0.201 | -1.119 |
| 9 | 24.71 | 0.0147 | -0.0342 | 0.0020 | -0.829 | 0.474 | -0.130 | 0.177 |
| 10 | 25.79 | 0.0115 | 0.0176 | -0.0023 | 0.436 | 0.252 | 0.075 | -0.190 |
| 11 | 40.09 | 1.6097 | 0.3014 | 0.0048 | -0.400 | 0.003 | 2.942 | -0.274 |

4.3.2. Funzioni di trasferimento

La risposta stazionaria del sistema interagente è stata calcolata sia mediante l'analisi esatta nel dominio della frequenza, sia mediante la sovrapposizione modale. I risultati, in termini di funzioni di trasferimento dell'ampiezza e dell'angolo di fase degli spostamenti relativi di quattro diversi gradi di libertà, sono diagrammati nelle

Figure 4.4 e 4.5. L'ampiezza degli spostamenti è normalizzata rispetto all'accelerazione di input in campo libero $\ddot{U}_{gy} = 1$, divisa per il quadrato della frequenza fondamentale della struttura a base fissa ω_1^2 ; in ascissa è riportata la frequenza normalizzata ω/ω_1 . La rotazione alla base è stata moltiplicata per l'altezza totale della struttura ($H_t = 45.7$ m). Per il caso della struttura su base fissa, l'input alla base corrisponde all'accelerazione di input in campo libero (no scattering). L'analisi è condotta nell'intervallo di frequenze da 0.02 a 42 Hz, con passo 0.01 Hz.

L'analisi della risposta stazionaria mette in evidenza i principali effetti di interazione:

- (i) per effetto della flessibilità del terreno, le frequenze di risonanza del sistema sono ridotte rispetto a quelle della struttura a base fissa. La traslazione delle frequenze è maggiormente pronunciata per il modo fondamentale, e aumenta al diminuire della rigidità del terreno;
- (ii) lo smorzamento per radiazione comporta una riduzione generalizzata dell'ampiezza della risposta, la quale diminuisce con la velocità di propagazione delle onde di taglio;
- (iii) la risposta del sistema interagente tende a quella della struttura su base fissa al crescere della rigidità del terreno;
- (iv) l'analisi modale è accurata nella valutazione della risposta del sistema nelle vicinanze della frequenza fondamentale. Al contrario di quanto osservato da Bielak, l'accuratezza dell'analisi modale decresce velocemente al crescere della frequenza e al diminuire della velocità delle onde nel terreno. Nel caso $\beta = 360$ m/sec, soltanto la risposta in corrispondenza delle prime due frequenze proprie è ragionevolmente accurata; nel caso $\beta = 720$ m/sec, la soluzione ottenuta mediante l'analisi modale appare accurata fino alla quarta frequenza di risonanza.

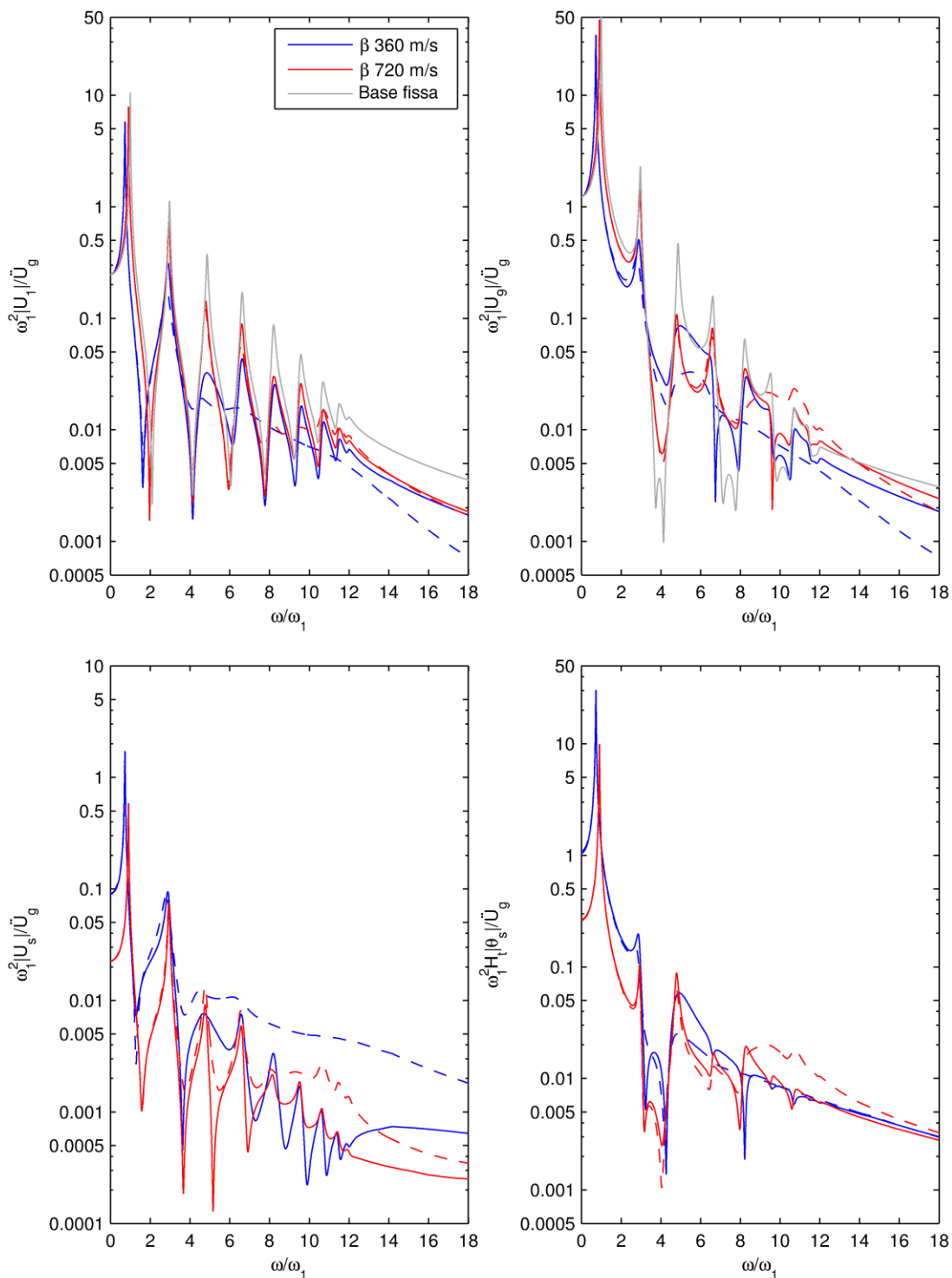


Figura 4.4 Funzioni di trasferimento dell'ampiezza degli spostamenti relativi normalizzati (linee continue: soluzione esatta; linee tratteggiate: analisi modale); input in accelerazione unitaria.

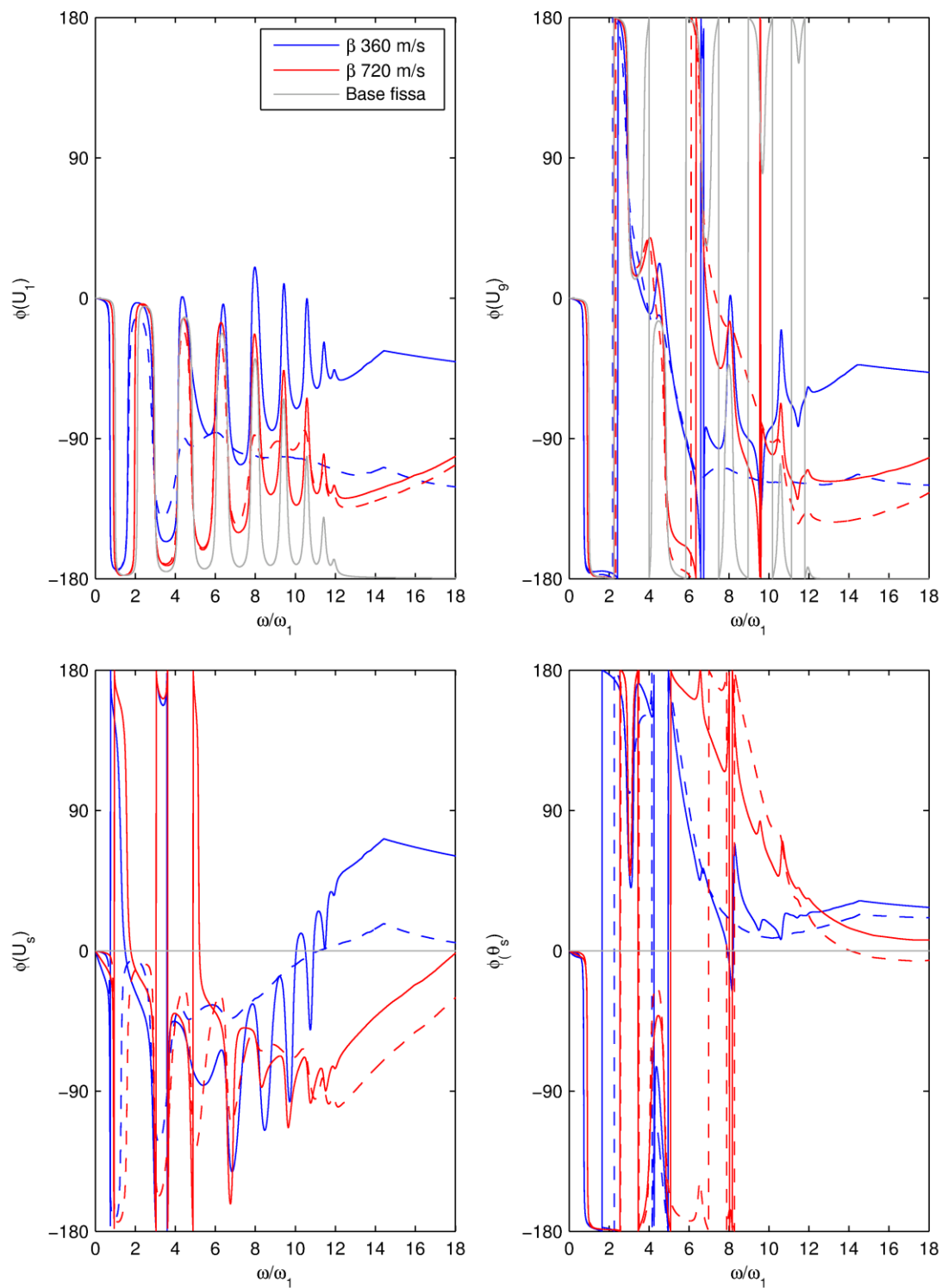


Figura 4.5 Funzioni di trasferimento degli angoli di fase degli spostamenti relativi normalizzati (linee continue: soluzione esatta; linee tratteggiate: analisi modale); input in accelerazione unitaria.

L'assenza di errori grossolani nel codice utilizzato per l'analisi è confermata dal confronto della risposta ottenuta alle basse frequenze con quella statica, data da:

$$\begin{Bmatrix} U_s(0) \\ \theta_s(0) \end{Bmatrix} = [K_s(0)]^{-1} \begin{Bmatrix} \sum_i m_i \\ \sum_i m_i z_i \end{Bmatrix} \ddot{U}_g \quad (4.5)$$

Tabella 4.5 Spostamenti e rotazioni relativi normalizzati della fondazione in condizione statica.

| Grandezza di risposta | $\beta = 360 \text{ m/sec}$ | | $\beta = 720 \text{ m/sec}$ | |
|--|-----------------------------|--------------------|-----------------------------|--------------------|
| | Eq. (4.5) | Risultato numerico | Eq. (4.5) | Risultato numerico |
| $\omega_1^2 U_s / \ddot{U}_g$ | 0.0898 | 0.0898 | 0.0224 | 0.0224 |
| $\omega_1^2 h_T \theta_s / \ddot{U}_g$ | 1.039 | 1.039 | 0.2596 | 0.2597 |

La risposta in termini di spostamenti relativi indotti da un'accelerazione in campo libero unitaria riveste particolare interesse in quanto: (i) la risposta in termini di spostamenti relativi è direttamente correlata alle forze interne alla struttura; (ii) l'input è generalmente stabilito in termini di accelerazioni al suolo, (iii) le misure di errore possono essere direttamente confrontate con quelle ottenute da Bielak. Allo scopo di presentare un set di risultati completo, la risposta del sistema è stata inoltre calcolata per un input in campo libero costituito da un'onda armonica di ampiezza in spostamento unitaria. Le Figure 4.6 e 4.7 mostrano le funzioni di trasferimento della risposta stazionaria in termini di spostamenti assoluti della sovrastruttura e della fondazione. Gli spostamenti sono normalizzati rispetto allo spostamento al suolo in campo libero $U_{gy} = 1$. Questa serie di risultati tende ad amplificare il contributo alla risposta dei modi superiori, e di conseguenza porta ad un incremento degli errori connessi all'applicazione dell'analisi modale classica.

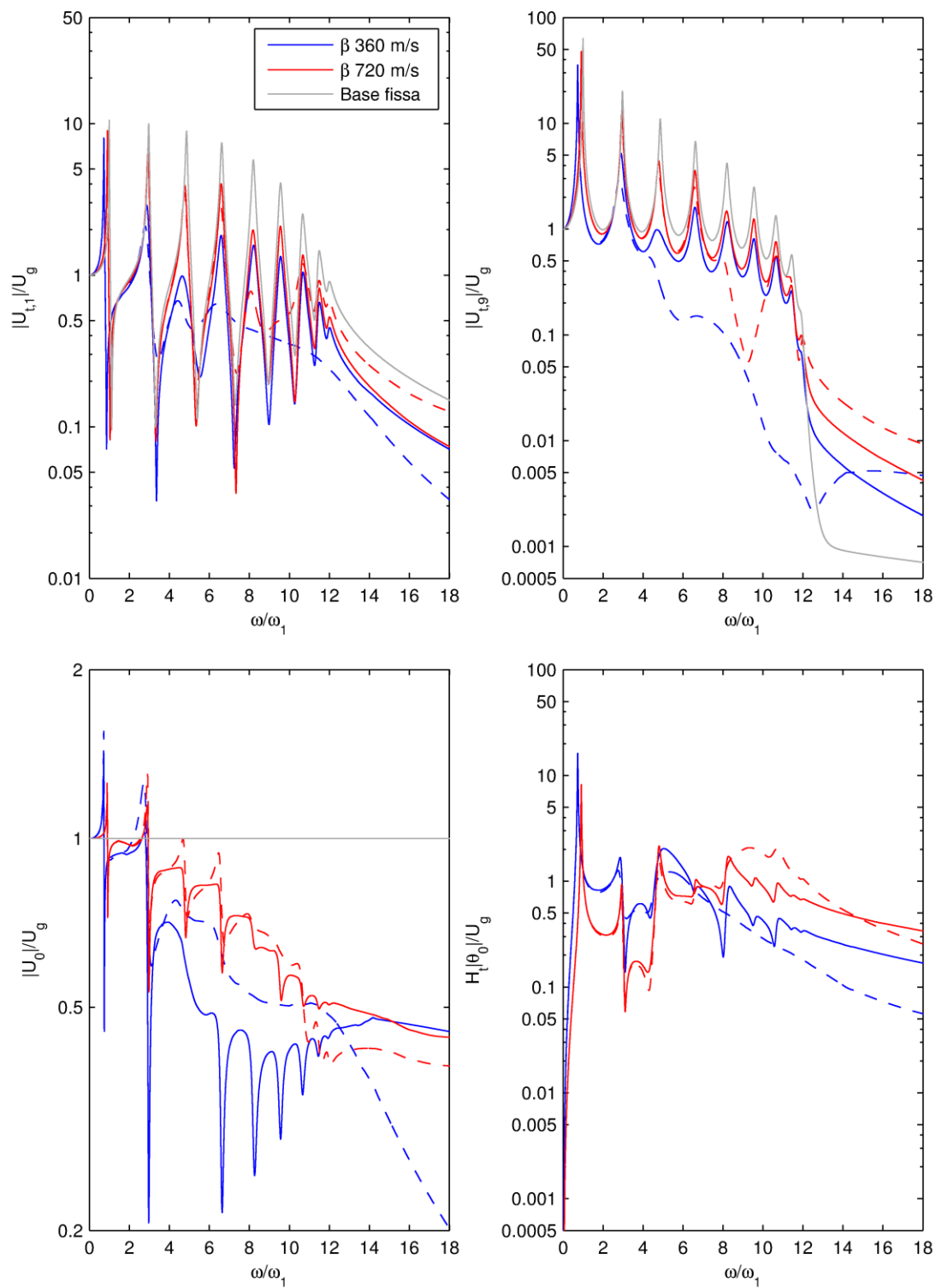


Figura 4.6 Funzioni di trasferimento dell'ampiezza degli spostamenti assoluti normalizzati (linee continue: soluzione esatta; linee tratteggiate: analisi modale); input in spostamento unitario.

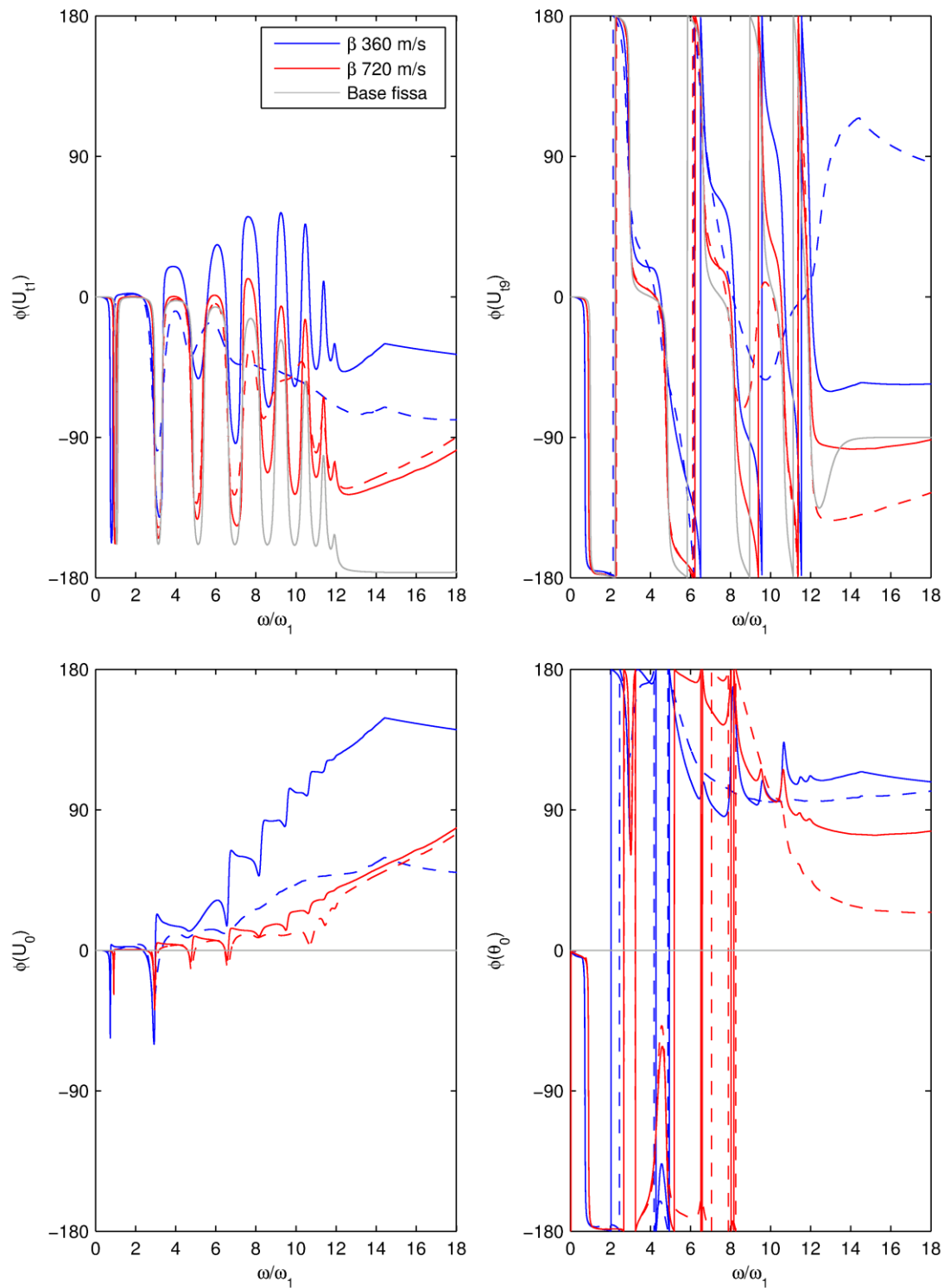


Figura 4.7 Funzioni di trasferimento degli angoli di fase degli spostamenti assoluti normalizzati (linee continue: soluzione esatta; linee tratteggiate: analisi modale); input in spostamento unitario.

4.4. Discussione sull'accuratezza dell'analisi modale

Dai risultati riportati nel paragrafo precedente emerge che l'analisi modale classica non permette una accurata valutazione della risposta alle medie e alte frequenze. In particolare, per entrambi i casi di input (onda armonica di ampiezza unitaria in spostamento o accelerazione), l'analisi modale comporta deviazioni dalla soluzione esatta che iniziano ad essere significative dopo le prime frequenze di risonanza. Tale risultato contrasta con le evidenze di Bielak presentate al Capitolo 3. Una stima numerica dell'errore connesso all'applicazione dell'analisi modale è fornita dai valori delle due misure di errore introdotte al §3.5. Le Tabelle 4.6 e 4.7 elencano, rispettivamente, le misure di errore in termini di spostamenti relativi/assoluti per un input costituito da un'accelerazione/spostamento unitari. Gli errori sono decisamente maggiori di quelli ottenuti per i casi studio analizzati da Bielak, specialmente per quanto riguarda la risposta della fondazione. L'accuratezza della soluzione modale aumenta al crescere della rigidità del terreno. Tale incremento è più evidente per la risposta della sovrastruttura che per quella della fondazione.

Nei casi analizzati da Bielak, gli errori connessi con l'applicazione dell'analisi modale erano sostanzialmente nulli. Per la struttura a nove piani analizzata, la misura di errore μ_1 assume valori massimi pari a circa il 10% e il 6% per le due rigidità di terreno considerate. Errori maggiori sono osservabili per la misura μ_2 , in modo particolare per la risposta della fondazione. Analizzando l'accuratezza della risposta in termini di spostamenti assoluti indotti da un input in spostamento unitario, la maggiore significatività dei modi superiori comporta un notevole incremento delle misure di errore. L'errore nella densità di potenza spettrale (μ_1), aumenta fino al 41% e al 18%, rispettivamente per la risposta del primo e dell'ultimo piano della sovrastruttura.

Al fine di identificare l'origine della mancanza di accuratezza dell'analisi modale, è stata analizzata l'importanza dei termini fuori diagonale della matrice di smorzamento proiettata nello spazio modale. In effetti, la principale approssimazione dell'analisi modale classica per problemi di SSI è proprio quella di trascurare tali termini.

Tabella 4.6 Misure di errore della risposta in spostamenti relativi, input in accelerazione unitario.

| Grandezza di risposta | μ_1 | | μ_2 | |
|-----------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| | $\beta = 360 \text{ m/s}$ | $\beta = 720 \text{ m/s}$ | $\beta = 360 \text{ m/s}$ | $\beta = 720 \text{ m/s}$ |
| U_1 | 0.093 | 0.030 | 0.126 | 0.040 |
| U_g | 0.085 | 0.027 | 0.108 | 0.029 |
| U_s | 0.102 | 0.061 | 0.376 | 0.272 |
| θ_s | 0.090 | 0.029 | 0.096 | 0.028 |

Tabella 4.7 Misure di errore della risposta in spostamenti assoluti, input in spostamento unitario.

| Grandezza di risposta | μ_1 | | μ_2 | |
|-----------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| | $\beta = 360 \text{ m/s}$ | $\beta = 720 \text{ m/s}$ | $\beta = 360 \text{ m/s}$ | $\beta = 720 \text{ m/s}$ |
| $U_{t,1}$ | 0.410 | 0.244 | 0.522 | 0.314 |
| $U_{t,9}$ | 0.177 | 0.072 | 0.255 | 0.125 |
| U_0 | 0.371 | 0.109 | 0.734 | 0.125 |
| θ_0 | 0.247 | 0.851 | 0.269 | 0.687 |

Una procedura simile a quella di seguito presentata è stata utilizzata da Warburton e Soni (1977), i quali hanno formulato una disuguaglianza che permette di stabilire quando i termini fuori diagonale possano essere trascurati mantenendo una certa accuratezza nel risultato finale.

L'applicazione della trasformazione modale ad un sistema non classicamente smorzato porta, a rigore, al seguente sistema di equazioni accoppiate nello spazio modale:

$$\ddot{\tilde{\eta}}_i + \sum_{j=1}^n \bar{C}_{ij} \dot{\tilde{\eta}}_j + \omega_i^2 \tilde{\eta}_i = \tilde{\beta}_i \cdot \ddot{U}_g, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.6)$$

dove n è il numero dei gradi di libertà del sistema, pari a $N+2$ nel caso di vibrazioni piane traslazione-rocking di una struttura a N gradi di libertà, e \bar{C}_{ij} è l'elemento (i, j) della matrice di dissipazione modale $[\bar{C}] = [\Phi]^T [C] [\Phi]$. È opportuno notare che, nel tentativo di considerare la dipendenza dalla frequenza della parte immaginaria della matrice di impedenza, la matrice di smorzamento risultante $[\bar{C}]$ non è simmetrica. Infatti, nel contesto del metodo di analisi considerato, la matrice di dissipazione modale viene formata assemblando per righe i vettori

$\{\bar{C}_j\}^T = \left(\{\phi_j\}^T [C(\tilde{\omega}_j)] \{\phi_j\} \right)^T$, ottenuti separatamente per ciascun modo. I valori di \bar{C}_{ij} per $\beta = 360$ e 720 m/sec sono elencati rispettivamente in Tabella 4.8 e 4.9.

L'effetto di tali termini può essere studiato più in dettaglio considerando la risultante delle forze di smorzamento per ciascun modo:

$$\tilde{F}_{Di} = \sum_{j=1}^n \bar{C}_{ij} \dot{\tilde{\eta}}_j \quad (4.7)$$

In vicinanza della frequenza di risonanza del sistema $\tilde{\omega}_i$, una stima approssimata delle ampiezze modali può essere ottenuta ignorando i termini fuori diagonale:

$$|\tilde{\eta}_j(\tilde{\omega}_i)| = \frac{|\beta_j \ddot{U}_g|}{\tilde{\omega}_j^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - (\tilde{\omega}_i/\tilde{\omega}_j)^2\right]^2 + 4\xi_j^2 (\tilde{\omega}_i/\tilde{\omega}_j)^2}} \quad (4.8)$$

che, per $i=j$, si riduce a:

$$|\tilde{\eta}_i(\tilde{\omega}_i)| = \frac{|\beta_i \ddot{U}_g|}{2\xi_i \tilde{\omega}_i^2} \quad (4.9)$$

Considerando la variazione delle velocità nello spazio modale $\dot{\tilde{\eta}}_j$, appare più appropriato confrontare i termini $\bar{C}_{ij}(\dot{\tilde{\eta}}_j/\dot{\tilde{\eta}}_i)$, piuttosto che soltanto i termini \bar{C}_{ij} . In tal senso, è possibile introdurre, per vibrazioni armoniche, i seguenti coefficienti normalizzati:

$$\tilde{\xi}_{ij} = \frac{1}{2\tilde{\omega}_i} |\bar{C}_{ij}(\tilde{\omega}_i)| \left| \dot{\tilde{\eta}}_j(\tilde{\omega}_i) / \dot{\tilde{\eta}}_i(\tilde{\omega}_i) \right| \quad (4.10)$$

Utilizzando le Equazioni (4.7), (4.8) e (4.9) si trova che:

$$\tilde{\xi}_{ij} = \frac{|\bar{C}_{ij}(\tilde{\omega}_i)|}{2\tilde{\omega}_i} \frac{2\tilde{\xi}_i (\tilde{\omega}_i/\tilde{\omega}_j)^2 (\beta_j/\beta_i)}{\sqrt{\left[1 - (\tilde{\omega}_i/\tilde{\omega}_j)^2\right]^2 + 4\tilde{\xi}_j^2 (\tilde{\omega}_i/\tilde{\omega}_j)^2}} \quad (4.11)$$

in cui i valori sulla diagonale $\tilde{\xi}_{ii} = \tilde{\xi}_i$ corrispondono ai coefficienti di smorzamento utilizzati nell'analisi modale classica. I termini fuori diagonale $\tilde{\xi}_{ij}$ ($j \neq i$) quantificano

l'accoppiamento tra i modi che viene trascurato dall'approccio classico. I valori di $\tilde{\xi}_{ij}$ per $\beta = 360$ e 720 m/sec sono elencati in Tabella 4.10 e 4.11. I rapporti relativi massimi tra termini fuori diagonale e termini sulla diagonale sono elencati in Tabella 4.12.

Tabella 4.8 Coefficienti \bar{C}_{ij} della matrice di dissipazione modale, per $\beta = 360$ m/sec.

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|------------------|-------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 0.37 | -0.84 | 1.11 | 1.16 | -1.85 | 2.64 | -3.01 | 3.58 | -3.86 | 3.99 | -3.17 |
| 2 | -0.73 | 4.59 | -4.07 | -7.32 | 7.88 | -11.87 | 13.16 | -15.77 | 16.91 | -17.48 | 13.87 |
| 3 | 2.14 | -3.90 | 11.02 | -3.52 | -11.43 | 13.53 | -17.18 | 19.99 | -22.05 | 22.60 | -18.08 |
| 4 | -1.76 | -8.12 | -4.30 | 42.47 | -9.02 | 22.11 | -19.50 | 24.79 | -25.13 | 26.42 | -20.65 |
| 5 | -2.25 | 7.86 | -11.52 | -9.00 | 19.87 | -25.29 | 29.25 | -34.73 | 37.58 | -38.74 | 30.83 |
| 6 | 2.33 | -12.17 | 13.30 | 22.78 | -25.37 | 40.20 | -42.31 | 50.71 | -54.40 | 56.22 | -44.63 |
| 7 | -3.21 | 13.40 | -17.20 | -20.09 | 29.47 | -42.54 | 50.80 | -57.60 | 62.09 | -64.08 | 50.93 |
| 8 | 3.64 | -16.18 | 19.90 | 25.96 | -35.07 | 51.16 | -57.76 | 71.78 | -74.26 | 76.68 | -60.92 |
| 9 | -4.09 | 17.31 | -22.05 | -26.32 | 37.99 | -54.94 | 62.32 | -74.35 | 83.15 | -82.71 | 65.73 |
| 10 | 4.13 | -17.95 | 22.45 | 28.09 | -39.14 | 56.87 | -64.35 | 76.82 | -82.74 | 88.61 | -67.88 |
| 11 | -3.30 | 14.25 | -17.92 | -22.11 | 31.14 | -45.18 | 51.16 | -61.06 | 65.78 | -67.91 | 57.23 |

Tabella 4.9 Coefficienti \bar{C}_{ij} della matrice di dissipazione modale, per $\beta = 720$ m/sec.

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|--------------|-------------|-------------|-------------|---------------|
| 1 | 0.33 | -0.15 | 0.36 | -0.36 | 0.65 | -1.07 | 0.45 | 0.14 | -0.25 | 0.12 | 6.70 |
| 2 | -0.15 | 1.24 | -0.71 | 0.93 | -1.01 | 0.57 | 0.92 | -1.03 | 0.79 | -0.44 | -18.67 |
| 3 | 0.35 | -0.69 | 2.85 | -1.65 | 2.71 | -4.04 | 1.25 | 0.91 | -1.20 | 0.59 | 31.24 |
| 4 | -0.36 | 0.91 | -1.66 | 3.78 | -2.58 | 2.57 | 0.70 | -1.81 | 1.61 | -0.86 | -39.44 |
| 5 | 0.80 | -0.89 | 3.02 | -2.60 | 8.32 | -12.41 | 7.72 | -0.38 | -1.49 | 0.58 | 45.52 |
| 6 | -1.65 | 0.21 | -5.19 | 2.65 | -13.02 | 37.38 | -28.99 | 7.07 | 0.03 | 0.72 | -32.18 |
| 7 | 1.01 | 1.23 | 2.33 | 0.63 | 8.35 | -29.19 | 31.39 | -9.62 | 2.52 | -2.05 | -31.66 |
| 8 | -0.05 | -1.12 | 0.56 | -1.80 | -0.66 | 7.47 | -9.94 | 7.47 | -2.10 | 1.35 | 41.76 |
| 9 | -0.21 | 0.80 | -1.13 | 1.61 | -1.42 | -0.10 | 2.64 | -2.12 | 4.55 | -0.82 | -33.26 |
| 10 | 0.08 | -0.45 | 0.53 | -0.86 | 0.51 | 0.86 | -2.18 | 1.37 | -0.82 | 3.73 | 18.25 |
| 11 | 6.24 | -18.79 | 30.97 | -39.96 | 44.69 | -28.56 | -35.81 | 43.16 | -33.77 | 18.57 | 810.92 |

Tabella 4.10 Coefficienti di smorzamento $\tilde{\xi}_{ij}$, per $\beta = 360$ m/sec.

| i \ j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 0.019 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.003 | 0.060 | 0.002 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.021 | 0.023 | 0.090 | 0.006 | 0.016 | 0.009 | 0.006 | 0.005 | 0.004 | 0.004 | 0.002 |
| 4 | 0.035 | 0.078 | 0.031 | 0.271 | 0.080 | 0.063 | 0.027 | 0.023 | 0.018 | 0.015 | 0.009 |
| 5 | 0.020 | 0.032 | 0.030 | 0.027 | 0.115 | 0.046 | 0.025 | 0.019 | 0.015 | 0.013 | 0.008 |
| 6 | 0.028 | 0.062 | 0.035 | 0.078 | 0.113 | 0.187 | 0.101 | 0.071 | 0.054 | 0.045 | 0.028 |
| 7 | 0.044 | 0.075 | 0.046 | 0.069 | 0.109 | 0.204 | 0.203 | 0.143 | 0.109 | 0.091 | 0.061 |
| 8 | 0.059 | 0.104 | 0.060 | 0.097 | 0.132 | 0.239 | 0.266 | 0.256 | 0.201 | 0.172 | 0.132 |
| 9 | 0.071 | 0.119 | 0.069 | 0.102 | 0.143 | 0.247 | 0.279 | 0.297 | 0.274 | 0.236 | 0.205 |
| 10 | 0.074 | 0.127 | 0.071 | 0.110 | 0.146 | 0.248 | 0.275 | 0.311 | 0.291 | 0.278 | 0.246 |
| 11 | 0.048 | 0.082 | 0.046 | 0.069 | 0.093 | 0.156 | 0.172 | 0.198 | 0.189 | 0.177 | 0.175 |

Tabella 4.11 Coefficienti di smorzamento $\tilde{\xi}_{ij}$, per $\beta = 720$ m/sec.

| i \ j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|-------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 0.013 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 0.000 | 0.016 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.001 | 0.001 | 0.022 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 |
| 4 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.021 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.002 |
| 5 | 0.003 | 0.001 | 0.004 | 0.004 | 0.038 | 0.001 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.007 |
| 6 | 0.144 | 0.007 | 0.113 | 0.060 | 0.352 | 0.146 | 0.883 | 0.135 | 0.000 | 0.002 | 0.137 |
| 7 | 0.011 | 0.005 | 0.006 | 0.002 | 0.025 | 0.014 | 0.121 | 0.026 | 0.002 | 0.001 | 0.017 |
| 8 | 0.000 | 0.001 | 0.000 | 0.001 | 0.000 | 0.001 | 0.009 | 0.026 | 0.001 | 0.000 | 0.007 |
| 9 | 0.000 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000 | 0.002 | 0.002 | 0.015 | 0.000 | 0.005 |
| 10 | 0.000 | 0.001 | 0.000 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.012 | 0.004 |
| 11 | 0.116 | 0.120 | 0.115 | 0.115 | 0.088 | 0.009 | 0.078 | 0.075 | 0.039 | 0.012 | 1.610 |

Tabella 4.12 Rapporto massimo tra termini fuori diagonale e termini in diagonale $\max(\tilde{\xi}_{ij}/\tilde{\xi}_i)$.

| $\max(\tilde{\xi}_{ij}/\tilde{\xi}_i)$ | | |
|--|-----------------------------|-----------------------------|
| i | $\beta = 360 \text{ m/sec}$ | $\beta = 720 \text{ m/sec}$ |
| 1 | 0.002 | 0.000 |
| 2 | 0.055 | 0.012 |
| 3 | 0.257 | 0.047 |
| 4 | 0.294 | 0.098 |
| 5 | 0.402 | 0.194 |
| 6 | 0.605 | 6.040 |
| 7 | 1.005 | 0.219 |
| 8 | 1.038 | 0.330 |
| 9 | 1.083 | 0.345 |
| 10 | 1.117 | 0.370 |
| 11 | 1.128 | 0.075 |

Dalle analisi effettuate, è possibile concludere che:

- (i) trascurare i termini fuori diagonale può portare ad errori significativi nella risposta dei modi superiori, dal momento che il loro contributo allo smorzamento totale può essere dello stesso ordine, se non maggiore, di quello dei termini in diagonale;
- (ii) il numero di modi il cui coefficiente di smorzamento è ben calcolato dall'analisi modale classica aumenta con la rigidità del terreno;
- (iii) la soluzione ottenuta attraverso l'analisi modale inizia a perdere accuratezza quando l'entità dei termini fuori diagonale è circa il 20% di quella dei termini in diagonale;
- (iv) considerando l' i -esimo modo, il contributo alla forza di smorzamento dei modi $j > i$ è in genere più piccolo di quello dei modi $j < i$. Ciò spiega anche perchè gli errori nei coefficienti di smorzamento modale sono più piccoli per i modi a bassa frequenza rispetto ai modi ad alta frequenza. Tale risultato è in accordo con quanto evidenziato da Bielak (1975, 1976).

4.5. Studio parametrico dell'analisi modale

Nella presente sezione viene presentato uno studio dettagliato del metodo di analisi modale classica, basato sull'analisi parametrica della struttura campione a nove piani. Viene esaminata la dipendenza delle grandezze modali del sistema interagente dalla velocità di propagazione delle onde di taglio nel terreno; il senso fisico dei risultati ottenuti viene interpretato attraverso confronti con diversi casi limite.

4.5.1. Descrizione dei casi limite

Quattro differenti situazioni limite si rivelano particolarmente utili per l'interpretazione dei risultati numerici. Due di esse sono relative a valori estremali della rigidezza del terreno, le altre due si riferiscono a configurazioni limite della struttura in elevazione.

Dal momento che l'analisi parametrica viene condotta variando la rigidezza del terreno, appare naturale considerare i casi limite di suolo perfettamente flessibile (*Flexible soil*) e perfettamente rigido (*Rigid soil*). Nel primo caso, la matrice di massa del sistema rimane invariata, mentre la matrice di rigidezza possiede valori nulli di rigidezza e smorzamento dei gradi di libertà relativi alla fondazione. Due delle undici frequenze proprie del sistema sono nulle, e le relative forme modali corrispondono a moti rigidi della sovrastruttura, di traslazione e rotazione intorno al punto di riferimento O . Per contro, il caso di suolo perfettamente rigido corrisponde alla struttura su base fissa. I due gradi di libertà della fondazione sono bloccati, e il sistema possiede nove frequenze proprie finite.

Il terzo caso limite considera la variazione della rigidezza del suolo, ma assume che la sovrastruttura sia infinitamente rigida; tale caso è denominato *Rigid Superstructure*, e identificato nel seguito con la sigla *RS*. Tale assunzione riduce il problema a quello di un corpo rigido interagente con il terreno, la cui massa totale è data dalla somma della massa della fondazione e di quella della sovrastruttura. Da un punto di vista analitico, le due equazioni del moto relative a tale caso limite possono essere ricavate considerando le sottomatrici 2×2 inferiori delle matrici di massa e rigidezza del sistema. Per vibrazioni libere, esse corrispondono a:

$$[M_{oo}]\{\ddot{U}_s\} + [C_s]\{\dot{U}_s\} + [K_s]\{U_s\} = \{0\} \quad (4.12)$$

dove la matrice di massa $[M_{oo}] = \begin{bmatrix} m_o + \sum_{i=1}^N m_i & m_o h_g + \sum_{i=1}^N m_i h_i \\ m_o h_g + \sum_{i=1}^N m_i h_i & I_o + \sum_{i=1}^N m_i h_i^2 \end{bmatrix}$ tiene conto della

massa della fondazione e della sovrastruttura. Il corrispondente problema agli autovalori è pertanto:

$$(-\omega_{RS}^2 [M_{oo}] + [K_s])\{\phi_{RS}\} = \{0\} \quad (4.13)$$

Il quarto caso limite deriva dalla considerazione che la risposta alle alte frequenze del sistema interagente è caratterizzata da piccoli spostamenti assoluti della sovrastruttura. È pertanto conveniente considerare un sistema fittizio, in cui le masse della sovrastruttura sono tenute completamente bloccate. Tale modello ausiliario è denominato *Fixed Superstructure*, e identificato nel seguito con la sigla *FS*. Conseguentemente all'ipotesi finora adottata, di telaio a comportamento shear-type, il sistema ausiliario può essere ricavato a partire dal sistema originale, introducendo dei vincoli di cerniera sui gradi di libertà della sovrastruttura; una rappresentazione schematica del modello è fornita in Figura 4.8.

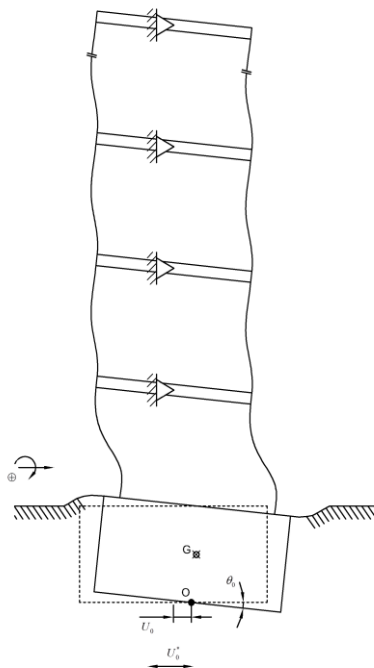


Figura 4.8 Rappresentazione schematica del modello ausiliario Fixed-Superstructure.

Per ricavare le equazioni del moto del modello ausiliario *Fixed Superstructure* è necessario riformulare le equazioni del moto del sistema, esprimendo i gradi di libertà della sovrastruttura in termini degli spostamenti $\{U_r\}$ relativi rispetto al moto di input in fondazione $\{U_o^*\}$ (anzichè in termini di spostamenti relativi alla fondazione $\{U_s\}$).

Introducendo la trasformazione di coordinate:

$$\begin{Bmatrix} U_b \\ U_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\alpha \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_r \\ U_s \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

il sistema di equazioni (2.30) diventa, per il caso di vibrazioni non smorzate in assenza di eccitazione sismica:

$$\begin{bmatrix} M_b & 0 \\ 0 & M_o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_r \\ \ddot{U}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_b & -K_b\alpha \\ -\alpha^T K_b & K_s + \alpha^T K_b \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_r \\ U_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_b \\ F_o - \alpha^T F_b \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

Se la struttura in elevazione viene mantenuta bloccata, applicando le azioni vincolari fittizie $\{F_b\} = -[K_b][\alpha]\{U_s\}$ e $\{F_o\} = -[\alpha]^T[K_b][\alpha]\{U_s\}$, allora $\{U_r\} = \{0\}$ e il sistema di equazioni (4.15) si riduce a:

$$[M_o]\{\ddot{U}_o\} + [K_s + \alpha^T K_b \alpha]\{U_s\} = \{0\} \quad (4.16)$$

a cui è associato il seguente problema agli autovalori:

$$(-\omega_{FS}^2 [M_o] + [K_s + \alpha^T K_b \alpha])\{\phi_{FS}\} = \{0\} \quad (4.17)$$

Nel caso di vibrazioni nel piano del modello di riferimento shear-type, la matrice di rigidezza del caso *Fixed Superstructure* è data da:

$$[K_s^{FS}] = \begin{bmatrix} K_{HH} + k_1 & K_{HM} + k_1 h_1 \\ K_{HM} + k_1 h_1 & K_{MM} + k_1 h_1^2 + \sum_{i=2}^N k_i (h_i - h_{i-1})^2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

in cui k_i e h_i sono le rigidezze e le quote dei piani ($h_0 = 0$).

4.5.2. Analisi delle frequenze proprie e delle forme modali

L'analisi parametrica della struttura campione è stata condotta per un intervallo di velocità di propagazione delle onde di taglio nel terreno da 10 a 1200 m/sec, con passo di 10 m/sec. I valori numerici delle frequenze proprie sono elencati in Tabella 4.13 e 4.14, rispettivamente per il sistema interagente e per i casi limite di sovrastruttura rigida e incernierata. Le tabelle riportano i risultati relativi a sette valori di rigidità del terreno, scelti in modo da avere una variazione unitaria del parametro adimensionale $\beta/(\omega_1 a)$. L'andamento delle frequenze proprie per l'intero intervallo di β è diagrammato in Figura 4.9.

Tabella 4.13 Frequenze proprie del sistema (Hz).

| Velocità onde di taglio | | Modo del sistema | | | | | | | | | | |
|-------------------------|--------------------|------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|
| β | $\beta/\omega_1 a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Flexible soil | 0.0 | 0.00 | 0.00 | 7.55 | 8.11 | 12.25 | 15.26 | 18.50 | 21.08 | 23.28 | 24.85 | 25.83 |
| 150 | 1.0 | 0.87 | 4.56 | 8.30 | 8.75 | 12.62 | 15.56 | 18.67 | 21.18 | 23.33 | 24.87 | 25.84 |
| 300 | 2.0 | 1.44 | 5.97 | 9.43 | 11.34 | 13.52 | 16.68 | 19.51 | 21.80 | 23.69 | 25.03 | 25.88 |
| 450 | 3.0 | 1.74 | 6.23 | 9.98 | 13.97 | 14.22 | 17.48 | 20.29 | 22.72 | 24.55 | 25.74 | 27.93 |
| 600 | 4.0 | 1.89 | 6.32 | 10.21 | 14.13 | 16.83 | 18.30 | 20.49 | 22.93 | 24.68 | 25.78 | 34.31 |
| 750 | 5.0 | 1.98 | 6.36 | 10.32 | 14.20 | 17.46 | 20.50 | 21.19 | 23.06 | 24.71 | 25.80 | 41.57 |
| 900 | 6.0 | 2.03 | 6.38 | 10.38 | 14.23 | 17.57 | 20.57 | 22.85 | 24.65 | 24.94 | 25.82 | 49.11 |
| 1050 | 7.0 | 2.06 | 6.39 | 10.41 | 14.25 | 17.62 | 20.59 | 22.94 | 24.72 | 25.79 | 28.48 | 56.78 |
| Rigid soil | ∞ | 2.16 | 6.42 | 10.51 | 14.31 | 17.72 | 20.64 | 23.00 | 24.74 | 25.80 | ∞ | ∞ |

Tabella 4.14 Frequenze proprie (Hz) per i casi Rigid Superstructure e Fixed Superstructure.

| Velocità onde di taglio | | RS | | FS | |
|-------------------------|--------------------|------|-------|-------|-------|
| β | $\beta/\omega_1 a$ | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 150 | 1.0 | 0.94 | 5.33 | 7.87 | 15.06 |
| 300 | 2.0 | 1.90 | 10.66 | 10.96 | 20.03 |
| 450 | 3.0 | 2.87 | 16.00 | 14.18 | 26.63 |
| 600 | 4.0 | 3.84 | 21.32 | 17.56 | 33.86 |
| 750 | 5.0 | 4.80 | 26.64 | 21.08 | 41.35 |
| 900 | 6.0 | 5.77 | 31.96 | 24.69 | 48.99 |
| 1050 | 7.0 | 6.75 | 37.27 | 28.37 | 56.71 |

La flessibilità del terreno induce una riduzione delle frequenze proprie del sistema, maggiormente pronunciata per i modi a bassa frequenza. Analizzando il grafico, è possibile osservare la graduale transizione delle frequenze del sistema $\tilde{\omega}_i$ da quelle relative al caso limite di terreno perfettamente flessibile ω'_i a quelle relative al caso limite di terreno rigido ω_i . Il caso *Rigid Superstructure* è un asintoto per le due frequenze proprie più basse, quando il parametro $\beta/(\omega_1 a)$ tende a zero. Il caso *Fixed Superstructure* è un asintoto per le due frequenze più alte, quando il parametro $\beta/\omega_1 a$ tende all'infinito.

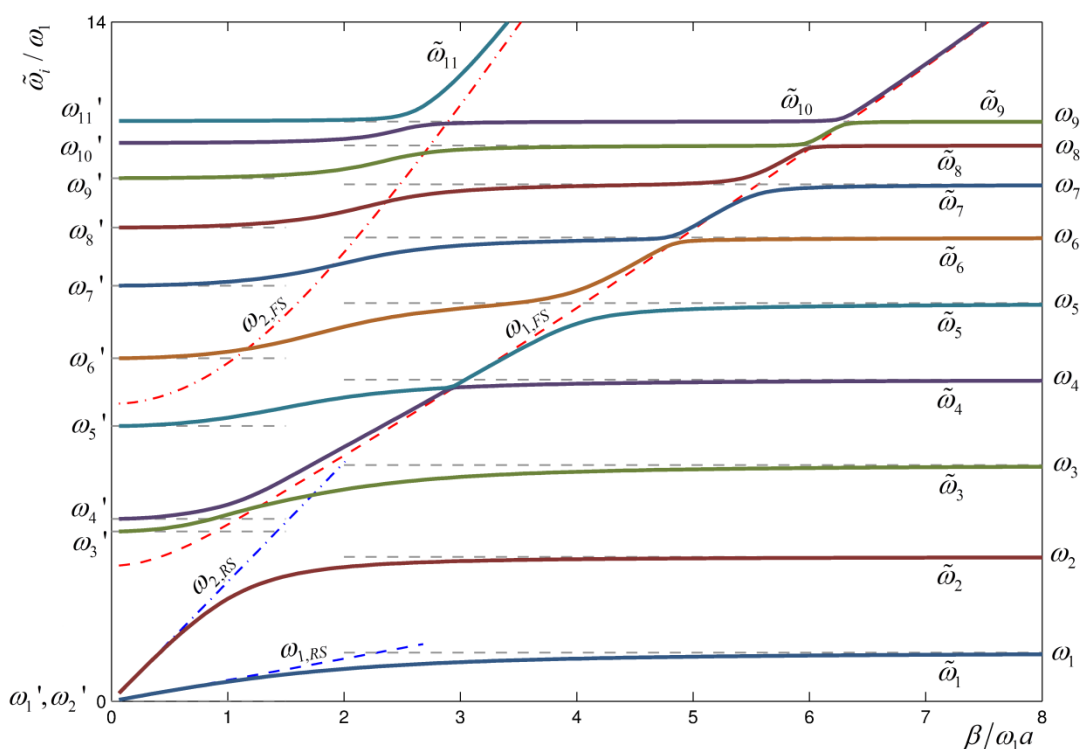


Figura 4.9 Grafico delle frequenze proprie normalizzate $\tilde{\omega}_i/\omega_1$ in funzione di $\beta/(\omega_1 a)$.

Un risultato significativo dell'analisi parametrica riguarda l'andamento delle grandezze modali nel campo di frequenze prossimo a quelle del modello ausiliario *Fixed Superstructure*. Infatti, è possibile osservare che le maggiori variazioni delle frequenze proprie del sistema avvengono in prossimità delle frequenze proprie del modello *FS*. Ciò è vero in particolare per $\omega_{1,FS}$, che sembra predire accuratamente la transizione tra due modi consecutivi. Per una migliore comprensione del significato di tali modi ausiliari, è conveniente analizzare, insieme al grafico delle frequenze, le

variazioni delle forme modali. Le Figure 4.10 e 4.11 mostrano le forme modali del sistema per i sette valori di rigidezza del terreno considerati, insieme a quelle relative ai casi limite di suolo perfettamente flessibile e rigido. In Figura 4.12 sono rappresentate le forme modali della fondazione, per i casi limite *RS* e *FS*. I modi della fondazione sono diagrammati in termini del rapporto tra rotazione normalizzata e traslazione alla base. In entrambi i casi *RS* e *FS*, il primo modo della fondazione è un modo prevalentemente rotazionale, il secondo un modo prevalentemente traslazionale.

Tranne che per valori molto bassi di β , nove degli undici modi corrispondono a quelli della struttura a base fissa, perturbati per effetto dei movimenti della fondazione. Le variazioni rispetto alla condizione di base fissa diminuiscono al crescere della rigidezza del terreno. L'interazione comporta l'introduzione di due modi aggiuntivi, la cui frequenza è fortemente dipendente dalla rigidezza del terreno. Per effetto dei valori dei coefficienti di impedenza e della geometria della fondazione, il modo aggiuntivo a frequenza più bassa è legato alla rotazione della fondazione; quello a frequenza più alta è legato alla traslazione della fondazione. In generale, i due modi sono una combinazione di movimenti della fondazione e della struttura.

La frequenza del modo aggiuntivo inferiore è accuratamente predetta dalla prima frequenza del modello *FS* ($\omega_{1,FS}$), e cresce monotonamente con la rigidezza relativa del terreno. Gli spostamenti modali di rotazione della fondazione possono essere osservati nei modi (3, 4, 5, 6, 7, 9, 10), rispettivamente per i sette casi diagrammati in figura. La seconda frequenza del modello *FS* ($\omega_{2,FS}$) invece, rappresenta una buona stima della frequenza del modo di traslazione della fondazione soltanto per terreni relativamente rigidi, quando $\beta/\omega_1 a > 3$. Per terreni intermedi, invece, appare piuttosto ambiguo isolare il modo traslazionale della fondazione, dal momento che molti dei modi ad alta frequenza sono caratterizzati da una significativa traslazione della fondazione. Per quanto non così precisa come nel caso di $\omega_{1,FS}$, la frequenza $\omega_{2,FS}$ comunque individua una zona caratterizzata da un significativo contributo della traslazione della fondazione.

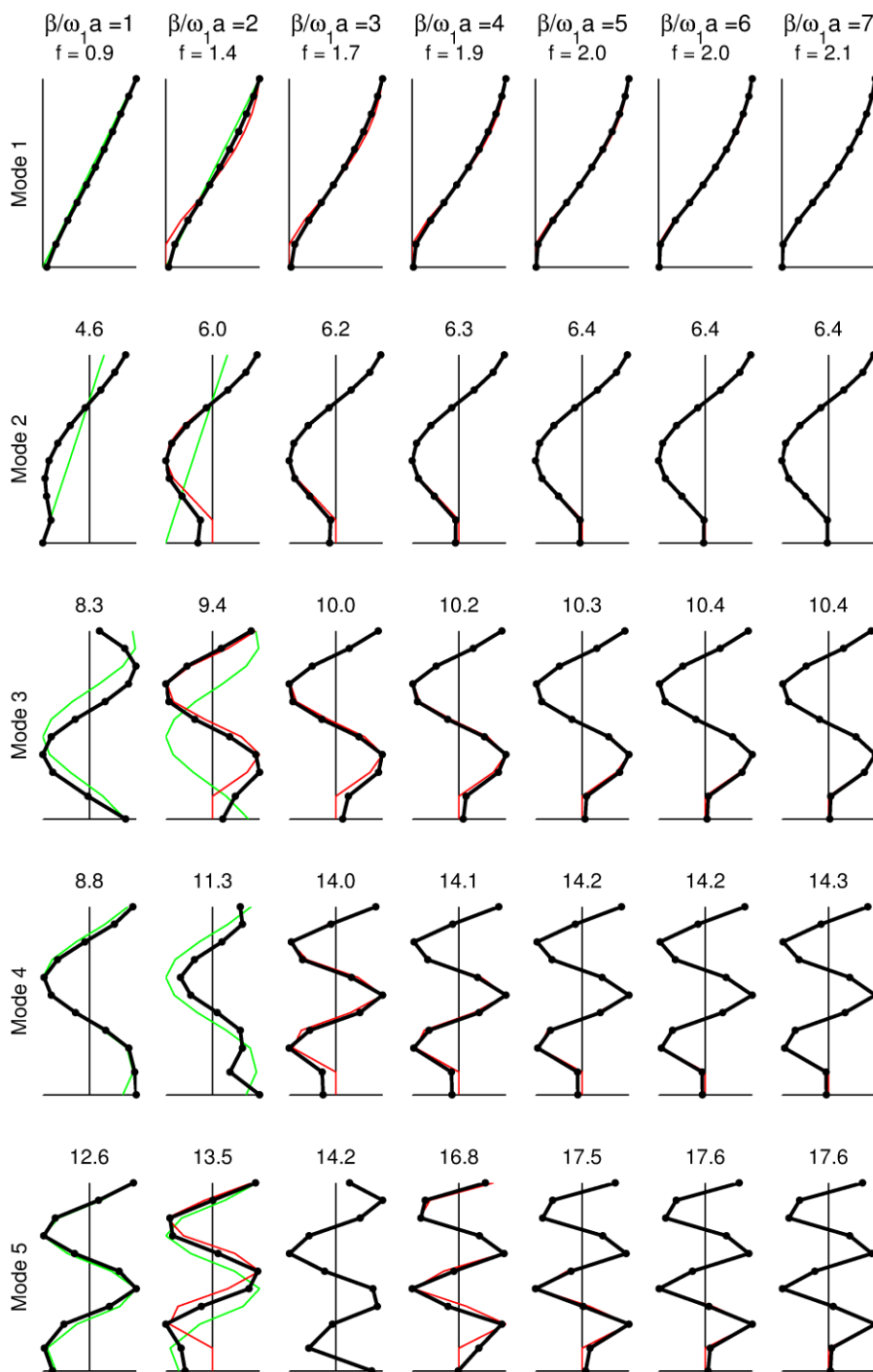


Figura 4.10 Forme modali del sistema, modi da 1 a 5. Linee verdi: forme modali per terreno perfettamente flessibile; linee rosse: forme modali per struttura su base fissa.

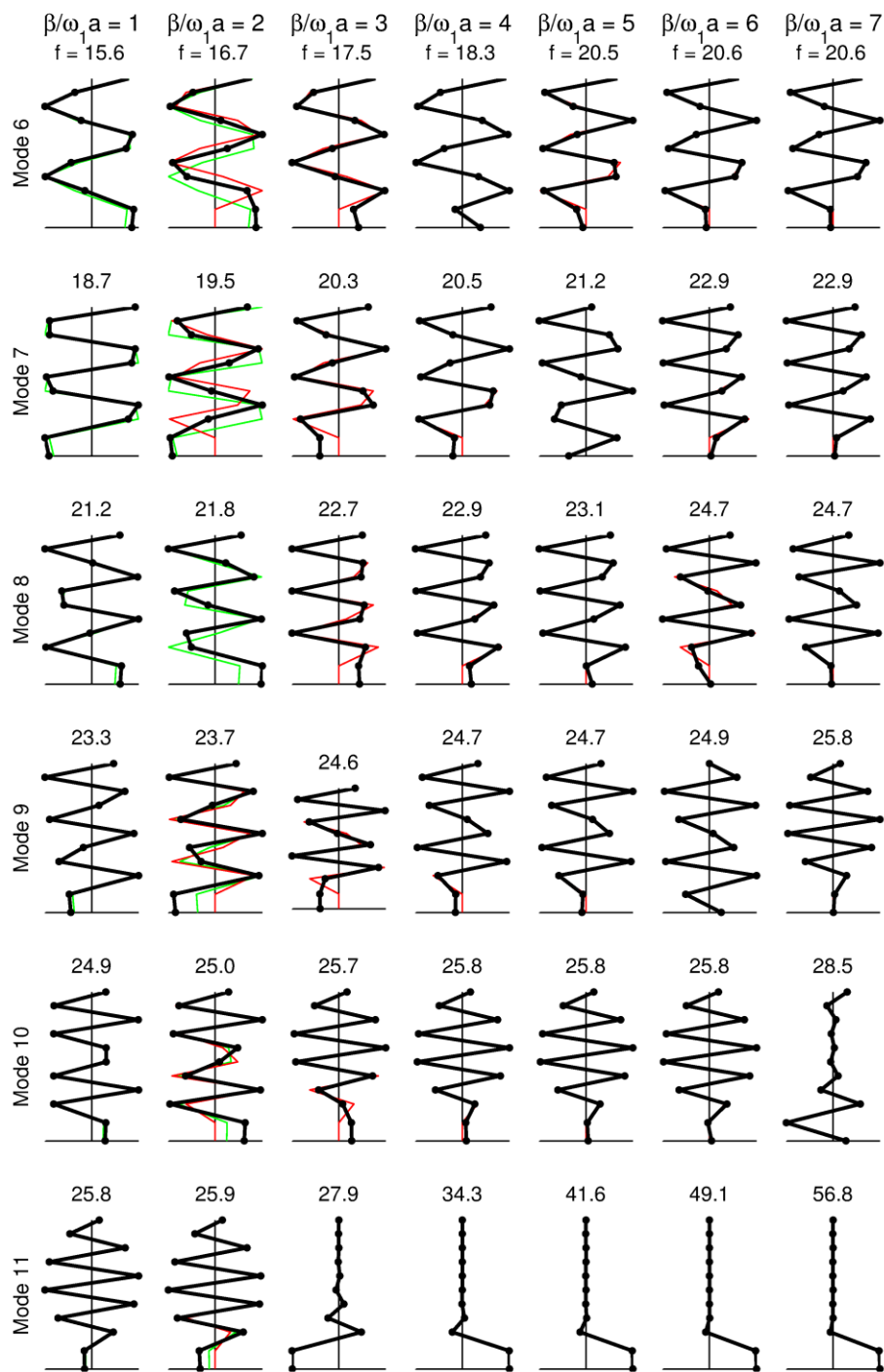


Figura 4.11 Forme modali del sistema, modi da 6 a 11. Linee verdi: forme modali per terreno perfettamente flessibile; linee rosse: forme modali per struttura su base fissa.

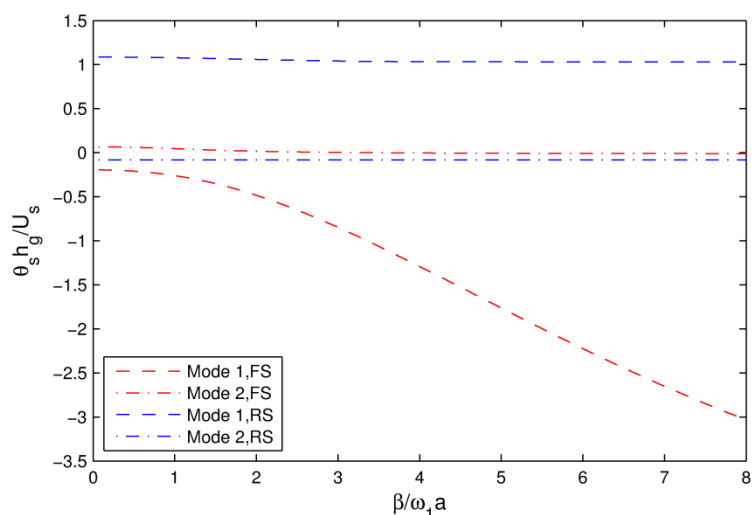


Figura 4.12 Forme modali per il caso Rigid Superstructure (blu) e Fixed Superstructure (rosso)

È pertanto possibile concludere che:

- (i) per terreni con velocità di propagazione delle onde di taglio intermedie ed elevate, è possibile distinguere, nel set di 11 modi del sistema interagente, 9 modi che corrispondono a quelli della struttura a base fissa, perturbati dalla flessibilità della fondazione, e 2 modi aggiuntivi che coinvolgono essenzialmente rotazione e traslazione della fondazione. Le frequenze dei due modi aggiuntivi corrispondono a quelle del modello *Fixed Superstructure*;
- (ii) per basse velocità di propagazione delle onde di taglio, gli effetti di interazione sui modi ad alta frequenza sono più significativi, e le associate forme modali risultano dall'interazione degli spostamenti della fondazione e della sovrastruttura. Tuttavia appare ancora possibile isolare uno dei due modi aggiuntivi, legato alla rotazione della fondazione, la cui frequenza è individuata da $\omega_{1,FS}$. Elevate traslazioni della fondazione si riscontrano nelle forme modali ad alta frequenza, in prossimità di $\omega_{2,FS}$;
- (iii) nel caso in esame, il limite tra la situazione (i) e (ii) è approssimativamente individuato dal parametro $\beta/\omega_1 a = 3$. Da tale punto in poi, la frequenza del secondo modo della fondazione è più alta della frequenza dei modi della struttura a base fissa, pertanto non si ha interazione tra la traslazione della fondazione e le deformazioni della struttura.

Ulteriori elementi di comprensione degli effetti di interazione possono essere acquisiti analizzando in dettaglio la variazione del primo modo aggiuntivo (rocking della fondazione) al crescere della rigidità del terreno. La frequenza di tale modo, predetta accuratamente da $\omega_{1,FS}$, cresce monotonicamente con la rigidità del terreno, e progressivamente interseca le curve relative alle altre frequenze proprie del sistema. La Figura 4.13 mostra le frequenze del sistema e le corrispondenti forme modali in prossimità dell'intersezione tra le curve relative al quarto e quinto modo, che avviene approssimativamente per $\beta^* = 2.8\omega_1 a$. Per $\beta < \beta^*$, i modi 2-3-5-6 corrispondono ad una perturbazione di uno dei modi a base fissa, mentre per $\beta > \beta^*$, lo stesso vale per i modi 3-4-6-7. Si consideri ora la quarta forma modale a base fissa, caratterizzata da tre nodi. L'evoluzione della forma modale, per effetto della crescente rigidità del suolo, può essere seguita considerando il percorso A-B-C-D in Figura 4.13, e cioè passando dal quinto al quarto modo del sistema interagente, rispettivamente prima e dopo β^* . Analogamente, l'evoluzione del modo di rocking della fondazione può essere seguita considerando il percorso 1-2-3-4, e cioè passando dal quarto al quinto modo del sistema. Simili transizioni vengono riscontrate, a valori crescenti di β , tra il modo di rocking della fondazione e gli altri modi del sistema.

Da quanto detto, si evince come in vicinanza della frequenza caratteristica $\omega_{1,FS}$ la variazione delle frequenze proprie del sistema interagente sia un chiaro esempio del fenomeno generale di *Curve Veering* nei problemi agli autovalori [Leissa (1974); Perkins e Mote (1986)].

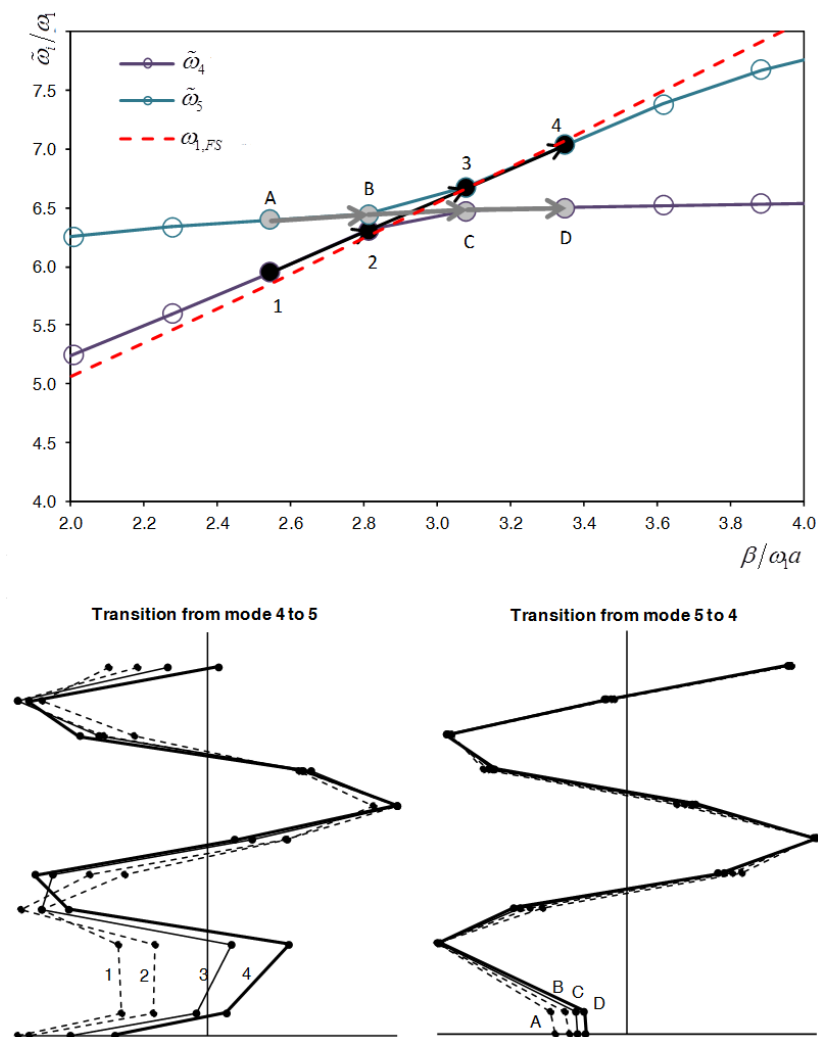


Figura 4.13 Transizione tra quarta e quinta forma modale.

4.5.3. *Analisi dei fattori di partecipazione e dei coefficienti di smorzamento*

I valori dei fattori di partecipazione normalizzati per input traslazionale e rotazionale sono elencati rispettivamente nelle tabelle 4.15 e 4.16. Il contributo del modo fondamentale è sempre dominante. In particolare, per il fattore di partecipazione della rotazione, il contributo dei modi superiori al primo è praticamente trascurabile.

Tabella 4.15 Fattori di partecipazione normalizzati per traslazione.

| $\tilde{\beta}_{1,i} / \sqrt{M_{tot}}$ | | | | | | | | | | | | |
|--|--------------------|------------------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| Velocità onde di taglio | | Modo del sistema | | | | | | | | | | |
| β | $\beta/\omega_1 a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Flessibile | 0.0 | 0.86 | -0.51 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 150 | 1.0 | 0.88 | -0.45 | 0.05 | 0.13 | -0.05 | 0.04 | -0.02 | 0.01 | -0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 300 | 2.0 | 0.88 | -0.35 | 0.11 | 0.20 | -0.13 | 0.12 | -0.10 | 0.08 | -0.06 | 0.04 | -0.02 |
| 450 | 3.0 | 0.88 | -0.31 | 0.15 | -0.13 | 0.09 | 0.12 | -0.09 | 0.08 | -0.06 | 0.04 | -0.22 |
| 600 | 4.0 | 0.88 | -0.30 | 0.16 | -0.12 | 0.03 | 0.10 | -0.08 | 0.06 | -0.04 | 0.02 | 0.28 |
| 750 | 5.0 | 0.87 | -0.29 | 0.16 | -0.12 | 0.08 | -0.05 | -0.05 | 0.06 | -0.03 | 0.02 | 0.30 |
| 900 | 6.0 | 0.87 | -0.29 | 0.16 | -0.12 | 0.08 | -0.06 | 0.04 | -0.01 | 0.04 | 0.02 | 0.32 |
| 1050 | 7.0 | 0.87 | -0.29 | 0.16 | -0.11 | 0.08 | -0.06 | 0.04 | -0.03 | 0.01 | 0.01 | 0.32 |
| Rigido | ∞ | 0.87 | -0.28 | 0.16 | -0.11 | 0.08 | -0.06 | 0.04 | -0.02 | 0.01 | --- | --- |

Tabella 4.16 Fattori di partecipazione normalizzati per rotazione.

| $\tilde{\beta}_{2,i} / H_{tot} \sqrt{M_{tot}}$ | | | | | | | | | | | | |
|--|--------------------|------------------|------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|
| Velocità onde di taglio | | Modo del sistema | | | | | | | | | | |
| β | $\beta/\omega_1 a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Flessibile | 0.0 | 0.65 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 150 | 1.0 | 0.65 | 0.03 | -0.03 | 0.00 | -0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 300 | 2.0 | 0.65 | 0.02 | 0.05 | -0.06 | -0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 450 | 3.0 | 0.64 | 0.02 | 0.05 | -0.01 | -0.10 | -0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | -0.01 |
| 600 | 4.0 | 0.64 | 0.01 | 0.05 | -0.01 | 0.09 | -0.08 | 0.00 | -0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.01 |
| 750 | 5.0 | 0.63 | 0.01 | 0.05 | -0.01 | 0.04 | -0.04 | 0.12 | -0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 900 | 6.0 | 0.63 | 0.01 | 0.05 | -0.01 | 0.03 | -0.01 | 0.04 | -0.07 | -0.12 | -0.02 | 0.00 |
| 1050 | 7.0 | 0.63 | 0.01 | 0.05 | -0.01 | 0.02 | -0.01 | 0.02 | -0.01 | 0.01 | -0.15 | 0.00 |
| Rigido | ∞ | 0.63 | 0.01 | 0.04 | -0.01 | 0.02 | -0.01 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | --- | --- |

I valori dei coefficienti di smorzamento modale sono elencati in Tabella 4.17. I grafici in Figura 4.14 e 4.15 mostrano la variazione di tali coefficienti per i primi sei modi del sistema. Il coefficiente di smorzamento totale è decomposto nei contributi di: (1) smorzamento strutturale (struttura su base fissa) del modo i ; (2) smorzamento strutturale dei modi $j \neq i$; (3) smorzamento per radiazione legato ai termini di impedenza C_{HH} , C_{HM} e C_{MM} .

Per i primi modi, è possibile osservare una diminuzione generalizzata del coefficiente di smorzamento al crescere della rigidità del terreno. Per terreni

deformabili lo smorzamento è prevalentemente legato alla radiazione di onde nel sottotuo, dal momento che i piccoli spostamenti relativi della sovrastruttura sono insufficienti ad attivare meccanismi di dissipazione significativi. Lo smorzamento legato alla traslazione della fondazione è decisamente maggiore di quello legato alla rotazione. Al crescere della velocità delle onde di taglio, l'importanza relativa dello smorzamento strutturale aumenta, aumentando le deformazioni della sovrastruttura, e i coefficienti di smorzamento tendono a quelli della struttura su base fissa. Un significativo contributo dello smorzamento per radiazione è comunque presente per i primi modi anche nel caso di terreni molto rigidi.

I coefficienti di smorzamento per i modi superiori, invece, non seguono un andamento monotono al crescere della rigidità del terreno, ma esibiscono due picchi, in prossimità delle frequenze caratteristiche $\omega_{1,FS}$ e $\omega_{2,FS}$. Come mostrato in Figura 4.15, il primo picco, più alto, è legato alla radiazione per traslazione della fondazione; il secondo alla radiazione per rotazione. Inoltre, al crescere di β , il secondo picco si sposta da un modo al successivo, in accordo alla transizione mostrata in Figura 4.13. In tal senso, la curva relativa a $\xi_{1,FS}$ rappresenta un involuppo dei picchi dei coefficienti di smorzamento per i modi superiori.

Tabella 4.17 Coefficienti di smorzamento modale.

| | | ξ_i | | | | | | | | | | |
|-------------------------|--------------------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| Velocità onde di taglio | | Modo del sistema | | | | | | | | | | |
| β | $\beta/\omega_1 a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| Flessibile | 0.0 | --- | --- | 0.019 | 0.023 | 0.018 | 0.013 | 0.012 | 0.011 | 0.011 | 0.010 | 0.01 |
| 150 | 1.0 | 0.039 | 0.560 | 0.168 | 0.346 | 0.180 | 0.163 | 0.103 | 0.064 | 0.038 | 0.021 | 0.01 |
| 300 | 2.0 | 0.023 | 0.100 | 0.115 | 0.331 | 0.172 | 0.277 | 0.273 | 0.267 | 0.191 | 0.103 | 0.03 |
| 450 | 3.0 | 0.015 | 0.034 | 0.058 | 0.063 | 0.242 | 0.096 | 0.088 | 0.094 | 0.076 | 0.041 | 1.17 |
| 600 | 4.0 | 0.014 | 0.020 | 0.031 | 0.030 | 0.141 | 0.152 | 0.033 | 0.030 | 0.021 | 0.013 | 1.53 |
| 750 | 5.0 | 0.013 | 0.015 | 0.021 | 0.020 | 0.032 | 0.037 | 0.228 | 0.031 | 0.014 | 0.011 | 1.62 |
| 900 | 6.0 | 0.012 | 0.013 | 0.016 | 0.015 | 0.019 | 0.016 | 0.028 | 0.069 | 0.195 | 0.017 | 1.66 |
| 1050 | 7.0 | 0.012 | 0.012 | 0.014 | 0.013 | 0.015 | 0.013 | 0.014 | 0.011 | 0.011 | 0.276 | 1.67 |
| Rigido | ∞ | 0.010 | 0.010 | 0.010 | 0.010 | 0.010 | 0.010 | 0.010 | 0.010 | 0.010 | --- | --- |

In generale, come osservato da Bielak (1975, 1976), il contributo allo smorzamento del modo i del sistema, da parte dei modi a base fissa $j \neq i$, è sempre

molto piccolo. È comunque opportuno osservare che i coefficienti di smorzamento modale per i modi superiori, nel caso di terreni relativamente deformabili, sono affetti da errori significativi legati alla diagonalizzazione forzata della matrice di smorzamento modale.

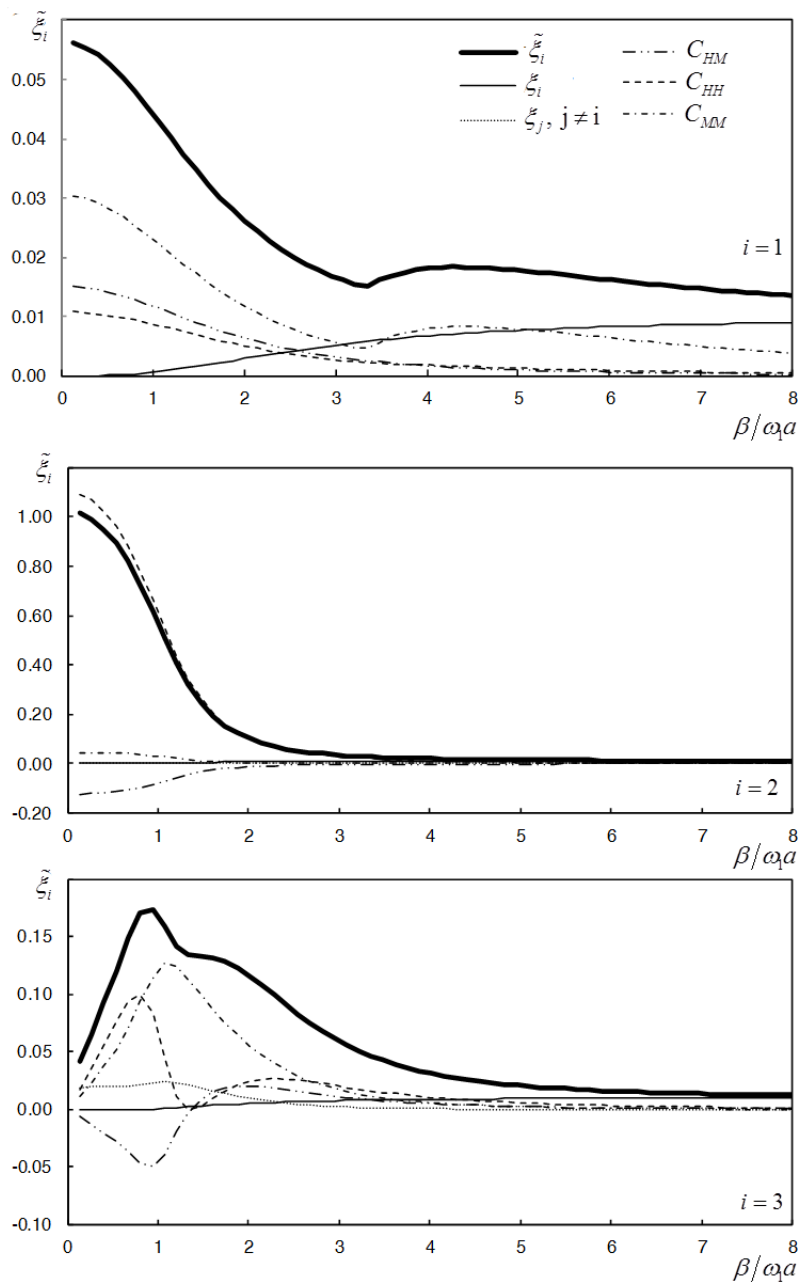


Figura 4.14 Contributo delle componenti di smorzamento per i modi da 1 a 3.

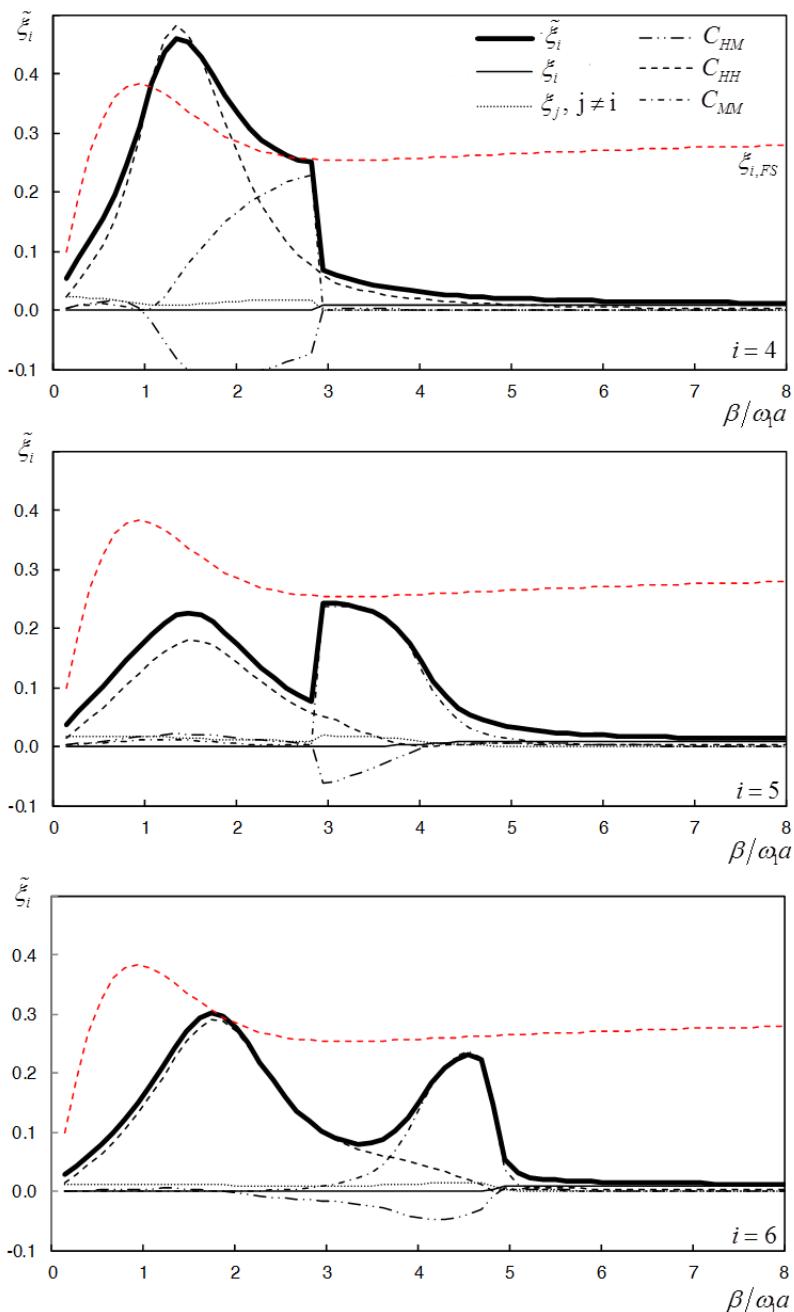


Figura 4.15 Contributo delle componenti di smorzamento per i modi da 4 a 6.

4.6. Conclusioni

È stato presentato uno studio dettagliato del metodo di analisi modale classica per problemi di interazione terreno-struttura. Lo studio è condotto sul modello di un edificio a nove piani su mezzo elastico. Nonostante la mancanza di rigore analitico, l'analisi modale classica si rivela piuttosto efficace, e capace di interpretare il senso fisico dei risultati ottenuti. Tra le altre, le principali conseguenze indotte dal tener conto della flessibilità della fondazione consistono in una riduzione delle frequenze

di risonanza del sistema, e in una variazione dello smorzamento per effetto della radiazione di onde nel sottosuolo. Questi ed altri effetti sono stati osservati ed interpretati analizzando la risposta modale del sistema.

L'analisi modale classica, se applicata a problemi di SSI, fornisce una soluzione approssimata e non rigorosa, principalmente perchè trascura l'accoppiamento tra i modi indotto dallo smorzamento nel terreno. L'accuratezza della soluzione approssimata è stata valutata analizzando la risposta stazionaria della struttura e della fondazione per diversi valori di velocità delle onde di taglio nel terreno. È stata introdotta una misura quantitativa dell'errore connesso all'uso di tale metodo di analisi. L'accuratezza dell'analisi modale classica diminuisce al diminuire della rigidezza del terreno; deviazioni significative dalla soluzione esatta sono riscontrabili per le medie e alte frequenze nel caso di terreni relativamente flessibili.

L'origine della mancanza di accuratezza dell'analisi modale classica è stata investigata attraverso una procedura simile a quella adottata da Warburton e Soni (1977). L'ipotesi di trascurare i termini fuori diagonale può comportare errori significativi nella valutazione della risposta dei modi superiori, dal momento che il loro contributo può essere dello stesso ordine, se non maggiore, di quello dei termini in diagonale. Il numero di modi il cui coefficiente di smorzamento è accuratamente predetto dall'approccio modale aumenta con la rigidezza del terreno.

I risultati qui trovati appaiono in contrasto con quelli riportati da Bielak (1975, 1976) in uno degli studi più completi inerenti l'analisi modale per problemi di SSI. Per le due strutture test esaminate da Bielak, l'applicazione dell'analisi modale comportava errori trascurabili. Un confronto in termini globali tra la struttura qui analizzata e quelle considerate da Bielak è presentato in Tabella 4.18. Le principali differenze sono:

- (i) Bielak ha considerato strutture piuttosto flessibili e snelle;
- (ii) per i casi studio di Bielak, il rapporto tra il peso totale e l'area della fondazione è tale che la pressione di contatto è bassa;
- (iii) Bielak ha considerato il caso di fondazioni dirette, mentre la fondazione dell'edificio a nove piani qui analizzato è immersa nel terreno.

L'approfondimento della fondazione genera un aumento del contributo dello smorzamento per radiazione;

- (iv) Bielak ha considerato casi di terreni relativamente rigidi rispetto alla struttura. Il valore più piccolo del parametro adimensionale che esprime la rigidità relativa terreno-struttura considerato è pari a $\beta/\omega_1 a = 4.1$. Nel presente studio, si considera un valore minimo di $\beta/\omega_1 a = 2.41$.

Tabella 4.18 Confronto tra il presente caso studio (edificio a nove piani) con i casi analizzati da Bielak. I valori relativi alle strutture di Bielak sono ricavati utilizzando la densità di massa nominale del terreno pari a $\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$.

| Parametro | Bielak (1975, 1976) | | Studio presente |
|---|---------------------|----------------|-----------------|
| | 3-piani | 5-piani | 9-piani |
| f_1 (Hz) | 1.771 | 1.466 | 2.16 |
| T_1 (sec) | 0.56 | 0.68 | 0.46 |
| $M_b / \rho a^3$ | 6.997 | 2.930 | 4.955 |
| h / a | 6.00 | 4.33 | 4.15 |
| h_e / a | 0.0 | 0.0 | 0.5 |
| $\sum m_i / \pi a^2$ (Kg/m ²) | 7795 | 7460 | 32094 |
| $\sum m_i g / \pi a^2$ (KN/m ²) | 76.47 | 73.19 | 314.84 |
| $\beta / \omega_1 a$ | 7.7, 15.4, 30.8 | 4.1, 8.1, 16.3 | 2.41, 4.82 |

Infine, l'effetto della variabilità della velocità di propagazione delle onde di taglio è stato investigato attraverso un'analisi modale parametrica della struttura campione, variando il parametro adimensionale $\beta/\omega_1 a$. Diversi casi limite (terreno perfettamente flessibile, struttura su base fissa, struttura rigida) sono stati utilizzati per l'interpretazione dei risultati. È stato introdotto un modello ausiliario (*Fixed Superstructure*) che si rivela particolarmente utile a distinguere le forme modali connesse alle deformazioni della sovrastruttura e quelle connesse agli spostamenti della fondazione. I principali risultati dell'analisi possono essere così riassunti:

- (i) per terreni relativamente rigidi ($\beta/\omega_1 a \geq 3$) è possibile distinguere N modi (*modi strutturali*) legati alle deformazioni della sovrastruttura, e 2 modi aggiuntivi (*modi della fondazione*) legati agli spostamenti della fondazione. I modi strutturali rappresentano una perturbazione dei modi

della struttura su base fissa; i modi della fondazione possono essere accuratamente individuati attraverso quelli del modello ausiliario *Fixed Superstructure*;

- (ii) per terreni più deformabili soltanto le forme modali a più bassa frequenza corrispondono a modi strutturali perturbati. I modi a più alta frequenza risultano da una forte interazione tra spostamenti della sovrastruttura e traslazione della fondazione. Un modo aggiuntivo, legato alla rotazione della fondazione, può comunque essere identificato e accuratamente predetto dalla frequenza più bassa del modello *Fixed Superstructure*.
- (iii) la variazione delle frequenze proprie e delle forme modali all'aumentare della rigidità del terreno è caratterizzata da un chiaro esempio di *Curve Veering*, il cui andamento può essere previsto utilizzando i risultati del modello ausiliario introdotto.

CAPITOLO 5

MODELLO 1-DOF EQUIVALENTE PER ANALISI MULTI-MODALE APPROSSIMATA¹

5.1. Generalità

Il presente capitolo presenta un metodo approssimato di soluzione del classico problema agli autovalori per l'analisi di sistemi interagenti terreno-struttura. L'approccio proposto porta alla formulazione di un nuovo modello equivalente, consistente in un oscillatore elementare su suolo viscoelastico, definito in maniera tale da approssimare la risposta di un sistema a più gradi di libertà in prossimità di ciascuna frequenza di risonanza. Il modello si basa sulla conoscenza delle autosoluzioni relative alla struttura a base fissa e delle funzioni di impedenza della fondazione. Con riferimento al modo i -esimo del sistema interagente, viene mostrato come l'effetto dei modi della struttura a base fissa a frequenza inferiore a quella considerata sia assimilabile ad un incremento di rigidità e smorzamento della fondazione, mentre l'effetto dei modi a frequenza superiore sia assimilabile ad un

¹ Dal materiale presentato di seguito è tratto l'articolo:
Lanzi, A., & Luco, J. E. (2012). Equivalent 1-DOF Model for Approximate Analysis of Soil-Structure Interaction, *Proc. Of the 15th World Conference in Earthquake Engineering, Lisbon, Sept. 23th-28th 2012.*

incremento della massa della fondazione. La principale utilità del modello proposto è legata ad una migliore comprensione degli effetti di interazione, piuttosto che ai vantaggi computazionali che ne derivano. Il modello può essere utilizzato per stimare le grandezze modali di una struttura a N gradi di libertà su suolo elastico, risolvendo N problemi agli autovalori di dimensione 3. L'accuratezza del modello è stata valutata confrontando la risposta stazionaria con quella ottenuta mediante la soluzione delle equazioni del moto nel dominio della frequenza; inoltre, le frequenze proprie ottenute attraverso il modello proposto sono state confrontate con quelle calcolate mediante la soluzione numerica del problema agli autovalori completo.

5.2. Obiettivi del lavoro

I primi studi sull'applicazione dell'analisi modale a problemi di SSI sono stati condotti da Parmelee (1967), il quale ha considerato il modello, ormai standard, di un oscillatore elementare supportato da una fondazione rigida su di un terreno elastico. Il modello possiede tre gradi di libertà corrispondenti a: traslazione orizzontale della massa dell'oscillatore, traslazione e rotazione della fondazione. Tale modello è stato poi analizzato più a fondo da Bielak (1971), Jennings e Bielak (1973) e Veletsos e Meek (1974), ed è alla base dei metodi di analisi semplificati previsti da moderni codici di progettazione (es. ASCE 7-10, NEHRP 2009). Per estendere l'applicabilità del modello allo studio della risposta di strutture a più di un grado di libertà, Parmelee proponeva di focalizzare l'attenzione sulla risposta in vicinanza delle frequenze di risonanza della struttura su base fissa, adottando quale massa dell'oscillatore elementare un'appropriata massa modale equivalente, e modificando l'altezza e la massa della fondazione in maniera da tener conto dell'inerzia dei rimanenti modi. Nella formulazione di Parmelee, la rigidezza dell'oscillatore corrispondeva alla rigidezza modale del modo i -esimo della struttura a base fissa, mentre rigidezza e smorzamento della fondazione non venivano modificati.

Nel presente studio viene rivisitato il problema della formulazione di modelli equivalenti, costituiti da oscillatori elementari su suolo elastico, capaci di approssimare la risposta, per ciascun picco di risonanza, di una struttura multipiano interagente con il terreno di fondazione. Concettualmente, il processo è illustrato in Figura 5.1. In primo luogo, il modello di riferimento (Figura 2.6) può essere sostituito da quello equivalente rappresentato in Figura 5.1a, che consiste in N

oscillatori elementari, supportati dalla stessa fondazione, ciascuno caratterizzato dalle corrispondenti grandezze modali della struttura su base fissa: frequenza propria ω_i , smorzamento ξ_i , massa modale M_i e altezza H_i . Tale equivalenza è stata per prima formulata da Tajimi (1967). Il modello proposto, rappresentato in Figura 5.1b, consiste invece in N differenti oscillatori elementari, ciascuno supportato da una fondazione equivalente, le cui caratteristiche di massa, rigidezza e smorzamento sono modificate per tener conto dell'effetto dei rimanenti modi della sovrastruttura a base fissa. Il modello considera esplicitamente soltanto un modo per volta per descrivere la risposta strutturale, mentre il contributo degli altri modi è considerato attraverso una modifica delle caratteristiche della fondazione equivalente.

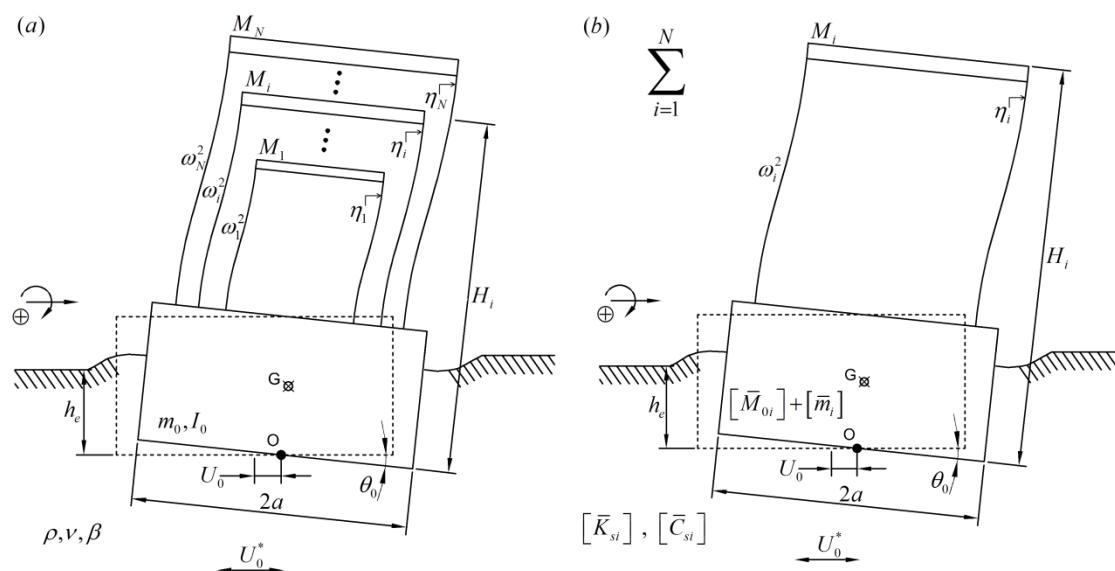


Figura 5.1 Modelli equivalenti del sistema interagente: (a) esprimendo i gradi di libertà della sovrastruttura in termini dei modi della struttura a base fissa (Tajimi, 1967), e (b) utilizzando il modello 1-DOF proposto.

Il modello proposto permette, in primo luogo, di stimare le grandezze modali del sistema interagente risolvendo indipendentemente N problemi agli autovalori di dimensione 3, anziché un unico problema di dimensione $N+2$. È importante sottolineare come il vantaggio conseguibile in termini di efficienza computazionale sia piuttosto modesto, e di per sé non basterebbe a giustificare la derivazione presentata. Tuttavia, due aspetti devono essere considerati: (1) il modello permette una profonda comprensione qualitativa degli effetti di interazione, e (2) la riduzione della dimensione del problema si presta ad ulteriori sviluppi analitici che possono portare alla formulazione di soluzioni in forma chiusa del problema agli autovalori.

Infatti, un problema agli autovalori di dimensione 3 può essere facilmente risolto utilizzando la nota soluzione di Cardano. Soluzioni analitiche semplificate possono rivelarsi utili per un controllo preliminare dei risultati ottenuti con modelli più complessi, nonché come strumento di diretta applicazione in fase progettuale.

5.3. Formulazione analitica

Il modello equivalente viene derivato a partire dalle equazioni del moto del sistema interagente, dopo aver applicato la trasformazione di coordinate utilizzando i modi di vibrare della struttura su base fissa. Viene utilizzata una procedura di condensazione per ridurre le dimensioni del sistema a tre gradi di libertà: (1) l'ampiezza dell' i -esima forma modale della struttura su base fissa, e (2) la traslazione e (3) la rotazione della fondazione.

In primo luogo vengono richiamate le equazioni del moto del sistema, in assenza di forze esterne:

$$\begin{bmatrix} M_b & M_b \alpha \\ \alpha^T M_b & M_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_b \\ \dot{U}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_b & 0 \\ 0 & C_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_b \\ \dot{U}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_b & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_b \\ U_s \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_b \alpha \\ M_{oo} \end{bmatrix} \{ \ddot{U}_o^* \} \quad (5.1)$$

Assumendo che la sovrastruttura posseda modi normali ortogonali (sistema classicamente smorzato), gli spostamenti possono essere espressi in termini delle coordinate modali attraverso la classica trasformazione:

$$\{ U_b \} = [\Phi] \{ \eta \} = \sum_{j=1}^{N+2} \{ \phi_j \} \eta_j \quad (5.2)$$

Sostituendo (5.2) in (5.1) e premoltiplicando per $[\Phi]^T$, le equazioni del moto nello spazio modale sono:

$$\begin{bmatrix} M & \beta^T \\ \beta & M_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta} \\ \ddot{U}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2D\Omega M & 0 \\ 0 & C_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{U}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega^2 M & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ U_s \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \beta^T \\ M_{oo} \end{bmatrix} \{ \ddot{U}_o^* \} \quad (5.3)$$

in cui $[M] = [M_r]$, $[D] = [\xi_r]$, $[\Omega] = [\omega_r]$ sono le matrici diagonali delle masse, dei coefficienti di smorzamento e delle frequenze proprie della struttura su base fissa, e $[\beta] = [\alpha]^T [M_b] [\Phi]$ è la corrispondente matrice dei fattori di partecipazione.

Nel caso di oscillazioni armoniche, è possibile esprimere le ampiezze modali in termini degli spostamenti assoluti della fondazione $\{U_o\} = \{U_s\} + \{U_o^*\}$ come:

$$\eta_i = (B_i - 1) M_i^{-1} \{\beta_i\}^T \{U_o\} \quad (5.4)$$

dove $B_i = [1 + 2i\xi_i(\omega/\omega_i)] / [1 - (\omega/\omega_i)^2 + 2i\xi_i(\omega/\omega_i)]$ è un coefficiente di amplificazione dinamica e $\{\beta_i\}^T = \{\phi_i\}^T [M_b] (\{1\}, \{h\})$.

La parte inferiore dell'equazione (5.3) corrisponde al sistema di equazioni del moto della fondazione, sotto l'azione delle forze esterne e di quelle $\{F\}_{sf}$ trasmesse dalla sovrastruttura:

$$-\omega^2 [M_o] \{U_o\} + i\omega [C_s] \{U_s\} + [K_s] \{U_s\} = -[\alpha]^T [M_b] (\{\ddot{U}_b\} + [\alpha] \{\ddot{U}_o\}) \quad (5.5)$$

in cui le forze $\{F\}_{sf}$ sono a destra dell'uguaglianza. Utilizzando la trasformazione

(5.2), l'equazione (5.4), e la relazione $\sum_{r=1}^N M_r^{-1} \{\beta_r\} \{\beta_r\}^T = [\alpha]^T [M_b] [\alpha]$, le forze

$\{F\}_{sf}$ possono essere espresse come:

$$\{F\}_{sf} = \omega^2 \sum_{i=1}^N B_i [\bar{m}_i] \{U_o\} \quad (5.6)$$

dove la matrice $[\bar{m}_i] = M_i^{-1} \{\beta_i\} \{\beta_i\}^T$ è data da:

$$[\bar{m}_i] = \hat{M}_i \begin{bmatrix} 1 & H_i \\ H_i & H_i^2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Le grandezze $\hat{M}_i = M_i^{-1} (\{\phi_i\}^T [M_b] \{1\})^2$ e $H_i = \{\phi_i\}^T [M_b] \{h\} / \{\phi_i\}^T [M_b] \{1\}$,

($i = 1, N$) rappresentano rispettivamente la massa modale e l'altezza modale.

Si considera ora la risposta in prossimità dell' i -esima frequenza propria della struttura su base fissa. Per frequenze ω diverse da ω_i , il coefficiente B_i può essere approssimato come:

$$B_i \approx \begin{cases} 1, & \omega/\omega_i \ll 1 \\ -(\omega_i/\omega)^2 [1 + 2i\xi_i(\omega/\omega_i)], & \omega/\omega_i \gg 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

Isolando nell'equazione (5.6) il contributo dell' i -esimo modo e introducendo l'approssimazione (5.8), si ha che:

$$\{F\}_{sf} = \left(\omega^2 \sum_{j=i}^N [\bar{m}_j] - \sum_{j=1}^{i-1} \omega_j^2 \left(1 + 2i\xi_j \frac{\omega}{\omega_j} \right) [\bar{m}_j] \right) \{U_0\} + \omega^2 \{\beta_i\} \eta_i \quad (5.9)$$

A questo punto, è opportuno introdurre la seguente normalizzazione dei modi della struttura su base fissa:

$$M_i = \{\phi_i\}^T [M_b] \{\phi_i\} = \{\phi_i\}^T [M_b] \{1\} \quad (5.10)$$

che porta al risultato $\hat{M}_i = M_i$. Utilizzando ora soltanto l'equazione relativa a η_i nella parte superiore di (5.3), e combinando i risultati di (5.5) e (5.9) per la parte inferiore, si ottiene il sistema di equazioni che governa il modello equivalente, e che contiene solo i tre gradi di libertà η_i , U_s e θ_s :

$$\begin{aligned} & \left(-\omega^2 \left[\begin{array}{c|c} \hat{M}_i & \{\beta_i\}^T \\ \hline \{\beta_i\} & [\bar{M}_{oi}] + [\bar{m}_i] \end{array} \right] + i\omega \left[\begin{array}{c|c} 2\xi_i \omega_i \hat{M}_i & \{0\} \\ \hline \{0\} & [\bar{C}_{si}] \end{array} \right] + \dots \right. \\ & \left. \dots + \left[\begin{array}{c|c} \omega_i^2 \hat{M}_i & \{0\} \\ \hline \{0\} & [\bar{K}_{si}] \end{array} \right] \right) \begin{Bmatrix} \eta_i \\ \{U_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega^2 \{\beta_i\}^T \\ [\bar{F}_i] \end{Bmatrix} \{U_0^*\} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Le matrici di massa, smorzamento e rigidezza equivalenti sono:

$$\begin{aligned} [\bar{M}_{oi}] &= [M_0] + \sum_{j=i+1}^N [\bar{m}_j] \\ [\bar{C}_{si}] &= [C_s] + \sum_{j=1}^{i-1} 2\xi_j \omega_j [\bar{m}_j] \\ [\bar{K}_{si}] &= [K_s] + \sum_{j=1}^{i-1} \omega_j^2 [\bar{m}_j] \end{aligned} \quad (5.12)$$

Le forze esterne equivalenti agenti sulla fondazione sono ottenute premoltiplicando il vettore del moto di input per:

$$[\bar{F}_i] = \omega^2 \left([M_0] + \sum_{j=i}^N [\bar{m}_j] \right) - i\omega \sum_{j=1}^{i-1} 2\xi_j \omega_j [\bar{m}_j] - \sum_{j=1}^{i-1} \omega_j^2 [\bar{m}_j] \quad (5.13)$$

La soluzione dell'equazione (5.11) fornisce la risposta del sistema in vicinanza della i -esima frequenza propria. Un numero di diversi sistemi equivalenti pari al numero dei gradi di libertà strutturali deve essere risolto per ottenere la risposta su tutto l'intervallo di frequenze.

5.4. Interpretazione fisica del modello 1-DOF equivalente

Analizzando l'equazione (5.11), è chiaro che il modello proposto può essere interpretato come un oscillatore elementare supportato da una fondazione rigida su terreno elastico. Il primo grado di libertà η_i descrive la deformazione della sovrastruttura, in termini di ampiezza dell' i -esima forma modale. La massa (\hat{M}_i), la rigidezza ($\omega_i^2 \hat{M}_i$), l'altezza (H_i), e il coefficiente di smorzamento (ξ_i) della sovrastruttura sono quelli corrispondenti alla rispettiva forma modale a base fissa. I rimanenti due gradi di libertà descrivono l'ampiezza del moto di traslazione e di rotazione della fondazione equivalente. Le matrici di massa, rigidezza e smorzamento della fondazione sono modificate per tenere conto dell'effetto dei rimanenti modi ($j \neq i$) della sovrastruttura su base fissa. In particolare, i modi a frequenza $\omega_j > \omega_i$ (modi superiori) sono tenuti in conto incrementando la massa della fondazione; i modi a frequenza $\omega_j < \omega_i$ (modi inferiori) sono tenuti in conto incrementando la rigidezza e lo smorzamento della molla e dello smorzatore che rappresentano le impedenze della fondazione.

È interessante evidenziare che nel modello equivalente in origine proposto da Parmelee (1967), in vicinanza dell' i -esimo modo, tutti i modi rimanenti (superiori e inferiori) contribuivano alla massa aggiuntiva della fondazione ($\Delta[m] = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N [\bar{m}_j]$), mentre nel modello qui proposto il contributo di massa aggiuntiva della fondazione è legato soltanto ai modi superiori ($\sum_{j=i+1}^N [\bar{m}_j]$). I due risultati sono identici per quanto riguarda il modo fondamentale, ma differiscono significativamente per i modi

superiori. Inoltre, Parmelee non considerava alcuna variazione di rigidità e smorzamento della fondazione associata ai modi inferiori. La derivazione qui proposta è in accordo con i risultati di Bielak (1975, 1976) che mostrano come il contributo allo smorzamento globale del sistema per un certo modo di vibrare sia dovuto in prevalenza ai modi a frequenza più bassa.

Una rappresentazione qualitativa del modello 1-DOF equivalente è riportata in Figura 5.2, con riferimento al caso più semplice di vibrazioni verticali. L'oscillatore elementare equivalente è rappresentato attraverso massa, rigidità e smorzamento del modo i -esimo della struttura su base fissa; i modi superiori sono rappresentati come una massa aggiuntiva rigidamente connessa alla fondazione; i modi inferiori sono rappresentati come una molla e uno smorzatore aggiuntivi connessi alla fondazione.

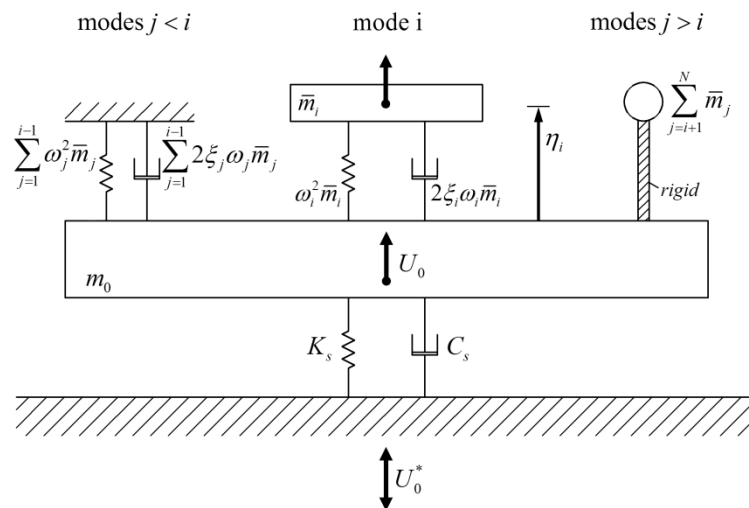


Figura 5.2 Rappresentazione schematica del modello 1-DOF equivalente per vibrazioni verticali.

5.5. Risultati numerici

Al fine di fornire alcuni risultati numerici ottenuti con il modello proposto, e di validarne l'accuratezza attraverso il confronto con soluzioni indipendenti, è stata condotta l'analisi della struttura campione a nove piani descritta nel precedente Capitolo 4.

5.5.1. Andamento dei termini aggiuntivi di massa, rigidezza e smorzamento

In primo luogo, per mostrare l'effetto dei diversi modi della struttura su base fissa, sono state calcolate le grandezze caratteristiche del modello equivalente applicato all'analisi del caso studio. L'andamento dei termini aggiuntivi di massa e rigidezza per i nove modelli equivalenti è diagrammato in Figura 5.3. I termini relativi alla massa sono normalizzati rispetto alla massa, momento delle masse e momento di inerzia totali della sovrastruttura a base fissa:

$$\Delta m/M_b = M_b^{-1} \sum_{j=i+1}^N \hat{M}_j, \quad \Delta S/S_b = S_b^{-1} \sum_{j=i+1}^N \hat{M}_j H_j, \quad \Delta I/I_b = I_b^{-1} \sum_{j=i+1}^N \hat{M}_j H_j^2 \quad (5.14)$$

I termini relativi alla rigidezza sono normalizzati rispetto alle rigidezze traslazionali, di accoppiamento e rotazionali del modello ausiliario *Fixed Superstructure* precedentemente introdotto. La ragione di tale normalizzazione deriva dall'osservazione, già ampiamente discussa, che il moto alle alte frequenze tende a quello della sovrastruttura bloccata.

$$\Delta K_{HH}/k_1, \quad \Delta K_{HM}/k_1 h_1, \quad \Delta K_{MM} / \left[k_1 h_1^2 + \sum_{r \neq 1} k_r (h_r - h_{r-1})^2 \right] \quad (5.15)$$

È possibile osservare che:

- (i) le masse traslazionali aggiuntive della fondazione per il primo e per il secondo modo sono circa il 15% e il 6% della massa totale della sovrastruttura. I corrispondenti momenti delle masse e momenti di inerzia sono estremamente piccoli. La massa aggiuntiva tende a zero per i modi superiori;
- (ii) i modi inferiori contribuiscono alla rigidezza e allo smorzamento aggiuntivi della fondazione. La rigidezza traslazionale aggiuntiva cresce gradualmente con l'ordine del modo considerato. La rigidezza rotazionale aggiuntiva aumenta prevalentemente dal primo al secondo modo, mantenendosi poi relativamente costante.

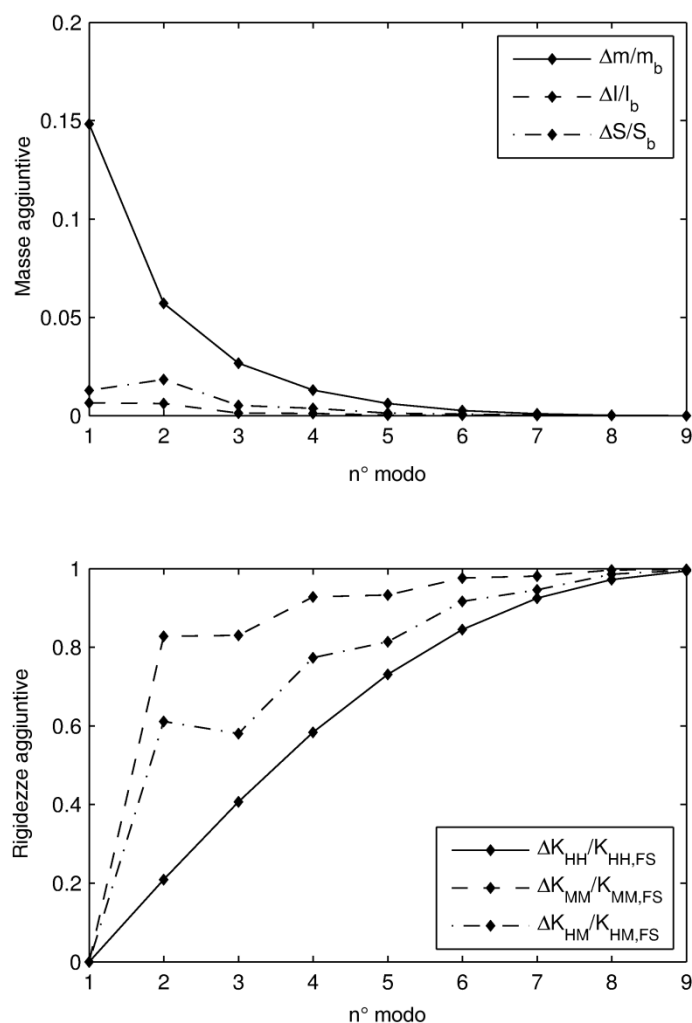


Figura 5.3 Termini aggiuntivi di massa e rigidezza per i modelli 1-DOF equivalenti della struttura campione.

La variazione delle rigidezze aggiuntive ΔK_{HH} , ΔK_{HM} , e ΔK_{MM} rispetto alla velocità delle onde di taglio nel terreno è diagrammata in Figura 5.4. I coefficienti della matrice di rigidezza sono normalizzati dalla corrispondente parte reale delle impedenze. Sono riportate solamente le curve relative al modo 2 (rigidezza aggiuntiva dovuta al solo modo fondamentale) e al modo 9 (rigidezza aggiuntiva dovuta a tutti i modi inferiori). Si osserva che l'importanza relativa dei termini di rigidezza aggiuntivi decresce monotonicamente con la rigidezza del terreno. Le rigidezze traslazionali e rotazionali possono essere, per terreni flessibili, dello stesso ordine di grandezza delle corrispondenti impedenze della fondazione. La rigidezza di accoppiamento traslazione-rocking può essere fino a sette volte maggiore del corrispondente termine di impedenza.

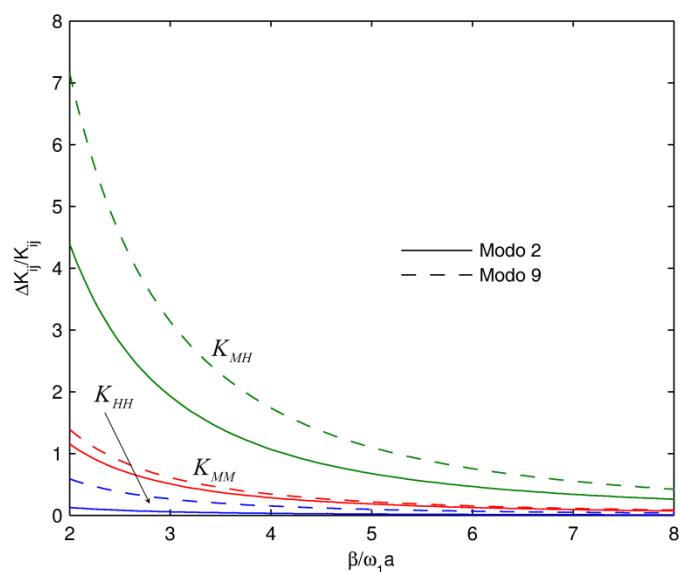


Figura 5.4 Valori delle rigidzze aggiuntive normalizzate per i modi 2 e 9 in funzione della velocità delle onde di taglio normalizzata.

La variazione dei termini di smorzamento aggiuntivi, normalizzati rispetto alla corrispondente parte immaginaria delle impedenze, è diagrammata in Figura 5.5. Si osserva che lo smorzamento aggiuntivo è piuttosto piccolo, conseguenza dell'ipotesi di smorzamento strutturale basso (coefficienti di smorzamento assunti per la sovrastruttura dell'1%). L'incremento del termine C_{HH} è pressochè nullo, per effetto dell'elevato smorzamento associato alla traslazione della fondazione. Il più significativo, ma comunque piccolo, incremento è quello associato alla rotazione della fondazione. La maggior parte del contributo aggiuntivo è associata al modo fondamentale della struttura a base fissa, e si risente in tutti i modi superiori.

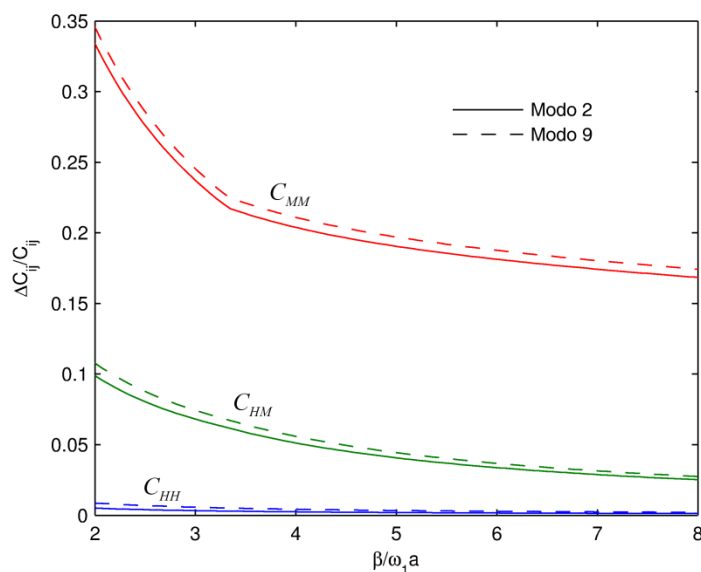


Figura 5.5 Valori dei termini di smorzamento aggiuntivi normalizzati per i modi 2 e 9 in funzione della velocità delle onde di taglio normalizzata.

5.5.2. Validazione del modello mediante confronto della risposta stazionaria

Al fine di testare l'accuratezza della formulazione, la risposta stazionaria della struttura campione è stata calcolata utilizzando il modello proposto. La soluzione approssimata, fornita dall'equazione (5.11), è stata confrontata con quella esatta, ottenuta mediante inversione della matrice di impedenza nel dominio della frequenza. In Figura 5.6 è diagrammata l'ampiezza della risposta in frequenza della struttura, in termini di spostamenti assoluti della massa in sommità indotti da uno spostamento di input in fondazione di ampiezza unitaria. In Figura 5.7, un analogo grafico è ottenuto nel caso di un input costituito da una rotazione unitaria alla base. Sono stati considerati tre valori di rigidezza del terreno, definiti dalla velocità di propagazione delle onde di taglio pari rispettivamente a 180, 360 e 720 m/sec. I risultati relativi a ciascun modo sono mostrati nell'intorno della corrispondente frequenza di risonanza; l'ampiezza di tale intorno si estende fino a quando la soluzione non coincide con quella relativa al modo successivo.

I risultati ottenuti mostrano che il modello proposto è in grado di predire accuratamente la risposta in risonanza, e che la soluzione si mantiene accurata per tutti i valori di rigidezza del terreno considerati. È infine opportuno ricordare che i risultati diagrammati in figura sono stati ottenuti considerando la dipendenza dalla frequenza dei coefficienti di impedenza.

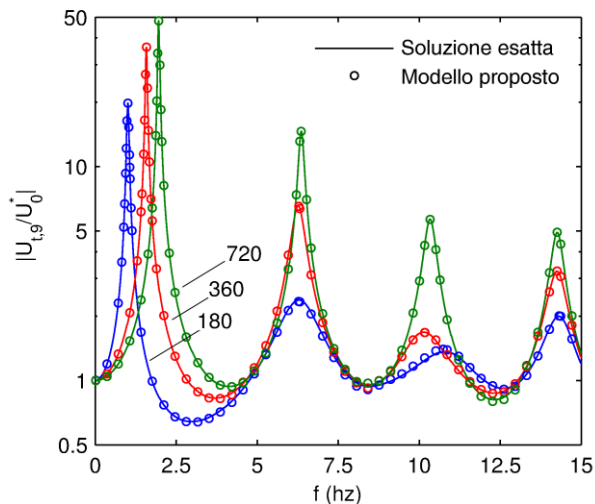


Figura 5.6 Funzioni di trasferimento dello spostamento assoluto normalizzato in sommità della struttura campione, per effetto di uno spostamento di input unitario.

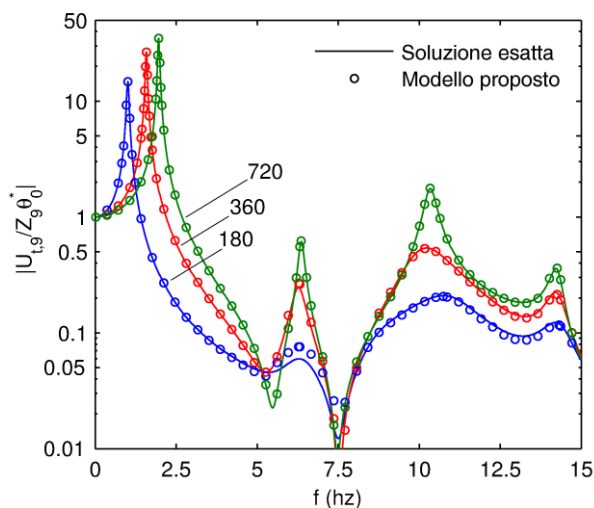


Figura 5.7 Funzioni di trasferimento dello spostamento assoluto normalizzato in sommità della struttura campione, per effetto di una rotazione di input unitaria.

5.5.3. Validazione del modello mediante confronto delle frequenze proprie

Il modello proposto è stato anche utilizzato per calcolare le frequenze proprie del caso studio in esame, assumendo come parametro la velocità delle onde di taglio nel terreno. Le undici frequenze sono ottenute dalla soluzione di $N=9$ problemi agli autovalori, di dimensione 3×3 , del tipo:

$$\begin{bmatrix} \omega_i^2 \hat{M}_i & 0 & 0 \\ 0 & [\bar{K}_{si}(\hat{\omega}_i)] & \\ 0 & & \end{bmatrix} \left\{ \hat{\phi}_i \right\} = \hat{\omega}_i^2 \begin{bmatrix} \hat{M} & \beta_{1i} & \beta_{2i} \\ \beta_{1i} & [\bar{M}_{0i}] + [\bar{m}_i] & \\ \beta_{2i} & & \end{bmatrix} \left\{ \hat{\phi}_i \right\}, \quad i=1, \dots, 9 \quad (5.16)$$

Ciascun sistema (5.16) possiede tre autosoluzioni. È dunque necessario stabilire un criterio per selezionare, per $i=1, \dots, 9$, l'unica autosoluzione corrispondente alla forma modale del sistema interagente; tale criterio deve inoltre permettere di identificare le due soluzioni aggiuntive legate ai modi della fondazione. Il calcolo della soluzione del sistema (5.16) è immediato; oltre a metodi numerici, esso può essere facilmente risolto in forma chiusa attraverso la nota soluzione di Cardano.

Al fine di stabilire il criterio di selezione delle radici sopra menzionato, è opportuno riferirsi al grafico di Figura 5.8, che mostra insieme tutte le tre autosoluzioni di ciascuno dei 9 sistemi (5.16) al variare del parametro di rigidezza relativa del terreno. Il grafico mostra che:

- la prima radice $\hat{\omega}_{i,1}$ corrisponde ad una frequenza propria del sistema, quando questa è inferiore alla prima frequenza del modello FS $\omega_{1,FS}$. Tale frequenza costituisce anche un limite superiore per $\hat{\omega}_{i,1}$;
- la seconda radice $\hat{\omega}_{i,2}$ corrisponde ad una frequenza propria del sistema, quando questa è compresa tra le due frequenze del modello ausiliario $\omega_{1,FS}$ e $\omega_{2,FS}$;
- la terza radice $\hat{\omega}_{i,3}$ corrisponde ad una frequenza propria del sistema, quando questa è maggiore di $\omega_{2,FS}$.

In base alle precedenti considerazioni, è possibile definire il seguente criterio di selezione delle autosoluzioni:

$$\hat{\omega}_i = \begin{cases} \hat{\omega}_{i,1} & \text{se } \omega_i < \omega_{1,FS} \\ \hat{\omega}_{i,2} & \text{se } \omega_{1,FS} < \omega_i < \omega_{2,FS} \\ \hat{\omega}_{i,3} & \text{se } \omega_i > \omega_{2,FS} \end{cases}, \quad i=1, \dots, N \quad (5.17)$$

dove ω_i sono le frequenze proprie della struttura a base fissa. Le frequenze dei due modi aggiuntivi della fondazione sono date da:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{N+1} &= \hat{\omega}_{k,2}, \quad k \text{ tale che } \omega_k < \omega_{1,FS} \vee \omega_{k+1} > \omega_{1,FS} \\ \hat{\omega}_{N+2} &= \hat{\omega}_{r,2}, \quad r \text{ tale che } \omega_r > \omega_{2,FS} \vee \omega_{r-1} < \omega_{1,FS} \end{aligned} \quad (5.18)$$

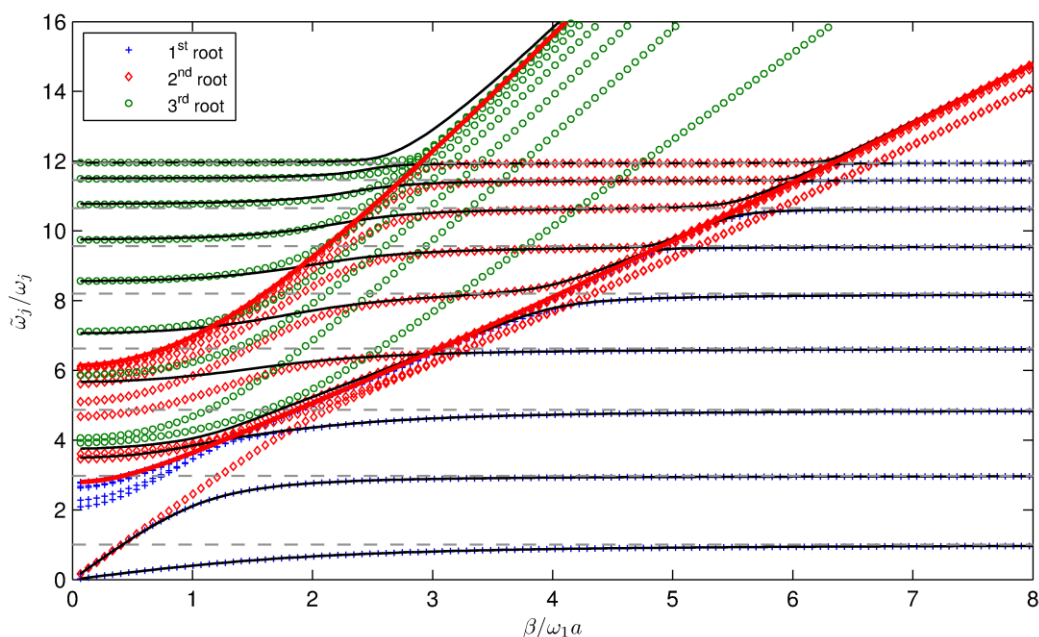


Figura 5.8 Soluzioni dei problemi agli autovalori relativi ai modelli 1-DOF equivalenti.

I risultati dell'applicazione del suddetto criterio sono evidenziati nel grafico di Figura 5.9. L'accordo tra la soluzione approssimata fornita dal modello equivalente e quella ottenuta tramite soluzione del problema agli autovalori completo è molto buona, eccetto che in una zona di transizione prossima alla frequenza $\omega_{2,FS}$.

In conclusione, il modello 1-DOF equivalente si è rivelato efficace per la stima delle grandezze modali del sistema. I passi necessari all'implementazione sono:

- i. ottenere la soluzione del problema agli autovalori per la struttura su base fissa;
- ii. risolvere il problema ausiliario 2×2 relativo al modello *Fixed Superstructure*, per ricavare le due frequenze ausiliarie $\omega_{1,FS}$ e $\omega_{2,FS}$;
- iii. risolvere $n \leq N$ problemi agli autovalori ridotti relativi al modello 1-DOF equivalente;
- iv. per ciascun $i=1, \dots, n$, selezionare l'autovalore $\{\hat{\omega}_i\}$ e il corrispondente autovettore $\{\hat{\phi}_i\}$, attraverso il criterio (5.17);
- v. se necessario, ottenere le due autosoluzioni aggiuntive attraverso la regola (5.18);

- vi. ricavare le altre grandezze modali (coefficienti di smorzamento, fattori di partecipazione) applicando le usuali definizioni proprie dell'analisi modale, una volta formata la matrice modale $[\hat{\Phi}]$.

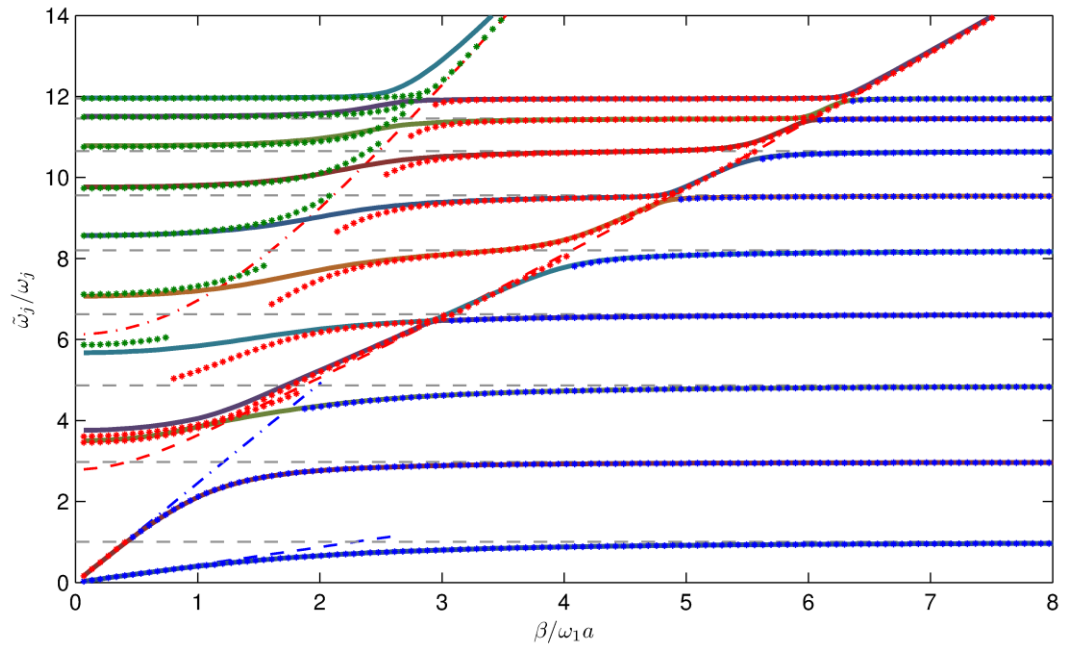


Figura 5.9 Confronto tra le frequenze proprie del sistema ottenute attraverso il modello equivalente (punti), e quelle calcolate mediante la soluzione del problema agli autovalori completo (linee). I colori indicano l'autosoluzione scelta in base al criterio formulato (blu: prima; rosso: seconda; verde: terza).

CAPITOLO 6

ANALISI APPROSSIMATA MEDIANTE APPROCCIO PERTURBATIVO²

6.1. Generalità

Nel presente capitolo viene derivata una soluzione approssimata in forma chiusa del problema agli autovalori per sistemi interagenti terreno-struttura; il metodo di soluzione è basato sull'applicazione di un approccio perturbativo. L'ipotesi fondamentale è che, per terreni relativamente rigidi, la soluzione possa essere ottenuta come somma delle autosoluzioni della struttura su base fissa, supposte note a priori, e di termini perturbativi legati all'inverso del modulo di rigidezza a taglio del terreno. È chiaro che l'accuratezza del metodo dipende dalla validità di tale assunzione, pertanto le deviazioni rispetto alla soluzione esatta diminuiscono al crescere della rigidezza del terreno. Per ottenere l'intero set dei modi di vibrare è necessario considerare, oltre alla soluzione perturbata della struttura a base fissa, due autosoluzioni aggiuntive che coinvolgono in prevalenza deformazioni della fondazione. È immediato riscontrare come, a livello puramente qualitativo, la formulazione di tale approccio discenda dalle considerazioni svolte nei capitoli precedenti.

² Dal materiale presentato di seguito è tratto l'articolo:

Luco, J. E. e Lanzi, A. (2013). Approximate Soil-Structure Interaction Analysis by a Perturbation Approach: the Case of Stiff Soils. *Sottomesso per pubblicazione alla rivista Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, ed. Elsevier.

Il metodo permette di formulare semplici espressioni analitiche per la stima di frequenze proprie, forme modali, coefficienti di smorzamento e fattori di partecipazione per tutti i modi del sistema interagente. L'accuratezza delle formule proposte è stata valutata con riferimento alla struttura campione a nove piani analizzata estensivamente in precedenza. Il confronto della soluzione analitica approssimata con le soluzioni numeriche ottenute considerando l'intero sistema di equazioni del moto è condotto sia in termini di grandezze modali, sia in termini di risposta stazionaria.

Le espressioni proposte generalizzano quelle formulate da Bielak (1971, 1976), Bielak e Jennings (1973) e Veletsos and Meek (1974) per il solo modo fondamentale di un modello piano, basate sulla risposta di un oscillatore elementare su suolo viscoelastico. La generalizzazione può risultare utile per l'aggiornamento delle procedure di analisi semplificate, che trovano applicazione in diversi documenti normativi. Ad esempio, nell'ambito della progettazione antisismica, i codici ASCE 7-10 e NEHRP 2009 consentono di tenere conto dell'interazione terreno-struttura attraverso una modifica della domanda connessa al solo modo fondamentale di vibrazione. Le espressioni proposte possono essere utilizzate per estendere tale approccio all'analisi dei modi superiori. Inoltre, esse possono essere impiegate per generalizzare quelle, relative al modo fondamentale, utilizzate nell'ambito di problemi di identificazione dinamica di sistemi interagenti (es. Luco, 1980).

6.2. Approccio perturbativo per strutture deformabili su terreni rigidi

L'approccio perturbativo, con riferimento ad una struttura deformabile supportata da un terreno relativamente rigido, viene avviato considerando che la matrice di rigidezza della fondazione $[K_s]$ è proporzionale al modulo di rigidezza a taglio $G = \rho_s \beta^2$, dove ρ_s e β sono, rispettivamente, i valori caratteristici di densità e velocità di propagazione delle onde di taglio del terreno. Per terreni rigidi, la velocità delle onde di taglio è elevata e la soluzione completa del sistema interagente può essere vista come somma della soluzione relativa alla struttura su base fissa e di termini perturbativi di entità molto minore. Tali termini possono essere espressi attraverso uno sviluppo in serie rispetto a un parametro ε , legato all'inverso del

modulo di rigidezza a taglio. Il primo passo è quello di esprimere la matrice di rigidezza della fondazione in termini del parametro della perturbazione ε :

$$[K_s] = \varepsilon^{-1} [\bar{K}_s], \quad \varepsilon \propto 1/\beta^2 \quad (6.1)$$

dove $[\bar{K}_s]$ è la matrice di rigidezza della fondazione, normalizzata da un termine proporzionale a G . Si ricorda che il problema agli autovalori da risolvere è espresso come:

$$\begin{bmatrix} K_b & 0 \\ 0 & K_s(\tilde{\omega}_1) \end{bmatrix} \{\tilde{\phi}_j\} = \tilde{\omega}_j^2 \begin{bmatrix} M_b & M_b \alpha \\ \alpha^T M_b & M_{oo} \end{bmatrix} \{\tilde{\phi}_j\} \quad (6.2)$$

L'autovalore $\tilde{\lambda} = 1/\tilde{\omega}^2$ e gli spostamenti di interesse vengono quindi espressi in funzione del parametro della perturbazione ε , nella forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \tilde{\lambda}_0 + \varepsilon \tilde{\lambda}_1 + \varepsilon^2 \tilde{\lambda}_2 + O(\varepsilon^3) \\ \{U_b\} &= \{U_{b0}\} + \varepsilon \{U_{b1}\} + \varepsilon^2 \{U_{b2}\} + O(\varepsilon^3) \\ \{U_s\} &= \{U_{s0}\} + \varepsilon \{U_{s1}\} + \varepsilon^2 \{U_{s2}\} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (6.3)$$

in cui $\{U_{s0}\} = \{0\}$ dal momento che la soluzione non perturbata ($\varepsilon = 0$) corrisponde alla struttura su base fissa. Più in dettaglio, il parametro ε dipende dalla rigidezza relativa della struttura rispetto a quella del terreno, attraverso una relazione del tipo $\varepsilon \propto (\omega_1 a / \beta)^2$, dove ω_1 è la frequenza fondamentale di vibrazione della sovrastruttura su base fissa, e a è una dimensione caratteristica della fondazione.

Sostituendo l'Eq. (6.3) in (6.2), e considerando i termini fino al secondo ordine, si ottiene un'espressione del problema agli autovalori in termini delle quantità incognite $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, U_{b0}, U_{b1}, U_{b2}$ e U_{s0}, U_{s1}, U_{s2} , moltiplicate per i parametri $\varepsilon^0, \varepsilon^1$ e ε^2 . Le grandezze incognite possono essere determinate mettendo in evidenza, e uguagliando a zero, le espressioni che moltiplicano rispettivamente $\varepsilon^0, \varepsilon^1$ e ε^2 . Il risultato di tale approccio porta alle seguenti relazioni:

$$(M_b - \tilde{\lambda}_0 K_b) U_{b0} = 0 \quad (6.4a)$$

$$\tilde{\lambda}_0 \bar{K}_s U_{s1} = \alpha^T M_b U_{b0} \quad (6.4b)$$

$$(M_b - \tilde{\lambda}_0 K_b) U_{b1} - \tilde{\lambda}_1 K_b U_{b0} = -M_b \alpha U_{s1} \quad (6.4c)$$

e

$$\tilde{\lambda}_0 \bar{K}_s U_{s2} = \alpha^T M_b U_{b1} + M_{oo} U_{s1} - \tilde{\lambda}_1 \bar{K}_s U_{s1} \quad (6.5a)$$

$$(M_b - \tilde{\lambda}_0 K_b) U_{b2} - \tilde{\lambda}_2 K_b U_{b0} = \tilde{\lambda}_1 K_b U_{b1} - M_b \alpha U_{s2} \quad (6.5b)$$

$$\tilde{\lambda}_0 \bar{K}_s U_{s3} = \alpha^T M_b U_{b2} + M_{oo} U_{s2} - \bar{K}_s (\tilde{\lambda}_2 U_{s1} + \tilde{\lambda}_1 U_{s2}) \quad (6.5c)$$

da cui $\tilde{\lambda}_0, U_{b0}, U_{s1}, \tilde{\lambda}_1, U_{b1}, U_{s2}, \tilde{\lambda}_2, U_{b2}, U_{s3}$ possono essere ricavati in sequenza. Nelle Equazioni (6.4) e (6.5) le parentesi indicanti matrici e vettori sono omesse per semplicità. Per la determinazione di alcune delle quantità incognite, dovranno essere considerate le masse \tilde{M}_i e le rigidezze modali \tilde{K}_i date da:

$$\tilde{M}_i = (U_b^T, U_s^T) \begin{bmatrix} M_b & M_b \alpha \\ \alpha^T M_b & M_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_b \\ U_s \end{Bmatrix} \quad (6.6a)$$

$$\tilde{K}_i = U_b^T K_b U_b + U_s^T K_s U_s \quad (6.6b)$$

Sostituendo le espressioni (6.3) in (6.6a, b), si ha:

$$\tilde{M}_i = \tilde{M}_{0i} + \varepsilon \tilde{M}_{1i} + \varepsilon^2 \tilde{M}_{2i} + \varepsilon^3 \tilde{M}_{3i} + O(\varepsilon^4) \quad (6.7a)$$

$$\tilde{K}_i = \tilde{K}_{0i} + \varepsilon \tilde{K}_{1i} + \varepsilon^2 \tilde{K}_{2i} + \varepsilon^3 \tilde{K}_{3i} + O(\varepsilon^4) \quad (6.7b)$$

dove

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{0i} &= U_{b0}^T M_b U_{b0} \\ \tilde{M}_{1i} &= 2U_{b0}^T M_b U_{b1} + 2U_{b0}^T M_b \alpha U_{s1} \\ \tilde{M}_{2i} &= U_{b1}^T M_b U_{b1} + 2U_{b0}^T M_b U_{b2} + 2U_{b1}^T M_b \alpha U_{s1} + 2U_{b0}^T M_b \alpha U_{s2} + U_{s1}^T M_{oo} U_{s1} \\ \tilde{M}_{3i} &= 2U_{b1}^T M_b U_{b2} + 2U_{b0}^T M_b U_{b3} + 2U_{b2}^T M_b \alpha U_{s1} + 2U_{b1}^T M_b \alpha U_{s2} + \dots \\ &\quad \dots + 2U_{b0}^T M_b \alpha U_{s3} + 2U_{s1}^T M_{oo} U_{s2} \end{aligned} \quad (6.8a)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{0i} &= U_{b0}^T K_b U_{b0} \\ \tilde{K}_{1i} &= 2U_{b0}^T K_b U_{b1} + U_{s1}^T \bar{K}_s U_{s1} \\ \tilde{K}_{2i} &= U_{b1}^T K_b U_{b1} + 2U_{b0}^T K_b U_{b2} + 2U_{s1}^T \bar{K}_s U_{s2} \\ \tilde{K}_{3i} &= 2U_{b1}^T K_b U_{b2} + 2U_{b0}^T K_b U_{b3} + U_{s2}^T \bar{K}_s U_{s2} + 2U_{s1}^T \bar{K}_s U_{s3} \end{aligned} \quad (6.8b)$$

6.3. Perturbazione intorno ai modi della struttura

Per iniziare, si considera una perturbazione intorno all' i -esimo modo di vibrare della struttura su base fissa. Siano $\lambda_i = 1/\omega_i^2$ e $\{\phi_i\}$ ($i=1, N$) l' i -esimo autovalore e l'autovettore che soddisfano l'equazione caratteristica:

$$([M_b] - \lambda_i [K_b])\{\phi_i\} = \{0\} \quad (6.9)$$

L'autovettore è normalizzato in modo che $M_i = \{\phi_i\}^T [M_b] \{\phi_i\} = 1$. Dalla relazione (6.4a) si evince che i termini di ordine zero, $\tilde{\lambda}_0$ e U_{b0} , soddisfano il problema agli autovalori (6.9). Pertanto:

$$\tilde{\lambda}_0 = \lambda_i, \quad \{U_{b0}\} = \{\phi_i\} \quad (6.10)$$

I termini di primo ordine degli spostamenti della fondazione $\{U_{s1}\}$ si ricavano dalle relazioni (6.4b) e (6.10), ottenendo:

$$\{U_{s1}\} = [\bar{K}_s]^{-1} (\omega_i^2 [\alpha]^T [M_b] \{\phi_i\}) = \frac{1}{\lambda_i} [\bar{K}_s]^{-1} \{\beta_i\} \quad (6.11)$$

dove $\{\beta_i\} = [\alpha]^T [M_b] \{\phi_i\}$ è il vettore dei fattori di partecipazione modale per l' i -esimo modo della struttura su base fissa.

I termini di primo ordine $\tilde{\lambda}_1$ e $\{U_{b1}\}$ si ricavano dalle relazioni (6.4c), (6.10) e (6.11), espandendo gli spostamenti relativi $\{U_{b1}\} = \sum_{j=1}^N \gamma_{1j} \{\phi_j\}$ nello spazio dei modi della sovrastruttura. Sostituendo tale espansione, facendo uso dei risultati precedenti, premoltiplicando per una generica forma modale della sovrastruttura $\{\phi_k\}^T$ e sfruttando le proprietà di ortogonalità dei modi di vibrare si ha:

$$\sum_{j=1}^N \gamma_{1j} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right) \delta_{kj} - \frac{\tilde{\lambda}_1}{\lambda_k} \delta_{ki} + \frac{1}{\lambda_i} \{\beta_k\}^T [\bar{K}_s]^{-1} \{\beta_i\} = 0 \quad (6.12)$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker. Per $k=i$, la sommatoria in (6.12) è nulla e si ha che:

$$\tilde{\lambda}_i = \{\beta_i\}^T [\bar{K}_s]^{-1} \{\beta_i\} \quad (6.13)$$

Per $k \neq i$, l'espansione della sommatoria fornisce:

$$\gamma_{1j} = \frac{\lambda_j \{\beta_j\}^T [\bar{K}_s]^{-1} \{\beta_i\}}{\lambda_i (\lambda_i - \lambda_j)} \quad (6.14)$$

Al fine di determinare l'ultimo coefficiente incognito γ_{1i} , è necessario considerare le versioni espanse della massa modale $\tilde{M}_i = 1 + 2\varepsilon(\gamma_{1i} + \omega_i^2 \tilde{\lambda}_i)$ e della rigidità modale $\tilde{K}_i = \omega_i^2 + \varepsilon\omega_i^2(2\gamma_{1i} + \omega_i^2 \tilde{\lambda}_i)$, date dalle equazioni (6.8a, b). Diverse opzioni sono possibili. Ad esempio si può imporre $\tilde{M}_i = 1$ o $\tilde{K}_i = \omega_i^2$. La possibilità qui scelta è quella di imporre $\gamma_{1i} = 0$, da cui deriva il semplice risultato:

$$\tilde{M}_i = (\omega_i / \tilde{\omega}_i)^4 + O(\varepsilon^2) \quad (6.15)$$

L'espressione risultante per $\{U_{b1}\}$ è:

$$\{U_{b1}\} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\lambda_j \{\beta_j\}^T [\bar{K}_s]^{-1} \{\beta_i\}}{\lambda_i (\lambda_i - \lambda_j)} \{\phi_j\} \quad (6.16)$$

che completa la derivazione di tutti i termini di primo ordine. I termini di second'ordine possono essere ottenuti in sequenza attraverso una procedura simile, sfruttando le equazioni (6.5a, b, c).

6.3.1. Espressioni approssimate delle grandezze modali – Modi Strutturali

Utilizzando i risultati descritti dalle equazioni (6.3), (6.10), (6.11), (6.13) e (6.16) è possibile formulare semplici espressioni approssimate per la stima di frequenze proprie, forme modali, coefficienti di smorzamento e fattori di partecipazione associati ai modi strutturali. Utilizzando soltanto i termini lineari in $1/\beta^2$, le frequenze proprie del sistema e le forme modali sono date da:

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_i^2} = \frac{1}{\omega_i^2} + \{\beta_i\}^T [K_s]^{-1} \{\beta_i\} \quad (6.17)$$

e

$$\{\tilde{\phi}_i\}^T = (\{\tilde{\phi}_{bi}\}^T, \{\tilde{\phi}_{si}\}^T) \quad (6.18)$$

dove

$$\{\tilde{\phi}_{bi}\} = (\tilde{\omega}_i / \omega_i)^2 \{\phi_i\} + \tilde{\omega}_i^2 \omega_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\{\beta_j\}^T [K_s]^{-1} \{\beta_i\}}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)} \{\phi_j\} \quad (6.19)$$

$$\{\tilde{\phi}_{si}\} = \tilde{\omega}_i^2 [K_s]^{-1} \{\beta_i\} \quad (6.20)$$

Le forme modali nelle equazioni (6.19) e (6.20) sono normalizzate in modo che la massa modale risultante \tilde{M}_i sia approssimativamente unitaria.

Una volta costruita la matrice modale, i coefficienti di smorzamento possono essere valutati con le classiche relazioni:

$$2\tilde{\xi}_i \tilde{\omega}_i \tilde{M}_i = \{\tilde{\phi}_{bi}\}^T [C_b] \{\tilde{\phi}_{bi}\} + \{\tilde{\phi}_{si}\}^T [C_s] \{\tilde{\phi}_{si}\} \quad (6.21)$$

$$\{\tilde{\beta}_i\}^T = \frac{1}{\tilde{M}_i} \left(\{\tilde{\phi}_{bi}\}^T [M_b] [\alpha] + \{\tilde{\phi}_{si}\}^T [M_{oo}] \right) \quad (6.22)$$

dove $[C_b]$ è la matrice di smorzamento della sovrastruttura (che si assume sia classicamente smorzata) e $[C_s]$ la matrice di smorzamento della fondazione, ovvero la parte immaginaria della matrice di impedenza divisa per ω .

Utilizzando le relazioni (6.19), (6.20) e (6.21) è possibile ricavare un'espressione in forma chiusa dei coefficienti di smorzamento:

$$\tilde{\xi}_i = \left(\frac{\tilde{\omega}_i}{\omega_i} \right)^3 \xi_i + \frac{\tilde{\omega}_i^2}{2} \{\beta_i\}^T [K_s]^{-1} [\tilde{\omega}_i C_s] [K_s]^{-1} \{\beta_i\} \quad (6.23)$$

dove $[\tilde{\omega}_i C_s] = \text{Im}[K_s + i\tilde{\omega}_i C_s]$ è la parte immaginaria della matrice di impedenza della fondazione. Il primo termine in (6.23) rappresenta il contributo dello smorzamento strutturale, il secondo è legato allo smorzamento per radiazione nel terreno. È importante osservare che, a tale livello di approssimazione, soltanto l' i -esimo modo della sovrastruttura contribuisce allo smorzamento del sistema $\tilde{\xi}_i$. Questo risultato analitico è in accordo con le osservazioni di Bielak (1975, 1976) e

con le evidenze presentate nei capitoli precedenti. Inoltre, le frequenze proprie, le forme modali e i coefficienti di smorzamento dei modi strutturali risultano indipendenti dalla massa della fondazione.

Utilizzando le relazioni (6.22), (6.19), (6.20) e (6.17), e l'equivalenza $[M_{oo}] = [M_o] + [\alpha]^T [M_b] [\alpha] = [M_o] + \sum_{i=1}^N \{\beta_i\} \{\beta_i\}^T$, è altresì possibile ricavare un'espressione in forma chiusa dei fattori di partecipazione modale:

$$\{\tilde{\beta}_i\}^T = \{\beta_i\}^T + \tilde{\omega}_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\omega_j^2 \{\beta_j\}^T [K_s]^{-1} \{\beta_i\}}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)} \{\beta_j\}^T + \tilde{\omega}_i^2 \{\beta_i\}^T [K_s]^{-1} [M_o] \quad (6.24)$$

Gli ultimi due termini in (6.24) sono del primo ordine in ε , il secondo termine descrive l'effetto dei modi della sovrastruttura diversi da quello in esame ($j \neq i$), e l'ultimo termine include l'effetto della massa della fondazione.

È importante evidenziare che le formule proposte in (6.17), (6.19), (6.20), (6.23) e (6.24) rappresentano una sostanziale generalizzazione di quelle derivate da Bielak (1971, 1976), Jennings e Bielak (1973) e Veletsos e Meek (1974) per il modo fondamentale di una struttura soggetta a vibrazioni accoppiate traslazionali-rocking in un piano. I presenti risultati differiscono dai precedenti per diversi aspetti importanti: (i) le nuove espressioni si applicano a tutti i modi, e non soltanto al primo; (ii) i risultati, anche per il modo fondamentale, sono più generali in quanto considerano i termini di accoppiamento della matrice di impedenza e includono termini di ordine superiore; (iii) le espressioni sono valide per sistemi tridimensionali e per tutti e sei i gradi di libertà della fondazione rigida.

6.3.2. Confronto con i risultati di letteratura

Al fine di confrontare i risultati ottenuti con quelli disponibili in letteratura, la soluzione proposta viene specializzata per il caso di una struttura soggetta a vibrazioni in un piano yz , analoga a quella schematizzata in Figura 2.6. Si ricorda che un'assunzione (non strettamente necessaria) del modello è che la rotazione dei piani sia uguale alla rotazione della fondazione (colonne rigide assialmente). Utilizzando la stessa notazione introdotta nei capitoli precedenti, e sfruttando la relazione

$$[K_s]^{-1} = \begin{bmatrix} K_{HH} & K_{HM} \\ K_{MH} & K_{MM} \end{bmatrix}^{-1} = (1/\Delta) \begin{bmatrix} K_{MM} & -K_{MH} \\ -K_{HM} & K_{HH} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

con K_{HH} , K_{MM} e $K_{HM} = K_{MH}$ che rappresentano i coefficienti di rigidità traslazionale, rotazionale e di accoppiamento della fondazione, le equazioni (6.17) e (6.23) possono essere espresse nella forma:

$$1/\tilde{\omega}_i^2 = 1/\omega_i^2 + (\hat{M}_i/\Delta)(K_{MM} - 2K_{HM}\hat{H}_i + K_{HH}\hat{H}_i^2) \quad (6.26)$$

$$\tilde{\xi}_i = \left(\frac{\tilde{\omega}_i}{\omega_i}\right)^3 \xi_i + (\tilde{\omega}_i^2 \hat{M}_i / 2\Delta^2) \begin{Bmatrix} K_{MM} - \hat{H}_i K_{HM} \\ -K_{MH} + \hat{H}_i K_{HH} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_i C_{HH} & \tilde{\omega}_i C_{HM} \\ \tilde{\omega}_i C_{MH} & \tilde{\omega}_i C_{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{MM} - \hat{H}_i K_{HM} \\ -K_{MH} + \hat{H}_i K_{HH} \end{Bmatrix} \quad (6.27)$$

in cui sono state introdotte la massa modale partecipante $\hat{M}_i = \beta_{1i}^2$ e l'altezza modale $\hat{H}_i = \beta_{2i} / \beta_{1i}$.

Ignorando i termini di accoppiamento traslazione-rocking, le equazioni (6.26) e (6.27) si riducono a:

$$1/\tilde{\omega}_i^2 = 1/\omega_i^2 + 1/\omega_{iH}^2 + 1/\omega_{iM}^2 \quad (6.28)$$

$$\tilde{\xi}_i = \left(\frac{\tilde{\omega}_i}{\omega_i}\right)^3 \xi_i + \left(\frac{\tilde{\omega}_i}{\omega_{iH}}\right)^2 \xi_{iH} + \left(\frac{\tilde{\omega}_i}{\omega_{iM}}\right)^2 \xi_{iM} \quad (6.29)$$

dove

$$\omega_{iH} = \sqrt{K_{HH} / \hat{M}_i} \quad , \quad \omega_{iM} = \sqrt{K_{MM} / (\hat{H}_i^2 \hat{M}_i)} \quad (6.30a, b)$$

e

$$\xi_{iH} = \tilde{\omega}_i C_{HH} / (2K_{HH}) \quad , \quad \xi_{iM} = \tilde{\omega}_i C_{MM} / (2K_{MM}) \quad (6.31a, b)$$

Per $i=1$, le frequenze proprie date da (6.28) e i coefficienti di smorzamento dati da (6.29) corrispondono, a meno della notazione, ai precedenti risultati di Bielak (1971) e Jennings e Bielak (1973)

Per confrontare le forme modali e i fattori di partecipazione, è possibile considerare il contributo $\{\tilde{\phi}_j\}\eta_j$ del j -esimo modo alla risposta in termini di spostamenti relativi. Considerando soltanto i termini dominanti nelle espressioni

delle forme modali in (6.19) e (6.20) e dei fattori di partecipazione in (6.24) si ottiene la seguente equazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\tilde{\phi}_{bj}\} \\ \{\tilde{\phi}_{sj}\} \end{array} \right\} \tilde{\eta}_j = \frac{(\omega / \tilde{\omega}_j)^2}{1 - (\omega / \tilde{\omega}_j)^2 + 2i\tilde{\xi}_j(\omega / \tilde{\omega}_j)} \left\{ \begin{array}{l} \beta_{1j}(\tilde{\omega}_j / \omega_j)^2 \{\phi_j\} \\ (\tilde{\omega}_j / \omega_{jH})^2 \\ (\tilde{\omega}_j / \omega_{jM})^2 / \hat{H}_j \end{array} \right\} (U_{0y}^* + \hat{H}_j \theta_{0x}^*) \quad (6.32)$$

con $i = \sqrt{-1}$. Tale risultato, a meno della notazione, è simile a quello riportato da Jennings e Bielak (1973) per il caso $j=1$, $U_{0y}^* = U_{gy}$ e $\theta_{0x}^* = 0$. L'unica differenza risiede nel fatto che, nell'espressione delle forme modali (Eq. 39 nell'articolo originale), il fattore β_{1j} veniva applicato non solo al primo termine di (6.32), ma anche ai rimanenti due (traslazione e rotazione della fondazione). Tale incongruenza è già stata osservata da Luco (1980).

La discussione precedente mostra che le espressioni approssimate ottenute da Bielak (1971) e Jennings e Bielak (1973) per il modo fondamentale possono ritenersi valide anche per i modi superiori con le modifiche indicate. Gli oscillatori equivalenti che forniscono le risposte modali $\tilde{\eta}_i$ ($i=1, N$) sono caratterizzati dalle frequenze proprie $\tilde{\omega}_i$ e dai coefficienti di smorzamento $\tilde{\xi}_i$, e sono soggetti alle accelerazioni equivalenti alla base $\beta_{1i}(\tilde{\omega}_i / \omega_i)^2 (\ddot{U}_{0y}^* + \hat{H}_i \ddot{\theta}_{0x}^*)$. L'equazione (6.32) pone le basi per l'analisi multi-modale con spettro di risposta di problemi di interazione terreno-struttura. Infine, la risposta verticale e torsionale di strutture simmetriche può essere ottenuta attraverso semplici modifiche alle equazioni (6.28)-(6.32).

6.4. Perturbazione intorno ai modi della fondazione

Il set completo dei modi di vibrare di una struttura interagente con una fondazione rigida supportata da un terreno deformabile è composto da un totale di $N+6$ modi. Come verrà successivamente dimostrato, i sei modi aggiuntivi (chiamati d'ora in avanti *modi della fondazione*) comportano essenzialmente movimenti della fondazione, con piccoli spostamenti assoluti della sovrastruttura. Oltre ai risultati numerici di Bielak (1975, 1976), non esiste alcuno studio analitico sulle caratteristiche di tali modi.

Il processo di determinazione delle forme modali inizia considerando il caso limite di un terreno perfettamente rigido, per cui le frequenze proprie dei modi della fondazione tendono all'infinito. Pertanto, si ha che $\tilde{\lambda}_0 = 0$. Utilizzando le equazioni (6.4a) o (6.4b), si può concludere che $\{U_{b0}\} = \{0\}$, e, poichè $\{U_{s0}\} = \{0\}$, il termine di ordine zero degli spostamenti assoluti della sovrastruttura è anch'esso nullo ($\{U_{t,b0}\} = \{0\}$).

Il termine di primo ordine $\{U_{b1}\}$ si ottiene attraverso la relazione (6.4c), dati $\tilde{\lambda}_0 = 0$ e $\{U_{b0}\} = \{0\}$. In tal modo, si ha che:

$$\{U_{b1}\} = -[\alpha]\{U_{s1}\} \quad (6.33)$$

da cui discende che, al primo ordine, gli spostamenti assoluti della sovrastruttura sono anch'essi nulli $\{U_{t,b1}\} = \{U_{b1}\} + [\alpha]\{U_{s1}\} = \{0\}$. Ora, le equazioni (6.5a) e (6.33) implicano che $\tilde{\lambda}_1$ e $\{U_{s1}\}$ soddisfano il problema agli autovalori:

$$([\mathcal{M}_o] - \tilde{\lambda}_1 [\bar{\mathcal{K}}_s])\{U_{s1}\} = ([\mathcal{M}_o] - \varepsilon \tilde{\lambda}_1 [\mathcal{K}_s])\{U_{s1}\} = \{0\} \quad (6.34)$$

la cui soluzione, per $i=1, \dots, 6$, è:

$$\begin{aligned} \varepsilon \tilde{\lambda}_1 &= \lambda_{si} = 1 / \omega_{si}^2 \\ \varepsilon \{U_{s1}\} &= \{\phi_{si}\} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Le forme modali $\{\phi_{si}\}$, per convenienza normalizzate in modo che risulti $\{\phi_{si}\}^T [\mathcal{M}_o] \{\phi_{si}\} = 1$, corrispondono ai modi di vibrazione della fondazione rigida su terreno elastico in assenza della sovrastruttura. Il problema agli autovalori (6.34) rappresenta il problema base per l'applicazione dell'approccio perturbativo ai modi della fondazione. Esso riveste lo stesso ruolo del problema agli autovalori per la struttura su base fissa nel caso della perturbazione intorno ai modi strutturali.

I termini di secondo ordine $\tilde{\lambda}_2$ e $\{U_{s2}\}$ possono essere ottenuti combinando le relazioni (6.5b) e (6.5c) ed espandendo $\{U_{s2}\}$ come $\varepsilon^2 \{U_{s2}\} = \sum_{j=1}^6 \alpha_{ij} \{\phi_{sj}\}$.

L'equazione risultante è:

$$\sum_{j=1}^6 \alpha_{ij} ([M_o] - \lambda_{si} [K_s]) \{\phi_{sj}\} - (\varepsilon^2 \tilde{\lambda}_2 [K_s] + \lambda_{si} [\alpha]^T [K_b] [\alpha]) \{\phi_{si}\} = 0 \quad (6.36)$$

la quale, premoltiplicando per una generica forma modale della fondazione $\{\phi_{sk}\}^T$ e sfruttando le proprietà di ortogonalità dei modi porta a:

$$\alpha_{ik} (1 - \lambda_{si} / \lambda_{sk}) - \varepsilon^2 \tilde{\lambda}_2 \delta_{ki} / \lambda_{sk} - \lambda_{si} \{\phi_{sk}\}^T ([\alpha]^T [K_b] [\alpha]) \{\phi_{si}\} = 0 \quad (6.37)$$

Per $k=i$, si ottiene:

$$\varepsilon^2 \tilde{\lambda}_2 = -(\lambda_{si})^2 \{\phi_{si}\}^T ([\alpha]^T [K_b] [\alpha]) \{\phi_{si}\} \quad (6.38)$$

Per $k = j \neq i$, l'equazione (6.37) conduce a:

$$\alpha_{ij} = (\lambda_{si} \lambda_{sj} / (\lambda_{sj} - \lambda_{si})) \{\phi_{sj}\}^T ([\alpha]^T [K_b] [\alpha]) \{\phi_{si}\}, \quad j \neq i \quad (6.39)$$

Per determinare il rimanente coefficiente incognito α_{ii} , si considera la massa modale \tilde{M}_i data da (6.7a). Per i modi della fondazione:

$$\tilde{M}_i = 1 + 2\alpha_{ii} + O(\varepsilon^2) \quad (6.40)$$

Imponendo $\alpha_{ii} = 0$, si ha che $\tilde{M}_i = 1 + O(\varepsilon^2)$.

Infine, il termine di secondo ordine degli spostamenti relativi della sovrastruttura $\{U_{b2}\}$ si ottiene dalle equazioni (6.5b) e (6.33). Espandendo il vettore

degli spostamenti in termini dei modi della sovrastruttura $\varepsilon^2 \{U_{b2}\} = \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \{\phi_j\}$, e

sfruttando le proprietà di ortogonalità, l'espressione risultante per i coefficienti γ_{ij} è:

$$\gamma_{ij} = -(\lambda_{si} / \lambda_{bj}) \{\beta_j\}^T \{\phi_{si}\} - \{\beta_j\}^T \sum_{k=1}^6 \alpha_{ik} \{\phi_{sk}\} \quad (6.41)$$

dove $\lambda_{bj} = \lambda_j = 1/\omega_j^2$ ($j=1, N$) sono gli autovalori della struttura su base fissa.

6.4.1. Espressioni approssimate delle grandezze modali – Modi della Fondazione

Le sei frequenze aggiuntive legate ai modi della fondazione, ottenute attraverso un approccio perturbativo al secondo ordine con $\tilde{\lambda}_0 = 0, \tilde{\lambda}_1 = 1/\omega_{si}^2$ e $\tilde{\lambda}_2$ dati dall'equazione (6.38) sono:

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_i^2} = \frac{1}{\omega_{si}^2} \left[1 - \frac{1}{\omega_{si}^2} \{\phi_{si}\}^T \left([\alpha]^T [K_b] [\alpha] \right) \{\phi_{si}\} \right] \quad (6.42)$$

che, allo stesso ordine di accuratezza, possono essere espresse come:

$$\tilde{\omega}_i^2 = \omega_{si}^2 + \{\phi_{si}\}^T \left([\alpha]^T [K_b] [\alpha] \right) \{\phi_{si}\} \quad (6.43)$$

Le forme modali corrispondenti sono date da:

$$\{\tilde{\phi}_i\}^T = \left(\{\tilde{\phi}_{bi}\}^T, \{\tilde{\phi}_{si}\}^T \right) \quad (6.44)$$

dove:

$$\{\tilde{\phi}_{si}\} = \{\phi_{si}\} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^6 \frac{1}{(\omega_{si}^2 - \omega_{sj}^2)} \left(\{\phi_{sj}\}^T [\alpha]^T [K_b] [\alpha] \{\phi_{si}\} \right) \{\phi_{sj}\} \quad (6.45)$$

e

$$\{\tilde{\phi}_{bi}\} = -[\alpha] \{\tilde{\phi}_{si}\} - \sum_{j=1}^N \frac{\omega_j^2}{\omega_{si}^2} \{\beta_j\}^T \{\phi_{si}\} \{\phi_j\} \quad (6.46)$$

Contrariamente al caso dei modi strutturali, le espressioni analitiche risultanti per i coefficienti di smorzamento e i fattori di partecipazione sarebbero piuttosto complesse. Pertanto, è più conveniente calcolare tali grandezze attraverso le classiche equazioni:

$$2\tilde{\xi}_i \tilde{\omega}_i \tilde{M}_i = \{\tilde{\phi}_{bi}\}^T [C_b] \{\tilde{\phi}_{bi}\} + \{\tilde{\phi}_{si}\}^T [C_s] \{\tilde{\phi}_{si}\} \quad (6.47)$$

$$\{\tilde{\beta}_i\}^T = \frac{1}{\tilde{M}_i} \left(\{\tilde{\phi}_{bi}\}^T [M_b] [\alpha] + \{\tilde{\phi}_{si}\}^T [M_{oo}] \right) \quad (6.48)$$

in cui le masse modali \tilde{M}_i ($i=1,6$) sono date da:

$$\tilde{M}_i = \left(\left\{ \tilde{\phi}_{bi} \right\}^T, \left\{ \tilde{\phi}_{si} \right\}^T \right) \begin{bmatrix} M_b & M_{bo} \\ M_{bo}^T & M_{oo} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{ \tilde{\phi}_{bi} \right\} \\ \left\{ \tilde{\phi}_{si} \right\} \end{Bmatrix} \quad (6.49)$$

Come indicato da (6.40), con $\alpha_{ii} = 0$, le masse modali risultanti sono approssimativamente unitarie.

6.4.2. Interpretazione fisica dei modi della fondazione

Come era lecito attendersi, si evince una profonda connessione tra i modi della fondazione ottenuti mediante l'approccio perturbativo e quelli relativi al modello ausiliario di sovrastruttura bloccata, denominato *Fixed Superstructure* e presentato al Capitolo 4. A tal proposito, è opportuno richiamare il problema agli autovalori, di dimensioni 2×2 , che governa il modello ausiliario:

$$-\omega_{FS}^2 [M_o] \{\phi_{FS}\} + [K_s + \alpha^T K_b \alpha] \{\phi_{FS}\} = \{0\} \quad (6.50)$$

La matrice di massa corrisponde a quella della fondazione; la matrice di rigidità è modificata per tenere conto della presenza della sovrastruttura. Utilizzando il quoziente di Rayleigh, è immediato dimostrare come le frequenze proprie ottenute tramite l'espressione (6.43) rappresentino una stima delle frequenze proprie del sistema (6.50). Infatti, sostituendo le espressioni (6.34) e (6.35) nella (6.43), e tenendo conto che $\{\phi_{si}\}^T [M_o] \{\phi_{si}\} = 1$, si ha:

$$\tilde{\omega}_i^2 = \{\phi_{si}\}^T [K_s] \{\phi_{si}\} + \{\phi_{si}\}^T \left([\alpha]^T [K_b] [\alpha] \right) \{\phi_{si}\} \quad (6.51)$$

che corrisponde al quoziente di Rayleigh relativo al modello descritto dall'eq. (6.50), con $\{\phi_{FS}\} = \{\phi_{si}\}$.

6.4.3. Il caso delle vibrazioni in un piano

Al fine di pervenire ad una migliore comprensione del ruolo e degli effetti dei modi della fondazione, è opportuno specificare le espressioni proposte per l'analisi di una struttura soggetta a vibrazioni accoppiate traslazionali-rocking nel piano yz . La matrice di massa della fondazione risulta, in tal caso:

$$[M_o] = \begin{bmatrix} m_o & m_o h_g \\ m_o h_g & I_o \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

dove m_o è la massa della fondazione; h_G è l'altezza del baricentro della fondazione; e $I_o = I_g + m_o h_g^2 + \sum_{i=1}^N I_i$ è il momento di inerzia totale della fondazione rispetto al punto caratteristico O . Il prodotto $[\alpha]^T [K_b] [\alpha]$, che appare nelle espressioni delle frequenze proprie e delle forme modali assume, per il caso particolare considerato, la seguente forma:

$$[\alpha]^T [K_b] [\alpha] = \begin{bmatrix} k_1 & k_1 h_1 \\ k_1 h_1 & k_1 h_1^2 + \sum_{i=2}^N k_i (h_i - h_{i-1})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \hat{M}_i & \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \hat{M}_i \hat{H}_i \\ \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \hat{M}_i \hat{H}_i & \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \hat{M}_i \hat{H}_i^2 \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

dove m_i, k_i, h_i ($i=1, N$) rappresentano massa, rigidezza e quota dei piani. Come mostrato, gli elementi della matrice possono essere espressi in termini delle grandezze modali ω_i , $\hat{M}_i = \beta_{li}^2$ e $\hat{H}_i = \beta_{2i} / \beta_{li}$.

Il problema agli autovalori di base, necessario allo sviluppo dell'approccio perturbativo, corrisponde a:

$$\begin{bmatrix} K_{HH} - \omega_{si}^2 m_o & K_{HM} - \omega_{si}^2 m_o h_G \\ K_{MH} - \omega_{si}^2 m_o h_G & K_{MM} - \omega_{si}^2 I_o \end{bmatrix} \{\phi_{si}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.54)$$

da cui le frequenze ω_{si} e i modi $\{\phi_{si}\}$ ($i=1,2$) possono essere facilmente ricavati. Nell'ottica di una ulteriore semplificazione del problema, si assume che l'altezza della fondazione e i termini di accoppiamento delle impedenze siano trascurabili ($h_G = 0$; $K_{HM} = K_{MH} = 0$). Tali ipotesi possono ritenersi in genere valide per fondazioni dirette. Le risultanti frequenze proprie e le forme modali sono date da:

$$\omega_{s1} = \sqrt{K_{MM} / I_o} \quad , \quad \omega_{s2} = \sqrt{K_{HH} / m_o} \quad (6.55a, b)$$

e

$$\{\phi_{s1}\}^T = \frac{1}{\sqrt{I_o}} (0, 1) \quad , \quad \{\phi_{s2}\}^T = \frac{1}{\sqrt{m_o}} (1, 0) \quad (6.56a, b)$$

Le stime delle frequenze proprie dei modi della fondazione, ottenute attraverso l'espressione (6.43), sono date da:

$$\tilde{\omega}_1^2 = \omega_{s1}^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{M}_i \hat{H}_i^2}{I_o} \right) \omega_i^2 = [K_{MM} + k_1 h_1^2 + \sum_{i=2}^N k_i (h_i - h_{i-1})^2] / I_o \quad (6.57a)$$

$$\tilde{\omega}_2^2 = \omega_{s2}^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{M}_i}{m_o} \right) \omega_i^2 = (K_{HH} + k_1) / m_o \quad (6.57b)$$

I termini dominanti in (6.57a, b) crescono con la rigidezza del terreno, mentre i rimanenti termini sono indipendenti. È opportuno osservare che le frequenze proprie tendono all'infinito quando la massa e il momento di inerzia della fondazione vengono ignorati.

Le forme modali $\{\tilde{\phi}_i\}^T = (\{\tilde{\phi}_{bi}\}^T, \{\tilde{\phi}_{si}\}^T)$ del sistema, associate ai modi della fondazione sono:

$$\{\tilde{\phi}_{s1}\}^T = (-\gamma / \sqrt{m_o}, 1 / \sqrt{I_o}) \quad , \quad \{\tilde{\phi}_{s2}\}^T = (1 / \sqrt{m_o}, \gamma / \sqrt{I_o}) \quad (6.58a, b)$$

e

$$\{\tilde{\phi}_{b1}\} = -(\{1\}, \{h\}) \{\tilde{\phi}_{s1}\} - \frac{1}{\sqrt{I_o}} \sum_{i=1}^N (\omega_i / \omega_{s1})^2 \beta_{li} \hat{H}_i \{\phi_i\} \quad (6.59a)$$

$$\{\tilde{\phi}_{b2}\} = -(\{1\}, \{h\}) \{\tilde{\phi}_{s2}\} - \frac{1}{\sqrt{m_o}} \sum_{i=1}^N (\omega_i / \omega_{s2})^2 \beta_{li} \{\phi_i\} \quad (6.59b)$$

dove $k_1 h_1 = \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \hat{M}_i \hat{H}_i$ e $\gamma = k_1 h_1 / [(\omega_{s2}^2 - \omega_{s1}^2) \sqrt{m_o I_o}]$ è un parametro adimensionale

di rigidezza relativa di modesta entità. Per terreni relativamente rigidi, le equazioni (6.58) e (6.59) indicano che il primo modo coinvolge prevalentemente una rotazione della fondazione, con basse traslazioni orizzontali e piccoli spostamenti assoluti della sovrastruttura $\{\tilde{\phi}_{bi}\} + [\alpha] \{\tilde{\phi}_{si}\}$. Il secondo modo coinvolge prevalentemente una traslazione della fondazione, con piccole rotazioni e piccoli spostamenti assoluti della sovrastruttura.

I coefficienti di smorzamento modale risultano:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_1 &= \left(\frac{\omega_{s1}}{\tilde{\omega}_1} \right)^2 \xi_{s1M} + \left(\frac{\omega_{s2}}{\tilde{\omega}_1} \right)^2 \gamma^2 \xi_{s1H} + \dots \\ &\dots + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{M}_i \hat{H}_i}{I_o} \right) \left(\frac{\omega_i}{\tilde{\omega}_1} \right) \left[1 + 2 \left(\frac{\omega_i}{\omega_{s1}} \right)^2 \right] \xi_i - 2\gamma \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{M}_i \hat{H}_i}{\sqrt{m_o I_o}} \right) \left(\frac{\omega_i}{\tilde{\omega}_1} \right) \xi_i \end{aligned} \quad (6.60a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_2 &= \left(\frac{\omega_{s2}}{\tilde{\omega}_2} \right)^2 \xi_{s2H} + \left(\frac{\omega_{s1}}{\tilde{\omega}_2} \right)^2 \gamma^2 \xi_{s2M} + \dots \\ &\dots + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{M}_i}{m_o} \right) \left(\frac{\omega_i}{\tilde{\omega}_2} \right) \left[1 + 2 \left(\frac{\omega_i}{\omega_{s2}} \right)^2 \right] \xi_i + 2\gamma \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{M}_i \hat{H}_i}{\sqrt{m_o I_o}} \right) \left(\frac{\omega_i}{\tilde{\omega}_2} \right) \xi_i \end{aligned} \quad (6.60b)$$

Nel derivare le equazioni (6.60), si è assunto che la sovrastruttura su base fissa sia classicamente smorzata con coefficienti di smorzamento ξ_i . Il secondo modo della fondazione, essendo associato a movimenti di traslazione, possiede tipicamente un coefficiente di smorzamento molto elevato.

Infine, i fattori di partecipazione relativi ad un moto di input in fondazione $(U_{0y}^*, \theta_{0x}^*)$ sono ottenuti dalle espressioni (6.22), (6.58) e (6.59). In sintesi, il contributo dei modi della fondazione al vettore degli spostamenti della sovrastruttura $\{U_r\}$ e della fondazione $\{U_s\}$, per effetto di un moto di input armonico in fondazione $\{U_o^*\}$, è dato da:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\phi}_{rb1} \\ \tilde{\phi}_{s1} \end{array} \right\} \tilde{\eta}_1 &= A(\omega / \tilde{\omega}_1, \tilde{\xi}_1) \left\{ \begin{array}{l} -\sum_{i=1}^N (\omega_i / \omega_{s1})^2 \beta_{1i} \hat{H}_i \{\phi_i\} \\ -\gamma \sqrt{\frac{I_o}{m_o}} \\ 1 \end{array} \right\} \dots \\ &\dots \left(-\gamma \left(\frac{\omega_{s2}}{\omega_{s1}} \right)^2 \sqrt{\frac{m_o}{I_o}} U_{oy}^* + \left[2 - \left(\frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_{s1}} \right)^2 \right] \theta_{ox}^* \right) \end{aligned} \quad (6.61a)$$

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \{\tilde{\phi}_{rb2}\} \\ \{\tilde{\phi}_{s2}\} \end{array} \right\} \tilde{\eta}_2 = A(\omega / \tilde{\omega}_2, \tilde{\xi}_2) \left. \begin{array}{l} -\sum_{i=1}^N (\omega_i / \omega_{s2})^2 \beta_{1i} \{\phi_i\} \\ 1 \\ \gamma \sqrt{\frac{m_o}{I_o}} \end{array} \right\} \dots \quad (6.61b) \\
 \dots \cdot \left(\left[2 - \left(\frac{\tilde{\omega}_2}{\omega_{s2}} \right)^2 \right] U_{0y}^* + \gamma \left(\frac{\omega_{s1}}{\omega_{s2}} \right)^2 \sqrt{\frac{I_o}{m_o}} \theta_{ax}^* \right)
 \end{aligned}$$

dove

$$A(\omega / \tilde{\omega}_j, \tilde{\xi}_j) = \frac{(\omega / \tilde{\omega}_j)^2}{1 - (\omega / \tilde{\omega}_j)^2 + 2i\tilde{\xi}_j(\omega / \tilde{\omega}_j)} \quad (6.62)$$

è un coefficiente di amplificazione dinamica. Si osserva che, per terreni rigidi, $\left[2 - (\tilde{\omega}_i / \omega_{si})^2 \right] \approx (\omega_{si} / \tilde{\omega}_i)^2$. Nel caso di onde incidenti di tipo SH verticale ($\theta_{0x}^* = 0$), l'equazione (6.61a) indica che al primo modo della fondazione corrisponde, al primo ordine, soltanto una rotazione della fondazione, e al secondo ordine una traslazione della fondazione e piccoli spostamenti della sovrastruttura. Al secondo modo della fondazione, fortemente smorzato, corrispondono all'ordine zero una traslazione della fondazione e al primo ordine una rotazione alla base e piccoli spostamenti della sovrastruttura. I risultati ottenuti dimostrano che i modi della fondazione sono significativi soltanto per il calcolo della risposta della fondazione e, al massimo, della deformazione del primo piano della struttura.

6.5. Risultati numerici

Viene di seguito presentata una serie di risultati numerici relativi alla struttura a nove piani descritta nelle precedenti sezioni della tesi. I confronti, sia in termini di proprietà dinamiche del sistema, sia in termini di risposta stazionaria mostrano l'efficacia dell'approccio proposto e il relativo campo di validità. Si evince che l'approccio perturbativo fornisce una buona approssimazione della soluzione ottenuta mediante l'analisi modale; il campo di validità della soluzione proposta coincide con quello caratteristico dell'analisi modale stessa.

6.5.1. Confronto delle proprietà modali del sistema

L'accuratezza dei risultati ottenibili con l'approccio perturbativo è stata in primo luogo valutata mediante il confronto con la soluzione numerica del problema agli autovalori relativo all'intero sistema interagente. È opportuno evidenziare che, attraverso l'approccio perturbativo, i modi strutturali e quelli della fondazione vengono calcolati separatamente. Ai fini di un confronto significativo, è dunque necessario isolare i modi strutturali e i modi della fondazione anche nella soluzione modale classica; tale separazione, per certi valori di rigidità del terreno, può risultare piuttosto ambigua.

Un confronto delle frequenze proprie del sistema ottenute mediante l'approccio perturbativo (punti) e attraverso la soluzione numerica del problema agli autovalori (linee continue) per la struttura campione è riportato in Figura 6.1. Il grafico mostra le frequenze proprie, normalizzate rispetto alla frequenza fondamentale della struttura su base fissa, in funzione del parametro adimensionale di rigidità relativa terreno-struttura ($\beta / \omega_1 a$). Valori di $\beta / \omega_1 a = 2.4$ e 4.8 corrispondono, rispettivamente, a velocità di propagazione delle onde di taglio pari a 360 e 720 m/sec. I risultati in figura mostrano che, per terreni relativamente rigidi (i.e. $\beta / \omega_1 a > 3.5$), le frequenze ottenute mediante l'approccio perturbativo sono molto accurate per tutti i modi. Nel caso di terreni più deformabili, l'approccio perturbativo si rivela accurato per i modi a bassa frequenza, mentre per i modi a frequenza più alta possono esserci significative deviazioni rispetto all'analisi modale.

Le frequenze lungo prima la linea diagonale in Figura 6.1, che si estende dal punto di coordinate (1, 4) a quello di coordinate (7.5, 14), corrispondono alla minore delle frequenze $\tilde{\omega}_{s1}$ dei modi della fondazione. Come già osservato, è evidente l'interazione tra tale modo e uno dei modi strutturali, conseguenza del fenomeno di curve veering di cui si è discusso al Capitolo 4.

Le frequenze lungo la seconda linea diagonale, che si estende dal punto di coordinate (1, 7) al punto (3.5, 14), corrispondono alla seconda frequenza $\tilde{\omega}_{s2}$ dei modi della fondazione. Tali frequenze sono ragionevolmente accurate per $\beta / \omega_1 a > 3$, ma non rappresentano una reale frequenza propria del sistema nel caso di

terreni più deformabili. La frequenza $\tilde{\omega}_{s,2}$ rappresenta il limite di validità dell'approccio perturbativo, nel senso che i modi con frequenza maggiore di $\tilde{\omega}_{s,2}$ non vengono accuratamente calcolati con l'approccio perturbativo proposto.

La Tabella 6.1 riporta un confronto tra i valori numerici delle frequenze proprie del sistema per i due casi $\beta = 360$ e 720 m/sec. Per facilitare il confronto, le frequenze dei modi strutturali e della fondazione sono elencate separatamente. L'approccio perturbativo si rivela estremamente accurato nel caso di terreno più rigido, con deviazioni rispetto alla soluzione numerica minori dell'1%. Per il caso di terreno più deformabile, l'approccio perturbativo si rivela efficace per quanto riguarda i modi strutturali (errore massimo del 2%), mentre l'errore aumenta fino al 14% per il secondo modo della fondazione.

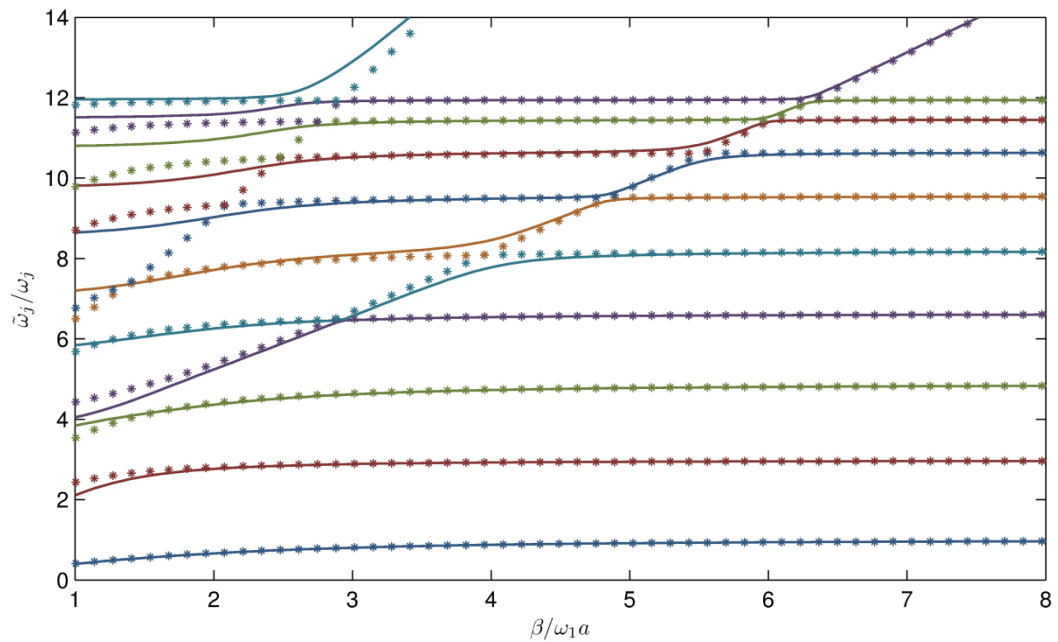


Figura 6.1 Frequenze proprie del sistema. Linee continue: analisi modale; punti: approccio perturbativo.

Tabella 6.1 Frequenze proprie del sistema in Hertz.

| Modo j | $\beta = 360$ m/sec | | $\beta = 720$ m/sec | |
|------------------------------|---------------------|------------------|---------------------|------------------|
| | Analisi modale | An. Perturbativa | Analisi modale | An. Perturbativa |
| Modi strutturali | | | | |
| 1 | 1.583 | 1.594 | 1.966 | 1.968 |
| 2 | 6.119 | 6.163 | 6.351 | 6.353 |
| 3 | 9.709 | 9.789 | 10.305 | 10.315 |
| 4 | 13.765 | 13.880 | 14.187 | 14.196 |
| 5 | 17.097 | 17.044 | 17.410 | 17.542 |
| 6 | 19.934 | 20.285 | 20.343 | 20.551 |
| 7 | 22.286 | 22.651 | 23.018 | 22.915 |
| 8 | 24.123 | 24.615 | 24.705 | 24.708 |
| 9 | 25.342 | 25.753 | 25.794 | 25.788 |
| Modi della fondazione | | | | |
| 1 | 12.478 | 12.688 | 20.702 | 20.449 |
| 2 | 25.997 | 22.293 | 40.088 | 39.798 |

In Figura 6.2 vengono messe a confronto le 11 forme modali ottenute con i due metodi per i due valori di rigidità del terreno considerati. Analogamente a quanto riscontrato per le frequenze proprie, l'approccio perturbativo è molto accurato per il caso di terreno più rigido. Per $\beta = 360$ m/sec, è possibile osservare differenze a partire dal quinto modo strutturale.

Le Tabelle 6.2 e 6.3 presentano un confronto dei coefficienti di smorzamento modali. Vengono riportate due serie di risultati relativi alla soluzione perturbativa. Nella prima serie (denominata *Analisi Perturbativa*), i coefficienti di smorzamento sono ottenuti attraverso l'equazione (6.21), una volta formata la matrice modale $[\tilde{\Phi}]$. Nella seconda serie (denominata *Analisi Perturbativa Semplificata*), i coefficienti di smorzamento sono calcolati attraverso l'espressione (6.23). I due set di risultati hanno origine dalle stesse espressioni delle forme modali, ma differiscono per l'inclusione di alcuni termini di ordine superiore. Nel caso $\beta = 720$ m/sec, i coefficienti di smorzamento per i modi strutturali ottenuti attraverso l'analisi modale, il metodo perturbativo e il metodo perturbativo semplificato sono molto simili per i modi a frequenza inferiore a quella del primo modo della fondazione. Nel caso $\beta = 360$ m/sec, è possibile osservare differenze a partire dal 4°-5° modo. I coefficienti di smorzamento per i modi della fondazione ottenuti mediante l'approccio perturbativo sono in genere diversi da quelli ottenuti attraverso l'analisi

modale (tranne quando la frequenza del modo della fondazione è significativamente più alta di tutte le frequenze strutturali).

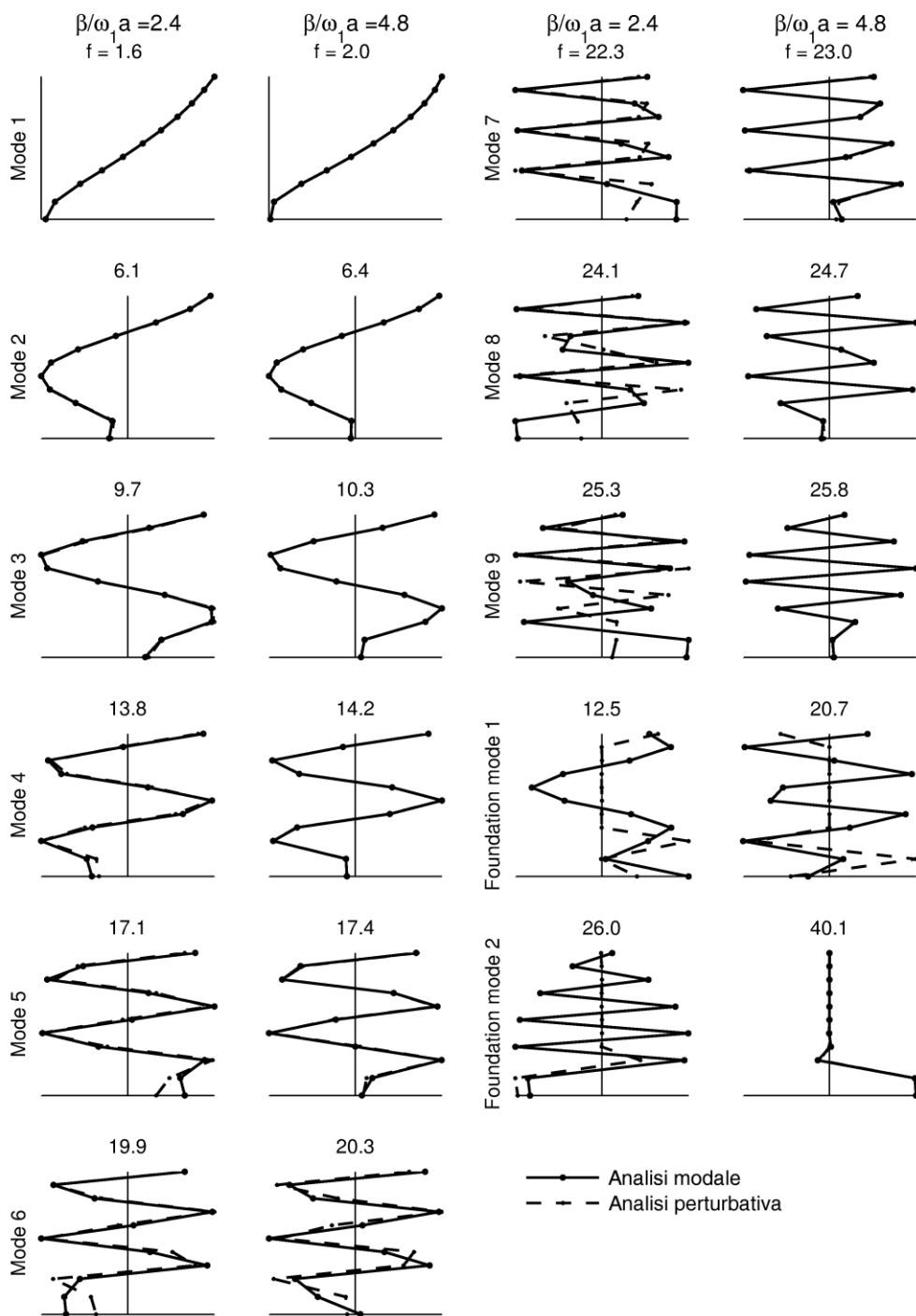


Figura 6.2 Forme modali, $\beta = 360$ e 720 m/sec.

Tabella 6.2 Coefficienti di smorzamento, $\beta = 360$ m/sec.

| Modo j | $\beta = 360$ m/sec | | |
|------------------------------|---------------------|----------------------|-------------------------------|
| | Analisi modale | Analisi perturbativa | An. Perturbativa semplificata |
| Modi strutturali | | | |
| 1 | 0.019 | 0.018 | 0.019 |
| 2 | 0.060 | 0.048 | 0.048 |
| 3 | 0.090 | 0.088 | 0.095 |
| 4 | 0.115 | 0.079 | 0.083 |
| 5 | 0.187 | 0.090 | 0.104 |
| 6 | 0.203 | 0.067 | 0.072 |
| 7 | 0.256 | 0.058 | 0.064 |
| 8 | 0.274 | 0.031 | 0.032 |
| 9 | 0.278 | 0.017 | 0.017 |
| Modi della fondazione | | | |
| 1 | 0.271 | 0.217 | --- |
| 2 | 0.175 | 1.239 | --- |

Tabella 6.3 Coefficienti di smorzamento, $\beta = 720$ m/sec.

| Modo j | $\beta = 720$ m/sec | | |
|------------------------------|---------------------|----------------------|-------------------------------|
| | Analisi modale | Analisi perturbativa | An. Perturbativa semplificata |
| Modi strutturali | | | |
| 1 | 0.013 | 0.013 | 0.013 |
| 2 | 0.016 | 0.015 | 0.015 |
| 3 | 0.022 | 0.021 | 0.021 |
| 4 | 0.021 | 0.020 | 0.020 |
| 5 | 0.038 | 0.022 | 0.022 |
| 6 | 0.146 | 0.018 | 0.018 |
| 7 | 0.026 | 0.017 | 0.017 |
| 8 | 0.015 | 0.013 | 0.013 |
| 9 | 0.012 | 0.011 | 0.011 |
| Modi della fondazione | | | |
| 1 | 0.121 | 0.268 | --- |
| 2 | 1.610 | 1.629 | --- |

Il confronto dei coefficienti di partecipazione modale per input traslazionale $\tilde{\beta}_{1j}$ e rotazionale $\tilde{\beta}_{2j}$ è presentato nelle Tabelle 6.4 e 6.5. Analogamente al caso dei coefficienti di smorzamento, sono presentate due serie di risultati relativi alla soluzione perturbativa. La prima (*Analisi Perturbativa*), ottenuta utilizzando l'equazione (6.22), la seconda (*Analisi Perturbativa Semplificata*) ottenuta utilizzando l'equazione (6.24). I fattori di partecipazione $\tilde{\beta}_{1j}$ e $\tilde{\beta}_{2j}$ sono normalizzati rispetto alla massa totale e all'altezza totale della struttura compresa la fondazione. In generale, i fattori di partecipazione ottenuti attraverso l'analisi modale, l'approccio perturbativo e l'approccio perturbativo semplificato sono simili

per i modi a frequenza inferiore a quella del primo modo della fondazione. Oltre tale frequenza possono essere osservate differenze significative per entrambi i valori di rigidità del terreno.

Tabella 6.4 Fattori di partecipazione normalizzati, $\beta = 360$ m/sec.

| Modo j | $\beta = 360$ m/sec | | | | | |
|------------------------------|---------------------------------------|--------|--------|---|--------|--------|
| | $\tilde{\beta}_{1j} / \sqrt{M_{tot}}$ | | | $\tilde{\beta}_{2j} / H_{tot} \sqrt{M_{tot}}$ | | |
| | A.M. | A.P. | A.P.S. | A.M. | A.P. | A.P.S. |
| Modi strutturali | | | | | | |
| 1 | 0.881 | 0.875 | 0.888 | 0.644 | 0.639 | 0.649 |
| 2 | -0.327 | -0.317 | -0.321 | 0.018 | 0.018 | 0.019 |
| 3 | 0.134 | 0.153 | 0.173 | 0.053 | 0.053 | 0.060 |
| 4 | -0.131 | -0.133 | -0.143 | -0.011 | -0.010 | -0.011 |
| 5 | 0.129 | 0.087 | 0.106 | -0.002 | 0.047 | 0.057 |
| 6 | -0.105 | -0.082 | -0.091 | -0.004 | -0.017 | -0.019 |
| 7 | 0.100 | 0.057 | 0.066 | 0.002 | 0.039 | 0.044 |
| 8 | -0.092 | -0.045 | -0.048 | -0.003 | -0.014 | -0.014 |
| 9 | 0.086 | 0.023 | 0.023 | 0.003 | 0.017 | 0.017 |
| Modi della fondazione | | | | | | |
| 1 | 0.154 | 0.221 | --- | -0.079 | -0.006 | --- |
| 2 | -0.065 | -0.174 | --- | -0.002 | -0.009 | --- |

Tabella 6.5 Fattori di partecipazione normalizzati, $\beta = 720$ m/sec.

| Modo j | $\beta = 720$ m/sec | | | | | |
|------------------------------|---------------------------------------|--------|--------|---|--------|--------|
| | $\tilde{\beta}_{1j} / \sqrt{M_{tot}}$ | | | $\tilde{\beta}_{2j} / H_{tot} \sqrt{M_{tot}}$ | | |
| | A.M. | A.P. | A.P.S. | A.M. | A.P. | A.P.S. |
| Modi strutturali | | | | | | |
| 1 | 0.875 | 0.874 | 0.876 | 0.635 | 0.634 | 0.636 |
| 2 | -0.294 | -0.294 | -0.294 | 0.013 | 0.013 | 0.013 |
| 3 | 0.164 | 0.165 | 0.166 | 0.048 | 0.048 | 0.048 |
| 4 | -0.119 | -0.118 | -0.119 | -0.008 | -0.008 | -0.008 |
| 5 | 0.076 | 0.084 | 0.086 | 0.045 | 0.027 | 0.028 |
| 6 | -0.012 | -0.065 | -0.065 | -0.097 | -0.009 | -0.009 |
| 7 | 0.055 | 0.045 | 0.046 | -0.019 | 0.017 | 0.017 |
| 8 | -0.034 | -0.030 | -0.030 | 0.002 | -0.005 | -0.005 |
| 9 | 0.018 | 0.015 | 0.015 | -0.002 | 0.006 | 0.006 |
| Modi della fondazione | | | | | | |
| 1 | -0.077 | -0.053 | --- | 0.083 | 0.125 | --- |
| 2 | 0.301 | 0.302 | --- | 0.005 | 0.005 | --- |

6.5.2. Confronto della risposta stazionaria

L'accuratezza del metodo perturbativo nella valutazione della risposta del sistema è esaminata anche con riferimento alla risposta in frequenza di diversi gradi di libertà della struttura e della fondazione. Le funzioni di trasferimento degli spostamenti relativi normalizzati del sistema sono calcolate per un input costituito da

un'onda armonica di ampiezza unitaria in accelerazione in condizioni di campo libero. L'effettivo moto di input in fondazione, che tiene conto degli effetti di scattering, è ottenuto in accordo alla soluzione di Luco e Wong (1987), in analogia a quanto descritto al Capitolo 4. Vengono messi a confronto tre diversi metodi di analisi: (1) metodo esatto nel dominio della frequenza (inversione della matrice di impedenza completa), (2) analisi modale classica e (3) approccio perturbativo. L'analisi è condotta nel campo di frequenze da 0.01 a 42 Hertz, con un passo di 0.01 Hertz. Le ampiezze degli spostamenti relativi del primo piano e dell'ultimo piano, della traslazione e della rotazione della fondazione sono diagrammate in Figura 6.3 e Figura 6.4, per i due valori di rigidità del terreno considerati. Si evince che le funzioni di trasferimento ottenute con i metodi approssimati (perturbazione e analisi modale) possono differire tra loro e a loro volta dalla soluzione esatta. Le deviazioni possono essere significative per le medie e alte frequenze, in un intervallo la cui ampiezza dipende dalla rigidità del terreno. Tuttavia non appare evidente che l'approccio perturbativo comporti una minore accuratezza rispetto all'analisi modale classica.

Allo scopo di fornire una misura quantitativa dell'errore connesso all'applicazione dei metodi approssimati, le due misure di errore introdotte al Capitolo 3, e di seguito richiamate, sono state valutate per i diversi casi.

$$\mu_1 = \frac{\sum_i \left| |H_{ex}^i|^2 - |H^i|^2 \right| \Delta\omega_i}{\sum_i |H_{ex}^i|^2 \Delta\omega_i}, \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{\sum_i (H_{ex}^i - H^i)(\bar{H}_{ex}^i - \bar{H}^i) \Delta\omega_i}{\sum_i H_{ex}^i \bar{H}_{ex}^i \Delta\omega_i}} \quad (6.63)$$

Come mostrato nelle Tabelle 6.6 e 6.7, gli errori associati all'approccio perturbativo sono dello stesso ordine di quelli ottenuti con l'analisi modale classica. In generale, l'errore associato ai metodi approssimati è sempre inferiore al 20%. Si nota che l'approccio perturbativo comporta un incremento della misura μ_1 da circa il 9% a circa il 18% nel caso $\beta = 360$ m/sec. Nel caso $\beta = 720$ m/sec, l'approccio perturbativo sembra essere più accurato rispetto all'analisi modale classica, almeno per ciò che riguarda la risposta della sovrastruttura.

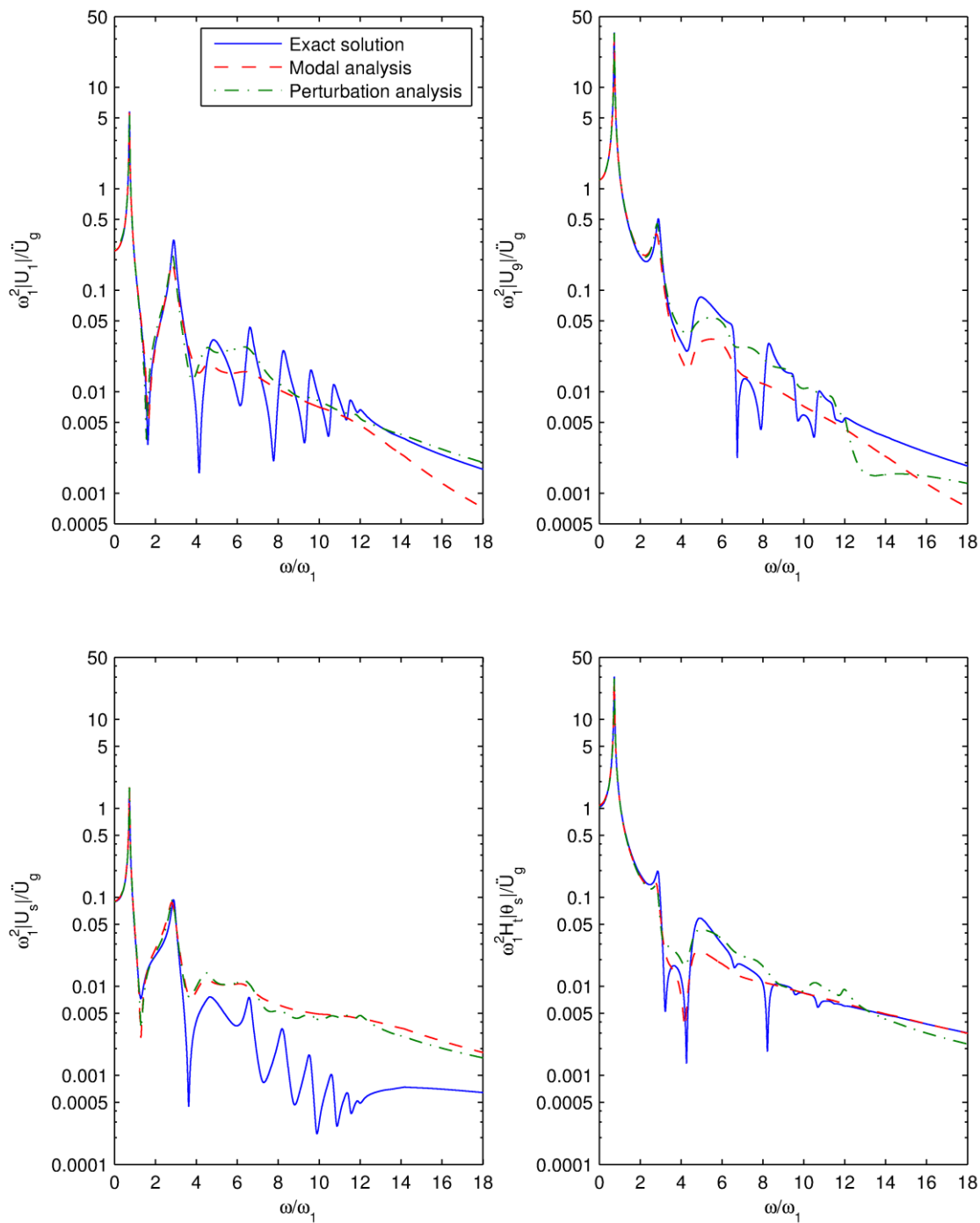


Figura 6.3 Funzioni di trasferimento per $\beta = 360$ m/sec (spostamenti relativi, accelerazione armonica di input in campo libero unitaria).

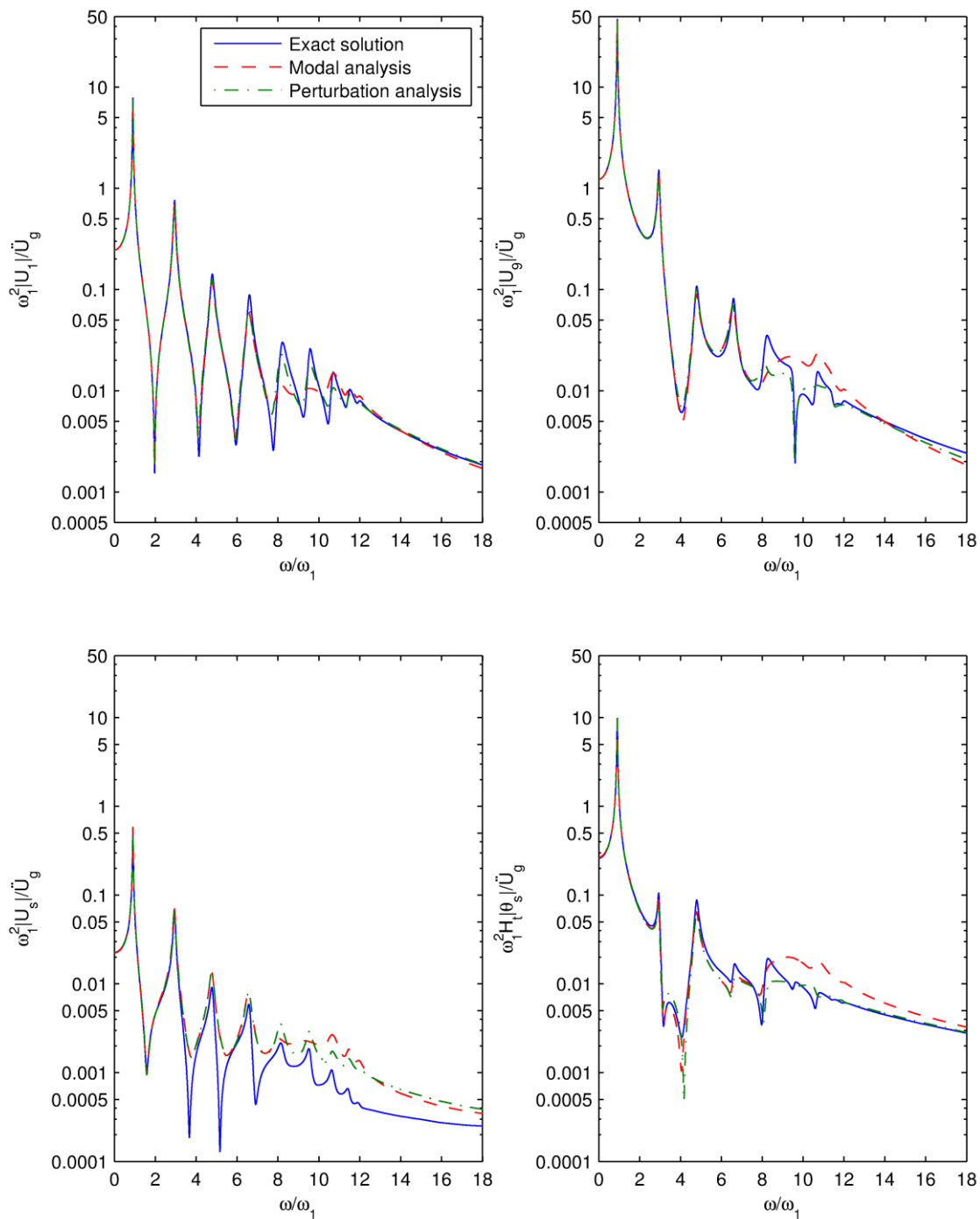


Figura 6.4 Funzioni di trasferimento per $\beta = 720$ m/sec (spostamenti relativi, accelerazione armonica di input in campo libero unitaria).

Tabella 6.6 Confronto della misura di errore μ_1 .

| Parametro di risposta | μ_1 | | | | | |
|-----------------------|-----------------------------|-------|--------|-----------------------------|-------|--------|
| | $\beta = 360 \text{ m/sec}$ | | | $\beta = 720 \text{ m/sec}$ | | |
| | A.M. | A.P. | A.P.S. | A.M. | A.P. | A.P.S. |
| U_1 | 0.093 | 0.181 | 0.183 | 0.030 | 0.028 | 0.028 |
| U_9 | 0.085 | 0.179 | 0.183 | 0.027 | 0.025 | 0.025 |
| U_{sy} | 0.102 | 0.186 | 0.203 | 0.061 | 0.052 | 0.064 |
| θ_{sx} | 0.090 | 0.180 | 0.177 | 0.029 | 0.028 | 0.027 |

Tabella 6.7 Confronto della misura di errore μ_2 .

| Parametro di risposta | μ_2 | | | | | |
|-----------------------|-----------------------------|-------|--------|-----------------------------|-------|--------|
| | $\beta = 360 \text{ m/sec}$ | | | $\beta = 720 \text{ m/sec}$ | | |
| | A.M. | A.P. | A.P.S. | A.M. | A.P. | A.P.S. |
| U_1 | 0.126 | 0.195 | 0.195 | 0.040 | 0.036 | 0.036 |
| U_9 | 0.108 | 0.186 | 0.186 | 0.029 | 0.028 | 0.028 |
| U_{sy} | 0.376 | 0.577 | 0.572 | 0.272 | 0.307 | 0.302 |
| θ_{sx} | 0.096 | 0.195 | 0.195 | 0.028 | 0.056 | 0.059 |

Analizzando i risultati ottenuti appare infine opportuno investigare l'efficacia della soluzione perturbativa semplificata, che coinvolge soltanto i modi di vibrazione strutturali. Tale metodo, se ragionevolmente accurato, risulterebbe molto conveniente in quanto tutte le grandezze relative ai modi strutturali possono essere calcolate attraverso le semplici espressioni analitiche presentate. Dal momento che i coefficienti di smorzamento dei modi strutturali sono almeno un ordine di grandezza inferiori a quelli relativi ai modi della fondazione, appare ragionevole ignorare il contributo di questi ultimi. Le Tabelle 6.6. e 6.7 riportano, inoltre, i valori delle misure di errore per le funzioni di trasferimento ottenuti attraverso l'approccio perturbativo semplificato (A.P.S.). L'uso di tale approccio non comporta un significativo incremento dell'errore rispetto alla soluzione esatta. Ulteriori confronti delle funzioni di trasferimento indicano che il metodo semplificato rimane valido nello stesso campo di frequenze dell'approccio perturbativo completo e dell'analisi modale. Oltre tale campo di frequenza, tutti i metodi approssimati comportano significativi scostamenti dalla soluzione esatta.

6.6. Conclusioni

È stato presentato un metodo approssimato per la soluzione del problema dinamico di sistemi interagenti terreno-struttura, e la sua accuratezza è stata valutata

qualitativamente e quantitativamente. La soluzione proposta rappresenta un'approssimazione di quella fornita dall'approccio modale classico, che di per sè è un metodo approssimato. L'applicazione dell'approccio perturbativo ha permesso di formulare semplici espressioni analitiche che, a partire dall'analisi modale della struttura su base fissa, permettono di stimare le grandezze modali del sistema interagente. Le formule proposte, oltre a generalizzare quelle ottenute da altri autori, forniscono elementi di comprensione dei parametri che regolano gli effetti di interazione, e possono essere usate efficacemente per l'analisi preliminare, per la validazione di risultati ottenuti con metodi più complessi e per la formulazione di procedure semplificate di progetto adatte ad essere incorporate in documenti normativi e linee guida.

Una delle principali caratteristiche dell'approccio perturbativo consiste nella definizione di due gruppi di modi di vibrare. Il primo contiene essenzialmente i modi della struttura su base fissa, perturbati per effetto della flessibilità del terreno, con piccole deformazioni a livello della fondazione. Sono state quindi presentate espressioni analitiche delle grandezze modali di interesse per tali modi strutturali. I risultati per il modo fondamentale sono in accordo, con minime modifiche, con quelli presentati da Bielak (1971, 1975), Jennings e Bielak (1973) e Veletsos e Meek (1974). Il secondo set di modi descrive essenzialmente le deformazioni della fondazione, con piccoli spostamenti assoluti della sovrastruttura. Sono state ricavate nuove espressioni analitiche per i modi della fondazione, il cui effetto interessa principalmente la risposta della fondazione e del primo livello della struttura.

Nel caso di vibrazioni accoppiate traslazione-rocking in un piano, le grandezze modali ottenute con l'analisi perturbativa al primo ordine risultano molto accurate (in relazione alla soluzione fornita dall'analisi modale) per i modi a frequenza inferiore a quella del primo modo della fondazione. Soltanto le frequenze proprie e le forme modali risultano ragionevolmente accurate per frequenze fino a quella del secondo modo della fondazione. In generale, almeno nel caso piano, la prima frequenza della fondazione sembra individuare il limite di validità dell'approccio perturbativo al primo ordine. Tale frequenza sembra anche individuare il limite di validità dell'approccio modale classico. Inoltre, si osserva che l'approccio perturbativo non è in grado di cogliere i complessi fenomeni di

interazione tra i modi strutturali e i modi della fondazione, riscontrabili per certi valori di rigidità relativa terreno-struttura.

Infine, il confronto con la risposta stazionaria ottenuta con un metodo esatto mostra che l'approccio perturbativo presentato non comporta un significativo incremento degli errori inerenti all'utilizzo della classica decomposizione in modi ortogonali per problemi di SSI. Ad esempio, una misura di errore dell'approccio modale classico, per la risposta dell'ultimo livello di un edificio campione multipiano, è pari al 3% e al 9%, nel caso di un terreno con velocità delle onde di taglio rispettivamente pari a 720 m/sec e 360 m/sec. Il corrispondente errore relativo all'analisi perturbativa al primo ordine è, rispettivamente, del 2.5% e del 18%.

CAPITOLO 7

MODALITÀ APPLICATIVE ED ESEMPI

7.1. Generalità

Il presente capitolo descrive le modalità di utilizzo dei metodi analitici precedentemente formulati per la progettazione sismica di strutture ordinarie, considerando gli effetti di interazione terreno-struttura e utilizzando l'analisi lineare statica e dinamica con spettro di risposta. Le indicazioni fornite, pur mantenendo un certo livello di rigore, hanno carattere prettamente applicativo, e si prestano ad essere incorporate in documenti normativi e linee guida. Il quadro normativo di riferimento è quello delle *Norme Tecniche per le Costruzioni* (D.M. 14/01/2008) e degli Eurocodici. Si sottolinea che la simbologia di alcuni termini differisce da quella utilizzata nei capitoli precedenti, allo scopo di adeguarla alle convenzioni adottate dai suddetti documenti.

In primo luogo, vengono date indicazioni pratiche su come valutare i parametri caratteristici del terreno e le funzioni di impedenza della fondazione. L'approccio suggerito è applicabile alla maggior parte delle strutture ordinarie che si incontrano nella pratica professionale. Le approssimazioni proposte riprendono, in maniera sostanziale, quelle suggerite da documenti normativi di comprovata validità, tra cui, oltre agli Eurocodici, le ASCE 7-10 e le NEHRP 2009.

In secondo luogo, vengono descritte le modalità attraverso cui l'analisi dinamica con spettro di risposta del sistema interagente possa essere effettuata a partire da un modello della sola struttura su base fissa. L'approccio utilizza le funzioni di impedenza per fondazioni rigide disponibili in letteratura e le espressioni

analitiche delle grandezze modali ricavate attraverso l'approccio perturbativo. Per facilitare ulteriormente l'utilizzo del metodo, vengono proposti alcuni grafici adimensionali che permettono un'immediata stima delle grandezze di interesse in funzione dei parametri caratteristici del sistema.

Vengono infine presentati alcuni esempi applicativi, che mettono in evidenza la maggiore generalità delle espressioni formulate nel presente lavoro rispetto a quelle proposte da altri autori. In particolare, il primo caso studio evidenzia l'importanza dei termini di accoppiamento della matrice di impedenza, nel caso di strutture supportate da fondazioni profonde. Il secondo esempio mostra come le espressioni proposte possano essere utilizzate per l'analisi di strutture tridimensionali, considerando tutti i gradi di libertà della fondazione rigida e tutte le sei componenti del moto di input della fondazione.

7.2. Procedura semplificata di progetto

Il modello di riferimento su cui si basano i metodi di analisi precedentemente descritti è quello di una sovrastruttura elastica, supportata da una fondazione rigida, diretta o immersa in un semispazio viscoelastico omogeneo o stratificato. In generale, la possibilità di considerare la reale forma della fondazione e l'effettiva variazione delle proprietà del terreno con la profondità è connessa alla disponibilità dei coefficienti di impedenza e di scattering per il particolare caso in esame. Nonostante siano disponibili in letteratura numerose soluzioni analitiche e numeriche per diverse condizioni al contorno, è spesso conveniente riferirsi ad un modello di fondazione ulteriormente semplificato, costituito da una fondazione rigida circolare poggiate su di un semispazio omogeneo. In tali ipotesi, le funzioni di impedenza possono essere ricavate attraverso semplici espressioni analitiche, ovvero attraverso grafici e tabelle dei coefficienti normalizzati. Accettando una certa approssimazione, la maggior parte dei casi reali può essere trattata utilizzando tali soluzioni.

Di seguito vengono fornite indicazioni pratiche per l'applicazione della procedura di progetto a sistemi reali, le cui condizioni al contorno si discostano da quelle ideali del modello di riferimento.

7.2.1. Forma della fondazione

La possibilità di analizzare una fondazione di forma arbitraria attraverso una fondazione circolare equivalente è stata esaminata da diversi autori, tra cui Dobry e Gazetas (1986). Nel caso di fondazioni compatte, l'equivalenza tra la fondazione reale e quella circolare è definita attraverso opportuni raggi equivalenti r_H , r_M e r_T , con cui calcolare le funzioni di impedenza rispettivamente per i modi traslazionali e rotazionali. I raggi equivalenti vengono calcolati uguagliando l'area e il momento di inerzia della fondazione reale con quelli di una fondazione circolare equivalente. Per i modi traslazionali, $r_H = \sqrt{A_0 / \pi}$, dove A_0 è l'area della fondazione; per i modi di rocking $r_M = \sqrt[4]{4I_0 / \pi}$, dove I_0 è il momento di inerzia della fondazione intorno ad un asse orizzontale ortogonale alla direzione di analisi; per il modo torsionale $r_T = \sqrt[4]{2I_{0t} / \pi}$, dove I_{0t} è il momento di inerzia polare della fondazione intorno ad un asse verticale passante per il baricentro.

Il principale limite di questo approccio risiede in una sottostima del coefficiente di smorzamento per radiazione per il modo rotazionale, specialmente alle basse frequenze. L'approssimazione può pertanto ritenersi sufficientemente valida per fondazioni caratterizzate da un rapporto di forma in pianta minore di 4:1. Nel caso di fondazioni allungate, è possibile valutare i termini della matrice di impedenza in accordo ai risultati di Dobry e Gazetas (1986).

7.2.2. Caratterizzazione del sottosuolo

L'adozione di un modello di sottosuolo costituito da un semispazio viscoelastico omogeneo riconduce il processo di caratterizzazione delle proprietà del terreno alla definizione di soli tre parametri: il modulo di rigidezza a taglio $G_s = \rho_s V_s^2$, il coefficiente di smorzamento ξ_s e il coefficiente di Poisson ν_s . L'adozione di opportuni valori (caratteristici) di tali parametri deve consentire di tenere in conto, in maniera approssimata, (1) dell'effettivo profilo di rigidezza all'interno del volume significativo di terreno e (2) del comportamento non lineare del terreno eventualmente indotto in fase sismica.

La possibilità di modellare un deposito reale, caratterizzato da rigidezza variabile con la profondità, come un semispazio omogeneo equivalente è stata

esaminata, tra gli altri, da Dobry & Gazetas (1986), Gazetas (1991), Stewart et al (2003). Un deposito caratterizzato da un graduale incremento di rigidità con la profondità può essere modellato, con sufficiente approssimazione, attraverso un semispazio omogeneo equivalente, valutando il modulo di rigidità a taglio e il coefficiente di smorzamento medi all'interno del volume di terreno che risente delle forze trasmesse dalla fondazione. Adottando le prescrizioni di NEHRP-2009, la profondità del volume significativo di terreno, nel caso di fondazioni dirette, può essere presa pari a $0.75 \cdot r$, dove r è il raggio della fondazione. Nel caso in cui, all'interno della profondità di influenza, si riscontrino strati a diversa rigidità è possibile operare una media pesata sulla potenza di ciascuno strato, in maniera analoga a quanto viene generalmente effettuato per il calcolo di $V_{s,30}$. È evidente che, nel caso di fondazioni di forma non circolare, caratterizzate dai raggi equivalenti r_H e r_M , devono definirsi diversi valori della profondità di influenza, uno per ciascun modo della fondazione rigida. Di conseguenza, può essere necessario utilizzare valori diversi del modulo di rigidità e del coefficiente di smorzamento per il calcolo delle impedenze relative a ciascun modo della fondazione.

Tale approccio non può ritenersi valido nei casi di stratigrafie caratterizzate da forti contrasti di rigidità (terreno di fondazione soffice poggiante su un deposito avente rigidità almeno doppia). In tale situazione, infatti, lo smorzamento per radiazione risulta praticamente trascurabile per frequenze minori della frequenza propria dello strato deformabile. L'adozione di un modello di semispazio omogeneo equivalente potrebbe pertanto rivelarsi fortemente non-conservativa.

La risposta non-lineare del terreno e la sua capacità dissipativa vengono comunemente considerate attraverso opportune modifiche al modulo di rigidità a taglio e al coefficiente di smorzamento misurati a piccole deformazioni. In mancanza di dati sperimentali relativi al caso in esame, possono essere utilizzate le curve di decadimento disponibili in letteratura [Kramer (1996)]. A rigore, il livello di deformazione atteso in fase sismica deve essere stimato in base a specifiche analisi di risposta sismica locale.

In alternativa, valori medi approssimati del fattore di riduzione della rigidità e del coefficiente di smorzamento possono essere dedotti da correlazioni con

l'intensità dell'azione sismica attesa al sito. A titolo esemplificativo, si riporta di seguito il prospetto 4.1 della EN 1998-5:2005, a cui si rimanda per indicazioni dettagliate in merito alle modalità applicative.

Tabella 7.1 Valori medi del rapporto di smorzamento e del fattore di riduzione della rigidezza del terreno secondo EN 1998-5.

| $a_g S$ | ξ_s | V_s/V_{s0} | G_s/G_{s0} |
|---------|---------|---------------------|---------------------|
| 0.10 | 0.03 | 0.90 (± 0.07) | 0.80 (± 0.10) |
| 0.20 | 0.06 | 0.70 (± 0.15) | 0.50 (± 0.20) |
| 0.30 | 0.10 | 0.60 (± 0.15) | 0.36 (± 0.20) |

In merito al valore da assumere per il coefficiente di Poisson, NEHRP-2009 suggerisce $\nu_s = 0.33$ per sabbie e ghiaie, $\nu_s = 0.40$ per terreni coesivi compatti e $\nu_s = 0.45$ per terreni soffici. Per i terreni, l'utilizzo di un valore medio pari a $\nu_s = 0.40$ appare in generale una ragionevole approssimazione.

7.2.3. Impedenze della fondazione

La matrice di impedenza di una fondazione rigida è generalmente espressa nella forma $[\bar{K}_s] = [K_s] + ia_0[C_s]$, dove $a_0 = \omega r / V_s$ è la frequenza normalizzata. Numerosi metodi, analitici e numerici, sono stati formulati per il calcolo dei coefficienti di impedenza per diverse condizioni al contorno (forma e tipo della fondazione, stratigrafia del terreno). Dal momento che l'implementazione di tali approcci è, in genere, alquanto complessa, sono stati resi disponibili grafici e tabelle di coefficienti normalizzati per una varietà di situazioni. Nell'utilizzo di soluzioni di letteratura, particolare attenzione deve essere rivolta al segno da attribuire ai termini di accoppiamento, che dipende dalla particolare convenzione adottata per il sistema di riferimento.

Buona parte dei problemi applicativi riscontrabili nella pratica professionale può essere trattata, con sufficiente approssimazione, mediante opportuni adattamenti dei coefficienti di impedenza relativi ad una fondazione circolare rigida superficiale. Tale approccio, utilizzato ad esempio da ASCE 7-10 e da NEHRP 2009, è applicabile al caso di fondazioni rigide, con bassi rapporti di approfondimento

($h_e / r \leq 0.5$), nel caso di sottosuoli relativamente omogenei e comunque privi di forti discontinuità di rigidità.

Il generico coefficiente di impedenza può essere espresso nella forma:

$$\bar{K}_j = K_{j,st} (\alpha_j + ia_{0,j} \beta_j) \quad (7.1)$$

dove $K_{j,st}$ è la rigidità statica della fondazione, $a_{0,j} = \omega r_j / V_s$ è la frequenza normalizzata, e α_j e β_j sono coefficienti moltiplicativi dipendenti dalla frequenza. Nell'equazione (7.1), il pedice j indica il modo di vibrazione della fondazione considerato, e il raggio r_j è da intendersi come raggio equivalente per il relativo modo. Le rigidità statiche della fondazione, rispettivamente per il modo traslazionale orizzontale, traslazionale verticale, di rocking e torsionale sono date da:

$$K_{H,st} = \frac{8G_s r_H}{2 - \nu_s} \quad K_{V,st} = \frac{4G_s r_H}{1 - \nu_s} \quad K_{M,st} = \frac{8G_s r_M^3}{3(1 - \nu_s)} \quad K_{T,st} = \frac{16}{3} G_s r_T^3 \quad (7.2)$$

I coefficienti α_j e β_j , diagrammati in Figura 7.1, sono tratti dalla soluzione di Luco e Mita (1987), relativa ad un semispazio perfettamente elastico. L'effetto dello smorzamento isteretico può essere considerato, con buona approssimazione, attraverso le seguenti relazioni, basate sul principio di corrispondenza della viscoelasticità [Sienkiewicz (1993)]:

$$\alpha_j^v = \alpha_j - a_0 \xi_s \beta_j \quad (7.3)$$

$$\beta_j^v = \beta_j + 2\alpha_j \xi_s / a_0 \quad (7.4)$$

dove α_j^v e β_j^v indicano i coefficienti moltiplicativi della rigidità statica per il calcolo delle impedenze, nel caso di semispazio viscoelastico con coefficiente di smorzamento ξ_s . In genere, lo smorzamento interno al terreno è definito attraverso un modello isteretico (per cui la dissipazione di energia è indipendente dalla frequenza), attraverso il parametro:

$$\xi_s = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (7.5)$$

in cui $\Delta W/W$ è il rapporto tra l'area del ciclo ellittico e l'energia elastica immagazinata da un materiale puramente elastico alla stessa ampiezza di spostamento. Come evidente dall'analisi di Figura 7.1, lo smorzamento interno comporta una riduzione della rigidità alle alte frequenze e un significativo incremento dello smorzamento a basse frequenze (che tende ad infinito per $\omega \rightarrow 0$).

I coefficienti di impedenza indicati possono essere utilizzati con sufficiente approssimazione per l'analisi di fondazioni superficiali di forma compatta (rapporto tra i lati inferiore a 4:1). Nel caso di fondazioni rigide parzialmente immerse nel terreno, le FEMA-440 suggeriscono di valutare la rigidità statica per traslazione e rocking attraverso le seguenti espressioni:

$$K_{H,st}^e = K_{H,st} \left(1 + \frac{2 h_e}{3 r_H} \right) \quad K_{M,st}^e = K_{M,st} \left(1 + 2 \frac{h_e}{r_H} \right) \quad (7.6)$$

dove h_e è l'altezza della porzione di fondazione immersa nel terreno e caratterizzata da condizioni di contatto all'interfaccia che rimangono effettive per tutta la durata dell'evento sismico. In presenza di un riempimento di modesta qualità (o poco compattato), possono infatti aversi fenomeni di separazione tra terreno e fondazione; in tal caso è necessario utilizzare valori opportunamente ridotti del parametro h_e . Per rapporti di approfondimento $h_e / r_H \leq 0,5$, i coefficienti di impedenza possono essere calcolati utilizzando i parametri α_j e β_j per fondazioni dirette, in abbinamento alle rigidità statiche date da (7.6). Per rapporti di approfondimento maggiori, tale approccio non è utilizzabile, ed è necessario ricorrere a soluzioni specifiche [ad es. Bielak (1975b); Apsel e Luco (1987)].

Si sottolinea che i termini di accoppiamento traslazione-rocking della matrice di impedenza possono generalmente essere trascurati per il caso di fondazioni dirette, mentre possono assumere valori rilevanti nel caso di fondazioni con un elevato rapporto di approfondimento.

L'utilizzo delle funzioni di impedenza per fondazioni superficiali può, entro certi limiti, essere utilizzato anche per fondazioni su pali. Nel caso di pali sospesi in terreni approssimativamente omogenei, è ragionevole assumere che il contatto tra il plinto di collegamento dei pali e il terreno rimanga effettivo. In tal caso, i fenomeni

di radiazione delle onde dalla struttura al terreno avvengono prevalentemente a livello del plinto di fondazione, e in misura minore lungo il fusto dei pali. Al contrario, nel caso di pali portanti di punta, attestati in uno strato rigido che supporta uno strato molto deformabile, la rigidità e lo smorzamento per radiazione sono essenzialmente legati all'interazione tra palo e terreno. Devono in tal caso utilizzarsi soluzioni specifiche per i coefficienti di impedenza.

7.2.4. Flessibilità della fondazione

In tutti i metodi di analisi considerati nel presente lavoro, si è assunta valida l'ipotesi di fondazione rigida. Dal momento che la risposta di una fondazione rigida è determinata da soli 6 gradi di libertà, il problema risulta notevolmente semplificato, e risolvibile attraverso metodi sia analitici che numerici. Si ritiene pertanto opportuno fornire alcune considerazioni in merito alla validità di tale ipotesi, con riferimento alle comuni tipologie di fondazioni e di strutture.

Nel caso di strutture il cui contatto con il terreno sia approssimativamente puntiforme (pile da ponte, torri, ciminiere), è intuitivo immaginare che la struttura di fondazione possa considerarsi rigida con buona approssimazione. Nel caso di strutture estese in pianta (edifici), invece, la validità dell'ipotesi di fondazione rigida è condizionata (1) dal rapporto tra la rigidità della fondazione e quella del terreno, (2) dall'effetto irrigidente indotto dalla sovrastruttura e (3) dall'effettiva estensione in pianta della fondazione.

L'ipotesi di fondazione rigida è generalmente accettabile per valutare le impedenze relative ai modi traslazionali orizzontali. Ciò è giustificato dall'elevata rigidità assiale delle strutture di fondazione, nonché dalla presenza degli elementi di collegamento richiesti in zona sismica.

Nei riguardi dei modi di rocking, invece, la rigidità fuori dal piano dei tipici elementi di fondazione non è di per sé sufficiente a giustificare l'ipotesi di fondazione rigida, specialmente quando sussistono forti differenze tra la rigidità della fondazione e quella del terreno. Tuttavia, entro certi limiti, l'ipotesi può comunque ritenersi valida grazie all'effetto irrigidente indotto dalla sovrastruttura.

In accordo alle indicazioni di FEMA-440, in presenza di sistemi resistenti alle azioni orizzontali disposti prevalentemente lungo il perimetro dell'edificio,

supportati da una fondazione continua (platea o graticcio di travi rovesce), l'ipotesi di fondazione rigida può approssimativamente ritenersi valida. Le impedenze della fondazione devono quindi essere calcolate adottando come dimensioni quelle relative all'intera impronta dell'edificio.

In presenza di sistemi resistenti alle azioni orizzontali concentrati in una piccola zona (ad es. strutture a nucleo), l'ipotesi di fondazione rigida può comportare una significativa sovrastima della rigidezza e dello smorzamento. In tal caso, è opportuno valutare le impedenze con riferimento alle dimensioni delle fondazioni degli elementi resistenti. Tali dimensioni effettive, essendo minori delle dimensioni in pianta dell'edificio, portano in generale ad una stima conservativa dello smorzamento per radiazione.

In presenza di fondazioni isolate (plinti), sufficientemente distanziate tra loro, le impedenze traslazionali e di rocking possono essere calcolate a partire dalle quelle dei singoli elementi di fondazione. Si assume comunque che tutto il sistema di fondazione si comporti come un corpo rigido, per cui valgono le seguenti relazioni:

$$K_H = \sum_i K_{H,i} \quad K_M = \sum_i K_{V,i} \cdot d_i^2 + \sum_i K_{M,i} \quad (7.7)$$

dove $K_{H,i}$, $K_{V,i}$ e $K_{M,i}$ rappresentano le impedenze, rispettivamente, per il modo traslazionale orizzontale e verticale e per il modo di rocking di ciascun plinto, e d_i rappresenta la distanza del baricentro del plinto dal baricentro della fondazione. È opportuno sottolineare che l'utilizzo della (7.7) presuppone che non vi sia interazione tra fondazioni adiacenti attraverso il terreno. Nel caso di fondazioni ravvicinate, trascurare l'interazione reciproca può comportare una sovrastima della rigidezza e dello smorzamento nei modi di rocking.

In definitiva, al di fuori dei casi limite anzidetti, non sono disponibili specifiche indicazioni in merito alle procedure per considerare gli effetti di flessibilità delle fondazioni per i casi più comuni (es. telai su graticci di travi rovesce). D'altro canto, i risconti sperimentali presentati da Stewart et al (1999b), rivelano che le procedure semplificate basate sull'ipotesi di fondazione rigida sono ragionevolmente accurate.

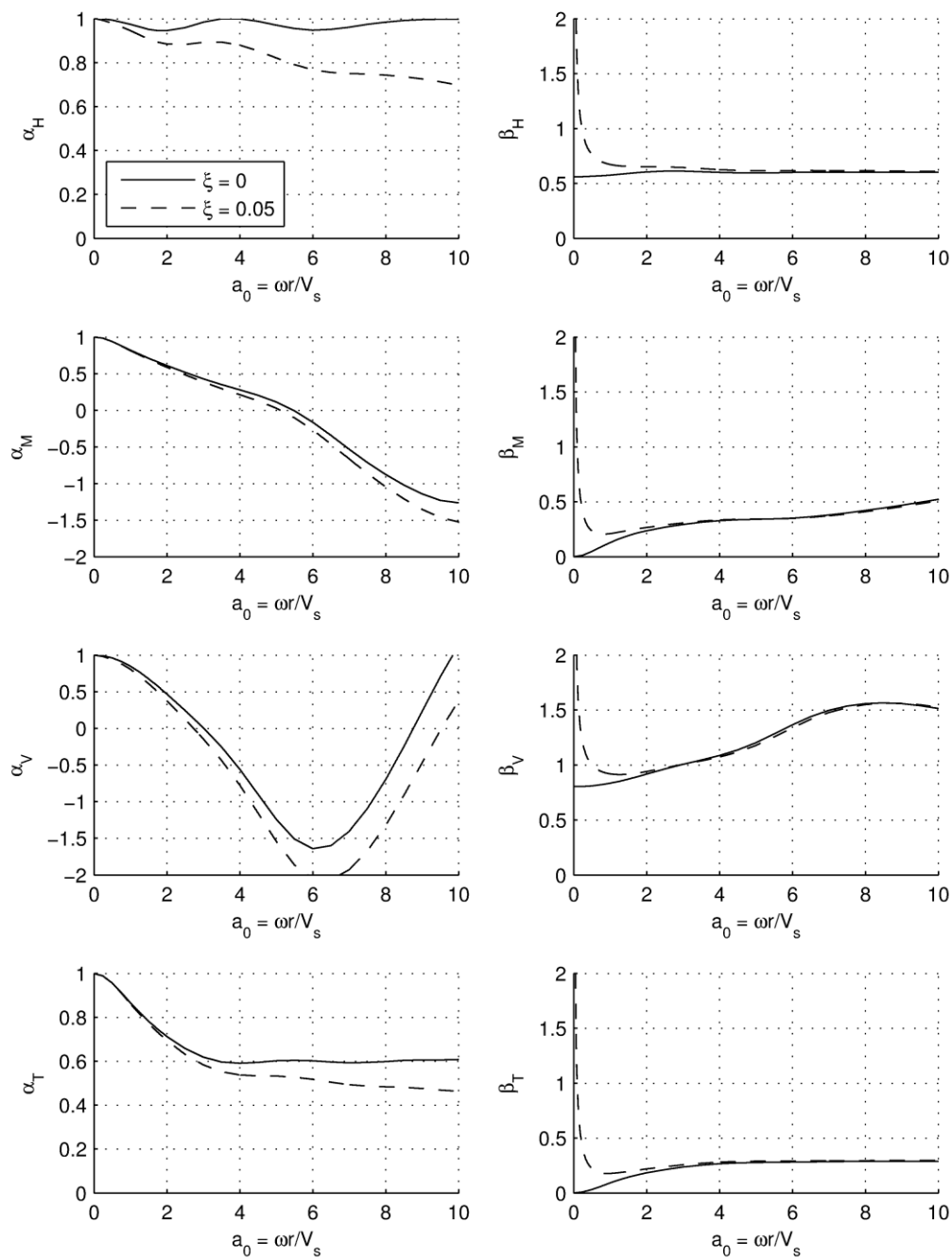


Figura 7.1 Coefficienti per il calcolo delle impedenze ($v_s = 0.45$), dalla soluzione di Luco e Mita (1987). I valori per $\xi_s = 0.05$ sono ottenuti attraverso le espressioni approssimate (7.3) e (7.4).

7.2.5. Analisi della risposta del sistema interagente

Una volta caratterizzate le matrici di massa e di impedenza della fondazione, e le matrici di massa, smorzamento e rigidezza della struttura in elevazione, il sistema di equazioni del moto del sistema interagente può essere risolto mediante i diversi approcci descritti in precedenza. Nella presente sezione ci si sofferma sulla

possibilità di effettuare un'analisi approssimata, utile in fase progettuale, mediante opportune modifiche alle grandezze di risposta ottenute da un modello a base fissa.

I risultati dell'applicazione dell'approccio perturbativo, presentato al Capitolo 6, mostrano che, nel caso di terreni relativamente rigidi, le grandezze modali del sistema interagente (frequenze proprie e forme modali, fattori di partecipazione, coefficienti di smorzamento) possono essere ottenute a partire dalle rispettive quantità relative alla struttura su base fissa, per mezzo di semplici espressioni analitiche in forma chiusa. In particolare, le espressioni proposte rappresentano una generalizzazione di quelle già disponibili [Bielak (1971), Jennings e Bielak (1973), Veletsos e Meek (1974)] per l'analisi della risposta del modo fondamentale di un modello piano.

Inoltre, gli estensivi studi numerici e analitici condotti rivelano che: (i) la procedura approssimata è estremamente accurata per la valutazione della risposta in corrispondenza del modo fondamentale, anche nel caso di terreni particolarmente deformabili; (ii) i modi aggiuntivi legati ai gradi di libertà della fondazione, molto smorzati, danno un contributo trascurabile alla risposta della sovrastruttura e possono, ai fini pratici, essere ignorati; (iii) l'accuratezza dei risultati conseguibili per i modi superiori è fortemente condizionata dalla significatività degli effetti di interazione, misurata dal parametro di rigidità relativa $V_s / \omega_1 r$. Al diminuire di tale parametro, diminuisce il numero di modi la cui risposta è adeguatamente predetta dall'approccio modale classico e dall'approccio perturbativo. In particolare, nel caso della struttura campione analizzata, l'approccio modale e quello perturbativo si rivelano inaccurati per i modi superiori, quando si riscontra una variazione tra la frequenza dell' i -esimo ($i > 1$) modo della struttura a base fissa e quello corrispondente del sistema interagente maggiore di circa il 10%. Nella pratica, le conseguenze di tale limitazione possono essere modeste, dal momento che il dimensionamento strutturale è spesso condizionato soltanto dal contributo dei primi modi di vibrazione.

In definitiva, l'ampiezza modale della risposta in corrispondenza della i -esima frequenza propria del sistema interagente può essere calcolata come la risposta di un oscillatore elementare, di frequenza $\tilde{\omega}_i$ e coefficiente di smorzamento $\tilde{\xi}_i$,

soggetto al moto alla base $\{\tilde{\beta}_i\}^T \{\dot{U}_o^*\}$. Le espressioni proposte, ottenute tramite l'approccio perturbativo, sono di seguito richiamate per comodità:

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_i^2} = \frac{1}{\omega_i^2} + \{\beta_i\}^T [K_s]^{-1} \{\beta_i\} \quad (7.8)$$

$$\{\tilde{\phi}_i\}^T = (\{\tilde{\phi}_{bi}\}^T, \{\tilde{\phi}_{si}\}^T) \quad (7.9)$$

$$\{\tilde{\phi}_{bi}\} = (\tilde{\omega}_i / \omega_i)^2 \{\phi_i\} + \left(\tilde{\omega}_i^2 \omega_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\{\beta_j\}^T [K_s]^{-1} \{\beta_i\}}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)} \{\phi_j\} \right) \quad (7.10)$$

$$\{\tilde{\phi}_{si}\} = \tilde{\omega}_i^2 [K_s]^{-1} \{\beta_i\} \quad (7.11)$$

$$\tilde{\xi}_i = \left(\frac{\tilde{\omega}_i}{\omega_i} \right)^3 \xi_i + \frac{\tilde{\omega}_i^2}{2} \{\beta_i\}^T [K_s]^{-1} [\tilde{\omega}_i C_s] [K_s]^{-1} \{\beta_i\} \quad (7.12)$$

$$\{\tilde{\beta}_i\}^T = \{\beta_i\}^T + \left(\tilde{\omega}_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{\omega_j^2 \{\beta_j\}^T [K_s]^{-1} \{\beta_i\}}{(\omega_j^2 - \omega_i^2)} \{\beta_j\}^T + \tilde{\omega}_i^2 \{\beta_i\}^T [K_s]^{-1} [M_o] \right) \quad (7.13)$$

Nelle equazioni (7.10) e (7.13), in parentesi è racchiuso il contributo dei termini di ordine superiore. Si sottolinea che il calcolo delle frequenze proprie attraverso l'espressione (7.8) necessita di una procedura iterativa, al fine di valutare la parte reale della matrice di impedenza $[K_s]$ in corrispondenza della frequenza fondamentale $\tilde{\omega}_1$. Al fine di tenere in conto, in maniera approssimata, della dipendenza dalla frequenza dello smorzamento per radiazione, la parte immaginaria $[C_s]$ può invece essere valutata indipendentemente per ciascuna frequenza $\tilde{\omega}_i$.

Resta infine da evidenziare come l'analisi modale con spettro di risposta del sistema interagente possa essere condotta utilizzando un modello della struttura su base fissa. Il contributo al vettore spostamento dei gradi di libertà strutturali, relativo all' i -esimo modo del sistema interagente vale:

$$\{U_i\} = \{\tilde{\beta}_i\}^T \{S_d(\tilde{\omega}_i, \tilde{\xi}_i)\} \{\tilde{\phi}_i\} = \frac{1}{\tilde{\omega}_i^2} \{\tilde{\beta}_i\}^T \{S_a(\tilde{\omega}_i, \tilde{\xi}_i)\} \{\tilde{\phi}_i\} \quad (7.14)$$

dove $\{S_a(\tilde{\omega}_i, \tilde{\xi}_i)\} = \tilde{\omega}_i^2 \{S_a(\tilde{\omega}_i, \tilde{\xi}_i)\}$ è il vettore che raccoglie le componenti delle accelerazioni spettrali di input. Considerando soltanto i termini dominanti nelle espressioni (7.10) e (7.13), si ha che:

$$\{U_i\} = \frac{1}{\tilde{\omega}_i^2} \{\tilde{\beta}_i\}^T \{S_a(\tilde{\omega}_i, \tilde{\xi}_i)\} \{\tilde{\phi}_i\} = \frac{1}{\omega_i^2} \{\beta_i\}^T \{S_a(\tilde{\omega}_i, \tilde{\xi}_i)\} \{\phi_i\} \quad (7.15)$$

La (7.15) mostra che la risposta del sistema interagente può essere ottenuta a partire da un modello della struttura a base fissa, modificando l'ordinata spettrale relativa al modo di vibrare corrispondente per tenere conto (1) della variazione della frequenza propria del sistema, e (2) della variazione del coefficiente di smorzamento. Il processo è illustrato schematicamente in Figura 7.2.

Gli spostamenti così ottenuti sono relativi rispetto alla fondazione, e vengono utilizzati per calcolare le forze interne negli elementi strutturali. Gli spostamenti totali rispetto al terreno si ottengono sommando il contributo indotto dal moto rigido della fondazione. Gli spostamenti della fondazione valgono:

$$\{U_{si}\} = \frac{1}{\tilde{\omega}_i^2} \{\tilde{\beta}_i\}^T \{S_a(\tilde{\omega}_i, \tilde{\xi}_i)\} \{\tilde{\phi}_{si}\} \quad (7.16)$$

Gli spostamenti della sovrastruttura rispetto al terreno sono infine dati da:

$$\{U_{t,i}\} = \{U_i\} + [\alpha] \{U_{si}\} \quad (7.17)$$

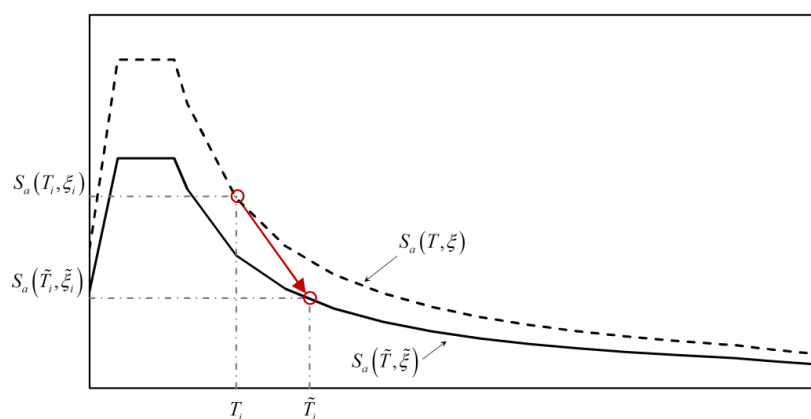


Figura 7.2 Variazione dell'ordinata spettrale per l'i-esimo modo.

Quando invece i termini di ordine superiore nelle espressioni (7.10) e (7.13) forniscono un contributo non trascurabile, le grandezze di risposta del sistema possono essere ricavate implementando le espressioni proposte in un foglio di calcolo. Sia E una generica grandezza di risposta (spostamento o sollecitazione), e sia E_i il valore corrispondente all' i -esimo modo di vibrare della struttura su base fissa (si assume che i modi siano normalizzati in maniera da avere massa modale unitaria). La grandezza \tilde{E}_i corrispondente all' i -esimo modo di vibrare del sistema interagente si ottiene attraverso l'espressione (7.10), sostituendo E_i al posto di ϕ_i . In un'analisi modale con spettro di risposta, il contributo dell' i -esimo modo alla risposta totale è dato da $\tilde{\beta}_{ij} \cdot S_a(\tilde{\omega}_i, \tilde{\xi}_i) / \tilde{\omega}_i^2 \cdot \tilde{E}_i$, dove $\tilde{\beta}_{ij}$ è il fattore di partecipazione del modo i per un input sismico nel grado di libertà j della fondazione. I contributi relativi a ciascun modo, calcolati separatamente, devono quindi essere combinati mediante le usuali regole SRSS e CQC.

Una terza alternativa per una semplice esecuzione dell'analisi SSI prevede di trarre vantaggio dalla possibilità, offerta dai comuni software ad elementi finiti, di modellare direttamente la flessibilità della fondazione. Si realizza un modello ad elementi finiti che include una struttura di fondazione rigida, vincolata in corrispondenza del punto O mediante molle elastiche che riproducono la parte reale della matrice di impedenza. L'analisi modale fornisce i valori delle frequenze, forme modali e fattori di partecipazione del sistema interagente. Per tenere conto dello smorzamento per radiazione, è quindi sufficiente calcolare i coefficienti di smorzamento modale mediante l'Eq. (7.12), e utilizzarli per modificare le ordinate spettrali di input, in corrispondenza di ciascuna frequenza propria, mediante la procedura prevista dalla normativa utilizzata.

7.2.6. Caso delle vibrazioni in un piano: analisi del modo fondamentale

La procedura di analisi appena descritta, seppur di immediata applicazione, può essere ulteriormente semplificata per l'analisi di strutture regolari, la cui risposta sia disaccoppiata e governata dal modo di vibrare fondamentale in ciascuna direzione principale. In tali ipotesi, la procedura sostanzialmente si riduce a quella proposta da diverse normative antisismiche, ormai consolidate, quali ASCE 7-10 e NEHRP 2009. Nella presente sezione, vengono forniti una serie di strumenti (formule e grafici) che

permettono di valutare con semplicità il periodo e il coefficiente di smorzamento effettivi per il modo fondamentale del sistema, utilizzando alcuni parametri caratteristici adimensionali della struttura e del terreno.

Nel caso di vibrazioni accoppiate orizzontali-rocking in un piano, qualora sia possibile trascurare i termini di accoppiamento delle impedenze (ovvero per fondazioni con un basso rapporto di approfondimento), le espressioni (7.8) e (7.12) si riconducono, per $i=1$, alle note formule, in origine proposte da Bielak (1971), Jennings e Bielak (1973) e Veletsos e Meek (1974). La derivazione presentata al §6.3.2 fornisce la prova analitica che tali espressioni rimangono valide, entro i detti limiti, anche per i modi superiori.

Per una più agevole implementazione, le espressioni del periodo e del coefficiente di smorzamento per il modo fondamentale possono essere convenientemente riscritte come:

$$\tilde{T}_1 = T_1 \sqrt{1 + \frac{k_1}{K_H} \left(1 + \frac{K_H}{K_M} h_1^2 \right)} \quad (7.18)$$

e

$$\tilde{\xi}_1 = \left(\frac{T_1}{\tilde{T}_1} \right)^3 \xi_1 + \left(\frac{T_1}{\tilde{T}_1} \right)^2 \frac{k_1}{2} \left(\frac{\tilde{\omega}_1 C_H}{K_H^2} + h_1^2 \frac{\tilde{\omega}_1 C_M}{K_M^2} \right) \quad (7.19)$$

dove:

- T_1 e ξ_1 indicano il periodo fondamentale e il coefficiente di smorzamento del modo fondamentale di vibrazione della struttura su base fissa, nella direzione di analisi;
- $k_1 = 4\pi^2 (W_1 / gT_1^2)$, dove W_1 / g è la massa partecipante del modo fondamentale di vibrazione della struttura su base fissa, nella direzione di analisi;
- h_1 rappresenta l'altezza effettiva della struttura, connessa al modo fondamentale di vibrazione della struttura su base fissa, nella direzione di analisi. $h_1 \approx 0,7H$ per strutture multipiano regolari in altezza; $h_1 \approx H$ per

strutture la cui massa sia concentrata prevalentemente ad un unico livello, essendo H l'altezza totale della costruzione;

- $(K_H + i\tilde{\omega}_1 C_H)$ e $(K_M + i\tilde{\omega}_1 C_M)$, dove i è l'unità immaginaria, rappresentano i coefficienti di impedenza della fondazione, rispettivamente per il modo traslazionale e per quello rotazionale, valutati in corrispondenza della frequenza effettiva del sistema $\tilde{\omega}_1 = 2\pi / \tilde{T}_1$.

Le espressioni (7.18) e (7.19) possono essere utilizzate direttamente per valutare l'accelerazione spettrale $S_a(\tilde{\omega}_1, \tilde{\xi}_1)$ relativa al modo fondamentale nella direzione considerata. Gli spostamenti e le forze interne della sovrastruttura possono essere ricavate, in maniera analoga a quanto descritto dall'equazione (7.15), utilizzando un modello della struttura su base fissa. L'espressione (7.17) dello spostamento totale rispetto al terreno diventa, con riferimento alla massa i -esima, posta alla quota h_i :

$$U_{t,i} = U_{1,i} + \frac{M_{b1}}{K_M} h_i + \frac{V_{b1}}{K_H} \quad (7.20)$$

dove $V_{b1} = S_a(\tilde{\omega}_1, \tilde{\xi}_1) \cdot W_1 / g$ e $M_{b1} = V_{b1} \cdot h_1$ rappresentano, rispettivamente, il taglio e il momento alla base ottenuti dall'analisi. Si assume che l'input sia puramente traslazionale.

Al fine di descrivere la variazione di frequenza e di smorzamento in termini di pochi parametri adimensionali del sistema, è necessario manipolare le equazioni (7.18) e (7.19). Si fa riferimento ad un oscillatore elementare di massa M , periodo $T = 2\pi / \omega$, altezza H e coefficiente di smorzamento ξ , supportato da una fondazione circolare di raggio r . Si intende che le proprietà di tale oscillatore elementare possono rappresentare le rispettive quantità relative al modo fondamentale in una direzione di una struttura multipiano. Omettendo semplici passaggi algebrici, le suddette espressioni possono essere riscritte come:

$$\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\right)^2 = 1 + 4\pi^3 \left(\frac{H}{V_s T}\right)^2 \left(\frac{M}{\rho_s \pi r^2 H}\right) \left(\frac{r}{H}\right) \left[\frac{1}{k_H(\tilde{a}_0)} + \frac{1}{k_M(\tilde{a}_0)} \left(\frac{H}{r}\right)^2 \right] \quad (7.21)$$

e

$$\tilde{\xi} = \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega} \right)^3 \xi + \xi_0 \quad (7.22)$$

in cui ρ_s è la densità di massa del terreno, $M = W/g$, $k_H(\tilde{a}_0) = \frac{8}{2-\nu_s} \alpha_H$, e

$k_M(\tilde{a}_0) = \frac{8}{3(1-\nu_s)} \alpha_M$. Nella (7.22), si è tenuto separato il contributo di smorzamento

legato alla deformazione strutturale (ξ) e quello legato alla fondazione (ξ_0).

Quest'ultimo è dato da:

$$\xi_0 = \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega} \right)^3 \cdot 4\pi^4 \left(\frac{H}{V_s T} \right)^3 \left(\frac{M}{\rho_s \pi r^2 H} \right) \left(\frac{r}{H} \right)^2 \left[\frac{c_H(\tilde{a}_0)}{(k_H(\tilde{a}_0))^2} + \frac{c_M(\tilde{a}_0)}{(k_M(\tilde{a}_0))^2} \left(\frac{H}{r} \right)^2 \right] \quad (7.23)$$

con $c_H(\tilde{a}_0) = \frac{8}{2-\nu_s} \beta_H$ e $c_M(\tilde{a}_0) = \frac{8}{3(1-\nu_s)} \beta_M$.

La frequenza normalizzata $\tilde{a}_0 = \tilde{\omega}r/V_s$ può essere espressa come:

$$\tilde{a}_0 = \frac{\tilde{\omega}r}{V_s} = 2\pi \left(\frac{r}{H} \right) \left(\frac{H}{V_s T} \right) \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega} \right) \quad (7.24)$$

Le equazioni (7.21)-(7.24) rivelano che, sia il rapporto $\omega/\tilde{\omega}$ tra la frequenza della sovrastruttura a base fissa e quella del sistema interagente, sia lo smorzamento della fondazione ξ_0 dipendono da tre parametri adimensionali:

- (1) la rigidità relativa terreno-struttura, misurata in termini del rapporto adimensionale $V_s T/H$;
- (2) la snellezza della struttura H/r ;
- (3) il rapporto $M/\rho_s \pi r^2 H$ tra la massa della struttura e quella di un cilindro di terreno avente raggio pari al raggio della fondazione, e altezza pari a quella della struttura.

Il primo parametro risulta quello di maggiore importanza nei riguardi della significatività degli effetti di interazione, ed è stato ampiamente utilizzato nel resto della tesi, sotto la forma (equivalente) di rapporto $\beta/\omega_1 a$. Secondo Veletsos e Meek

(1974), la flessibilità della fondazione ha effetti trascurabili sulla risposta strutturale quando $V_s T/H \leq 20$. Secondo Luco (1980), il parametro $\beta/\omega_1 a$ è generalmente superiore a 0.5. Nel caso di comuni edifici multipiano, in cui sia possibile assumere che il periodo fondamentale vari in maniera lineare con l'altezza, il rapporto T/H è approssimativamente costante; pertanto l'unica variabile indipendente rimane la velocità delle onde di taglio nel terreno V_s .

La snellezza della struttura è generalmente variabile in un intervallo compreso tra 0.5 e 3 [Luco, 1980]. In funzione di tale parametro, varia il meccanismo di interazione prevalente. Nel caso di strutture tozze, gli effetti di interazione sono principalmente influenzati dal modo traslazionale della fondazione, caratterizzato da elevato smorzamento; al crescere della snellezza, gli effetti del rocking sono più significativi. Vale la pena ricordare che, nel caso di strutture molto snelle, l'interazione può comportare un aumento dell'ampiezza della risposta.

Il parametro legato al rapporto di massa struttura/terreno, invece, è caratterizzato da modeste variazioni per la classe di edifici più comuni. Veletsos e Meek (1974) suggeriscono un valore rappresentativo di 0.15; essi inoltre sostengono che la risposta del sistema interagente è poco influenzata dalle variazioni di tale parametro. Luco (1980) suggerisce invece un valore rappresentativo pari a 0.20.

Per definire completamente il sistema, oltre ai suddetti parametri adimensionali, è necessario specificare i valori del coefficiente di Poisson ν_s e dei coefficienti di smorzamento del terreno ξ_s e della struttura ξ .

Dato il modesto numero di parametri caratteristici del sistema, è possibile rappresentare graficamente le funzioni descritte dalle equazioni (7.21) e (7.23). I grafici di seguito forniti possono risultare utili per valutare con semplicità la risposta in corrispondenza del modo fondamentale di un sistema interagente in ciascuna direzione di analisi. I grafici sono ottenuti per un rapporto $M/\rho_s \pi r^2 H = 0.20$, caratteristico di edifici multipiano. Infatti, per un edificio regolare, si ha che $h_1/H \approx M_1/M \approx 0.7$. Assumendo un peso unitario dell'edificio pari a 10 KN/m² per piano, distribuito su un'impronta di area pari a quella della fondazione, un'altezza di interpiano pari a 3 m e un peso unitario del terreno di 19 KN/m³, si ha che

$M / \rho_s \pi r^2 H = 0.18$. Nel caso di una pila da ponte, invece, il parametro è molto più variabile. Ad esempio, per una pila alta 10 m, che supporta 50 m di impalcato avente peso pari a 200 KN/m, poggiante su una fondazione di raggio 4 m, $M / \rho_s \pi r^2 H \approx 1$.

I grafici in Figura 7.3 mostrano i risultati dell'implementazione delle espressioni (7.21) e (7.23), per il caso $M / \rho_s \pi r^2 H = 0.2$, valutati utilizzando i coefficienti di impedenza di Figura 7.1. Come già osservato da Veletsos e Nair (1975), la variazione del periodo fondamentale dipende in maniera significativa dal parametro di rigidità relativa $\beta T / H$, e, in misura minore, dalla snellezza H / r ; lo smorzamento isteretico del terreno ha un effetto trascurabile sulla frequenza, tanto che le curve corrispondenti a $\xi_s = 0.05$ non sono distinguibili. Lo smorzamento indotto dalla fondazione è invece significativamente influenzato, oltre che da $\beta T / H$, anche da H / r e da ξ_s .

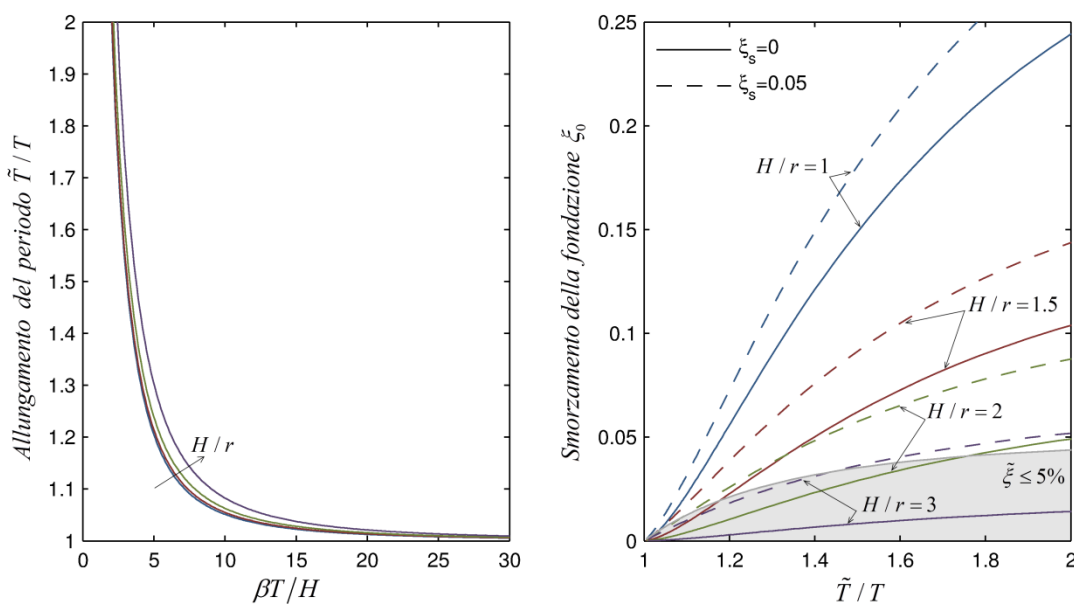


Figura 7.3 Variazione del periodo e dello smorzamento di un oscillatore elementare per effetto dell'interazione con il terreno, $M / \rho_s \pi r^2 H = 0.20$.

Nel caso di strutture snelle, lo smorzamento isteretico assume un'importanza fondamentale e, in generale, lo smorzamento del sistema può risultare inferiore a quello della struttura su base fissa. Tale circostanza è evidenziata dalla parte in grigio nel grafico di destra di Figura 7.3: partendo da un coefficiente di smorzamento della

struttura $\xi = 5\%$, il sistema interagente possiede uno smorzamento totale $\tilde{\xi} \leq 5\%$ se il punto di coordinate $(\tilde{T}/T, \xi_0)$ ricade all'interno della zona in grigio.

Allo scopo di fornire un set di risultati completo, utilizzabile ai fini progettuali, si considera ora il caso di una fondazione rettangolare, di dimensioni $2a \times 2b$. Per caratterizzare il sistema, è conveniente introdurre, come ulteriore parametro adimensionale, il rapporto r_M/r_H tra il raggio caratteristico della fondazione per rocking e quello per traslazione. Se si considerano fondazioni poco allungate, con massimo rapporto tra i lati pari a 4:1, il parametro r_M/r_H risulta compreso tra 0.7 e 1.4, a seconda della direzione di analisi. Per fondazioni quadrate ($a=b$), $r_M/r_H \approx 1$.

Omettendo gli elementari passaggi algebrici, le equazioni (7.21) e (7.23) possono essere riscritte come:

$$\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}}\right)^2 = 1 + 4\pi^3 \left(\frac{H}{V_s T}\right)^2 \left(\frac{M}{\rho_s \pi r_H^2 H}\right) \left(\frac{r_H}{H}\right) \left[\frac{1}{k_H(\tilde{a}_0)} + \frac{1}{k_M(\tilde{a}_0)} \left(\frac{H}{r_H}\right)^2 \left(\frac{r_H}{r_M}\right)^3 \right] \quad (7.25)$$

e

$$\xi_0 = \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\right)^3 \cdot 4\pi^4 \left(\frac{H}{V_s T}\right)^3 \left(\frac{M}{\rho_s \pi r_H^2 H}\right) \left(\frac{r_H}{H}\right)^2 \left[\frac{c_H(\tilde{a}_0)}{(k_H(\tilde{a}_0))^2} + \frac{c_M(\tilde{a}_0)}{(k_M(\tilde{a}_0))^2} \left(\frac{H}{r_H}\right)^2 \left(\frac{r_H}{r_M}\right)^2 \right] \quad (7.26)$$

ed essere implementate in maniera analoga a quanto fatto in precedenza per la fondazione circolare. Il parametro di snellezza è espresso come rapporto H/r_H fra l'altezza dell'edificio e il raggio equivalente per traslazione; in tal modo esso risulta funzione dell'altezza della struttura e dell'area della fondazione.

I risultati dell'implementazione delle espressioni (7.25) e (7.26) sono diagrammati nelle Figure (7.4)-(7.7), per $H/r_H = 1.0, 1.5, 2.0, 3.0$, e al variare di $r_M/r_H = 0.70, 0.85, 1.20, 1.40$. Per una più semplice comprensione qualitativa dei grafici, si considera un edificio, a pianta rettangolare, avente rapporto tra i lati 4:1. Le curve relative a $r_M/r_H = 0.70$ e 1.40 , per un fissato valore di H/r_H , descrivono la risposta piana dell'edificio lungo le due direzioni ortogonali, rispettivamente nella direzione del lato corto e in quella del lato lungo. La stessa analogia è valida per le

curve $r_M/r_H = 0.85$ e 1.20 , nel caso di un edificio rettangolare avente rapporto tra i lati 2:1.

Analizzando le curve relative alla variazione di periodo si osserva che, fissato H/r_H , la variazione di periodo diminuisce all'aumentare di r_M/r_H . Tale andamento è prevedibile considerando che, fissata l'area della fondazione (r_H), l'aumento di r_M comporta un incremento della rigidezza per rocking della fondazione. Considerando invece r_M/r_H costante, al crescere di H/r_H si osserva un incremento di \tilde{T}/T , in analogia a quanto già osservato per la fondazione circolare.

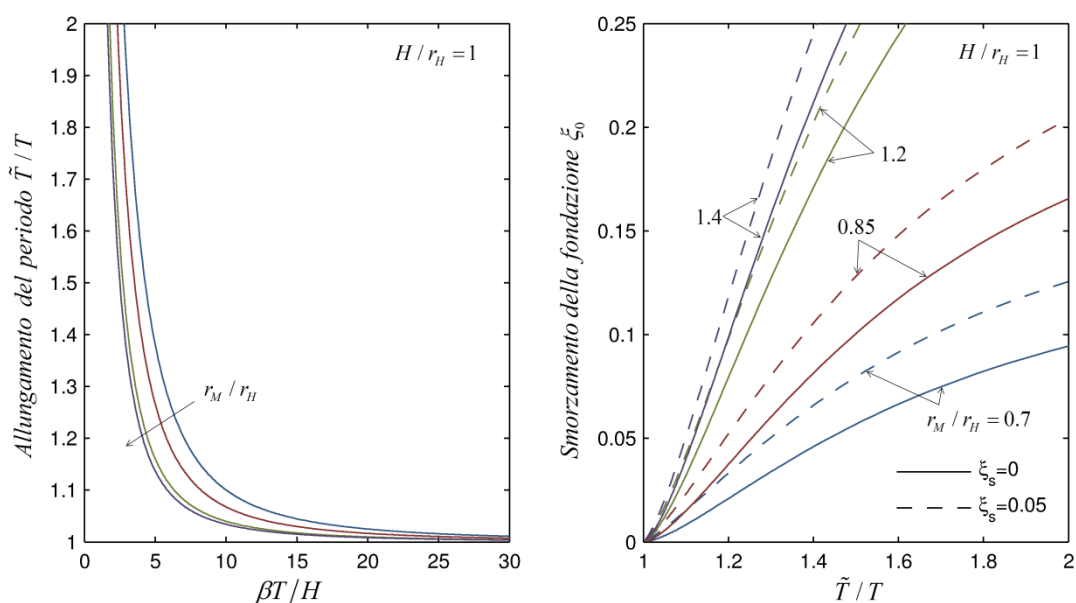


Figura 7.4 Variazione del periodo e dello smorzamento di un oscillatore elementare su fondazione rettangolare al variare di r_M/r_H ($M/\rho_s \pi^2 H = 0.20$; $H/r_H = 1.0$).

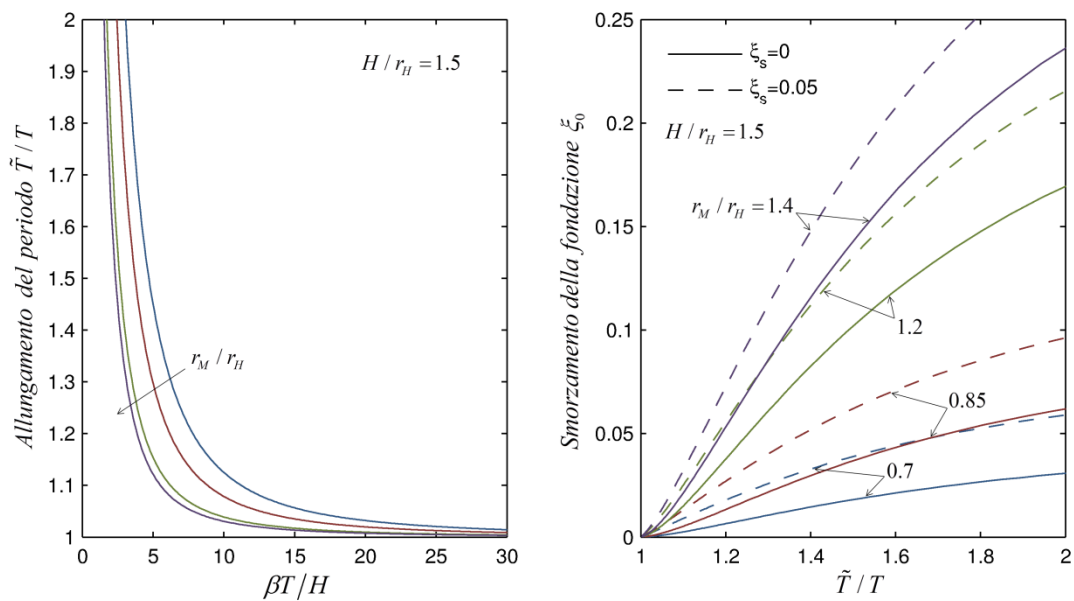


Figura 7.5 Variazione del periodo e dello smorzamento di un oscillatore elementare su fondazione rettangolare al variare di r_M/r_H ($M/\rho_s\pi^2H = 0.20$; $H/r_H = 1.5$).

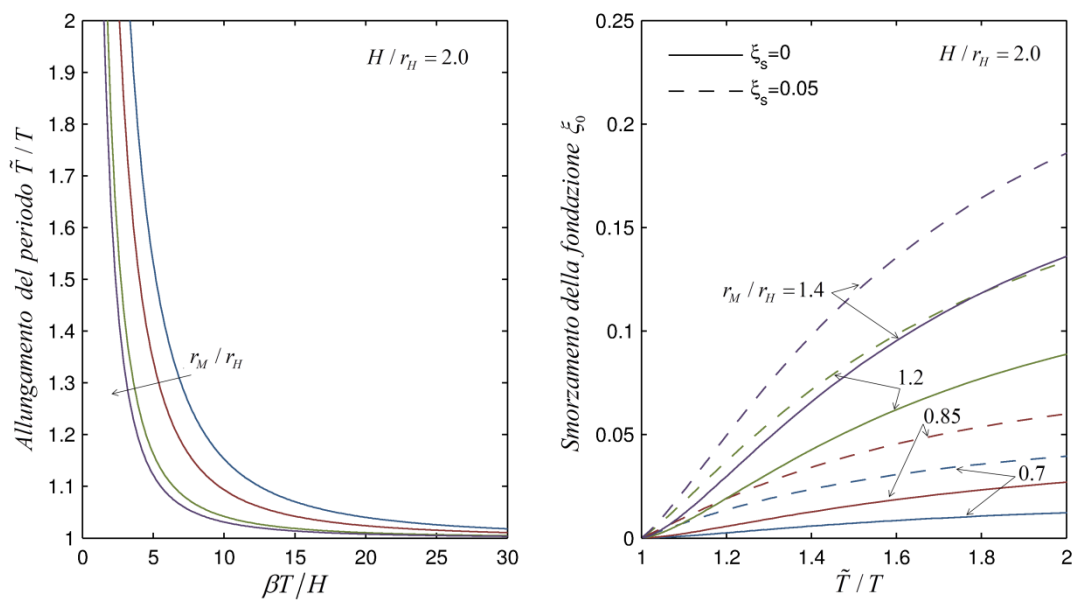


Figura 7.6 Variazione del periodo e dello smorzamento di un oscillatore elementare su fondazione rettangolare al variare di r_M/r_H ($M/\rho_s\pi^2H = 0.20$; $H/r_H = 2.0$).

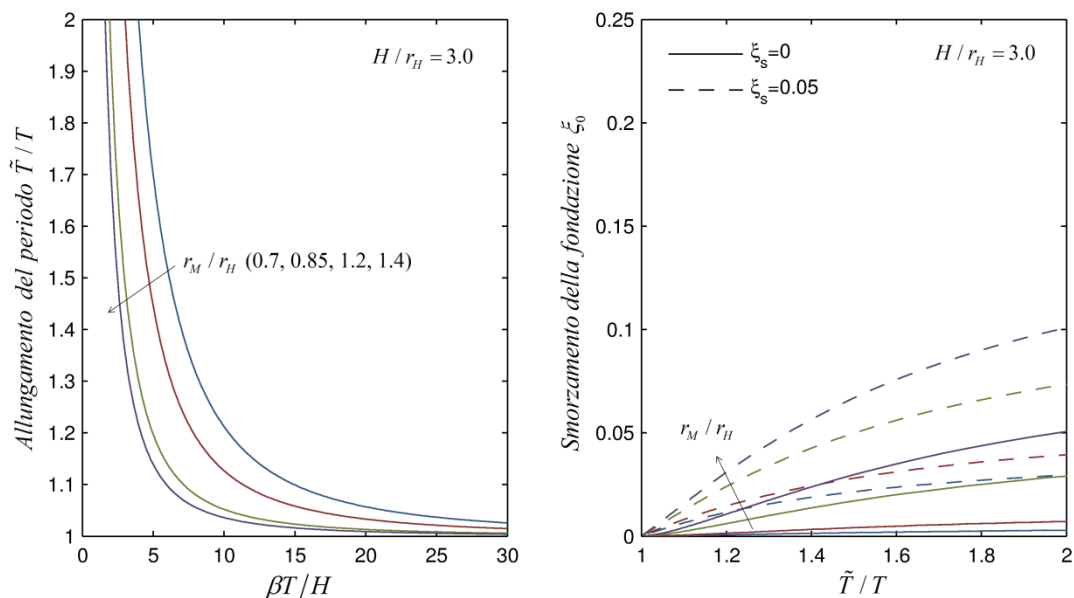


Figura 7.7 Variazione del periodo e dello smorzamento di un oscillatore elementare su fondazione rettangolare al variare di r_M/r_H ($M/\rho_s \pi^2 H = 0.20$; $H/r_H = 3.0$).

I grafici relativi al coefficiente di smorzamento della fondazione mostrano che il contributo dello smorzamento per radiazione aumenta con r_M/r_H , per un fissato valore di H/r_H e di \tilde{T}/T . Tale evidenza è connessa con la maggiore capacità di smorzamento del modo traslazionale: al crescere di r_M/r_H , la rigidezza per rocking della fondazione aumenta, e il meccanismo deformativo prevalente è connesso alla traslazione della fondazione. La variazione di ξ_0 con H/r_H , fissato r_M/r_H , è analoga a quella già descritta per il caso delle fondazioni circolari.

Quanto appena riscontrato può essere interpretato qualitativamente nei seguenti termini. Si considera la risposta, in corrispondenza del modo fondamentale in ciascuna direzione, di un edificio rettangolare, regolare e doppiamente simmetrico, caratterizzato da rigidezza (su base fissa) uguale nelle due direzioni principali: l'incremento di periodo connesso all'interazione con il terreno sarà maggiore per il modo nella direzione del lato corto; tuttavia, ciò non è generalmente sufficiente a compensare la maggiore efficacia dello smorzamento per radiazione legato al modo traslazionale. Pertanto, lo smorzamento per radiazione risulterà generalmente più elevato nella direzione del lato lungo.

7.3. Esempi applicativi

Come già osservato in precedenza, la procedura di analisi proposta rappresenta una generalizzazione di quella, basata sui lavori di Jennings e Bielak (1973), Veletsos e Meek (1974) e Veletsos e Nair (1975), incorporata in diversi documenti normativi. In particolare, i principali aspetti innovativi sono legati alla validità delle espressioni approssimate per l'analisi di alcuni modi superiori, alla possibilità di considerare matrici di impedenza complete e sistemi tridimensionali eccitati lungo tutti i sei gradi di libertà della fondazione rigida. Vengono di seguito presentati alcuni esempi applicativi, per i quali la procedura proposta si rivela di maggiore utilità.

7.3.1. *Pila da ponte su fondazione a pozzo*

Come primo caso studio si analizza la risposta trasversale di una singola pila da ponte in c.a. poggiante su una fondazione a pozzo. Le caratteristiche geometriche e meccaniche della struttura si riferiscono ad un tipico viadotto italiano di media luce. La significatività di tale caso studio è legata agli effetti indotti da un elevato approfondimento della fondazione. In particolare, sia i termini di accoppiamento traslazione-rocking della matrice di impedenza, sia la componente rotazionale del moto indotta dall'interazione cinematica risultano non trascurabili.

Il modello di riferimento utilizzato per l'analisi del sistema, rappresentato schematicamente in Figura 7.8, è costituito da un oscillatore ad un grado di libertà, poggiante su una fondazione rigida immersa in un semispazio elastico omogeneo. Si assume che la massa della sovrastruttura sia concentrata a livello di testa pila, e si considera la risposta trasversale, per vibrazioni orizzontali/rocking, in un piano yz . In tali ipotesi, la configurazione deformata del sistema è individuata da tre gradi di libertà: traslazione orizzontale della massa, traslazione e rotazione della fondazione rigida intorno al punto caratteristico O .

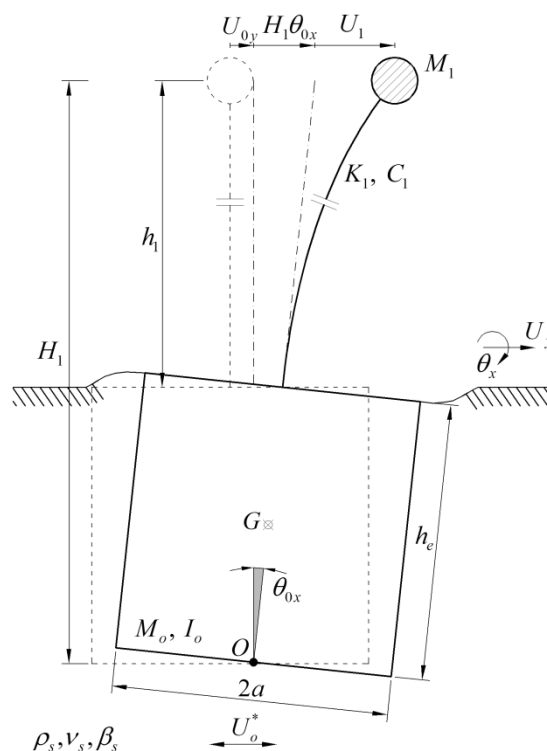


Figura 7.8 Modello 3-DOF di pila su fondazione a pozzo.

Al fine di evidenziare le differenze di comportamento tra pile diverse appartenenti allo stesso viadotto, si analizzano due strutture, di altezza e sezione trasversale differenti, ma con uguale massa in sommità (si assume che la massa della pila sia trascurabile rispetto a quella dell'impalcato). Le caratteristiche geometriche e meccaniche di struttura, fondazione e terreno sono sintetizzate in Tabella 7.2. La massa in testa pila ($M_1 = 9.7 \cdot 10^5$ Kg) è rappresentativa di un viadotto a travata di medie dimensioni (luce delle campate 50 m, larghezza dell'impalcato 15 m); le proprietà geometriche della sezione trasversale riflettono quelle di tipiche pile cave in c.a., le cui dimensioni variano in funzione dell'altezza della pila; fondazioni a pozzo cilindrico sono comunemente utilizzate in presenza di terreni deformabili e a rischio di stabilità. Si assume un coefficiente di smorzamento viscoso della struttura su base fissa pari al 2%. Al fine di evidenziare gli effetti di interazione, l'analisi viene condotta assumendo un terreno di fondazione molto deformabile, con un valore caratteristico della velocità di propagazione delle onde di taglio pari a 150 m/sec. Il parametro adimensionale di rigidezza relativa $V_s / \omega_1 a$ è pari, rispettivamente per la pila alta e per quella bassa, a 5.15 e 2.50. L'azione di input è costituita da un'onda

SH armonica, che si propaga in direzione verticale, di ampiezza in accelerazione unitaria $\ddot{U}_{gy} = e^{i\omega t}$.

Tabella 7.2 Caratteristiche dei casi studio.

| Sovrastruttura | | | | |
|--|--------------------|----------|----------|-------------------|
| Altezza pila | h_1 | 30 | 15 | m |
| Massa | M_1 | 9.70E+05 | 9.70E+05 | Kg |
| Rigidezza | K_1 | 51530 | 217550 | KN/m |
| Frequenza fondamentale (base fissa) | f_1 | 1.16 | 2.38 | Hz |
| Coefficiente di smorzamento (base fissa) | ξ_1 | 0.02 | 0.02 | - |
| Sezione pila | | | | |
| Modulo di elasticità (fessurato) | E_{cls} | 23000 | 23000 | MPa |
| Coefficiente di Poisson | ν_{cls} | 0.2 | 0.2 | - |
| Area sezione | A | 5.86 | 4.65 | m ² |
| Momento di inerzia | J | 20.97 | 11.75 | m ⁴ |
| Area di taglio | A_v | 4.20 | 3.61 | m ² |
| Fondazione e terreno | | | | |
| Raggio fondazione | a | 4.0 | 4.0 | m |
| Altezza fondazione | h_o | 8.0 | 8.0 | m |
| Rapporto di approfondimento | h_e/a | 2.0 | 2.0 | - |
| Massa fondazione | M_o | 9.70E+05 | 9.70E+05 | Kg |
| Momento di inerzia baricentrico | I_{og} | 9.05E+06 | 9.05E+06 | Kg m ² |
| Densità di massa del terreno | ρ_s | 1900 | 1900 | Kg/m ³ |
| Coefficiente di Poisson terreno | ν_s | 0.25 | 0.25 | - |
| Velocità onde di taglio | V_s | 150 | 150 | m/s |
| Modulo di rigidezza a taglio | G_s | 42750 | 42750 | KN/m ² |
| Parametro di rigidezza relativa | $V_s / \omega_1 a$ | 5.15 | 2.50 | - |

Il moto di input in fondazione è costituito dal vettore di accelerazioni

$\{\ddot{U}_o^*\} = (\ddot{U}_{oy}^*, \ddot{\theta}_{ox}^*)^T$, riferite al punto caratteristico O alla base della fondazione,

definito attraverso la seguente relazione:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{U}_{0y}^*(\omega) \\ \ddot{\theta}_{0x}^*(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{yy}(\omega) \\ R_{xy}(\omega)/a \end{Bmatrix} \ddot{U}_{gy}(\omega) \quad (7.27)$$

in cui $S_{yy}(\omega)$ e $R_{xy}(\omega)$ sono i coefficienti di scattering, tratti dalla soluzione di Luco e Wong (1987), e diagrammati in Figura 7.9. Per effetto dell'elevato approfondimento della fondazione, gli effetti cinematici di riduzione della componente di input

traslazionale e di introduzione di quella rotazionale possono essere molto significativi.

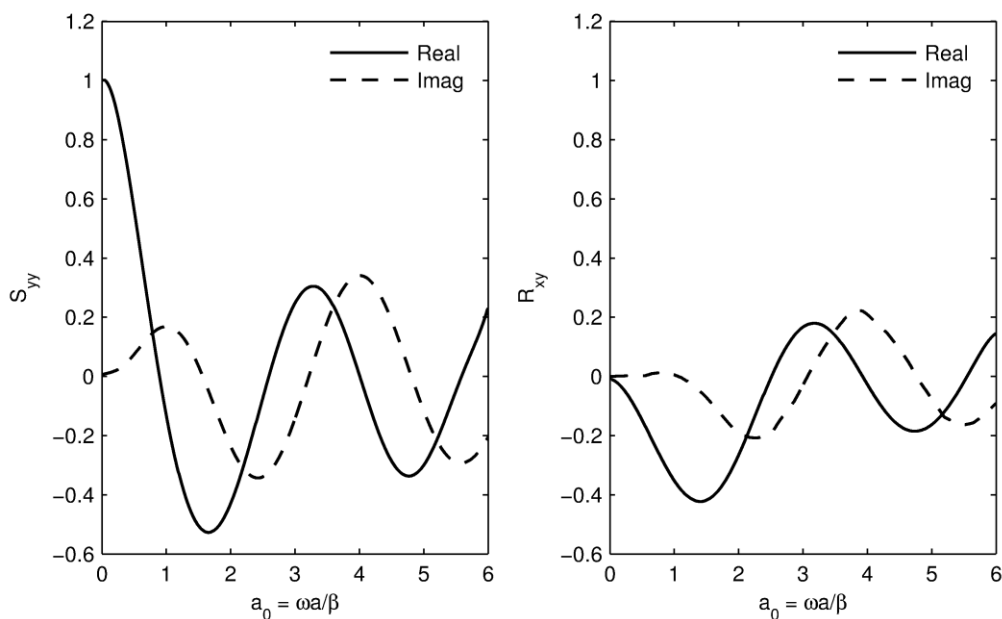


Figura 7.9 Coefficienti di scattering per una fondazione cilindrica rigida ($\nu_s = 0.25$, $h/a = 2$), e onde SH verticali [Luco e Wong (1987)].

La matrice di impedenza della fondazione, espressa come

$$[\bar{K}_s] = G_s a \left(\begin{bmatrix} k_{HH} & ak_{HM} \\ ac_{HM} & a^2 k_{HM} \end{bmatrix} + ia_0 \begin{bmatrix} c_{HH} & ac_{HM} \\ ac_{HM} & a^2 c_{MM} \end{bmatrix} \right) \quad (7.28)$$

è definita utilizzando i coefficienti di impedenza forniti da Apsel e Luco (1987), e diagrammati in Figura 7.10. Si evince che, per effetto dell'elevato approfondimento della fondazione, i termini di accoppiamento traslazione/rocking k_{HM} e c_{HM} sono dello stesso ordine di grandezza dei termini diretti.

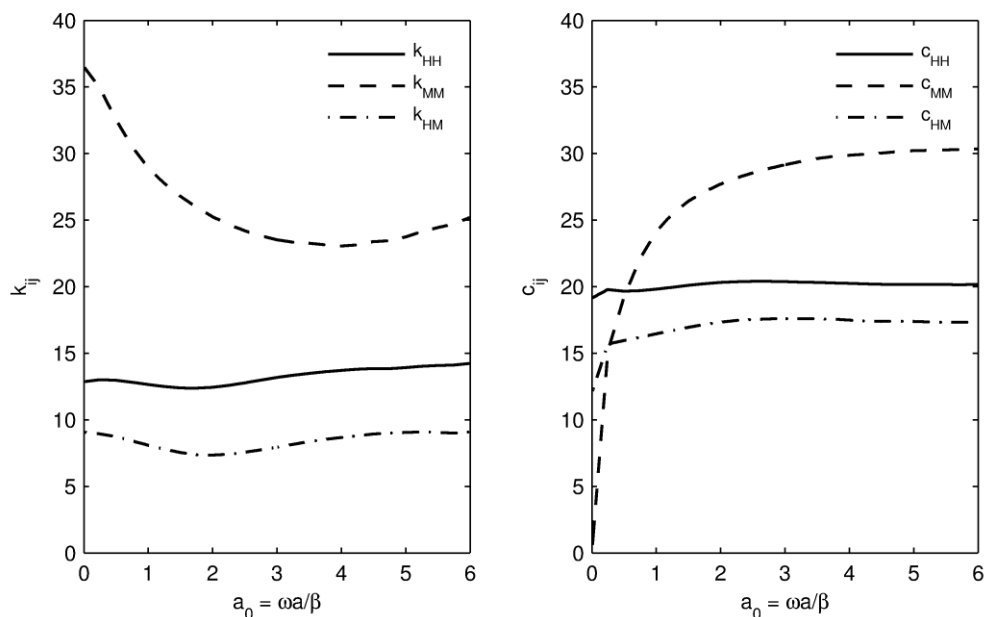


Figura 7.10 Coefficienti di impedenza per una fondazione cilindrica rigida ($\nu_s = 0.25$, $h/a = 2$) [Apsel e Luco (1987)].

In Figura 7.11 e 7.12 sono rappresentate le funzioni di trasferimento dell'ampiezza di quattro grandezze caratteristiche della risposta: (1) spostamento orizzontale della massa strutturale U_1 , relativo rispetto alla fondazione, (2) spostamento orizzontale della massa strutturale U_{r1} , relativo rispetto al moto di input, (3) e (4) taglio T_o e momento M_o alla base della fondazione. Lo spostamento U_1 è normalizzato rispetto allo spostamento di input $\ddot{U}_{yg} / \omega_1^2$, e rappresenta una grandezza direttamente correlata alle sollecitazioni alla base della pila; lo spostamento U_{r1} è anch'esso normalizzato rispetto a $\ddot{U}_{yg} / \omega_1^2$, ed è una grandezza significativa per il dimensionamento dei giunti; il taglio e il momento alla base della fondazione sono normalizzati rispetto ai relativi valori pseudo-statici $T_{o,st} = (M_1 + M_0)\ddot{U}_{gy}$ e $M_{o,st} = (M_1 H_1 + M_0 h_e / 2)\ddot{U}_{gy}$. L'analisi viene condotta utilizzando diversi metodi di soluzione: (i) metodo esatto mediante inversioni multiple della matrice di impedenza dinamica; (ii) analisi modale classica; (iii) analisi approssimata mediante l'approccio perturbativo per terreni rigidi; (iv) analisi approssimata mediante l'approccio perturbativo semplificato, in cui si considera soltanto il contributo dei modi strutturali.

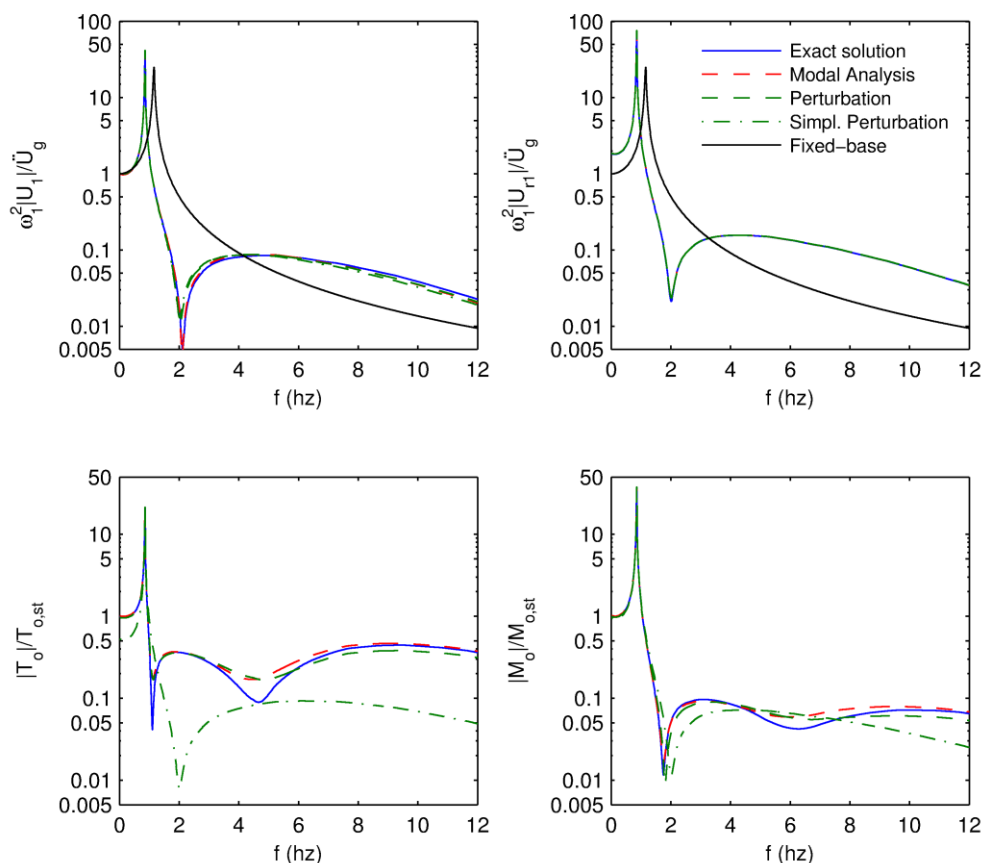


Figura 7.11 Risposta stazionaria del sistema interagente, caso di pila alta ($h_1 = 30$ m).

L'interazione terreno-struttura comporta in entrambi i casi una riduzione della frequenza di risonanza rispetto alla condizione di base fissa. Tale riduzione è più marcata per il caso di pila bassa, in conseguenza della minore rigidità relativa terreno-struttura ($V_s / \omega_1 a = 2.5$) rispetto alla pila alta ($V_s / \omega_1 a = 5.2$). Per effetto della diversa snellezza delle due pile esaminate, l'ampiezza dello spostamento relativo in risonanza è maggiore (pila alta) o minore (pila bassa) rispetto a quella della pila su base fissa (tale circostanza è già stata commentata al §1). Lo spostamento relativo rispetto al moto di input tende ad aumentare, rispetto alla condizione su base fissa, per effetto della deformabilità della fondazione. Nel caso di pila bassa, l'incremento di spostamento indotto dal moto della fondazione è compensato dalla minore deformazione richiesta alla pila stessa.

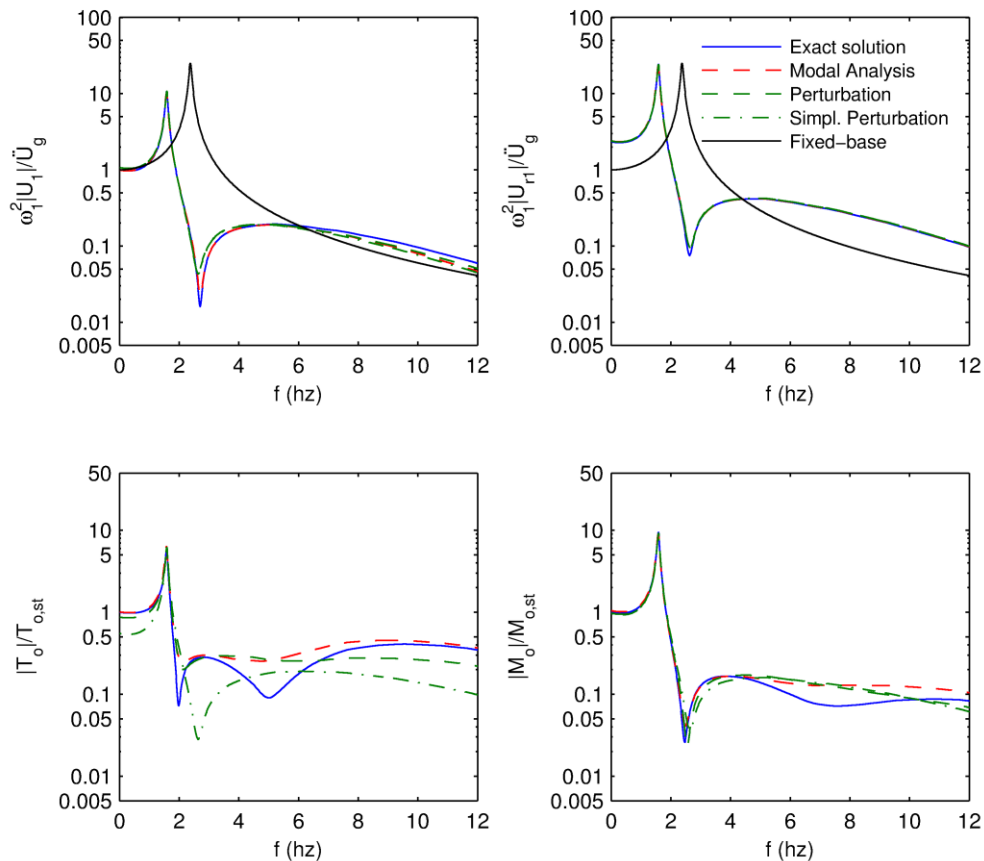


Figura 7.12 Risposta stazionaria del sistema intergente, caso di pila bassa ($h_1 = 15$ m).

In merito all'accuratezza dei metodi approssimati, la Tabella 7.3 riporta i valori della misura di errore della densità di potenza spettrale μ_1 , per le quattro grandezze di risposta e per i tre metodi approssimati considerati. Dall'analisi delle misure di errore e delle funzioni di trasferimento, si evince che i metodi approssimati consentono una buona previsione della risposta della sovrastruttura, con errori massimi dell'ordine del 10%. Errori maggiori si riscontrano nella valutazione del taglio alla base della fondazione, specialmente adottando l'approccio perturbativo semplificato (errori del 24% e del 40% rispettivamente per la pila alta e bassa).

Tabella 7.3 Confronto tra le misure di errore della densità di potenza spettrale.

| Response parameter | μ_1 | | | | | |
|--------------------|--------------|-------|-------|--------------|-------|-------|
| | $h_1 = 30$ m | | | $h_1 = 15$ m | | |
| | M.A. | P.A. | S.P. | M.A. | P.A. | S.P. |
| U_1 | 0.033 | 0.033 | 0.033 | 0.109 | 0.050 | 0.050 |
| $U_{r,1}$ | 0.033 | 0.032 | 0.032 | 0.112 | 0.038 | 0.039 |
| T_0 | 0.068 | 0.066 | 0.237 | 0.238 | 0.214 | 0.394 |
| M_0 | 0.034 | 0.038 | 0.045 | 0.120 | 0.059 | 0.069 |

Gli errori nella valutazione del taglio alla base della fondazione sono connessi alla minore accuratezza degli approcci basati sulla decomposizione modale nella valutazione della risposta del modo traslazionale della fondazione. Tale circostanza era già stata osservata con riferimento alla struttura campione a nove piani. L'utilizzo dell'approccio perturbativo semplificato comporta un ulteriore incremento di tale errore, dal momento che i modi della fondazione non vengono considerati. In definitiva, l'approccio semplificato proposto nel presente lavoro si rivela molto accurato per la valutazione della risposta della sovrastruttura, con errori che si mantengono uguali, e spesso inferiori, di quelli ottenuti mediante l'analisi modale classica.

In Figura 7.13 sono rappresentate le variazioni della frequenza fondamentale e del relativo coefficiente di smorzamento del sistema interagente, in funzione della velocità di propagazione delle onde di taglio nel terreno. Tali grandezze sono ottenute attraverso tre approcci differenti: l'analisi modale classica, le espressioni approssimate ottenute mediante l'approccio perturbativo (Equazioni 7.8 e 7.12), e le espressioni proposte da Jennings e Bielak (1973) (Equazioni 7.18 e 7.19) che ignorano la presenza dei termini di accoppiamento delle impedenze. È opportuno sottolineare che le espressioni 7.8 e 7.12 si riducono a quelle proposte da Bielak (1975b), nel caso dell'analisi del modo fondamentale di una struttura piana, soggetta ad un input puramente traslazionale.

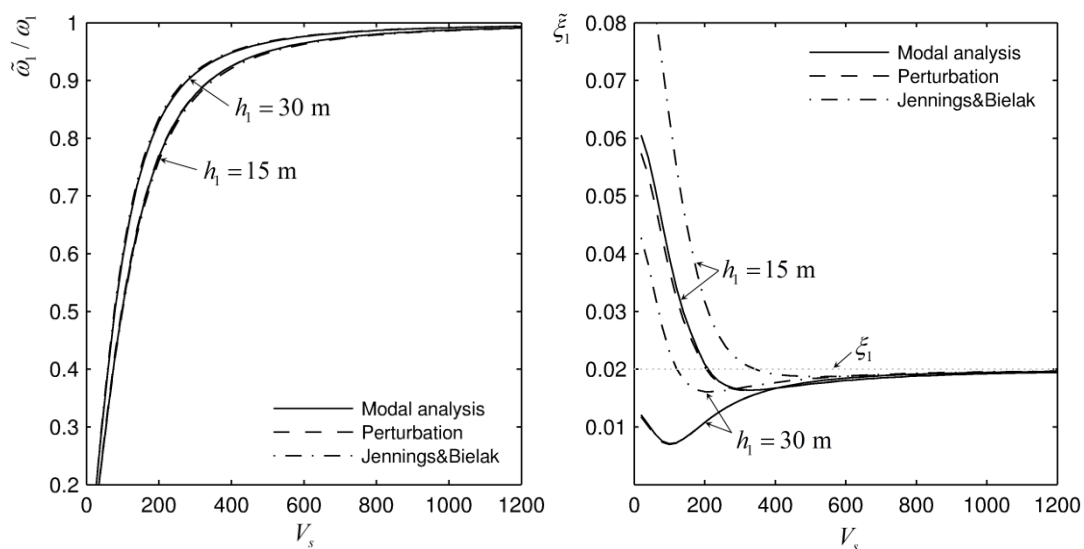


Figura 7.13 Variazione della frequenza fondamentale e del coefficiente di smorzamento del sistema in funzione della velocità delle onde di taglio nel terreno.

L'analisi della Figura 7.13 rivela che, nei casi esaminati, i termini di accoppiamento delle rigidezze k_{HM} hanno un effetto trascurabile nella valutazione della frequenza fondamentale del sistema. Viceversa, i termini c_{HM} hanno un effetto significativo nella valutazione del coefficiente di smorzamento equivalente. Nel caso di terreni relativamente deformabili, trascurare l'accoppiamento traslazione-rocking può comportare una significativa sovrastima del coefficiente di smorzamento. Nei casi esaminati, gli effetti di interazione possono essere trascurati soltanto in presenza di terreni molto rigidi ($V_s > 800$ m/sec). Nel caso di pila alta, il coefficiente di smorzamento del sistema risulta sempre inferiore a quello della pila su base fissa; viceversa, per la pila bassa esso può essere molto maggiore, ovvero lievemente inferiore di quello su base fissa, in funzione della rigidezza relativa del terreno di fondazione.

7.3.2. Edificio multipiano con distribuzione asimmetrica delle rigidezze

Nel secondo caso studio si analizza la risposta di un edificio multipiano, caratterizzato da una distribuzione asimmetrica delle rigidezze connessa alla presenza di un vano scala e di un nucleo ascensore in posizione eccentrica rispetto agli assi di simmetria dell'edificio. La risposta della struttura è marcatamente tridimensionale e non può essere scomposta attraverso due modelli piani indipendenti. Per tenere conto dell'interazione con il terreno è dunque necessario considerare tutti i sei gradi di libertà della fondazione rigida. L'esempio mette in evidenza come sia possibile effettuare, con relativa semplicità, un'analisi SSI approssimata utilizzando un modello ad elementi finiti della sovrastruttura su base fissa e le espressioni formulate attraverso l'approccio perturbativo.

Si considera un edificio a telaio a sette piani in c.a., a pianta rettangolare di dimensioni 26 m x 16 m e altezza 22.4 m (altezza di interpiano pari a 3.2 m). In Figura 7.14 è riportata schematicamente la carpenteria del piano tipo dell'edificio. I telai sono composti da travi a sezione rettangolare 30x60 cm², e pilastri di dimensioni 80x80 cm² (pilastri interni) e 40x80 cm² (pilastri di bordo). Sono presenti inoltre un nucleo ascensore, avente sezione a C di dimensioni totali 2 m x 2.2 m, realizzato con setti in c.a. di spessore 20 cm, e una scala realizzata con una soletta in c.a. di larghezza 1.2 m e spessore 12 cm. I pianerottoli di attesa e di piano sono

realizzati con una soletta piena in c.a. di spessore 20 cm. Si assume valida l'ipotesi di concentrare le masse strutturali a livello dei piani, con una densità di massa caratteristica pari a 1 t/m^2 .

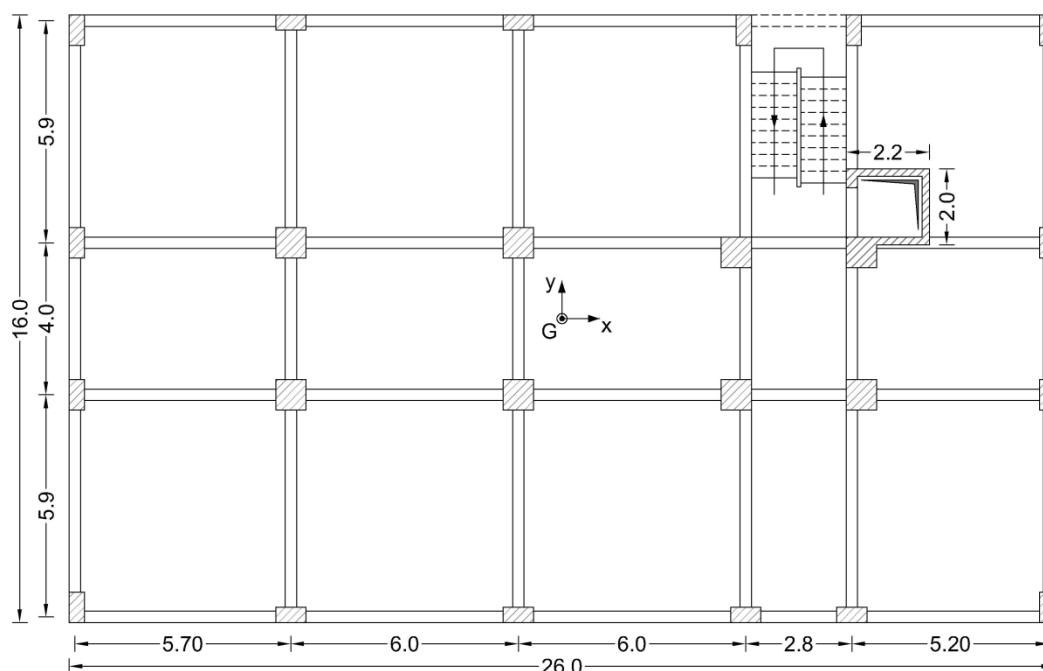


Figura 7.14 Carpenteria schematica del piano tipo dell'edificio.

L'analisi della sovrastruttura su base fissa è stata condotta mediante un modello ad elementi finiti realizzato con il software SAP2000 v. 14. Per semplicità, tutti gli elementi strutturali sono stati modellati con elementi *frame*; la rigidità torsionale degli elementi *frame* equivalenti che modellano il nucleo ascensore è stata incrementata di 50 volte, rispetto a quella della sezione a C, per tenere conto dell'effetto irrigidente delle travi di piano; i tratti di estremità delle travi e dei pilastri sono stati modellati come offset rigidi, con un coefficiente di rigidità 0.5. Si è assunta valida l'ipotesi di solai rigidi nel proprio piano. Il modulo di elasticità e il coefficiente di Poisson del calcestruzzo sono stati presi pari a $E_c = 30 \text{ GPa}$ e $\nu_c = 0.3$. Dal momento che l'attenzione è rivolta alla risposta dell'edificio alle azioni orizzontali, le masse in direzione verticale non sono state modellate. Si è assunto un coefficiente di smorzamento viscoso della sovrastruttura pari al 2%.

Per effetto delle ipotesi effettuate (solai rigidi nel piano, masse verticali ignorate), il numero di gradi di libertà significativi per l'analisi dinamica è ridotto

rispetto al numero di gradi di libertà totali del modello. In particolare, la configurazione deformata della sovrastruttura può essere descritta dal vettore

$\{U_b\}_{21 \times 1} = \left(\{U_{b,1}\}^T, \dots, \{U_{b,7}\}^T \right)^T$ che raccoglie le tre componenti di spostamento di

ciascun piano rigido $\{U_{b,i}\} = (U_{bx,i}, U_{by,i}, \theta_{bz,i})^T$. $U_{bx,i}$ e $U_{by,i}$ rappresentano le traslazioni del piano i -esimo nelle due direzioni ortogonali, e $\theta_{bz,i}$ rappresenta la

rotazione del piano i -esimo rispetto all'asse verticale passante per il suo baricentro.

Le masse di piano totali, concentrate nei rispettivi baricentri, valgono

$M_{x,i} = M_{y,i} = 416 \text{ t}$ (masse traslazionali) e $M_{Rz,i} = 32309 \text{ t} \cdot \text{m}^2$ (masse rotazionali).

I risultati dell'analisi modale della sovrastruttura su base fissa sono elencati in tabella 7.4, in termini di periodi, frequenze proprie, e masse partecipanti per i 21 modi di vibrazione. Le masse partecipanti sono calcolate a partire dai fattori di

partecipazione modale ($M_{ij} = \beta_{ij}^2 / M_{i,tot}$), con $M_{x,tot} = M_{y,tot} = 2912 \text{ t}$,

$M_{Rx,tot} = M_{Ry,tot} = 596378 \text{ t} \cdot \text{m}^2$, e $M_{Rz,tot} = 226163 \text{ t} \cdot \text{m}^2$.

Tabella 7.4 Proprietà dinamiche della struttura su base fissa.

| Modo | Periodo | Frequenza | Masse partecipanti | | | | |
|------|---------|-----------|--------------------|----------|-----------|-----------|-----------|
| | | | M_{xj} | M_{yj} | M_{Rxj} | M_{Ryj} | M_{Rzj} |
| j | T_j | f_j | M_{xj} | M_{yj} | M_{Rxj} | M_{Ryj} | M_{Rzj} |
| [-] | [s] | [Hz] | [-] | [-] | [-] | [-] | [-] |
| 1 | 0.64 | 1.57 | 0.040 | 0.576 | 0.725 | 0.050 | 0.182 |
| 2 | 0.55 | 1.83 | 0.729 | 0.042 | 0.054 | 0.942 | 0.001 |
| 3 | 0.46 | 2.17 | 0.004 | 0.162 | 0.218 | 0.006 | 0.612 |
| 4 | 0.20 | 5.11 | 0.006 | 0.080 | 0.000 | 0.000 | 0.024 |
| 5 | 0.16 | 6.23 | 0.125 | 0.008 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 6 | 0.14 | 7.33 | 0.001 | 0.037 | 0.000 | 0.000 | 0.091 |
| 7 | 0.10 | 9.67 | 0.002 | 0.030 | 0.002 | 0.000 | 0.012 |
| 8 | 0.08 | 12.40 | 0.048 | 0.003 | 0.000 | 0.002 | 0.000 |
| 9 | 0.07 | 14.47 | 0.000 | 0.015 | 0.001 | 0.000 | 0.035 |
| 10 | 0.07 | 15.38 | 0.001 | 0.017 | 0.000 | 0.000 | 0.006 |
| 11 | 0.05 | 19.68 | 0.023 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 12 | 0.05 | 22.13 | 0.001 | 0.007 | 0.000 | 0.000 | 0.006 |
| 13 | 0.04 | 22.95 | 0.001 | 0.009 | 0.000 | 0.000 | 0.015 |
| 14 | 0.04 | 27.42 | 0.012 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 15 | 0.03 | 29.08 | 0.000 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.002 |
| 16 | 0.03 | 31.97 | 0.000 | 0.004 | 0.000 | 0.000 | 0.008 |
| 17 | 0.03 | 34.57 | 0.000 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.001 |
| 18 | 0.03 | 34.70 | 0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 19 | 0.02 | 40.18 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 20 | 0.02 | 40.42 | 0.000 | 0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.004 |
| 21 | 0.02 | 46.75 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.001 |

L'analisi della tabella 7.4 rivela che è sufficiente considerare i primi 10 modi per eccitare più del 95% della massa totale in ciascuna direzione. Inoltre, è evidente che il vano scala e il nucleo ascensore in posizione eccentrica inducono un marcato accoppiamento tra la risposta traslazionale in direzione y e quella torsionale. Un lieve accoppiamento è anche presente tra i modi traslazionali nelle due direzioni. In Figura 7.15 sono rappresentate, in vista 3D dall'alto, le deformate dei primi 6 modi di vibrazione della sovrastruttura su base fissa.

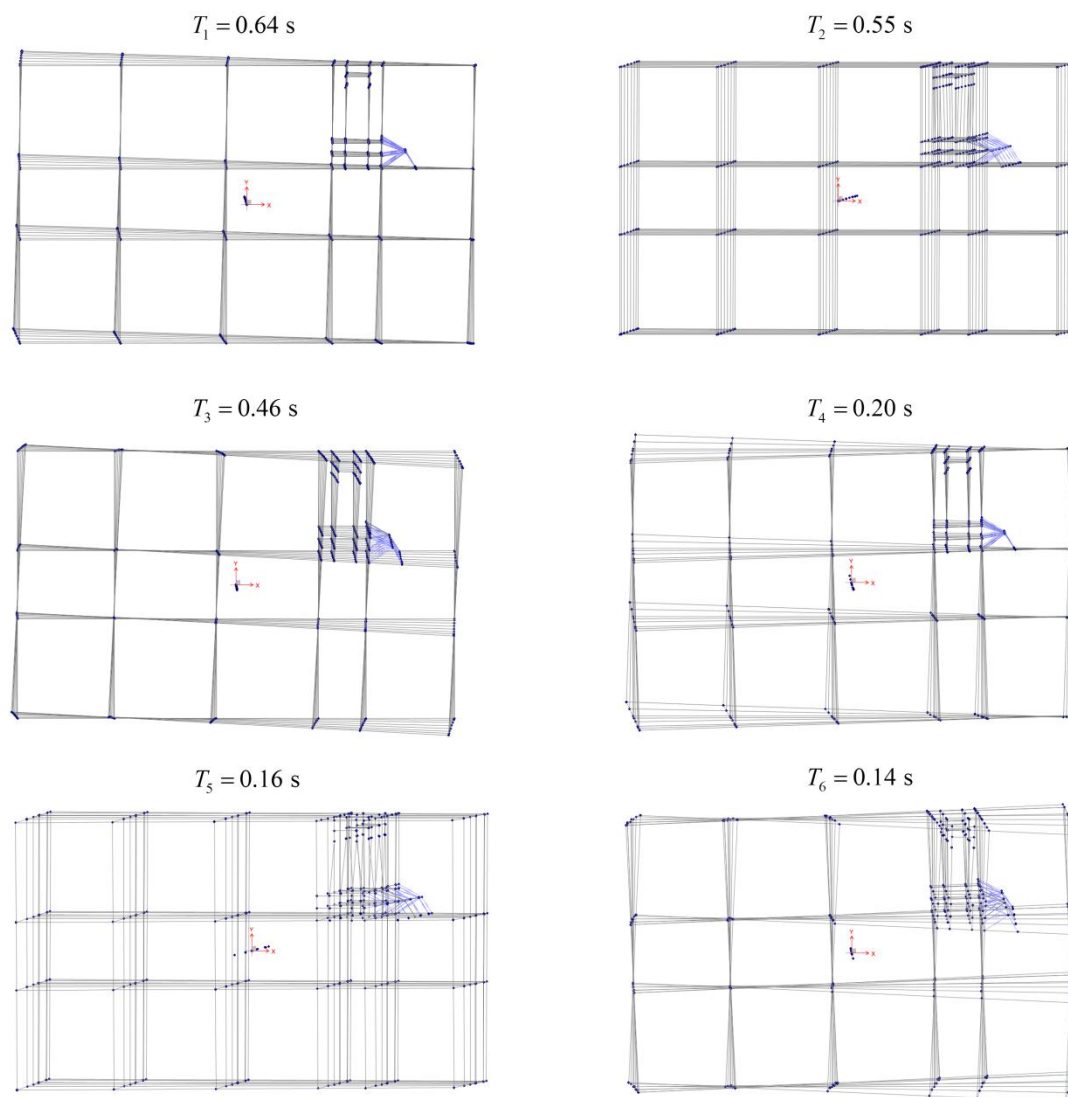


Figura 7.15 Vista 3D dall'alto delle deformate modali della struttura su base fissa: modi 1-6.

Per le successive analisi di interazione, si assume che la sovrastruttura sia supportata da una fondazione ideale rigida, di impronta rettangolare pari a quella dell'edificio, avente massa $m_o = 750$ t e momenti di inerzia delle masse rispetto al

punto caratteristico O (che coincide in questo caso con il baricentro della fondazione) pari a $I_{ox} = 78125 \text{ t} \cdot \text{m}^2$, $I_{oy} = 206295 \text{ t} \cdot \text{m}^2$ e $I_{oz} = 58250 \text{ t} \cdot \text{m}^2$. I momenti di inerzia delle masse per i modi di rocking (I_{ox} e I_{oy}) sono calcolati come $I_{o_{x,y}} = I_{g_{x,y}} + \sum_i I_{i_{x,y}}$. I termini $I_{gx} = 16000 \text{ t} \cdot \text{m}^2$ e $I_{gy} = 42250 \text{ t} \cdot \text{m}^2$ rappresentano i momenti di inerzia delle masse della fondazione rispetto agli assi orizzontali passanti per il proprio baricentro; i termini $I_{ix} = 8875 \text{ t} \cdot \text{m}^2$ e $I_{iy} = 23435 \text{ t} \cdot \text{m}^2$ rappresentano i momenti di inerzia delle masse del piano i -esimo rispetto agli assi orizzontali passanti per il baricentro del piano stesso. È opportuno sottolineare che questa stima dei momenti di inerzia delle masse della fondazione deriva dall'ipotesi, vera solo nel caso di pilastri inestensibili, che la rotazione relativa di ciascun piano sia uguale alla rotazione della fondazione. Poichè nel modello della sovrastruttura su base fissa la deformabilità assiale dei pilastri è tenuta in conto, tale stima dei momenti di inerzia della fondazione è da intendersi come approssimata. Sulla base dei risultati presentati al §6, si ricorda che la massa della fondazione ha un modesto effetto nella valutazione della risposta della sovrastruttura; pertanto, una stima approssimata di $[m_o]$ è da ritenersi sufficiente ai fini pratici.

Il terreno di fondazione è caratterizzato dalla densità di massa $\rho_s = 1.9 \text{ t/m}^3$, dal coefficiente di Poisson $\nu_s = 0.45$ e dalla velocità di propagazione delle onde di taglio $V_s = 180 \text{ m/sec}$ ($V_s / (\omega_1 r_H) = 1.62$). Si considera il terreno perfettamente elastico ($\xi_s = 0$). Ai fini del calcolo dei coefficienti di impedenza mediante la procedura descritta al §7.2.3, si definisce una fondazione circolare equivalente, caratterizzata da un raggio diverso in funzione del modo di vibrazione: $r_H = 11.5 \text{ m}$ per i modi traslazionali, $r_{Rx} = 10.3 \text{ m}$, $r_{Ry} = 13.1 \text{ m}$ e $r_{Rz} = 12 \text{ m}$ per i modi rotazionali. I coefficienti della matrice di impedenza sono ricavati dalla soluzione di Luco e Mita (1987), rappresentata in Figura 7.1.

Verranno di seguito presentati alcuni confronti tra le grandezze di risposta del sistema calcolate mediante l'analisi nel dominio della frequenza, l'analisi modale e l'approccio perturbativo semplificato (solo modi strutturali, espressioni 7.8-7.13). Mentre l'approccio perturbativo semplificato è stato implementato attraverso un

foglio di calcolo, utilizzando i risultati dell'analisi modale su base fissa ottenuti dal modello SAP, l'analisi nel dominio della frequenza e l'analisi modale hanno richiesto lo sviluppo di un apposito codice di calcolo in Matlab. Per la definizione delle equazioni del moto del sistema, è stato necessario estrapolare la matrice di rigidità $[K_b]$ della sovrastruttura su base fissa a partire dal modello ad elementi finiti. La matrice $[K_b]_{21 \times 21}$, condensata sugli spostamenti di piano, è stata ricavata come inversa della matrice di flessibilità, a sua volta costruita per colonne applicando il metodo delle forze.

La Tabella 7.5 riporta un confronto tra le frequenze proprie e i coefficienti di smorzamento dei primi dieci modi del sistema, ottenuti attraverso l'analisi modale classica e l'approccio perturbativo semplificato (espressioni 7.8 e 7.12). La Tabella 7.6 riporta un confronto tra le masse partecipanti ottenute mediante l'analisi modale e l'approccio perturbativo semplificato (espressione 7.13). Le masse partecipanti sono calcolate a partire dai fattori di partecipazione modale, $(M_{ij} = \beta_{ij}^2 / M_{i,tot})$, con $M_{x,tot} = M_{y,tot} = 3662 \text{ t}$, $M_{Rx,tot} = 674503 \text{ t} \cdot \text{m}^2$, $M_{Ry,tot} = 802673 \text{ t} \cdot \text{m}^2$ e $M_{Rz,tot} = 284163 \text{ t} \cdot \text{m}^2$. Nel caso dell'analisi di interazione, le masse totali comprendono anche quelle della fondazione.

Tabella 7.5 Frequenze proprie (in Hertz) e coefficienti di smorzamento dei primi dieci modi del sistema ($V_s=180 \text{ m/sec}$).

| Modo j [-] | Frequenze proprie | | Coeff. Smorzam. | |
|------------------|-------------------|---------|-----------------|----------|
| | f [hz] | | ξ_j [-] | |
| | An. modale | Eq. 7.8 | An. modale | Eq. 7.12 |
| 1 | 1.42 | 1.44 | 0.024 | 0.024 |
| 2 | 1.65 | 1.65 | 0.033 | 0.032 |
| 3 | 2.04 | 2.02 | 0.023 | 0.025 |
| 4 | 4.86 | 4.91 | 0.085 | 0.060 |
| 5 | 5.62 | 5.78 | 0.181 | 0.116 |
| 6 | 6.68 | 6.85 | 0.142 | 0.089 |
| 7 | 8.71 | 9.11 | 0.273 | 0.126 |
| 8 | 9.10 | 11.04 | 0.693 | 0.288 |
| 9 | 9.79 | 12.99 | 0.538 | 0.236 |
| 10 | 10.71 | 14.28 | 0.652 | 0.237 |

Tabella 7.6 Masse partecipanti dei primi dieci modi del sistema ($V_s=180$ m/sec).

| Modo | Masse partecipanti | | | | | | | | | | |
|------|--------------------|----------------|----------|-----------|-----------|-----------|----------------|----------|-----------|-----------|-----------|
| | j [-] | Analisi modale | | | | | Equazione 7.13 | | | | |
| | | M_{xj} | M_{yj} | M_{Rxj} | M_{Ryj} | M_{Rzj} | M_{xj} | M_{yj} | M_{Rxj} | M_{Ryj} | M_{Rzj} |
| 1 | 0.02 | 0.57 | 0.78 | 0.02 | 0.08 | 0.02 | 0.59 | 0.81 | 0.03 | 0.08 | |
| 2 | 0.64 | 0.02 | 0.03 | 0.77 | 0.00 | 0.64 | 0.03 | 0.04 | 0.77 | 0.00 | |
| 3 | 0.00 | 0.07 | 0.10 | 0.01 | 0.60 | 0.01 | 0.07 | 0.10 | 0.01 | 0.62 | |
| 4 | 0.01 | 0.11 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.01 | 0.10 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | |
| 5 | 0.18 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.17 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | |
| 6 | 0.00 | 0.06 | 0.00 | 0.00 | 0.11 | 0.00 | 0.06 | 0.00 | 0.00 | 0.11 | |
| 7 | 0.01 | 0.06 | 0.00 | 0.00 | 0.03 | 0.00 | 0.06 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | |
| 8 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.20 | 0.00 | 0.15 | 0.01 | 0.00 | 0.01 | 0.00 | |
| 9 | 0.11 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.09 | 0.00 | 0.00 | 0.07 | |
| 10 | 0.00 | 0.04 | 0.06 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.06 | 0.00 | 0.00 | 0.04 | |

In generale, le differenze tra le grandezze modali ottenute con i due approcci approssimati sono molto basse (inferiori al 3%) per i primi tre modi del sistema. Al crescere del numero del modo, le differenze aumentano progressivamente. Si sottolinea che il valore utilizzato per la velocità delle onde di taglio nel terreno (180 m/s) è tale che il parametro adimensionale $V_s / (\omega r)$ assume un valore molto basso (1.62), prossimo al limite di validità dell'approccio perturbativo per terreni rigidi. Pertanto, è lecito aspettarsi una buona accuratezza dell'approccio soltanto alle basse frequenze.

In termini di frequenze proprie, le differenze tra l'analisi modale e l'approccio perturbativo semplificato sono inferiori al 5% per i primi sette modi del sistema. Differenze significative (circa il 30%) sono relative agli ultimi tre modi considerati.

Riguardo i coefficienti di smorzamento, si osserva in primo luogo che l'approccio perturbativo semplificato fornisce valori sempre inferiori di quelli ottenuti con l'analisi modale. Le differenze sono minime, inferiori all'1%, per i primi tre modi; crescono fino a circa il 5% per i modi 4-6 e sono molto significative (circa il 40%) per i modi 7-10. Analoghi scarti sono relativi alle masse partecipanti. Sulla base delle considerazioni svolte al §6, le notevoli differenze tra i coefficienti di smorzamento ottenuti con i due approcci potrebbero indicare che, a partire dal settimo modo, si è fuori dal campo di validità dell'analisi modale classica.

L'accuratezza dei metodi approssimati è stata infine valutata confrontando la risposta stazionaria calcolata attraverso l'analisi modale, l'approccio perturbativo semplificato e l'analisi nel dominio della frequenza. In figura 7.16 sono diagrammate le funzioni di trasferimento degli spostamenti relativi normalizzati dell'ultimo piano dell'edificio, per effetto di un moto di input della fondazione costituito da due onde armoniche di ampiezza unitaria in accelerazione ($\ddot{U}_{ox}^*(\omega) = \ddot{U}_{0y}^*(\omega) = \ddot{U}_g = 1$), agenti contemporaneamente lungo le due direzioni principali dell'edificio. Le traslazioni nelle due direzioni ortogonali U_{x7} e U_{y7} sono divise per \ddot{U}_g / ω_1^2 ; la rotazione intorno all'asse verticale θ_{z7} è divisa per \ddot{U}_g / ω_1^2 e moltiplicata per $L_x / 2 = 13$ m. In tal modo, il diagramma relativo a θ_{z7} rappresenta l'incremento di spostamento in direzione y degli spigoli dell'edificio. Le soluzioni del sistema interagente sono ottenute assumendo una velocità delle onde di taglio nel terreno $V_s = 180$ m/sec, e confrontate con la soluzione relativa alla struttura su base fissa. Per una più semplice lettura, gli stessi diagrammi sono presentati sia in scala lineare che semi-logaritmica.

Analizzando la figura 7.16, si deducono conclusioni qualitativamente analoghe a quelle relative all'edificio a nove piani analizzato nelle precedenti sezioni, che possono essere così sintetizzate:

- i. l'interazione terreno-struttura comporta una riduzione delle frequenze proprie del sistema e una variazione dell'ampiezza della risposta in risonanza;
- ii. nel caso in esame, la risposta traslazionale in direzione x e quella torsionale del sistema interagente sono inferiori rispetto a quelle relative alla struttura su base fissa. Viceversa, in corrispondenza della frequenza fondamentale, la risposta traslazionale in direzione y è maggiore per il caso del sistema interagente. Per frequenze più alte, l'interazione comporta sempre una riduzione della risposta;
- iii. la variazione della risposta in risonanza del sistema rispetto alla struttura su base fissa è funzione della rigidità relativa terreno-struttura, della snellezza della struttura e del meccanismo prevalente di dissipazione per radiazione. Nel caso in esame, l'interpretazione del comportamento del sistema nelle due direzioni principali è complesso dal momento che la risposta è marcatamente accoppiata;

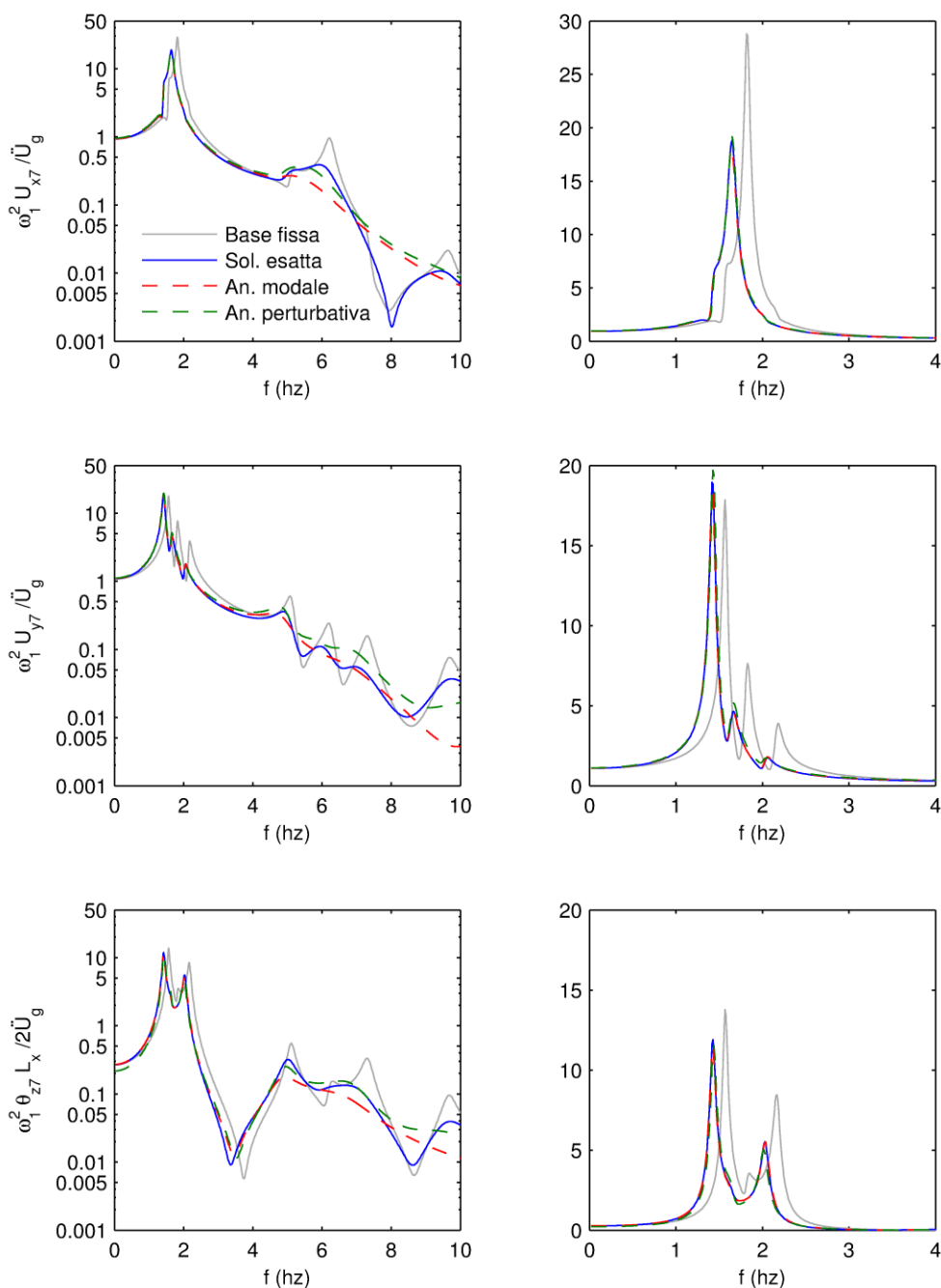


Figura 7.16 Funzioni di trasferimento degli spostamenti relativi normalizzati, $V_s = 180$ m/sec. Ordinate in scala logaritmica (a sinistra) e lineare (a destra).

- iv. gli errori associati ai metodi approssimati possono ritenersi accettabili quando la risposta alle alte frequenze è di importanza secondaria per il dimensionamento strutturale. In aggiunta, la risposta alle alte frequenze sembra essere sempre ridotta dallo smorzamento per radiazione.

Alcune considerazioni conclusive in merito agli effetti di interazione per l'edificio oggetto di studio riguardano l'interazione cinematica (effetti di scattering). Per una più semplice lettura dei risultati, si considera un input costituito da un'onda SH viaggiante nel piano xz (moto delle particelle in direzione y), con velocità di propagazione apparente sull'orizzontale $c_x = V_s / \cos(\phi_v)$. L'angolo ϕ_v misura l'inclinazione rispetto all'orizzontale della direzione di propagazione dell'onda.

Nel caso di un'onda SH verticale ($\phi_v = 90^\circ$) e di una fondazione rigida diretta, gli effetti di scattering sono nulli. Il moto di input in fondazione è costituito dalla sola componente traslazionale in direzione y , pari a quella in campo libero U_{gy} . Nel caso di un'onda SH inclinata, invece, il moto di input in fondazione è costituito dalla componente traslazionale U_{oy}^* e da quella torsionale θ_{oz}^* .

Il moto di input per la fondazione dell'edificio in esame, per effetto di un'onda SH verticale e di una orizzontale, rappresentato in Figura 7.17, è stato calcolato attraverso le espressioni approssimate proposte da Luco e Sotiropoulos (1980).

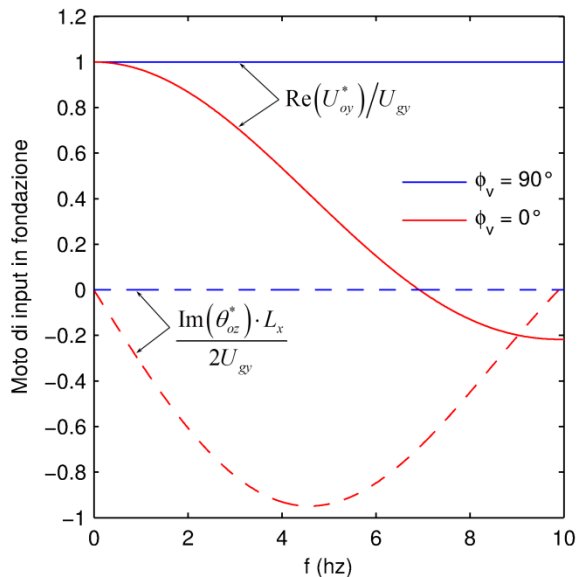


Figura 7.17 Moto di input in fondazione per effetto di un'onda SH viaggiante nel piano xz (moto delle particelle in direzione y), in direzione verticale ($\phi_v = 90^\circ$) e orizzontale ($\phi_v = 0^\circ$) [Luco e Sotiropoulos (1980)].

Nel caso di onde inclinate, l'interazione cinematica comporta una riduzione della componente traslazionale al crescere della frequenza, e la nascita di una

componente torsionale in quadratura con quella traslazionale. Gli effetti di scattering sono principalmente influenzati dal rapporto tra la lunghezza dell'onda incidente e la dimensione della fondazione nella direzione di propagazione dell'onda, oltre che dall'angolo di inclinazione ϕ_v .

In Figura 7.18 sono diagrammate le funzioni di trasferimento, analoghe a quelle di Figura 7.16, per effetto dei due tipi di input considerati ($\phi_v = 0^\circ$ e 90°). La soluzione è ottenuta mediante l'analisi nel dominio della frequenza. Nel caso di un'onda SH orizzontale, la risposta in corrispondenza delle frequenze proprie dei modi traslazionali (1.43 hz e 1.65 hz) è ridotta rispetto al caso di un'onda SH verticale. Al contrario, la risposta in prossimità della frequenza propria del modo torsionale (2 hz) è incrementata.

I risultati presentati mettono in evidenza come, per uno studio completo della risposta del sistema interagente, sia necessario disporre di una accurata caratterizzazione dell'input sismico, non soltanto in termini di definizione delle componenti traslazionali di un punto di controllo, ma anche in termini di definizione della natura, direzione e velocità apparente di propagazione delle onde. Ai fini pratici della progettazione, possono comunque ritenersi valide le seguenti considerazioni generali.

Nei casi in cui il contributo al moto in superficie sia prevalentemente dovuto ad onde di volume P, SH, SV, l'analisi può essere condotta considerando valida la comune ipotesi di propagazione verticale. Come mostrato da Luco e Sotiropoulos (1980), le velocità apparenti di propagazione di tali onde sono piuttosto elevate (1.5-2 Km/sec per onde SH; 5 Km/sec per onde P) e tali che nei comuni depositi geologici la direzione di propagazione è pressochè verticale ($\phi_v > 80^\circ$). Inoltre, gli stessi autori hanno dimostrato che l'utilizzo nelle analisi di un'eccentricità accidentale pari al 5% della dimensione dell'edificio è sufficiente a tenere conto delle componenti torsionali di input nel caso di strutture ordinarie, caratterizzate da una frequenza fondamentale inferiore a 5 hz e da una dimensione della fondazione minore di 40 m. Particolari precauzioni devono invece essere adottate quando il contributo al moto è prevalentemente legato alle onde di superficie di Rayleigh e di Love, le quali possono essere approssimativamente rappresentate come onde P, SV e SH viaggianti

in direzione orizzontale. In tali casi, si è visto che gli effetti di interazione cinematica possono risultare significativi.

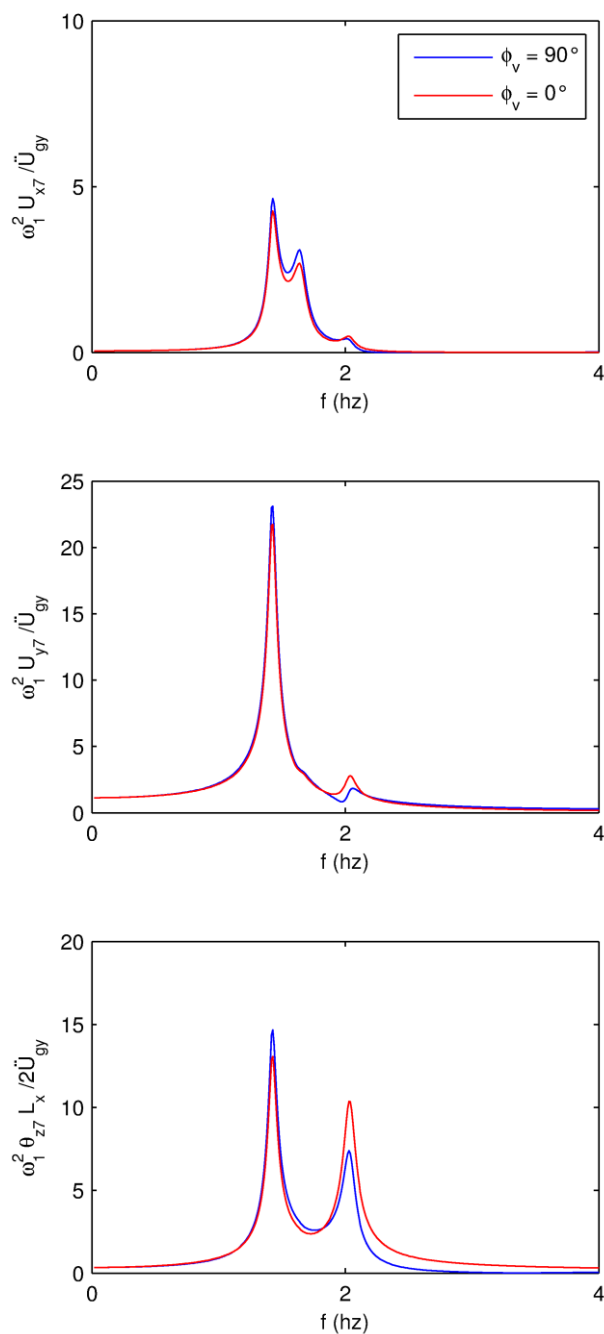


Figura 7.18 Funzioni di trasferimento degli spostamenti relativi normalizzati, $V_s = 180$ m/sec, per effetto di un'onda SH verticale ($\phi_v = 90^\circ$) e orizzontale ($\phi_v = 0^\circ$) viaggiante nel piano xz .

CAPITOLO 8

CONCLUSIONI

8.1. Generalità

Tra i metodi approssimati per l'analisi dei problemi di interazione terreno-struttura, l'approccio basato sulla classica decomposizione in modi ortogonali rappresenta una valida alternativa, in quanto fornisce elementi di comprensione fisica della risposta dinamica del sistema fondazione-struttura. In aggiunta, esso rappresenta una naturale estensione dell'analisi modale per strutture su base fissa, che è di gran lunga il metodo di analisi dinamica di maggiore diffusione. L'approccio, quando applicato ai problemi di interazione terreno-struttura, fornisce una soluzione non rigorosa a causa dell'introduzione di due approssimazioni: (1) l'utilizzo di valori indipendenti dalla frequenza dei coefficienti di impedenza della fondazione e (2) l'applicazione di una decomposizione in modi reali ortogonali ad un sistema non classicamente smorzato.

Il presente lavoro affronta una completa rivisitazione dell'analisi modale classica applicata a sistemi terreno-fondazione-struttura. Esso rappresenta un contributo allo sviluppo di una maggiore consapevolezza del metodo approssimato, acquisita grazie all'analisi del suo campo di validità e degli errori ad esso associati. Inoltre, alcune derivazioni analitiche originali hanno portato a: (i) la formulazione di un modello equivalente, che descrive il ruolo dell'interazione nel modificare la risposta strutturale, e (ii) nuove semplici espressioni analitiche per la stima delle grandezze modali di interesse. Infine, i risultati del lavoro sono stati organizzati sotto forma di una procedura semplificata di analisi, applicabile alla progettazione delle

strutture ordinarie, le cui potenzialità sono state messe in evidenza con l'applicazione a diversi casi studio.

8.2. Analisi modale classica per SSI

Nonostante l'analisi modale approssimata dell'interazione lineare terreno-struttura sia stata oggetto in passato di numerose ricerche, in letteratura sussiste ancora una certa mancanza di consenso in merito alla sua effettiva accuratezza. Gli studi sull'analisi modale classica condotti da Bielak (1975, 1976) sono qui stati riprodotti integralmente allo scopo di (i) validare gli algoritmi numerici utilizzati, e (ii) analizzare criticamente uno dei lavori più completi sull'argomento, che sembra indicare che l'analisi modale classica sia un metodo ragionevolmente accurato anche per i problemi di interazione. I codici di calcolo sviluppati nel presente lavoro sono stati validati mediante il confronto dettagliato con i risultati di Bielak per un edificio a tre e uno a cinque piani. Nel processo di validazione, è emerso che i risultati di Bielak sono basati sull'utilizzo di un valore ridotto della densità di massa del terreno, ottenuto dividendo la densità di massa nominale per l'accelerazione di gravità g (o, equivalentemente, utilizzando valori delle masse strutturali e della fondazione e delle rigidezze moltiplicati per un fattore pari a g). Il buon accordo trovato da Bielak tra la soluzione esatta e quella approssimata è stato confermato in entrambi i casi in cui si è utilizzato il valore nominale e il valore ridotto della densità di massa del terreno. Sono quindi state introdotte due misure di errore della risposta stazionaria, i cui valori massimi (<1%) riscontrati per i due casi studio indicano un'eccellente accuratezza dell'analisi modale classica, anche quando si consideri un terreno piuttosto flessibile ($V_s = 150$ m/s).

L'approccio modale classico è stato quindi analizzato a fondo utilizzando come caso studio un modello di un edificio a nove piani. L'accuratezza della soluzione approssimata è stata valutata analizzando la risposta stazionaria della struttura e della fondazione, per differenti valori della velocità di propagazione delle onde di taglio nel terreno. La principale conclusione ottenuta è che l'accuratezza dell'analisi modale diminuisce progressivamente con la rigidezza del terreno di fondazione. A differenza di quanto trovato da Bielak, sono state riscontrate deviazioni significative tra la soluzione esatta e quella approssimata nel campo di frequenze medio-alte per il caso di terreni flessibili rispetto alla sovrastruttura. È

stato dimostrato come l'origine della mancanza di accuratezza dell'approccio modale classico sia legata all'ipotesi di trascurare i termini fuori diagonale della matrice di dissipazione modale. Utilizzando una procedura simile a quella proposta da Warburton e Soni (1977), è stato mostrato come il contributo allo smorzamento totale legato ai termini fuori diagonale possa essere dello stesso ordine, se non maggiore, di quello legato ai termini in diagonale; ciò può portare ad errori significativi nella valutazione della risposta in corrispondenza dei modi superiori al primo. Il numero di modi il cui coefficiente di smorzamento viene stimato accuratamente dall'approccio modale aumenta con la rigidità del terreno.

È stata quindi condotta una dettagliata analisi parametrica della struttura campione, al variare del parametro adimensionale di rigidità relativa $\beta/\omega_1 a$. L'analisi modale si rivela un efficace strumento per la comprensione della risposta dinamica del sistema interagente, dal momento che descrive con grandezze di chiaro significato fisico gli effetti della flessibilità del terreno. Tali effetti sono principalmente: (1) una riduzione delle frequenze di risonanza dovuta alla flessibilità del vincolo alla base, e (2) una variazione dello smorzamento indotta dalla radiazione di onde nel terreno. Sono state esaminate le variazioni delle grandezze modali caratteristiche del sistema (frequenze proprie, forme modali, fattori di partecipazione e coefficienti di smorzamento) in funzione della velocità di propagazione delle onde di taglio nel terreno. I risultati sono stati interpretati attraverso il confronto con alcuni casi limite: struttura su base fissa, struttura su base perfettamente deformabile e struttura infinitamente rigida. In aggiunta, è stato introdotto un modello ausiliario (sovrastuttura fissa) che si è rivelato particolarmente utile nel distinguere i modi strutturali dai modi della fondazione. È emerso che, per terreni relativamente rigidi, quando l'analisi modale è piuttosto accurata, i modi di vibrare del sistema possono essere suddivisi in N modi (*modi strutturali*), legati prevalentemente ai movimenti della struttura in elevazione e 2 modi aggiuntivi (*modi della fondazione*) che coinvolgono prevalentemente spostamenti della fondazione. I modi strutturali sono una perturbazione dei modi della sovrastruttura su base fissa; i modi della fondazione sono identificati dai due modi del modello ausiliario a sovrastruttura fissa. Nel caso di terreni flessibili, quando l'accuratezza dell'analisi modale è minore, tale distinzione non è molto chiara, dal momento che le deformate dei modi ad alta

frequenza sono il risultato di complesse interazioni tra gli spostamenti strutturali e quelli della fondazione.

È possibile concludere che l'analisi modale classica rappresenta un valido strumento per stimare e interpretare gli effetti dell'interazione terreno-struttura, ma che la sua efficacia nel fornire una soluzione accurata non può essere generalizzata, essendo fortemente dipendente dal particolare caso analizzato. Il parametro che più di tutti influenza l'accuratezza dell'analisi modale è la rigidità relativa della struttura rispetto al terreno, descritta attraverso il parametro adimensionale $\beta/\omega_1 a$. Tra gli altri, uno dei motivi per cui Bielak nei suoi studi ha riscontrato una buona accuratezza dell'analisi modale classica è proprio l'utilizzo di sistemi caratterizzati da valori piuttosto elevati di tale parametro. Lo studio effettuato aiuta a comprendere e quantificare il campo di validità del metodo e fornisce una interpretazione razionale e fisica degli effetti dell'interazione terreno-struttura.

8.3. Modello 1-DOF equivalente

È stato presentato un modello equivalente, costituito da un oscillatore elementare supportato da un terreno elastico, formulato in maniera da approssimare la risposta di un sistema interagente in corrispondenza di ciascuna frequenza di risonanza. Il modello è basato sull'utilizzo delle grandezze modali della struttura su base fissa e delle funzioni di impedenza della fondazione. È stato mostrato che l'effetto dei modi a frequenza inferiore a quella che viene considerata consiste in un incremento della rigidità e dello smorzamento della fondazione; viceversa, l'effetto dei modi a frequenza superiore a quella che viene considerata consiste in un incremento della massa della fondazione. Il modello equivalente ha lo stesso obiettivo di quello utilizzato nell'approccio di Parmelee (1967), ma differisce da quest'ultimo in diversi aspetti: (i) il modo in cui vengono calcolati i termini di massa aggiuntiva, e (ii) la considerazione dei termini aggiuntivi di rigidità e smorzamento associati ai modi a bassa frequenza. Il modello proposto e quello di Parmelee (1967) coincidono per l'analisi del modo fondamentale, ma differiscono per i modi superiori al primo.

Con riferimento all'edificio a nove piani, è stata studiata l'ampiezza dei termini aggiuntivi di massa, rigidità e smorzamento. La massa aggiuntiva

diminuisce rapidamente con il numero del modo considerato da un massimo, per il modo fondamentale, di circa il 15% della massa totale della sovrastruttura. Il momento statico e il momento di inerzia delle masse aggiuntive sono invece molto piccoli. La rigidità traslazionale aggiuntiva della fondazione aumenta gradualmente con il numero del modo considerato, mentre la rigidità rotazionale si incrementa prevalentemente solo dal primo al secondo modo. Per terreni soffici, le rigidità traslazionali e rotazionali aggiuntive possono essere dello stesso ordine dei corrispondenti termini della matrice di impedenza. La rigidità di accoppiamento traslazione-rocking aggiuntiva può invece essere fino a sette volte maggiore del corrispondente coefficiente di impedenza, circostanza che rende i termini di accoppiamento significativi alle alte frequenze. L'incremento della matrice di smorzamento della fondazione risulta invece meno evidente di quello della matrice di rigidità. Ciò è legato al valore piccolo generalmente assunto per lo smorzamento strutturale in confronto allo smorzamento della fondazione. I risultati analitici ottenuti per lo smorzamento aggiuntivo sono consistenti con i risultati numerici ottenuti da Bielak (1975, 1976), che indicano come il contributo della struttura allo smorzamento totale sia legato principalmente ai modi a bassa frequenza.

Il modello può essere utilizzato per stimare la risposta in prossimità di ciascuna frequenza di risonanza di un sistema M-DOF attraverso la soluzione di un sistema a tre gradi di libertà. L'accuratezza del modello è stata validata confrontando la risposta stazionaria approssimata con quella ottenuta mediante la soluzione numerica delle equazioni del moto del sistema completo. Inoltre, le frequenze proprie ottenute con il modello equivalente sono state confrontate con quelle calcolate mediante la soluzione numerica del problema agli autovalori completo. In definitiva, il modello equivalente permette una migliore comprensione fisica degli effetti di interazione nella modifica della risposta dinamica delle strutture.

8.4. Approccio perturbativo per terreni rigidi

Un metodo approssimato per la soluzione del problema dinamico di interazione terreno-struttura è stato formulato mediante l'applicazione di un'analisi perturbativa. La soluzione ottenuta corrisponde ad un'approssimazione di quella relativa all'analisi modale classica, che di per sé è un metodo approssimato. L'approccio permette di formulare espressioni analitiche utili a comprendere i

parametri che governano la risposta dinamica del sistema interagente, ma non consente di superare le limitazioni connesse all'utilizzo dell'approccio modale classico descritte, tra gli altri, da Thomson et al. (1974), Clough e Mojtahedi (1976), Warburton e Soni (1977), e Vaidya et al. (1986). L'accuratezza del metodo è stata quantificata attraverso l'analisi della risposta stazionaria dell'edificio campione a nove piani.

L'approccio proposto si basa sull'applicazione di un'analisi perturbativa al primo ordine per risolvere il problema agli autovalori di una struttura multipiano supportata da una fondazione rigida su un terreno elastico, relativamente rigido rispetto alla sovrastruttura. L'approccio perturbativo porta a semplici espressioni analitiche che permettono di stimare la risposta modale del sistema, a partire dalle autosoluzioni della struttura su base fissa, senza risolvere un problema agli autovalori. Le espressioni proposte, che generalizzano quelle presentate da altri autori per il modo fondamentale di un sistema piano, possono trovare applicazione nell'esecuzione di analisi preliminari, nella validazione dei risultati ottenuti con metodi più complessi e possono essere incorporate in documenti normativi e linee guida.

Una delle caratteristiche principali del metodo è che prevede di calcolare separatamente due gruppi di modi di vibrare. I modi appartenenti al primo gruppo (modi strutturali) corrispondono a una perturbazione dei modi della struttura su base fissa e interessano prevalentemente deformazioni della sovrastruttura con piccoli movimenti della fondazione. Per questi modi, sono state presentate espressioni analitiche per la stima di tutte le grandezze modali di interesse. Le espressioni qui formulate rappresentano una generalizzazione di quelle proposte da Jennings e Bielak (1973), Bielak (1975, 1976), e Veletsos e Meek (1974); si riconducono invece a queste ultime nel caso particolare del modo fondamentale di una struttura piana, supportata da una fondazione superficiale, soggetta a vibrazioni accoppiate orizzontali-rocking. I modi appartenenti al secondo gruppo (modi della fondazione) interessano prevalentemente movimenti della fondazione, con piccoli spostamenti totali della sovrastruttura. Sono state presentate nuove espressioni analitiche per la stima delle relative grandezze modali di interesse. Dall'analisi dei termini dominanti

nelle equazioni, è emerso che tali modi interessano prevalentemente la risposta della fondazione e, al più, la deformazione del primo livello della sovrastruttura.

Nel caso di vibrazioni accoppiate traslazione-rocking in un piano, le frequenze proprie, le forme modali, i coefficienti di smorzamento e i fattori di partecipazione del sistema ottenuti con l'approccio perturbativo sono risultati molto accurati (in relazione all'analisi modale classica) per i modi a frequenza inferiore alla più piccola frequenza dei modi della fondazione $\tilde{\omega}_{s1}$. Soltanto le frequenze proprie e le forme modali dei modi strutturali sono risultate ragionevolmente accurate fino alla più grande frequenza dei modi della fondazione $\tilde{\omega}_{s2}$. In generale, la frequenza $\tilde{\omega}_{s1}$ (almeno nel caso piano) sembra corrispondere al limite di validità dell'approccio perturbativo per terreni rigidi. Inoltre, l'approccio perturbativo non è in grado di considerare la complessa interazione tra le deformazioni della sovrastruttura e quelle della fondazione che hanno luogo, per i modi superiori al primo, per certi valori di rigidità relativa terreno-struttura.

La soluzione approssimata ottenuta con l'approccio perturbativo può risultare diversa, alle alte frequenze, da quella fornita dall'analisi modale classica. Comunque, queste deviazioni non costituiscono una ulteriore limitazione all'utilizzo del metodo, se non quella connessa all'analisi modale stessa. Sempre con riferimento all'edificio campione a nove piani, l'esame delle funzioni di trasferimento e delle misure di errore ha mostrato che i limiti di validità dell'analisi modale e dell'approccio perturbativo sono sostanzialmente coincidenti; oltre tali limiti, entrambi i metodi forniscono soluzioni non accurate. Rimanendo all'interno del campo di validità dell'analisi modale e dell'approccio perturbativo, l'applicazione di quest'ultimo non comporta un sostanziale incremento dell'errore nel calcolo della risposta stazionaria.

È stata infine valutata la possibilità di un approccio perturbativo semplificato, che prevede di considerare soltanto i modi strutturali. Tale metodo rappresenta un'alternativa molto conveniente, dal momento che tutte le grandezze caratteristiche dei modi strutturali possono essere stimate attraverso le espressioni in forma chiusa presentate. Seppur con un lieve incremento dell'errore rispetto all'analisi perturbativa completa, l'approccio semplificato si rivela accurato nella previsione della risposta strutturale nello stesso campo di validità dell'analisi modale classica.

8.5. Applicazioni

L'ultima parte della tesi è dedicata all'applicazione delle procedure di analisi sviluppate alla progettazione sismica di edifici multipiano. In ambito Italiano le Norme Tecniche per le Costruzioni, pur prevedendo la possibilità di considerare gli effetti di interazione con il terreno, non forniscono indicazioni specifiche in merito alle procedure di calcolo da adottare. In ambito internazionale, le norme statunitensi ASCE 7-10 e NEHRP permettono di considerare gli effetti di interazione attraverso un metodo di analisi semplificato, che sostanzialmente deriva da quello incorporato per la prima volta nelle ATC 3-06 (1978). Le indicazioni fornite nel presente lavoro, a carattere prettamente applicativo, riprendono in maniera sostanziale ed estendono le metodologie e le approssimazioni proposte dalle ASCE e dalle NEHRP, e le adattano al quadro della attuale normativa vigente in Italia (NTC e Eurocodici).

Per l'esecuzione di un'analisi di interazione, è innanzitutto necessario caratterizzare la risposta del terreno e della fondazione. Nell'ambito di un approccio per sottostrutture, ciò consiste nel definire i parametri di rigidità e smorzamento del terreno, compatibili con i livelli di deformazione attesa, e le funzioni di impedenza della fondazione. A rigore, la caratterizzazione dei parametri del terreno deve avvenire in base a specifiche analisi di risposta sismica locale; le impedenze della fondazione devono essere ottenute dalla soluzione di un problema elastodinamico. Nella maggior parte dei casi ordinari è tuttavia possibile utilizzare un approccio semplificato, che prevede di stimare i parametri caratteristici del terreno in relazione all'accelerazione massima attesa al sito e al volume significativo del terreno di fondazione. Inoltre, per edifici di forma compatta (rapporto tra i lati inferiore a 4:1), le funzioni di impedenza della fondazione reale possono essere ricavate a partire da quelle di una fondazione circolare equivalente. Nella tesi, sono state descritte le modalità con cui effettuare una valutazione immediata di tali grandezze per la progettazione ordinaria degli edifici.

È stato quindi affrontato il tema della valutazione della risposta del sistema interagente attraverso l'analisi lineare statica e l'analisi dinamica modale con spettro di risposta. La risposta del sistema interagente può essere calcolata a partire da quella della struttura su base fissa, modificando le ordinate spettrali di input per tenere conto della variazione delle frequenze proprie e dei coefficienti di smorzamento. In

dettaglio, il contributo alla risposta relativo a ciascun modo di vibrare del sistema interagente, in termini di spostamenti o sollecitazioni, può essere calcolato a partire dalle rispettive grandezze della struttura su base fissa, facendo uso delle espressioni ottenute con l'approccio perturbativo. L'analisi può essere condotta in diverse modalità: (1) note le grandezze modali della struttura su base fissa, ottenute da un apposito modello di calcolo, si valuta il contributo alla risposta di ciascun modo di vibrare del sistema interagente, e si effettua la combinazione modale mediante le usuali regole CQC o SRSS; (2) trascurando alcuni termini di ordine superiore, si utilizza il modello della struttura su base fissa e si modificano le ordinate spettrali per tenere conto della variazione sia della rigidità che dello smorzamento di ciascun modo; (3) si realizza un modello che include la flessibilità della fondazione e si modificano le ordinate spettrali per tenere conto soltanto della variazione dello smorzamento.

Nel caso di edifici regolari in pianta e in altezza, è possibile effettuare un'analisi ancor più semplificata, valutando il contributo dell'interazione soltanto in relazione al modo fondamentale di vibrazione in ciascuna direzione ortogonale. Questa procedura, incorporata nelle normative ASCE 7-10 e NEHRP 2009, risulta di immediata applicazione grazie alla disponibilità di grafici adimensionali per la stima del periodo proprio e del coefficiente di smorzamento del sistema interagente. La formulazione analitica alla base delle suddette normative, che permette la definizione di tali grafici, è stata dapprima ricostruita e poi utilizzata per fornire analoghi strumenti utilizzabili nel contesto delle normative vigenti in Italia. L'approccio è stato esteso per l'analisi di edifici a pianta rettangolare, e sono stati ricavati i relativi grafici adimensionali per diverse situazioni.

Infine, sono stati presentati due esempi applicativi che mettono in evidenza la maggiore generalità della procedura qui proposta rispetto a quella contenuta nelle suddette normative. Nel primo esempio viene descritta l'analisi della risposta trasversale di una singola pila da ponte, supportata da una fondazione profonda a pozzo. A causa dell'elevato approfondimento della fondazione, i termini di accoppiamento della matrice di impedenza assumono valori rilevanti e non possono essere trascurati; inoltre, anche gli effetti di interazione cinematica sono importanti. Utilizzando le espressioni proposte attraverso l'approccio perturbativo, è possibile

tenere conto della matrice di impedenza completa; i risultati numerici hanno mostrato che l'effetto dei termini di accoppiamento può essere molto significativo per la valutazione dello smorzamento, mentre può risultare trascurabile per la valutazione del periodo proprio del sistema. Il secondo caso studio riguarda l'analisi tridimensionale di un edificio caratterizzato da un significativo accoppiamento della risposta nelle due direzioni ortogonali. L'analisi è condotta utilizzando un modello tridimensionale ad elementi finiti della struttura su base fissa e l'approccio perturbativo semplificato, che permette di tenere conto di tutti i sei gradi di libertà della fondazione rigida. I risultati numerici confermano l'efficacia della procedura nella valutazione della risposta del sistema alle basse e medie frequenze, che generalmente rivestono la maggiore importanza per il dimensionamento strutturale.

8.6. Sviluppi futuri

Il lavoro presentato chiarisce molteplici aspetti relativi all'applicazione dell'analisi modale classica ai sistemi terreno-fondazione-struttura, ma lascia aperte almeno due questioni di importanza fondamentale.

La prima è legata al superamento del principale limite dell'approccio modale classico, che consiste nell'impossibilità di prevedere accuratamente la risposta alle frequenze medio-alte, in presenza di un terreno di fondazione relativamente flessibile rispetto alla sovrastruttura. La risposta alle alte frequenze, oltre a influenzare il dimensionamento strutturale per certe tipologie di edifici, può risultare determinante per la protezione di apparecchiature e contenuti sensibili. La possibilità di applicare con successo l'approccio modale a tale classe di problemi è condizionata dalla formulazione di una migliore stima dei coefficienti di smorzamento, che permetta di compensare gli errori indotti dall'ipotesi di trascurare i termini fuori diagonale della matrice di dissipazione modale.

La seconda problematica, di più ampia portata, riguarda la possibilità di valutare la risposta sismica del sistema interagente attraverso un'analisi in campo lineare, e tenere conto della risposta anelastica attraverso un fattore di comportamento (q , R). Come osservato da Crouse (2002), i valori dei fattori di comportamento prescritti dalle diverse normative antisismiche possono, per certi versi, tenere conto implicitamente degli effetti di interazione; pertanto, considerare

l'interazione sia attraverso l'analisi (lineare) sia con il fattore di comportamento potrebbe risultare non conservativo.

Il tema della valutazione degli effetti dell'interazione sulle strutture a comportamento non lineare è stato affrontato in diversi lavori, che tuttavia non hanno portato a conclusioni sufficientemente condivise dalla comunità scientifica. In uno dei primi studi sul tema, Veletsos e Verbic (1974) evidenziarono che, poiché l'entrata in campo non lineare comporta una diminuzione della rigidità, gli effetti di interazione su una struttura non lineare sono meno significativi rispetto a quelli relativi alla struttura elastica lineare. Al contrario, i risultati di Bielak (1978) mostrano che la flessibilità della fondazione può indurre un incremento significativo della domanda di spostamento nel caso di strutture a comportamento non lineare. Più recentemente, Ciampoli e Pinto (1995) hanno condotto un'estensiva analisi parametrica in campo non lineare di strutture ad un grado di libertà che schematizzano pile da ponte. Gli autori hanno concluso che l'interazione con il terreno, nonostante comporti un leggero incremento degli spostamenti massimi, non modifica significativamente la domanda in termini di duttilità di curvatura rispetto a quella calcolata nell'ipotesi di base fissa. Secondo Avilés e Pérez-Rocha (2003), l'interazione può comportare un aumento o una diminuzione della risposta di strutture non lineari in funzione della snellezza della struttura e del rapporto tra la sua frequenza fondamentale e la frequenza propria del deposito. Moghaddasi et al. (2011), esaminando le statistiche di una simulazione Monte-Carlo, hanno concluso che gli effetti di interazione sulla risposta sismica di strutture non lineari possono essere più o meno significativi, in funzione del livello di confidenza richiesto. Bazan-Zurita et al. (2012) hanno proposto un metodo semplificato per stimare la domanda di duttilità di strutture non lineari, applicabile sia alle strutture su base fissa, sia ai sistemi interagenti fondazione-struttura. Essi hanno inoltre dimostrato che la capacità richiesta ad un sistema interagente per conseguire una fissata duttilità di spostamento è sempre maggiore di quella che si otterrebbe dallo spettro anelastico relativo ad una struttura su base fissa, e considerando gli effetti di interazione tramite una variazione del periodo fondamentale.

Alla luce di quanto detto, si evince la necessità di ulteriori studi che permettano di interpretare in maniera omogenea i diversi risultati della ricerca e, conseguentemente, di rivisitare gli approcci progettuali correntemente utilizzati.

Infine, è al momento in fase di elaborazione un'analisi perturbativa duale a quella presentata nella tesi, valida per l'analisi di strutture relativamente rigide supportate da terreni molto deformabili.

BIBLIOGRAFIA

- Applied Technology Council (ATC). (1978). *Tentative Provisions for the Development of Seismic Regulations for Buildings, ATC3-06*. Redwood City, CA.
- Applied Technology Council (ATC). (2005). *Improvement of Nonlinear Static Seismic Analysis Procedures. FEMA 440*. Redwood City, CA.
- Apsel, R. J., & Luco, J. E. (1976). Torsional response of rigid embedded foundations. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 102(6)*, 957-970.
- Apsel, R. J., & Luco, J. E. (1987). Impedance Functions for Foundations Embedded in a Layered Medium: an Integral Equation Approach. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 15*, 213-231.
- ASCE/SEI. (2006). *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures. ASCE/SEI 7-05*.
- ASCE/SEI. (2007). *Seismic Rehabilitation of Existing Buildings. ASCE / SEI 41-06*.
- ASCE/SEI. (2010). *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures. ASCE/SEI 7-10*.
- Avilés, J., & Pérez-Rocha, L. E. (2003). Soil-structure interaction in yielding systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 32*, 1749-1771.
- Bazan-Zurita, E., Jarernprasert, S., & Bielak, J. (2012). Soil-Structure Interaction in Stiffness and Strength Degrading Systems. *Proceedings of the 15th World Conference on Earthquake Engineering*. Lisbon.
- Beredugo, Y. O. (1976). Modal analysis of coupled motion of horizontally excited embedded footings. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 4*, 403-410.
- Bielak, J. (1971). *Earthquake Response of Building-Foundation Systems*. Report EERL 71-04, Earthquake Engineering Research Laboratory. Pasadena, CA: California Institute of Technology.
- Bielak, J. (1975). *Modal Analysis for Building-Soil Interaction*. Report E17, Instituto de Ingenieria. Mexico, D.F.: Universidad Autonoma de Mexico.
- Bielak, J. (1975b). Dynamic Behavior of Structures with Embedded Foundations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 3*, 259-274.
- Bielak, J. (1976). Modal Analysis for Building-Soil Interaction. (ASCE, A cura di) *Journal of the Engineering Mechanics Division, 102(EM5)*, 771-786.

- Bielak, J. (1978). Dynamic response of non-linear building-foundation systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 6(1), 17-30.
- Bradford, S. C., Clinton, J. F., & Heaton, T. H. (2004). *Results of Millikan Library Forced Vibration Testing*. Earthquake Engineering Research Laboratory. Pasadena, CA: California Institute of Technology.
- BSSC (Building Seismic Safety Council). (2000). *NEHRP Recommended Provisions for Seismic Regulations for New Buildings and Other Structures. 2000 Edition*. Parts 1 and 2, FEMA 368 and 369.
- BSSC (Building Seismic Safety Council). (2003). *NEHRP Recommended Provisions and Commentary for Seismic Regulations for New Buildings and Other Structures. 2003 Edition*. FEMA 450.
- BSSC (Building Seismic Safety Council). (2009). *2009 NEHRP Recommended Seismic Provisions*. FEMA P-750.
- Bycroft. (1956). Forced vibration of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 948(248), 327-368.
- CEN/UNI. (2004). *EN 1998-5. Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance - Part 5: Foundations, retaining structures and geotechnical aspects*.
- CEN/UNI. (2005). *EN 1998-2. Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance - Part 2: Bridges*.
- Chopra, A. K., & Gutiérrez, J. A. (1974). Earthquake Analysis of Multistory Buildings Including Foundation Interaction. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 3, 65-77.
- Ciampoli, M., & Pinto, P. E. (1995). Effects of Soil-Structure Interaction on Inelastic Seismic Response of Bridge Piers. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, 121(5), 806-814.
- Clough, R. W., & Mojtahedi, S. (1976). Earthquake Response Analysis considering Non-proportional Damping. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 4, 489-496.
- Cronin, D. L. (1976). Approximations for Determining Harmonically Excited Response of Nonclassically Damped Systems. (ASME, A cura di) *Journal of Engineering for Industry*, 99B, 43-47.
- Cronin, D. L. (1990). Eigenvalue and Eigenvector Determination for Nonclassically Damped Systems. *Computer and Structures*, 36, 133-138.

- Crouse, C. B. (2002). Commentary on Soil-Structure Interaction in U.S. Seismic Provisions. *Proceedings of the 7th U.S. National Conference on Earthquake Engineering*. Boston: Earthquake Engineering Research Institute.
- Der Kiureghian, A. (1996). A coherency model for spatially varying ground motions. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25, 99-111.
- Dobry, R., & Gazetas, G. (1986). Dynamic Response of Arbitrarily Shaped Foundations. *Journal of Geotechnical Engineering*, 112(2), 109-135.
- Elgamal, A., Linjun, Y., Zhaohui, Y., & Conte, J. P. (2008). Three-Dimensional Seismic Response of Humboldt Bay Bridge-Foundation-Ground System. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 134(7), 1165-1176.
- Gazetas, G. (1991). Foundation vibrations. In H. Fang, *Foundation Engineering Handbook, 2nd ed.* (p. 553-593). Kluwer/Springer.
- Gazetas, G., & Makris, N. (1991). Dynamic Pile-Soil-Pile Interaction. Part I: analysis of axial vibrations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 20, 115-132.
- Gazetas, G., & Roesset, J. (1976). Forced vibrations of strip footings on layered soils. *Methods of Structural Analysis, 1*(ASCE Specialty Conference, University of Wisconsin).
- Hasselmann, T. K. (1976). Modal coupling in lightly damped structures. *AIAA Journal*, 14, 1627-1628.
- Hradilek, P., & Luco, J. E. (1970). *Dynamic Soil-Structure Interaction. IDIEM Technical Report No. 14*. Santiago, Chile: University of Chile.
- Iguchi, M. (1982). An approximate analysis of input motions for rigid embedded foundations. *Transactions of the Architectural Institute of Japan*, 315, 61-75.
- Itoh, T. (1973). Damped Vibration Mode Superposition for Dynamic Response Analysis. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2, 45-57.
- Jennings, P. C., & Bielak, J. (1973). Dynamics of Building-Soil Interaction. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 63, 9-43.
- Johnson, J. (1981). *Soil Structure Interaction: The Status of Current Analysis Methods and Research - Seismic Safety Margins Research Program*. Prepared for the U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington, D.C. Livermore, CA: Lawrence Livermore National Laboratory.
- Johnson, J., & Chang, C. (1991). State of the Art Review of Seismic Input and Soil-Structure Interaction. In *Appendix E in A Methodology for Assessment of Nuclear Power Plant Seismic Margin (Rev.1) EPRI NP-6041-SL*. Palo Alto, CA: Electric Power Research Institute.

- Kausel, E. (2006). *Fundamental Solutions in Elastodynamics*. UK: Cambridge University Press.
- Kausel, E. (2010). Early history of soil-structure interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 30, 822-832.
- Kausel, E., & Roesset, J. M. (1976). Dynamic stiffness of Circular Foundations. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 101(EM6), 1381-1395.
- Kaynia, A. M., & Kausel, E. (1991). Dynamics of piles and pile groups in layered soil media. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 10(8), 386-401.
- Kaynia, A., & Kausel, E. (1982). Dynamic behavior of pile groups. *Proceedings of the 2nd International Conference on Numerical Methods in Offshore Piling*. Austin, TX.
- Kramer, S. L. (1996). *Geotechnical Earthquake Engineering*. Prentice Hall.
- Lanzi, A. (2011). *Approximate Analysis of Dynamic Soil-Structure Interaction*. M.S. Thesis, University of California San Diego, La Jolla, California.
- Lanzi, A., & Luco, J. E. (2012). Equivalent 1-DOF Model for Approximate Multi-Modal Analysis of Soil-Structure Interaction. *Proc. of the 15th World Conference in Earthquake Engineering*. Lisbon, September 23-28, 2012.
- Lee, T. H., & Wesley, D. A. (June 1971). *Soil-structure dynamic interaction effects on the seismic response of an arbitrary three-dimensional structure*. Gulf General Atomic Report, GA-10437. Boston, MA: American Nuclear Society National Meeting.
- Lee, T. H., & Wesley, D. A. (Sept. 1972). Soil-foundation interaction of reactor structures subjected to seismic excitation. *Proc. 1st Int. Conf. Struct. Mechanics in Reactor Technology, Paper K3/5*. Berlin, Germany.
- Liu, S. C., & Fagel, L. W. (1971). Earthquake Interaction by Fast Fourier Transform. (ASCE, A cura di) *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 97(EM4, Proc. Paper 8324), 1223-1237.
- Lu, J., Mackie, K. R., & Elgamal, A. (2011). *BridgePBEE: OpenSees 3D Pushover and Earthquake Analysis of Single-Column 2-span Bridges*. User Manual, Beta 1.0.
- Luco, J. E. (1974). Impedance functions for a rigid foundation in a layered medium. *Nuclear Engineering and Design*, 31, 204-217.
- Luco, J. E. (1976). Torsional Response of Structures for SH Waves: the Case of Hemispherical Foundations. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 66(1), 109-124.

- Luco, J. E. (1980). *Linear Soil-Structure Interaction*. Report UCRL - 15272, PSA No. 7249808. Livermore, California: Lawrence Livermore Laboratory.
- Luco, J. E. (1986). On the relation between radiation and scattering problems for foundations embedded in an elastic half-space. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 5(2), 97-101.
- Luco, J. E., & Mita, A. (1987). Response of a circular foundation on a uniform half-space to elastic waves. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15, 105-118.
- Luco, J. E., & Sotiropoulos, D. A. (1980). Local Characterization of Free-Field Ground Motion and Effect of Wave Passage. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 70(6), 2229-2244.
- Luco, J. E., & Westmann, R. A. (1971). Dynamic response of circular footings. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 97(EM5), 1381-1395.
- Luco, J. E., & Wong, H. L. (1986). Response of hemispherical foundation embedded in half-space. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 112(12), 1363-1374.
- Luco, J. E., & Wong, H. L. (1987). Seismic Response of Foundations Embedded in a Layered Half-Space. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 15, 233-247.
- Luco, J. E., Trifunac, M. D., & Wong, H. L. (1987). On the apparent change in dynamic behavior of a 9-story reinforced concrete building. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 77(6), 1961-1983.
- Luco, J., & de Barros, F. C. (1993). On the Three-Dimensional Seismic Response of a Class of Cylindrical Inclusions Embedded in Layered Media. *Proceedings of the Sixth International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. Bath, UK.
- Lysmer, J., & Kuhlemeyer, R. (1969). Finite dynamic model for infinite media. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 95(EM4), 859-876.
- Makris, N., & Gazetas, G. (1992). Dynamic Pile-Soil-Pile Interaction. Part II: lateral and seismic response. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 21, 145-162.
- Meek, J. W., & Veletsos, A. S. (1972). *Dynamic analysis and behavior of structure-foundation systems*. Rep. No. 13. Houston, Texas: Dep. Civ. Eng., Rice Univ.
- Meirovitch, L., & Ryland, G. (1979). Response of slightly damped gyroscopic systems. *Journal of Sound Vibrations*, 67, 1-19.
- Milonakis, G., & Gazetas, G. (2000). Seismic Soil-Structure Interaction: Beneficial or Detrimental? *Journal of Earthquake Engineering*, 4(3), 277-301.

- Min. Infr. (2008). *D.M. 14/01/2008 - Norme Tecniche per le Costruzioni (NTC08)*.
- Mita, A., & Luco, J. (1989). Impedance functions and input motions for embedded square foundations. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 115*(4), 491-503.
- Moghaddasi, M., Cubrinovski, M., Chase, J. G., Pampanin, S., & Carr, A. (2011). Probabilistic evaluation of soil-foundation-structure interaction effects on seismic structural response. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 40*, 135-154.
- Novak, M. (1974). Additional Note on the Effect of Soil on Structural Response. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 3*, 312-315.
- Novak, M. (1974). Dynamic stiffness and damping of piles. *Canadian Geotechnical Journal, 11*(4), 574-598.
- Novak, M. (1974). Effect of Soil on Structural Response to Wind and Earthquake. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 3*, 79-96.
- Novak, M., & Aboul-Ella, F. (1978). Impedance Functions of Piles in Layered Media. *Journal of the Engineering Mechanics Division, 104*(EM3), 643-661.
- Novak, M., & El Hifnawy, L. (1983). Effect of Soil-Structure Interaction on Damping of Structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 11*, 595-621.
- Parmelee, R. A. (1967). Building-Foundation Interaction Effects. (ASCE, A cura di) *Journal of the Engineering Mechanics Division, 93*, 131-155.
- Parmelee, R. A., Perelman, D. S., & Lee, S. L. (1969). Seismic Response of Multiple Story Structure on Flexible Foundations. *Bulletin of the Seismological Society of America, 59*, 1061-1070.
- Parmelee, R. A., Perelman, D. S., Lee, S., & Keer, L. (1968). Seismic response of structure-foundation systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 94*(EM6), 1295-1315.
- Rainer, J. H. (1971). Structure-Ground Interaction in Earthquakes. (ASCE, A cura di) *Journal of the Engineering Mechanics Division, 97*(EM2), 1431-1450.
- Rainer, J. H. (1975). Damping in Dynamic Structure-Foundation Interaction. *Canadian Geotechnical Journal, 12*, 13-22.
- Roesset, J. M., Whitman, R. V., & Dobry, R. (1973). Modal Analysis for Structures with Foundation Interaction. (ASCE, A cura di) *Journal of the Structural Division, 99*(ST3), 399-416.

- Sarrazin, M. A. (1970). *Soil-structure interaction in earthquake resistant design*. Department of Civil Engineering, Cambridge, MA 02139: Massachusetts Institute of Technology.
- Sarrazin, M. A., Roesset, J. M., & Whitman, R. V. (1972). Dynamic soil-structure interaction. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 98(ST7), 1525-1544.
- Schnabel, P., Lysmer, J., & Seed, H. (1972). *SHAKE. A computer program for earthquake response analysis of horizontally layered sites. Report EERC 72-12*. Berkeley, Richmond, CA: Earthquake Engineering Research Center, University of California.
- Seed, H., & Idriss, I. (1970). *Soil moduli and damping factors for dynamic response analyses. Report EERC 70-10*. Berkeley: Earthquake Research Center, University of California.
- Sienkiewicz, Z. (1993). Dynamic Impedances of a Weakly Anelastic Medium. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22, 1009-1014.
- Stewart, J. P., Fenves, G. L., & Seed, R. B. (1999a). Seismic Soil-Structure Interaction in Buildings. Part I: Analytical methods. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 125(1), 26-37.
- Stewart, J. P., Kim, S., Bielak, J., Dobry, R., & Power, M. S. (2003). Revisions to Soil-Structure Interaction Procedures in NEHRP Design Provisions. *Earthquake Spectra*, 19(3), 677-696.
- Stewart, J. P., Seed, R. B., & Fenves, G. L. (1999b). Seismic Soil-Structure Interaction in Buildings. Part II: Empirical Findings. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 125(1), 38-48.
- Tajimi, H. (1967). Discussion: building-foundation interaction effects. (ASCE, A cura di) *Journal of Engineering Mechanics Division*, 93(EM6), 294-298.
- Thomson, W. T., Calkins, T., & Caravani, P. (1974). A Numerical Study of Damping. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 3, 97-103.
- Trifunac, M. (1971). Surface motion of a semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 61(6), 1755-1770.
- Trifunac, M. (1973). Scattering of plane SH waves by a semi-cylindrical canyon. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1, 267-281.
- Tsai, N. C. (1974). Modal Damping for Soil-Structure Interaction. (ASCE, A cura di) *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 100(EM2), 323-341.
- Tsai, N. C., Niehoff, D., & Swatta, M. (1974). The use of Frequency-independent Soil-Structure Interaction Parameters. *Nuclear Engineering and Design*, 31, 168-183.

- Tseng, W. S., & Penzien, J. (2000). Soil-Foundation-Structure Interaction. In W. F. Chen, & L. Duan, *Bridge Engineering Handbook* (p. 42-1 - 42-52). Boca Raton, FL: CRC Press.
- Udwadia, F. E. (1978). Uniqueness of Damping and Stiffness Distributions in the Identification of Soil and Structural Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 45(1), 181-187.
- Vaidya, N. R., Bazan-Zurita, E., & Rizzo, P. C. (1986). On the Validity of Modal Superposition Technique in Soil-Structure Interaction Analysis. *Proc. 3rd U.S. National Conference on Earthquake Engineering*, (p. 683-692). Charleston, SC.
- Veletsos, A. S., & Meek, J. W. (1974). Dynamic Behavior of Building-Foundation Systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 3, 121-138.
- Veletsos, A. S., & Verbic, B. (1973). Vibration of Viscoelastic Foundations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2, 87-102.
- Veletsos, A. S., & Nair, V. D. (1975). Seismic interaction of structures on hysteretic foundations. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 101(ST1), 109-129.
- Veletsos, A. S., & Verbic, B. (1974). Dynamics of Elastic and Yielding Structure-Foundation Systems. *Proceedings of the Fifth World Conference on Earthquake Engineering*. Rome.
- Veletsos, A. S., & Wei, Y. T. (1971). Lateral and rocking vibration of footings. *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*, 97, 1227-1248.
- Warburton, G. B., & Soni, S. R. (1977). Errors in Response Calculations for Non-classically Damped Structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5, 365-376.
- Wolf, J. (1985). *Dynamic Soil-structure interaction*. Prentice Hall.
- Wolf, J. (1988). *Soil-structure-interaction analysis in time domain*. Prentice Hall.
- Wolf, J. P., & Deeks, A. J. (2004). *Foundation Vibration Analysis: a Strength of Materials Approach*. Elsevier.
- Wolf, J., & Chongmin, S. (1996). *Finite-element modelling of unbounded media*. Wiley.
- Wong, H. L., & Luco, J. E. (1978). Dynamic response of rectangular foundations to obliquely incident seismic waves. *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 6, 3-16.
- Wong, H., Trifunac, M., & Lo, K. (1976). Influence of canyon on soil-structure interaction. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 102(EM4), 671-684.