

Università degli Studi di Roma  
“La Sapienza”

Dottorato di Ricerca in  
Elettromagnetismo

XXV Ciclo



Tesi di dottorato:

**Diffrazione elettromagnetica  
in mezzi con perdite**

Dottorando: Nicola Tedeschi

Docente guida: Fabrizio Frezza



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>I Diffrazione in mezzi isotropi</b>	<b>1</b>
<b>1 Onde piane in mezzi con perdite</b>	<b>3</b>
1.1 Caratteristiche del mezzo . . . . .	3
1.2 Formulazione con l'angolo complesso . . . . .	9
1.3 Onde piane e uniformi . . . . .	14
1.4 Onde piane e non uniformi . . . . .	18
1.5 Problemi all'interfaccia tra mezzi con perdite . . . . .	21
1.5.1 Angoli dei vettori di propagazione dell'onda incidente, riflessa e trasmessa . . . . .	21
1.5.2 Coefficienti di riflessione e trasmissione . . . . .	34
1.5.3 Calcolo di $\xi_i^\xi$ e $\xi_i^\zeta$ . . . . .	35
1.6 Casi particolari di riflessione e trasmissione . . . . .	38
1.6.1 Interfaccia dielettrico-conduttore . . . . .	38
1.6.2 Onda trasmessa non attenuata . . . . .	43
1.7 Spettro di onde piane in mezzi con perdite . . . . .	47
<b>2 Diffrazione da strutture cilindriche</b>	<b>51</b>
2.1 Equazione vettoriale delle onde in coordinate generiche . . . . .	51
2.2 Armoniche cilindriche vettoriali . . . . .	54
2.3 Diffrazione da un cilindro immerso in un mezzo con perdite . . . . .	57
2.4 Spettro di onde piane dell'onda cilindrica . . . . .	66
2.5 Riflessione e Trasmissione di onde cilindriche all'interfaccia tra due mezzi con perdite . . . . .	78
2.6 Valutazione asintotica degli integrali . . . . .	83
2.6.1 Valutazione asintotica dell'integrale della funzione d'onda riflessa . . . . .	88
2.7 Diffrazione da un'arbitraria disposizione di cilindri immersi in un mezzo con perdite . . . . .	93
2.7.1 Trattazione teorica . . . . .	93

2.7.2	Implementazione numerica . . . . .	107
2.7.3	Risultati numerici . . . . .	118
<b>II</b>	<b>Diffrazione in mezzi anisotropi</b>	<b>127</b>
<b>3</b>	<b>Propagazione in un mezzo uniassico</b>	<b>129</b>
3.1	Caratteristiche di un mezzo anisotropo . . . . .	129
3.2	Equazione di dispersione . . . . .	134
3.3	Polarizzazione e Energia . . . . .	141
<b>4</b>	<b>Interfaccia piana tra mezzi anisotropi</b>	<b>147</b>
4.1	Determinazione dei vettori di propagazione . . . . .	147
4.2	Coefficienti di riflessione e trasmissione . . . . .	150
<b>5</b>	<b>Mezzi anisotropi e condizioni al contorno</b>	<b>159</b>
5.1	La materializzazione delle condizioni al contorno . . . . .	159
5.2	Realizzazione della condizione SH/DB . . . . .	162
5.2.1	Riflessione all'interfaccia con un mezzo SH/DB . . . . .	165
5.3	Mezzi adattati e unitarietà della matrice di riflessione . . . . .	173
	<b>Conclusioni</b>	<b>181</b>
	<b>Lista delle pubblicazioni</b>	<b>185</b>
	<b>Appendici</b>	<b>189</b>
<b>A</b>	<b>La suscettività generalizzata</b>	<b>189</b>
<b>B</b>	<b>Determinazione del percorso di integrazione sul piano di <math>k_z</math></b>	<b>195</b>
<b>C</b>	<b>Funzione arccos di argomento complesso</b>	<b>201</b>
<b>D</b>	<b>Dimostrazioni sull'unitarietà del coefficiente di riflessione</b>	<b>205</b>

# Introduzione

Il lavoro di dottorato, durante i tre anni di corso, si è incentrato sulla propagazione e la diffrazione di onde elettromagnetiche in mezzi con perdite. Inizialmente, la necessità di questo studio è stata motivata dal voler risolvere in forma chiusa la diffrazione da parte di strutture cilindriche immerse in mezzi con perdite. Per risolvere tale problema non è necessario sviluppare la teoria della propagazione in mezzi con perdite, infatti, se si suppone che l'onda incidente provenga da un dielettrico privo di perdite, le espressioni per l'onda trasmessa sono ben note nella letteratura [1]. Nonostante ciò, si è deciso di procedere allo studio del problema della riflessione e trasmissione di onde piane tra mezzi con perdite nel caso più generale. Questo ha portato a una più attenta considerazione del formalismo in uso nella letteratura per la descrizione dei campi elettromagnetici in mezzi con perdite. In particolare, sono due i formalismi dominanti per la descrizione di tali vettori complessi, uno consiste nella rappresentazione del vettore come sovrapposizione complessa di due vettori reali, spesso detti vettore di fase e vettore di attenuazione, rispettivamente, tale rappresentazione viene talvolta chiamata formalismo di Adler-Chu-Fano [2]. Il secondo formalismo invece consiste nel prodotto di un numero complesso, che può essere considerato come l'ampiezza complessa, per un vettore complesso unitario esprimibile nello spazio cartesiano per mezzo di funzioni goniometriche complesse. Entrambi i formalismi presentano i loro vantaggi: il formalismo di Adler-Chu-Fano ha sicuramente il vantaggio di utilizzare solo funzioni reali e questo rende le manipolazioni algebriche dei vettori molto agevoli, quando invece, il formalismo con gli angoli complessi porta a non indifferenti difficoltà di manipolazione. Esso però ha il grande vantaggio di fornire una rappresentazione dei vettori del campo elettromagnetico che sia un semplice prolungamento analitico del caso reale e questo consente di scrivere molte espressioni del campo come prolungamento analitico delle equazioni ricavate nel caso di mezzi privi di perdite.

Il problema della riflessione e della trasmissione di onde elettromagnetiche in mezzi con perdite è un problema classico dell'elettromagnetismo. Esiste da tempo una soluzione di tale problema nel caso in cui il mezzo di provenienza della radiazione sia un dielettrico non dissipativo. Tale soluzione fu ottenuta inizialmente con il formalismo dell'angolo complesso [1]. Tale soluzione è però molto articolata e richiede una gran cura nella rappresentazione delle funzioni coinvolte. Una soluzione più semplice è stata data in tempi più recenti con il

formalismo dei vettori reali [2]. Lo stesso formalismo è poi stato utilizzato per risolvere il problema della riflessione e trasmissione quando entrambi i mezzi presentino perdite [3, 4]. La soluzione di tale problema era molto elaborata e lasciava alcune domande non risolte. Il primo risultato che viene presentato in questo lavoro riguarda alcuni aspetti della riflessione e trasmissione tra due mezzi conduttivi. Per prima cosa si è ricavato un metodo analitico in forma chiusa per convertire il formalismo di Adler-Chu-Fano nel formalismo dell'angolo complesso. Tale conversione risulta tutt'altro che semplice ed era stata proposta nella letteratura solo per mezzo di tecniche numeriche [3]. Il problema della conversione sta nel fatto che per isolare i diversi parametri delle rappresentazioni a partire da un confronto diretto dei due formalismi, vanno necessariamente eseguite manipolazioni algebriche che introducono delle indeterminazioni sul segno dei parametri stessi. Per risolvere il problema, invece di ricorrere al confronto diretto delle due rappresentazioni del vettore complesso, si sono utilizzate le proprietà di polarizzazione di tale vettore, attraverso l'utilizzo dei due vettori reali che descrivono la polarizzazione di un vettore complesso [5]. Un altro problema lasciato aperto nella letteratura era legato alla determinazione di due angoli critici che vengono introdotti nella soluzione del problema di trasmissione di onde non uniformi tra due mezzi con perdite. In questo caso si trova che per due determinati angoli di incidenza si ha un'onda trasmessa avente o il vettore di fase, o quello di attenuazione, parallelo all'interfaccia. Tali angoli venivano ricavati con una tecnica numerica nella letteratura. Qui si sono utilizzate le relazioni di Snell generalizzate e le relazioni di dispersione del mezzo per fornire delle espressioni in forma chiusa di tali angoli. Inoltre, si è fornita un'interpretazione fisica al fenomeno legato a tali angoli. Infatti, un'onda trasmessa avente il vettore di attenuazione parallelo all'interfaccia, risulta essere un'onda che si propaga in un mezzo senza attenuarsi nella direzione ortogonale all'interfaccia. Si sono studiate le proprietà di tale onda e si è visto che essa si propaga effettivamente senza attenuarsi sulla semiretta ortogonale all'interfaccia.

Una volta fornita una soluzione soddisfacente al problema della riflessione e trasmissione tra mezzi con perdite, si è andati a studiare il problema della diffrazione elettromagnetica da parte di strutture cilindriche in mezzi con perdite. I problemi principali in questo caso riguardavano la rappresentazione di onde piane non uniformi in armoniche cilindriche e lo sviluppo in un spettro di onde piane delle armoniche stesse. Il primo problema è risolvibile facilmente una volta che si dispone della rappresentazione dell'onda piana con l'angolo complesso. Visto che il problema della trasmissione viene risolto con il formalismo di Adler-Chu-Fano, è richiesta la conversione della rappresentazione del vettore di propagazione nel formalismo dell'angolo complesso, cosa che può essere fatta in forma chiusa grazie alle relazioni precedentemente ricavate. Il secondo problema si è subito configurato come una questione ben più complicata. Esso riguarda la convergenza dello sviluppo di onde piane della generica armonica cilindrica all'interno di un mezzo con perdite. Nella letteratura tale spettro era stato ricavato nel caso di mezzi privi di perdite ed era stato scritto in forma normalizzata rispetto al numero d'onda in modo da renderlo indipendente dalla frequenza. Tale spettro, una volta sostituito il valore complesso del

numero d'onda, si è dimostrato essere un integrale non convergente. Tale risultato risulta molto strano, infatti, è ben noto che qualunque funzione a quadrato sommabile è sviluppabile in serie di Fourier e quindi qualsiasi campo che rispetti le condizioni di radiazione all'infinito è scrivibile sotto forma di uno spettro di onde piane. Per risolvere il problema si è deciso di ricavare nuovamente lo spettro dell'armonica cilindrica a partire dalle definizioni integrali della funzione di Hankel di prima specie, nell'ipotesi che il numero d'onda fosse complesso. Fatto questo, si è voluto ricavare l'insieme di convergenza dell'integrale. Si è visto che, se si evita la normalizzazione per il numero d'onda, lo spettro di onde piane ha un insieme di convergenza contenente l'asse reale e quindi è convergente come una trasformata di Fourier. Si è poi notato che, dividendo la variabile di integrazione per il numero d'onda complesso, l'insieme di convergenza dell'integrale subiva una rotazione sul piano complesso, arrivando a non contenere più l'asse reale. Si è riusciti così a spiegare la non convergenza dell'integrale da cui si era partiti. Inoltre, si è ottenuta una espressione rigorosa dell'insieme di convergenza dello spettro di onde piane di un'armonica cilindrica.

A questo punto si è sfruttato lo spettro di onde piane per rappresentare l'onda riflessa e trasmessa a un'interfaccia a causa dell'incidenza di una generica onda cilindrica. L'onda riflessa e l'onda trasmessa, vengono espresse in forma integrale moltiplicando l'onda piana elementare per il coefficiente di riflessione o di trasmissione dell'interfaccia, rispettivamente. Si è poi utilizzato un metodo di valutazione asintotica di tali integrali in modo da ottenerne un'espressione a grande distanza dall'interfaccia. Il risultato che si è ottenuto per l'onda cilindrica riflessa è estremamente interessante: si è ottenuta, infatti, un'espressione composta da due fattori, il primo è un'armonica cilindrica, centrata nel punto simmetrico rispetto all'interfaccia dell'origine dell'armonica cilindrica incidente e del suo stesso ordine, l'altro è un fattore di ampiezza indipendente dalla distanza. Tale risultato è estremamente importante perché ci dice che l'onda cilindrica riflessa è ancora un'onda cilindrica, ma moltiplicata per un fattore di ampiezza che tiene conto dell'appiattimento del fronte d'onda dovuto all'interfaccia.

Una volta sviluppati gli argomenti necessari, si è andati a risolvere il problema della diffrazione di un'onda elettromagnetica piana da parte di un'arbitraria disposizione di cilindri sepolti in un mezzo con perdite. Si è considerato sia il caso in cui i cilindri fossero di materiale conduttore elettrico perfetto che il caso in cui fossero di un generico materiale dielettrico con perdite. L'analisi teorica del problema ha portato alla scrittura di un sistema lineare per la determinazione dei coefficienti di scattering, la cui soluzione permette il calcolo del campo elettromagnetico in tutto lo spazio. Una volta sviluppato il metodo analitico, si è sviluppato il codice numerico, in linguaggio Fortran 90, per il calcolo dei campi nei due semispazi. La scrittura del codice ha richiesto il calcolo degli integrali spettrali, cosa non semplice vista la rapida oscillazione degli integrandi come funzioni della variabile di integrazione. Per risolvere tale problema si è implementato un metodo di quadratura adattivo, capace di selezionare gli intervalli di integrazione misurando la rapidità di variazione dell'integrando. In questo modo è stato possibile applica tecniche di quadratura di basso ordine in ognuno di questi intervalli, dove la funzione integranda varia lentamente.

I risultati ottenuti con il codice numerico sono stati confrontati con risultati della letteratura e con le simulazioni implementate con un software commerciale. Tutti i confronti hanno presentato ottimi accordi e questo ci ha portato ad analizzare alcune configurazioni particolari, come gli array di cilindri o le interazioni tra cilindri posti a una certa distanza tra loro. Inoltre, si è dimostrato che una qualsiasi struttura cilindrica può essere ottenuta con un'opportuna disposizione di cilindri e questo significa che il codice sviluppato per cilindri a sezione circolare può essere utilizzato per calcolare il campo diffratto da un'arbitraria struttura cilindrica sepolta.

L'ultima parte del lavoro di dottorato si è incentrato sui mezzi artificiali che possono essere ottenuti attraverso particolari inclusioni cilindriche in un dielettrico. Come è ben noto, infatti, un dielettrico all'interno del quale è presente una disposizione di cilindri, può essere pensato, sotto certe condizioni, come un mezzo omogeneo avente permittività elettrica e permeabilità magnetica legate alle caratteristiche dei diversi componenti. Inoltre, un materiale di questo tipo, visto che i cilindri determinano un asse preferenziale, possono essere descritti come mezzi omogenei e anisotropi uniassici. Per questo motivo si è studiata la propagazione in questo tipo di mezzi supponendo in essi la presenza di perdite. In particolare, si è posta l'attenzione sulla cosiddetta materializzazione delle condizioni al contorno. In letteratura, sono stati proposti dei materiali artificiali con caratteristiche estreme in grado di realizzare delle interfacce che realizzino particolari condizioni al contorno [6]. In particolare, si è posta l'attenzione su una condizione al contorno che assicuri l'annullamento delle componenti di campo elettrico e magnetico in una particolare direzione dello spazio. Tale condizione è particolarmente interessante perché ha come casi particolari la condizione DB, che assicura l'annullamento delle componenti normali del campo, oppure le condizioni Soft o Hard, che richiedono l'annullamento delle componenti in particolari direzioni tangenziali all'interfaccia. Per questo motivo si è deciso di chiamare questa condizione e il mezzo che la realizza, SH/DB. Si è dimostrato che per realizzare tale condizione è necessario un mezzo uniassico avente le componenti assiali del diadico di permittività e di permeabilità nulle. Si è poi studiata la riflessione e la trasmissione all'interfaccia con questo mezzo e se ne sono studiate le caratteristiche in diversi casi particolari. Un caso molto interessante è quello che realizza una condizione di perfetto adattamento con il mezzo di provenienza della radiazione elettromagnetica. Si è visto che tale condizione è del tutto analoga a quella realizzata da un Perfectly Matched Layer (PML), mezzo ideale ben noto e ampiamente discusso nella letteratura [7, 8]. È risaputo che tale mezzo, quando presenti le perdite elettromagnetiche e quindi quando possa essere usato come assorbitore, presenta anche una componente attiva tra le componenti dei diadici rappresentativi della permittività e della permeabilità. In questo lavoro si è proposta una approssimazione tale da rendere la condizione di perfetto adattamento valida anche con un mezzo puramente passivo. Si sono svolte delle simulazioni elettromagnetiche del mezzo proposto e se ne sono individuati i limiti di validità. Un materiale che garantisca una tale condizione è stato chiamato PML approssimato.

In fine, si è ricavata una proprietà molto interessante sui coefficienti di rif-

lessione per l'interfaccia tra un mezzo isotropo e un mezzo uniassico. Come è ben noto nella riflessione su tale interfaccia le polarizzazioni dell'onda incidente si mescolano nell'onda riflessa e quindi i coefficienti di riflessione non sono più due, come nel caso di mezzi isotropi, ma quattro, formando così una matrice di riflessione. Si è dimostrato che, nel caso in cui il mezzo uniassico sia adattato al mezzo isotropo, ovvero nel caso in cui il mezzo uniassico sia isotropo affine e abbia un'impedenza caratteristica uguale a quella del mezzo isotropo, allora la matrice di riflessione risulta un multiplo di una matrice unitaria. Tale proprietà è del tutto generale e può essere ricavata direttamente a partire dall'espressione analitica della matrice di riflessione.

## Parte I

# Diffrazione in mezzi isotropi



# Capitolo 1

## Onde piane in mezzi con perdite

### 1.1 Caratteristiche del mezzo

Si consideri un mezzo materiale avente le seguenti costanti elettromagnetiche:

- Permittività elettrica:  $\varepsilon = \varepsilon_R + i\varepsilon_I \in \mathbb{C}$
- Permeabilità magnetica:  $\mu \in \mathbb{R}$
- Conducibilità elettrica  $\sigma \in \mathbb{R}$

con  $\varepsilon_R, \varepsilon_I, \mu_R, \sigma_R \in \mathbb{R}$ . Supponendo che il mezzo sia lineare, omogeneo ed isotropo, le relazioni costitutive potranno scriversi come segue:

$$\underline{D} = \varepsilon \underline{E} \quad (1.1)$$

$$\underline{B} = \mu \underline{H} \quad (1.2)$$

Tali relazioni possono considerarsi come descriventi la risposta del mezzo ad una perturbazione esterna. In questo senso le proprietà del mezzo assumono il significato di suscettività generalizzata, e, come conseguenza, godono di tutte le sue proprietà, come il legame tra parte reale ed immaginaria fornito dalle relazioni di Kramers-Krönig, descritte in appendice A<sup>1</sup>.

Le equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti nel dominio della frequenza, supponendo una dipendenza dal tempo del tipo  $\exp(-i\omega t)$ , si potranno scrivere

---

<sup>1</sup>Per esattezza, mentre  $\mu$  può assumere la caratteristica di suscettanza, è più appropriato considerare  $\varepsilon^{-1}$  come suscettanza, considerando la densità di flusso elettrico come perturbazione esterna ed il campo elettrico come la risposta del mezzo, ovvero come la grandezza fisica fluttuante.

come segue:

$$\nabla \times \underline{E} = i\omega\mu\underline{H} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} - i\omega\varepsilon\underline{E} \quad (1.4)$$

Ricordando poi la ben nota legge di Ohm:

$$\underline{J} = \sigma\underline{E} \quad (1.5)$$

e ponendo:

$$\varepsilon_c = \varepsilon' + i\varepsilon'' = \varepsilon_R + i\left(\varepsilon_I + \frac{\sigma}{\omega}\right) \quad (1.6)$$

potremo scrivere:

$$\nabla \times \underline{E} = i\omega\mu\underline{H} \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \underline{H} = -i\omega\varepsilon_c\underline{E} \quad (1.8)$$

Prendendo il rotore di ambo i membri della (1.7), e sfruttando la (1.8), si può scrivere:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E} - k^2\underline{E} = 0 \quad (1.9)$$

dove si è posto:

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon_c \quad (1.10)$$

La (1.9) rappresenta l'equazione di Helmholtz vettoriale per il campo elettrico. Avedo considerato l'assenza di sorgenti ed il mezzo omogeneo, si può facilmente vedere che la (1.9) può essere scritta come segue:

$$\nabla^2 \underline{E} + k^2 \underline{E} = 0 \quad (1.11)$$

La quale ha come soluzione in un sistema di riferimento cartesiano, il seguente campo elettrico:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (1.12)$$

dove il vettore d'onda deve rispettare la cosiddetta relazione di separabilità:

$$\underline{k} \cdot \underline{k} = k^2 \quad (1.13)$$

Si deve notare che il vettore d'onda ad esponente, è in generale un vettore complesso, esattamente come la costante di polarizzazione  $\underline{E}_0$ . Prima di andare ad approfondire le proprietà di polarizzazione, andiamo a vedere come il vettore d'onda sia legato alle proprietà del mezzo in cui avviene la propagazione. Dalla definizione (1.10), possiamo scrivere:

$$k = k' + ik'' = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} \quad (1.14)$$

è bene spendere due parole sulla radice quadrata che compare in questa espressione. Essendo  $\varepsilon_c$  un numero complesso, sappiamo che la sua radice quadrata genera due determinazioni, corrispondenti a due fogli di Riemann sul piano complesso. La scelta della determinazione corretta va fatta secondo motivazioni fisiche. Supponendo che il mezzo in considerazione sia un mezzo destrorso (*right-handed*), potremo dire che campo elettrico, campo magnetico e vettore d'onda dovranno formare una terna trirettangolo destra, il che implica che la parte reale del numero d'onda abbia segno positivo<sup>2</sup>. Ne deriva che il foglio di Riemann da scegliere sarà quello nel quale la parte reale di  $k$  risulta positiva. Questa convenzione sul segno di  $k$  è necessaria se si vuole scrivere il vettore d'onda come il prodotto del numero d'onda per un versore che coincida con il versore caratteristico di propagazione dell'energia  $\underline{k} = k\underline{k}_0$ , in questo modo infatti il versore  $\underline{k}_0$  formerà sempre una terna destrorsa con il campo elettrico e con il campo magnetico, esattamente come il vettore di Poynting. Il discorso continua a valere anche nel caso di onde non uniformi, per le quali sia il vettore di propagazione che il vettore di Poynting sono vettori complessi non esprimibili in generale come prodotto di un numero complesso per un versore reale, per i quali quindi sarà necessario definire un vettore  $\underline{k}_0$  complesso ma unitario, come si vedrà nei successivi paragrafi.

Per ottenere il legame esplicito tra parte reale ed immaginaria di  $k$  con le proprietà del mezzo, si deve riprendere la definizione (1.10) e separarne parte reale ed immaginaria, ottenendo:

$$k'^2 - k''^2 = \omega^2 \mu \varepsilon' \quad (1.15)$$

$$k' k'' = \frac{\omega^2 \mu \varepsilon''}{2} \quad (1.16)$$

Quadrando ambo i membri della (1.16) e sfruttando la (1.15), si trova:

$$k'^4 - \omega \mu \varepsilon' k'^2 - \left( \frac{\omega^2 \mu \varepsilon''}{2} \right)^2 = 0 \quad (1.17)$$

Svolgendo la quale si ottiene l'espressione per  $k'$  e sfruttando la (1.15), si può trovare anche l'espressione per  $k''$ , le quali risultano uguali a:

$$k'^2 = \frac{\omega^2 \mu \varepsilon' + \sqrt{(\omega^2 \mu \varepsilon')^2 + (\omega^2 \mu \varepsilon'')^2}}{2} \quad (1.18)$$

$$k''^2 = \frac{-\omega^2 \mu \varepsilon' + \sqrt{(\omega^2 \mu \varepsilon')^2 + (\omega^2 \mu \varepsilon'')^2}}{2} \quad (1.19)$$

dove nella scelta dei segni si è tenuto conto del fatto che  $k'$  e  $k''$ , per ciò che si è detto, sono entrambe quantità reali. Riordinando i termini ed estraendo le

---

<sup>2</sup>Se avesse segno negativo, il vettore d'onda formerebbe una terna trirettangolo sinistra con gli altri due vettori. Il problema non si pone segno della parte immaginaria di  $k$  è sempre positivo, essendo imposto dalla conservazione dell'energia, l'espressione (1.12) infatti deve convergere quando  $r \rightarrow \infty$

radici quadrate, le (1.18) e (1.19) possono essere scritte come segue:

$$k' = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \varepsilon'}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} + 1} \quad (1.20)$$

$$k'' = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \varepsilon'}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} - 1} \quad (1.21)$$

La scelta dei segni positivi per tali espressioni è dovuta ai discorsi fatti sul tipo di mezzo che si è scelto di considerare e a motivazioni energetiche,

Le espressioni (1.20) e (1.21) ci permettono di notare alcune importanti caratteristiche del legame tra il numero d'onda e le proprietà del mezzo. La prima che vogliamo notare è che, nell'ipotesi di mezzi non dispersivi, sia la parte reale che la parte immaginaria del numero d'onda sono linearmente dipendenti dalla frequenza. Notiamo poi che entrambe queste quantità dipendono essenzialmente da due parametri:

- $\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}$  che corrisponde al numero d'onda nel caso privo di perdite
- $\varepsilon''/\varepsilon'$  che tiene conto delle perdite e viene spesso chiamata tangente di perdita

Prima di andare a vedere come queste caratteristiche influenzino la forma assunta dalla generica onda piana che si propaga nel mezzo, vogliamo andare a considerare le espressioni (1.20) e (1.21) in un caso particolare che riveste una grande importanza nelle applicazioni, ovvero il caso in cui le perdite siano dovute alla sola conducibilità elettrica, ovvero in cui si ha:

$$\varepsilon'' = \sigma/\omega \quad (1.22)$$

In questo caso vediamo che il legame tra parte reale ed immaginaria del numero d'onda con la frequenza non risulta più lineare. In Figura 1.1 vediamo l'andamento di tali parametri al variare della pulsazione. È facile rendersi conto che la parte reale del numero d'onda tende asintoticamente ad una retta mentre la parte immaginaria ad una costante<sup>3</sup>. Tale risultato è vero nel caso di mezzi non dispersivi. Nel caso di mezzi dispersivi infatti sia  $\varepsilon'$  che  $\sigma$  dipenderanno dalla frequenza e gli andamenti di  $k'$  e  $k''$  saranno molto più complicati. Ciononostante possiamo considerare il comportamento asintotico trovato valido in generale.

<sup>3</sup>Mentre il primo risultato si può ottenere facilmente osservando la (1.20) e sfruttando la (1.22), per il secondo risultato non è agevole usare l'espressione (1.21), è conveniente invece inserire l'espressione (1.20) in (1.16) ed ottenere la seguente espressione alternativa:

$$k'' = \frac{\omega\sqrt{\mu}}{\sqrt{\sqrt{2\varepsilon'}}} \frac{\varepsilon''}{\sqrt{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}}}}$$

Andando a sostituire la (1.22), si vede bene che per grandi valori di  $\omega$  si ha  $k'' \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}$

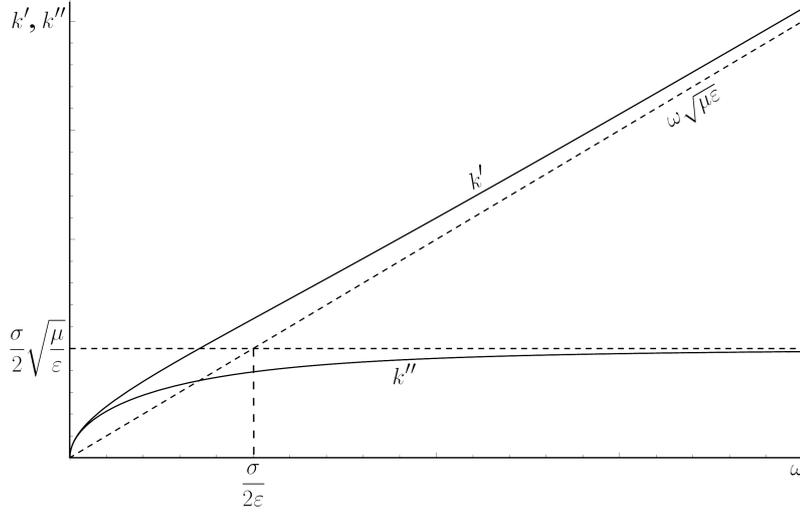


Figura 1.1: Andamento della parte reale e immaginaria del numero d'onda secondo le espressioni (1.20) e (1.21) nell'ipotesi in cui il mezzo sia non dispersivo.

Infatti, come è ben noto, ogni mezzo dispersivo tende ad avere caratteristiche costanti quando la pulsazione tende all'infinito, quindi ogni mezzo dispersivo può essere considerato non dispersivo nel limite in cui  $\omega \rightarrow \infty$ .

Ora che abbiamo chiarito la natura del numero d'onda  $k$  ed il suo legame con le caratteristiche del mezzo, possiamo andare a descrivere le caratteristiche del vettore d'onda  $\underline{k}$ , il quale sarà, in generale, un vettore complesso. Come è ben noto in un mezzo con perdite si ha in generale un'onda non uniforme, infatti, chiamando  $\underline{\beta}$  e  $\underline{\alpha}$  rispettivamente il vettore di fase ed il vettore di attenuazione dell'onda, si può scrivere:

$$\underline{k} = \underline{\beta} + i\underline{\alpha} = (\beta_x + i\alpha_x)\underline{x}_0 + (\beta_y + i\alpha_y)\underline{y}_0 \quad (1.23)$$

ovvero:

$$k_x = \beta \cos \phi' + i\alpha \cos \phi'' \quad (1.24)$$

$$k_y = \beta \sin \phi' + i\alpha \sin \phi'' \quad (1.25)$$

dove si è assunto che i vettori di fase e di attenuazione giacciono sul piano  $(x, y)$  e si sono indicati con  $\phi'$  e  $\phi''$  gli angoli che i vettori  $\underline{\beta}$  e  $\underline{\alpha}$  formano con l'asse  $x$ , rispettivamente. Possiamo allora andare ad imporre la condizione di separabilità (1.13), dividendo tra parte reale ed immaginaria:

$$\beta^2 - \alpha^2 = k'^2 - k''^2 = \text{Re}(k^2) \quad (1.26)$$

$$2\beta\alpha \cos \eta = 2k'k'' = \text{Im}(k^2) \quad (1.27)$$

dove si è posto  $\eta = \phi'' - \phi'$ . Tale formalismo viene a volte chiamato formalismo di Adler-Chu-Fano [2, 3]. L'equazione (1.27) ci dice immediatamente che in un mezzo con perdite deve risultare  $\eta \neq 0$ . In realtà la condizione posta su  $\eta$  è ancora più forte se si pensa che, per le ipotesi fatte sulle caratteristiche del mezzo, il secondo membro della (1.27) è puramente positivo, tenendo conto che  $\beta$  e  $\alpha$  sono le ampiezze di due vettori, e quindi intrinsecamente positive, questo comporta che sia:

$$\eta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.28)$$

In analogia con quanto fatto in precedenza, prendendo il quadrato di ambo i membri dell'equazione (1.27) e sfruttando la (1.26), si può scrivere:

$$\beta^4 - \operatorname{Re}(k^2)\beta^2 - \left[\frac{\operatorname{Im}(k^2)}{2 \cos \eta}\right]^2 = 0 \quad (1.29)$$

da cui risolvendo l'equazione, sfruttando l'espressione (1.26) e ricordando che  $\beta$  ed  $\alpha$  devono essere quantità reali e positive, si ottiene:

$$\beta^2 = \frac{\operatorname{Re}(k^2) + \sqrt{[\operatorname{Re}(k^2)]^2 + \left[\frac{\operatorname{Im}(k^2)}{\cos \eta}\right]^2}}{2} \quad (1.30)$$

$$\alpha^2 = \frac{-\operatorname{Re}(k^2) + \sqrt{[\operatorname{Re}(k^2)]^2 + \left[\frac{\operatorname{Im}(k^2)}{\cos \eta}\right]^2}}{2} \quad (1.31)$$

è facile dimostrare che la scelta della determinazione positiva delle radici quadrate è necessaria per garantire che i primi membri delle espressioni siano sempre positivi. Le espressioni (1.30) e (1.31) forniscono il legame tra le ampiezze dei vettori di fase e di attenuazione di un'onda e le caratteristiche del mezzo in cui questa si propaga. Vediamo che tali quantità sono fortemente influenzate dall'angolo  $\eta$ , ovvero dall'angolo compreso tra questi vettori. È facile rendersi conto che le relazioni (1.30) e (1.31) sono valide solo per  $\eta \neq \pi/2$ , ovvero solo per onde uniformi ed onde non uniformi in mezzi con perdite (tale rappresentazione non è permessa quindi solo nel caso di onde non uniformi in mezzi privi di perdite, quali, ad esempio, le onde evanescenti, superficiali o leaky). Si può notare inoltre che il parametro  $\eta$  viene considerato come un dato del problema, non dipendendo essenzialmente dalle proprietà del mezzo. Questa è ovviamente una scelta di rappresentazione, infatti nella determinazione dei parametri di un'onda è ovvio che ci siano dei parametri liberi, legati al tipo di eccitazione che genera l'onda. I parametri liberi in questo caso sono gli angoli che i vettori di fase e di attenuazione formano con gli assi e, di conseguenza, anche l'angolo tra essi compreso. Tali parametri dipendono dalle condizioni di eccitazione dell'onda, ovvero dai metodi usati per la sua generazione.

In quanto segue considereremo le proprietà delle onde piane in mezzi con perdite separando tra due casi:

- *Onde piane uniformi:*  $\eta = 0$
- *Onde piane non uniformi:*  $\eta \in (0, \frac{\pi}{2}]$

## 1.2 Formulazione con l'angolo complesso

La rappresentazione di un vettore complesso come sovrapposizione di due vettori reali del tipo (1.23), può essere molto comoda in quanto separa le proprietà di fase da quelle di attenuazione ed è in effetti molto usata in diverse applicazioni, come per esempio nell'ambito delle onde leaky, o nell'ambito delle microonde [2, 9]. Tuttavia, esistono applicazioni nelle quali tale formalismo non risulta appropriato. Nel caso specifico che si vuole qui considerare, lo sviluppo di onde piane in armoniche cilindriche richiede che il vettore di fase sia rappresentato come un unico vettore sul piano e non come sovrapposizione di due vettori. Il vettore complesso può sempre essere scritto, come il prodotto di un numero complesso  $k$  e di un vettore complesso unitario  $\underline{n}_0$ . Dove con 'vettore complesso unitario' si intende un vettore che soddisfi la relazione  $\underline{n}_0 \cdot \underline{n}_0 = 1$ . Tale vettore potrà essere rappresentato, sul piano (x,y), da un angolo complesso  $w$  e le componenti del vettore di propagazione si scriveranno come segue:

$$k_x = k \cos w = (k' + ik'') \cos(u + iv) \quad (1.32)$$

$$k_y = k \sin w = (k' + ik'') \sin(u + iv) \quad (1.33)$$

Si veda che in questo modo il vettore di propagazione è descritto sempre in funzione di quattro numeri reali. Si andrà ora a ricavare il legame che sussiste tra i parametri  $k', k'', u$  e  $v$  e i parametri  $\beta, \alpha, \phi'$  e  $\phi''$ . Tale legame è stato ricavato precedentemente in [3], tuttavia il legame lì ottenuto consiste di un'equazione risolvibile solo numericamente. Tale equazione peraltro non fornisce una soluzione univoca, ma un certo numero di soluzioni e la deduzione della soluzione corretta fra le molte possibili non è chiara. La natura di tale indeterminazione è legata al fatto che il legame tra le due rappresentazioni è stato ottenuto uguagliando i quadrati delle parti reali ed immaginarie delle diverse componenti, questo porta a diverse indeterminazioni sul segno. Come si vedrà, tali indeterminazioni possono essere del tutto eliminate facendo ricorso alle proprietà di polarizzazione dei vettori complessi.

Il numero complesso  $k$  coincide ovviamente con il numero d'onda. Ciò può essere facilmente dimostrato come segue. Si calcoli il quadrato del vettore  $\underline{k}$ , sfruttando le espressioni (1.32) e (1.33), ottenendo:

$$\underline{k} \cdot \underline{k} = k^2 (\cos^2 w + \sin^2 w) = k^2 = k'^2 - k''^2 + 2ik'k''$$

da cui, ricordando che  $\underline{k} \cdot \underline{k} = \omega^2 \mu \varepsilon$ , si trova:

$$k'^2 - k''^2 = \omega^2 \mu \varepsilon' \quad (1.34)$$

$$k'k'' = \frac{\omega^2 \mu \varepsilon''}{2} \quad (1.35)$$

come volevasi dimostrare.

Per quanto riguarda i parametri  $u$  e  $v$ , essi sono strettamente legati al tipo di polarizzazione del vettore complesso  $\underline{k}$ . Per legare le due formulazioni del vettore di propagazione, e in particolare per esprimere l'angolo complesso in funzione dei vettori di fase e di attenuazione, si deve quindi trovare il modo di estrarre le informazioni di polarizzazione di questo vettore nelle due rappresentazioni per poi ottenere la relazione cercata attraverso il loro confronto. Si deve quindi richiamare il concetto di vettori di polarizzazione di un vettore complesso. In generale, dato un vettore complesso  $\underline{a}$ , è possibile definire due vettori reali,  $\underline{p}$  e  $\underline{q}$ , che contengano tutte le informazioni di polarizzazione di  $\underline{a}$  [5]. Tali vettori sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$\underline{p} = \frac{\underline{a} \times \underline{a}^*}{\underline{a} \cdot \underline{a}^*} \quad (1.36)$$

$$\underline{q} = \frac{|\underline{a} \cdot \underline{a}|}{\underline{a} \cdot \underline{a}^*} \frac{\operatorname{Re}[\underline{a}/\sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}]}{|\operatorname{Re}[\underline{a}/\sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}]|} \quad (1.37)$$

Si procederà ora alla scrittura di questi vettori relativi al vettore di propagazione per i due formalismi usati, il formalismo di Adler-Chu-Fano ed il formalismo dell'angolo complesso. Si notino, come primo passo, le seguenti relazioni:

$$\underline{k} \cdot \underline{k}^* = \beta^2 + \alpha^2 \quad (1.38)$$

e:

$$\underline{k} \cdot \underline{k}^* = |k|^2 (|\cos w|^2 + |\sin w|^2) \quad (1.39)$$

la quale, ricordando le relazioni [10]:

$$|\cos w| = \sqrt{\cos^2 u + \sinh^2 v} \quad (1.40)$$

$$|\sin w| = \sqrt{\sin^2 u + \sinh^2 v} \quad (1.41)$$

diventa:

$$\underline{k} \cdot \underline{k}^* = |k|^2 (1 + 2 \sinh^2 w) = |k|^2 \cosh(2v) \quad (1.42)$$

Si consideri poi il seguente prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} \underline{k} \times \underline{k}^* &= (\underline{\beta} + i\underline{\alpha}) \times (\underline{\beta} - i\underline{\alpha}) = 2i\underline{\alpha} \times \underline{\beta} = \\ &= 2i\alpha\beta\underline{y}_0 (\cos \phi' \sin \phi'' - \sin \phi' \cos \phi'') = 2i\alpha\beta\underline{y}_0 \sin(\phi'' - \phi') \end{aligned} \quad (1.43)$$

e:

$$\underline{k} \times \underline{k}^* = |k|^2 \underline{y}_0 (\sin w \cos^* w - \cos w \sin^* w) \quad (1.44)$$

ricordando che  $\cos^* w = \cos w^*$  e  $\sin^* w = \sin w^*$ , si ha:

$$\underline{k} \times \underline{k}^* = |k|^2 \underline{y}_0 \sin(w - w^*) = i|k|^2 \underline{y}_0 \sinh(2v) \quad (1.45)$$

Inserendo le espressioni (1.38) e (1.43) in (1.36), si ottiene:

$$\underline{p} = y_0 \frac{2\alpha\beta}{\beta^2 + \alpha^2} \sin(\phi'' - \phi') \quad (1.46)$$

analogamente inserendo le espressioni (1.42) e (1.45) in (1.36), si ottiene:

$$\underline{p} = y_0 \tanh(2v) \quad (1.47)$$

confrontando le espressioni (1.46) e (1.47) è facile trovare l'espressione cercata per il parametro  $v$ :

$$v = \frac{1}{2} \tanh^{-1} \left[ \frac{2\alpha\beta}{\beta^2 + \alpha^2} \sin \eta \right] \quad (1.48)$$

Nel caso in cui sia  $\eta \neq \pi/2$ , potremo moltiplicare e dividere l'argomento della tangente iperbolica inversa per  $\cos(\eta)$ , ottenendo:

$$v = \frac{1}{2} \tanh^{-1} \left[ \frac{\text{Im}(k^2)}{\text{Re}(k^2)} \tan \eta \right] \quad (1.49)$$

In questo modo si è espresso l'angolo  $v$ , in funzione del rapporto tra parte immaginaria e reale di  $k^2$ , i.e., la tangente di perdita del mezzo, e della tangente dell'angolo  $\eta$ , parametro certamente legato al grado di non uniformità dell'onda visto che l'onda si considera uniforme quando  $\eta = 0$ . Questo è particolarmente notevole e ci dice che il parametro  $v$  tiene conto, in modo complessivo, della non uniformità dell'onda. Si può definire, infatti, il grado di inomogeneità dell'onda (in inglese: degree of inhomogeneity; secondo la nostra terminologia avrebbe però più senso chiamarlo grado di non uniformità) la quantità [11]:

$$\varepsilon_q = \tanh |v|$$

Per ottenere informazioni sul parametro  $u$  si dovrà andare ad esplicitare l'espressione (1.37) nei due formalismi. Si consideri per prima la seguente espressione:

$$\text{Re} \left[ \frac{\underline{k}}{\sqrt{\underline{k} \cdot \underline{k}}} \right] = \text{Re} \left[ \frac{\underline{\beta} + i\underline{\alpha}}{\sqrt{k^2}} \right] \quad (1.50)$$

dove si è tenuto conto del fatto che:

$$\underline{k} \cdot \underline{k} = k^2 \quad (1.51)$$

a questo punto si deve tenere conto del fatto che la radice quadrata a denominatore avrà due determinazioni possibili. Supponiamo quindi di essere in presenza di mezzi destrorsi, nei quali si considera quindi un indice di rifrazione positivo e quindi si sceglie sempre la determinazione positiva della radice quadrata di  $k^2$ . Si potrà quindi scrivere:

$$\text{Re} \left[ \frac{\underline{k}}{\sqrt{\underline{k} \cdot \underline{k}}} \right] = \text{Re} \left[ \frac{\underline{\beta} + i\underline{\alpha}}{k} \right] = \text{Re} \left[ \frac{\underline{\beta} + i\underline{\alpha}}{|k|} e^{-i\phi_k} \right] \quad (1.52)$$

dove si è definito l'argomento del numero complesso  $k$ :

$$\phi_k = \arg[k] = \tan^{-1} \left[ \frac{k''}{k'} \right] \quad (1.53)$$

il quale, per l'ipotesi fatta di mezzi destrorsi, dovrà trovarsi sempre nel primo quadrante del piano complesso di  $k$ . Dall'espressione (1.52) si vede facilmente che:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\underline{k}}{\sqrt{\underline{k} \cdot \underline{k}}} \right] = \frac{\underline{\beta} \cos \phi_k + \underline{\alpha} \sin \phi_k}{|k|} = \frac{\cos \phi_k}{k'} \frac{k' \underline{\beta} + k'' \underline{\alpha}}{|k|} \quad (1.54)$$

da cui si può anche vedere che risulta:

$$\left| \operatorname{Re} \left[ \frac{\underline{k}}{\sqrt{\underline{k} \cdot \underline{k}}} \right] \right| = \frac{\cos \phi_k}{k'} \frac{\sqrt{k'^2 \beta^2 + k''^2 \alpha^2 + 2k'k'' \alpha \beta \cos(\phi'' - \phi')}}{|k|} \quad (1.55)$$

da cui, sfruttando la relazione (1.27), si può scrivere:

$$\left| \operatorname{Re} \left[ \frac{\underline{k}}{\sqrt{\underline{k} \cdot \underline{k}}} \right] \right| = \frac{\cos \phi_k}{k'} \frac{\sqrt{k'^2 \beta^2 + k''^2 \alpha^2 + 2(k'k'')^2}}{|k|} \quad (1.56)$$

inserendo le espressioni (1.51), (1.54) e (1.56) in (1.37), si ottiene:

$$\underline{q} = \frac{|k^2|}{|k|^2} \frac{k' \underline{\beta} + k'' \underline{\alpha}}{\sqrt{k'^2 \beta^2 + k''^2 \alpha^2 + 2(k'k'')^2}} \quad (1.57)$$

si consideri ora il formalismo dell'angolo complesso, si potrà scrivere la seguente relazione:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\underline{k}}{\sqrt{\underline{k} \cdot \underline{k}}} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{k(\cos w\underline{x}_0 + \sin wy_0)}{\sqrt{k^2}} \right] = \operatorname{Re} [\cos w\underline{x}_0 + \sin wy_0] \quad (1.58)$$

sfruttando le espressioni del seno e coseno complesso in funzione delle parti reali e immaginaria degli argomenti, si potrà scrivere [10]:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\underline{k}}{\sqrt{\underline{k} \cdot \underline{k}}} \right] = \cosh v [\cos u\underline{x}_0 + \sin uy_0] \quad (1.59)$$

da cui si vede subito che:

$$\left| \operatorname{Re} \left[ \frac{\underline{k}}{\sqrt{\underline{k} \cdot \underline{k}}} \right] \right| = \cosh v \quad (1.60)$$

inserendo le espressioni (1.59) e (1.60) in (1.37), si ottiene:

$$\underline{q} = \frac{|k^2|}{|k|^2} [\cos u\underline{x}_0 + \sin uy_0] \quad (1.61)$$

confrontando ora le espressioni (1.57) e (1.61), si trovano immediatamente le seguenti condizioni:

$$\cos u = \frac{k' \beta \cos \phi' + k'' \alpha \cos \phi''}{\sqrt{k'^2 \beta^2 + k''^2 \alpha^2 + 2(k' k'')^2}} \quad (1.62)$$

$$\sin u = \frac{k' \beta \sin \phi' + k'' \alpha \sin \phi''}{\sqrt{k'^2 \beta^2 + k''^2 \alpha^2 + 2(k' k'')^2}} \quad (1.63)$$

va notato che queste due relazioni sono entrambe necessarie quando si vuole calcolare il valore di  $u$ . Infatti, quando si invertono le funzioni trigonometriche si hanno delle funzioni a dominio limitato legato a quale intervallo di monotonia si scelga per la funzione da invertire. Nel caso di interesse, in cui si considera un'onda propagantesi nel verso positivo delle  $x$ , si avranno i due angoli  $\phi', \phi'' \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Questo vuol dire che, mentre la componente lungo  $y$  del vettore di propagazione potrà assumere valori sia positivi che negativi, la componente lungo  $x$  potrà assumere solo valori positivi. Per questo motivo è preferibile usare la seconda relazione (1.63) in modo da tenere conto automaticamente del segno. Se si usasse invece la relazione (1.62) si dovrebbe inserire la doppia determinazione  $\pm$ .

Per quanto detto il parametro  $u$  si potrà ottenere dalla seguente relazione:

$$u = \sin^{-1} \left[ \frac{k' \beta \sin \phi' + k'' \alpha \sin \phi''}{\sqrt{k'^2 \beta^2 + k''^2 \alpha^2 + 2(k' k'')^2}} \right] \quad (1.64)$$

ribadiamo che tale rappresentazione è valida nel caso qui in considerazione di propagazione lungo le  $x$  positive. Le relazioni generali di cui si deve tenere conto sono le (1.62) e (1.63).

Le equazioni (1.49), (1.62), (1.63), e (1.64) mostrano il legame tra i parametri  $\beta, \alpha, \phi'$  e  $\phi''$  ed i parametri  $u$  e  $v$ . In modo del tutto analogo a quanto ora fatto è possibile trovare i legami inversi. Può essere interessante vedere il significato assunto dai parametri  $k', k'', u$  e  $v$  in un caso particolare. Si supponga per esempio che l'onda che si propaga nel mezzo con perdite sia uniforme, questo vuol dire che il vettore di fase ed il vettore di attenuazione saranno paralleli, ovvero che  $\phi' = \phi''$ . Imponendo questa condizione nelle equazioni (1.49) e (1.64), otteniamo i seguenti valori:

$$k' = \beta \quad (1.65)$$

$$k'' = \alpha \quad (1.66)$$

$$u = \phi' + 2n\pi \quad (1.67)$$

$$v = 0 \quad (1.68)$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$

Si vede quindi che  $k', k''$  e  $u$  vanno a coincidere rispettivamente con  $\beta, \alpha$  e  $\phi'$ , mentre  $v$  assume un valore nullo. In sostanza le equazioni (1.32) e (1.33) si riducono all'espressione canonica e i due formalismi risultano del tutto coincidenti. Vediamo inoltre come  $v$  risulti nullo, essendo l'onda in questione uniforme, il che conferma il legame da noi precedentemente sottolineato tra l'angolo  $v$  e il grado di non uniformità dell'onda.

### 1.3 Onde piane e uniformi

Si consideri un'onda piana che si propaghi in un mezzo con perdite ed avente i piani equifase ed equiampiezza coincidenti, ovvero avente i vettori di fase e di attenuazione paralleli ( $\eta = 0$ ). In questo caso il vettore di propagazione  $\underline{k}$  si potrà scrivere come segue:

$$\underline{k} = (\beta + i\alpha)\underline{k}_0 \quad (1.69)$$

dove si è indicato  $\underline{k}_0$  il versore reale che rappresenta la direzione di propagazione dell'onda. Dalle espressioni (1.30) e (1.31), si può facilmente vedere che le ampiezze  $\beta$  ed  $\alpha$  vanno a coincidere rispettivamente con la parte reale ed immaginaria del numero d'onda  $k$  (ciò può essere dimostrato anche più agevolmente inserendo l'espressione (1.69) nella condizione di separabilità (1.13)). Sfruttando le prime due equazioni di Maxwell è facile vedere che, come succede nei mezzi privi di perdite, valgono le seguenti uguaglianze:

$$\underline{k}_0 \cdot \underline{E} = 0 \quad (1.70)$$

$$\underline{k}_0 \cdot \underline{H} = 0 \quad (1.71)$$

Sfruttando la terza equazione di Maxwell invece si può trovare il seguente legame tra campo elettrico e campo magnetico:

$$\underline{H} = \frac{k}{\omega\mu} \underline{k}_0 \times \underline{E} = \frac{1}{\zeta} \underline{k}_0 \times \underline{E} \quad (1.72)$$

dove si è definita l'impedenza del mezzo con perdite come segue:

$$\zeta = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon' + i\epsilon''}} \quad (1.73)$$

vediamo che l'impedenza del mezzo sarà sempre una quantità complessa e si definisce come naturale estensione del caso di mezzi privi di perdite.

Fino ad ora abbiamo visto come il caso di onde piane uniformi in mezzi con perdite sia identico al caso analogo in mezzi privi di perdite, salvo la natura complessa delle caratteristiche del mezzo. Ora vedremo come invece le perdite influenzino le caratteristiche di polarizzazione dell'onda. Per fare ciò esplicitiamo la parte reale ed immaginaria dei vettori di polarizzazione del campo elettrico e del campo magnetico:

$$\underline{E}_0 = \underline{E}_{0R} + i\underline{E}_{0I} \quad (1.74)$$

$$\underline{H}_0 = \underline{H}_{0R} + i\underline{H}_{0I} \quad (1.75)$$

Per studiare la polarizzazione dell'onda dobbiamo andare a scrivere i campi nel dominio del tempo, supponiamo per semplicità che l'onda si propaghi lungo l'asse  $x$ , ovvero che si abbia  $\underline{k}_0 = \underline{x}_0$ :

$$\tilde{\underline{E}}(\underline{r}, t) = e^{-k''x} \text{Re} \left[ \underline{E}_0 e^{i(k'x - \omega t)} \right] \quad (1.76)$$

$$\tilde{\underline{H}}(\underline{r}, t) = e^{-k''x} \text{Re} \left[ \frac{1}{\zeta} \underline{x}_0 \times \underline{E}_0 e^{i(k'x - \omega t)} \right] \quad (1.77)$$

scrivendo l'impedenza del mezzo in modulo e fase,  $\zeta = |\zeta|e^{i\phi_\zeta}$  (è bene notare che per le ipotesi fatte sul mezzo si ha  $\phi_\zeta \in [0, -\pi/4]$ , come si vede dall'espressione (1.73)), e sfruttando le espressioni (1.74) e (1.75), si potrà scrivere:

$$\tilde{\underline{E}}(r, t) = e^{-k''x} [\underline{E}_{0R} \cos(k'x - \omega t) - \underline{E}_{0I} \sin(k'x - \omega t)] \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{H}}(r, t) = \frac{e^{-k''x}}{|\zeta|} [\underline{x}_0 \times \underline{E}_{0R} \cos(k'x - \omega t - \phi_\zeta) \\ - \underline{x}_0 \times \underline{E}_{0I} \sin(k'x - \omega t - \phi_\zeta)] \end{aligned} \quad (1.79)$$

Le espressioni (1.78) e (1.79) ci permettono di fare alcune considerazioni sulla polarizzazione dell'onda. Vediamo che, scelti due vettori arbitrari per  $\underline{E}_{0R}$  e  $\underline{E}_{0I}$ , il campo elettrico risulta polarizzato ellitticamente, il campo magnetico sarà anch'esso polarizzato ellitticamente, su un'ellisse ortogonale a quella del campo elettrico e con la stessa eccentricità<sup>4</sup>. Vediamo quindi che si ottiene di nuovo un risultato del tutto analogo a quello che si aveva nel caso di mezzi privi di perdite. La differenza principale la riscontriamo invece nella presenza dello sfasamento  $\phi_\zeta$ , questo rende le due polarizzazioni sfasate temporalmente. Nel caso di mezzi privi di perdite infatti il vettore di campo elettrico e magnetico erano tra loro in fase, nel senso che mantenevano un angolo fisso, pari a  $90^\circ$ , tra di loro. Nel caso siano presenti delle perdite nel mezzo ciò non risulta più vero, ma quando, per esempio, il vettore di campo elettrico punta sul suo asse maggiore, l'altro punta ad un angolo pari a  $\phi_\zeta$  di distanza dal proprio. La situazione è illustrata in Figura 1.2 nel caso di vettori  $\underline{E}_{0R}$  e  $\underline{E}_{0I}$  disposti genericamente sul piano  $(y, z)$ , mettendo a confronto i due casi con e senza perdite.

È opportuno a questo punto andare a vedere cosa succede nel caso particolare di polarizzazione lineare:

$$\tilde{\underline{E}}(r, t) = e^{-k''x} \underline{E}_0 \cos(k'x - \omega t) \quad (1.80)$$

$$\tilde{\underline{H}}(r, t) = \frac{e^{-k''x}}{|\zeta|} \underline{x}_0 \times \underline{E}_0 \cos(k'x - \omega t - \phi_\zeta) \quad (1.81)$$

in questo caso vediamo che i due vettori risultano ortogonali tra loro, ma ancora sfasati nel tempo, il che significa semplicemente che campo elettrico e magnetico non saranno mai contemporaneamente nulli, o contemporaneamente uguali al rispettivo valore massimo.

Ora che abbiamo studiato la polarizzazione di un'onda piana e uniforme, andiamo a fare alcune considerazioni energetiche. Per prima cosa andiamo a

<sup>4</sup>ricordiamo che l'eccentricità di un'ellisse è data dal rapporto tra la distanza tra i fuochi e l'asse maggiore. Ottenendo l'equazione canonica dell'ellisse di polarizzazione a partire dall'espressione (1.78), nell'ipotesi che i due vettori  $\underline{E}_{0R}$  e  $\underline{E}_{0I}$  siano ortogonali e paralleli rispettivamente agli assi  $y$  e  $z$ , si ottiene:

$$e^{-2k''x} \left[ \frac{\tilde{E}_y^2}{E_{0R}^2} + \frac{\tilde{E}_z^2}{E_{0I}^2} \right] = 1$$

scrivendo la stessa espressione per il campo magnetico, ci si può facilmente rendere conto che l'eccentricità nei due casi risulta la stessa.

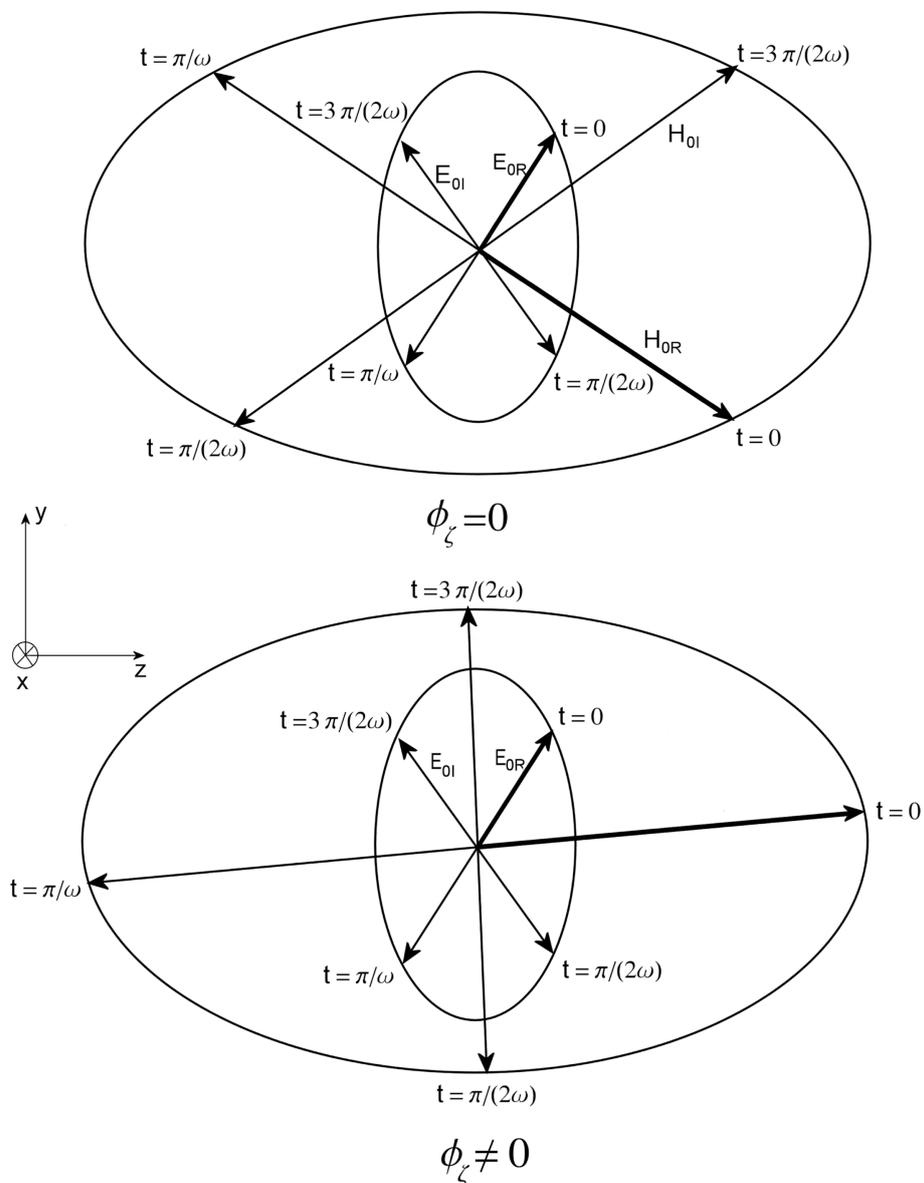


Figura 1.2: Polarizzazione ellittica di un'onda piana. L'ellisse più interna rappresenta il campo elettrico, quella più esterna il campo magnetico. Si vede che i due campi sono in fase nel caso privo di perdite ( $\phi_\zeta = 0$ ) e fuori fase nel caso di mezzo con perdite ( $\phi_\zeta \neq 0$ ), in quest'ultimo vediamo che il vettore di campo magnetico in  $t = 0$  non coincide più con il vettore  $\underline{H}_{0R}$ .

calcolare il vettore di Poynting nel dominio della frequenza e del tempo per la generica onda piana polarizzata ellitticamente:

$$\underline{\Pi} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{1}{2} \zeta (\underline{H} \times \underline{k}_0) \times \underline{H}^* = \frac{1}{2} \zeta k_0 e^{-2\alpha \cdot r} (|\underline{H}_{0R}|^2 + |\underline{H}_{0I}|^2) \quad (1.82)$$

Vediamo quindi che il vettore di Poynting nel dominio della frequenza risulta la somma algebrica dei vettori di Poynting delle singole onde in polarizzazione lineare che formano l'onda considerata. Se invece consideriamo il vettore di Poynting istantaneo:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\Pi}} = \tilde{\underline{E}} \times \tilde{\underline{H}} = k_0 \frac{e^{-2\alpha \cdot r}}{|\zeta|} & [ |\underline{E}_{0R}|^2 \cos(\underline{\beta} \cdot \underline{r} - \omega t) \cos(\underline{\beta} \cdot \underline{r} - \omega t - \phi_\zeta) + \\ & + |\underline{E}_{0I}|^2 \sin(\underline{\beta} \cdot \underline{r} - \omega t) \sin(\underline{\beta} \cdot \underline{r} - \omega t - \phi_\zeta) + \\ & - \underline{E}_{0R} \cdot \underline{E}_{0I} \sin(2\underline{\beta} \cdot \underline{r} - 2\omega t - \phi_\zeta) ] \quad (1.83) \end{aligned}$$

Si vede che in questo caso il termine misto risulta nullo solo se i due vettori che formano la polarizzazione ellittica risultano puramente ortogonali. Più in generale possiamo dire che la potenza istantanea della sovrapposizione di due onde in polarizzazione lineare è la semplice somma delle potenze delle singole onde solo se i vettori di queste risultano tra loro ortogonali.

Riguardo alla sovrapposizione di due onde piane e uniformi in un mezzo con perdite c'è un altro caso che può risultare di grande interesse. Si consideri la sovrapposizione di due onde che si propagano in verso opposto:

$$\underline{E} = \underline{E}_0^+ e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \underline{E}_0^- e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (1.84)$$

Andiamo a calcolare il vettore di Poynting nel dominio della frequenza:

$$\underline{\Pi} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = k_0 \left[ \frac{\underline{E}_0^+ \cdot \underline{E}_0^{+*} e^{-2\alpha \cdot r} + \underline{E}_0^- \cdot \underline{E}_0^{-*} e^{2\alpha \cdot r} + 2i \operatorname{Im}(\underline{E}_0^- \cdot \underline{E}_0^{+*} e^{-2i\beta \cdot r})}{2\zeta^*} \right] \quad (1.85)$$

vediamo che il termine misto contribuisce sia alla potenza reattiva, come nel caso di mezzi privi di perdite, che alla potenza reale (a causa del termine complesso  $\zeta^*$ ). Le due onde risultano ortogonali rispetto alla potenza complessa solo se si verifica la condizione:

$$\underline{E}_0^- \cdot \underline{E}_0^{+*} = 0 \quad (1.86)$$

per interpretare correttamente questa condizione andiamo a scegliere una polarizzazione ellittica semplice per  $\underline{E}_0^-$ :

$$\underline{E}_0^- = y_0 + ibz_0 \quad (1.87)$$

la quale corrisponde ad un'ellisse di polarizzazione avente assi principali coincidenti con gli assi  $y$  e  $z$ . Andiamo a vedere la polarizzazione dell'onda positiva tale da renderla ortogonale all'onda negativa:

$$E_{0y}^+ + ibE_{0z}^+ = 0 \quad (1.88)$$

da cui si ottiene:

$$\frac{E_{0z}^+}{E_{0y}^+} = -i\frac{1}{b} \quad (1.89)$$

ovvero, anche l'onda positiva avrà gli assi principali in corrispondenza degli assi  $y$  e  $z$ , l'asse maggiore e minore saranno invertiti rispetto a quelli dell'onda negativa. È bene notare che se tale condizione è soddisfatta e risulta inoltre che  $\underline{E}_0^+ \cdot \underline{E}_0^{+*} = \underline{E}_0^- \cdot \underline{E}_0^{-*}$ , ovvero l'ampiezza degli assi delle due ellissi coincidono, allora la potenza complessa dell'onda risultante diventa identicamente nulla, ovvero le due onde possono essere considerate uguali ed opposte e si annullano a vicenda. Si può dimostrare facilmente che la stessa condizione si trova anche riguardo alla potenza istantanea.

## 1.4 Onde piane e non uniformi

Si consideri ora il caso di un'onda piana avente i piani equiampiezza non coincidenti con i piani equifase che si propaghi in un mezzo con perdite. Il vettore di propagazione potrà essere scritto come segue:

$$\underline{k} = \underline{\beta} + i\underline{\alpha} \quad (1.90)$$

Dalla prima equazione di Maxwell otteniamo la seguente condizione:

$$\underline{k} \cdot \underline{E} = \underline{\beta} \cdot \underline{E} + i\underline{\alpha} \cdot \underline{E} = 0 \quad (1.91)$$

Nel caso in cui il campo elettrico sia polarizzato linearmente nella direzione ortogonale al piano che contiene il vettore  $\underline{k}$  tale condizione sarà sicuramente verificata, parleremo in questo caso di onda in polarizzazione TE, o semplicemente E. Nel caso invece in cui il campo elettrico giaccia sul piano contenente il vettore di propagazione, ed il campo magnetico sia polarizzato linearmente nella direzione ortogonale a tale piano, parleremo di onda in polarizzazione TM, o semplicemente H. Le conseguenze della (1.91) sulla polarizzazione del campo magnetico in polarizzazione TE e del campo elettrico in polarizzazione TM, saranno studiate nei seguenti paragrafi. Si procederà ora a fare delle considerazioni energetiche sulle onde piane non uniformi.

Si consideri il vettore di Poynting di un'onda in polarizzazione TE:

$$\underline{\Pi}_{TE} = \frac{1}{2}\underline{E} \times \left( \frac{i\underline{k} \times \underline{E}}{i\omega\mu} \right)^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{\underline{k}^* (\underline{E} \cdot \underline{E}^*)}{\omega\mu} - \frac{(\underline{E} \cdot \underline{k}^*) \underline{E}^*}{\omega\mu} \right] \quad (1.92)$$

dove si è sfruttata l'identità vettoriale:  $\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B}(\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{C}(\underline{A} \cdot \underline{B})$ . Sfruttando l'espressione (1.91), la (1.92) può essere riscritta come segue:

$$\underline{\Pi}_{TE} = (\underline{\beta} - i\underline{\alpha}) \frac{\underline{E} \cdot \underline{E}^*}{2\omega\mu} \quad (1.93)$$

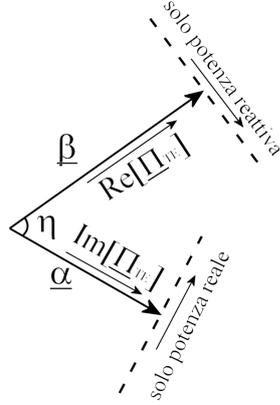


Figura 1.3: Rappresentazione del vettore d'onda complesso, con specificate direzioni e versi delle parti reale ed immaginaria del vettore di Poynting, della potenza reale e della potenza reattiva nel caso di un'onda in polarizzazione TM.

Tale espressione ci permette di chiarire quale siano le direzioni nelle quali si propaga solo potenza reale o solo potenza reattiva. Vediamo infatti che, sul piano contenente il vettore di propagazione, nella direzione ortogonale al vettore di attenuazione si avrà solo potenza reale, mentre nella direzione ortogonale al vettore di fase si avrà solo potenza reattiva, ovvero, in altre parole, nei piani equiampiezza si propaga solo potenza reale, nei piani equifase solo potenza reattiva. Si veda in proposito la Figura 1.3. È bene notare che nel caso di un mezzo privo di perdite un'onda non uniforme ha il vettore di fase ed il vettore di attenuazione ortogonali tra loro, quindi il vettore di fase torna a coincidere con la direzione di propagazione della potenza puramente reale e quello di attenuazione con la direzione della potenza puramente reattiva. Se si fa lo stesso ragionamento con il caso di un'onda piana e uniforme si può vedere che le cose non tornano, infatti andando a rendere nullo l'angolo tra vettore di fase e di attenuazione vediamo che le direzioni di propagazione della potenza non vanno a coincidere con quella del vettore di propagazione. Questo è dovuto al fatto che onde piane uniformi e non sono fenomeni fisici profondamente differenti, essendo l'una descritta da un vettore reale e l'altra da un vettore complesso.

Si consideri ora il vettore di Poynting nel caso di un'onda in polarizzazione TM:

$$\underline{\Pi}_{TM} = \frac{1}{2} \left( \frac{i\mathbf{k} \times \underline{\mathbf{H}}}{-i\omega\epsilon_c} \right) \times \underline{\mathbf{H}}^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mathbf{k}(\underline{\mathbf{H}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^*)}{\omega\epsilon_c} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{H}}^*) \underline{\mathbf{H}}}{\omega\epsilon_c} \right] \quad (1.94)$$

Ricordando ora che la divergenza del campo magnetico in un mezzo lineare, omogeneo ed isotropo è sempre nulla, potremo scrivere:

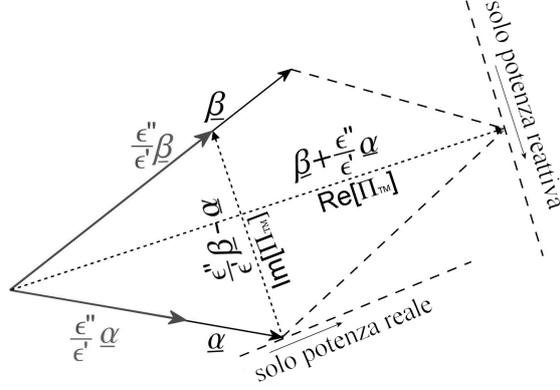


Figura 1.4: Rappresentazione del vettore d'onda complesso, con specificate direzioni e versi delle parti reale ed immaginaria del vettore di Poynting, della potenza reale e della potenza reattiva nel caso di un'onda in polarizzazione TM.

$$\underline{\Pi}_{TM} = \frac{\underline{\beta} + i\underline{\alpha}}{\epsilon' + i\epsilon''} \frac{(\underline{H} \cdot \underline{H}^*)}{\omega} \quad (1.95)$$

Si vede subito che in questo caso è meno banale la determinazione della direzione di propagazione di potenza reale e reattiva, e vedremo che queste sono in effetti poco intuitive. Consideriamo il fattore moltiplicativo complesso in (1.95):

$$\frac{\underline{\beta} + i\underline{\alpha}}{\epsilon' + i\epsilon''} = \frac{(\underline{\beta} + i\underline{\alpha})(\epsilon' - i\epsilon'')}{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} = \frac{\epsilon'}{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} \left[ \left( \underline{\beta} + \frac{\epsilon''}{\epsilon'}\underline{\alpha} \right) + i \left( \underline{\alpha} - \frac{\epsilon''}{\epsilon'}\underline{\beta} \right) \right] \quad (1.96)$$

Tale espressione ci dice quali sono le direzioni ed i versi della parte reale e della parte immaginaria del vettore di Poynting, della potenza reale e della potenza immaginaria. Vediamo che la potenza puramente reale si propaga nella direzione contenuta dal piano individuato dal vettore di propagazione ed ortogonale al vettore  $\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\underline{\beta} - \underline{\alpha}$ . Tali direzioni sono mostrate in Figura 1.4. È interessante notare come il flusso di potenza reale in questo caso si possa scostare anche di molto dalla direzione del vettore di fase, al limite può addirittura essere ortogonale ad essa. Vediamo che tale direzione infatti è governata da un gran numero di parametri, quali le ampiezze dei vettori di fase e di attenuazione, l'angolo tra essi e la tangente di perdita del mezzo in cui si propaga l'onda. Per questo motivo è bene avere la massima cura nel fare considerazioni energetiche nel caso di un'onda TM in un mezzo con perdite.

## 1.5 Problemi all'interfaccia tra mezzi con perdite

Nei precedenti paragrafi abbiamo presentato le principali proprietà di un'onda elettromagnetica che si propaga in un mezzo che presenti perdite. In questo paragrafo studieremo cosa succede all'interfaccia tra due mezzi con perdite, nel caso più generale in cui l'onda incidente possa essere non uniforme. Il caso di onda incidente uniforme infatti risulta particolarmente semplice da studiare, essendo una estensione del tutto naturale di quel che succede all'interfaccia dielettrico-conduttore, caso canonico ampiamente studiato in letterature [1, 12, 13].

### 1.5.1 Angoli dei vettori di propagazione dell'onda incidente, riflessa e trasmessa

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano  $(x, y, z)$ , il semi-spazio  $x < 0$  sia riempito da un mezzo lineare, isotropo, e omogeneo, ma in generale dissipativo, avente costanti elettromagnetiche del tipo:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon'_1 + i\varepsilon''_1 \\ \mu_1 = \mu'_1 + i\mu''_1 \end{cases} \quad (1.97)$$

con  $\varepsilon'_1, \varepsilon''_1, \mu'_1$  e  $\mu''_1 \in \mathbb{R}$ . In particolare si sono considerate le perdite di natura dielettrica, dovute alla polarizzazione del materiale, e le perdite di natura conduttiva, legate alla conducibilità elettrica  $\sigma$ , entrambe comprese nel parametro  $\varepsilon''_1$ , che possiamo definire come segue:

$$\varepsilon''_1 = \varepsilon_{p1} + \frac{\sigma_1}{\omega} \quad (1.98)$$

dove  $\varepsilon_{p1}$  è la parte immaginaria della permittività dovuta alla polarizzazione elettrica del materiale. Il semi-spazio  $x > 0$  sia invece riempito da un mezzo, anch'esso in generale lineare, isotropo e omogeneo, ma in generale dissipativo, ma avente costanti elettromagnetiche pari a:

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = \varepsilon'_2 + i\varepsilon''_2 \\ \mu_2 = \mu'_2 + i\mu''_2 \end{cases} \quad (1.99)$$

In questo modo il piano  $(y, z)$  per  $x = 0$  sarà un'interfaccia tra due mezzi con perdite.

Si consideri un'onda elettromagnetica proveniente dal semispazio  $x < 0$ , avente il vettore di propagazione sul piano  $(x, z)$  e che incida sul piano  $x = 0$ . Tale onda potrà essere caratterizzata dalla disturbanza  $V(\underline{r})$ , la quale assumerà il ruolo del campo elettrico diretto lungo la direzione  $y$  nel caso di polarizzazione  $E$  o il ruolo del campo magnetico diretto lungo  $y$  nel caso di polarizzazione  $H$ . La disturbanza potrà essere scritta nel dominio della frequenza, assumendo una dipendenza dal tempo del tipo  $e^{-i\omega t}$ , come segue:

$$V_i(\underline{r}) = V_{0i} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \underline{r}} = V_0 e^{i(k_{ix}x + k_{iz}z)} \quad (1.100)$$

dove il vettore di propagazione  $\underline{k}_i$  dovrà essere complesso a causa delle perdite del materiale. Come si è visto nella sezione 1 il vettore di propagazione può essere scritto come somma complessa di un vettore di fase e di un vettore di propagazione, ovvero come:

$$\underline{k}_i = \underline{\beta}_i + i\underline{\alpha}_i = \underline{x}_0(\beta_{ix} + i\alpha_{ix}) + \underline{z}_0(\beta_{iz} + i\alpha_{iz}) \quad (1.101)$$

oppure in funzione di un angolo di incidenza complesso  $w = u + iv$ , come segue:

$$\underline{k}_i = k_1(\cos w_i \underline{x}_0 + \sin w_i \underline{z}_0) \quad (1.102)$$

Per ottenere le espressioni del campo riflesso e trasmesso sull'interfaccia dovremo imporre le condizioni di continuità sull'interfaccia come si usa fare nel caso di mezzi privi di perdite. In quel caso si usa l'espressione del vettore di propagazione scritto rispetto all'angolo di incidenza, la cui espressione nel caso con perdite coincide con la (1.102). Usando tale espressione anche nel caso di mezzi con perdite non si giunge però a dei risultati di facile interpretazione, infatti imponendo la continuità della componente tangenziale del vettore di propagazione si arriverebbe ad un'equazione in cui si uguagliano due seni complessi, dalla quale non è semplice trovare la relazione tra l'angolo dell'onda incidente e gli angoli delle onde riflessa e trasmessa. Tale tentativo è stato fatto in letteratura, giungendo a un sistema di equazioni trascendenti risolubili solo numericamente [14]. Nel caso di mezzi con perdite è più semplice imporre le condizioni sul vettore di propagazione scritto nella forma (1.101). I risultati, che si ottengono mediante questo formalismo, sono stati presentati per la prima volta in [4] e successivamente, in una forma corretta, in [3]. Procederemo ora seguendo tali lavori. Le componenti dei vettori  $\underline{\beta}_i$  e  $\underline{\alpha}_i$  si possono scrivere in funzione degli angoli di incidenza del vettore di fase e del vettore di attenuazione:

$$\underline{\beta}_i = \beta_i(\cos \xi_i \underline{x}_0 + \sin \xi_i \underline{z}_0) \quad (1.103)$$

$$\underline{\alpha}_i = \alpha_i(\cos \zeta_i \underline{x}_0 + \sin \zeta_i \underline{z}_0)$$

dove  $\xi_i$  e  $\zeta_i$  sono gli angoli che il vettore di fase ed il vettore di attenuazione formano rispettivamente con l'asse delle  $x$ . Le costanti  $\beta_i$  e  $\alpha_i$  sono legate ai parametri del mezzo ed all'angolo che formano i vettori di fase e di attenuazione tra loro, ovvero  $\eta_i = \zeta_i - \xi_i$ , si veda la Figura 1.5, tramite le espressioni (1.30) e (1.31).

Ora che abbiamo completamente definito i parametri che descrivono l'onda incidente possiamo scrivere le espressioni generali delle onde riflesse e trasmesse:

$$V_r(\underline{r}) = V_{0r} e^{i\underline{k}_r \cdot \underline{r}} \quad (1.104)$$

$$V_t(\underline{r}) = V_{0t} e^{i\underline{k}_t \cdot \underline{r}} \quad (1.105)$$

dove si ha:

$$\underline{k}_r = \underline{\beta}_r + i\underline{\alpha}_r = \underline{x}_0(\beta_{rx} + i\alpha_{rx}) + \underline{z}_0(\beta_{rz} + i\alpha_{rz}) \quad (1.106)$$

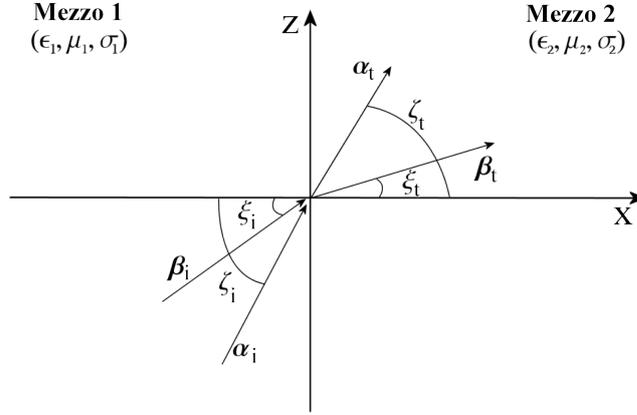


Figura 1.5: Vettori di fase e di attenuazione delle onde incidente, riflessa e trasmessa, all'interfaccia tra i due mezzi

e:

$$\underline{k}_t = \underline{\beta}_t + i\alpha_t = \underline{x}_0(\beta_{tx} + i\alpha_{tx}) + \underline{z}_0(\beta_{tz} + i\alpha_{tz}) \quad (1.107)$$

Esplicitando gli angoli che i vettori di fase e di attenuazione delle onde riflessa e trasmessa formano con l'asse  $x$  si avrà:

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_r &= \beta_r(\cos \xi_r \underline{x}_0 + \sin \xi_r \underline{z}_0) \\ \underline{\alpha}_r &= \alpha_r(\cos \zeta_r \underline{x}_0 + \sin \zeta_r \underline{z}_0) \end{aligned} \quad (1.108)$$

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_t &= \beta_t(\cos \xi_t \underline{x}_0 + \sin \xi_t \underline{z}_0) \\ \underline{\alpha}_t &= \alpha_t(\cos \zeta_t \underline{x}_0 + \sin \zeta_t \underline{z}_0) \end{aligned}$$

I parametri reali  $\beta_r$ ,  $\alpha_r$ ,  $\beta_t$  e  $\alpha_t$  saranno legati a loro volta alle proprietà dei mezzi ed all'angolo che il vettore di fase forma con il vettore di attenuazione, quindi si avrà:

$$\begin{aligned} \beta_r &= \sqrt{\frac{k_1'^2 - k_1''^2}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{k_1' k_1''}{(k_1'^2 - k_1''^2) \cos \eta_r}\right)^2} + 1} \\ \alpha_r &= \sqrt{\frac{k_1'^2 - k_1''^2}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{k_1' k_1''}{(k_1'^2 - k_1''^2) \cos \eta_r}\right)^2} - 1} \end{aligned} \quad (1.109)$$

e:

$$\beta_t = \sqrt{\frac{k_2'^2 - k_2''^2}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{k_2' k_2''}{(k_2'^2 - k_2''^2) \cos \eta_t}\right)^2} + 1} \quad (1.110)$$

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{k_2'^2 - k_2''^2}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{k_2' k_2''}{(k_2'^2 - k_2''^2) \cos \eta_t}\right)^2} - 1}$$

dove  $k_2'$  e  $k_2''$  sono ovviamente la parte reale e la parte immaginaria del numero d'onda nel mezzo 2, le quali saranno legate ad i parametri del mezzo da relazioni del tutto analoghe a quelle in (1.20) e (1.21).

A questo punto dovremo imporre la continuità delle componenti del campo elettrico e del campo magnetico sulla superficie di separazione tra i due mezzi. Come è noto perché i campi risultino sommabili su tale interfaccia la componente tangenziale dei loro vettori di propagazione dovrà essere continua, si dovrà quindi avere:

$$k_{iz} = k_{rz} = k_{tz} \quad (1.111)$$

data la natura complessa delle componenti del vettore queste due uguaglianze tra numeri complessi si potranno scrivere come quattro uguaglianze tra numeri reali:

$$\beta_{iz} = \beta_{rz} = \beta_{tz} \quad (1.112)$$

$$\alpha_{iz} = \alpha_{rz} = \alpha_{tz} \quad (1.113)$$

Da queste quattro uguaglianze potremo ottenere il legame tra gli angoli di incidenza e gli angoli di riflessione e trasmissione. Nel caso di mezzi privi di perdite la soluzione di questo problema portava alla conclusione che l'angolo di riflessione era uguale all'angolo di incidenza, mentre l'angolo di trasmissione era legato all'angolo di incidenza dalla legge di Snell-Cartesio. Ora si mostrerà che gli angoli di riflessione, ovvero sia l'angolo del vettore di fase che quello del vettore di attenuazione, rimangono uguali agli angoli di incidenza. Per quanto riguarda gli angoli di trasmissione troveremo una condizione alquanto simile alla condizione di Snell.

Si consideri per prima la relazione che sussiste tra gli angoli di incidenza e gli angoli di trasmissione. Si considerino le seconde due uguaglianze nelle espressioni (1.112) e (1.113) e si sfruttino le espressioni per le componenti tangenziali presenti nelle equazioni (1.103) e (1.108), ottenendo:

$$\begin{cases} \beta_i \sin \xi_i = \beta_t \sin \xi_t \\ \alpha_i \sin \zeta_i = \alpha_t \sin \zeta_t \end{cases} \quad (1.114)$$

Questa coppia di equazioni ricordano la condizione di Snell. Il principale problema che incontriamo rispetto al caso senza perdite sta nel fatto che  $\beta_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_t$  e  $\alpha_t$  non sono connesse in modo semplice ai parametri del mezzo, in particolare

essi dipendono dagli angoli  $\eta_i$  e  $\eta_t$ , legati a loro volta agli angoli  $\xi_i$ ,  $\zeta_i$ ,  $\xi_t$  e  $\zeta_t$ . Le nostre incognite quindi non sono solo gli angoli dell'onda trasmessa, ma anche le quantità  $\beta_t$  e  $\alpha_t$ . Per risolvere il problema saranno allora necessarie altre due equazioni. Si considerino a questo proposito le relazioni costitutive del mezzo 2, si ottiene così un sistema di quattro equazioni e quattro incognite:

$$\beta_t^2 - \alpha_t^2 = k_2'^2 - k_2''^2 \quad (1.115)$$

$$\beta_t \alpha_t \cos(\zeta_t - \xi_t) = k_2' k_2'' \quad (1.116)$$

Si considerino le equazioni (1.114) e si isolino i seni degli angoli incogniti:

$$\sin \xi_t = \frac{\beta_i}{\beta_t} \sin \xi_i \quad (1.117)$$

$$\sin \zeta_t = \frac{\alpha_i}{\alpha_t} \sin \zeta_i$$

A questo punto si svolga il coseno della differenza dell'espressione (1.116):

$$\beta_t \alpha_t (\cos \zeta_t \cos \xi_t + \sin \zeta_t \sin \xi_t) = k_2' k_2''$$

In quest'ultima espressione si esplicitino i seni degli angoli:

$$\beta_t \alpha_t \left( \sqrt{1 - \sin^2 \zeta_t - \sin^2 \xi_t + \sin^2 \zeta_t \sin^2 \xi_t + \sin \zeta_t \sin \xi_t} \right) = k_2' k_2''$$

Si sostituiscano ora le espressioni in (1.117) in quest'ultima espressione, ottenendo:

$$\beta_t \alpha_t \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{\alpha_i}{\alpha_t} \right)^2 \sin^2 \zeta_i - \left( \frac{\beta_i}{\beta_t} \right)^2 \sin^2 \xi_i + \left( \frac{\beta_i \alpha_i}{\beta_t \alpha_t} \right)^2 \sin^2 \zeta_i \sin^2 \xi_i + \frac{\beta_i \alpha_i}{\beta_t \alpha_t} \sin \zeta_i \sin \xi_i} \right] = k_2' k_2''$$

Isolando la radice quadrata nel membro di sinistra, si ottiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta_t^2 \alpha_t^2 - \beta_t^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i - \alpha_t^2 \beta_i^2 \sin^2 \xi_i + \beta_i^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i \sin^2 \xi_i} &= \\ &= k_2' k_2'' - \beta_i \alpha_i \sin \zeta_i \sin \xi_i \end{aligned}$$

Quadrando ambo i membri:

$$\begin{aligned} \beta_t^2 \alpha_t^2 - \beta_t^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i - \alpha_t^2 \beta_i^2 \sin^2 \xi_i + \beta_i^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i \sin^2 \xi_i &= \\ = k_2'^2 k_2''^2 + \beta_i^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_t \sin^2 \xi_t - 2k_2' k_2'' \beta_i \alpha_i \sin \zeta_i \sin \xi_i \end{aligned}$$

Semplificando l'ultimo termine del membro di sinistra con il secondo termine del membro di destra ed utilizzando l'equazione (1.115) per eliminare dall'espressione il termine  $\alpha_t$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \beta_t^2 (\beta_t^2 - k_2'^2 + k_2''^2) - \beta_t^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i - (\beta_t^2 - k_2'^2 + k_2''^2) \beta_i^2 \sin^2 \xi_i &= \\ = k_2'^2 k_2''^2 - 2k_2' k_2'' \beta_i \alpha_i \sin \zeta_i \sin \xi_i \end{aligned}$$

da cui riordinando secondo i termini in  $\beta_t$  si ottiene:

$$\begin{aligned} & \beta_t^4 - \beta_t^2(k_2'^2 - k_2''^2 + \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i + \beta_i^2 \sin^2 \xi_i) + \\ & + (k_2'^2 \beta_i^2 \sin^2 \xi_i - k_2''^2 \beta_i^2 \sin^2 \xi_i - k_2'^2 k_2''^2 + 2k_2' k_2'' \beta_i \alpha_i \sin \zeta_i \sin \xi_i) = 0 \end{aligned}$$

Quest'ultima equazione è una biquadratica la cui soluzione risulta pari a:

$$\beta_{t1/2}^2 = \frac{(k_2'^2 - k_2''^2 + \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i + \beta_i^2 \sin^2 \xi_i) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

ovvero:

$$\beta_{t1/2}^2 = \frac{\operatorname{Re}[k_2^2] + |k_{iz}|^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

dove:  $k_{iz} = \beta_i \sin \xi_i + i\alpha_i \sin \zeta_i$  è la componente tangenziale del vettore di propagazione dell'onda incidente. Si andrà ora a cercare una forma compatta per il determinante dell'equazione. Si potrà scrivere tale determinante come segue:

$$\begin{aligned} \Delta &= (k_2'^2 - k_2''^2 + \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i + \beta_i^2 \sin^2 \xi_i)^2 \\ &- 4(k_2'^2 \beta_i^2 \sin^2 \xi_i - k_2''^2 \beta_i^2 \sin^2 \xi_i - k_2'^2 k_2''^2 + 2k_2' k_2'' \beta_i \alpha_i \sin \zeta_i \sin \xi_i) \end{aligned}$$

svolgendo il quadrato:

$$\begin{aligned} \Delta &= k_2'^4 - k_2''^4 + \alpha_i^4 \sin^4 \zeta_i + \beta_i^4 \sin^4 \xi_i - 2k_2'^2 k_2''^2 + 2k_2'^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i + \\ &+ 2k_2'^2 \beta_i^2 \sin^2 \xi_i - 2k_2''^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i - 2k_2''^2 \beta_i^2 \sin^2 \xi_i + 2\alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i \beta_i^2 \sin^2 \xi_i + \\ &- 4k_2'^2 \beta_i^2 \sin^2 \xi_i + 4k_2''^2 \beta_i^2 \sin^2 \xi_i + 4k_2'^2 k_2''^2 - 8k_2' k_2'' \beta_i \alpha_i \sin \zeta_i \sin \xi_i \end{aligned}$$

con un po' di algebra si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta &= k_2'^4 - k_2''^4 + \alpha_i^4 \sin^4 \zeta_i + \beta_i^4 \sin^4 \xi_i + 2k_2'^2 k_2''^2 + 2k_2'^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i + \\ &- 2k_2'^2 \beta_i^2 \sin^2 \xi_i - 2k_2''^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i + 2k_2''^2 \beta_i^2 \sin^2 \xi_i + 2\beta_i^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i \sin^2 \xi_i + \\ &- 8k_2' k_2'' \beta_i \alpha_i \sin \zeta_i \sin \xi_i \end{aligned}$$

Ora aggiungiamo e sottraiamo i termini  $2k_2'^2 k_2''^2$  e  $2\beta_i^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i \sin^2 \xi_i$ , riscrivendo l'espressione come segue:

$$\begin{aligned} \Delta &= (k_2'^4 - k_2''^4 + \alpha_i^4 \sin^4 \zeta_i + \beta_i^4 \sin^4 \xi_i - 2k_2'^2 k_2''^2 + 2k_2'^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i + \\ &- 2k_2'^2 \beta_i^2 \sin^2 \xi_i - 2k_2''^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i + 2k_2''^2 \beta_i^2 \sin^2 \xi_i - 2\beta_i^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i \sin^2 \xi_i) + \\ &+ (4k_2'^2 k_2''^2 + 4\beta_i^2 \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i \sin^2 \xi_i - 8k_2' k_2'' \beta_i \alpha_i \sin \zeta_i \sin \xi_i) \end{aligned}$$

Ora si può notare che la prima parentesi risulta uguale al seguente quadrato:

$$(k_2'^2 - k_2''^2 - \beta_i^2 \sin^2 \xi_i + \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i)^2 = (\operatorname{Re}[k_2^2] - \operatorname{Re}[k_{iz}^2])^2$$

La seconda parentesi invece risulta uguale a:

$$(2k_2' k_2'' - 2\beta_i \alpha_i \sin \xi_i \sin \zeta_i)^2 = (\operatorname{Im}[k_2^2] - \operatorname{Im}[k_{iz}^2])^2$$

Avremo quindi:

$$\Delta = (\operatorname{Re}[k_2^2] - \operatorname{Re}[k_{iz}^2])^2 + (\operatorname{Im}[k_2^2] - \operatorname{Im}[k_{iz}^2])^2$$

ovvero:

$$\Delta = |k_2^2 - k_{iz}^2|^2$$

Da cui potremo finalmente scrivere l'espressione del modulo del vettore di fase dell'onda trasmessa:

$$\beta_t^2 = \frac{|k_{iz}|^2 + \operatorname{Re}[k_2^2] + |k_2^2 - k_{iz}^2|}{2} \quad (1.118)$$

dove si è scelta la determinazione positiva della radice perché è l'unica che assicura il segno positivo di  $\beta_t^2$  (ricordiamo che  $\beta_t$  è per definizione puramente reale). Il calcolo di  $\alpha_t$  è a questo punto molto semplice, prendendo l'espressione (1.115) si ha:

$$\alpha_t^2 = \beta_t^2 - (k_2'^2 - k_2''^2) = \beta_t^2 - \operatorname{Re}[k_2^2]$$

da cui:

$$\alpha_t^2 = \frac{|k_{iz}|^2 - \operatorname{Re}[k_2^2] + |k_2^2 - k_{iz}^2|}{2} \quad (1.119)$$

Siamo così riusciti ad esprimere i moduli dei vettori di fase e di attenuazione dell'onda trasmessa in funzione dei soli parametri dell'onda incidente. Tali moduli sono i seguenti:

$$\beta_t = \sqrt{\frac{|k_{iz}|^2 + \operatorname{Re}[k_2^2] + |k_2^2 - k_{iz}^2|}{2}} \quad (1.120)$$

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{|k_{iz}|^2 - \operatorname{Re}[k_2^2] + |k_2^2 - k_{iz}^2|}{2}}$$

Questo risultato è stato precedentemente presentato in [3]. Una volta calcolati i moduli del vettore di propagazione dell'onda trasmessa, i relativi angoli potranno essere ottenuti dalle espressioni (1.117):

$$\xi_t = \arcsin\left(\frac{\beta_i}{\beta_t} \sin \xi_i\right) \quad (1.121)$$

$$\zeta_t = \arcsin\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_t} \sin \zeta_i\right) \quad (1.122)$$

Tali espressioni sono corrette fino a quando l'argomento dell'arcoseno rimane una funzione monotona crescente, o decrescente, compresa tra 0 e 1. Siamo sicuri che tale argomento non eccederà mai il valore di 1, in quanto l'angolo  $\xi_t$  è per definizione reale e non avrebbe alcun senso considerarlo complesso. Consideriamo l'espressione (1.121), se, data una certa onda piana incidente, con  $\eta_i$  assegnato, si fa variare l'angolo  $\xi_i$ , una possibilità è che l'argomento dell'arcoseno parta da 0 per  $\xi_i = 0$ , poi cresca fino ad un certo valore raggiunto per

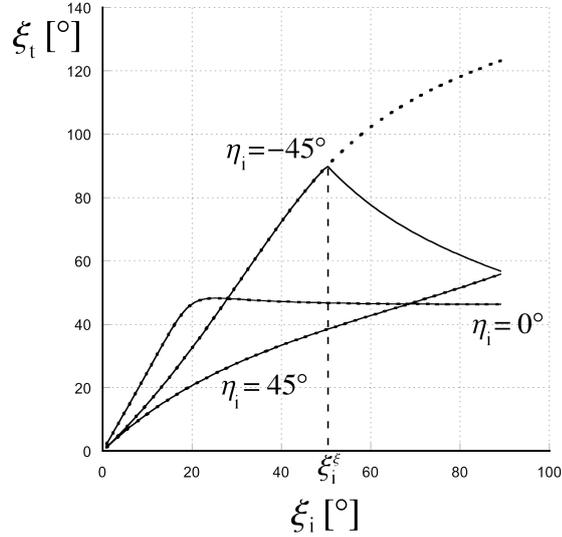


Figura 1.6: Andamento dell'angolo del vettore di fase trasmesso in funzione dell'angolo di incidenza  $\xi_i$ , per diversi valori dell'angolo  $\eta_i$ . Si può vedere che, quando  $\eta_i = 45^\circ$ , si ha un'indeterminazione del valore di  $\xi_t$  nel punto  $\xi_i = \xi_i^\xi$

$\xi_i = \pi/2$ , in questo caso l'argomento è monotono crescente e tutto va bene, in quanto l'angolo  $\xi_t$  rimarrà sempre inferiore di  $\pi/2$ . Se però l'argomento raggiunge il suo valore massimo per  $\xi_i^\xi < \pi/2$ , questo vuol dire che l'argomento presenterà un massimo nell'intervallo  $\xi_i \in [0, \pi/2]$ , tale valore massimo sarà sempre uguale ad 1, essendo questo il valore massimo che si può far assumere all'argomento dell'arcoseno. Nel tratto compreso tra  $\xi_i = 0$  e  $\xi_i = \xi_i^\xi$  l'angolo  $\xi_t$  sarà andato dal valore 0 al valore  $\pi/2$ , quando l'argomento dell'arcoseno inizia a decrescere l'espressione (1.121), ci fornirà valori di  $\xi_t$  inferiori a  $\pi/2$ , i quali contrastano con l'interpretazione fisica, infatti all'aumentare dell'angolo di incidenza non vi è motivo per il quale l'angolo di trasmissione dovrebbe iniziare a decrescere. Questo problema è dovuto al fatto che la funzione arcoseno rappresenta valori dell'angolo  $\xi_t$  compresi tra  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ . I valori assunti dall'argomento per  $\xi_i > \xi_i^\xi$  corrispondono invece a valori di  $\xi_t$  maggiori di  $\pi/2$ . Analogamente si comporta  $\zeta_2$ , per l'espressione (1.122), quando si ha  $\xi_i > \xi_i^\zeta$ , dove  $\xi_i^\zeta$  è l'angolo per cui l'argomento dell'arcoseno in (1.122) raggiunge il suo valore massimo. Per gli angoli  $\xi_i^\xi$  e  $\xi_i^\zeta$  ci troviamo quindi di fronte a una indeterminazione. In Figura 1.6 e 1.7 vediamo il comportamento dell'angolo trasmesso, rispettivamente del vettore di fase e di attenuazione, per diversi valori dell'angolo  $\eta_i$ . I due mezzi considerati sono gli stessi utilizzati in [3], ovvero:  $\varepsilon_1 = 4$ ,  $\sigma_1 = 0.01$  S/m,  $\varepsilon_2 = 10$  e  $\sigma_2 = 0.001$  S/m, alla frequenza  $f_0 = 1$  MHz. Vediamo che nei punti  $\xi_i^\xi$  e  $\xi_i^\zeta$  si ha una indeterminazione e non si può dire a priori se l'ango-

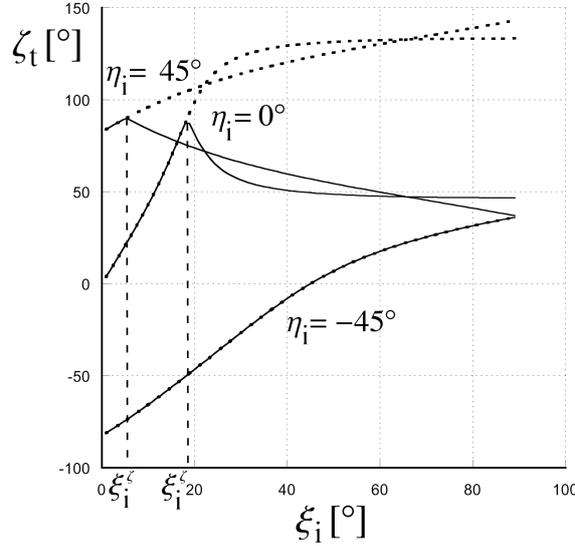


Figura 1.7: Andamento dell'angolo del vettore di attenuazione trasmesso in funzione dell'angolo di incidenza  $\xi_i$ , per diversi valori dell'angolo  $\eta_i$ . Si può vedere che, quando  $\eta_i = 45^\circ$  e  $\eta_i = 0^\circ$ , si ha un'indeterminazione del valore di  $\zeta_t$  nel punto  $\xi_i = \xi_i^\zeta$

lo trasmesso continui a crescere monotonamente, oppure se inizi a decrescere. L'indeterminazione è risolta in [3], dove si scelgono i comportamenti non monotoni degli angoli trasmessi. I discorsi fatti valgono anche per valori negativi dell'argomento, corrispondenti semplicemente a valori negativi degli angoli  $\xi_t$  e  $\zeta_t$ .

Per convincerci di tale ragionamento si può andare a controllare la conservazione dell'energia all'interno di un cilindro infinito di sezione quadrata di lato  $w$ , avente l'asse ortogonale al piano di incidenza. Considerando il valore dell'integrale del vettore di Poynting sulla superficie di tale cilindro ed i valori della potenza immagazzinata (reattiva) e dissipata nel volume al suo interno, si può ottenere un valore di potenza per unità di lunghezza che, per la conservazione dell'energia, dovrebbe risultare sempre nullo. In Fig. 1.8 troviamo questa potenza per tre onde incidenti a tre diversi angoli  $\eta_i$ , quando vengano considerate due differenti determinazioni per gli angoli  $\xi_t$  e  $\zeta_t$ . I mezzi considerati sono gli stessi delle Figure 1.6 e 1.7. La determinazione monotona, in cui entrambi gli angoli superano i  $90^\circ$  quando  $\xi_i > \xi_i^{\xi, \zeta}$  e quella non monotona, nella quale gli angoli tornano indietro assumendo sempre valori inferiori ai  $90^\circ$ . Come si vede dai valori assunti dalla potenza, la determinazione monotona è l'unica che assicura la conservazione dell'energia e quindi è la determinazione corretta nell'inversione delle funzioni trigonometriche. Ciò detto dovremo riscrivere le espressioni

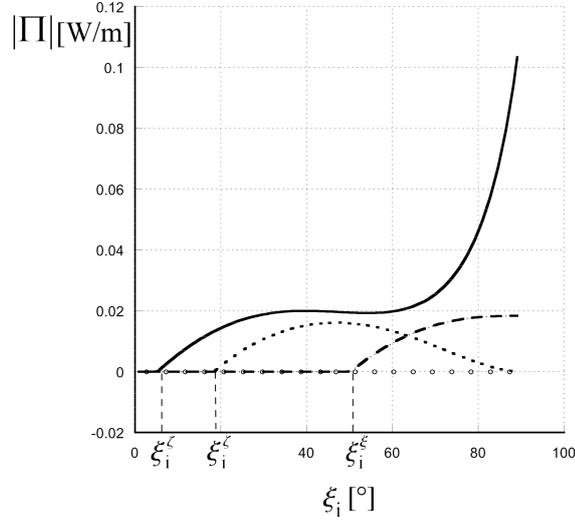


Figura 1.8: Andamento del modulo del vettore di Poynting su una superficie chiusa intorno a un tratto dell'interfaccia. Il vettore di Poynting è stato calcolato nel caso delle determinazioni monotone per gli angoli  $\xi_t$  e  $\zeta_t$  nei casi  $\eta_i = 45^\circ$  (linea continua),  $\eta_i = 0$  (linea puntinata) e  $\eta_i = -45^\circ$  (linea tratteggiata). Inoltre è stato calcolato nel caso in cui si considerino i comportamenti non monotoni degli angoli in tutti i casi precedenti (cerchi). Si può vedere che il comportamento non monotono degli angoli è l'unico che garantisca la conservazione dell'energia.

(1.121) e (1.122) tenendo conto di questo fatto. Avremo quindi [3]:

$$\xi_t = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{\beta_i}{\beta_t} \sin \xi_i\right) & \text{con } \xi_i < \xi_i^\xi \\ \pi - \arcsin\left(\frac{\beta_i}{\beta_t} \sin \xi_i\right) & \text{con } \xi_i > \xi_i^\xi \end{cases} \quad (1.123)$$

$$\zeta_t = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_t} \sin \zeta_i\right) & \text{con } \xi_i < \xi_i^\zeta \\ \pi - \arcsin\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_t} \sin \zeta_i\right) & \text{con } \xi_i > \xi_i^\zeta \end{cases} \quad (1.124)$$

dove le funzioni arcoseno vengono considerate aventi un codominio in  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

A questo punto è bene fornire un'interpretazione fisica di quanto trovato. Per farlo, dobbiamo comprendere il significato di avere un'onda, che si propaghi nel mezzo 2, ma avente il vettore di fase diretto nel verso negativo delle  $x$ , ovvero nel semipiano occupato dal mezzo 1. Per capire quello che accade in questo caso

è sufficiente considerare il vettore di Poynting dell'onda e comprendere la sua direzione di propagazione. Come si può vedere dalle espressioni (1.93) e (1.95), il vettore di Poynting di un'onda piana in un mezzo con perdite è un vettore complesso e quindi non è così semplice definire la sua direzione di propagazione. Consideriamo, per semplicità, il caso di polarizzazione TE. In questo caso, considerando la direzione di propagazione della parte reale del vettore di Poynting, dovremmo considerare la direzione del vettore di fase e scopriremmo che, per  $\xi_i > \xi_i^\xi$ , la potenza dell'onda trasmessa si propagherebbe nella direzione del mezzo di provenienza dell'onda incidente! Essendo questo ovviamente impossibile, è chiaro che come direzione di propagazione equivalente, dobbiamo fare una scelta diversa. Se si sceglie la direzione di propagazione della potenza puramente reale, che nel caso di polarizzazione TE è la direzione ortogonale al vettore di ampiezza<sup>5</sup>, si trova un risultato interessante. Si chiamino  $\rho_i$  e  $\rho_t$  gli angoli che tale direzione, rispettivamente per onda incidente e trasmessa, forma con l'asse  $x$ . Considerando tutti i casi in cui  $\xi_i > \xi_i^\xi$ , vediamo che la potenza sia dell'onda incidente che dell'onda trasmessa, superano i  $90^\circ$  per lo stesso valore di  $\xi_i$ , diverso da  $\xi_i^\xi$ , si vedano le Figure 1.9 e 1.10. I mezzi considerati sono sempre gli stessi delle Figure 1.6 e 1.7. Questo vuol dire semplicemente che i casi in cui  $\xi_t > \pi/2$  avvengono quando il problema è mal posto. Infatti, in questi casi la direzione efficace della potenza incidente supera i  $90^\circ$ , e quindi è normale che anche la potenza dell'onda trasmessa superi tale valore. In questi casi il problema dell'incidenza dell'onda piana è semplicemente mal posto, perché si sta tentando di incidere su un'interfaccia con un'onda la cui potenza (od almeno parte di essa) si sta propagando nella direzione opposta all'interfaccia stessa.

Ora che si sono ricavate le espressioni per gli angoli dell'onda trasmessa, si può vedere cosa accade per gli angoli dell'onda riflessa. Consideriamo la prima uguaglianza delle espressioni (1.112) e (1.113) e scriviamole esplicitando gli angoli di incidenza e di riflessione:

$$\beta_i \sin \xi_i = \beta_r \sin \xi_r \quad (1.125)$$

$$\alpha_i \sin \zeta_i = \alpha_r \sin \zeta_r \quad (1.126)$$

Confrontando le espressioni (1.125) e (1.126) con le espressioni in (1.114), possiamo notare una completa analogia, potremo allora scrivere le espressioni per i moduli  $\beta_r$  e  $\alpha_r$  in modo del tutto analogo a quanto fatto per  $\beta_t$  e  $\alpha_t$ . Possiamo quindi riscrivere le espressioni (1.120) stando solo attenti di sostituire la quantità  $k_2$  con la quantità  $k_1$ , dato che l'onda si propaga sempre e solo nel mezzo 1:

$$\beta_r = \sqrt{\frac{|k_{iz}|^2 + \operatorname{Re}[k_1^2] + |k_1^2 - k_{iz}^2|}{2}} \quad (1.127)$$

$$\alpha_r = \sqrt{\frac{|k_{iz}|^2 - \operatorname{Re}[k_1^2] + |k_1^2 - k_{iz}^2|}{2}}$$

<sup>5</sup>Tale risultato è stato dimostrato nel paragrafo 1.4

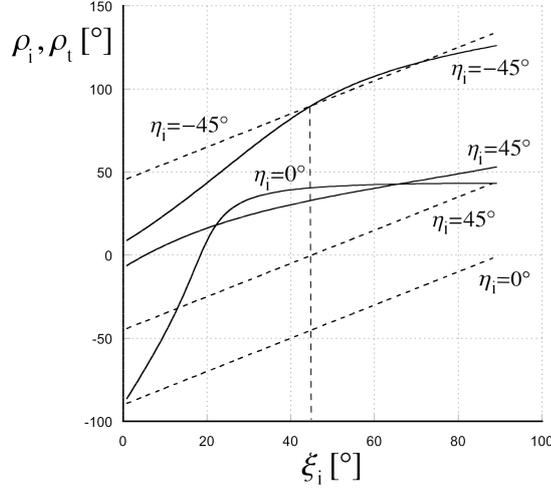


Figura 1.9: Andamento dell'angolo della retta direzionale della sola potenza reale del vettore di Poynting dell'onda incidente (linea tratteggiata) e trasmessa (linea continua), per diversi valori di  $\eta_i$ . Si può notare che per  $\eta_i = -45^\circ$ , quando il vettore di fase dell'onda trasmessa forma un angolo  $\xi_t > \pi/2$ , anche gli angoli della sola potenza reale, sia dell'onda incidente, che dell'onda trasmessa, diventano maggiori di  $90^\circ$ .

Partendo dalle espressioni (1.127) cercheremo ora di dimostrare che i moduli dei vettori di fase e di attenuazione dell'onda riflessa sono uguali ai corrispettivi moduli dell'onda incidente. Si prenda la prima delle (1.127) e se ne esplicitino i diversi termini:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[k_1^2] &= k_1'^2 - k_1''^2 = \beta_i^2 - \alpha_i^2 \\ |k_{1z}|^2 &= \beta_i^2 \sin^2 \xi_i + \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il termine  $|k_1^2 - k_{1z}^2|$  si può vedere che:

$$k_1^2 = \beta_i^2 - \alpha_i^2 + 2i\beta_i\alpha_i \cos \eta_i \quad (1.128)$$

$$k_{1z}^2 = \beta_i^2 \sin^2 \xi_i - \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i + 2i\beta_i\alpha_i \sin \xi_i \sin \zeta_i$$

dalle quali si ottiene:

$$\begin{aligned} k_1^2 - k_{1z}^2 &= \beta_i^2(1 - \sin^2 \xi_i) - \alpha_i^2(1 - \sin^2 \zeta_i) + 2i\beta_i\alpha_i(\cos \eta_i - \sin \xi_i \sin \zeta_i) = \\ &= \beta_i^2 \cos^2 \xi_i - \alpha_i^2 \cos^2 \zeta_i + 2i\beta_i\alpha_i \cos \xi_i \cos \zeta_i = (\beta_i \cos \xi_i + i\alpha_i \cos \zeta_i)^2 \end{aligned}$$

considerandone il modulo:

$$|k_1^2 - k_{1z}^2| = \beta_i^2 \cos^2 \xi_i + \alpha_i^2 \cos^2 \zeta_i \quad (1.129)$$

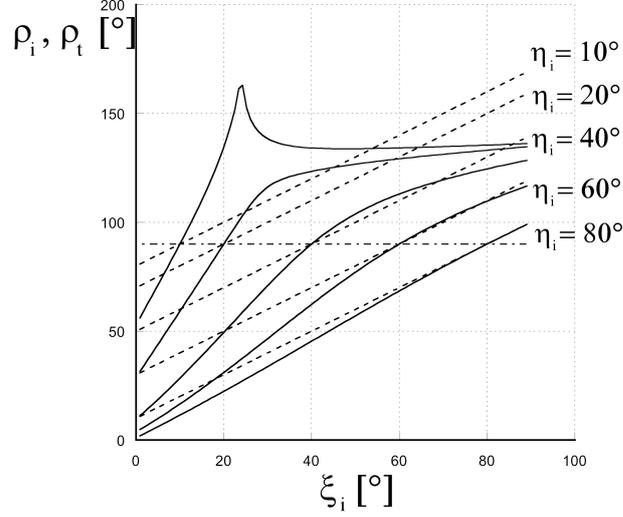


Figura 1.10: Andamento dell'angolo della retta direzionale della sola potenza reale del vettore di Poynting dell'onda incidente (linea tratteggiata) e trasmessa (linea continua), per diversi valori di  $\eta_i$ . Si può vedere come l'angolo che la direzione della sola potenza reale delle onde incidente e trasmessa forma con l'asse  $x$  diventa uguale a  $\pi/2$  per lo stesso valore di  $\xi_i$ .

andando a sostituire le espressioni (1.128) e (1.129) nelle (1.127), si ottiene:

$$\beta_r = \sqrt{\frac{\beta_i^2 \sin^2 \xi_i + \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i + \beta_i^2 - \alpha_i^2 + \beta_i^2 \cos^2 \xi_i + \alpha_i^2 \cos^2 \zeta_i}{2}}$$

$$\alpha_r = \sqrt{\frac{\beta_i^2 \sin^2 \xi_i + \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i - \beta_i^2 + \alpha_i^2 + \beta_i^2 \cos^2 \xi_i + \alpha_i^2 \cos^2 \zeta_i}{2}}$$

dalle quali con banali passaggi si vede che:

$$\beta_r = \beta_i$$

$$\alpha_r = \alpha_i$$

Si è così dimostrato che i moduli dei vettori di fase e di attenuazione dell'onda riflessa sono uguali a quelli dell'onda trasmessa, inserendo questa informazione nelle equazioni (1.125) e (1.126) è facile vedere che anche gli angoli di riflessioni risulteranno uguali agli angoli di incidenza, con l'accortezza di cambiare il segno alla componente diretta lungo  $x$  a causa del fatto che l'onda riflessa si propaga in direzione opposta rispetto all'onda incidente.

### 1.5.2 Coefficienti di riflessione e trasmissione

Si andrà ora a ricavare il coefficiente di riflessione ed il coefficiente di trasmissione. Per fare questo dovremo imporre la continuità del campo elettrico e magnetico tangenziali all'interfaccia. Iniziamo quindi a specificare il tipo di polarizzazione, cominciando dalla polarizzazione  $H$ , in cui le distubranze definite in (1.100), (1.104) e (1.105) rappresentano l'unica componente del campo magnetico che sarà diretta lungo la direzione ortogonale al piano contenente i vettori di propagazione, ovvero al piano  $(x, z)$ , che sarà la direzione  $y$ . Si potrà quindi scrivere:

$$\begin{aligned} H_{iy}(x, z) &= H_{0i}e^{i(k_{ix}x+k_{iz}z)} \\ H_{ry}(x, z) &= H_{0r}e^{-i(k_{ix}x+k_{iz}z)} \\ H_{ty}(x, z) &= H_{0t}e^{i(k_{tx}x+k_{tz}z)} \end{aligned} \quad (1.130)$$

Possiamo calcolare il campo elettrico tangenziale a partire dalle equazioni di Maxwell, infatti si avrà:

$$\underline{E}(x, z) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon}\nabla \times \underline{H}(x, z) \quad (1.131)$$

Essendo la componente tangenziale quella diretta lungo  $z$ , si avrà:

$$\begin{aligned} E_{ix}(x, z) &= -\frac{k_{ix}}{\omega\varepsilon_1}H_{0i}e^{i(k_{ix}x+k_{iz}z)} \\ E_{rx}(x, z) &= \frac{k_{ix}}{\omega\varepsilon_1}H_{0r}e^{-i(k_{ix}x+k_{iz}z)} \\ E_{tx}(x, z) &= -\frac{k_{tx}}{\omega\varepsilon_2}H_{0t}e^{i(k_{tx}x+k_{tz}z)} \end{aligned} \quad (1.132)$$

Imponendo la continuità del campo elettrico e magnetico tangenziali per  $x = 0$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} H_{0i} + H_{0r} &= H_{0t} \\ \frac{k_{ix}}{\omega\varepsilon_1}H_{0i} - \frac{k_{ix}}{\omega\varepsilon_1}H_{0r} &= \frac{k_{tx}}{\omega\varepsilon_2}H_{0t} \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\Gamma_H = \frac{H_{0r}}{H_{0i}} = \frac{\frac{k_{ix}}{\varepsilon_1} - \frac{k_{tx}}{\varepsilon_2}}{\frac{k_{ix}}{\varepsilon_1} + \frac{k_{tx}}{\varepsilon_2}} \quad (1.133)$$

e:

$$T_H = \frac{H_{0t}}{H_{0i}} = 1 + \Gamma_H = \frac{\frac{k_{ix}}{\varepsilon_1}}{\frac{k_{ix}}{\varepsilon_1} + \frac{k_{tx}}{\varepsilon_2}} \quad (1.134)$$

tali coefficienti sono gli stessi che si trovano nel caso di mezzi privi di perdite, con l'unica differenza che in quel caso le quantità  $k_{ix}$ ,  $k_{tx}$ ,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  sono puramente reali, mentre nel caso di mezzi con perdite saranno tutte quantità complesse

Nel caso di polarizzazione  $E$  la disturbanza rappresenta l'unica componente del campo elettrico, quella diretta lungo  $y$ , quindi si potrà procedere in modo del tutto analogo a quanto fatto per la polarizzazione  $H$ , trovando il seguente risultato:

$$\Gamma_E = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\frac{k_{ix}}{\mu_1} - \frac{k_{tx}}{\mu_2}}{\frac{k_{ix}}{\mu_1} + \frac{k_{tx}}{\mu_2}} \quad (1.135)$$

e:

$$T_E = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = 1 + \Gamma_E = \frac{\frac{k_{ix}}{\mu_1}}{\frac{k_{ix}}{\mu_1} + \frac{k_{tx}}{\mu_2}} \quad (1.136)$$

### 1.5.3 Calcolo di $\xi_i^\xi$ e $\xi_i^\zeta$

Gli angoli  $\xi_i^\xi$  e  $\xi_i^\zeta$ , presentati per la prima volta in [3], non sono mai stati calcolati esplicitamente. In [3] infatti si faceva uso di una procedura numerica per la loro determinazione. Ci proponiamo nel seguito di fornire per essi un'espressione analitica. Per calcolare l'angolo  $\xi_i^\xi$  è sufficiente considerare la legge di Snell generalizzata e le condizioni di separabilità nel mezzo 2, andando ad imporre che l'angolo del vettore di fase trasmesso sia retto, ovvero  $\xi_t = \pi/2$ . In questo modo otteniamo le seguenti equazioni:

$$\beta_i \sin \xi_i = \beta_t \quad (1.137)$$

$$\alpha_i \sin \zeta_i = \alpha_t \sin \zeta_t \quad (1.138)$$

$$\beta_t^2 - \alpha_t^2 = \text{Re}(k_2^2) \quad (1.139)$$

$$2\beta_t \alpha_t \cos(\zeta_t - \pi/2) = \text{Im}(k_2^2) \quad (1.140)$$

In (1.140) vediamo subito che il coseno diventa un  $\sin \zeta_t$ , quindi inserendo le espressioni (1.137) e (1.138) in (1.140), si può scrivere:

$$2\beta_i \alpha_i \sin \xi_i \sin \zeta_i = \text{Im}(k_2^2) \quad (1.141)$$

tale equazione lega le caratteristiche dell'onda piana incidente alle proprietà del secondo mezzo. Prima di manipolare l'espressione (1.141), andiamo a trovare la condizione per l'angolo  $\xi_i^\zeta$ . Scrivendo la legge di Snell generalizzata e la relazione di separabilità del secondo mezzo, ed imponendo che l'angolo del vettore di attenuazione trasmesso sia retto, ovvero che  $\zeta_2 = \pi/2$ , si ottiene:

$$\beta_i \sin \xi_i = \beta_t \sin \xi_t \quad (1.142)$$

$$\alpha_i \sin \zeta_i = \alpha_t \quad (1.143)$$

$$\beta_t^2 - \alpha_t^2 = \text{Re}(k_2^2) \quad (1.144)$$

$$2\beta_t \alpha_t \cos(\pi/2 - \xi_t) = \text{Im}(k_2^2) \quad (1.145)$$

Eseguito gli stessi passaggi precedenti, si potrà scrivere nuovamente l'equazione (1.141). Ci troviamo così in una situazione bizzarra, infatti la stessa condizione determina due angoli critici molto diversi tra loro, le onde trasmesse che si hanno per  $\xi_i^\xi$  e  $\xi_i^\zeta$ , infatti, non potrebbero essere più diverse, avendo una i piani

equifase ortogonali all'interfaccia e l'altra i piani equiampiezza ortogonali alla stessa. Deve quindi esserci una condizione aggiuntiva che ci permetta di distinguere tra questi due casi. Andiamo a considerare le espressioni in (1.120), ed in particolare il termine  $|k_2^2 - k_{iz}^2|$ . Si scriva tale valore assoluto, come segue:

$$|k_2^2 - k_{iz}^2| = \sqrt{[\operatorname{Re}(k_2^2) - \operatorname{Re}(k_{iz}^2)]^2 + [\operatorname{Im}(k_2^2) - \operatorname{Im}(k_{iz}^2)]^2} \quad (1.146)$$

e si noti inoltre che risulta:

$$\operatorname{Im}(k_{iz}^2) = 2\beta_i\alpha_i \sin \xi_i \sin \zeta_i \quad (1.147)$$

Inserendo l'espressione (1.147) in (1.146) e tenendo conto della condizione (1.141), troviamo che, nel caso in cui l'angolo incidente sia uguale ad uno dei due angoli critici,  $\xi_i = \xi_i^{\xi, \zeta}$ , il valore assoluto in (1.146) può essere scritto come segue:

$$|k_2^2 - k_{iz}^2| = |\operatorname{Re}(k_2^2) - \operatorname{Re}(k_{iz}^2)| \quad (1.148)$$

quindi le espressioni in (1.120), potranno essere riscritte come segue:

$$\begin{aligned} \beta_t &= \sqrt{\frac{\beta_i^2 \sin^2 \xi_i + \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i + \operatorname{Re}(k_2^2) + |\operatorname{Re}(k_2^2) - \beta_i^2 \sin^2 \xi_i + \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i|}{2}} \\ \alpha_t &= \sqrt{\frac{\beta_i^2 \sin^2 \xi_i + \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i - \operatorname{Re}(k_2^2) + |\operatorname{Re}(k_2^2) - \beta_i^2 \sin^2 \xi_i + \alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i|}{2}} \end{aligned} \quad (1.149)$$

Ora possiamo vedere facilmente che quando  $\operatorname{Re}(k_2^2) > \operatorname{Re}(k_{iz}^2)$ , si ottiene:

$$\beta_t = \sqrt{\alpha_i^2 \sin^2 \zeta_i + \operatorname{Re}(k_2^2)} \quad (1.150)$$

$$\alpha_t = \alpha_i \sin \zeta_i \quad (1.151)$$

le quali si ottengono a partire dalle relazioni (1.143) e (1.144) e quindi si riferiscono al caso  $\zeta_t = \pi/2$ .

Andando a considerare il caso  $\operatorname{Re}(k_2^2) < \operatorname{Re}(k_{iz}^2)$ , la (1.149) fornisce le seguenti relazioni:

$$\beta_t = \beta_i^2 \sin^2 \xi_i \quad (1.152)$$

$$\alpha_t = \sqrt{\beta_i^2 \sin^2 \xi_i - \operatorname{Re}(k_2^2)} \quad (1.153)$$

le quali si possono ottenere a partire dalle espressioni (1.137) e (1.139), e si riferiscono quindi al caso  $\xi_t = \pi/2$ . Abbiamo così individuato un criterio per distinguere tra le soluzioni della condizione (1.141). Infatti, risolvendo l'equazione (1.141) per  $\xi_1$  e chiamando  $\xi_c$  la sua generica soluzione, potremo associare a tale valore il significato di  $\xi_i^\xi$  o  $\xi_i^\zeta$  a seconda dei valori assunti da  $\operatorname{Re}(k_{iz})$ , ovvero potremo scrivere:

$$\xi_c = \begin{cases} \xi_i^\xi & \text{se } \operatorname{Re}(k_{iz}^2) > \operatorname{Re}(k_2^2) \\ \xi_i^\zeta & \text{se } \operatorname{Re}(k_{iz}^2) < \operatorname{Re}(k_2^2) \end{cases} \quad (1.154)$$

A questo punto non ci rimane che risolvere l'equazione (1.141). Si vuole risolvere l'equazione in funzione della variabile  $\xi_i$ , considerando come parametri fissi le caratteristiche del mezzo e l'angolo  $\eta_i$ . Quindi, per quanto detto nel paragrafo 1.2, si considera fissato il grado di non uniformità dell'onda incidente. Ciò detto, ricordando che si ha  $\zeta_i = \xi_i + \eta_i$ , la (1.141) si potrà scrivere come segue:

$$2\beta_i\alpha_i \sin \xi_i (\cos \xi_i \sin \eta_i + \sin \xi_i \cos \eta_i) = \text{Im}(k_2^2) \quad (1.155)$$

mettendo in evidenza il  $\cos \eta_i$  e ricordando la relazione (1.27), si ottiene:

$$\text{Im}(k_1^2) \sin \xi_i (\cos \xi_i \tan \eta_i + \sin \xi_i) = \text{Im}(k_2^2) \quad (1.156)$$

supponendo che nel primo mezzo si abbiano sempre perdite non nulle, potremo definire il seguente parametro:

$$\chi = \frac{\text{Im}(k_2^2)}{\text{Im}(k_1^2)} \quad (1.157)$$

il quale rappresenta il rapporto tra le perdite dei due mezzi (losses ratio). Quando le perdite magnetiche vengano considerate nulle,  $\chi$  diventa il semplice rapporto delle parti immaginarie delle permittività dei due mezzi. Quando poi le perdite sono solo per conduzione, il parametro diventa il semplice rapporto delle conducibilità dei due mezzi. A questo punto si considerino le seguenti identità trigonometriche:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} \quad (1.158)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}\right) = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \quad (1.159)$$

ed inserendole in (1.156), facendo il minimo comune denominatore e riordinando, si ottiene:

$$(\chi - 1) \tan^2 \xi_i - \tan \eta_i \tan \xi_i + \chi = 0 \quad (1.160)$$

L'equazione (1.160) è governata da tre parametri: il rapporto  $\chi$  tra le perdite nei due mezzi, l'angolo  $\eta_i$  dell'onda incidente e l'angolo  $\xi_i$ . Possiamo quindi andare a risolverla per quest'ultimo, trovando l'angolo di incidenza critico:

$$\tan \xi_c = \frac{\tan \eta_i \pm \sqrt{\tan^2 \eta_i - 4\chi(\chi - 1)}}{2(\chi - 1)} \quad (1.161)$$

Tale angolo critico assume il significato di  $\xi_i^\xi$  o  $\xi_i^\zeta$ , a seconda dei valori assunti da  $\text{Re}(k_{iz}^2)$ , come descritto in (1.154).

Analizzando l'espressione (1.161), possiamo distinguere tre casi particolari per l'angolo critico  $\xi_c$ :

1.  $\chi < 1$ , ovvero il caso in cui il primo mezzo presenti perdite maggiori del secondo. In questo caso, l'angolo critico esiste per ogni onda incidente, ovvero per ogni valore dell'angolo  $\eta_i$ .
2.  $\chi > 1$ , ovvero il caso in cui il primo mezzo presenti perdite inferiori del secondo. L'angolo critico esiste solo per determinati valori dell'angolo  $\eta_i$ . In particolare, esiste solo se l'onda incidente è 'sufficientemente' non uniforme, ovvero si deve avere:  $|\tan \eta_i| > 2\sqrt{\chi(\chi - 1)}$
3.  $\chi = 1$ , l'espressione dell'angolo critico perde di significato.

L'ultimo caso si ha quando i due mezzi hanno esattamente le stesse perdite, i.e.  $\varepsilon_1'' = \varepsilon_2''$ . In questa eventualità, abbastanza rara nelle applicazioni, si può comunque ottenere un'espressione per l'angolo critico, infatti andando a considerare l'equazione (1.160) ed imponendo la condizione  $\chi = 1$ , si ottiene:

$$\tan \xi_c = \frac{1}{\tan \eta_i} \quad (1.162)$$

Abbiamo così calcolato le espressioni analitiche degli angoli  $\xi_i^\zeta, \zeta$ , coincidenti con le espressioni (1.161) e (1.162) secondo la condizione (1.154).

## 1.6 Casi particolari di riflessione e trasmissione

Studieremo ora alcuni casi particolari che rivestono una grande importanza nelle applicazioni. Inizieremo dal caso in cui il primo mezzo sia privo di perdite. In questo modo potremo notare che tutti i risultati trovati tornino a coincidere con quelli, ben noti nella letteratura, per l'interfaccia dielettrico-conduttore. Vedremo poi cosa succede quando l'onda giunge dal conduttore e viene trasmessa nel dielettrico, caso questo particolarmente importante soprattutto visti gli attuali sviluppi delle guide plasmoniche, dove l'interfaccia conduttore-dielettrico riveste una grande importanza. Si studierà poi il caso particolare di un'onda incidente all'angolo critico ricavato in (1.154) e si cercherà per essa un'interpretazione fisica.

### 1.6.1 Interfaccia dielettrico-conduttore

Si consideri il caso di un'onda piana e uniforme proveniente da un mezzo privo di perdite con  $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$ , che incide all'interfaccia con un mezzo con perdite,  $\varepsilon_2 \in \mathbb{C}$ . Questo problema è ben noto in letteratura, essendo stato presentato in molti testi classici [1, 12, 15, 16]. Il problema viene in genere impostato con il formalismo dell'angolo complesso, in questo modo la legge di Snell generalizzata si può scrivere in forma del tutto analoga a quella del caso privo di perdite. Il punto però è che quando si va a risolvere il problema, e si devono calcolare le caratteristiche dell'onda trasmessa, non uniforme, si deve comunque passare al formalismo dei vettori di fase e di attenuazione, scrivendo un sistema di

tre equazioni, chiamate equazioni di Ketteler in [1]<sup>6</sup>. Sembra quindi che il formalismo dei vettori di fase ed attenuazione sia sempre e comunque consigliato per la soluzione di questo problema.

Con la notazione usata finora, la legge di Snell modificata potrà essere scritta come segue:

$$\begin{cases} \beta_1 \sin \xi_1 = \beta_2 \sin \xi_2 \\ 0 = \alpha_2 \sin \zeta_2 \end{cases} \quad (1.163)$$

L'onda piana e uniforme, provenendo da un mezzo privo di perdite, non presenta vettore di attenuazione, questo impone la seconda uguaglianza in (1.163). Dato che il secondo mezzo è un mezzo con perdite, sappiamo che  $\alpha_2 \neq 0$ , quindi l'unico modo di verificare l'uguaglianza è che  $\zeta_2 = 0$ , ovvero che il vettore di attenuazione nel secondo mezzo sia puramente ortogonale all'interfaccia. Questo vuol dire che  $\xi_2 = -\eta_2$ . Inoltre, il fatto che il vettore di attenuazione sia forzato a giacere sulla normale all'interfaccia, ci fornisce un'altra informazione. Dalla condizione di continuità si può infatti ricavare la seguente semplice relazione:

$$\beta_2 \alpha_2 \cos \eta_2 = \operatorname{Re}(k_2) \operatorname{Im}(k_2) \quad (1.164)$$

Da questa relazione si vede bene che deve essere  $\eta_2 \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ , il che impone che  $\xi_2 < \frac{\pi}{2}$ . Quello che accade da un punto di vista fisico è che, all'aumentare dell'angolo di incidenza, l'angolo di trasmissione tende ad aumentare, senza però mai raggiungere i 90, in questo caso quindi non è possibile il meccanismo della riflessione totale, a prescindere dalle altre caratteristiche dei due mezzi. In Figura 1.11a è rappresentata la disposizione dei vettori di fase e di attenuazione in questo caso particolare. Come notato in [1], quindi, i piani equiampiezza dell'onda trasmessa sono paralleli all'interfaccia.

Nella lettera sono stati notati diversi fenomeni associati all'interfaccia tra un mezzo privo di perdite ed un mezzo con perdite, spesso chiamata interfaccia dielettrico-conduttore. Prima di tutto, non essendo più possibile il fenomeno della riflessione totale, non meraviglia che anche il fenomeno della trasmissione totale non sia più possibile. Il coefficiente di riflessione in polarizzazione H, infatti, non può annullarsi per nessun valore dell'angolo incidente<sup>7</sup>. Tale coefficiente, o per meglio dire la sua ampiezza, assume però, per un determinato valore dell'angolo di incidenza, un valore minimo. E' quindi possibile definire uno pseudo-angolo di Brewster, definito come l'angolo di incidenza per il quale si ha un minimo della potenza riflessa dall'interfaccia. Questo non è l'unico modo di definire lo pseudo-angolo di Brewster. In letteratura sono proposte definizioni alternative [17]. Per esempio, un modo è quello di definirlo come l'angolo per il quale si ha un minimo dell'ampiezza della funzione  $\Gamma_H/\Gamma_E$ . Tale valore è diverso dal primo quando  $\Gamma_H \neq 0$ . Tale definizione è motivata dal fatto che un'interfaccia di questo tipo ha il massimo grado di polarizzabilità,

<sup>6</sup>È bene notare che in questo caso le equazioni sono solo tre e non quattro, come nel caso di due mezzi con perdite, perché l'onda trasmessa ha perso uno dei gradi di libertà, essendo  $\zeta_t = 0$  a causa della continuità della componente tangenziale del vettore d'onda.

<sup>7</sup>Il coefficiente di riflessione in polarizzazione E non si annulla neanche nel caso di due mezzi privi di perdite. La trasmissione totale ha luogo infatti solo in polarizzazione H.

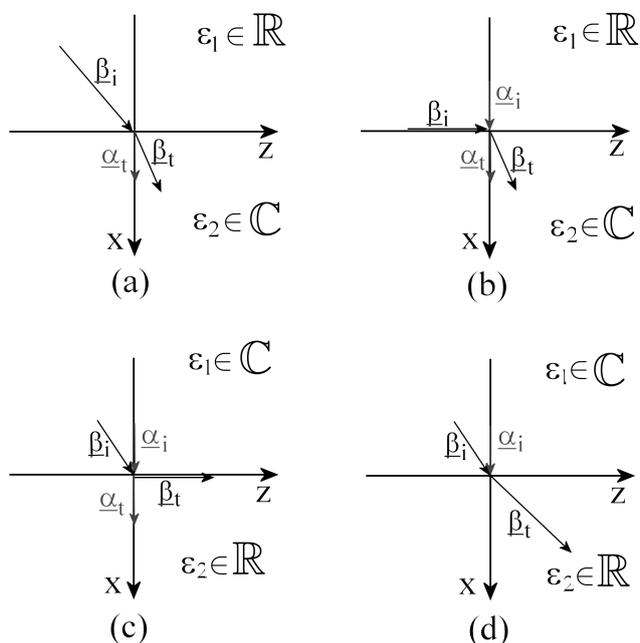


Figura 1.11: Rappresentazione dei vettori di propagazione di onde incidenti e trasmesse nel caso di: (a) un'onda piana ed uniforme che incide da un mezzo privo di perdite ad un mezzo con perdite, (b) un'onda piana e non uniforme che incide da un mezzo privo di perdite ad un mezzo con perdite, (c) un'onda piana non uniforme che incide da un mezzo con perdite ad un mezzo privo di perdite in riflessione totale, (d) un'onda piana non uniforme che incide da un mezzo con perdite ad un mezzo privo di perdite

nel senso che, se un'onda in polarizzazione ellittica incide su essa con questo angolo, l'onda riflessa tende ad essere in polarizzazione lineare ed in particolare in polarizzazione  $E$ .

Un altro fenomeno molto interessante presentato in letteratura è quello dell'onda non deviata, notato per la prima volta in [18], come sottolineato in [19]. Si può dimostrare che esiste un angolo di incidenza per il quale il vettore di fase dell'onda trasmessa è uguale a quello dell'onda incidente, il che significa che i piani equifase dell'onda trasmessa sono paralleli ai piani equifase dell'onda incidente, quindi la direzione di propagazione di fase dell'onda non viene modificata a causa dell'interfaccia. Ovviamente l'onda trasmessa è un'onda non uniforme, quindi ha una natura del tutto diversa dall'onda incidente.

Consideriamo ora il caso di un'onda piana non uniforme proveniente da un

mezzo privo di perdite e che incide sempre all'interfaccia con un mezzo con perdite. Supponiamo che l'onda incidente abbia il vettore di attenuazione ortogonale all'interfaccia e quindi il vettore di fase parallelo a tale interfaccia. La legge di Snell modificata assumerà la stessa forma precedente, ma questa volta però sappiamo che  $\xi_1 = \frac{\pi}{2}$ , quindi si avrà:

$$\begin{cases} \beta_1 = \beta_2 \sin \xi_2 \\ 0 = \alpha_2 \sin \zeta_2 \end{cases} \quad (1.165)$$

Come prima dovrà risultare  $\zeta_2 = 0$ , quindi come prima si avrà  $\xi_2 < \frac{\pi}{2}$ . Infine, essendo fisso  $\xi_1$ , questa volta  $\xi_2$  assumerà un valore fisso, a parità di  $\beta_1$ , che varrà:

$$\xi_2 = \arcsin \left( \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \quad (1.166)$$

La disposizione dei vettori di propagazione in questo caso è mostrata in figura 1.11b.

Prima di presentare il prossimo caso, si vuole far notare che nei due esempi precedenti, a due eccitazioni intrinsecamente diverse, corrisponde una stessa onda trasmessa. In particolare, scegliendo accuratamente le caratteristiche delle onde incidenti nei due casi si potrà avere proprio la stessa onda trasmessa. Ci si può chiedere allora cosa succederà nel caso reciproco. Presentiamo dunque l'esempio in cui un'onda piana non uniforme provenga da un mezzo con perdite,  $\varepsilon_1 \in \mathbb{C}$ , ed incida all'interfaccia con un mezzo privo di perdite. Supponiamo inoltre che l'onda incidente abbia il vettore di attenuazione ortogonale all'interfaccia, ovvero che si  $\zeta_1 = 0 \rightarrow \eta_1 = -\xi_1$ , si vedano le Figure 1.11c e 1.11d. La legge di Snell modificata si potrà quindi scrivere come segue:

$$\begin{cases} \beta_1 \sin \xi_1 = \beta_2 \sin \xi_2 \\ 0 = \alpha_2 \sin \zeta_2 \end{cases} \quad (1.167)$$

Come si può vedere la (1.167) è formalmente identica alla (1.163), ma le conclusioni a cui si giunge osservandola sono differenti, infatti questa volta il mezzo 2 è privo di perdite e quindi è contemplabile che sia  $\alpha_2 = 0$ . Dovremo quindi distinguere due casi, corrispondenti alle due possibili soluzioni della seconda delle (1.167): Il caso in cui sia  $\zeta_2 = 0$  e  $\alpha_2 \neq 0$  è rappresentato in Figura 1.11c.

Essendo  $\zeta_2 = 0 \rightarrow \eta_2 = \pi/2 \rightarrow \xi_2 = \pi/2$ , si ha inoltre che:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \beta_1 \sin \xi_1 \\ \alpha_2 &= \sqrt{\beta_2^2 - k_2^2} \end{aligned} \quad (1.168)$$

dovendo essere  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si ha:

$$\beta_2 = \beta_1 \sin \xi_1 > k_2 \quad (1.169)$$

si ha così una condizione sull'onda incidente perché l'onda trasmessa sia un'onda superficiale, questa è quindi la condizione di riflessione totale.

Il caso in cui sia  $\alpha_2 = 0$  è rappresentato in Figura 1.11d. Essendo  $\alpha_2 = 0$  la relazione di Snell torna ad essere quella classica:

$$\beta_1 \sin \xi_1 = \beta_2 \sin \xi_2 \quad \rightarrow \quad \xi_2 = \arcsin \left( \frac{\beta_1 \sin \xi_1}{\beta_2} \right) \quad (1.170)$$

notiamo che l'onda trasmessa in questo modo è un'onda piana e uniforme in un mezzo privo di perdite e quindi si ha  $\beta_2 = k_2$ . Confrontando il caso di Figura 1.11d con il caso di Figura 1.11a ed il caso di Figura 1.11c con il caso di Figura 1.11b, possiamo vedere che questi sono l'uno il caso reciproco dell'altro. Per quanto riguarda il caso di Figura 1.11b è bene notare che il vettore di attenuazione è stato disegnato nel verso positivo delle  $x$ , ma volendo esprimere un'onda superficiale, fisicamente più significativa, il verso di  $\underline{\alpha}$  va cambiato, senza che il procedimento sopra esposto subisca modifiche.

Prima di proseguire vogliamo sottolineare l'importanza di quest'ultimo caso studiato, infatti nella rappresentazione del campo tramite sviluppo di onde piane in un mezzo con perdite, come si vedrà nel seguito, si giunge alla conclusione che un campo qualsiasi può essere espresso come sovrapposizione di onde non uniformi, aventi il vettore di attenuazione diretto lungo  $x$ , quando vorremo quindi considerare la riflessione o la trasmissione di un generico campo elettromagnetico potremo svilupparlo in onde piane e gestire la riflessione e la trasmissione di singole onde piane del tipo appena visto. È notevole notare che, come nel caso privo di perdite, anche in questo caso si avranno alcune delle onde piane formanti lo sviluppo, che verranno trasmesse e altre che verranno totalmente riflesse.

Per finire vogliamo trattare un ultimo caso notevole, il caso di un'onda piana e uniforme che proviene da un mezzo con perdite e che incida all'interfaccia con un mezzo privo di perdite, si veda la Figura 1.12. In questo caso la legge di Snell modificata si potrà scrivere come segue:

$$\begin{aligned} \beta_1 \sin \xi_1 &= \beta_2 \sin \xi_2 \\ \alpha_1 \sin \xi_1 &= \alpha_2 \cos \xi_2 \end{aligned} \quad (1.171)$$

dove si è sfruttato il fatto che i vettori  $\underline{\beta}_1$  e  $\underline{\alpha}_1$  sono paralleli e che invece i vettori  $\underline{\beta}_2$  e  $\underline{\alpha}_2$  devono essere ortogonali, essendo il mezzo 2 privo di perdite (infatti  $\alpha_2$  non può essere nullo per la continuità della componente tangenziale all'interfaccia). Applicando la formula (1.120), si ottiene:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \sqrt{\frac{(\beta_1^2 + \alpha_1^2) \sin^2 \xi_1 + k_2^2 + \sqrt{[(\beta_1^2 + \alpha_1^2) \sin^2 \xi_1 + k_2^2]^2 - 4k_2^2 \beta_1^2 \sin^2 \xi_1}}{2}} \\ \alpha_2 &= \sqrt{\frac{(\beta_1^2 + \alpha_1^2) \sin^2 \xi_1 - k_2^2 + \sqrt{[(\beta_1^2 + \alpha_1^2) \sin^2 \xi_1 + k_2^2]^2 - 4k_2^2 \beta_1^2 \sin^2 \xi_1}}{2}} \end{aligned} \quad (1.172)$$

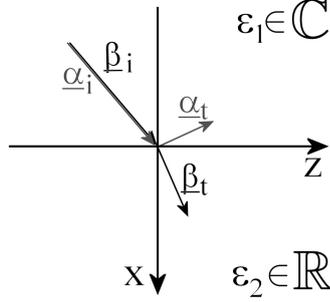


Figura 1.12: Rappresentazione dei vettori di propagazione di un'onda piana ed uniforme che incide all'interfaccia tra un mezzo con perdite ed un mezzo privo di perdite

Inoltre, osservando le equazioni in (1.171), si può notare che in questo caso non è permessa la riflessione totale, infatti per avere riflessione totale si deve avere  $\xi_2 = 0$ , ponendo questo valore nella seconda delle (1.171), vediamo che dà luogo ad una uguaglianza impossibile. Osservando la Figura 1.12 si può quindi vedere che l'onda trasmessa sarà sempre non uniforme, con il vettore di fase sempre diretto nel primo quadrante del piano  $(x, z)$ .

### 1.6.2 Onda trasmessa non attenuata

Vogliamo andare a studiare in maggior dettaglio il caso particolare in cui un'onda piana, in generale non uniforme, incida all'interfaccia con due mezzi con perdite con un angolo  $\xi_i = \xi_i^c$ . Come spiegato nel paragrafo 1.5.1, questo è l'angolo per il quale l'onda trasmessa presenta un angolo del vettore di attenuazione  $\zeta_t = \pi/2$ , ovvero per il quale l'onda trasmessa ha il vettore di attenuazione parallelo all'interfaccia. Vediamo che in questo caso l'onda trasmessa non ha componenti di attenuazione ortogonali all'interfaccia e quindi si propaga indefinitamente allontanandosi da essa. La disposizione dei vettori di fase ed attenuazione nei due mezzi è mostrata in Fig. 1.13a. Si consideri, per esempio, il caso di due mezzi aventi le seguenti proprietà:  $\varepsilon_1 = 4$ ,  $\sigma_1 = 0.01$  S/m,  $\varepsilon_2 = 10$  e  $\sigma_2 = 0.001$  S/m, ad una frequenza di  $f_0 = 600$  MHz. La potenza dell'onda, ovvero l'ampiezza del vettore di Poynting, nelle vicinanze dell'interfaccia è mostrata in Fig. 1.14 per diversi valori di  $\eta_i$ , lungo la retta  $z = 0$ . Tale potenza è stata ottenuta tramite simulazioni sul software commerciale Comsol 4.0a. Vediamo che la potenza si attenua drasticamente nel primo mezzo, a causa delle conducibilità  $\sigma_1$ , mentre l'onda trasmessa ha una potenza costante allontanandosi dall'interfaccia. Notiamo che le piccole oscillazioni della potenza nel mezzo 1 ( $x < 0$ ) sono dovute alla potenza riflessa. Questo fenomeno è straordinario,

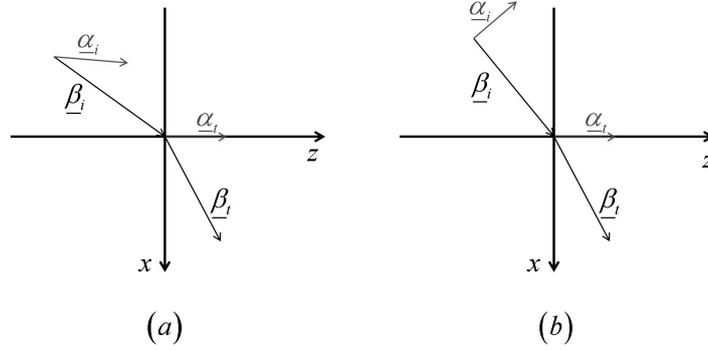


Figura 1.13: (a) Vettori di fase e di attenuazione all'interfaccia tra due mezzi con perdite nel caso in cui l'onda incidente sia all'angolo critico in modo da generare l'onda trasmessa non attenuata. (b) Vettori di fase e di attenuazione all'interfaccia tra dielettrico-conduttore nel caso in cui l'onda incidente sia all'angolo critico in modo da generare l'onda trasmessa non attenuata. Come si vede l'onda nel dielettrico deve essere un'onda non uniforme del tipo onda leaky.

infatti consente di penetrare un mezzo con perdite con un'onda raggiungendo profondità, almeno nel caso teorico, arbitrariamente grandi.

Si mostrerà ora come questo fenomeno possa essere ottenuto anche all'interfaccia tra un mezzo privo di perdite ed un mezzo con perdite. In questo caso l'onda incidente, dovendo mantenere un vettore di attenuazione, in modo da assicurarne la presenza nella componente tangenziale, dovrà essere necessariamente non uniforme, con  $\eta_i = \pi/2$ . Onde di questo tipo sono ampiamente studiate nella letteratura, sia nel caso di campi guidati che in spazio libero [9, 20]. Andando ad inserire questa informazione in (1.141), otteniamo la seguente condizione:

$$2\beta_i\alpha_i \sin \xi_i \cos \xi_i = \text{Im}(k_2^2) \quad (1.173)$$

da cui otteniamo semplicemente:

$$\xi_c = \frac{1}{2} \arcsin \left[ \frac{\text{Im}(k_2^2)}{\beta_i\alpha_i} \right] \quad (1.174)$$

tale angolo coincide con  $\xi_i^c$  solo se  $\text{Re}(k_{i2}^2) < \text{Re}(k_2^2)$ . Inoltre, si vede che l'angolo in (1.174) esiste solo per valori di  $\beta_i$  (ovvero  $\alpha_i$ ) sufficientemente grandi. L'argomento dell'arccoseno infatti deve sempre essere minore dell'unità, quindi si dovrà avere:

$$\frac{\text{Im}(k_2^2)}{\beta_i\alpha_i} < 1 \quad (1.175)$$

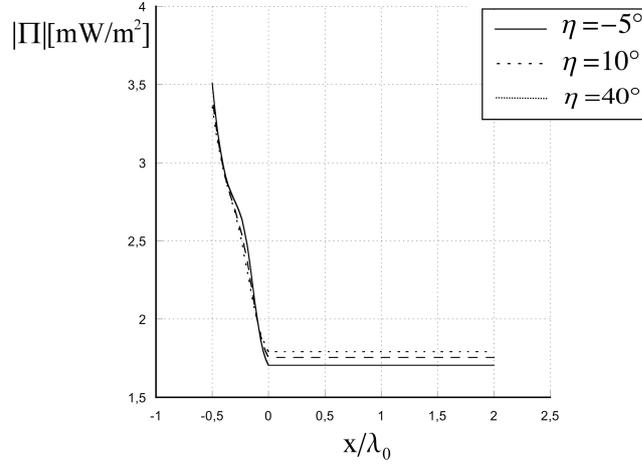


Figura 1.14: Valore assoluto del vettore di Poynting nelle vicinanze di un'interfaccia tra due mezzi con perdite, quando l'onda incidente l'angolo del vettore di fase pari a  $\xi_1^c$ . Si vede che la potenza dell'onda trasmessa rimane costante allontanandosi dall'interfaccia anche se il mezzo in cui si propaga presenta una conducibilità non nulla.

da cui, ricordando che  $\beta_i$ ,  $\alpha_i$  e  $\text{Im}(k_2^2)$  sono per definizione reali e positivi, ed utilizzando la relazione (1.26), si può scrivere:

$$\beta_i^4 - k_1^2 \beta_i^2 - \text{Im}(k_2^2)^2 > 0 \quad (1.176)$$

da cui otteniamo:

$$\beta_{\min} = \frac{k_1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left[ \frac{2\text{Im}(k_2^2)}{k_1^2} \right]^2}} \quad (1.177)$$

$\beta_{\min}$  rappresenta il minimo valore di  $\beta_i$  per il quale si può ottenere il fenomeno dell'onda trasmessa non attenuata ortogonalmente all'interfaccia quando è considerata un'interfaccia dielettrico-conduttore. Vediamo che il valore minimo è tanto maggiori quanto maggiori sono le perdite nel secondo mezzo. Per spiegare questo fenomeno è sufficiente notare che in un mezzo con perdite maggiori, sarà necessario, in generale, un'attenuazione maggiore, quindi, dovendo essere maggiore l'attenuazione nel secondo mezzo ed essendo essa uguale alla componente tangenziale dell'attenuazione nel primo mezzo, l'attenuazione nel primo mezzo dovrà essere maggiore, ma essendo quest'ultima quasi linearmente legata a  $\beta_i$ , si capisce il motivo del legame espresso in (1.177).

In Figura 1.15, è mostrato l'andamento del vettore di Poynting all'interfaccia considerata per un'onda non uniforme che incida con l'angolo critico (1.174).

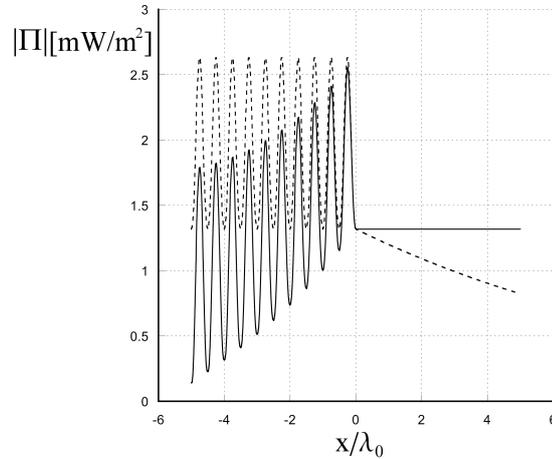


Figura 1.15: Valore assoluto del vettore di Poynting nelle vicinanze di un'interfaccia tra un mezzo privo di perdite e un mezzo con perdite, quando l'onda incidente l'angolo del vettore di fase pari a  $\xi_1^{\zeta}$ . Si considera il caso in cui l'onda incidente sia un'onda piana e uniforme (linea tratteggiata) e un'onda piana non uniforme (linea continua). Si vede che la potenza dell'onda trasmessa, nel caso di onda incidente uniforme, si attenua nel mezzo dissipativo, viceversa, l'onda trasmessa, nel caso di onda incidente non uniforme, rimane costante allontanandosi dall'interfaccia anche se il mezzo in cui si propaga presenta una conducibilità non nulla.

Nella stessa figura è mostrato l'andamento di un'onda piana uniforme incidente allo stesso angolo. Si può vedere come, nel secondo mezzo, un'onda inizi a propagarsi senza attenuazione, mentre l'altra si attenua a causa delle perdite nel mezzo. Come primo mezzo è stato considerato il vuoto, mentre come secondo mezzo è stato considerato un dielettrico avente permittività relativa complessa  $\varepsilon_2 = 5 + i0.03$ , a una lunghezza d'onda  $\lambda_0 = 1550$  nm. Si è scelto di simulare a frequenze ottiche per sottolineare come il fenomeno considerato possa essere rilevato a qualsiasi frequenza, partendo dalle microonde, fino alla frequenze ottiche

In Figura 1.16, si può vedere il campo elettrico dell'onda trasmessa non attenuata in una mappa di campo bidimensionale. I mezzi considerati sono gli stessi di Figura 1.15. Qui si può vedere facilmente come l'onda, pur non essendo attenuata in direzione ortogonale all'interfaccia, essa è fortemente attenuata parallelamente a essa. Di conseguenza l'onda trasmessa consiste di un onda fortemente limitata delle dimensioni trasverse.

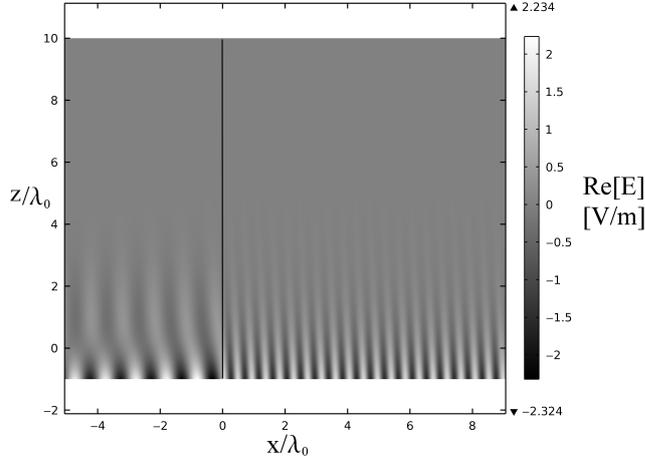


Figura 1.16: Mappa di campo elettrico bidimensionale sul piano  $(x, z)$ . Viene considerata un'onda piana non uniforme incidente all'interfaccia tra un dielettrico non dissipativo e un mezzo con perdite all'angolo critico  $\xi_i^c$ . Vediamo che l'onda trasmessa si propaga senza attenuarsi allontanandosi dall'interfaccia. Tuttavia, si vede che l'onda trasmessa è fortemente attenuata parallelamente all'interfaccia stessa.

## 1.7 Spettro di onde piane in mezzi con perdite

Nello studio delle onde elettromagnetiche è noto e diffusamente utilizzato il concetto di spettro di onde piane di un generico campo. Tale spettro è definito tramite la trasformata di Fourier del campo elettromagnetico, ovvero come [21]:

$$\hat{\underline{E}}(k_x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}(x, y, z) \exp(-ik_x x) dx \quad (1.178)$$

In questo modo il generico campo elettromagnetico può essere sviluppato in onde piane come segue:

$$\underline{E}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\underline{E}}_{k_x}(k_x, y, z) \exp(ik_x x) dk_x \quad (1.179)$$

In tali espressioni è implicito che la variabile  $k_x$  sia puramente reale. Nel caso in cui il mezzo presenti delle perdite le componenti del vettore di propagazione di un'onda piana generica risultano, come si è già visto, in generale complesse, quindi si deve chiarire il significato della trasformazione di Fourier (1.178), richiedendo quest'ultima che le variabili, sia del dominio di trasformazione che del dominio di antitrasformazione, siano reali. Se si considera un campo dipendente dalle sole variabili  $x$  e  $z$ , sarà sempre possibile calcolarne la trasformata di

Fourier come in (1.178), dove la variabile  $k_x$  sarà sempre reale. A questo punto l'antitrasformata si potrà scrivere in modo classico. In questo modo le onde piane che compongono lo spettro saranno molto particolari, esse infatti avranno la componente del vettore di propagazione lungo l'asse  $x$  sempre reale, mentre la componente lungo  $z$  sempre complessa, saranno quindi delle particolari onde non uniformi che si attenuano tutte nella stessa direzione, ovvero la direzione trasversa rispetto a quella in cui si sta eseguendo la trasformazione. Si può vedere che il ragionamento rimane il medesimo quando si considerano campi elettromagnetici tridimensionali e si esegue una trasformazione bidimensionale [22]. Praticamente scegliendo di operare in questo modo si sta in realtà scegliendo a priori il tipo di onde piane che rappresenteranno il campo. Abbiamo tra l'altro visto nel paragrafo 1.6.1 che tali onde all'interfaccia tra un mezzo non dissipativo e un mezzo con perdite si comportano in modo del tutto analogo a quanto fanno le onde piane e uniformi all'interfaccia tra due mezzi dissipativi.

Per quanto detto, l'uso della trasformata di Fourier impone che le onde piane formanti lo spettro siano tutte non uniformi<sup>8</sup>. Sorge spontanea la domanda se sia possibile allora definire uno spettro di onde piane in un mezzo con perdite in cui lo spettro possa separarsi in due parti, uno spettro omogeneo formato da sole onde uniformi e uno spettro evanescente formato da sole onde non uniformi. In modo da avere una trattazione analoga a quella che si ha nei mezzi privi di perdite. Per estendere la trattazione classica al caso di mezzi con perdite si può ricorrere ad un tipo di trasformata le cui variabili siano definite nel campo complesso. Risulta naturale in questo senso utilizzare, in luogo della trasformata di Fourier, la trasformata bilatera di Laplace. In questo modo si potrà definire lo spettro complesso di un generico campo elettromagnetico  $\underline{E}(x, y, z)$  come la sua trasformata di Laplace bilatera, ovvero come [23]:

$$\hat{\underline{E}}(s, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}(x, y, z) \exp(-sx) dx \quad (1.180)$$

Tale espressione è formalmente identica alla (1.178), ma in questo caso la variabile  $s$  risulta in generale complessa e la funzione  $\hat{\underline{E}}(s, y, z)$  risulta olomorfa in un certo dominio  $A$  del piano complesso di  $s$ . Tale dominio coincide con l'insieme di convergenza dell'integrale (1.180), il quale a sua volta è una striscia di piano del tipo  $\beta_1 < \text{Re}[s] < \beta_2$ , dove  $\beta_1$  e  $\beta_2$  sono i valori estremi della parte reale di  $s$  per i quali è assicurata la convergenza; si noti che  $\beta_1$  e  $\beta_2$  possono coincidere rispettivamente con  $-\infty$  e  $+\infty$  [23]. A questo punto si potrà scrivere l'antitrasformata di Laplace come segue:

$$\underline{E}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_0 - i\infty}^{\xi_0 + i\infty} \hat{\underline{E}}(s, y, z) \exp(sx) ds \quad (1.181)$$

dove  $\xi_0$  è un particolare valore della parte reale di  $s$  contenuto nell'insieme di convergenza, ovvero nel dominio di olomorfia, ovvero  $\beta_1 < \xi_0 < \beta_2$ . Si noti

<sup>8</sup>In realtà tutte meno una, infatti l'unica onda che si propaga esattamente nella direzione lungo la quale si sta trasformando è un'onda piana uniforme non attenuata.

che l'integrale (1.181) si estende lungo una retta parallela all'asse immaginario del piano  $s$ . Può meravigliare il fatto che l'antitrasformata di Laplace non dipenda dalla  $\text{Re}[s]$ , si può vedere però che questa è una diretta conseguenza del primo teorema integrale di Cauchy, come è dimostrato in [23]. Dall'espressione (1.181) non risulta evidente lo sviluppo in onde piane del campo, quindi ora si modificherà la trasformata di Laplace in modo da esplicitare tale sviluppo. Un metodo possibile è quello di utilizzare, in luogo della trasformata di Laplace, la trasformata di Fourier generalizzata [24]. Tale trasformata si ottiene a partire dalla trasformata di Laplace tramite un semplice cambiamento di variabile del tipo:  $s = ik_x$ , con  $k_x \in \mathbb{C}$ . Tramite tale sostituzione la trasformata di Fourier generalizzata del campo elettrico potrà essere scritta come segue:

$$\hat{E}(k_x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}(x, y, z) \exp(-ik_x x) dx \quad (1.182)$$

per quanto riguarda l'antitrasformata di Fourier generalizzata vale invece la seguente espressione:

$$\underline{E}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\eta_0}^{+\infty+i\eta_0} \hat{E}(k_x, y, z) \exp(ik_x x) dk_x \quad (1.183)$$

In questo caso l'integrale si estende ad una retta parallela all'asse reale del piano di  $k_x$  e si deve avere  $b_1 < \text{Im}[k_x] < b_2$ , dove per  $b_1$  e  $b_2$  valgono gli stessi discorsi fatti per  $\beta_1$  e  $\beta_2$  nell'ambito della trasformata di Laplace. L'espressione in (1.183) può essere interpretata come uno sviluppo in onde piane del campo elettromagnetico  $\underline{E}(x, y, z)$ .

A questo punto si deve chiarire come sia possibili dividere lo spettro in una parte omogenea, formata solo da onde piane uniformi, e di una parte evanescente. Ciò è possibile attraverso un cambiamento del percorso di integrazione dell'integrale (1.183). Infatti, nell'ipotesi in cui l'integrando non presenti poli o altre singolarità, si potrà sempre scrivere l'integrale come segue:

$$\underline{E}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \hat{E}(k_x, y, z) \exp(ik_x x) dk_x \quad (1.184)$$

dove  $\mathcal{C}$  è una retta sul piano complesso di  $k_x$ , tale da avere come coefficiente angolare  $\tan \phi_k$ , dove  $\phi_k$  è l'argomento del numero d'onda complesso. In questo modo si impone che  $k_x$  sia sempre il risultato del prodotto di  $k$  per un numero reale che varia tra  $-\infty$  e  $+\infty$ . Come conseguenza  $k_x$  e  $k_z$  risultano proprio le componenti di un'onda piana e uniforme. Quanto detto si può dimostrare facilmente, infatti, se:

$$k_x = ka \quad (1.185)$$

dove  $a$  è un parametro reale, allora:

$$k_z = \sqrt{k^2 - k^2 a^2} = k\sqrt{1 - a^2} \quad (1.186)$$

vediamo quindi che per  $a \in [-1, 1]$ , sarà sicuramente possibile porre  $a = \sin \psi$  e le onde rappresentate in tale intervallo saranno tutte uniformi, quindi lo spettro in questo tratto del percorso di integrazione potrà essere interpretato come lo spettro omogeneo, in totale analogia con il caso di mezzi privi di perdite. Per quanto riguarda il caso  $|a| \in [1, +\infty)$ , in questo caso le onde piane formanti lo spettro sono tutte non uniformi e la parte dello spettro relativo potrà essere considerato come lo spettro evanescente. Si deve sottolineare che lo spettro lungo il percorso di integrazione  $\mathcal{C}$  potrebbe non convergere in quanto la maggior parte dei campi elettromagnetici di interesse nella pratica presentano un certo numero di singolarità che rendono impossibile una adeguata modifica del percorso di integrazione. Tuttavia, è sempre possibile modificare il percorso di integrazione in modo da ottenere lo spettro omogeneo e poi scegliere opportunamente i tratti del percorso di integrazione che vanno all'infinito in modo da garantire la convergenza. Tale argomento verrà approfondito nel paragrafo 2.4.

## Capitolo 2

# Diffrazione da strutture cilindriche

### 2.1 Equazione vettoriale delle onde in coordinate generiche

Prima di risolvere il problema della diffrazione di un'onda piana da un cilindro, è bene definire il problema della soluzione dell'equazione delle onde vettoriale in un generico sistema di coordinate. In questo modo, infatti, si ricaverà un formalismo grazie al quale sarà possibile semplificare il problema elettromagnetico in modo considerevole. Quanto segue è stato tratto da [1].

Come è ben noto, un generico campo elettromagnetico  $\underline{C} = \{\underline{E}, \underline{H}, \underline{D}, \underline{B}\}$ , in assenza di sorgenti, in un mezzo lineare, stazionario, omogeneo, isotropo e non dispersivo, dovrà rispettare la generica equazione delle onde omogenea:

$$\nabla^2 \underline{C} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \underline{C}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \underline{C}}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

la quale può anche essere espressa nel dominio della frequenza, dove generalmente prende il nome di equazione di Helmholtz, supponendo una dipendenza dal tempo del tipo  $e^{-i\omega t}$ , la quale verrà omessa d'ora in poi, assumendo la seguente forma:

$$\nabla \nabla \cdot \underline{C} - \nabla \times \nabla \times \underline{C} + k^2 \underline{C} = 0 \quad (2.2)$$

dove si è usata la ben nota identità:

$$\nabla^2 \underline{C} = \nabla \nabla \cdot \underline{C} - \nabla \times \nabla \times \underline{C} \quad (2.3)$$

e si è posto, come di consueto  $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu + i\sigma \omega$ . Questa equazione differenziale vettoriale può essere proiettata lungo i versori,  $\underline{q}_{0i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , di un generico sistema di riferimento, diventando un sistema di tre equazioni differenziali

scalari. Tale sistema però non è facilmente risolvibile nella maggior parte dei sistemi di coordinate. Può quindi essere molto utile entrare in possesso di una procedura generale che permetta di risolvere l'equazione vettoriale e che sia applicabile in ogni sistema di riferimento. Per fare ciò si consideri l'equivalente scalare dell'equazione 2.2:

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \quad (2.4)$$

Questa semplice equazione differenziale scalare ha soluzione nella maggior parte dei sistemi di coordinate canonici.<sup>1</sup> Si definiscano ora i seguenti vettori:

$$\underline{L} = \nabla\psi; \quad \underline{M} = \nabla \times (\underline{a}_0\psi); \quad \underline{N} = \frac{1}{k}\nabla \times \underline{M}; \quad (2.5)$$

dove  $\underline{a}_0$  è un versore costante qualsiasi, a volte chiamato vettore pilota [26]. È possibile dimostrare facilmente che questi vettori soddisfano l'equazione di Helmholtz vettoriale.

Per quanto riguarda  $\underline{L}$ :

$$\nabla\nabla \cdot (\nabla\psi) - \nabla \times \nabla \times (\nabla\psi) + k^2\nabla\psi = 0 \quad (2.6)$$

ricordando che  $\nabla \times \nabla\psi = 0$  e che  $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ , si ottiene:

$$\nabla\nabla^2\psi + k^2\nabla\psi = 0 \quad \rightarrow \quad -k^2\nabla\psi + k^2\nabla\psi = 0 \quad \text{c.v.d.} \quad (2.7)$$

Per quanto riguarda  $\underline{M}$ :

$$\nabla\nabla \cdot [\nabla \times (\underline{a}_0\psi)] - \nabla \times \nabla \times [\nabla \times (\underline{a}_0\psi)] + k^2\nabla \times (\underline{a}_0\psi) = 0 \quad (2.8)$$

Ricordando che  $\nabla \cdot [\nabla \times (\underline{A})] = 0$  ed usando l'identità vettoriale (2.3) sui rotori più interni del secondo termine, si ottiene:

$$-\nabla \times [\nabla\nabla \cdot (\underline{a}_0\psi) - \nabla^2(\underline{a}_0\psi)] + k^2\nabla \times (\underline{a}_0\psi) = 0 \quad (2.9)$$

Ricordando che  $\nabla \times \nabla\phi = 0$  e potendo portare fuori il versore  $\underline{a}_0$ , essendo costante, dal Lapalciano, si potrà scrivere:

$$\nabla \times [\underline{a}_0\nabla^2\psi] + k^2\nabla \times (\underline{a}_0\psi) = 0 \quad \rightarrow \quad -k^2\nabla \times (\underline{a}_0\psi) + k^2\nabla \times (\underline{a}_0\psi) = 0 \quad \text{c.v.d.} \quad (2.10)$$

Per quanto riguarda  $\underline{N}$ :

$$\frac{1}{k}\nabla\nabla \cdot (\nabla \times \underline{M}) - \frac{1}{k}\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \underline{M}) + k(\nabla \times \underline{M}) = 0 \quad (2.11)$$

Essendo  $\nabla \cdot \nabla \times \underline{A} = 0$  ed avendo dimostrato che  $-\nabla \times \nabla \times \underline{M} + k^2\underline{M} = 0$ , potremo scrivere:

$$-\frac{1}{k}\nabla \times (k^2\underline{M}) + k\nabla \times \underline{M} = 0 \quad \rightarrow \quad -k\nabla \times \underline{M} + k\nabla \times \underline{M} = 0 \quad \text{c.v.d.} \quad (2.12)$$

<sup>1</sup>I sistemi di coordinate nei quali è nota la soluzione dell'equazione di Helmholtz scalare sono 11 [25]: cartesiane ortogonali, cilindriche circolari, cilindriche ellittiche, cilindriche paraboliche, sferiche, sferoidali prolate, sferoidali oblate, coniche, ellissoidali, paraboloidali, paraboliche di rotazione

I vettori  $\underline{L}$ ,  $\underline{M}$  e  $\underline{N}$  si prestano quindi ad essere usati per rappresentare il generico campo elettromagnetico in un dato sistema di coordinate. Tali vettori hanno altre preziose proprietà, come per esempio:

$$\underline{M} = \frac{1}{k} \nabla \times \underline{N}; \quad \nabla \cdot \underline{L} = \nabla^2 \psi = -k^2 \psi \quad (2.13)$$

La prima di queste uguaglianze, associata alla terza uguaglianza in 2.5 ci dice che i vettori  $\underline{M}$  e  $\underline{N}$  sono l'uno il rotore dell'altro, a meno del fattore  $1/k$ . Infine si possono facilmente dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\nabla \times \underline{L} = 0; \quad \nabla \cdot \underline{M} = 0; \quad \nabla \cdot \underline{N} = 0; \quad (2.14)$$

ovvero si ha che il vettore  $\underline{L}$  è irrotazionale, mentre i vettori  $\underline{M}$  e  $\underline{N}$  sono solenoidali. Queste ultime equazioni sono molto importanti, infatti ci dicono che un campo in assenza di sorgenti potrà essere espresso dai soli vettori  $\underline{M}$  e  $\underline{N}$ , senza perdita di generalità, mentre il vettore  $\underline{L}$  dovrà necessariamente entrare in gioco nel caso in cui siano presenti delle sorgenti di campo.

Aggiungiamo, infine, che la generica soluzione  $\psi(\underline{r})$  dell'equazione di Helmholtz sarà in realtà un set di soluzioni  $\psi_n$  (autovettori) che formeranno una base dello spazio vettoriale  $L^2$  delle funzioni a quadrato sommabili (Spazio di Hilbert). Analogamente, a questo set di soluzioni scalari sarà associato un set di vettori  $\underline{L}_n$ ,  $\underline{M}_n$  e  $\underline{N}_n$ . Se, per esempio, consideriamo un generico potenziale vettore  $\underline{A}$ , esso potrà in generale essere espresso come una combinazione lineare del set di vettori  $\underline{L}_n$ ,  $\underline{M}_n$  e  $\underline{N}_n$ :

$$\underline{A} = \frac{1}{i\omega\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \underline{M}_n + b_n \underline{N}_n + c_n \underline{L}_n) \quad (2.15)$$

essendo  $\underline{H} = \nabla \times \underline{A}$  e ricordando che, per le equazioni di Maxwell, si ha:

$$\underline{E} = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \nabla \times \underline{H} \quad \underline{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times \underline{E} \quad (2.16)$$

si potranno quindi scrivere, sfruttando le proprietà dei vettori  $\underline{L}_n$ ,  $\underline{M}_n$  e  $\underline{N}_n$ , le seguenti espressioni per il campo elettrico e magnetico:

$$\underline{E} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \underline{M}_n + b_n \underline{N}_n) \quad (2.17)$$

$$\underline{H} = \frac{k}{i\omega\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \underline{N}_n + b_n \underline{M}_n) \quad (2.18)$$

Si vede che le proprietà dei vettori  $\underline{L}_n$ ,  $\underline{M}_n$  e  $\underline{N}_n$  rendono estremamente semplice il calcolo dei campi.

Infine, si vuole mostrare un'altra importante proprietà di questo formalismo. In coordinate rettangolari, come è ben noto, la soluzione dell'equazione di

Helmholtz scalare può essere scritta, considerando un'ampiezza unitaria, come segue:

$$\psi(\underline{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.19)$$

quindi i vettori  $\underline{L}$ ,  $\underline{M}$  e  $\underline{N}$  potranno essere scritti come segue:

$$\underline{L} = i\psi\mathbf{k}; \quad \underline{M} = i\psi\mathbf{k} \times \underline{a}_0; \quad \underline{N} = \frac{1}{k}\psi(\mathbf{k} \times \underline{a}_0) \times \mathbf{k} \quad (2.20)$$

Supponiamo ora che  $\psi$  non sia un'onda piana, ma sia una generica soluzione dell'equazione di Helmholtz in un generico sistema di coordinate; come è ben noto potremo sempre sviluppare la funzione  $\psi$  in onde piane come segue:

$$\psi(\underline{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k_x, k_y) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dk_x dk_y = \int \int g(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\alpha d\beta \quad (2.21)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono gli angoli in coordinate sferiche che il generico vettore  $\mathbf{k}$  forma con gli assi coordinate e  $g(\alpha, \beta)$  è lo spettro, i.e. la trasformata di Fourier bidimensionale, della funzione  $\psi$ . Per sviluppare i vettori  $\underline{L}$ ,  $\underline{M}$  e  $\underline{N}$  in onde piane sarà sufficiente applicare le definizioni di tali vettori all'espressione (2.21), ottenendo:

$$\begin{aligned} \underline{L} &= i \int \int g(\alpha, \beta) \mathbf{k}(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\beta d\alpha \\ \underline{M} &= i \int \int g(\alpha, \beta) \mathbf{k}(\alpha, \beta) \times \underline{a}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\beta d\alpha \\ \underline{N} &= \frac{1}{k} \int \int g(\alpha, \beta) [\mathbf{k}(\alpha, \beta) \times \underline{a}_0] \times \mathbf{k}(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\beta d\alpha \end{aligned} \quad (2.22)$$

si deve notare che gli integrali in (2.21) ed in (2.22) non hanno gli estremi di integrazione perché questi variano a seconda dell'onda che si deve rappresentare, in particolare dipendono dal tipo di onde che si stanno rappresentando. Per approfondire l'argomento si veda [1, 27]. Può essere interessante notare che gli argomenti degli integrali hanno la medesima forma delle espressioni in (2.20), il che significa semplicemente che il generico campo, rappresentato da tali vettori, si scrive come sovrapposizione integrale dei vettori rappresentanti le singole onde piane dello spettro.

In conclusione, i vettori  $\underline{L}$ ,  $\underline{M}$  e  $\underline{N}$  sono uno strumento molto potente che permette, una volta nota la soluzione dell'equazione di Helmholtz scalare, di ottenere la soluzione dell'equazione di Helmholtz vettoriale. Inoltre, noto lo spettro di onde piane della funzione scalare, è automaticamente noto lo spettro di onde piane di tali vettori, ovvero di tutto il campo.

## 2.2 Armoniche cilindriche vettoriali

Nel paragrafo precedente, si è visto come la soluzione dell'equazione delle onde vettoriale in coordinate curvilinee generiche è scrivibile previo la conoscenza

della soluzione della corrispondente equazione scalare.<sup>2</sup> Nel presente paragrafo si vuole ricavare la soluzione dell'equazione scalare delle onde in coordinate cilindriche, in modo da poter poi andare a scrivere la generica soluzione dell'equazione vettoriale. Definiamo quindi un sistema cilindrico circolare  $(\underline{\rho}_0, \underline{\theta}_0, \underline{z}_0)$ . Ricordiamo ora le espressioni assunte dall'operatore  $\nabla$  in coordinate cilindriche[28]:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\underline{\rho}_0 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\underline{\theta}_0 + \frac{\partial\psi}{\partial z}\underline{z}_0 \quad (2.23)$$

$$\nabla \cdot \underline{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (2.24)$$

$$\nabla \times \underline{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\underline{\rho}_0 + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\underline{\theta}_0 + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\right]\underline{z}_0 \quad (2.25)$$

L'equazione (2.4) in coordinate cilindriche si ottiene immediatamente applicando la relazione (2.24) alla relazione (2.23), si ottiene così la seguente equazione:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0 \quad (2.26)$$

L'equazione si risolve, come di consueto, con il metodo di separazione delle variabili. Scriviamo allora la funzione  $\psi(\rho, \theta, z)$  come il prodotto di tre funzioni ognuna dipendente da un'unica variabile:

$$\psi(\rho, \theta, z) = R(\rho)\Theta(\theta)Z(z) \quad (2.27)$$

In questo modo l'equazione diventa la seguente:

$$\frac{\Theta Z}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + \frac{RZ}{\rho^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} + \Theta Z\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 R\Theta Z = 0 \quad (2.28)$$

A questo punto si dividono ambo i membri per la funzione  $\psi$ :

$$\frac{1}{\rho R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0 \quad (2.29)$$

se ora si deriva e si integra l'equazione rispetto a  $z$ , si ottiene un'equazione differenziale del secondo ordine in  $z$ :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 Z = 0 \quad (2.30)$$

La cui soluzione può essere scritta in forma di un esponenziale complesso:

$$Z(z) = e^{ik_z z} \quad (2.31)$$

---

<sup>2</sup>In realtà si richiede anche la possibilità di definire un versore arbitrario costante, cosa che è possibile nel caso di coordinate cilindriche, ma non è possibile invece in altri casi più complessi, come nel caso delle onde sferiche in cui nessuno dei versori coordinati  $(\underline{r}_0, \underline{\theta}_0, \underline{\phi}_0)$  è costante per ogni punto dello spazio.

dove, come è noto, il parametro  $k_z$  sarà il numero d'onda lungo la direzione  $z$  e dovrà essere determinato imponendo le condizioni fisiche del caso particolare che si vuole studiare<sup>3</sup>. Inserendo la funzione (2.31) nell'equazione (2.29), si ottiene:

$$\frac{1}{\rho R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + k^2 - k_z^2 = 0 \quad (2.32)$$

si moltiplichino ora ambo i membri per  $\rho^2$  e si ottiene:

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \rho^2 (k^2 - k_z^2) = 0 \quad (2.33)$$

A questo punto si può derivare e integrare l'equazione rispetto a  $\theta$ , ottenendo un'equazione differenziale del secondo ordine in  $\theta$ :

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + m^2 \Theta = 0 \quad (2.34)$$

la cui soluzione è:

$$\Theta_m(\theta) = e^{im\theta} \quad (2.35)$$

Di nuovo, il parametro  $m$  dipende dal caso che si vuole studiare. In assenza di discontinuità angolari, la funzione  $\Theta(\theta)$  dovrà risultare periodica e quindi  $m$  dovrà essere un numero intero. Viceversa, se sono presenti discontinuità angolari, come nel caso della presenza di settori angolari che limitano lo spazio tra due particolari angoli, il parametro  $m$  potrà assumere anche valori non interi. Andando a inserire questa soluzione nell'equazione (2.33), si ottiene:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + [\rho^2 (k^2 - k_z^2) - m^2] R = 0 \quad (2.36)$$

In questa equazione si riconosce subito l'equazione differenziale di Bessel, la cui soluzione è scrivibile come una generica funzione di Bessel:

$$R(\rho) = Z_m(k_\rho \rho) \quad (2.37)$$

dove si è definito il numero d'onda radiale  $k_\rho = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ <sup>4</sup>. Con la lettera  $Z_m(x)$ , si indica la generica funzione di Bessel, che può coincidere con le funzioni di prima, seconda, terza o quarta specie  $Z_m(x) = \{J_m, Y_m, H_m^{(1)}, H_m^{(2)}\}$ . A questo punto siamo in grado di scrivere la singola armonica cilindrica scalare che è soluzione dell'equazione delle onde in coordinate cilindriche:

$$\psi_m(x) = Z_m(k_\rho \rho) e^{im\theta} e^{ik_z z} \quad (2.38)$$

<sup>3</sup>Nella letteratura è molto diffusa l'abitudine di chiamare tale numero d'onda  $h$  per alleggerire la notazione [1]. Qui si preferisce mantenere la convenzione in uso per le onde piane in modo da non generare confusione

<sup>4</sup>Anche in questo caso, nella letteratura, è frequente l'uso della lettera  $l$  o della lettera  $\lambda$  per rappresentare il numero d'onda radiale. Di nuovo preferiamo una trattazione più pesante, ma sicuramente che dia meno adito a fraintendimenti.

A questo punto è possibile ricavare le armoniche cilindriche vettoriali. Sfruttando le espressioni (2.5), con l'ausilio delle relazioni (2.23)-(2.25), scegliendo come versore costante il versore coordinato  $\underline{z}_0$  e usando la funzione (2.38) come generatrice, si ottengono le seguenti espressioni:

$$\underline{M}_m = e^{im\theta} e^{ik_z z} \left[ \frac{im}{\rho} Z_m(k_\rho \rho) \underline{\rho}_0 - \frac{\partial Z_m(k_\rho \rho)}{\partial \rho} \underline{\theta}_0 \right] \quad (2.39)$$

$$\underline{N}_m = e^{ik_z z} e^{im\theta} \left[ i \frac{k_z}{k} Z_m^{(p)'}(k_\rho \rho) \underline{\rho}_0 - \frac{mk_z}{k\rho} Z_m^{(p)}(k_\rho \rho) \underline{\theta}_0 + \frac{k_\rho^2}{k} Z_m^{(p)}(k_\rho \rho) \underline{z}_0 \right] \quad (2.40)$$

Nel calcolare l'espressione (2.40) si è tenuto conto che la funzione  $Z_m$  è soluzione dell'equazione differenziale (2.36).

### 2.3 Diffrazione da un cilindro immerso in un mezzo con perdite

In questo paragrafo si vuole risolvere il problema della diffrazione da un cilindro indefinito immerso in un mezzo con perdite, estendendo i risultati già noi in letteratura nel caso di mezzi privi di perdite. La diffrazione da cilindro in mezzi con perdite è stata risolta per la prima volta in [29]. Tuttavia, la diffrazione di onde piane non uniformi in mezzi privi di perdite era stata ampiamente studiata in precedenza [31, 30]. Come si vedrà, la procedura risulta una naturale estensione di quella classica. Le uniche difficoltà di cui si deve tenere conto riguardano la presenza del numero d'onda complesso e del vettore di attenuazione che supporremo in generale non parallelo al vettore di fase.

Come primo passo, per evitare di appesantire il formalismo, faremo alcune ipotesi semplificative, le quali non restringeranno la validità dei risultati ottenuti. Supponiamo che il vettore d'onda complesso giaccia sul piano ortogonale al cilindro. In questo caso si può facilmente dimostrare che la componente radiale dei vettori (2.39) e (2.40) risulta nulla. In questo caso, il problema diventa bidimensionale e quindi il campo elettromagnetico può essere ottenuto dalla sovrapposizione di due campi elettromagnetici particolarmente semplici, aventi o il campo elettrico, o il campo magnetico, puramente paralleli all'asse del cilindro. In questo modo potremo trattare il problema scalare attraverso la disturbanza dell'onda come è di comune uso in ottica [32].

Si consideri un'onda piana non uniforme che incide su un cilindro indefinito a sezione circolare di raggio  $a$ . Si scelga l'asse  $y$  coincidente con l'asse del cilindro. Si consideri inoltre un sistema di riferimento polare  $(r, \theta)$ , come mostrato in Figura 2.1, che quindi sia legato al riferimento cartesiano dalle seguenti formule:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases} \quad (2.41)$$

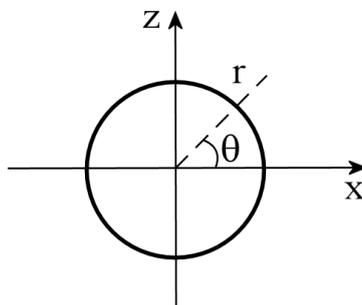


Figura 2.1: Sistema di coordinate cartesiane e polari centrato sull'asse del cilindro.

In questo modo si potrà scrivere la disturbanza dell'onda piana come segue:

$$V(r, \theta) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \exp[ikr(\cos w \cos \theta + \sin w \sin \theta)] \quad (2.42)$$

Da cui, sfruttando l'ormai nota formula trigonometrica, si trova:

$$V(r, \theta) = \exp[ikr \cos(\theta - w)] \quad (2.43)$$

Nelle precedenti espressioni il parametro  $w$  è l'angolo complesso del vettore di propagazione. Si pone ora il problema se sia lecito sviluppare in serie di Fourier una funzione di variabile complessa. Per accertare questo è necessaria una breve digressione sullo sviluppo dell'onda piana in armoniche cilindriche in un mezzo con perdite.

Si consideri una generica funzione di variabile complessa  $f(z)$  e si supponga che essa sia olomorfa in un campo aperto  $A$ . È noto che tale funzione sarà sempre sviluppabile in serie di Laurent di punto iniziale  $z_0$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2.44)$$

dove i coefficienti della serie possono essere scritti come segue [33]:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (2.45)$$

dove  $\mathcal{C}$  è una circonferenza, di centro  $z_0$ , interna al dominio di convergenza della serie. Il verso di percorrenza di  $\mathcal{C}$  deve essere tale da lasciarsi a sinistra l'interno del dominio da essa racchiuso, ovvero  $\mathcal{C}$  deve essere percorsa in senso antiorario. Il dominio di convergenza della serie di Laurent (2.44) è l'interno di una corona circolare di raggi  $r_1$  e  $r_2$  tali da escludere ogni punto singolare di  $f(z)$ . In particolare il dominio di convergenza più grande possibile si ottiene

scegliendo la corona circolare delimitata dalle circonferenze, di centro  $z_0$ , aventi raggi pari a  $r_M$  e  $r_m$ , che siano rispettivamente la circonferenza più grande e più piccola completamente contenuta all'interno del campo di olomorfia di  $f(z)$ . Si consideri ora la seguente trasformazione conforme del dominio  $A$  [34]:

$$z = z_0 + \exp(iw) \quad (2.46)$$

Si può vedere che la derivata della funzione  $z_0 + \exp(iw)$  non si annulla per nessun valore finito di  $w$ , quindi si può affermare che il dominio trasformato  $A'$  non presenterà alcun punto di ramificazione [35] o, in altre parole, la trasformazione (2.46) è conforme per ogni punto al finito del piano  $w$  [34]. Si ottiene che tramite questa trasformazione lo sviluppo in serie può essere scritto come segue:

$$f(w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(inw) \quad (2.47)$$

Si consideri ora il nuovo dominio di convergenza della serie che si ottiene eseguendo la trasformazione (2.46). La serie di Laurent come si è già detto è definita all'interno della più grande corona circolare di centro  $z_0$  che sia completamente contenuta nel dominio di olomorfia; dall'equazione (2.46) si vede che questo equivale a considerare che la parte reale di  $w$  assuma valori arbitrari, purché la funzione  $f(w)$  risulti periodica di periodo  $2\pi$ , e che la parte immaginaria di  $w$  sia compresa tra un valore  $v_m$  ed un valore  $v_M$ :

$$v_m < v < v_M \quad (2.48)$$

dove con semplici passaggi si ricava:  $v_m = -\log r_M$  e  $v_M = -\log r_m$ . Più in generale la trasformazione conforme in (2.46) trasforma i contorni circolari in contorni rettilinei [34], quindi la regione che, sul piano  $z$ , era delimitata da due circonferenze concentriche, si trasforma, nel piano di  $w$ , in una regione delimitata da due rette parallele, si veda Figura 2.2. In definitiva si può dire che la funzione  $f(w)$  è sviluppabile nella serie in (2.47) se è olomorfa nella regione di spazio  $v_m < v < v_M$ , quindi  $v_m$  e  $v_M$  dipendono dal campo di olomorfia di  $f(w)$ , e se risulta periodica rispetto alla variabile reale  $u$ . Si noti che è rimasta la condizione di periodicità per lo sviluppo in serie di Fourier e si è aggiunta una condizione di olomorfia. Per quanto riguarda l'espressione dei coefficienti della serie, eseguendo dentro l'integrale lo stesso cambiamento di variabile, si trova:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} f(w) \exp(-inw) dw \quad (2.49)$$

Dove la curva  $\mathcal{C}$  ora rappresenta un segmento parallelo all'asse reale  $w = u + iv_0$  con  $-\pi < u < \pi$  e  $v_0$  è un parametro costante, compreso tra  $v_m$  e  $v_M$ . Vedi Figura 2.3. Si vede quindi che è possibile procedere con uno sviluppo in serie della funzione  $f(w)$  analogo alla serie di Fourier, ma nella variabile complessa  $w$ . In effetti, l'integrale in (2.49) rappresenta proprio una trasformata di Fourier generalizzata come si è precedentemente definita nel paragrafo 1.7.

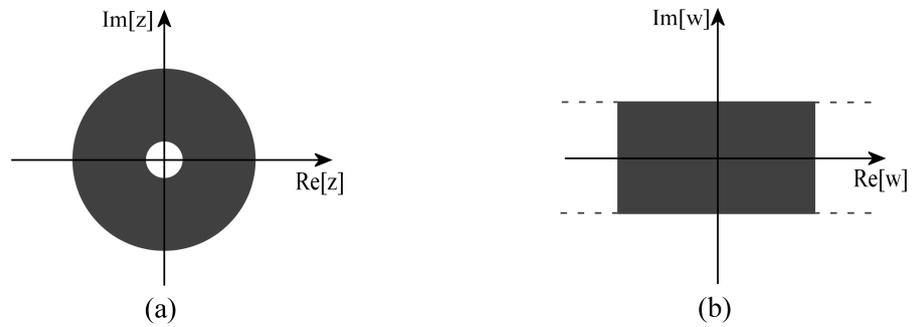


Figura 2.2: Insieme di convergenza delle funzione  $f(z)$  (a). Insieme di convergenza trasformato di  $f(w)$  (b), dove  $z = z_0 + \exp(iw)$

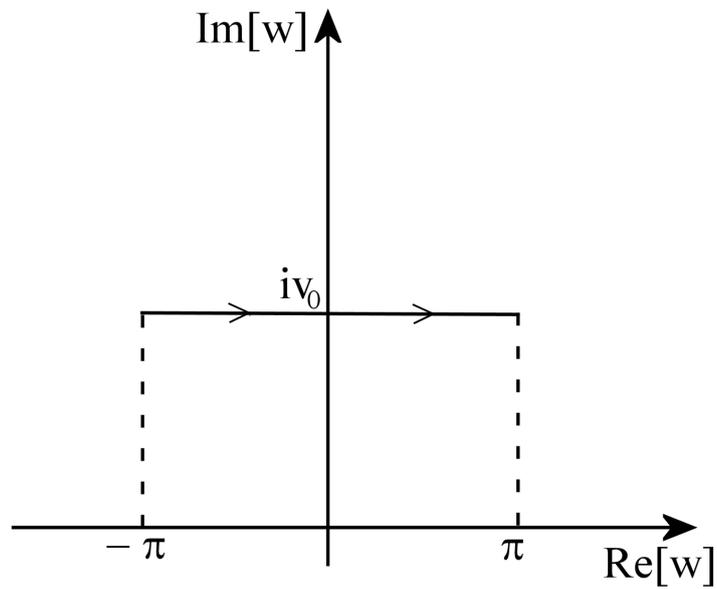


Figura 2.3: Percorso di integrazione dell'integrale (2.49)

Si torni all'espressione (2.43), è noto che sia la funzione esponenziale che la funzione coseno sono intere, inoltre l'espressione è periodica rispetto alla parte reale di  $w$ , quindi si può applicare lo sviluppo in serie (2.47) sulla variabile  $\gamma = \theta - w$ , ottenendo:

$$V(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp[in(\theta - w)] \quad (2.50)$$

dove i coefficienti  $a_n$  assumono la seguente espressione:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \exp(ikr \cos \gamma) \exp(-in\gamma) d\gamma \quad (2.51)$$

Si può ora ricordare l'espressione integrale nel campo complesso della funzione di Bessel di prima specie, la quale può essere scritta nella seguente forma [35]:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{\exp\left[\frac{1}{2}z\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]}{\zeta^{n+1}} d\zeta \quad (2.52)$$

dove la curva  $\mathcal{C}_0$  rappresenta una circonferenza centrata nell'origine del piano complesso.

Si deve sottolineare che questa rappresentazione è corretta solo per  $n$  intero, nel caso in cui  $n$  non sia intero si ha un termine aggiuntivo, infatti la rappresentazione completa presenta un secondo integrale che viene moltiplicato per la quantità  $\sin(n\pi)$ , quantità che si annulla per  $n \in \mathbb{Z}$ . Si noti inoltre che tale rappresentazione integrale è valida solo per valori di  $z$  posti a destra dell'asse immaginario, ovvero per valori positivi di  $\text{Re}[z]$  [35, 36]. A questo punto si esegua il seguente cambio di variabile nell'integrale:

$$\zeta = \exp[i(\gamma + \pi/2)] \quad (2.53)$$

La variabile  $\zeta$  si deve muovere su una circonferenza, centrata nell'origine, di raggio arbitrario, quindi la  $\text{Im}[\gamma]$ , che rappresenta tale raggio nel piano di  $\gamma$ , potrà essere scelta arbitrariamente e sarà costante all'interno dell'integrale. In particolare potremo scegliere  $\text{Im}[\gamma] = v_0$  in modo da ottenere una perfetta analogia con i coefficienti (2.49). In questo modo si ottiene:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\exp\left[iz\left(\frac{e^{i(\gamma+\pi/2)} - e^{-i(\gamma+\pi/2)}}{2i}\right)\right]}{e^{i(n+1)(\gamma+\pi/2)}} e^{i(\gamma+\pi/2)} d\gamma \quad (2.54)$$

Che, sfruttando la formula di Eulero e con qualche semplificazione, diventa:

$$J_n(z) = \frac{e^{-in\pi/2}}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \exp(iz \cos \gamma) \exp(-in\gamma) d\gamma \quad (2.55)$$

Dove con  $\mathcal{C}$  si indica il segmento, parallelo all'asse reale, che unisce il punto  $-\pi + iv_0$  al punto  $\pi + iv_0$ , quindi va a coincidere con il percorso di integrazione

dell'integrale (2.49); si noti che il parametro  $v_0$  è del tutto arbitrario, sia nell'integrale (2.49) che nell'integrale (2.55), tenuto conto dei limiti di convergenza imposti dalla serie di Laurent, potrà quindi essere scelto nel modo più conveniente. Tale arbitrarietà dipende dal fatto che  $v_0$  è legato al raggio della circonferenza, nel piano complesso, sulla quale si effettua l'integrazione e, come è ben noto, per il primo teorema integrale di Cauchy, il valore dell'integrale non dipende da tale raggio, a meno che non si incontrino punti singolari dell'integrando. In questo caso quindi l'unica limitazione nella scelta di  $v_0$  è data dai limiti di convergenza della serie di Laurent. Da queste osservazioni e confrontando l'espressione (2.51) con l'espressione (2.55) si può vedere facilmente che risulta:

$$a_n = i^n J_n(kr) \quad (2.56)$$

da cui è possibile scrivere lo sviluppo in serie come segue:

$$V(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(kr) \exp[in(\theta - w)] \quad (2.57)$$

Valido per quanto detto solo per valori positivi della parte reale di  $kr$ . Si deve notare la cura con cui si è voluta studiare la convergenza della serie. Infatti, osservando la serie ignorando la procedura che ha portato a essa, si potrebbe essere portati a sostenere che lo sviluppo (2.57) sia non convergente. In effetti, in tale sviluppo c'è il termine esponenziale  $\exp(inw)$ , con  $w \in \mathcal{C}$  e  $n \in \mathcal{Z}$ . La parte immaginaria di  $w$  porterà questo termine all'infinito con la velocità di un esponenziale e questo potrebbe non far convergere la serie. La compensazione di tale divergenza è affidata però alla funzione di Bessel di prima specie. Essa infatti, quando il suo ordine è intero, va a zero come funzione di esso più velocemente di un esponenziale, assicurando la convergenza della serie. Non è un caso che tale comportamento si abbia solo con gli ordini interi. La funzione di ordine reale in effetti non segue questo stesso comportamento e non garantirebbe la convergenza della serie. Questo potrebbe essere un ulteriore metodo per spiegare perché durante la dimostrazione ci si è trovati costretti a eliminare il caso di funzioni di ordine reale.

Il procedimento qui usato per ottenere lo sviluppo in serie di Fourier non è l'unico possibile. Vi sono strade alternative per ricavare l'espressione (2.57) che non richiedono lo sviluppo in serie esteso al campo complesso. Infatti considerando la funzione (2.43) come una funzione di variabile reale a valori complessi, dipendente da  $r$  e  $\theta$ , non risulta più necessario uno sviluppo in serie nel campo complesso e si può fare riferimento al più semplice sviluppo in serie di Fourier nel campo reale. In questo senso si potrà sviluppare la funzione (2.43) in serie di Fourier rispetto alla variabile  $\theta$ , ottenendo:

$$V(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(in\theta) \quad (2.58)$$

dove i coefficienti della serie possono essere espressi come segue:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[ikr \cos(\theta - w)] \exp(-in\theta) d\theta \quad (2.59)$$

moltiplicando fuori e dentro il segno di integrale rispettivamente per  $\exp(-inw)$  e per  $\exp(inw)$ , si ottiene:

$$a_n = \frac{\exp(-inw)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[ikr \cos(\theta - w)] \exp[-in(\theta - w)] d\theta \quad (2.60)$$

Nell'integrale in (2.60) si può riconoscere una funzione di Bessel di prima specie, infatti considerando l'espressione in (2.52) ed eseguendo il seguente cambiamento di variabile:

$$\zeta = \exp[i(\theta - w + \pi/2)] \quad (2.61)$$

si ottiene:

$$J_n(z) = \frac{e^{-in\pi/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[iz \cos(\theta - w)] \exp[-in(\theta - w)] d\theta \quad (2.62)$$

Se in questo integrale si sostituisce la variabile  $z$  con la variabile  $kr$  e lo si paragona all'espressione (2.60) si ritrova, per lo sviluppo in serie di Fourier, la forma in (2.57).

Risulta interessante commentare la sostituzione (2.61). Aver sommato alla variabile  $\theta$ , ad esponente, la variabile complessa  $-w + \pi/2$  equivale ad aver modificato il raggio della circonferenza su cui si calcola l'integrale, a causa della parte immaginaria  $v$ , e gli angoli di partenza e di arrivo con cui viene percorsa la circonferenza, a causa del termine  $-u + \pi/2$ . Entrambe le modifiche, per ciò che è stato detto in precedenza sull'integrazione nel campo complesso, non hanno effetto sul risultato dell'integrale.

Prima di proseguire si vuole mostrare una terza procedura per ottenere l'espressione (2.57), in cui non si farà più uso del parametro complesso  $k$ , ma si ragionerà con i semplici numeri reali  $k'$  e  $k''$ . Si riprenda in considerazione l'espressione (2.43) e la si riscriva esplicitando la parte reale ed immaginaria di  $k$ , ottenendo:

$$V(r, \theta) = \exp[i(k' + ik'')r \cos(\theta - w)]$$

che si può riscrivere come segue:

$$V(r, \theta) = \exp[ik'r \cos(\theta - w)] \exp[i(ik'')r \cos(\theta - w)]$$

In questo modo la disturbanza è espressa come prodotto di due esponenziali. Si sviluppino in serie di Fourier separatamente i due esponenziali rispetto alla variabile  $\theta$ , ottenendo:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l \exp(il\theta) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m \exp(im\theta)$$

Trattandosi di sviluppi in serie di Fourier di onde piane sappiamo che i coefficienti  $a_n$  e  $b_m$  potranno essere espressi singolarmente tramite delle funzioni di Bessel di prima specie, notiamo che in questo caso la rappresentazione sarà quella classica utilizzata in letteratura, per esempio in [30, 37], essendo tutti i

parametri reali, l'unica differenza sarà nel fatto che il parametro  $w$  è complesso, ma come è stato già detto questo porta solo ad un cambiamento del raggio della circonferenza su cui si estende la rappresentazione della funzione di Bessel, il che non modifica il risultato dell'integrale. Quindi i coefficienti delle due serie si potranno scrivere rispettivamente:

$$\begin{aligned} a_l &= i^l J_l(k'r) \\ b_m &= i^m J_m(ik''r) \end{aligned}$$

Quindi la disturbanza potrà essere espressa come segue:

$$V(r, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{l+m} J_l(k'r) J_m(ik''r) \exp[i(l+m)(\theta-w)]$$

Se si opera un cambiamento nell'indice della serie e si pone  $l = n - m$ , si ottiene:

$$V(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^n J_{n-m}(k'r) J_m(ik''r) \exp[in(\theta-w)] \quad (2.63)$$

A questo punto si ricordi la formula di addizione di Neumann per le funzioni di Bessel di prima specie che riportiamo di seguito [10]:

$$J_n(\xi + \eta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{n-m}(\xi) J_m(\eta)$$

Tale formula è valida, se l'ordine delle funzioni di Bessel è intero, per ogni variabile  $\xi$  e  $\eta$ . Applicando questa formula all'espressione (2.63) si ottiene:

$$V(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(k'r + ik''r) \exp[in(\theta-w)] \quad (2.64)$$

In cui si riconosce facilmente l'espressione (2.57).

In tutti e tre i procedimenti esposti, si è scritta la disturbanza del campo elettromagnetico in modo identico a quanto si faceva nel caso reale, semplicemente considerando in luogo delle variabili  $k$  e  $\phi$  reali, le variabili  $k$  e  $w$  complesse. Per risolvere il problema di diffrazione da cilindro indefinito si dovrà ora andare a scrivere un'espressione conveniente per il campo diffratto. Dato che il campo incidente si può scrivere, in analogia con il caso privo di perdite, come uno sviluppo in serie di funzioni di Bessel di prima specie, si può pensare di scrivere il campo diffratto dal cilindro come una serie delle funzioni di Hankel del primo tipo:

$$V_d(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n c_n H_n^{(1)}(kr) \exp[in(\theta-w)] \quad (2.65)$$

Notiamo che le funzioni di Hankel espresse in (2.65) sono funzioni di variabile complessa. E' possibile dimostrare che le funzioni di Hankel di variabile complessa risultano olomorfe in tutto il piano complesso, con esclusione dei punti 0 e  $\infty$ , dove presentano due singolarità essenziali [10].

Si deve a questo punto specificare il mezzo di cui si suppone riempito il cilindro. Una soluzione classica e molto utile per la sua semplicità è il caso in cui il cilindro sia di materiale perfettamente conduttore. In questo caso, il campo interno al cilindro si può considerare nullo e le uniche incognite risultano i coefficienti  $c_n$  della serie (2.65). Per calcolare tali coefficienti andremo ad imporre le condizioni al contorno. Per farlo si dovrà specificare il tipo di polarizzazione dell'onda. Come si è detto infatti si può sempre vedere l'onda incidente come una sovrapposizione di due onde polarizzate linearmente, aventi o il campo elettrico, o il campo magnetico puramente paralleli all'asse del cilindro, ovvero all'asse  $y$ , parleremo rispettivamente di onde  $TM^{(y)}$  e  $TE^{(y)}$ . In questi due casi conviene identificare la disturbanza  $V$  rispettivamente con il campo elettrico e con il campo magnetico. In questi due casi le condizioni al contorno potranno scriversi come segue:

$$\text{Polarizzazione TM} \quad V(a, \theta) + V_d(a, \theta) = 0 \quad (2.66)$$

$$\text{Polarizzazione TE} \quad \left[ \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} + \frac{\partial V_d(r, \theta)}{\partial r} \right]_{r=a} = 0 \quad (2.67)$$

e quindi, sfruttando l'ortogonalità della funzione esponenziale, si potranno scrivere i coefficienti della serie nelle due polarizzazioni come segue:

$$\text{Polarizzazione TM} \quad c_n = -\frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \quad (2.68)$$

$$\text{Polarizzazione TE} \quad c_n = -\frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \quad (2.69)$$

Si noti che l'espressione dei coefficienti è del tutto analoga a quella che si ottiene nel caso reale, ma si deve ricordare che sia la funzione di Bessel che la funzione di Hankel in questo caso sono funzioni di variabile complessa. Per quanto detto sulla validità delle rappresentazioni integrali usate questa trattazione sarà valida solo per valori positivi della parte reale di  $k$ ; dato che per ragioni fisiche anche la parte immaginaria di  $k$  deve risultare sempre positiva, questa trattazione sarà valida solo nel primo quadrante del piano ( $k', k''$ ).

Il caso di cilindro perfettamente conduttore è interessante dal punto di vista teorico e utile in molte applicazioni. Tuttavia, se si vuole avere una trattazione più generale e applicabile in ogni banda di frequenza, è preferibile avere la soluzione per un cilindro dielettrico avente permittività complessa  $\varepsilon_c$ . In questo caso il campo all'interno del cilindro non è nullo e si deve considerare un campo interno come serie di funzioni di Bessel con coefficienti incogniti  $d_n$ :

$$V_{int}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n d_n J_n(kr) \exp[in(\theta - w)] \quad (2.70)$$

In questo caso le condizioni al contorno diventano la continuità del campo elettrico e magnetico sulla superficie del cilindro. Si potranno scrivere le seguenti

relazioni:

$$V(a, \theta) + V_d(a, \theta) - V_{int}(a, \theta) = 0 \quad (2.71)$$

$$\left[ \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} + \frac{\partial V_d(r, \theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_{int}(r, \theta)}{\partial r} \right]_{r=a} = 0 \quad (2.72)$$

tali condizioni sono valide nel caso di polarizzazione TM. Nel caso di polarizzazione TE invece si ha:

$$V(a, \theta) + V_d(a, \theta) - V_{int}(a, \theta) = 0 \quad (2.73)$$

$$\left[ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V_d(r, \theta)}{\partial r} - \frac{1}{\varepsilon_c} \frac{\partial V_{int}(r, \theta)}{\partial r} \right]_{r=a} = 0 \quad (2.74)$$

Inserendo gli sviluppi in armoniche cilindriche e sfruttando le proprietà di ortogonalità delle funzioni esponenziali, si possono ottenere le seguenti espressioni per i coefficienti di scattering:

$$c_n^{TM} = \frac{k_c J'_n(k_c r) J_n(kr) - k J_n(k_c r) J'_n(kr)}{k H_n^{(1)'}(k_r) J_n(k_c r) - k_c H'_n(kr) J'_n(k_c r)} \quad (2.75)$$

$$c_n^{TE} = \frac{\zeta_c J'_n(k_c r) J_n(kr) - \zeta J_n(k_c r) J'_n(kr)}{\zeta H_n^{(1)'}(k_r) J_n(k_c r) - \zeta_c H'_n(kr) J'_n(k_c r)} \quad (2.76)$$

dove con  $\zeta$  si sono indicate le impedenze caratteristiche dei mezzi.

## 2.4 Spettro di onde piane dell'onda cilindrica

Si consideri l'onda cilindrica elementare:

$$CW_m(r, \theta) = H_m^{(1)}(kr) e^{im\theta} \quad (2.77)$$

in letteratura è ben noto lo spettro di onde piane di tale funzione nel caso di mezzi non dissipativi [30, 37]:

$$\widehat{CW}_l(kx, k_z) = \frac{2 \exp[ix \sqrt{k^2 - k_z^2} - il \arccos(k_z/k)]}{\sqrt{k^2 - k_z^2}} \quad (2.78)$$

di tale spettro è largamente usata la versione in cui la variabile di integrazione sia una componente dell'indice di rifrazione dell'onda, ovvero data la relazione  $k_z = kn_z$ , è possibile ridefinire lo spettro di onde piane (2.78) come segue:

$$\widehat{CW}_l(kx, n_z) = \frac{2 \exp[i k x \sqrt{1 - n_z^2} - il \arccos(n_z)]}{\sqrt{1 - n_z^2}} \quad (2.79)$$

definendo  $\xi = kx$  la lunghezza elettrica, si ottiene uno spettro di onde piane indipendente dalla frequenza, il che è estremamente utile in ogni tipo di applicazione. Nella sezione 2.1 si è detto che è sempre possibile scrivere lo spettro di

onde piane di un qualsiasi campo elettromagnetico come trasformata di Fourier di variabile reale; in [22] si discute proprio il problema di come sia possibile scrivere uno sviluppo di onde piane in un mezzo con perdite. La soluzione a cui si giunge è che un campo elettromagnetico espresso con il suo sviluppo di onde piane bidimensionale come segue:

$$\underline{E}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(x, k_y, k_z) \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)] dk_y dk_z \quad (2.80)$$

possa essere esteso al caso in cui il mezzo presenti delle perdite semplicemente imponendo che il numero d'onda  $k$  sia complesso, mantenendo le variabili di integrazione, ovvero le componenti del vettore di propagazione lungo  $y$  e lungo  $z$ , puramente reali.

Seguendo il ragionamento esposto in [22] lo sviluppo (2.80) ha validità in un semispazio situato a destra di un piano  $x = \text{cost.}$ , ovvero per  $x > x_0$ , in definitiva è questa l'unica imposizione che si ha in un mezzo con perdite. Tale limitazione è ovviamente legata alla rappresentazione matematica che si ha per un'onda piana attenuata, come è ben noto infatti l'esponenziale decrescente, per esempio nelle  $x$  positive, sarà un esponenziale crescente verso le  $x$  negative e questo comporterà che l'onda piana sia fisicamente consistente solo per valori della  $x$  maggiori di un certo valore  $x_0$ .

In un mezzo privo di perdite lo sviluppo in onde piane può essere diviso in due parti, la parte in cui si ha  $k_y^2 + k_z^2 < k^2$ , che riguarda le onde piane in propagazione, e la parte in cui si ha  $k_y^2 + k_z^2 > k^2$ , che rappresenta le onde evanescenti. Quando si va a considerare un mezzo con perdite si lascia inalterata l'espressione (2.80) facendo solo attenzione al fatto che la costante  $k$  ed il parametro  $k_x$  diventano fattori complessi. Le due variabili di integrazione però, ovvero  $k_y$  e  $k_z$ , rimangono variabili reali. In questo modo il campo elettromagnetico viene rappresentato in funzione di onde piane che si attenuano sempre e solo lungo l'asse  $x$ . È bene notare che in questo caso non è più possibile la distinzione tra onde in propagazione ed onde evanescenti, come anche perde di senso la classificazione fatta nella sezione precedente tra onde piane uniformi e non uniformi. Tutte le onde formanti lo spettro infatti si attenueranno sempre e solo lungo  $x$ , quindi saranno tutte onde piane non uniformi, con l'eccezione del caso particolare in cui si ha  $k_y^2 + k_z^2 = 0$ , in cui si ha un'onda piana uniforme attenuata. Il motivo di fondo per il quale si può fare questa estensione sta nel fatto che il generico campo elettrico  $\underline{E}(r)$  in un mezzo con perdite è una funzione di variabile reale a valori complessi, sommabile in tutto lo spazio per ovvie ragioni fisiche. Quindi sarà sempre possibile definirne una trasformata di Fourier, la quale rappresenterà, come di consueto, lo spettro del campo. La trasformata di Fourier impone che la variabile di trasformazione sia puramente reale, quindi lo spettro sarà formato da onde piane attenuantesi solo nella direzione ortogonale a quella nella quale si procede con la trasformazione secondo Fourier.

Ciò detto, sembrerebbe scontato che gli spettri (2.78) e (2.79) siano corretti e convergenti. Se però si vanno a calcolare gli sviluppi di onde piane con tali spettri, usando come percorso di integrazione, per quanto detto, l'asse reale, si

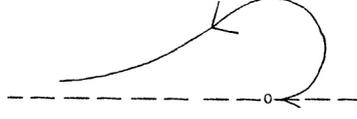


Figura 2.4: Percorso di integrazione della rappresentazione della funzione di Hankel in (2.82) sul piano di  $\zeta$  [36].

scopre che lo spettro (2.78) porta a uno sviluppo convergente, mentre lo spettro (2.79) porta a uno sviluppo divergente [38].

Per spiegare questo strano risultato si andrà ora a studiare il dominio di convergenza dello sviluppo di onde piane:

$$CW_m(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \exp[ix\sqrt{k^2 - k_z^2} - il \arccos(k_z/k)] e^{zk_z} dk_z}{\sqrt{k^2 - k_z^2}} \quad (2.81)$$

Si consideri la seguente rappresentazione integrale per la funzione di Hankel del primo tipo [36]:

$$H_l^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\exp[i\pi] \exp\left[\frac{1}{2}z\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]}{\zeta^{l+1}} d\zeta \quad (2.82)$$

Valida come sempre per  $\arg(z) \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Il termine esponenziale che figura a moltiplicare l'infinito nell'estremo di integrazione superiore sta ad indicare che il percorso di integrazione dovrà tendere all'infinito con un angolo fissato, in questo caso pari a  $\pi$ . Il percorso di integrazione della (2.82) è mostrato in Figura 2.4. Dall'espressione (2.82) si può capire da dove nasce il limite di validità per la variabile  $z$ , infatti l'integrando deve assumere un valore finito nei due estremi di integrazione e questo porta a dei limiti sulla variabile  $z$  per assicurare la convergenza. Si calcoli l'integrando in (2.82) nell'estremo inferiore:

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow 0} \frac{\exp\left[\frac{1}{2}|z|e^{i \arg(z)}\left(|\zeta| - \frac{1}{|\zeta|}\right)\right]}{|\zeta|^{l+1}} \quad (2.83)$$

questa quantità tende a zero quando la parte reale dell'esponente tende all'infinito negativamente, e questo è vero se la parte reale di  $e^{i \arg(z)}$  risulta positiva, da cui si trova l'insieme  $\arg(z) \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Analizzando l'estremo superiore si ottiene la stessa condizione, infatti:

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \frac{\exp\left[\frac{1}{2}|z|e^{i \arg(z)}\left(|\zeta|e^{i\pi} - \frac{1}{|\zeta|e^{i\pi}}\right)\right]}{(|\zeta|e^{i\pi})^{l+1}} \quad (2.84)$$

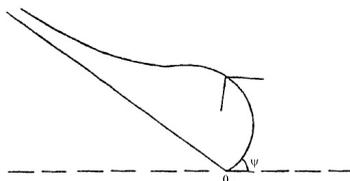


Figura 2.5: Modifica al percorso di integrazione di Figura 2.4 sul piano di  $\zeta$  [36].

In questo caso la quantità  $e^{i(\arg(z)+\pi)}$  deve avere parte reale negativa, ovvero  $e^{i\arg(z)}$  deve avere parte reale positiva, da cui si trova lo stesso insieme di convergenza precedente. È importante avere ben chiaro questo procedimento per l'analisi della convergenza dell'integrale in (2.82) perché più avanti, modificando il percorso di integrazione, si modificherà tale insieme di convergenza.

Il percorso di integrazione di Figura 2.4 può essere modificato come mostrato in Figura 2.5 [36]. In particolare scegliendo un angolo di partenza pari a  $\psi$ , come in Figura 2.5, ed un angolo all'infinito pari a  $\pi + \psi$ , mentre quello di Figura 2.5 vale  $\pi - \psi$ , si potrà riscrivere l'espressione in (2.82) come segue:

$$H_l^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{0 \exp[i\psi]}^{\infty \exp[i(\pi+\psi)]} \frac{\exp\left[\frac{1}{2}z\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]}{\zeta^{l+1}} d\zeta \quad (2.85)$$

Si noti che  $\psi \in [-\pi, \pi]$ . Si consideri il nuovo insieme di convergenza. Per quanto riguarda l'estremo inferiore si ha:

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow 0} \frac{\exp\left[\frac{1}{2}|z|e^{i\arg(z)}\left(|\zeta|e^{i\psi} - \frac{e^{-i\psi}}{|\zeta|}\right)\right]}{[|\zeta| \exp(i\psi)]^{l+1}}$$

Tale quantità tende a zero se la parte reale di  $e^{i[\arg(z)-\psi]}$  risulta positiva, ovvero per:

$$\arg(z) \in [\psi - \pi/2, \psi + \pi/2] \quad (2.86)$$

Per quanto riguarda l'estremo superiore si trova:

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \frac{\exp\left[\frac{1}{2}|z|e^{i\arg(z)}\left(|\zeta|e^{i(\pi+\psi)} - \frac{e^{-i(\pi+\psi)}}{|\zeta|}\right)\right]}{\{|\zeta| \exp[i(\pi+\psi)]\}^{l+1}}$$

Tale quantità tende a zero se la parte reale di  $e^{i[\arg(z)+\psi+\pi]}$  risulta negativa, ovvero se la parte reale di  $e^{i[\arg(z)+\psi]}$  risulta positiva, ovvero per:

$$\arg(z) \in [-\psi - \pi/2, -\psi + \pi/2] \quad (2.87)$$

Gli insiemi di convergenza (2.86) e (2.87) devono valere contemporaneamente. Calcolando l'intersezione tra questi due insiemi si ottiene:

$$\arg(z) \in [-\pi/2 + |\psi|; \pi/2 - |\psi|] \quad \text{con} \quad \psi \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Questo è il nuovo insieme di convergenza della rappresentazione della funzione di Hankel.

A questo punto, si modifichi il percorso di integrazione dell'integrale (2.82) facendolo partire in 0 con un angolo pari a  $\psi + \phi$  e facendolo giungere all'infinito su una retta formante con l'asse reale un angolo pari a  $\pi + \psi - \phi$ :

$$H_l^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{0 \exp[i(\psi+\phi)]}^{\infty \exp[i\pi+\psi-\phi]} \frac{\exp\left[\frac{1}{2}z\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]}{\zeta^{l+1}} d\zeta \quad (2.88)$$

dove si è posto  $\phi = \arg(z)$  e si considerano valori di  $\psi$  tali da avere  $(\psi + \phi) \in [-\pi, \pi]$ , questo per evitare problemi di interpretazione sulla fase di  $\zeta$  [36]. Vediamo per prima cosa quali sono i limiti di convergenza di questo integrale. Per quanto riguarda l'estremo di integrazione inferiore, l'esponente all'interno dell'integrale diventa:

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow 0} \frac{1}{2} |z| e^{i\phi} \left[ |\zeta| e^{i(\psi+\phi)} - \frac{e^{-i(\psi+\phi)}}{|\zeta|} \right] = -\frac{|z|}{2|\zeta|} e^{-i\psi} \quad (2.89)$$

si vede che, perché tale limite tenda ad infinito negativamente, in modo da rendere convergente l'integrale (2.88), deve essere:

$$\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Analizzando l'estremo di integrazione superiore invece si trova:

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} |z| e^{i\phi} \left[ |\zeta| e^{i(\pi+\psi-\phi)} - \frac{e^{-i(\pi+\psi-\phi)}}{|\zeta|} \right] = -\frac{|z||\zeta|}{2} e^{i\psi} \quad (2.90)$$

Perché questa espressione tenda ad infinito negativamente si deve rispettare la stessa condizione precedente. Quindi l'espressione (2.88) è valida per ogni valore di  $z$  e per  $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Vediamo quindi che l'insieme di convergenza dell'integrale (2.88) converge nell'insieme  $\psi \in [-\pi/2, \pi/2]$  e, di conseguenza, si dovrà avere  $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

A questo punto eseguiamo nell'integrale (2.88) la seguente sostituzione:  $\zeta = \exp[-i(w - \psi - \pi/2)]$ . Gli estremi di integrazione si trasformeranno come segue. L'estremo di integrazione inferiore sarà:

$$\exp\left[-i(w - \psi - \frac{\pi}{2})\right] = 0 \cdot \exp[i(\psi + \phi)]$$

da cui si trova:

$$u = \frac{\pi}{2} - \phi \quad \text{e} \quad v \rightarrow -\infty$$

L'estremo di integrazione superiore invece sarà:

$$\exp\left[-i(w - \psi - \frac{\pi}{2})\right] = \infty \cdot \exp[i(\pi + \psi - \phi)]$$

da cui si trova:

$$u = \phi - \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad v \rightarrow +\infty$$

Il percorso di integrazione quindi è una qualsiasi curva che provenga dall'infinito sulla semiretta verticale superiore  $w = \phi - \pi/2$  e che vada all'infinito sulla semiretta verticale inferiore  $w = \pi/2 - \phi$ , si veda Figura 2.6. Accidentalmente si può notare che questo percorso di integrazione è esattamente quello della rappresentazione di Sommerfeld per le onde cilindriche [39]. Si ottiene quindi:

$$H_l^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-i\infty+\pi/2-\phi}^{+i\infty-\pi/2+\phi} \exp \left\{ iz \frac{\exp[-i(w-\psi-\pi/2)] - \exp[i(w-\psi-\pi/2)]}{2i} \right\} \cdot \exp[il(w-\psi-\pi/2)](-idw)$$

Applicando la formula di Eulero e con qualche semplificazione si ottiene:

$$H_l^{(1)}(z) = e^{-il\psi} \frac{i^{-l}}{\pi} \int_{+i\infty-\pi/2+\phi}^{-i\infty+\pi/2-\phi} \exp \left[ -iz \sin \left( w - \psi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \exp(ilw) dw$$

Si assumano ora le seguenti posizioni:  $z = kr$ ,  $\psi = \theta$ . Si ricordi inoltre che si ha  $\phi = \arg(z) = \arg(k)$ . Moltiplicando poi ambo i membri per  $\exp(il\psi)$ , si potrà scrivere:

$$CW_l(kr, \theta) = H_l^{(1)}(kr) e^{il\theta} = \frac{i^{-l}}{\pi} \int_{+i\infty-\pi/2+\phi}^{-i\infty+\pi/2-\phi} \exp[ikr \cos(w-\theta)] \exp(ilw) dw$$

Sviluppando il coseno della differenza e ricordando il legame tra coordinate polari e cartesiane si può anche scrivere:

$$CW_l(kx, kz) = \frac{i^{-l}}{\pi} \int_{+i\infty-\pi/2+\phi}^{-i\infty+\pi/2-\phi} \exp[ik(x \cos w + z \sin w)] \exp(ilw) dw \quad (2.91)$$

Analogamente all'espressione (2.88), questa espressione è convergente per  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  e per  $\phi = \arg(k) \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Si esegua ora la seguente sostituzione:

$$k_z = k \sin w \quad (2.92)$$

L'integrale diventerà il seguente:

$$CW_l(kx, kz) = \frac{i^{-l}}{\pi} \int \frac{\exp[ix\sqrt{k^2 - k_z^2} + il \arcsin(k_z/k)]}{\sqrt{k^2 - k_z^2}} \exp(ik_z z) dw \quad (2.93)$$

dove non si sono specificati gli estremi di integrazione perché verranno ricavati nel seguito. Se si riesce a dimostrare che il percorso di integrazione dell'espressione (2.93) coincide con l'asse reale, questa rappresenterà proprio l'antitransformata di Fourier dello spettro (2.78).

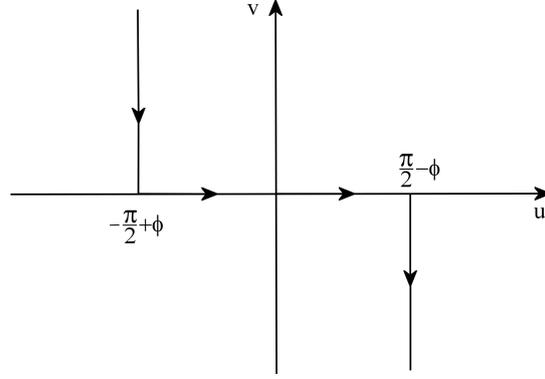


Figura 2.6: Percorso di integrazione dell'integrale in (2.91).

Come è noto dalla teoria delle trasformazioni conformi, non è semplice trasformare secondo la (2.92) una generica curva. Conviene quindi trasformare il percorso più semplice possibile, cercando in seguito di capire come si trasformino le altre curve. Trasformiamo quindi, secondo la (2.92), il percorso di integrazione di Figura 2.6, composto dalle due semirette verticali  $w = -\pi/2 + \phi$  e  $w = \pi/2 - \phi$  percorse rispettivamente da  $+\infty$  a 0 e da 0 a  $-\infty$ , e dal segmento sull'asse reale che unisce i due punti predetti. Iniziamo dalla prima semiretta verticale:

$$k_z = k \sin(\phi - \pi/2 + it) \quad \text{con } t \in [0, +\infty)$$

da cui si può scrivere:

$$k_z = -k \cos(\phi + it) = (k' + ik'')(\cos \phi \cosh t - i \sin \phi \sinh t)$$

separando la parte reale e la parte immaginaria si ottiene:

$$k_z = -(k' \cos \phi \cosh t + k'' \sin \phi \sinh t) - i(k'' \cos \phi \cosh t - k' \sin \phi \sinh t) \quad (2.94)$$

Sfruttando i risultati dell'Appendice B, si può vedere che tale espressione rappresenta un ramo di iperbole e più in particolare dell'iperbole seguente:

$$\frac{k_z'^2}{|k|^2 \cos^2 \phi} - \frac{k_z''^2}{|k|^2 \sin^2 \phi} = 1 \quad (2.95)$$

ruotata di un angolo  $\phi$ . Dato che l'iperbole (2.95) tende asintoticamente alle rette  $k_z'' = \pm \tan \phi k_z'$ , ruotata dell'angolo  $\phi$  diventa un'iperbole avente come asintoti da una parte l'asse reale e dall'altra la retta  $k_z'' = \pm \tan(2\phi)k_z'$ . Si veda Figura 2.7. In effetti l'espressione (2.94) si può anche scrivere come segue

$$k_z = -k' \cos \phi \left( \cosh t + \frac{k'' \sin \phi}{k' \cos \phi} \sinh t \right) - ik' \cos \phi \left( \frac{k''}{k'} \cosh t - \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \sinh t \right)$$

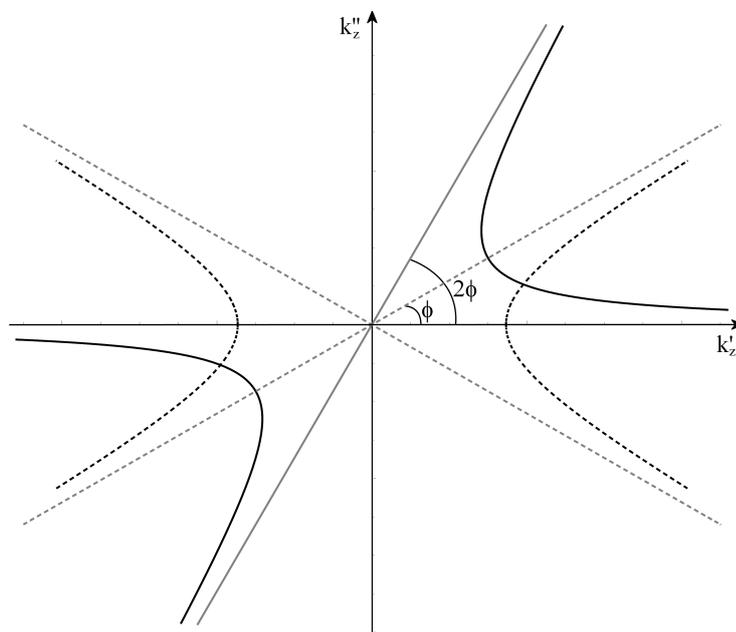


Figura 2.7: Rotazione di un angolo  $\phi$  dell'iperbole rappresentata dall'espressione (2.95). La curva tratteggiata rappresenta l'iperbole (2.95), mentre la linea continua rappresenta la stessa iperbole ruotata in senso orario di un angolo pari a  $\phi$ . In grigio sono rappresentati gli asintoti delle due iperboli.

Ricordando che  $k''/k' = \tan \phi$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} k_z &= -k' \cos \phi (\cosh t + \tan^2 \phi \sinh t) - ik' \cos \phi \tan \phi (\cosh t - \sinh t) = \\ &= -k' \cos \phi (\cosh t + \tan^2 \phi \sinh t) - ik' \cos \phi \tan \phi \exp(-t) \end{aligned}$$

Da questa espressione si vede che per  $t \rightarrow +\infty$  si ha  $\text{Im}[k_z] \rightarrow 0$ , mentre  $\text{Re}[k_z] \rightarrow -\infty$ . Si potrebbe vedere che per  $t \rightarrow -\infty$ ,  $k_z$  tende ad un tratto della retta  $k''_z = -\tan(2\phi)k'_z$ , ed in particolare alla semiretta contenuta nel secondo quadrante. Quindi l'espressione (2.94) rappresenta il ramo sinistro dell'iperbole (2.95), ruotata di un angolo  $\phi$ . Notiamo che tale ramo di iperbole viene percorso a partire dal punto  $t \rightarrow +\infty$  al punto  $t = 0$ , i quali corrispondono rispettivamente a  $k_z \rightarrow -\infty$  ed a  $k_z = -k \cos \phi$ .

Per quanto riguarda la seconda semiretta si avrà:

$$k_z = k \sin(\pi/2 - \phi - it) \quad \text{con } t \in [0, +\infty)$$

da cui:

$$k_z = k \cos(\phi + it) = (k' + ik'')( \cos \phi \cosh t - i \sin \phi \sinh t )$$

separando la parte reale e la parte immaginaria si ottiene:

$$k_z = (k' \cos \phi \cosh t + k'' \sin \phi \sinh t) + i(k'' \cos \phi \cosh t - k' \sin \phi \sinh t) \quad (2.96)$$

Tale espressione rappresenta sempre un ramo dell'iperbole (2.95), ma, notando che i limiti per  $t$  che tende a  $+\infty$  ed a  $-\infty$  mostrano che  $k_z$  tende rispettivamente all'asse reale positivo ed alla retta  $k_z'' = \tan(2\phi)k_z'$ , si vede che questa volta si tratta del ramo destro. Tale ramo andrà percorso da  $k_z = k \cos \phi$  a  $k_z \rightarrow +\infty$ , trasformati rispettivamente dei punti  $t = 0$  e  $t \rightarrow +\infty$ .

Per quanto riguarda il segmento sull'asse reale, esso si trasforma in un segmento della retta  $k_z'' = \tan \phi k_z'$  ed in particolare nel segmento che unisce i due punti:

$$\begin{aligned} k_z &= k \sin(\phi - \pi/2) = -k' \cos \phi - ik'' \cos \phi \\ k_z &= k \sin(\pi/2 - \phi) = k' \cos \phi + ik'' \cos \phi \end{aligned}$$

Si tratta quindi del segmento che unisce i punti  $-k \cos \phi$  e  $k \cos \phi$  nel piano complesso di  $k_z$ . Per quanto detto il percorso di Figura 2.6 si trasforma nel percorso mostrato in Figura 2.8.

Si consideri ora la seguente identità trigonometrica:

$$i^{-n} \exp(in \arcsin z) = \exp(-in \arccos z) \quad (2.97)$$

Tale identità può essere semplicemente dimostrata. Si scriva il primo membro come segue:

$$\exp \left[ in \left( \arcsin z - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \left\{ \exp \left[ i \left( \arcsin z - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}^n$$

dove si è semplicemente sostituita la quantità  $i^{-n}$  con l'esponenziale  $\exp(-in\pi/2)$  e si è portato  $n$  fuori dall'esponenziale. Ora si esprima l'esponenziale immaginario nella sua rappresentazione trigonometrica, in questo modo si ha:

$$\left[ \cos \left( \arcsin z - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \arcsin z - \frac{\pi}{2} \right) \right]^n = [\sin(\arcsin z) - i \cos(\arcsin z)]^n$$

ricordando ora che  $\cos(\arcsin z) = \sin(\arccos z)$  si può scrivere:

$$[z - i \sin(\arccos z)]^n = [\cos(\arccos z) - i \sin(\arccos z)]^n = \exp(-in \arccos z)$$

Come si voleva dimostrare.

Potremo quindi riscrivere l'espressione (2.93) come segue:

$$CW_l(kx, kz) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \exp[ix\sqrt{k^2 - k_z^2} - il \arccos(k_z/k)]}{\sqrt{k^2 - k_z^2}} \exp(ik_z z) dw \quad (2.98)$$

dove si è usata l'identità trigonometrica (2.97). Con gli estremi di integrazione stiamo indicando che il percorso di integrazione debba provenire da  $-\infty$  sull'asse reale e giungere a  $+\infty$  sempre sull'asse reale.

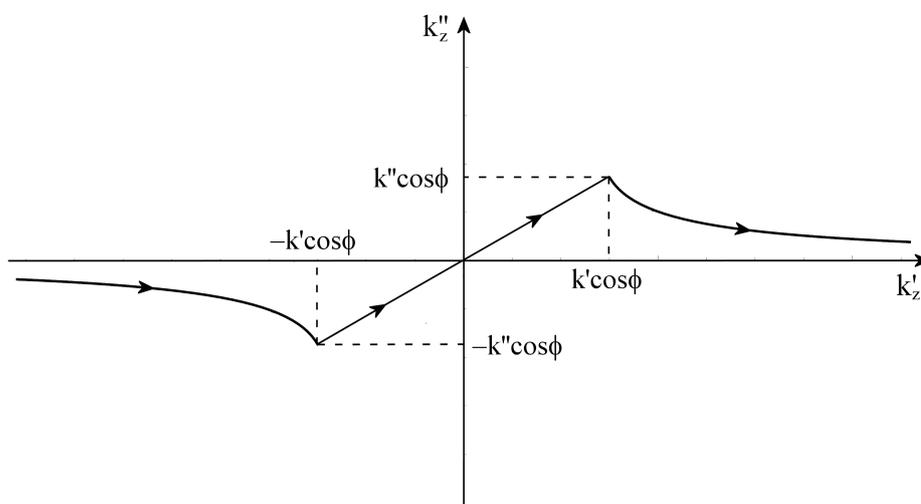


Figura 2.8: Percorso di integrazione dell'integrale (2.93).

Ora si noti che il percorso di Figura 2.8 non è univoco, infatti esso è il trasformato del percorso di Figura 2.6, il quale può però essere modificato mantenendo fisse le due rette a cui deve tendere la curva e il fatto che debba passare per  $w = 0$ , quindi il percorso di integrazione sul piano di  $w$  può essere una qualsiasi curva che tenda asintoticamente alle due semirette verticali e che rimanga compresa nel dominio colorato di Figura 2.9a. Si ricaverà ora come si trasforma tale dominio nel piano di  $k_z$ .

Si consideri la regione colorata in rosso di Figura 2.9a. Tale regione è delimitata dalla semiretta verticale superiore passante per  $w = \phi - \pi/2$ , dal segmento sull'asse reale compreso tra  $\phi - \pi/2$  e  $0$ , e dal semiasse immaginario positivo. Si è visto che la semiretta si trasforma nel tratto del ramo sinistro dell'iperbole (2.95), ruotata di un angolo  $\phi$ , che proviene dall'infinito asintoticamente sull'asse reale negativo e che giunge al punto  $-k \cos \phi$ . Il segmento sull'asse reale si trasforma in un tratto della retta  $k''_z = \tan \phi k'_z$ , ed in particolare nel tratto che unisce i punti  $-k \cos \phi$  e  $0$ . Il semiasse immaginario si trasforma, come si può facilmente verificare, in un tratto della retta  $k''_z = -\cot \phi k'_z$ , ed in particolare ne rappresenta la semiretta contenuta nel secondo quadrante. Quindi si può dire che il dominio colorato in rosso di Figura 2.9a, si trasforma in un dominio compreso tra l'iperbole (2.95), ruotata di un angolo  $\phi$ , il tratto della retta  $k''_z = \tan \phi k'_z$  che va da  $-k \cos \phi$  a  $0$ , e dalla semiretta  $k''_z = -\cot \phi k'_z$  contenuta nel secondo quadrante. Tale dominio è rappresentato in Figura 2.9b, colorato in rosso.

Si consideri ora la regione colorata in blu di Figura 2.9a. In questo caso la regione è delimitata dal semiasse immaginario negativo, dal segmento sull'asse reale che unisce i punti  $0$  e  $\pi/2 - \phi$ , e dalla semiretta verticale inferiore passante per

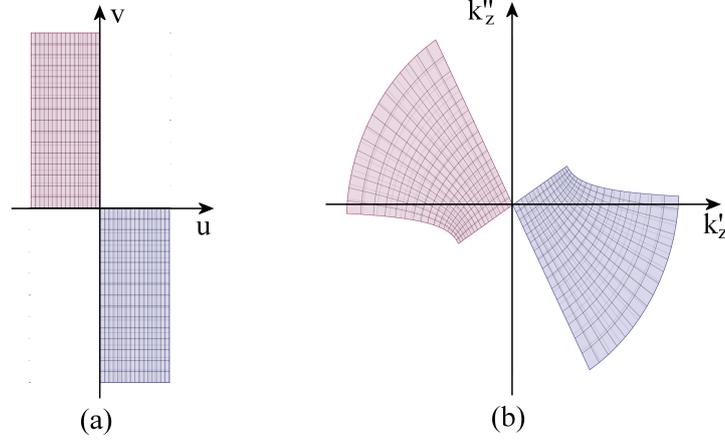


Figura 2.9: (a) Dominio in cui deve essere contenuto il percorso di integrazione dell'espressione (2.91). (b) Dominio in cui deve essere contenuto il percorso di integrazione dell'espressione (2.98) .

per  $w = \pi/2 - \phi$ . Il semiasse immaginario negativo si trasformerà sempre in un tratto della retta  $k''_z = -\cot \phi k'_z$ , ma questa volta si avrà la semiretta contenuta nel quarto quadrante. Il segmento sull'asse reale si trasformerà nel tratto della retta  $k''_z = \tan \phi k'_z$ , questa volta nel tratto che unisce i punti 0 e  $k \cos \phi$  ed in fine la semiretta verticale inferiore si trasformerà in un tratto del ramo destro dell'iperbole (2.95), ruotata di un angolo  $\phi$ , ed in particolare nel tratto che parte da  $k \cos \phi$  e che tende asintoticamente all'infinito sull'asse reale positivo. Quindi la regione colorata in blu in Figura 2.9a, si trasforma nella regione colorata in blu di Figura 2.9b. Il dominio rappresentato in Figura 2.9b rappresenta la regione dove deve giacere il percorso di integrazione dell'espressione (2.98). Tale curva dovrà sempre tendere asintoticamente all'asse reale e passare per il punto  $k_z = 0$ . Vediamo che nella regione rappresentata in Figura 2.9b è sempre contenuto l'asse reale. Questo vuol dire che potremo modificare il percorso di integrazione di Figura 2.8 per farlo coincidere con l'asse reale. Così facendo l'integrale in (2.98) sarà esteso al solo asse reale e quindi potrà essere interpretato come una semplice antitrasformata di Fourier.

Quanto detto in questa sezione è valido, come si è già fatto notare, per  $|\theta| \in [0, \pi/2]$ . È possibile dimostrare che per  $|\theta| \in [\pi/2, \pi]$ , ovvero per  $x < 0$ , valgono discorsi del tutto analoghi. In particolare lo spettro dell'onda cilindrica in tale semispazio sarà:

$$\widehat{CW}_l(kx, k_z) = \frac{2 \exp[-ix\sqrt{k^2 - k_z^2} + il \arccos(k_z/k)]}{\sqrt{k^2 - k_z^2}} \quad (2.99)$$

Il fatto che le espressioni (2.98) e (2.99) convergano quando il percorso di integrazione coincide con l'asse reale è facilmente dimostrabile anche senza fare ricorso alla trasformazione conforme dell'intero insieme di convergenza. Si consideri il limite per  $k_z \rightarrow \pm\infty$  della parte reale dell'esponente in (2.98):

$$\lim_{k_z \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Re} \left\{ i \left[ x \sqrt{k^2 - k_z^2} - \arccos(k_z/k) + k_z z \right] \right\} \quad (2.100)$$

Ora si noti che il termine in arccos ha un andamento logaritmico, quindi è trascurabile all'interno del limite. Avendo supposto che  $k_z$  si muova sull'asse reale, il termine  $i k_z z$  non rientra nella parte reale, quindi possiamo limitare l'analisi al seguente limite:

$$\lim_{k_z \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Re} \left[ i x \sqrt{k^2 - k_z^2} \right] \quad (2.101)$$

Tale limite tende a  $-\infty$  quando la parte immaginaria della radice quadrata risulta positiva. Si deve quindi andare a studiare il comportamento della funzione radice quadrata. Come è ben noto la radice quadrata presenta, nel campo complesso, due branch point, situati in questo caso in  $\pm k$ . Per garantire la continuità della funzione è necessario tracciare sul piano complesso due branch cut che colleghino i due fogli di Riemann relativi alla funzione. Come è ben noto la funzione sarà continua nell'insieme dei due fogli, quindi in corrispondenza di ogni taglio si avrà un cambiamento di segno della radice quadrata, il quale garantisce la continuità. È interessante notare che anche la funzione  $\arccos(k_z/k)$  presenta due branch point in  $\pm k$  ed introdurrebbe un'infinità di fogli di Riemann, se non fosse ad esponente; la funzione esponenziale infatti mappa questi infiniti fogli su due soli fogli di Riemann, uno relativo ai fogli pari, l'altro ai fogli dispari. In questo modo i fogli di Riemann relative alla funzione arccos vanno a coincidere con i fogli di Riemann relativi alla funzione radice quadrata. I branch cut devono essere due linee che uniscano i branch point all'infinito, possono quindi essere scelti con una certa libertà. Due possibilità che si usano in genere nella scelta dei branch cut sono quelle di scegliere o le linee sulle quali risulta nulla la  $\operatorname{Re} \left[ \sqrt{k^2 - k_z^2} \right]$ , oppure le linee sulle quali risulta nulla la  $\operatorname{Im} \left[ \sqrt{k^2 - k_z^2} \right]$ . Ci proponiamo ora di trovare le curve sulle quali queste condizioni sono soddisfatte. Scriviamo la radice quadrata separando la parte reale dalla parte immaginaria dei diversi numeri complessi al suo interno:

$$\sqrt{k^2 - k_z^2} = \sqrt{k'^2 - k''^2 + 2i k' k'' - k_z'^2 + k_z''^2 - 2i k_z' k_z''} \quad (2.102)$$

da questa espressione vediamo facilmente che quando  $k_z' k_z'' = k' k''$ , sotto radice si ha una quantità puramente reale. In questo caso la sua radice quadrata sarà, o un numero puramente reale, quando questa quantità risulta positiva, o un numero puramente immaginario, quando tale quantità risulta negativa. Abbiamo così trovato la curva sulla quale giacciono i valori per cui la radice quadrata ha o la parte reale o la parte immaginaria nulle. Essa è l'iperbole equilatera sul piano di  $k_z$ :

$$k_z' k_z'' = k' k'' \quad (2.103)$$

Per discriminare tra i valori è sufficiente inserire la condizione dell'iperbole equilatera trovata sotto radice:

$$\sqrt{k'^2 - k''^2 - \frac{k'k''}{k_z'^2} + k_z''^2} \quad (2.104)$$

La quantità sotto radice può essere facilmente scomposta come segue:

$$\sqrt{\frac{(k_z''^2 + k'^2)(k_z''^2 - k''^2)}{k_z'^2}} \quad (2.105)$$

Si vede facilmente che l'espressione sotto radice è positiva quando  $k_z''$  assume valori esterni ai due numeri  $\pm k''$  ed è negativa per valori interni ad esse. Quindi, per quanto riguarda l'iperbole equilatera trovata, prendendo i punti  $k_z = \pm k$ , ovvero i punti in cui la radice quadrata è puramente nulla, come riferimento, si trova che i tratti di iperbole che partendo da questi punti tendono agli asintoti verticali, corrispondono ai punti in cui è nulla la parte immaginaria della radice quadrata, mentre i tratti di iperbole che tendono agli asintoti orizzontali corrispondono a quei punti del piano complesso di  $k_z$  per cui la parte reale della radice quadrata risulta nulla. In Figura 2.10, è mostrata l'iperbole su cui giacciono i due possibili branch cuts insieme al dominio di convergenza dello sviluppo spettrale. Si vede facilmente che all'interno del dominio di convergenza non si ha alcun attraversamento dei due branch cuts, quindi la determinazione della radice quadrata negli integrali fin qui discussi non è mai ambigua e quindi le funzioni integrande sono sempre continue su un unico foglio di Riemann.

## 2.5 Riflessione e Trasmissione di onde cilindriche all'interfaccia tra due mezzi con perdite

Si considerino sempre i due mezzi delle sezioni precedenti, ma in questo caso si abbia un'onda cilindrica proveniente dal mezzo 1 e che incida sull'interfaccia. Come sempre si considera un riferimento cilindrico  $(r, \theta)$  sul piano  $(x, z)$  tali sistemi saranno legati dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

Inoltre, si sposti l'origine del sistema di riferimento, che prima coincideva con il generico punto dell'interfaccia dove puntava il generico vettore di propagazione dell'onda piana incidente, portandolo a coincidere con l'origine dell'onda cilindrica. In questo senso se si considera l'onda cilindrica come l'onda generata da un filo rettilineo di lunghezza indefinita ortogonale al piano  $(x, z)$ , si potrà far coincidere l'origine del piano con il centro della sezione del filo. Si suppone poi che la distanza tra l'origine e l'interfaccia tra i due mezzi sia pari a  $h$ . Come

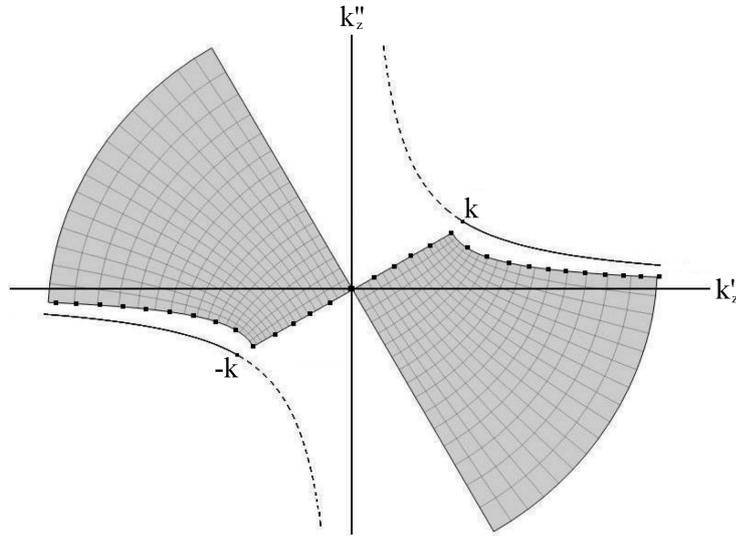


Figura 2.10: La parte quadrettata in grigio rappresenta l'insieme di convergenza dello sviluppo spettrale della generica armonica cilindrica. L'iperbole equilatera esterna al dominio rappresenta tutti i punti per i quali la radice quadrata  $\sqrt{k^2 - k_z^2}$  risulta o puramente reale, o puramente immaginaria. In particolare, partendo dal punto  $k_z = k$ , i punti dell'iperbole che vanno verso l'asintoto verticali (linea tratteggiata) sono punti per i quali la parte immaginaria della radice quadrata è nulla, viceversa, i punti che vanno verso l'asintoto orizzontale (linea solida) rappresentano i punti del piano per i quali la parte reale della radice quadrata è nulla.

fatto nelle sezioni precedenti si può scrivere la generica armonica cilindrica come il prodotto di una funzione di Hankel per un esponenziale immaginario:

$$CW_m^{(+)}(r, \theta) = H_m^{(1)}(k_1 r) e^{im\theta} \quad (2.106)$$

Quindi la disturbanza dell'onda potrà essere posta pari a:

$$V_i(r, \theta) = V_{0i} CW_m^{(+)}(r, \theta) \quad (2.107)$$

L'incidenza dell'onda cilindrica sull'interfaccia piana genererà un'onda riflessa ed un'onda trasmessa, ma, al contrario di quanto succedeva nel caso di un'onda piana, non è detto che tali onde conservino una natura cilindrica. Infatti, nel caso dell'onda piana, essendo essa un'onda intrinsecamente legata al sistema di riferimento cartesiano, in particolare essa è proprio l'autofunzione dell'operatore Laplaciano in tale sistema di riferimento, era semplice imporre le condizioni di continuità su tutta l'interfaccia. Nel caso dell'onda cilindrica, invece, l'imposizione di tali condizioni è tutt'altro che semplice; il piano che rappresenta

l'interfaccia infatti è descritto da un'equazione piuttosto complessa nel sistema di riferimento cilindrico e questo rende l'applicazione delle condizioni di continuità in tale sistema di riferimento estremamente difficile. Per questo motivo non si risolverà il problema della riflessione e trasmissione dell'onda cilindrica in modo diretto, piuttosto si cercherà di sfruttare le informazioni acquisite dalla riflessione e trasmissione di un'onda piana per fornire una soluzione semplice al problema posto.

Come è stato già ampiamente dimostrato nelle sezioni precedenti è sempre possibile scrivere lo sviluppo in onde piane di una qualsiasi onda cilindrica. L'idea quindi, per risolvere il problema presente, è di sviluppare l'onda cilindrica incidente in onde piane, considerare la riflessione e la trasmissione della generica onda piana dello spettro e poi integrare nuovamente per ottenere l'onda riflessa e trasmessa. Si consideri lo sviluppo in onde piane della disturbanza (2.107):

$$V_i(r, \theta) = V_i(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{0i} \widehat{CW}_m^{(+)}(k_1 x, k_z) e^{ik_z z} dk_z \quad (2.108)$$

dove nell'argomento dello spettro si è esplicitata la dipendenza da  $k_1$  per ricordare che si sta parlando dello spettro dell'onda cilindrica propagantesi nel mezzo 1. Si calcoli ora questa disturbanza in corrispondenza dell'interfaccia piana che, nel nostro nuovo sistema di riferimenti ha coordinate  $(x = h, z)$ :

$$V_i(h, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{0i} \widehat{CW}_m^{(+)}(k_1 h, k_z) e^{ik_z z} dk_z \quad (2.109)$$

Ricordando l'espressione dello spettro dell'onda cilindrica, si veda (2.98), è facile vedere che questo integrale può anche essere scritto come segue:

$$V_i(h, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{0i} \widehat{CW}_m^{(+)}(0, k_z) e^{i(k_1 x h + k_z z)} dk_z \quad (2.110)$$

Per ottenere la disturbanza dell'onda riflessa sul piano  $z = h$  sarà sufficiente moltiplicare la singola onda piana dello spettro per il coefficiente di riflessione  $R(k_z)$ . È bene notare che il coefficiente di riflessione è funzione di  $k_z$  solo perché ogni singola onda piana, per ogni singolo valore di  $k_z$  va moltiplicata per il corrispettivo coefficiente di riflessione. In questo modo si avrà:

$$V_r(h, z) = \frac{V_{0i}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(k_z) \widehat{CW}_m^{(+)}(0, k_z) e^{i(k_1 x h + k_z z)} dk_z \quad (2.111)$$

Questa è l'espressione del campo riflesso all'interfaccia. Bisogna notare che l'espressione di  $R(k_z)$  cambia a seconda che l'onda piana sia in polarizzazione  $E$  o  $H$ . Viene naturale chiedersi quale delle due espressioni vada usata nel caso dell'incidenza dell'onda cilindrica. Come è ben noto però l'onda cilindrica può essere considerata localmente un'onda piana, è sufficiente quindi sapere se l'onda cilindrica è localmente un'onda piana in polarizzazione  $E$  o in polarizzazione  $H$ . Da questo dipenderà anche il significato fisico assunto dalla disturbanza dell'onda. Per questo motivo tale differenziazione dipenderà essenzialmente dalle

particolari proprietà di polarizzazione dell'onda cilindrica ed è quindi da considerarsi un dato del nostro problema, dipendendo essenzialmente dal tipo di eccitazione dell'onda<sup>5</sup>.

Per avere il campo in una qualsiasi posizione  $x < h$  basterà far propagare la singola onda piana a partire da  $h$  per la generica distanza  $-x$ , ovvero moltiplicare la singola onda piana per un termine  $\exp[ik_x(h-x)]$ . In questo modo otteniamo la generica onda riflessa:

$$V_r(x, z) = \frac{V_{0i}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(k_z) \widehat{CW}_m^{(+)}(0, k_z) e^{i[k_{1x}(2h-x) + k_z z]} dk_z \quad (2.112)$$

Che, riportando il termine in  $x$  all'interno dello spettro dell'onda cilindrica, diventa:

$$V_r(x, z) = \frac{V_{0i}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(k_z) \widehat{CW}_m^{(+)}(k_1 x, k_z) e^{i(k_x 2h + k_z z)} dk_z \quad (2.113)$$

Notiamo che il termine in  $x$  all'interno dello spettro  $\widehat{CW}_m^{(+)}(x, k_z)$  sarà negativo perché questa volta esso rappresenta onde che si propagano nel semispazio  $x < 0$ , quindi assume la forma (2.99). Siamo riusciti in questo modo a scrivere la disturbanza dell'onda riflessa. Potremo definire la funzione d'onda riflessa (RW) come segue:

$$RW_m(x, z, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(k_z) \widehat{CW}_m^{(+)}(x, k_z) e^{i(k_x 2h + k_z z)} dk_z \quad (2.114)$$

Tale funzione è definita per ogni punto del semispazio  $x < h$ , nel senso che l'integrale sarà convergente solo in questo semispazio. Si è deciso di esplicitare la dipendenza da  $h$  nell'argomento della funzione in quanto questo parametro caratterizza la funzione stessa. Essa infatti è la funzione d'onda riflessa a causa dell'incidenza di un'onda cilindrica su un'interfaccia posta a distanza  $h$  dall'origine dell'onda stessa. In questo modo la disturbanza dell'onda riflessa potrà essere scritta come segue:

$$V_r(x, z) = V_{0i} RW_m(x, z, h) \quad (2.115)$$

Tale disturbanza sarà ovviamente definita in ogni punto  $x < h$ , ovvero in tutto il mezzo 1. Si è deciso di omettere il parametro  $h$  nell'argomento della disturbanza per rendere la trattazione più leggera. Si consideri ora l'onda trasmessa. Procedendo in modo del tutto analogo a quanto fatto per l'onda riflessa si potrà scrivere il campo trasmesso all'interfaccia come segue:

$$V_t(h, z) = \frac{V_{0i}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T(k_z) \widehat{CW}_m^{(+)}(k_1 h, k_z) e^{ik_z z} dk_z \quad (2.116)$$

---

<sup>5</sup>In particolare, quando l'onda cilindrica si considera generata da una linea di corrente elettrica ideale, il campo elettrico sarà puramente diretto lungo  $y$  e quindi l'onda potrà essere considerata in polarizzazione  $TM$ . Viceversa, se l'eccitazione è una linea ideale di corrente magnetica si dovrà considerare una polarizzazione  $TE$ .

dove valgono gli stessi discorsi per quanto riguarda il tipo di polarizzazione. Per avere l'onda trasmessa nel mezzo 2 si dovrà far propagare la generica onda piana in tale mezzo, quindi si dovrà moltiplicare l'argomento dell'integrale per il termine di propagazione lungo  $x$  per  $x > h$ , ovvero per un termine  $\exp[ik_{2x}(x-h)]$ , ottenendo:

$$V_t(x, z) = \frac{V_{0i}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T(k_z) \widehat{CW}_m^{(+)}(k_1 h, k_z) e^{i(k_{2x}(x-h) + k_z z)} dk_z \quad (2.117)$$

Tale espressione sarà valida, i.e. l'integrale sarà convergente, nel semipiano  $x > h$ , ovvero in tutto il mezzo 2. Analogamente a quanto fatto precedentemente si potrà definire una funzione d'onda trasmessa (TW) come segue:

$$TW(x, z, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T(k_z) \widehat{CW}_m^{(+)}(k_1 h, k_z) e^{i(k_{2x}(x-h) + k_z z)} dk_z \quad (2.118)$$

Tale funzione è definita nel semipiano  $x > h$ . Analogamente al caso della funzione d'onda riflessa, si è deciso di esplicitare tra le dipendenze della funzione il parametro  $h$ , dato che esso è caratterizzante della funzione stessa; la  $TW_m(x, z, h)$  è la funzione d'onda trasmessa dovuta all'incidenza di un'onda cilindrica su un'interfaccia posta a distanza  $h$  dall'origine dell'onda cilindrica. A questo punto si potrà scrivere la disturbanza dell'onda trasmessa come segue:

$$V_t(x, z) = V_{0i} TW_m(x, z, h) \quad (2.119)$$

Si è così risolto il problema della riflessione e della trasmissione di un'onda cilindrica ad un'interfaccia piana. Non sono stati ricavati i coefficienti di riflessione e di trasmissione in quanto, a differenza dal caso dell'incidenza dell'onda piana, in questo caso essi dipenderebbero dalle coordinate  $(x, z)$ , a causa delle differenti geometrie che caratterizzano l'onda e l'interfaccia. Essi si potrebbero facilmente ottenere come rapporto delle disturbanze dell'onda riflessa e trasmessa rispettivamente su la disturbanza dell'onda incidente. Il loro significato tuttavia sarebbe diverso dai coefficienti ricavati per l'onda piana, quest'ultimi infatti sono dei coefficienti che modificano solo l'ampiezza e la fase dell'onda, senza cambiarne la forma. Nel caso presente, dato che la forma delle onde riflessa e trasmessa non è più cilindrica non è possibile scrivere dei coefficienti che abbiano lo stesso significato di carattere generale. È interessante comunque notare che, esattamente come le armoniche cilindriche  $CW_m$  costituiscono un insieme completo in cui si può sviluppare una generica onda incidente, così le funzioni  $RW_m$  e  $TW_m$  costituiscono due insiemi completi di funzioni nelle quali possono essere sviluppate le onde riflesse e trasmesse da un'interfaccia, rispettivamente.

A questo punto è lecito chiedersi che legame ci sia tra le funzioni d'onda  $RW_m(x, z, h)$  e  $TW_m(x, z, h)$  e la funzione d'onda cilindrica  $CW_m(x, z)$ . Per capire questo si dovrebbero risolvere gli integrali (2.114) e (2.118) in forma chiusa, compito che porta a difficoltà non indifferenti. Tuttavia, per avere un'idea del rapporto che le funzioni d'onda riflessa e trasmessa hanno con la funzione d'onda cilindrica, può essere sufficiente una loro valutazione asintotica. Nelle seguenti sezioni parleremo appunto della valutazione asintotica degli integrali ed andremo a valutare gli integrali (2.114) e (2.118).

## 2.6 Valutazione asintotica degli integrali

Nel seguito si illustrerà un metodo per la valutazione asintotica di integrali complessi. Tale metodo è semplicemente un'estensione del metodo della discesa più ripida (SDM, Steepest Descent Method). Si consideri un integrale del seguente tipo:

$$I(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z)e^{ikq(z)} dz \quad (2.120)$$

dove  $k, z \in \mathbb{C}$ ,  $F(z)$  e  $q(z)$  sono funzioni complesse olomorfe in  $\mathbb{C}$ . Poniamo inoltre  $z = x + iy$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $q(z) = u(z) + iv(z)$ , con  $u(z), v(z) \in \mathbb{R}$ . Il percorso di integrazione di questo integrale può essere variato all'interno del campo di olomorfia dell'integrando. È bene ricordare che se nel modificare il percorso si incontrano dei poli dell'integrando, si dovranno aggiungere al risultato dell'integrale i residui relativi a tali poli [33, 40]. Per grandi valori di  $k$  l'esponentiale è soggetto a forti oscillazioni al variare di  $z$  a causa delle grandi variazioni a cui è soggetta la parte immaginaria dell'esponente. Ci si propone quindi di trovare un percorso per il quale le variazioni della parte immaginaria dell'esponente siano minime in una certa zona al di fuori della quale il contributo della funzione all'integrale sia trascurabile. In altre parole si considera il punto per il quale si ha la parte immaginaria dell'esponente costante e poi si sceglie un percorso di integrazione passante per questo punto e per il quale la parte reale dell'esponente tenda all'infinito il più velocemente possibile. Proprio per questo si parla della discesa più ripida, perché si vuole un percorso per il quale la funzione decada il più velocemente possibile. Il punto per il quale si ha  $q(z) = \text{cost.}$  è quello in cui la derivata prima di  $q(z)$  si annulla. Per le condizioni di Cauchy-Riemann tale punto è quello in cui entrambe le derivate parziali di  $q(z)$  si annullano:

$$\frac{dq(z)}{dx} = -i \frac{dq(z)}{dy} \Rightarrow \text{ se } \frac{dq(z_s)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dq(z_s)}{dy} = 0 \quad (2.121)$$

Inoltre, essendo  $q(z)$  olomorfa, non può avere nè massimi nè minimi all'interno del campo di olomorfia [33], questo ci porta a dire che il punto  $z_s$  deve necessariamente essere un punto di sella, un punto quindi nel cui intorno la funzione è circa costante ed in cui si possono trovare percorsi in cui la funzione cresce o decresce. Ora si deve trovare il percorso, che passi per il punto di sella  $z_s$ , per il quale si ha la massima variazione della parte reale dell'esponente. Si chiami  $s$  il generico percorso di integrazione e  $\gamma$  l'angolo che la tangente a tale percorso forma, punto per punto, con l'asse reale. Si noti che la parte reale dell'esponente è legata alla funzione  $v(z)$ , quindi per trovare il percorso  $s$  che ne massimizza le variazioni si deve imporre la seguente condizione:

$$\frac{d}{d\gamma} \frac{dv(z)}{ds} = 0 \quad (2.122)$$

da cui:

$$\frac{d}{d\gamma} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right] = 0 \quad (2.123)$$

che fornisce:

$$\frac{d}{d\gamma} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \gamma \right] = 0 \quad (2.124)$$

da cui:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} \sin \gamma + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \gamma = 0 \quad (2.125)$$

Sfruttando le condizioni di Cauchy-Riemann, otteniamo:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sin \gamma + \frac{\partial u}{\partial x} \cos \gamma = 0 \quad (2.126)$$

facendo passaggi inversi ai precedenti è facile trovare che:

$$\frac{du(z)}{ds} = 0 \quad (2.127)$$

Quindi il percorso di discesa (o ascesa) più ripida è quello sul quale la parte reale di  $q(z)$ , ovvero la parte immaginaria dell'esponente, risulta costante. È ovvio che tale percorso debba contenere necessariamente il punto di sella  $z_s$ . Si noti che fino ad ora non sono stati presi in considerazione i versi di tali variazioni, ovvero il percorso calcolato imponendo la condizione (2.127) potrebbe risultare quello per il quale la parte reale dell'esponente vari più velocemente verso  $-\infty$  (discesa), ovvero dove si ha la maggior concentrazione dei valori della funzione integranda, ma potrebbe anche essere quello in cui la parte reale dell'esponente vari più velocemente verso  $+\infty$  (ascesa), ovvero un percorso per il quale l'integrale divergerebbe! È chiaro quindi che è fondamentale avere un criterio che ci fornisca questa informazione. A questo proposito introduciamo il concetto di punto di sella di ordine  $N$ . Un punto di sella  $z_s$ , di una funzione  $f(z)$ , si dice di ordine  $N$  se le prime  $N$  derivate di  $f(z)$  sono nulle e risulta non identicamente nulla la derivata  $N + 1$ :

$$\frac{\partial^m f}{\partial z^m} \Big|_{z=z_s} = 0 \quad \text{per } m = 1, \dots, N \quad (2.128)$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial z^m} \Big|_{z=z_s} = ae^{i\alpha} \quad \text{per } m = N + 1$$

dove  $a > 0$ .

Si mostrerà ora che ad un punto di sella di ordine  $N$  sono associate  $N + 1$  direzioni di discesa più ripida ed  $N + 1$  direzioni di ascesa più ripida. Poniamo:

$$z - z_s = re^{i\theta} \quad (2.129)$$

Si sviluppi ora la funzione  $f(z)$  in serie di Taylor, con punto di partenza  $z_s$ , fermandosi all'ordine  $N + 1$ :

$$f(z) - f(z_s) \approx \frac{(z - z_s)^{N+1}}{n!} \frac{d^{N+1} f}{dz^{N+1}} \Big|_{z=z_s} \quad (2.130)$$

che, sfruttando le espressioni (2.128) e (2.129), diventa:

$$f(z) - f(z_s) \approx \frac{ar^{N+1}}{n!} e^{i(N+1)\theta} e^{i\alpha} \quad (2.131)$$

Ora si ricordi che i percorsi di discesa o di ascesa più ripida sono quelli in cui l'esponente ha parte immaginaria costante, quindi per trovare tali percorsi si dovrà prima separare la parte reale e la parte immaginaria dell'espressione (2.131), ottenendo:

$$f(z) - f(z_s) \approx \frac{ar^{N+1}}{n!} \cdot \{ \cos[(N+1)\theta + \alpha] + i \sin[(N+1)\theta + \alpha] \} \quad (2.132)$$

Il percorso di discesa più ripida sarà quello per il quale la parte immaginaria del membro destro dell'espressione (2.131) risulta nulla e la parte reale ne risulta negativa:

$$\sin[(N+1)\theta + \alpha] = 0 \quad (2.133)$$

$$\cos[(N+1)\theta + \alpha] < 0$$

viceversa il percorso di più ripida ascesa sarà quello per il quale la parte immaginaria risulta essere nulla e la parte reale sempre positiva:

$$\sin[(N+1)\theta + \alpha] = 0 \quad (2.134)$$

$$\cos[(N+1)\theta + \alpha] > 0$$

dalle condizioni (2.133) e (2.134) si ottengono le seguenti relazioni:

- Percorso di discesa più ripida:

$$\theta = -\frac{\alpha}{(N+1)} + \frac{2m+1}{(N+1)}\pi \quad (2.135)$$

- Percorso di ascesa più ripida:

$$\theta = -\frac{\alpha}{(N+1)} + \frac{2m}{(N+1)}\pi \quad (2.136)$$

dove  $m \in \mathbb{N}$ .

Si torni ora all'integrale (2.120). Come si è visto per calcolare il percorso di discesa più ripida è necessario valutare l'espressione (2.135), dove la funzione  $f(z)$  va a coincidere con l'esponente  $iq(z)$ , per la quale è necessario conoscere il parametro  $\alpha$ , legato alla prima derivata non nulla di  $iq(z)$  calcolata in  $z_s$ . Per funzioni  $q(z)$  complicate il calcolo di tale percorso può risultare laborioso, inoltre il percorso di integrazione, una volta ottenuto, può anch'esso risultare

complicato, rendendo difficile lo svolgimento in forma chiusa dell'integrale. Fortunatamente il calcolo del percorso di discesa più ripida non è necessario per l'applicazione del metodo, è sufficiente infatti eseguire una trasformazione conforme all'interno dell'integrale, in modo da far coincidere il percorso di discesa più ripida con una linea semplice, per esempio l'asse reale. Tale procedura prende a volte il nome di metodo di Van der Waerden (VdW) [40, 41]. Si consideri la funzione complessa  $f(s) = -s^2$ . Tale funzione possiede un unico punto di sella semplice, i.e. di ordine 1, in  $s = 0$ . La sua prima derivata non nulla in 0 può essere scritta nella forma  $ae^{i\alpha}$ , ponendo  $a = 2$  ed  $\alpha = \pi$ . Ne risulta che i percorsi di discesa più ripida sono le due semirette con origine in 0 e formanti un angolo con l'asse reale pari a 0 ed a  $\pi$ . È chiaro quindi che l'asse reale può essere scelto come percorso di discesa più ripida relativo a questa funzione. Analogamente i due percorsi di ascesa più ripida saranno le due semirette formanti l'asse immaginario. Tali percorsi si possono riconoscere facilmente in Figura 2.11, dove è riportato l'andamento 3D della parte reale della funzione  $f(s) = -s^2$ . Si ponga quindi la funzione ad esponente in (2.120) pari a  $-s^2$  (Si noti che  $k$  è una costante e viene lasciata fuori dalla trasformazione conforme. Nel caso in cui  $k$  sia una costante complessa è possibile ridefinire la funzione  $q(z)$  come  $q(z)e^{i\arg(k)}$ , in modo che l'argomento di  $k$  non modifichi successivamente il percorso di discesa più ripida):

$$i[q(z) - q(z_s)] = -s^2 \quad (2.137)$$

Si noti che è stato aggiunto il valore  $q(z_s)$  per fare in modo che il punto  $z = z_s$  si trasformi nel punto  $s = 0$ . A questo punto è possibile scrivere l'espressione (2.120) come segue:

$$I(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) \frac{dz}{ds} e^{ikq(z_s)} e^{-ks^2} ds \quad (2.138)$$

Si ponga ora:

$$G(s) = F[z(s)] \frac{dz}{ds} \quad (2.139)$$

quindi l'integrale si può riscrivere come segue:

$$I(k) = e^{ikq(z_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} G(s) e^{-ks^2} ds \quad (2.140)$$

A questo punto il percorso di discesa più ripida dell'integrale (2.140) coincide con l'asse reale. Per risolvere in forma chiusa tale espressione si sviluppa la funzione  $G(s)$  in serie di Taylor di punto iniziale  $s_0 = 0$  (si suppone qui che  $G(s)$  non presenti singolarità polari o essenziali su tutto l'asse reale, se così non fosse il metodo sarebbe facilmente generalizzabile considerando lo sviluppo in serie di Laurent e valutando i termini singolari a parte):

$$G(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{G^{(n)}(0)}{n!} s^n \quad (2.141)$$

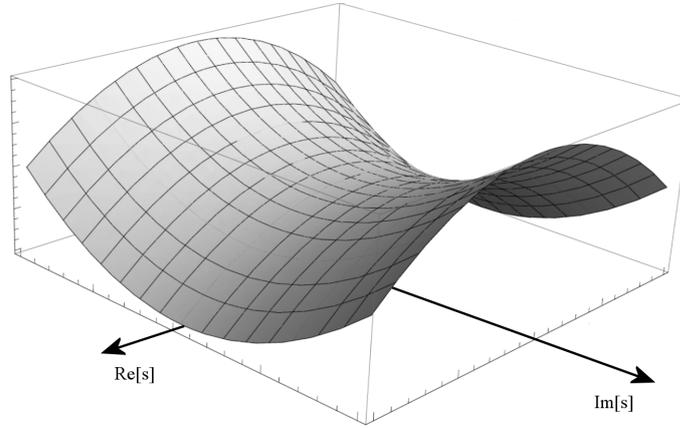


Figura 2.11: Parte reale della funzione complessa  $-s^2$ .

Inserendo tale espressione nell'integrale (2.140) si ottiene:

$$I(k) = e^{ikq(z_s)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{G^{(n)}(0)}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} s^n e^{-ks^2} ds \quad (2.142)$$

Si ricordi a questo punto il seguente integrale notevole, legato all'integrale di Eulero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{k}} \quad (2.143)$$

Si dimostrerà ora che tutti gli integrali relativi alle potenze dispari di  $s$  nell'espressione (2.142) sono nulli, si prenda in considerazione per primo il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-ks^2} ds = \frac{1}{2} \left[ e^{-ks^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad (2.144)$$

si consideri ora il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^{2n+1} e^{-ks^2} ds \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.145)$$

si noti ora che:

$$\frac{d}{dk} \left( e^{-ks^2} \right) = -s^2 e^{-ks^2} \quad (2.146)$$

quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^{2n+1} e^{-ks^2} ds = (-1)^n \frac{d^n}{dk^n} \int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-ks^2} ds = 0 \quad (2.147)$$

Nell'espressione (2.142) rimarranno quindi solo i termini pari. Per questi ultimi è possibile ricavare un'espressione analitica. Infatti:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{2n} e^{-ks^2} ds &= (-1)^n \frac{d^n}{dk^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ks^2} ds = \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{dk^n} \left( \sqrt{\frac{\pi}{k}} \right) \end{aligned} \quad (2.148)$$

Sfruttando la relazione (2.148) all'interno della (2.142), otteniamo:

$$I(k) = e^{ikq(z_s)} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{G^{(2m)}(0)}{(2m)!} \frac{d^n}{dk^n} \left( \sqrt{\frac{\pi}{k}} \right) \quad (2.149)$$

Si noti un fatto notevole: la relazione di equivalenza nell'espressione (2.149) è esatta, questo vuol dire che, applicando questo metodo l'unico errore che si compie nella valutazione dell'integrale sarà dovuto al troncamento della serie. Sostanzialmente si è riusciti, grazie alla procedura svolta, a trasformare un'integrale in una serie senza introdurre errori o approssimazioni.

### 2.6.1 Valutazione asintotica dell'integrale della funzione d'onda riflessa

Si andrà ora ad applicare il metodo esposto nella sezione 2.6 all'integrale (2.114). Per fare questo si dovrà esplicitare, all'interno dell'integrale, l'espressione del coefficiente di riflessione dell'onda piana. Esso però, come è già stato notato in precedenza, assume due forme diverse a seconda che l'onda incidente sia in polarizzazione  $H$  o in polarizzazione  $E$ . Osservando le espressioni dei coefficienti di riflessione e di trasmissione in polarizzazione  $H$  e  $E$ , in (1.133), (1.134), (1.135) e (1.136), si può notare una forte similitudine tra esse. In particolare per passare dalla polarizzazione  $H$  alla polarizzazione  $E$  è sufficiente sostituire al parametro  $\varepsilon$  il parametro  $\mu$  e viceversa, secondo il ben noto principio di dualità. Si potrà quindi procedere ad una trattazione unica scegliendo una qualunque delle due polarizzazioni e passare poi all'altra con questa semplice sostituzione. Scegliamo di trattare la polarizzazione  $H$ , in quanto, entrando in gioco il parametro  $\varepsilon$ , è sicuramente più critica della polarizzazione  $E$ , dove si ha il parametro  $\mu$  che, nella grande maggioranza dei casi, potrà essere considerato uguale per i due mezzi. Si scriva quindi l'integrale in (2.114) esplicitando il coefficiente  $R(k_z)$ , in polarizzazione  $H$ , e l'espressione dello spettro dell'onda cilindrica, ottenendo:

$$RW_m(x, z, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{k_{1x}}{\varepsilon_1} - \frac{k_{2x}}{\varepsilon_2}}{\frac{k_{1x}}{\varepsilon_1} + \frac{k_{2x}}{\varepsilon_2}} \frac{2e^{-ixk_{1x} + im \arccos(k_z/k_1)}}{k_{1x}} e^{i(k_{1x}2h + k_z z)} dk_z \quad (2.150)$$

Si chiami  $\chi = 2h - x$  e si definisca nuovamente il sistema di riferimento in modo che risulti  $\chi = r_\chi \cos \theta_\chi$  e  $z = r_\chi \sin \theta_\chi$ . Moltiplicando numeratore e denominatore per  $\varepsilon_1 \varepsilon_2$  si potrà scrivere:

$$RW_m(\chi, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_2 k_{1x} - \varepsilon_1 k_{2x}}{\varepsilon_2 k_{1x} + \varepsilon_1 k_{2x}} \frac{e^{im \arccos(k_z/k_1)}}{k_{1x}} e^{i(k_{1x}\chi + k_z z)} dk_z \quad (2.151)$$

Si espliciti ora la dipendenza da  $k_z$  in tutta la funzione integranda:

$$RW_m(\chi, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_2 \sqrt{k_1^2 - k_z^2} - \varepsilon_1 \sqrt{k_2^2 - k_z^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{k_1^2 - k_z^2} + \varepsilon_1 \sqrt{k_2^2 - k_z^2}} \frac{e^{im \arccos(k_z/k_1)}}{\sqrt{k_1^2 - k_z^2}} \cdot e^{i(\chi \sqrt{k_1^2 - k_z^2} + k_z z)} dk_z \quad (2.152)$$

In analogia a quanto fatto nella sezione precedente rinominiamo le diverse parti dell'integrando come segue:

$$F_m(k_z) = \frac{\varepsilon_2 \sqrt{k_1^2 - k_z^2} - \varepsilon_1 \sqrt{k_2^2 - k_z^2}}{\varepsilon_2 \sqrt{k_1^2 - k_z^2} + \varepsilon_1 \sqrt{k_2^2 - k_z^2}} \frac{e^{im \arccos(k_z/k_1)}}{\sqrt{k_1^2 - k_z^2}} \quad (2.153)$$

$$q(k_z) = \chi \sqrt{k_1^2 - k_z^2} + k_z z \quad (2.154)$$

Troviamo ora il punto di sella della funzione  $q(k_z)$ :

$$\frac{dq(k_z)}{dk_z} = \frac{-\chi k_z}{\sqrt{k_1^2 - k_z^2}} + z = \frac{z \sqrt{k_1^2 - k_z^2} - \chi k_z}{\sqrt{k_1^2 - k_z^2}} \quad (2.155)$$

Chiamando la coordinata del punto di sella  $k_z = k_s$ :

$$z \sqrt{k_1^2 - k_s^2} - \chi k_s = 0 \rightarrow k_s = \frac{k_1 z}{\sqrt{\chi^2 + z^2}} = \frac{k_1 z}{r_\chi}$$

Il punto di sella sarà quindi:

$$k_s = \frac{k_1 z}{r_\chi} = k_1 \sin \theta_\chi \quad (2.156)$$

La funzione  $q(k_z)$  nel punto di sella assume il valore:

$$q(k_s) = \chi \sqrt{k_1^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_\chi} + z k_1 \sin \theta_\chi = k_1 (\chi \cos \theta_\chi + z \sin \theta_\chi)$$

da cui:

$$q(k_s) = k_1 r_\chi (\cos^2 \theta_\chi + \sin^2 \theta_\chi) = k_1 r_\chi \quad (2.157)$$

Si faccia ora il seguente cambiamento di variabile:

$$iq(k_z) = iq(k_s) - s^2 = ik_1 r_\chi - s^2 \quad (2.158)$$

da cui:

$$dk_z = 2is \left( \frac{dq}{dk_z} \right)^{-1} ds \quad (2.159)$$

Si potrà quindi riscrivere l'integrale (2.152) come segue:

$$RW_m(\chi, z) = \frac{2i}{\pi} e^{ik_1 r_\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} s F_m[k_z(s)] \left( \frac{dq}{dk_z} \right)^{-1} e^{-s^2} ds \quad (2.160)$$

dove il percorso di integrazione è stato modificato in modo che ora l'integrazione sull'asse reale rappresenti un percorso di steepest descent.

Come vuole il metodo di VdW si andrà ora a sviluppare in serie di Taylor la funzione  $G(s)$  composta da tutte le funzioni dell'argomento dell'integrale tranne l'esponenziale in  $s^2$ , tale funzione si approssimerà arrestandosi al primo ordine, si avrà cioè:

$$G(s) = s F_m[k_z(s)] \left( \frac{dq}{dk_z} \right)^{-1} \approx \left[ s F_m[k_z(s)] \left( \frac{dq}{dk_z} \right)^{-1} \right]_{s=0} \quad (2.161)$$

Come si può vedere tale espressione in  $s = 0$  è indeterminata, infatti la derivata della funzione  $q(k_z)$  per  $s = 0$ , i.e.  $k_z = k_s$ , è nulla per definizione. Per calcolare l'espressione (2.161) dovremo quindi risolvere il seguente limite:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{dq}{dk_z} \right)^{-1} = \lim_{k_z \rightarrow k_s} s(k_z) \left( \frac{dq}{dk_z} \right)^{-1} \quad (2.162)$$

dove l'espressione di  $s(k_z)$  si ottiene invertendo la (2.158):

$$s = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{q(k_z) - q(k_s)} \quad (2.163)$$

quindi inserendo le espressioni (2.155) e (2.163) in (2.162) e ricordando la (2.156), si ottiene:

$$\lim_{k_z \rightarrow k_1 \sin \theta_\chi} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{q(k_z) - q(k_s)}}{z \sqrt{k_1^2 - k_z^2 - k_z \chi}} \sqrt{k_1^2 - k_z^2}$$

esplicitando l'espressione di  $q(k_z)$ , si veda la (2.154), si ha:

$$\lim_{k_z \rightarrow k_1 \sin \theta_\chi} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\chi \sqrt{k_1^2 - k_z^2} + k_z z - k_1 r_\chi}}{z \sqrt{k_1^2 - k_z^2 - k_z \chi}} \sqrt{k_1^2 - k_z^2}$$

Si ponga ora  $k_z = k_1 \sin w$  e si passi dal riferimento cartesiano a quello cilindrico:

$$\lim_{w \rightarrow \theta_\chi} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{k_1 r_\chi \cos \theta_\chi \cos w + k_1 r_\chi \sin w \sin \theta_\chi - k_1 r_\chi}}{k_1 r_\chi \sin \theta_\chi \cos w - k_1 r_\chi \cos \theta_\chi \sin w} k_1 \cos w$$

Che, con un po' d'algebra e usando le formule trigonometriche di addizione e sottrazione, diventa:

$$\lim_{w \rightarrow \theta_\chi} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k_1 r_\chi}} \frac{\sqrt{\cos(\theta_\chi - w) - 1}}{\sin(\theta_\chi - w)} k_1 \cos w$$

che può anche essere scritta come segue:

$$\lim_{w \rightarrow \theta_\chi} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k_1 r_\chi}} \sqrt{\frac{\cos(\theta_\chi - w) - 1}{1 - \cos^2(\theta_\chi - w)}} k_1 \cos w$$

ovvero:

$$\lim_{w \rightarrow \theta_\chi} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k_1 r_\chi}} \sqrt{\frac{-1}{1 + \cos(\theta_\chi - w)}} k_1 \cos w = \frac{ie^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2k_1 r_\chi}} k_1 \cos \theta_\chi \quad (2.164)$$

Si è così risolta l'indeterminazione e si potrà quindi scrivere la forma approssimata della (2.161) come:

$$G(0) = F_m(k_s) \frac{ie^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2k_1 r_\chi}} k_1 \cos \theta_\chi \quad (2.165)$$

dalla quale, con l'ausilio della (2.153), si può scrivere:

$$F_m(k_s) = \frac{\varepsilon_2 \sqrt{k_1^2 - k_s^2} - \varepsilon_1 \sqrt{k_2^2 - k_s^2} e^{im \arccos(k_s/k_1)}}{\varepsilon_2 \sqrt{k_1^2 - k_s^2} + \varepsilon_1 \sqrt{k_2^2 - k_s^2}} \frac{1}{\sqrt{k_1^2 - k_s^2}}$$

da cui, ricordando la (2.156), si trova:

$$F_m(k_s) = \frac{k_1 \varepsilon_2 \cos \theta_\chi - \varepsilon_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_\chi} e^{im \arccos(\sin \theta_\chi)}}{k_1 \varepsilon_2 \cos \theta_\chi + \varepsilon_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_\chi}} \frac{1}{k_1 \cos \theta_\chi}$$

da cui ricordando che  $\sin \theta_\chi = \cos(\theta_\chi - \pi/2)$  ed esplicitando le espressioni dei numeri d'onda in funzione dei parametri del mezzo, si ottiene:

$$F_m(k_s) = \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \varepsilon_2 \cos \theta_\chi - \varepsilon_1 \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2 - \mu_1 \varepsilon_1 \sin^2 \theta_\chi} e^{im(\theta_\chi - \pi/2)}}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \varepsilon_2 \cos \theta_\chi + \varepsilon_1 \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2 - \mu_1 \varepsilon_1 \sin^2 \theta_\chi}} \frac{1}{k_1 \cos \theta_\chi}$$

Dividendo numeratore e denominatore per la quantità  $\varepsilon_1 \varepsilon_2$  e con un po' di algebra:

$$F_m(k_s) = \frac{\zeta_1 \cos \theta_\chi - \zeta_2 \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_\chi} e^{im(\theta_\chi - \pi/2)}}{\zeta_1 \cos \theta_\chi + \zeta_2 \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_\chi}} \frac{1}{k_1 \cos \theta_\chi}$$

dove con  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  sono state indicate le impedenze dei due mezzi. Andando a sostituire  $F(k_s)$  in (2.165) si ottiene:

$$G(0) = \frac{ie^{im(\theta_\chi - \pi/2) - i\pi/4}}{\sqrt{2k_1 r_\chi}} \frac{\zeta_1 \cos \theta_\chi - \zeta_2 \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_\chi}}{\zeta_1 \cos \theta_\chi + \zeta_2 \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_\chi}} \quad (2.166)$$

A questo punto si potrà sostituire la (2.166) nell'integrale (2.160), ottenendo:

$$RW_m(\chi, z) \approx \frac{e^{im\theta_\chi}}{\pi} \sqrt{\frac{2}{k_1 r_\chi}} e^{i(k_1 r_\chi - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \cdot \frac{\zeta_1 \cos \theta_\chi - \zeta_2 \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_\chi}}{\zeta_1 \cos \theta_\chi + \zeta_2 \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_\chi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds$$

ovvero:

$$RW_m(r_\chi, \theta_\chi) \approx e^{im\theta_\chi} \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r_\chi}} e^{i(k_1 r_\chi - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \cdot \frac{\zeta_1 \cos \theta_\chi - \zeta_2 \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_\chi}}{\zeta_1 \cos \theta_\chi + \zeta_2 \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_\chi}} \quad (2.167)$$

La (2.167) rappresenta la forma approssimata della funzione d'onda riflessa valida per  $k_1 r_\chi \gg 1$ . Si ricordi ora l'espressione asintotica della funzione di Hankel del primo tipo e di ordine  $m$  [10]:

$$H_m^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad (2.168)$$

Confrontando le equazioni (2.167) e (2.168) si può notare che nell'espressione approssimata della funzione di riflessione c'è proprio l'espressione approssimata della funzione di Hankel moltiplicata per un termine esponenziale  $e^{im\theta_\chi}$ , i.e. una forma approssimata della funzione d'onda cilindrica, il tutto moltiplicato per una funzione dell'angolo  $\theta_\chi$  e dei parametri dei due mezzi. Si può anche notare che la funzione di Hankel presente in (2.167) è centrata in  $x = 2h$  e  $z = 0$ , ovvero nel punto simmetrico, rispetto all'interfaccia, del centro dell'onda cilindrica incidente. È come se l'onda riflessa fosse un'onda cilindrica proveniente dal mezzo 2 avente il centro a distanza  $h$  dall'interfaccia e modulata in ampiezza dalla funzione:

$$\Lambda(\zeta_1, \zeta_2, \theta_\chi) = \frac{\zeta_1 \cos \theta_\chi - \zeta_2 \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_\chi}}{\zeta_1 \cos \theta_\chi + \zeta_2 \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_\chi}} \quad (2.169)$$

Si noti inoltre che l'espressione (2.169), e quindi la (2.167), è valida nel caso in cui l'onda incidente sia in polarizzazione  $H$ ; nel caso di polarizzazione  $E$  sarà sufficiente sostituire alle impedenze caratteristiche dei mezzi, le ammettenze caratteristiche, l'espressione quindi manterrà un comportamento del tutto analogo nelle due polarizzazioni.

Si è dimostrato quindi che l'armonica cilindrica riflessa può essere scritta come segue:

$$RW_m(r_\chi, \theta_\chi) \approx \Lambda(\zeta_1, \zeta_2, \theta_\chi) CW_m(r_\chi, \theta_\chi) \quad (2.170)$$

ovvero risulta essere l'armonica cilindrica dello stesso ordine, centrata nel punto simmetrico rispetto all'interfaccia del centro dell'onda cilindrica incidente, moltiplicata per un opportuno fattore di ampiezza.

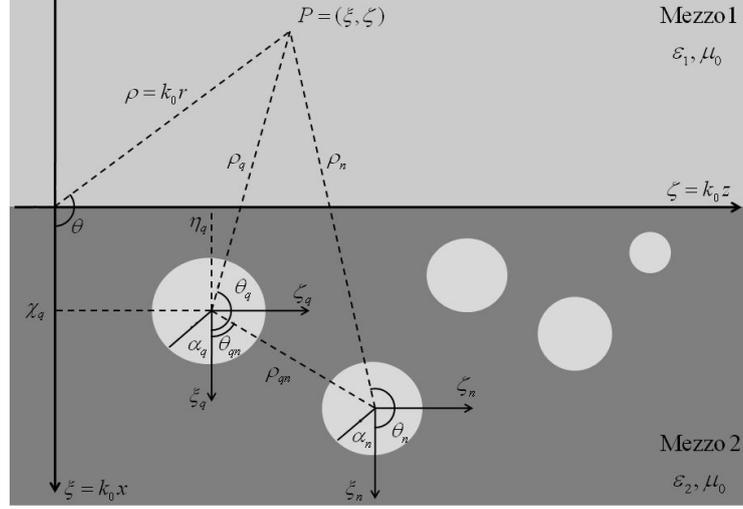
## 2.7 Diffrazione da un'arbitraria disposizione di cilindri immersi in un mezzo con perdite

In questo capitolo ci si propone di esporre l'analisi teorica della diffrazione di un'onda piana e uniforme, propagantesi in aria, da parte di un numero finito di cilindri infinitamente lunghi, di materiale conduttore elettrico perfetto, tra loro paralleli, sepolti in un mezzo dissipativo, mediante l'approccio delle onde cilindriche (CWA, Cylindrical Wave Approach). Questo approccio è già stato applicato nel caso di cilindri sepolti in mezzi privi di perdite [42, 43]. In quanto segue si descriverà il procedimento ivi presentato, modificando la trattazione con l'ausilio degli strumenti ricavati nei precedenti paragrafi, in modo da adattarlo al caso di mezzi con perdite. Si procederà prima di tutto all'impostazione del problema teorico e successivamente si forniranno i dettagli dell'implementazione numerica del metodo.

### 2.7.1 Trattazione teorica

Come primo passo si descriverà la geometria del problema, introducendo i diversi sistemi di riferimento necessari all'impostazione del problema elettromagnetico. Si osservi la Figura 2.12. Si consideri lo spazio diviso in due semispazi occupati dal mezzo 1 e dal mezzo 2, rispettivamente, caratterizzati da diverse permittività e conducibilità, ma aventi la stessa permeabilità magnetica. Si consideri un sistema di riferimento principale (SRP) sul piano  $(x, z)$ , scelto in modo tale da far coincidere il piano  $x = 0$  con l'interfaccia tra i due mezzi. A tale sistema si associ il rispettivo riferimento cilindrico  $(r, \theta)$  come definito in (2.41). I cilindri si suppongono immersi nel mezzo 2, ed aventi l'asse di rivoluzione parallelo all'asse  $y$  del SRP. Il centro del cilindro  $n$ -esimo sarà caratterizzato dalle coordinate  $(h_n, d_n)$  ed il suo raggio sarà chiamato  $a_n$ , inoltre per ogni cilindro si definisce un sistema di riferimento secondario centrato sull'asse del cilindro stesso. Tale sistema di riferimento avrà coordinate cartesiane  $(x_n, z_n)$  e coordinate polari  $(r_n, \theta_n)$ . SRP è legato ai sistemi di riferimento dei singoli cilindri dalla semplice relazione:

$$\begin{cases} x = x_n + h_n \\ z = z_n + d_n \end{cases} \quad (2.171)$$

Figura 2.12: Rappresentazione geometrica di  $N$  cilindri sepolti.

Nel seguito si farà riferimento alle coordinate adimensionali che si ottengono moltiplicando ogni coordinata per il numero d'onda del vuoto  $k_0$ , si avrà quindi:

$$\begin{array}{llll} \xi = k_0 x & \zeta = k_0 z & \rho = k_0 r & \alpha_n = k_0 a_n \\ \xi_n = k_0 x_n & \zeta_n = k_0 z_n & \chi_n = k_0 h_n & \eta_n = k_0 d_n \end{array}$$

Ora che abbiamo definito i sistemi di riferimento possiamo procedere alla definizione del problema. Si considerino i due mezzi con proprietà elettromagnetiche date dalle equazioni (1.97) e (1.99), dove, come si è detto, si avrà  $\mu_1 = \mu_2$ . Si consideri un'onda piana e uniforme proveniente dal mezzo 1, che sia caratterizzata dalla disturbanza  $V_i(\xi, \zeta)$ . Come si è già avuto modo di dire nei capitoli precedenti, tale disturbanza assumerà il ruolo di campo elettrico o di campo magnetico parallelo all'asse dei cilindri a seconda che si stia considerando il caso di polarizzazione E o di polarizzazione H. Tale campo sarà soggetto ad un riflessione nel mezzo 1 ed ad una trasmissione nel mezzo 2, dovute all'interazione con l'interfaccia, ciò darà luogo a due campi, il campo riflesso rappresentato dalla disturbanza  $V_r(\xi, \zeta)$  ed il campo trasmesso, rappresentato da  $V_t(\xi, \zeta)$ . Quest'ultimo inciderà sui cilindri sepolti provocando un campo diffratto, il quale sarà il risultato dell'interazione del campo trasmesso con ogni singolo cilindro e dell'interazione del campo diffratto da ogni cilindro con tutti gli altri cilindri. Il campo diffratto, che giace completamente nel mezzo 2, sarà rappresentato dalla disturbanza  $V_d(\xi, \zeta)$ . Infine, il campo diffratto inciderà sulla superficie di separazione tra i due mezzi dando luogo ad un campo diffratto riflesso (nel mezzo 2) ed ad un campo diffratto trasmesso (nel mezzo 2); tali campi saranno rappresentati rispettivamente dalle disturbanze  $V_{dr}(\xi, \zeta)$  e  $V_{dt}(\xi, \zeta)$ . Riassumendo, potremo

chiamare  $V_1(\xi, \zeta)$  e  $V_2(\xi, \zeta)$  i campi elettromagnetici totali rispettivamente nel mezzo 1 e 2, dove:

$$\begin{cases} V_1(\xi, \zeta) = V_i(\xi, \zeta) + V_r(\xi, \zeta) + V_{dt}(\xi, \zeta) \\ V_2(\xi, \zeta) = V_t(\xi, \zeta) + V_d(\xi, \zeta) + V_{dr}(\xi, \zeta) \end{cases} \quad (2.172)$$

Si andrà ora a definire ognuno di questi contributi. Partiamo dal campo incidente. Come si è avuto modo di dire nel primo capitolo, il vettore di propagazione di un'onda piana che si propaga in un mezzo con perdite può essere espresso con l'ausilio di due distinti formalismi, o con l'ausilio del vettore di fase  $\beta$  e del vettore di attenuazione  $\alpha$ , oppure con il formalismo degli angoli complessi. Entrambi i formalismi sono stati presentati nel primo capitolo, dove si sono anche ricavate le formule per passare da un formalismo all'altro. Nel capitolo 3 si è visto che per il calcolo degli angoli di riflessione e di trasmissione, nell'incidenza di un'onda piana sull'interfaccia tra due mezzi con perdite, il formalismo che permette una più semplice soluzione del problema è quello dei vettori di fase e di attenuazione. Per semplicità si è fatta l'ipotesi che l'onda incidente sia un'onda piana uniforme, quindi il vettore di attenuazione sarà parallelo all'angolo di fase, questo rende i due formalismi coincidenti, infatti si avrà:

$$\begin{aligned} \underline{\beta} + i\underline{\alpha} &= (\beta_x + i\alpha_x)\underline{x}_0 + (\beta_z + i\alpha_z)\underline{z}_0 = \\ &= (\beta + i\alpha)(\cos \phi_i \underline{x}_0 + \sin \phi_i \underline{z}_0) = k(\cos \phi_i \underline{x}_0 + \sin \phi_i \underline{z}_0) \end{aligned}$$

Il campo incidente potrà quindi essere scritto indifferentemente con i due formalismi:

$$V_i(\xi, \zeta) = V_0 e^{(\underline{\beta} + i\underline{\alpha}) \cdot \underline{r}} = V_0 e^{n_1(\xi \cos \phi_i + \zeta \sin \phi_i)} = V_0 e^{n_1(\xi n_{i\perp} + \zeta \sin n_{i\parallel})} \quad (2.173)$$

dove  $n_1$  è l'indice di rifrazione del mezzo 1, ottenuto dividendo il numero d'onda  $k_1$  per il numero d'onda del vuoto. Con  $n_{i\perp}$  e  $n_{i\parallel}$  si sono indicati rispettivamente il coseno ed il seno dell'angolo  $\phi_i$ , notiamo che nel caso in cui l'onda non fosse uniforme tali quantità sarebbero complesse. Più in generali le quantità  $n_1 n_{i\perp}$  e  $n_1 n_{i\parallel}$  sono le componenti, rispettivamente ortogonale e parallela all'interfaccia tra i due mezzi, del vettore  $\underline{n}_i$ , che si ottiene dal vettore  $\underline{k}_i$ , attraverso una divisione per il numero d'onda del vuoto.

Per quanto riguarda il campo riflesso, abbiamo visto nel capitolo 3 come calcolare l'angolo di riflessione ed il coefficiente di riflessione, che assumerà la forma data in (1.133) nel caso di polarizzazione H e (1.135) nel caso di polarizzazione E. In quanto segue chiameremo il coefficiente di riflessione  $R_{12}(k_z)$  indifferentemente per le due polarizzazioni, tenendo presente che nei due casi si dovranno usare due espressioni distinte, mettendo invece l'accento sul verso di incidenza, distingueremo infatti questo coefficiente da quello che si ha nel caso di onde provenienti dal mezzo 2 e che chiameremo  $R_{21}(k_z)$ . Poniamo subito l'accento sul fatto che, come si può vedere dalle espressioni (1.133) e (1.135), il coefficiente di riflessione è sempre una funzione pari della variabile  $k_z$ . Ciò

detto potremo scrivere il campo riflesso come segue:

$$V_r(\xi, \zeta) = R_{12}(n_{i\parallel})V_0e^{n_1(\xi \cos \phi_r + \zeta \sin \phi_r)} = R_{12}V_0e^{n_1(-\xi n_{i\perp} + \zeta n_{i\parallel})} \quad (2.174)$$

Per quanto riguarda il campo trasmesso possiamo ripetere considerazioni analoghe a quelle fatte per il campo riflesso, avremo quindi il coefficiente di trasmissione  $T_{12}(k_z)$ , che, osservando l'espressione (1.134) nel caso di polarizzazione H e (1.136) nel caso di polarizzazione E, possiamo dire essere una funzione pari della variabile  $k_z$ . Diverso è il discorso sull'angolo di trasmissione. Scriviamo la disturbanza del campo trasmesso, in analogia con la (2.174), avremo:

$$V_t(\xi, \zeta) = T_{12}(n_{i\parallel})V_0e^{n_2(\xi \cos \phi_t + \zeta \sin \phi_t)} = T_{12}V_0e^{n_2(\xi n_{t\perp} + \zeta n_{t\parallel})} \quad (2.175)$$

Al contrario dei due campi precedenti, in questo caso avremo che  $n_{t\perp}$  e  $n_{t\parallel}$  saranno quantità complesse, infatti l'onda trasmessa sarà in generale non uniforme e l'angolo di trasmissione  $\phi_t$  sarà quindi in generale complesso. Ora, osservando il procedimento esposto nel capitolo 3 si vede che noto l'angolo di incidenza del vettore di fase e quello del vettore di attenuazione, si possono ottenere gli angoli di questi stessi vettori per l'onda trasmessa, nessuno di questi due angoli però coincide con l'angolo di trasmissione complesso. Come si è visto nel capitolo 1, infatti, l'angolo complesso del vettore di propagazione di un'onda piana non uniforme è legato agli angoli che formano i vettori di fase e di attenuazione dalle espressioni (1.64) e (1.49). Il procedimento per ottenere l'espressione (2.175) sarà quindi il seguente: si calcola l'angolo di trasmissione del vettore di fase e quello del vettore di attenuazione, sfruttando le espressioni (1.121) e (1.122), poi si inseriscono tali valori nelle espressioni (1.64) e (1.49). Così si otterranno rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria dell'angolo complesso  $\phi_t$ .

Una volta calcolata la disturbanza  $V_t(\xi, \zeta)$ , il problema che ci si pone è quello di un'onda piana non uniforme che incide su  $N$  cilindri arbitrariamente disposti nel semispazio  $\xi > 0$ . Dovremo quindi espandere il campo (2.175) in serie di Fourier, come fatto in (2.57). Prima però si dovrà scrivere il campo nel sistema di riferimento dell' $n$ -esimo cilindro. Sfruttando il cambiamento di coordinate in (2.171) si ottiene la seguente espressione:

$$V_t(\xi_n, \zeta_n) = T_{12}(n_{i\parallel})V_0e^{n_2(\chi_n n_{t\perp} + \eta_n n_{t\parallel})}e^{n_2(\xi_n n_{t\perp} + \zeta_n n_{t\parallel})} \quad (2.176)$$

A questo punto possiamo scrivere il campo in armoniche cilindriche come segue:

$$V_t(\xi_n, \zeta_n) = T_{12}(n_{i\parallel})V_0e^{n_2(\chi_n n_{t\perp} + \eta_n n_{t\parallel})} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} J_m(n_2\rho_n) e^{im\theta_n} \quad (2.177)$$

Il campo diffratto dagli  $N$  cilindri sepolti si potrà scrivere come la sovrapposizione dei campi diffratti dai singoli cilindri:

$$V_d(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^N V_{dn}(\xi, \zeta) \quad (2.178)$$

In questo modo il problema si sposta alla determinazione del campo diffratto dai singoli cilindri. In questo senso sappiamo che il campo diffratto da un cilindro può essere agevolmente espresso in armoniche cilindriche come segue (si veda l'espressione (2.65)):

$$V_{dn}(\xi_n, \zeta_n) = V_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_n} c_{nm} CW_m(n_2\xi_n, n_2\zeta_n) \quad (2.179)$$

Inserendo l'espressione (2.179) nella (2.178), si ottiene:

$$V_d(\xi, \zeta) = V_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_n} c_{nm} CW_m[n_2(\xi - \chi_n), n_2(\zeta - \eta_n)] \quad (2.180)$$

dove si è usata la relazione (2.171) per esprimere il campo in SRP. Ora notiamo che tale campo dovrà essere usato per l'applicazione delle condizioni al contorno su ogni cilindro, per questo motivo sarebbe quantomeno comodo avere un'espressione della disturbanza (2.180) in funzione delle coordinate di un singolo cilindro, chiamiamolo cilindro  $q$ -esimo, ovvero quello su cui, di volta in volta, andremo ad applicare le condizioni al contorno. Per fare questo andiamo ad isolare il termine relativo al  $q$ -esimo cilindro nell'espressione (2.180), ottenendo:

$$\begin{aligned} V_d(\xi, \zeta) = & V_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_q} c_{qm} CW_m(n_2\xi_q, n_2\zeta_q) + \\ & + V_0 \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq q}}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_n} c_{nm} CW_m^{(1)}(n_2\xi_n, n_2\zeta_n) \end{aligned} \quad (2.181)$$

Ora dobbiamo esprimere i termini aventi  $s \neq q$  in funzione delle sole coordinate  $(\xi_q, \zeta_q)$ . Questo è un classico problema risolto da Richmond con l'ausilio della cosiddetta formula di addizione di Graaf per le funzioni di Hankel [10]. Infatti, le funzioni cilindriche di questo tipo possono essere scritte come segue:

$$\begin{aligned} CW_m(n_2\xi_n, n_2\zeta_n) &= H_m^{(1)}(n_2\rho_n) e^{im\theta_n} = \\ &= e^{im\theta_{nq}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^l H_{m+l}^{(1)}(n_2\rho_{nq}) e^{il\theta_{nq}} J_l(n_2\rho_q) e^{-ilq} \end{aligned} \quad (2.182)$$

dove,  $\rho_{nq}$  è l'ampiezza del vettore che unisce il centro del cilindro  $n$ -esimo con il centro del cilindro  $q$ -esimo,  $\theta_{nq}$  è l'angolo che forma questo stesso vettore con l'asse  $\xi_n$ . Si veda la Figura 2.12.

Inserendo l'espressione (2.182) in (2.181), si ottiene l'espressione cercata, ovvero il campo diffratto in funzione delle coordinate del q-esimo cilindro:

$$\begin{aligned}
V_d(\xi, \zeta) = & V_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{qm} CW_m(n_2\xi_q, n_2\zeta_q) + \\
& + V_0 \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq q}}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} \cdot \\
& \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^l CW_{m+l}(n_2\xi_{nq}, n_2\zeta_{nq}) J_l(n_2\rho_q) e^{-ilq} \quad (2.183)
\end{aligned}$$

dove si è riconosciuta la funzione d'onda cilindrica in (2.182). Le coordinate  $(\xi_{nq}, \zeta_{nq})$  sono legate a  $(\rho_{nq}, \theta_{nq})$  secondo il legame tra coordinate polari e cartesiane. Ora possiamo manipolare l'espressione (2.183) in modo da porla in una forma più compatta. Ricordando la proprietà delle funzioni di Bessel  $J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z)$  e sostituendo nell'ultima sommatoria  $l$  con  $-l$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}
V_d(\xi, \zeta) = & V_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{qm} CW_m(n_2\xi_q, n_2\zeta_q) + \\
& + V_0 \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq q}}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} CW_{m-l}(n_2\xi_{nq}, n_2\zeta_{nq}) J_l(n_2\rho_q) e^{ilq} \quad (2.184)
\end{aligned}$$

Si metta ora in evidenza la quantità  $J_l(n_2\rho_q) e^{ilq}$  e, ricordando la definizione della funzione d'onda cilindrica, si ottiene:

$$\begin{aligned}
V_d(\xi, \zeta) = & V_0 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(n_2\rho_q) e^{ilq} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^N i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} \cdot \\
& \cdot \left[ \frac{H_m^{(1)}(n_2\rho_q)}{J_m(n_2\rho_q)} \delta_{nq} \delta_{lm} + CW_{m-l}(n_2\xi_{nq}, n_2\zeta_{nq}) (1 - \delta_{nq}) \right] \quad (2.185)
\end{aligned}$$

la quale rappresenta la disturbanza nel punto  $(\xi, \zeta)$  in SRP, in funzione delle coordinate del sistema di riferimento del cilindro q-esimo. Dove si è fatto uso del simbolo di Kronecker:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq n \\ 1 & \text{per } m = n \end{cases} \quad (2.186)$$

L'espressione (2.185) evidenzia molto chiaramente quali termini siano legati all'interazione tra il campo incidente (che nel nostro caso è il campo trasmesso  $V_t$ ) ed il cilindro q-esimo, e quali termini siano invece legati all'interazione tra il cilindro q-esimo e gli altri  $(N-1)$  cilindri. Infatti, il termine  $(1 - \delta_{nq})$  è sempre

diverso da zero, tranne quando  $n = q$ , questo vuol dire che tiene conto dell'interazione del cilindro  $q$ -esimo con gli altri cilindri, essendo nulla l'interazione che il cilindro  $q$ -esimo ha con se stesso. L'altro termine, quello comandato da  $\delta_{nq}$ , è sempre nullo, tranne quando  $n = q$ , quindi tiene conto del campo diffratto dal cilindro  $q$ -esimo. Se infatti nell'equazione (2.185) si toglie la sommatoria su  $n$ , ponendo  $n = q$ , si torna all'espressione (2.181), ovvero al campo diffratto da un singolo cilindro, privo cioè di altre interazioni.

Ora che si è calcolato il campo diffratto, si dovranno considerare le sue interazioni con l'interfaccia tra i due mezzi. Per fare questo ricorreremo agli strumenti, da noi sviluppati nel capitolo 4, sulla riflessione e trasmissione di onde cilindriche all'interfaccia tra mezzi con perdite. Si faccia riferimento ai risultati del capitolo 4, ed in particolare all'equazione (2.114), e si ricordi inoltre che lì il sistema di riferimento era invertito rispetto al presente sistema, nel senso che l'interfaccia era sempre posta a distanza  $h$  dal centro dell'onda cilindrica, ma la coordinata corrispondente era positiva, mentre nel nostro caso si ha  $x_q = -h_q$  (nel caso del cilindro  $q$ -esimo). Inoltre, l'onda rappresentata in (2.114) era valida per ogni punto  $x < h$ , mentre nel presente caso lo sarà per ogni punto  $x_q > h_q$ , so potrà quindi scrivere la singola onda cilindrica diffratta-riflessa dal cilindro  $q$ -esimo come segue:

$$\begin{aligned} RW_m [-n_2(2\chi_q + \xi_q), n_2\zeta_q] &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{21}(n_{\parallel}) \widehat{CW}_m [-n_2(2\chi_q + \xi_q), n_{\parallel}] e^{i\zeta_q n_{\parallel}} dn_{\parallel} \end{aligned} \quad (2.187)$$

dove, rispetto alla definizione (2.114), si sono usate le variabili normalizzate  $\xi_q$ ,  $\zeta_q$  e  $\chi_q$  in luogo di  $x_q$ ,  $z_q$  e  $h_q$ , avendo posto  $k_z = k_0 n_{\parallel}$ , e si è inglobato il termine esponenziale contenente  $h_q$  (ovvero  $\chi_q$ ) all'interno dello spettro della funzione cilindrica. È bene notare che il coefficiente di riflessione utilizzato è  $R_{21}(n_{\parallel})$ , ovvero il coefficiente relativo ad un'onda che incide dal mezzo 2 verso il mezzo 1. Infine, è bene notare che la quantità  $n_2$  nell'argomento della  $RW_m$  e della  $\widehat{CW}_m$  è presente per ricordare che lo spettro si riferisce ad un'onda cilindrica propagantesi in un mezzo con indice di rifrazione pari a  $n_2$ . Per chiarezza riportiamo qui l'espressione che tale spettro assumerà in questo caso, ricordando le equazioni (2.98) e (2.99), si può scrivere:

$$\widehat{CW}_m = 2 \frac{e^{\pm i(\xi \sqrt{n_2^2 - n_{\parallel}^2} - m \arccos(n_{\parallel}/n_2))}}{\sqrt{n_2^2 - n_{\parallel}^2}} \quad (2.188)$$

dove il  $\pm$  sta ad indicare i due casi  $x > 0$  e  $x < 0$ , rispettivamente, e si è normalizzato tutto rispetto a  $k_0$ . Il campo diffratto-riflesso dovuto al solo cilindro  $q$ -esimo sarà quindi:

$$V_{drq} = V_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{qm} RW_m [-n_2(2\chi_q + \xi_q), n_2\zeta_q] \quad (2.189)$$

Infine, il campo diffratto-riflesso da  $N$  cilindri arbitrariamente disposti, sarà semplicemente la sovrapposizione di  $N$  contributi del tipo (2.189), quindi:

$$V_{dr} = V_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} RW_m [-n_2(2\chi_n + \xi_n), n_2\zeta_n] \quad (2.190)$$

che può anche essere espressa in SRP con l'ausilio della (2.171), ottenendo:

$$V_{dr} = V_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} RW_m [-n_2(\chi_n + \xi), n_2(\zeta - \eta_n)] \quad (2.191)$$

Come nel caso del campo diffratto, anche in questo caso è bene disporre di un'espressione del campo in funzione delle coordinate del sistema di riferimento del generico cilindro  $q$ -esimo, in modo da usare tale espressione quando si vogliono applicare le condizioni al contorno su tale cilindro. Per fare ciò, si espliciti la rappresentazione integrale della funzione  $RW_m$  nell'espressione (2.191), ottenendo:

$$V_{dr} = V_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{21}(n_{\parallel}) \widehat{CW}_m [-n_2(\chi_n + \xi), n_{\parallel}] e^{in_{\parallel}(\zeta - \eta_n)} dn_{\parallel} \quad (2.192)$$

Sfruttiamo ora l'espressione (2.171) relativa al sistema di riferimento del cilindro  $q$ -esimo:

$$V_{dr} = V_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{21}(n_{\parallel}) \cdot \widehat{CW}_m [-n_2(\chi_n + \chi_q + \xi_q), n_{\parallel}] e^{in_{\parallel}(\zeta_q + \eta_q - \eta_n)} dn_{\parallel} \quad (2.193)$$

La disturbanza è ora espressa nelle sole coordinate del sistema di riferimento del  $q$ -esimo cilindro. A questo punto, si deve tenere conto che tale onda andrà usata nell'imposizione delle condizioni al contorno sui singoli cilindri, essa però è espressa in onde piane e questa non è la forma più agevole per visualizzare il campo sulla superficie di un cilindro. Si procederà quindi ad espandere le singole onde piane in onde cilindriche, ovvero in una forma simile a quella assunta dalla (2.185), in modo da rendere più agevole la loro somma durante l'applicazione delle condizioni al contorno. Sfruttando l'espressione dello spettro di un'onda cilindrica in un mezzo con perdite, fornita in (2.188), possiamo estrarre da questo, nell'espressione (2.193), il termine dipendente dalla coordinata  $\xi_q$ ,

ottenendo:

$$V_{dr} = V_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{21}(n_{\parallel}) \widehat{CW}_m [-n_2(\chi_n + \chi_q), n_{\parallel}] e^{i(-\xi_q n_{\perp} + \zeta_q n_{\parallel})} e^{in_{\parallel}(\eta_q - \eta_n)} dn_{\parallel} \quad (2.194)$$

Si noti ora che la dipendenza dalle coordinate  $(\xi_q, \zeta_q)$  all'interno dell'integrale è quello di un'onda piana (N.B.: tale onda piana sarà non uniforme, infatti come è ben noto  $n_{\parallel}$  sarà reale, trattandosi di un integrale di Fourier, mentre  $n_{\perp}$  sarà necessariamente complesso a causa della natura complessa del numero d'onda nel mezzo 2). Questo vuol dire che si potrà espandere tale funzione di  $(\xi_q, \zeta_q)$  in serie di Fourier come già fatto in precedenza, ottenendo:

$$e^{-\xi_q n_{\perp} + \zeta_q n_{\parallel}} = e^{\xi_q n_2 \cos \phi_{dr} + \zeta_q n_2 \sin \phi_{dr}} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} i^l e^{-il\phi_{dr}} J_l(n_2 \rho_q) e^{il\theta_q} \quad (2.195)$$

dove si è indicato con il simbolo  $\phi_{dr}$  l'angolo che il vettore di propagazione della singola onda piana dello sviluppo forma con l'asse  $z$ ; per esprimere tale angolo in funzione di  $n_{\parallel}$  si può notare che:

$$\begin{cases} n_{\perp} = -n_2 \cos \phi_{dr} \\ n_{\parallel} = n_2 \sin \phi_{dr} \end{cases} \quad (2.196)$$

da cui si può facilmente ottenere che  $\phi_{dr} = \arcsin(n_{\parallel}/n_2)$ . Inserendo tale espressione in (2.195) si ottiene:

$$e^{-\xi_q n_{\perp} + \zeta_q n_{\parallel}} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} i^l e^{-il \arcsin(n_{\parallel}/n_2)} J_l(n_2 \rho_q) e^{il\theta_q} \quad (2.197)$$

ricordando ora che  $\arcsin(z) = \pi/2 - \arccos(z)$ , si ha:

$$e^{-\xi_q n_{\perp} + \zeta_q n_{\parallel}} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{il \arccos(n_{\parallel}/n_2)} J_l(n_2 \rho_q) e^{il\theta_q} \quad (2.198)$$

A questo punto si inserisca l'espressione (2.198) in (2.194) e, facendo uso della definizione dello spettro di un'onda cilindrica, si inglobi il termine arcocoseno in quest'ultimo:

$$V_{dr} = V_0 \sum_{n=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(n_2 \rho_q) e^{il\theta_q} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{21}(n_{\parallel}) \widehat{CW}_{m+l} [-n_2(\chi_n + \chi_q), n_{\parallel}] e^{in_{\parallel}(\eta_q - \eta_n)} dn_{\parallel} \quad (2.199)$$

La quale può essere scritta in forma più compatta con l'ausilio della funzione  $RW_m$ :

$$V_{dr} = V_0 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(n_2 \rho_q) e^{il\theta_q} \cdot \sum_{n=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} RW_{m+l}[-n_2(\chi_n + \chi_q), n_2(\eta_q - \eta_n)] \quad (2.200)$$

Confrontando l'espressione (2.200) con la (2.185) si potrà notare una completa analogia tra le due rappresentazioni.

Rimane da esprimere il campo diffratto-trasmesso. In analogia con quanto fatto precedentemente e forti dei risultati ottenuti nel capitolo 4, potremo scrivere l'armonica  $m$ -esima del campo diffratto-trasmesso dal generico cilindro  $q$ -esimo, come segue (si veda l'eq. (2.118)):

$$TW_m(\xi_q, \zeta_q, \chi_q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{21}(n_{\parallel}) \cdot \widehat{CW}_m(-n_2 \chi_q, n_{\parallel}) e^{-i(\xi_q + \chi_q) \sqrt{1-n_{\parallel}^2}} e^{i\zeta_q n_{\parallel}} dn_{\parallel} \quad (2.201)$$

Diventa a questo punto banale la determinazione del campo diffratto-trasmesso da  $N$  cilindri, infatti, in totale analogia con quanto fatto nel caso del campo diffratto-riflesso, si potrà scrivere (per analogia si veda l'eq. (2.191)):

$$V_{dt}(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} TW_m(\xi - \chi_n, \zeta - \eta_n, \chi_n) \quad (2.202)$$

dove si è espresso il campo in SRP, infatti tale campo, essendo presente nel solo dominio  $x < 0$ , non partecipa all'applicazione delle condizioni al contorno sui cilindri e non c'è quindi la necessità di porlo in forme particolari come fatto nei casi precedenti.

Ora che si sono espressi in forma conveniente tutti i contributi al campo totale, si può andare ad applicare le condizioni al contorno sulla superficie di ogni cilindro per ottenere gli  $N$  vettori di dimensione infinita aventi componenti  $c_{nm}$ . Per fare ciò si deve prima di tutto specificare di quale materiale siano composti i cilindri. Si inizierà considerando il caso di cilindri perfettamente conduttori. Per scrivere la condizione sulla superficie dei cilindri, ovvero l'annullamento della componente tangenziale di campo elettrico, si deve specificare a quale polarizzazione ci si riferisce, infatti le condizioni al contorno sul generico cilindro  $q$ -esimo, nei due casi di polarizzazione E o di polarizzazione H, saranno:

$$[V_t(\xi, \zeta) + V_d(\xi, \zeta) + V_{dr}(\xi, \zeta)]_{\rho_q = \alpha_q} = 0 \quad \text{Polarizzazione E} \quad (2.203)$$

$$\left[ \frac{\partial V_t(\xi, \zeta)}{\partial \rho_q} + \frac{\partial V_d(\xi, \zeta)}{\partial \rho_q} + \frac{\partial V_{dr}(\xi, \zeta)}{\partial \rho_q} \right]_{\rho_q = \alpha_q} = 0 \quad \text{Polarizzazione H} \quad (2.204)$$

le quali sono analoghe alle condizioni (2.66) e (2.67), ricordando che il campo elettrico tangenziale ad un cilindro, in un sistema di riferimento polare, indefinito lungo l'asse cilindrico, è proporzionale alla derivata, rispetto alla variabile  $\rho$ , del campo magnetico diretto lungo l'asse cilindrico stesso.

Si andrà ora ad esplicitare le espressioni (2.203) e (2.204). Si consideri per primo il caso di polarizzazione E. Inserendo le espressioni (2.177), (2.185) e (2.200) nella (2.203), si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & T_{12}(n_{i\parallel}) e^{in_2(\chi_q n_{t\perp} + \eta_q n_{t\parallel})} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} i^l e^{-il\phi_t} J_l(n_2\alpha_q) e^{il\theta_q} + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(n_2\alpha_q) e^{il\theta_q} \\
 & \cdot \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^N i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} \left[ \frac{H_m^{(1)}(n_2\alpha_q)}{J_m(n_2\alpha_q)} \delta_{nq} \delta_{lm} + CW_{m-l}(n_2\xi_{nq}, n_2\zeta_{nq})(1 - \delta_{nq}) \right] + \right. \\
 & \left. + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(n_2\alpha_q) e^{il\theta_q} \sum_{n=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} RW_{m+l} [-n_2(\chi_n + \chi_q), n_2(\eta_q - \eta_n)] \right] = 0
 \end{aligned} \tag{2.205}$$

dove si è già semplificato il termine di ampiezza  $V_0$ . A questo punto si può mettere in evidenza il fattore  $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(n_2\alpha_q) e^{il\theta_q}$ , moltiplicare per un termine  $e^{ip\theta_q}$  ed integrare in  $\theta_q \in [0, 2\pi]$ , sfruttando l'ortogonalità della funzione esponenziale, e mettendo in evidenza la quantità  $i^m e^{-im\phi_t} c_{nm}$  tra gli ultimi due termini, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & T_{12}(n_{i\parallel}) e^{in_2(\chi_q n_{t\perp} + \eta_q n_{t\parallel})} i^p e^{-ip\phi_t} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^N \left\{ i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} [RW_{m+p} + \right. \\
 & \left. + \frac{H_p^{(1)}(n_2\alpha_q)}{J_p(n_2\alpha_q)} \delta_{nq} \delta_{pm} + CW_{m-p}(1 - \delta_{nq}) \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{2.206}$$

In quest'ultima espressione si è deciso di nascondere gli argomenti delle funzioni cilindriche per alleggerire la notazione. È anche bene notare che il rapporto della funzione di Hankel e della funzione di Bessel è stato posto con l'indice  $p$  perché, a causa della delta di Kronecker, sarà non nullo solo per  $m = p$  e si è scelto di esplicitare dei due indici quello non variabile. Ora definiamo la funzione:

$$G_n^E(z) = \frac{J_n(z)}{H_n^{(1)}(z)} \tag{2.207}$$

A questo punto nell'equazione (2.206) si porti il primo termine a secondo membro, si dividano ambo i membri per  $i^p$  e si moltiplichino per  $G_p(n_2\alpha_q)$ , ottenendo:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^N \left\{ i^{m-p} e^{-im\phi_t} c_{nm} G_p^E(n_2\alpha_q) \left[ RW_{m+p} + \frac{\delta_{nq} \delta_{pm}}{G_p^E(n_2\alpha_q)} + CW_{m-p}(1 - \delta_{nq}) \right] \right\} = \\
 & = -T_{12}(n_{i\parallel}) G_p^E(n_2\alpha_q) e^{in_2(\chi_q n_{t\perp} + \eta_q n_{t\parallel})} e^{-ip\phi_t}
 \end{aligned} \tag{2.208}$$

la quale può essere scritta in forma più compatta come segue:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{nm} A_{pqnm} = B_{pq} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} q = 1, 2, \dots, N \\ p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{array} \quad (2.209)$$

L'espressione (2.209) rappresenta un sistema di infinite equazioni in infinite incognite. In particolare le incognite sono gli  $N$  vettori di dimensione infinita aventi componenti  $c_{nm}$ . Ovviamente, per fornire una soluzione al problema elettromagnetico andrà troncata la serie in (2.209) e scegliere anche un criterio di arresto nella variabilità dell'indice  $p$ . L'espressione dei simboli introdotti in (2.209) è la seguente:

$$A_{pqnm} = i^{m-p} e^{-im\phi_t} G_p^E(n_2\alpha_q) \left[ RW_{m+p} + \frac{\delta_{nq}\delta_{pm}}{G_p^E(n_2\alpha_q)} + CW_{m-p}(1 - \delta_{nq}) \right] \quad (2.210)$$

$$B_{pq} = -T_{12}(n_{i\parallel}) G_p^E(n_2\alpha_q) e^{in_2(\chi_q n_{t\perp} + \eta_q n_{t\parallel})} e^{-ip\phi_t} \quad (2.211)$$

Per quanto riguarda la polarizzazione H è sufficiente inserire le espressioni (2.177), (2.185) e (2.200) nella (2.204), ottenendo:

$$\begin{aligned} & T_{12}(n_{i\parallel}) e^{in_2(\chi_q n_{t\perp} + \eta_q n_{t\parallel})} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} i^l e^{-il\phi_t} J'_l(n_2\alpha_q) e^{il\theta_q} + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J'_l(n_2\alpha_q) e^{il\theta_q} \\ & \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^N i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} \left[ \frac{H_m^{(1)}(n_2\alpha_q)}{J'_m(n_2\alpha_q)} \delta_{nq} \delta_{lm} + CW_{m-l}(n_2\xi_{nq}, n_2\zeta_{nq})(1 - \delta_{nq}) \right] + \\ & + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J'_l(n_2\alpha_q) e^{il\theta_q} \sum_{n=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m e^{-im\phi_t} c_{nm} RW_{m+l} [-n_2(\chi_n + \chi_q), n_2(\eta_q - \eta_n)] = 0 \end{aligned} \quad (2.212)$$

dove:

$$\begin{cases} J'_m(n_2\rho) = \frac{1}{n_2} \frac{\partial J_m(n_2\rho)}{\partial \rho} \\ H_m^{(1)}(n_2\rho) = \frac{1}{n_2} \frac{\partial H_m^{(1)}(n_2\rho)}{\partial \rho} \end{cases}$$

Nell'equazione (2.212) si è già semplificato il fattore comune  $n_2 V_0$  dovuto alla derivazione. Inoltre il risultato è stato ottenuto tenendo conto del fatto che le quantità  $CW_{m-l}$  e  $RW_{m+l}$  non dipendono dalla variabile  $\rho_q$ , essendo dipendenti solo dalle reciproche posizioni dei cilindri. Confrontando l'equazione (2.212) con la (2.205), possiamo notare una totale analogia, quindi il sistema lineare che descrive il problema elettromagnetico in polarizzazione H, sarà identico a quello descritto in (2.209), (2.210) e (2.211) a patto di sostituire la funzione  $G_p^E$ , ivi introdotta nel caso di polarizzazione E, con la seguente funzione:

$$G_n^H(z) = \frac{J'_n(z)}{H_n^{(1)}(z)} \quad (2.213)$$

Nel presente capitolo si è impostato, a livello teorico, il problema della diffrazione di un'onda elettromagnetica da parte di  $N$  cilindri sepolti in un mezzo con perdite. La soluzione rigorosa al problema è stata fornita tramite il sistema lineare ad infinite dimensioni (2.209), con le definizioni in (2.210) e (2.211), insieme alla funzione  $G_n^{E/H}$  dipendente dalla polarizzazione e fornita dalle espressioni (2.207) e (2.213). La soluzione di tale sistema fornisce gli  $N$  vettori di dimensione infinita, espressi dalle componenti  $c_{nm}$ , grazie ai quali è possibile ottenere un'espressione analitica, in forma di serie, del campo totale nei due mezzi, rappresentato tramite le disturbanze espresse dalle equazioni: (2.173), (2.174), (2.175), (2.185), (2.200) e (2.202). Per passare da tali disturbanze al valore del campo si deve nuovamente specificare quale polarizzazione si sta trattando; come è noto infatti, nel caso di polarizzazione E la disturbanza coincide con il valore di campo elettrico diretto parallelamente agli assi dei cilindri, mentre nel caso di polarizzazione H, la disturbanza rappresenta il valore di campo magnetico parallelo agli assi dei cilindri, quindi per ottenere il relativo valore di campo elettrico si dovrà ricorrere alla quarta equazione di Maxwell nel modo seguente:

$$\underline{E} = -\frac{1}{i\omega\varepsilon}\nabla \times \underline{H} = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \left( x_0 \frac{\partial H_y}{\partial z} - z_0 \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \quad (2.214)$$

Come si vede, nell'espressione del campo elettrico in polarizzazione H, compaiono le derivate del campo magnetico, ovvero della disturbanza, rispetto alle coordinate  $x$  e  $z$ . Sono state ricavate delle formule ricorsive per la funzione cilindrica  $CW_m(x, z)$ , per la funzione cilindrica riflessa  $RW_m(x, z)$  e per la funzione cilindrica trasmessa  $TW_m(x, z)$ , che permettono il calcolo numerico di tali derivate in modo molto agevole. Tali espressioni sono fornite in [42], per la loro derivazione si può invece far riferimento a [43].

A questo punto si andrà a considerare il caso di cilindri dielettrici. Si scriverà la permittività del  $p$ -esimo cilindro come  $\varepsilon_{cp} = \varepsilon'_{cp} + i\varepsilon''_{cp}$ . Il campo all'interno del  $p$ -esimo cilindro potrà essere scritto come sovrapposizione di armoniche cilindriche stazionarie con coefficienti incogniti  $d_{pm}$ , come segue:

$$V_{cp}(\xi_p, \zeta_p) = V_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_{pm} i^m e^{-im\phi_t} J_m(n_{cp}\rho_p) e^{im\theta_p} \quad (2.215)$$

dove  $n_{cq}$  è l'indice di rifrazione del cilindro  $q$ -esimo, definito come la radice quadrata della rispettiva permittività. Esso è ovviamente una quantità complessa.

A questo punto si è in grado di applicare la condizione di continuità del campo tangenziale su ogni cilindro. In polarizzazione  $E$  la continuità del campo elettrico coincide con la continuità della funzione  $V(\xi, \zeta)$ , e la continuità del campo magnetico con la continuità della derivata della funzione  $V(\xi, \zeta)$  fatta rispetto alla coordinata radiale. Analogamente, in polarizzazione  $H$ , la continuità del campo magnetico coincide con la continuità della funzione  $V(\xi, \zeta)$ , mentre la continuità del campo elettrico coincide con la continuità della derivata

rispetto a  $r$  della funzione  $V(\xi, \zeta)$ , divisa per la permittività del mezzo. Le condizioni al contorno possono quindi essere scritte in forma compatta per entrambe le polarizzazioni come segue:

$$V_t + V_s + V_{sr} = V_{cp} \quad \text{with} \quad \rho_p = \alpha_p \quad (2.216)$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial \rho_p} + \frac{\partial V_s}{\partial \rho_p} + \frac{\partial V_{sr}}{\partial \rho_p} = t_q^{E/H} \frac{\partial V_{cp}}{\partial \rho_p} \quad \text{with} \quad \rho_p = \alpha_p \quad (2.217)$$

dove:

$$t_q^{E/H} = \begin{cases} 1 & \text{for E polarization} \\ \varepsilon_1/\varepsilon_{cp} & \text{for H polarization} \end{cases} \quad (2.218)$$

Inserendo le espressioni degli sviluppi in onde cilindriche per le diverse disturbanze e attraverso un po' d'algebra, si ottiene:

$$\sum_{q=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{lm}^{(1)pq} c_{pm} - B_l^{(1)p} = L_l^{(1)p} d_{pl} \quad (2.219)$$

$$\sum_{q=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{lm}^{(2)pq} c_{pm} - B_l^{(2)p} = L_l^{(2)p} d_{pl} \quad (2.220)$$

con  $p = 1, 2, \dots, N$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  e:

$$A_{lm}^{(1,2)pq} = i^{m-l} e^{-im\phi_t} \{ (1 - \delta_{pq}) CW_{m-l}(n_1 \xi_{pq}, n_1 \zeta_{pq}) + \\ + RW_{l+m}[-n_1(\chi_p + \chi_q), n_1(\eta_p - \eta_q)] \} G_l^{(1,2)}(n_1 \alpha_p) + \delta_{pq} \delta_{lm} \quad (2.221)$$

$$B_l^{(1,2)p} = -T_{01}^{E/H} e^{in_1(n_t \perp \chi_p + n_t \parallel \eta_p)} e^{-il\phi_t} G_l^{(1,2)}(n_1 \alpha_p) \quad (2.222)$$

$$L_l^{(1,2)p} = t_q^{E/H} \frac{n_{cp}}{n_1} e^{-il\phi_t} G_l^{(1,2)}(n_1 \alpha_p) \quad (2.223)$$

dove  $G_l^{(1)}(x) = J_l(x)/H_l^{(1)}(x)$  e  $G_l^{(2)}(x) = J_l'(x)/H_l^{(1)'}(x)$ .

I sistemi lineari (2.219) e (2.220) forniscono i valori delle incognite del problema  $c_{pm}$  and  $d_{pm}$ . Tuttavia, è possibile eliminare dal problema i coefficienti  $d_{pm}$  scrivendoli in funzione dei coefficienti  $c_{pm}$ . Tale espressione è conveniente in quanto riduce il numero delle equazioni da inserire nel sistema, inoltre ciò che interessa nella pratica generalmente è il campo diffratto, quindi nella maggior parte dei casi i coefficienti  $d_{pm}$  possono anche non essere calcolati esplicitamente, riducendo i tempi di calcolo ulteriormente. Isolando i coefficienti  $d_{pm}$  nel sistema (2.219) e inserendoli nel sistema (2.220), si può scrivere la seguente espressione:

$$\sum_{q=1}^N \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{lm}^{pq} c_{pm} = B_l^p \quad (2.224)$$

dove:

$$A_{lm}^{pq} = L_l^{(2)p} A_{lm}^{(1)pq} - L_l^{(1)p} A_{lm}^{(2)pq} \quad (2.225)$$

$$B_l^p = L_l^{(2)p} B_l^{(1)p} - L_l^{(1)p} B_l^{(2)p} \quad (2.226)$$

La soluzione del sistema (2.224) fornisce la soluzione completa del problema di diffrazione. Il calcolo dei coefficienti  $c_{pm}$  può essere svolto attraverso una procedura numerica tramite un opportuno troncamento delle serie coinvolte. Tale procedura è esposta nel seguente paragrafo.

### 2.7.2 Implementazione numerica

Si vuole ora esporre la procedura numerica implementata per calcolare i campi ricavati teoricamente nella sezione precedente. Per tale implementazione si è deciso di usare un codice in linguaggio Fortran. Questa scelta è stata dettata dall'aver a disposizione il codice che implementa la stessa procedura nel caso privo di perdite e che è stato presentato in diversi lavori [44, 45, 46, 42]. Si è scelto quindi di generalizzare tale codice in modo da ottenere un programma che fornisca il campo diffratto da  $N$  cilindri sepolti in un generico mezzo, con o senza perdite. Come appare chiaro dallo studio dei riferimenti citati, la parte del codice più delicata e sulla quale si è dovuto lavorare più strenuamente riguarda il calcolo degli integrali legati all'onda cilindrica riflessa e all'onda cilindrica trasmessa,  $RW_m$  e  $TW_m$ , rispettivamente. Tali integrali, infatti, sono caratterizzati dall'aver un integrando che oscilla molto velocemente, soprattutto quando si considerano alti valore della variabile  $\zeta$ . Per risolvere questi integrali si è sviluppato un metodo di Gauss adattivo in frequenza, cioè un metodo che calcola la frequenza istantanea della funzione integranda, sceglie un intervallo di integrazione, che sia il più vicino possibile al periodo effettivo, ed in questo intervallo procede ad una integrazione per quadratura convenzionale, sfruttando per esempio il metodo di Legendre o di Laguerre [48].

Nel seguito, si prenderà in considerazione l'integrazione relativa alla sola funzione  $TW_m$ , questa infatti è decisamente più complessa della funzione  $RW_m$ , quindi tutti i metodi che si svilupperanno saranno facilmente estendibili a quest'ultima funzione.

Si consideri l'espressione (2.201) nella quale si espliciti lo spettro dell'onda cilindrica:

$$TW_m(\xi, \zeta, \chi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{21}(n_{\parallel}) \frac{e^{i\chi\sqrt{n_2^2 - n_{\parallel}^2} + im \arccos(n_{\parallel}/n_2)}}{\sqrt{n_2^2 - n_{\parallel}^2}} \cdot e^{-i(\xi+\chi)\sqrt{n_1^2 - n_{\parallel}^2}} e^{i\zeta n_{\parallel}} dn_{\parallel} \quad (2.227)$$

dove non si sono riportati i pedici alle variabili spaziali per alleggerire la notazione. Nella trattazione del caso privo di perdite, l'integrale veniva spezzato in tre contributi, uno che andava da  $-\infty$  a  $-n_2$ , uno che andava da  $-n_2$  a

$n_2$  e l'ultimo che andava da  $n_2$  a  $+\infty$ . Questo veniva fatto perché all'interno delle radici quadrate nell'integrando era possibile portare fuori la quantità  $n_2$ , che in quel caso era reale, e fare un cambiamento di variabile del tipo  $n_{\parallel} = n_2\beta$ , grazie al quale la radice quadrata poteva essere riscritta come segue  $\sqrt{1-\beta^2}$ . In questo modo, con un ulteriore cambiamento di variabile in cui si poneva  $\beta = \cos t$ , si arrivava ad eliminare le discontinuità in  $\pm 1$  della funzione, inoltre si semplificava molto la forma dell'integrale il quale si riduceva sostanzialmente ad un esponenziale complesso con esponente puramente immaginario per  $|\beta| \in [0, 1/n_2]$  e con una parte reale che forniva uno smorzamento dell'integrando per  $|\beta| \in [1/n_2, 1]$ . Per dettagli su questa procedura si veda [43]. Nel nostro caso, in cui  $n_2 \in \mathbb{C}$ , tale procedura non è più così conveniente, principalmente per due ragioni. La prima è che, essendo  $n_2$  complesso, non si potrà mai raggiungere una suddivisione tra parte reale e parte immaginaria nell'esponente dell'integrando in forma semplice, quest'ultimo sarà quindi sempre un esponenziale immaginario smorzato. La seconda ragione sta nel fatto che un cambiamento di variabile del tipo  $\beta = n_{\parallel}/n_2$  trasformerebbe il percorso di integrazione in una retta sul piano complesso, inoltre, come si può facilmente capire dalle dissertazioni fatte nel presente capitolo, sul piano di  $\beta$  l'asse reale non rientrerebbe più nell'insieme di convergenza, quindi in questo piano il percorso di integrazione dovrebbe necessariamente essere complesso.

Per quanto detto finora, si vede bene che, nel caso di mezzi con perdite, tentare un metodo di integrazione che segua la traccia del caso privo di perdite risulta alquanto complesso. Tuttavia, può essere notato che, in un mezzo con perdite, lo spettro non presenta più discontinuità in  $\pm n_2$ , non è quindi così necessario il procedimento analitico che porta all'eliminazione di queste discontinuità. Si può inoltre notare che l'integrale (2.227) altro non è che una trasformata di Fourier; tale trasformata, che è rappresentata dalla funzione  $TW_m$ , sarà sicuramente legata asintoticamente alla forma d'onda cilindrica, ci si può quindi aspettare che questa funzione decresca sempre più velocemente all'aumentare delle perdite, dato che queste introducono un fattore di smorzamento esponenziale nella funzione. Questo vuol dire che l'integrale (2.227) rappresenta la trasformata di Fourier di una funzione avente una banda stretta, ovvero interpretando la funzione  $TW_m$  come lo spettro, in senso puramente matematico, dell'integrando; si potrà vedere che più saranno alte le perdite, più la banda dello spettro sarà stretta e quindi sarà più facile calcolare l'integrale con il metodo numerico noto come Fast Fourier Transform (FFT) [48]. Tale metodo sarà sicuramente rapido e preciso nel caso di mezzi con perdite relativamente alte, ma perderà di efficacia nel caso di perdite basse, diventando probabilmente inapplicabile nel caso di perdite nulle, dato che la funzione  $TW_m$ , in questo caso, decrescerà come  $1/\sqrt{\rho}$ , ed avrà quindi una banda estremamente ampia, rendendo la FFT molto lenta. Si può dire quindi che, se si sceglie di seguire il metodo di quadratura svolto nel caso privo di perdite, si va incontro ad una notevole complicazione della trattazione, ma si guadagna il fatto di avere un codice in grado di funzionare sempre, con o senza perdite. Nel caso si scelga di usare la FFT, si ottiene una notevole semplificazione del codice, ma si deve nel contempo

rinunciare ad avere informazioni nel caso di perdite molto basse o nulle.

Si è deciso qui di estendere il codice del caso privo di perdite, riadattando i metodi usati alla presenza di un indice di rifrazione complesso. Per cominciare cerchiamo di rendere la (2.227) il più simile possibile all'integrale trattato in [43]. Per fare questo, consideriamo che il mezzo 1 sia l'aria ( $n_1 = 1$ ) ed andiamo a mettere in evidenza il modulo dell'indice di rifrazione del mezzo 2; facendo il cambiamento di variabile  $n_{||} = |n_2|\beta$ , si ottiene:

$$TW_m(\xi, \zeta, \chi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{21}(\beta) \frac{e^{i\chi|n_2|\sqrt{e^{2i\phi_k} - \beta^2} + im \arccos(\beta e^{-i\phi_k})}}{\sqrt{e^{2i\phi_k} - \beta^2}} \cdot e^{-i(\xi+\chi)\sqrt{1-(|n_2|\beta)^2}} e^{i|n_2|\zeta\beta} d\beta \quad (2.228)$$

Dividiamo ora l'integrale in due contributi, quello per  $|\beta| < 1$  e quello per  $|\beta| > 1$ :

$$I_{in} = \frac{1}{\pi} \int_{|\beta| < 1} T_{21}(\beta) \frac{e^{i\chi|n_2|\sqrt{e^{2i\phi_k} - \beta^2} + im \arccos(\beta e^{-i\phi_k})}}{\sqrt{e^{2i\phi_k} - \beta^2}} \cdot e^{-i(\xi+\chi)\sqrt{1-(|n_2|\beta)^2}} e^{i|n_2|\zeta\beta} d\beta \quad (2.229)$$

$$I_{out} = \frac{1}{\pi} \int_{|\beta| > 1} T_{21}(\beta) \frac{e^{i\chi|n_2|\sqrt{e^{2i\phi_k} - \beta^2} + im \arccos(\beta e^{-i\phi_k})}}{\sqrt{e^{2i\phi_k} - \beta^2}} \cdot e^{-i(\xi+\chi)\sqrt{1-(|n_2|\beta)^2}} e^{i|n_2|\zeta\beta} d\beta \quad (2.230)$$

Si analizzerà per primo  $I_{out}$ , quello che, nel caso privo di perdite, veniva chiamato spettro evanescente. Tale nome era dovuto al fatto che, per  $\beta > 1$ , tutti gli esponenziali dello spettro diventavano reali e decrescenti. In questo integrale, quindi, si teneva conto dello spettro evanescente, ovvero quello legato alle onde evanescenti rappresentanti l'onda cilindrica incidente nello sviluppo in onde piane. Nel caso presente, di mezzo con perdite, la parte dello spettro relativo al mezzo 2, ovvero il mezzo di provenienza, non potrà mai essere puramente reale. Infatti, l'angolo tra vettore di fase e vettore di attenuazione non potrà mai essere retto, quindi, essendo il vettore di attenuazione puramente ortogonale all'interfaccia, per come è stato scritto l'integrale, il vettore di fase avrà sempre anche una componente lungo  $x$ . Ciò nonostante, continueremo a chiamare questo contributo 'spettro evanescente', dato che continua a rappresentare onde quasi evanescenti, nel senso che l'angolo tra vettore di fase e vettore di attenuazione tende, all'aumentare di  $|\beta|$ , a diventare un angolo retto, come si vede dal termine di propagazione nel mezzo 2. Per prima cosa, si invertano le espressioni sotto radice quadrata, in modo da portare fuori un'unità immaginaria, in questo modo gli argomenti delle radici avranno sicuramente parte reale positiva, il che è fondamentale ai fini della giusta determinazione della radice

complessa nel procedimento numerico<sup>6</sup>:

$$I_{out} = \frac{-i}{\pi} \int_{|\beta|>1} T_{21}(\beta) \frac{e^{-\chi|n_2|\sqrt{\beta^2 - e^{2i\phi_k}} + im \arccos(\beta e^{-i\phi_k})}}{\sqrt{\beta^2 - e^{2i\phi_k}}} \cdot e^{(\xi+\chi)\sqrt{(|n_2|\beta)^2 - 1}} e^{i|n_2|\zeta\beta} d\beta \quad (2.231)$$

Si vede facilmente che per  $\beta < 1$  si ha un integrale del tutto analogo a quello che si ha per  $\beta > 1$ , salvo il cambiamento di segno davanti a  $\beta\zeta$  e all'interno della funzione arccos, ma ricordando che:

$$\arccos(-z) = \pi - \arccos z \quad (2.232)$$

è facile rendersi conto che:

$$I_{out}^{\beta < 1}(\xi, \zeta, \chi, m) = (-1)^m I_{out}^{\beta > 1}(\xi, -\zeta, \chi, -m) \quad (2.233)$$

quindi, d'ora in poi ci si limiterà a considerare il contributo per  $\beta > 1$ . A questo punto, si vede che il denominatore dell'integrando non potrà mai annullarsi per  $\phi_k \neq 0$ , ma la funzione avrà due massimi in  $\beta = \pm 1$  che tenderanno a divenire due singolarità per  $\phi_k \rightarrow 0$ . Per rendere l'espressione trattabile numericamente per qualsiasi valore di  $\phi_k$ , si operi il seguente cambiamento di variabile:

$$t = \sqrt{\beta^2 - 1} \quad (2.234)$$

$$\beta = \sqrt{t^2 + 1} \quad (2.235)$$

$$d\beta = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \quad (2.236)$$

In questo modo si potrà scrivere:

$$I_{out} = \frac{-i}{\pi} \int_0^{+\infty} T_{21}(t) \frac{e^{-\chi|n_2|\sqrt{t^2+1} - e^{2i\phi_k} + im \arccos(\sqrt{t^2+1}e^{-i\phi_k})}}{\sqrt{t^2+1}} \cdot F(t) e^{(\xi+\chi)\sqrt{|n_2|^2 t^2 + |n_2|^2 - 1}} e^{i|n_2|\sqrt{t^2+1}\beta} d\beta \quad (2.237)$$

<sup>6</sup>La determinazione numerica della radice quadrata di un numero complesso viene generalmente ottenuta con la seguente procedura:

$$\sqrt{x+iy} = \begin{cases} 0 & w = 0 \\ w + i \frac{d}{2w} & w \neq 0, x \geq 0 \\ \frac{|d|}{2w} + iw & w \neq 0, x \leq 0, y \geq 0 \\ \frac{|d|}{2w} - iw & w \neq 0, x \leq 0, y \leq 0 \end{cases}$$

con:

$$w = \begin{cases} 0 & x = y = 0 \\ \sqrt{|x| \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + (y/x)^2}}{2}}} & |x| \geq |y| \\ \sqrt{|y| \sqrt{\frac{|x/y| + \sqrt{1 + (y/x)^2}}{2}}} & |x| \leq |y| \end{cases}$$

dove si vede l'importanza di avere  $x > 0$  per essere certi della determinazione che verrà scelta.

dove:

$$F(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1 - e^{2i\phi_k}}} \quad (2.238)$$

È facile rendersi conto che in questo modo, quando  $\phi_k = 0$  e  $t = 0$ , la funzione  $F(t)$  assume una forma indeterminata e si può facilmente controllare che si ha  $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = 1$ . Quindi, dal punto di vista numerico, è sufficiente definire la funzione come segue:

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \phi_k = 0 \\ \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1 - e^{2i\phi_k}}} & \text{se } \phi_k > 0 \end{cases}$$

In questo modo l'espressione all'interno dell'integrale in (2.237) è correttamente definita da un punto di vista numerico. Prima di procedere, è bene soffermarsi sull'implementazione della funzione arccos di argomento complesso. Come è ben noto, tale funzione può essere anche espressa nella seguente forma [34]:

$$\arccos z = \pm i \ln \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad (2.239)$$

per avere maggiori informazioni su questa funzione si veda l'appendice C. Si può quindi sempre considerare:

$$e^{im \arccos z} = \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^{\pm m} \quad (2.240)$$

oppure si può ricorrere alla seguente formula [10]:

$$\arccos z = \pm \left[ \arccos \beta \pm i \ln \left( \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \right] \quad (2.241)$$

con:

$$\beta = \frac{1}{2} (|z + 1| - |z - 1|)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (|z + 1| + |z - 1|)$$

la quale ha il pregio di dividere la parte reale e la parte immaginaria della funzione. Le determinazioni dei segni dipendono tutte dal foglio di Riemann che si sceglie. Per la presente applicazione si vuole che la funzione arccos giaccia sempre nel primo o nel secondo quadrante, da questa scelta si determina il segno. La funzione *acos* della libreria Fortran IMSL (International Mathematical and Statistical Libraries), fornisce proprio questa determinazione della funzione, quindi si è scelto di usare tale strumento all'interno del codice. È bene notare che, nel caso serva l'altra determinazione della funzione, è sufficiente cambiare la parte immaginaria e lasciare inalterata la parte reale, in questo modo si ottiene la determinazione della funzione arccos nel terzo e quarto quadrante.

Ciò detto passiamo a descrivere la procedura numerica usata per calcolare l'integrale (2.237). Come si è detto, l'integrando è una funzione formata principalmente da tre esponenziali, il primo  $e^{-\chi|n_2|\sqrt{t^2+1}-e^{2i\phi_k+im\arccos(\sqrt{t^2+1}e^{-i\phi_k})}}$  è un esponenziale complesso, in cui la parte reale dell'esponente tende a  $-\infty$  tanto velocemente quanto  $\phi_k$  si avvicina a 0. Notiamo inoltre che il coefficiente moltiplicativo  $|n_2|\chi$  è legato alle proprietà dielettriche del mezzo ( $\sqrt{\varepsilon_2}$ ) ed alla profondità a cui è sepolto il cilindro, quindi manterrà valori limitati al contrario del parametro  $|n_2|\zeta$ , il quale, rappresentando il punto in cui si calcola il campo nella direzione  $\zeta$ , può assumere valori arbitrariamente grandi. Il secondo,  $e^{(\xi+\chi)\sqrt{|n_2|^2t^2+|n_2|^2-1}}$ , presenta un'esponente puramente reale e negativo, quindi fornisce un contributo di pura attenuazione. Il terzo,  $e^{i|n_2|\sqrt{t^2+1}}$ , è un esponenziale puramente oscillante. Per comodità si sceglie di trattare l'integrale con la semplice formula di quadratura di Laguerre-Gauss, esattamente come si faceva nel caso privo di perdite. L'unico termine, infatti, che differisce da quel caso è il primo esponenziale che, come si è detto, è complesso, quindi presenta un'oscillazione smorzata. Essendo però l'oscillazione tanto piccola quanto più  $\phi_k$  si avvicina allo 0, può essere tranquillamente trascurata. Per il calcolo degli zeri della funzione si divide l'integrale in due parti, legate alla divisione del terzo esponenziale in parte reale e parte immaginaria:

$$e^{i|n_2|\sqrt{t^2+1}\zeta} = \cos\left(|n_2|\sqrt{t^2+1}\zeta\right) + i \sin\left(|n_2|\sqrt{t^2+1}\zeta\right) \quad (2.242)$$

In questo modo gli zeri dei due integrali ottenuti saranno facilmente calcolabili. In particolare si avrà:

$$a_k = \left\{ \sqrt{\left[\frac{(2k+1)\pi}{2n_1\zeta}\right]^2 - 1} \right\} \quad (2.243)$$

$$b_k = \left\{ \sqrt{\left(\frac{k\pi}{2n_1\zeta}\right)^2 - 1} \right\} \quad (2.244)$$

In questo modo l'integrale si può scrivere come una sommatoria di termini  $v_k^C$  e  $v_k^S$ , il primo per il coseno ed il secondo per il seno, ognuno dei quali è un'integrale avente come estremi di integrazione gli zeri in (2.243) o (2.244). Tali sommatorie presentano una convergenza proporzionale ai valori del parametro  $m/\zeta$  [43]. Per valori elevati del parametro, la convergenza è rapida, ma per valori non molto elevati del parametro si ha una convergenza lenta e si rende necessario un opportuno algoritmo di accelerazione. Si è scelto di usare un algoritmo di accelerazione noto come  $\varepsilon$ -*algorithm*, un caso particolare del più generale metodo degli approssimati di Padé. Quanto detto finora sul metodo di quadratura utilizzato è tratto da [44, 45, 43]. È bene notare che la presenza dell'oscillazione smorzata del primo esponenziale, porterà ad una traslazione degli zeri (2.243) e (2.244), ma, come si è detto, tale traslazione risulta sufficientemente piccola da mantenere regolare l'andamento della funzione in ogni sottointervallo di integrazione.

Si consideri ora l'integrale  $I_{in}$ , che chiameremo parte omogenea, ovvero quella per  $|\beta| < 1$ . Anche in questo caso, il termine 'parte omogenea' deriva dal fatto che, nel caso di mezzi privi di perdite, l'integrale rappresentava le onde omogenee che formavano lo spettro dell'onda cilindrica. Tale spettro veniva poi diviso in una parte puramente oscillante, per  $|\beta| < 1/n_2$ , ed in una parte oscillante e smorzata, per  $1/n_2 < |\beta| < 1$ . Tali definizioni erano dovute al fatto che per  $|\beta| < 1/n_2$  si hanno le onde incidenti che vengono parzialmente trasmesse dall'interfaccia e per  $1/n_2 < |\beta| < 1$  si avevano le onde incidenti totalmente riflesse. Nel caso di mezzi con perdite tale suddivisione mantiene il suo significato fisico, infatti, come si è visto nel paragrafo 1.6.1, la trasmissione e la riflessione di un'onda piana non uniforme, avente il vettore di attenuazione ortogonale all'interfaccia, da un mezzo con perdite ad un mezzo privo di perdite può essere trattata in modo analogo a quanto si faceva nel caso di mezzi non dissipativi. L'unica differenza che si presenta, come nel caso dello spettro evanescente, sta nel primo esponenziale dell'integrale in (2.229). Tale esponenziale, rappresentante la propagazione delle onde cilindriche dal centro del cilindro all'interfaccia, non potrà mai essere né puramente decrescente, né puramente oscillante, infatti, rappresentando onde piane che si propagano in un mezzo dissipativo, ed avendo scelto  $n_z \in \mathbb{R}$ , tale esponenziale avrà sempre un andamento oscillatorio smorzato.

Si potrà scrivere:

$$I_{in} = O_m(\xi, \zeta, \chi) + S_m(\xi, \zeta, \chi) \quad (2.245)$$

dove:

$$O_m = \frac{1}{\pi} \int_{|\beta| < 1/n_2} T_{21}(\beta) \frac{e^{i\chi|n_2|\sqrt{e^{2i\phi_k} - \beta^2} + im \arccos(\beta e^{-i\phi_k})}}{\sqrt{e^{2i\phi_k} - \beta^2}} \cdot e^{-i(\xi+\chi)\sqrt{1-(|n_2|\beta)^2}} e^{i|n_2|\zeta\beta} d\beta \quad (2.246)$$

$$S_m = \frac{1}{\pi} \int_{1/n_2 < |\beta| < 1} T_{21}(\beta) \frac{e^{i\chi|n_2|\sqrt{e^{2i\phi_k} - \beta^2} + im \arccos(\beta e^{-i\phi_k})}}{\sqrt{e^{2i\phi_k} - \beta^2}} \cdot e^{-i(\xi+\chi)\sqrt{1-(|n_2|\beta)^2}} e^{i|n_2|\zeta\beta} d\beta \quad (2.247)$$

Si consideri per primo l'integrale (2.246). Si vede subito che nel primo esponenziale, in tale integrale, la parte reale della radice quadrata ad esponente non ha un segno ben definito, esso dipende infatti dai valori di  $\phi_k$  e  $t$ . Sarà quindi necessario inserire nel codice, ogni volta che tale radice quadrata viene valutata, un controllo sul segno della parte immaginaria, in modo da cambiarne il segno quando questa diviene inferiore di 0. Per prima cosa, si esegua il seguente cambiamento di variabile:

$$\beta = \cos t \quad (2.248)$$

$$d\beta = -\sin t dt \quad (2.249)$$

ottenendo:

$$Om = \frac{1}{\pi} \int_{\arccos\left(\frac{1}{n_2}\right)}^{\arccos\left(-\frac{1}{n_2}\right)} T(\cos t) e^{i\chi|n_2|\sqrt{e^{2i\phi_k} - \cos^2 t} + im \arccos(\cos t e^{-i\phi_k})} \cdot e^{-i(\xi+\chi)\sqrt{1-(|n_2|\cos t)^2}} e^{i|n_2|\zeta \cos t} D(t) dt \quad (2.250)$$

con:

$$D(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{e^{2i\phi_k} - \cos^2 t}} \quad (2.251)$$

la funzione  $D(t)$  per  $\phi_k = 0$  e  $t = 0$  presenta un'indeterminazione. Per fare in modo che tale funzione abbia sempre un significato numerico ben definito la si implementerà come segue:

$$D(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } \phi_k = 0 \\ \frac{\sin t}{\sqrt{e^{2i\phi_k} - \cos^2 t}} & \text{se } \phi_k > 0 \end{cases}$$

Si analizzerà ora la funzione integranda in (2.250). La funzione  $D(t)$  non è oscillante nell'intervallo di integrazione e non pone particolari difficoltà. Il primo esponenziale è un esponenziale complesso (che si riduce ad un'esponenziale reale puramente decrescente nel caso  $\phi_k = 0$ ). I due ultimi esponenziali sono due integrali puramente oscillanti. Si ha complessivamente a che fare con una funzione oscillante smorzata che andrà integrata con il metodo di Gauss adattivo. Per applicare tale metodo si deve calcolare la frequenza di oscillazione istantanea. Si definisca prima di tutto tale frequenza. Dato un esponenziale complesso del tipo  $e^{i\gamma(t)}$ , con  $\gamma(t) \in \mathbb{C}$  e  $t \in \mathbb{R}$ , si definisce la sua frequenza istantanea come segue:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\text{Re}[\gamma(t)]}{dt} \right| \quad (2.252)$$

Per calcolare la frequenza istantanea, si deve quindi prima di tutto calcolare la parte reale dell'esponente, si deve poi calcolarne la derivata ed infine il valore assoluto. Osservando l'espressione (2.250), si vede che si ha:

$$\gamma(t) = \chi|n_2|\sqrt{e^{2i\phi_k} - \cos^2 t} + m \arccos(\cos t e^{-i\phi_k}) + -(\xi + \chi)\sqrt{1 - (|n_2|\cos t)^2} + |n_2|\zeta \cos t \quad (2.253)$$

una rapida analisi di questa espressione dimostra che non è scontato ricavarne esplicitamente la parte reale e lo è ancor meno farne la derivata. Per il calcolo della frequenza istantanea è allora molto più pratico invertire le due procedure, ovvero prima calcolare la derivata e successivamente estrarne la parte reale. Ciò è possibile grazie al fatto che, per una funzione complessa di variabile reale,

la derivata della parte reale coincide con la parte reale della derivata<sup>7</sup>. Si può allora calcolare la derivata dell'espressione (2.253); con un po' d'algebra si può vedere che risulta:

$$\gamma'(t) = (\chi|n_2| \cos t + m) D(t) - (\xi + \chi) \frac{|n_2|^2 \sin(2t)}{2\sqrt{1 - (|n_2| \cos t)^2}} - |n_2| \zeta \sin t \quad (2.254)$$

dove la funzione  $D(t)$  è quella già definita in (2.251). Inserendo tale espressione in (2.252) si ottiene la frequenza istantanea:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left| \operatorname{Re} \left[ (\chi|n_2| \cos t + m) D(t) - (\xi + \chi) \frac{|n_2|^2 \sin(2t)}{2\sqrt{1 - (|n_2| \cos t)^2}} + \right. \right. \\ \left. \left. - |n_2| \zeta \sin t \right] \right| \quad (2.255)$$

Il calcolo della parte reale e del valore assoluto potranno essere effettuati numericamente.

Il metodo di Gauss adattivo per il calcolo degli integrali (2.246) e (2.247) consta dei seguenti passi:

- Si calcola la frequenza istantanea della funzione nell'estremo sinistro dell'intervallo di integrazione  $t_1$
- Si calcola il periodo istantaneo  $T(t_1) = 1/f(t_1)$  in questo punto. Se si suppone che la frequenza sia una funzione monotona decrescente, tale periodo sarà inferiore a quello vero.
- si calcola il punto  $t_2 = t_1 + T(t_1)$
- si calcola il periodo del punto  $t_2$ :  $T(t_2) = 1/f(t_2)$ . Se si suppone che la frequenza sia una funzione monotona decrescente, tale periodo sarà superiore a quello vero.
- Si assume come approssimazione del periodo vero quello che si ottiene facendo una media tra  $T(t_1)$  e  $T(t_2)$ :  $\tilde{T} = \frac{T(t_1) + T(t_2)}{2}$
- Si integra nell'intervallo  $[t_1, a\tilde{T}]$  ( $a$  è un reale positivo legato a quanti periodi, o frazioni di periodo, si integra, minore è  $a$ , maggiore sarà l'efficienza del metodo di quadratura) secondo una formula di quadratura di Gauss-Legendre di basso ordine.

Come si può vedere, per il corretto funzionamento del metodo si richiede che la frequenza della funzione integranda sia monotona (se crescente o decrescente

---

<sup>7</sup> Appare ovvio che:

$$\gamma(t) = \beta(t) + i\alpha(t) \rightarrow \gamma' = \beta' + i\alpha'$$

cambierà solo il verso di integrazione). In generale però la frequenza della funzione potrà presentare punti di massimo o minimo. Si dovrà quindi studiare la funzione (2.254) per trovarne gli zeri (che grazie al modulo in (2.252) si trasformano in punti di minimo per la frequenza), massimi e minimi. Vista la forma piuttosto complessa di questa funzione non è però semplice calcolarli esplicitamente. Si è quindi costruito un algoritmo in grado di calcolare ricorsivamente tali punti. Si andrà ora a descrivere tale algoritmo.

- detto l'insieme di integrazione  $[a, b]$  e chiamato  $\delta = b - a$ , si cerca il primo zero della parte reale della funzione (2.254), controllandone il segno, con passo  $0.01\delta$ . La scelta di tale passo è dovuta al fatto che nella funzione (2.254) non è presente alcun termine così fortemente oscillante da giustificare una rapida oscillazione nello spazio di un centesimo dell'intervallo totale.
- trovato l'intervallo  $[a, c]$  in cui è compreso il primo zero, si usa il metodo di Ridder [48] per determinare lo zero  $z_1$ .
- si verifica la presenza di massimi o minimi in  $[a, z_1]$ , per mezzo del metodo della sezione aurea [48].
- detto il primo estremo (massimo o minimo)  $m_1$ , si procede ad un controllo sulla frequenza per controllare se è crescente o decrescente nell'intervallo, ovvero si controlla se  $f(a) \geq f(m_1)$ .
- si integra la funzione nell'intervallo  $[a, m_1]$  con la formula di quadratura di Gauss-Legendre.
- si procede alla ricerca di estremi successivi in  $[m_1, z_1]$ , procedendo così all'integrazione in tutto l'intervallo.
- si trova poi il secondo, eventuale, zero  $z_2$  e si ricomincia con la ricerca degli estremi in  $[z_1, z_2]$ .

Come si vede, tale procedura è tutt'altro che semplice, ma, data la complessità della funzione  $\text{Re}[\gamma'(t)]$ , non è possibile prevedere a priori il numero di zeri e di estremi di tale funzione e si è quindi costretti ad una ricerca capillare di questo tipo.

Passiamo ora all'integrale (2.247). Per prima cosa notiamo che questo integrale va diviso nella somma di due integrali, uno con  $\beta \in [1/n_1, 1]$ , l'altro con  $\beta \in [-1, -1/n_1]$ . E' facile notare che si ha una relazione, tra questi due integrali, del tutto analoga a quella vista in (2.233), quindi si potrà scrivere:

$$S_m(\xi, \zeta, \chi) = S_m^{(1)}(\xi, \zeta, \chi) + (-1)^m S_{-m}^{(1)}(\xi, -\zeta, \chi) \quad (2.256)$$

con:

$$S_m^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{1/n_2}^1 T_{21}(\beta) \frac{e^{i\chi|n_2|\sqrt{e^{2i\phi_k}-\beta^2}+im \arccos(\beta e^{-i\phi_k})}}{\sqrt{e^{2i\phi_k}-\beta^2}} \cdot e^{-i(\xi+\chi)\sqrt{1-(|n_2|\beta)^2}} e^{i|n_2|\zeta\beta} d\beta \quad (2.257)$$

Si può quindi considerare il solo integrale (2.257). Si noti che per la radice quadrata nel primo esponenziale si può fare un ragionamento analogo a quello fatto per  $O_m$ , si dovrà quindi inserire un controllo sulla determinazione di tale radice. Si cambi il segno nella radice quadrata del secondo esponenziale, in modo da renderne ben definita la determinazione. Si operi inoltre il seguente cambio di variabile:

$$\beta = \cos t \quad (2.258)$$

$$d\beta = -\sin t dt \quad (2.259)$$

ottenendo:

$$S_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\arccos \frac{1}{n_2}} T_{21}(\cos t) e^{i\chi|n_2|\sqrt{e^{2i\phi_k}-\cos^2 t}+im \arccos(\cos t e^{-i\phi_k})} \cdot e^{(\xi+\chi)\sqrt{(|n_2|\cos t)^2-1}} e^{i|n_2|\zeta \cos t} D(t) dt \quad (2.260)$$

dove  $D(t)$  è definito in (2.251). Per il calcolo di questo integrale si possono fare gli stessi discorsi fatti per l'integrale  $O_m$ , salvo il fatto che in questo caso si ha la funzione:

$$\gamma(t) = \chi|n_2|\sqrt{e^{2i\phi_k}-\cos^2 t} + m \arccos(\cos t e^{-i\phi_k}) + |n_2|\zeta \cos t \quad (2.261)$$

notiamo infatti che il secondo esponenziale in (2.260) questa volta è puramente reale e quindi può non essere considerato nel calcolo della frequenza. La frequenza dell'integrando sarà quindi:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} |\operatorname{Re}[(\chi|n_2|\cos t + m) D(t) - |n_2|\zeta \sin t]| \quad (2.262)$$

A questo punto potremo applicare a tale integrale le stesse procedure descritte in precedenza per l'integrale  $O_m$ .

Per come è stato scritto il codice appaiono chiare alcune osservazioni:

- Il codice sarà rallentato, rispetto al caso privo di perdite, a causa dei cicli che si sono dovuti aggiungere per il calcolo degli intervalli di monotonia delle frequenze e per la maggiore complessità delle funzioni.
- Il codice presenterà buone prestazioni per basse perdite, ovvero fino a quando le funzioni integrande si scosteranno poco da quelle ideali. Inoltre il comportamento per  $n_z \rightarrow \infty$  degli spettri è convergente, ma tale convergenza è lenta per  $\zeta \rightarrow \infty$ . Quindi il calcolo degli integrali potrebbe essere affetto da errore per perdite elevate e nel calcolo del campo lontano.

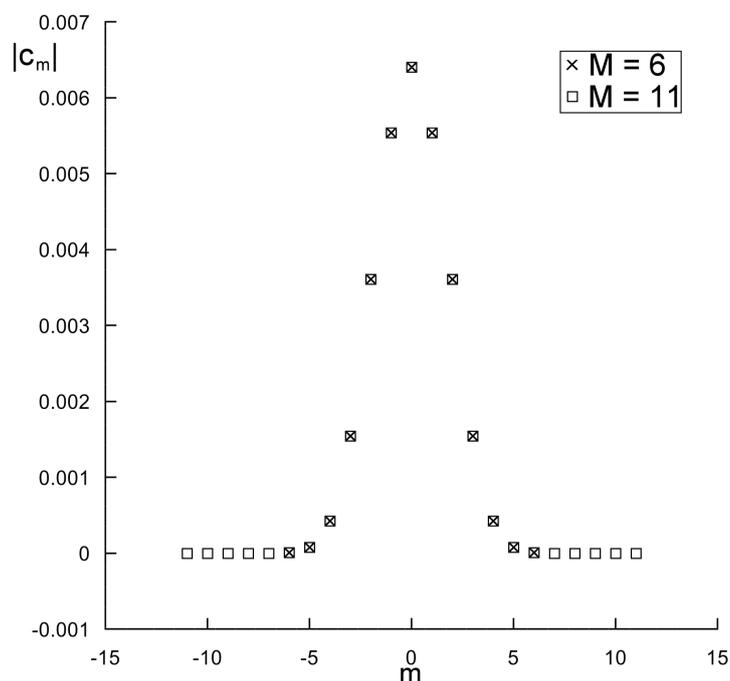


Figura 2.13: Coefficienti  $c_m$  nel caso di indice massimo  $M = 3|n_2|\alpha = 11$ , o  $M = 3\text{Re}[n_2]\alpha = 6$ .

### 2.7.3 Risultati numerici

La procedura esposta permette di calcolare tutti i coefficienti dei sistemi lineari (2.209) e (2.224). A questo punto quindi si è in grado di fornire una soluzione al problema elettromagnetico. Il calcolo dei coefficienti può essere fatto previa una troncatura delle sommatorie. Nei casi privi di perdite il criterio scelto per l'ordine massimo era  $M = 3n_2\alpha$ , dove,  $n_2$  è l'indice di rifrazione del mezzo in cui sono immersi i cilindri e  $\alpha$  è il raggio del cilindro più grande immerso, i.e.,  $\alpha = \max\{\alpha_n\}$ . Nel caso di mezzi con perdite, essendo  $n_2$  complesso, si pone il problema se sostituire a esso la sua parte reale o la sua parte immaginaria. Un confronto tra i coefficienti  $c_m$  ottenuti nei due casi è mostrato in Figura 2.13, con  $\alpha = 5.5$  cm,  $h = 20$  cm,  $\varepsilon_2 = 10$ ,  $\sigma = 1$  S/m ad una frequenza  $f_0 = 600$  MHz. Come si vede dalla figura, i coefficienti  $c_m$  risultano nulli già quando si usa  $\text{Re}[n_2]$ , l'uso di  $|n_2|$  risulta quindi nel calcolo di un numero eccessivo di coefficienti, peggiorando le prestazioni del codice. Si è scelto quindi come criterio di troncamento  $M = 3\text{Re}[n_2]\alpha$ .

In Figura 2.13, si può notare l'andamento perfettamente esponenziale dei coefficienti. Tale andamento è necessario per garantire la convergenza delle

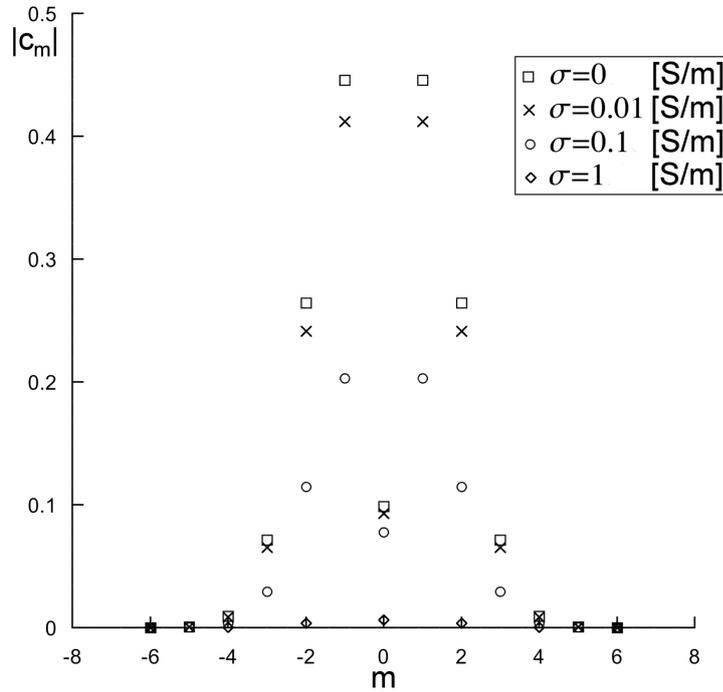


Figura 2.14: Coefficienti  $c_m$  calcolati per diversi valori della conducibilità del materiale in cui sono immersi i cilindri.

serie (2.185) e (2.202). Può essere interessante vedere come vari l'andamento dei coefficienti al variare della conducibilità del mezzo. In Figura 2.14, è mostrato l'andamento dei coefficienti, nella stessa situazione della Figura 2.13, ma per diversi valori di  $\sigma$ . Si può vedere che il coefficiente di ordine 0 è meno influenzato dall'aumento delle perdite rispetto agli altri. Ciò accade perché in tutte le serie è presente il termine  $e^{im\phi}$ , mentre in tutti gli integrali è presente il termine  $e^{im \arccos(k_z/k)}$ . Tali termini influenzano fortemente l'ampiezza dei coefficienti e sono nulli per il coefficiente di ordine zero. Inoltre, possiamo notare una diminuzione esponenziale del termine di ordine zero, all'inizio molto lenta, ma poi molto rapida. Ciò è dovuto al fatto che la variazione è legata principalmente alle funzioni di Bessel di argomento complesso. Notiamo infine che la forma a campana di Figura 2.13 si ha solo per valori delle perdite sufficientemente alti.

Per mostrare il corretto funzionamento del codice si procederanno ora ad alcuni confronti con casi noti in letteratura. Per ottenere la più ampia conferma dei nostri risultati si è deciso di confrontare ogni simulazione con i risultati ottenuti con il software commerciale Comsol Multiphysics 4.0.

In Figura 2.16, è mostrato il campo elettrico scatterato trasmesso in aria nel

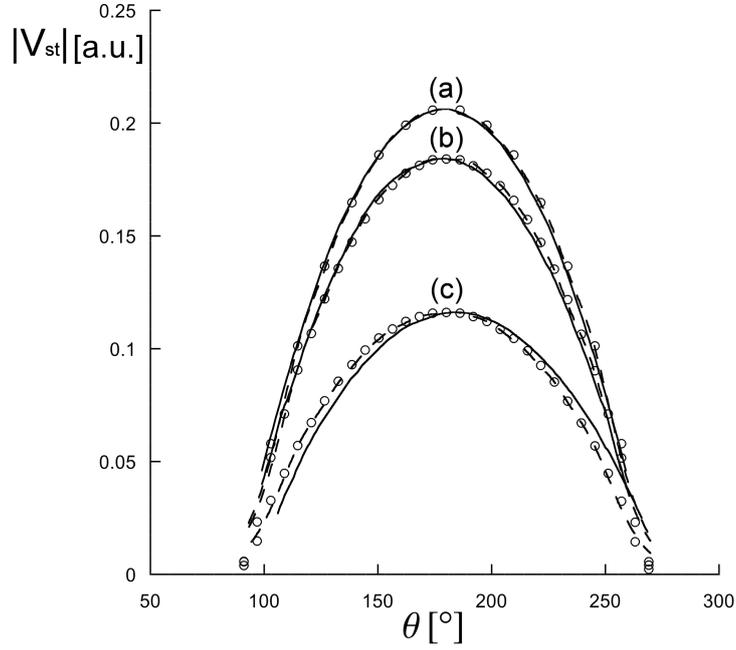


Figura 2.15: Campo elettrico scatterato trasmesso in campo lontano per un'onda incidente in polarizzazione  $TM$ . Le curve sono relative ai risultati presentati in [49] (linea solida), ai risultati del nostro codice (cerchi) e alle simulazioni svolte con il software commerciale. Il campo incidente viene considerato con tre diversi angoli di incidenza:  $\phi_i = 0^\circ$  (a),  $\phi_i = 30^\circ$  (b) e  $\phi_i = 60^\circ$  (c)

caso di un'onda incidente in polarizzazione  $TM$ , su un cilindro perfettamente conduttore di raggio  $a = 0.3$  m, sepolto a una profondità  $h = 2$  m, in un dielettrico dissipativo avente permittività relativa  $\varepsilon_2 = 15$  e conducibilità  $\sigma = 0.001$  S/m. L'onda incidente è stata considerata con tre diversi angoli di incidenza:  $\phi_i = 0^\circ$ ,  $\phi_i = 30^\circ$  e  $\phi_i = 60^\circ$ . Si può vedere come i campi messi a confronto siano in ottimo accordo.

Si consideri ora un secondo esempio in cui si considera un'onda incidente in polarizzazione  $TE$ . In questo caso, la nostra procedura si sviluppa in funzione del campo magnetico, essendo questo espresso da un'unica componente ortogonale al piano d'incidenza. In questo caso il campo elettrico viene calcolato attraverso le equazioni di Maxwell. Qui si mostrerà il modulo del vettore campo elettrico del campo scatterato trasmesso. Si considera un'onda piana incidente ortogonalmente a frequenza 600 MHz, su un'interfaccia aria-dielettrico, nel caso di un cilindro perfettamente conduttore di raggio  $a = 5.5$  cm, sepolto a una profondità  $h = 1.2$  m. Il dielettrico si considera con una permittività relativa  $\varepsilon_2 = 10$  e con una conducibilità uguale a  $\sigma = 0$ , o  $\sigma = 0.0001$ , o  $\sigma = 0.001$ , o

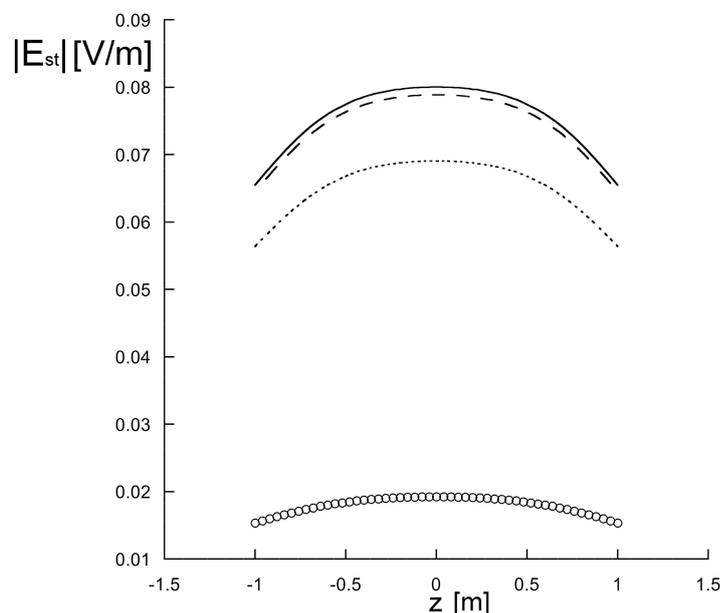


Figura 2.16: Campo elettrico scatterato trasmesso da un cilindro perfettamente conduttore di raggio  $a = 5.5$  cm, sepolto a una profondità  $h = 1.2$  m. Il dielettrico si considera con una permittività relativa  $\varepsilon_2 = 10$  e con una conducibilità uguale a  $\sigma = 0$  (linea solida), o  $\sigma = 0.0001$  (linea tratteggiata), o  $\sigma = 0.001$  (linea puntinata), o  $\sigma = 0.01$  (cerchi). L'onda incidente si considera in polarizzazione TE e ad incidenza normale.

$\sigma = 0.01$ . Il campo è stato calcolato su una linea parallela all'interfaccia posta a una distanza di 0.5 m da essa.

Si consideri ora un altro esempio di confronto con un singolo cilindro, questa volta dielettrico. Per mostrare le potenzialità del metodo, questa volta si considererà un'onda incidente a frequenze ottiche, in particolare si è considerata una lunghezza d'onda  $\lambda_0 = 0.3 \mu\text{m}$ . L'onda incidente si considera in polarizzazione TM e ad incidenza normale. L'onda scatterata è stata calcolata al di sopra dell'interfaccia, su un segmento parallelo a essa posto alla distanza di una lunghezza d'onda. Il cilindro, avente raggio  $0.04 \mu\text{m}$ , è immerso a una profondità  $h = 0.08 \mu\text{m}$ . Il mezzo in cui è immerso il cilindro si è supposto avere un indice di rifrazione  $n_2 = 2.96 + i0.203$ , il cilindro, anch'esso di materiale dissipativo si è considerato avere un indice di rifrazione  $n_c = 1.44 + i1.31$ . I valori degli indici di rifrazione si riferiscono al caso di un cilindro d'argento immerso in un substrato di Carburo di silicio (SiC). In Figura 2.17, si può vedere il confronto tra i risultati ottenuti con il codice qui presentato e quelli ottenuti con il software commerciale. In Figura ??, si è rappresentata una mappa

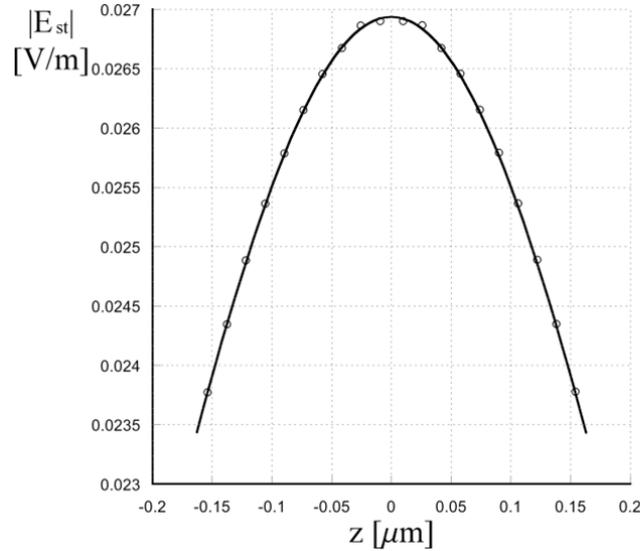


Figura 2.17: Confronto tra il campo elettrico scatterato da un cilindro dielettrico immerso in un mezzo con perdite, ottenuto attraverso il codice qui esposto (cerchi) e ottenuto con il software commerciale (linea continua)

bidimensionale del campo elettrico scatterato in questa configurazione. Qui si può vedere chiaramente l'onda scatterata trasmessa in aria essere con buona approssimazione un'onda cilindrica, almeno ad alcune lunghezze d'onda dall'interfaccia. Per quanto riguarda l'onda nel dielettrico, essa è la sovrapposizione dell'onda scatterata dal cilindro e dell'onda scatterata-riflessa dall'interfaccia. La cosa interessante è che anche quest'onda può essere considerata cilindrica con una buona approssimazione a una certa distanza dall'interfaccia. In questo troviamo una conferma del risultato descritto dall'espressione (2.170). Lì infatti si sosteneva che l'onda cilindrica riflessa potesse essere considerata come un'armonica cilindrica avente il centro di generazione nel punto simmetrico rispetto all'interfaccia del centro del cilindro.

Una importante potenzialità del metodo sviluppata consiste nell'aver un totale controllo su ogni componente del campo elettromagnetico. Per esempio, guardando al campo diffratto (2.185), si è già fatto notare come in esso possano distinguersi i due contributi, uno dovuto al campo diffratto a causa diretta del campo incidente e l'altro causato dall'interazione con gli altri cilindri. Quello che si può fare è eliminare questo termine di interazione e confrontare il campo scatterato trasmesso nei due casi, con e senza interazione. In Figura 2.19 è mostrato tale confronto, nello stesso scenario di Figura 2.17, ma con due cilindri, sepolti alla stessa profondità di  $0.08 \mu\text{m}$ , disposti simmetricamente rispetto all'origine degli assi e posti a una distanza reciproca di  $0.16 \mu\text{m}$ . La simulazione

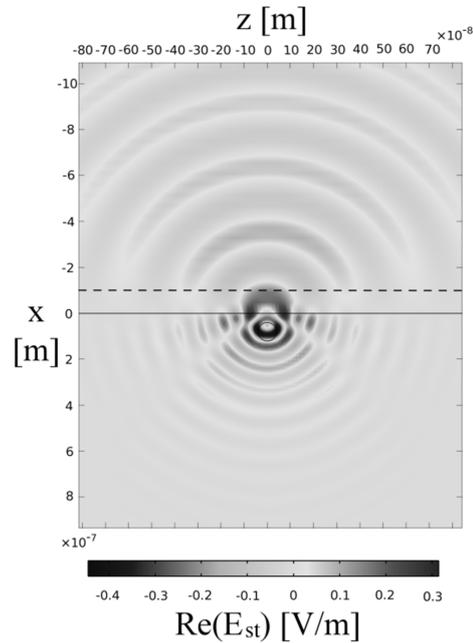


Figura 2.18: Mappa di campo bidimensionale per il campo elettrico scatterato nella stessa configurazione di Figura 2.17

è stata eseguita nel caso in cui il substrato di carburo di silicio presenti o meno perdite, ovvero nel caso ideale e reale. Dalla figura si vede subito che nel caso ideale la differenza tra il campo scatterato considerando o meno l'interazione tra i cilindri è molto marcata. Viceversa, nel caso reale, tale differenza si riduce sensibilmente. Ciò accade perché la presenza delle perdite fa in modo che i cilindri risentano meno l'uno dell'altro. L'interazione infatti avviene perché il campo diffratto da un cilindro va incidere sull'altro e viceversa. Questi campi hanno un'intensità più bassa del campo incidente e quindi la presenza delle perdite può renderli addirittura trascurabili rispetto alla componente principale dello scattering.

I materiali scelti e le dimensioni dei cilindri, sono stati tratti da [50], dove si usa un allineamento di cilindri per ottenere un mezzo con indice di rifrazione negativo. Il nostro codice ci ha permesso di simulare lo scenario e in Figura 2.20, è presente una mappa del campo elettrico diffratto da un campo incidente normale all'interfaccia. È interessante notare come sia nella somma del campo scatterato e scatterato-riflesso che nel campo scatterato trasmesso scompaiono completamente le forme d'onda cilindriche. Tali onde sembrano piane in corrispondenza del reticolo e questo è proprio quello che si ottiene nel caso di mezzi omogeneizzabili.

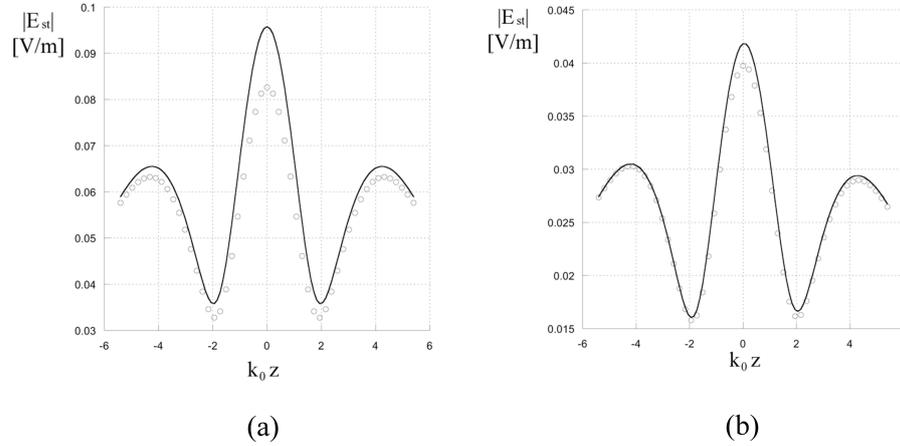


Figura 2.19: Campo scatterato trasmesso da due cilindri dielettrici paralleli. Si considera lo stesso scenario di Figura 2.17, salvo la presenza di due cilindri disposti simmetricamente rispetto all'origine a una distanza di  $0.16 \mu\text{m}$ . In (a) è rappresentato il caso di substrato senza perdite in due casi, considerando l'interazione tra i due cilindri (linea continua) e senza tale interazione (cerchi). In (b) si hanno le stesse due situazioni considerando però il substrato con le perdite.

Infine, si vuole mostrare una grande potenzialità del metodo dimostrato. Con esso infatti è possibile simulare il campo diffratto da qualsiasi oggetto a simmetria cilindrica, attraverso lo scattering da un opportuno allineamento di cilindri. Lo scenario pratico che si vuole affrontare è quello di un tubo di PVC, in cui scorra dell'acqua, immerso nel terreno. In questo caso potremo sfruttare ogni caratteristica del nostro metodo: avremo il terreno come substrato, quindi un mezzo con perdite, avremo un cilindro con perdite, costituito in questo caso dall'acqua, e avremo una corona circolare cilindrica che formeremo con un certo numero di cilindri disposti sulla superficie del cilindro d'acqua. Si è considerato un tubo di PVC di raggio  $6.3 \text{ cm}$ , con una copertura di  $1.3 \text{ cm}$  di spessore, sepolto a una profondità di  $0.5 \text{ m}$  in un terreno avente permittività relativa  $\varepsilon_2 = 10$  e una conducibilità  $0.01 \text{ S/m}$ . L'acqua si è considerata con una permittività  $\varepsilon_w = 81$  e una conducibilità  $\sigma_w = 1 \text{ S/m}$ . Il PVC si è considerato come un dielettrico perfetto avente permittività relativa  $\varepsilon_p = 3.7$ . La frequenza di lavoro si è considerata  $f_0 = 600 \text{ MHz}$ . Il campo scatterato trasmesso dal tubo di PVC è mostrato in Figura 2.21, dove si può vedere in alto a destra anche un'immagine di come è stato costruito il tubo per mezzo dell'allineamento di 61 cilindri, uno

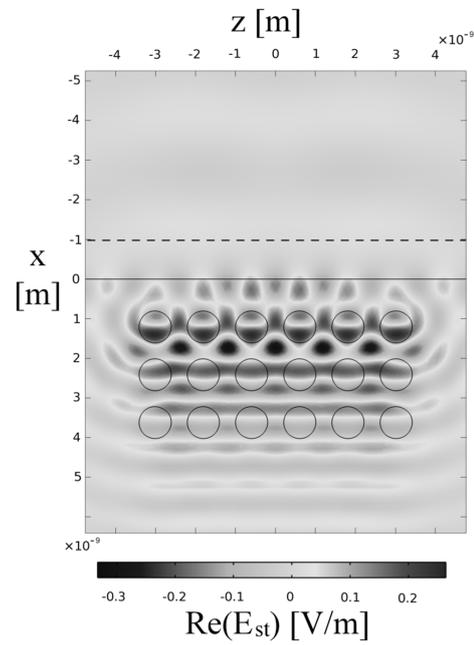


Figura 2.20: Mappa di campo bidimensionale per il campo elettrico scatterato nella stessa configurazione di Figura 2.17

a rappresentare l'acqua e sessanta per comporre la copertura di PVC.

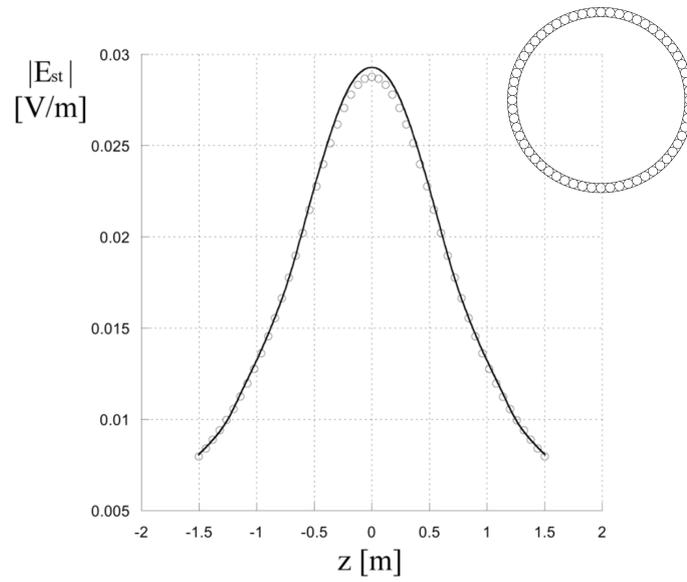


Figura 2.21: Campo elettrico scatterato trasmesso da un tubo di PVC pieno d'acqua di raggio  $a = 6.3$  cm, sepolto a una profondità  $h = 0.5$  m. Il campo è stato calcolato a una lunghezza d'onda sopra l'interfaccia su una linea orizzontale. La simulazione è stata eseguita con il codice qui presentato (cerchi) e con il software commerciale (linea continua).

Parte II

Diffrazione in mezzi  
anisotropi



## Capitolo 3

# Propagazione in un mezzo uniassico

In questo capitolo, ci proponiamo di descrivere la propagazione di onde elettromagnetiche in mezzi anisotropi. Per fare ciò utilizzeremo un approccio che sia indipendente dal sistema di riferimento scelto, seguendo la trattazione esposta in [51]. Per gli strumenti di algebra diadica e le relative identità ci riferiamo a tale testo o ad altri testi sull'argomento.

### 3.1 Caratteristiche di un mezzo anisotropo

Si vuole considerare un mezzo anisotropo, ovvero nel quale le relazioni costitutive del mezzo possano essere espresse come segue:

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{E} \quad (3.1)$$

$$\underline{B} = \mu_0 \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{H} \quad (3.2)$$

dove la doppia sottolineatura rappresenta un tensore del secondo ordine, ovvero un oggetto algebrico che può essere rappresentato nello spazio euclideo, una volta scelta una base, ovvero un sistema di riferimento, come una matrice  $3 \times 3$ :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

ovviamente tale rappresentazione dipende dal sistema di riferimento scelto, infatti i diadici in (3.1) e (3.2) forniscono la legge fisica che lega le componenti del campo elettrico  $\underline{E}$  o del campo magnetico  $\underline{H}$ , alle componenti della densità di flusso elettrico  $\underline{D}$ , o magnetico  $\underline{B}$ . Notiamo che l'eventuale diadico della conducibilità elettrica è stato inserito nel diadico della permittività elettrica come si

è fatto anche nel caso dei mezzi isotropi. Tali diadici godono di alcune proprietà legate ad alcune leggi fisiche fondamentali. Parleremo d'ora in poi sempre delle grandezze nel dominio della frequenza. Un'importante proprietà di tali diadici è che essi, in assenza di forti campi magnetici esterni, devono necessariamente essere simmetrici<sup>1</sup> [52]. Si può dimostrare che tale proprietà di simmetria è legata all'invarianza temporale delle fluttuazioni [53]. È interessante a questo proposito notare come si comportino le diverse grandezze elettromagnetiche a causa di un'inversione temporale. Per approfondire l'argomento si veda [5]. È bene notare che in alcuni testi tale proprietà di simmetria viene associata all'assenza di perdite e dimostrata con l'ausilio del teorema di Poynting. Tale affermazione è inesatta, infatti i tensori  $\underline{\underline{\epsilon}}$  e  $\underline{\underline{\mu}}$  sono sempre simmetrici, sia in presenza di perdite che in loro assenza, come conseguenza dell'invarianza rispetto alle inversioni temporali delle equazioni di Maxwell. Nel caso di mezzi privi di perdite si può vedere che tali tensori risultano invece hermitiani.

Sfruttando il teorema di Poynting possiamo ricavare altre interessanti proprietà dei mezzi anisotropi, tale teorema si può scrivere come segue:

$$\frac{1}{2} \int_S (\underline{E} \times \underline{H}^*) \cdot \underline{n}_0 dS + \frac{i\omega}{2} \int_V (\underline{D}^* \cdot \underline{E} - \underline{H}^* \cdot \underline{B}) dV = 0 \quad (3.4)$$

Come è ben noto il secondo integrale rappresenta la potenza media elettrica e magnetica immagazzinata nel volume  $V$ , ovvero le potenze immagazzinate per unità di volume potranno essere scritte come segue:

$$p_E = \frac{i\omega}{4} \underline{D}^* \cdot \underline{E} = \frac{1}{4} \underline{E}^* \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^* \cdot \underline{E} \quad (3.5)$$

$$p_H = \frac{i\omega}{4} \underline{H}^* \cdot \underline{B} = \frac{1}{4} \underline{H}^* \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{H} \quad (3.6)$$

dove si sono usate le relazioni costitutive (3.1) e (3.2). Si noti che il simbolo  $*$  applicato ai tensori, rappresenta l'operazione sia di coniugazione che di trasposizione. Infatti, essendo l'operazione di coniugazione, senza la trasposizione, molto rara nel caso di tensori complessi, si preferisce usare tale simbolo in questo senso. Per coniugare gli elementi di un tensore senza trasporli sarà sufficiente eseguire le due operazioni consecutivamente, ovvero  $^{*T}$ . Le perdite di un mezzo sono legate alla potenza attiva, ovvero alla parte reale della potenza in (3.4), quindi la condizione di assenza di perdite equivale ad imporre che la potenza in (3.4) sia puramente immaginaria (potenza reattiva), il che equivale ad imporre che le parti reali delle potenze immagazzinate sia nulla:

$$\text{Re}(p_E) = p_E - p_E^* = 0 \quad (3.7)$$

da cui otteniamo:

$$\underline{E}^* \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^* \cdot \underline{E} - \underline{E} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{E}^* = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ji}) E_i E_j^* = 0 \quad (3.8)$$

<sup>1</sup>Più in generale è la suscettività generalizzata (Appendice A) ad essere una grandezza simmetrica quando il corpo non ha struttura magnetica e quando non sia presente un campo magnetico esterno di grande intensità.

Vediamo quindi che in assenza di perdite il tensore della permittività elettrica deve essere hermitiano, ovvero il tensore risulta uguale al suo trasposto coniugato. Ovviamente, nei mezzi dissipativi, in cui i tensori di permittività e permeabilità sono simmetrici, ma non hermitiani, si può definire la potenza dissipata proprio come la parte reale del secondo termine in (3.4), ovvero come segue:

$$p_d = -\frac{i\omega}{4} \left[ \underline{E} \cdot (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^*) \cdot \underline{E}^* + \underline{H}^* \cdot (\underline{\mu} - \underline{\mu}^*) \cdot \underline{H} \right] \quad (3.9)$$

I tensori nel caso privo di perdite, essendo sia hermitiani che simmetrici, sono sempre rappresentati come matrici simmetriche ad elementi reali, aventi quindi autovalori reali. Questo significa che esisterà sempre una base dello spazio euclideo con la quale rappresentare i tensori con matrici diagonali ad elementi reali.

Nel caso in cui vengano considerate le perdite, i tensori saranno sempre simmetrici, ma non più, in generale, hermitiani, questo vuol dire che, essendo sempre elementi di uno spazio complesso, essi non saranno in generale diagonalizzabili. Per rappresentare comunque tali grandezze in funzione di diadici hermitiani, possiamo notare che ogni diadico complesso può essere scritto come segue:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}' + i\underline{\varepsilon}'' \quad (3.10)$$

dove si definiscono:

$$\underline{\varepsilon}' = \frac{\underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}^*}{2} \quad (3.11)$$

$$\underline{\varepsilon}'' = i \frac{\underline{\varepsilon}^* - \underline{\varepsilon}}{2} \quad (3.12)$$

i tensori  $\underline{\varepsilon}'$  e  $\underline{\varepsilon}''$  sono hermitiani, come si può facilmente dimostrare. Inoltre, in assenza di forti campi magnetici esterni, la permittività sarà, come abbiamo detto, un tensore simmetrico, quindi saranno simmetrici anche i tensori  $\underline{\varepsilon}'$  e  $\underline{\varepsilon}''$ , ma essendo questi ultimi tensori hermitiani, ne deduciamo che essi sono tensori reali e simmetrici.

Quanto detto non vale in presenza di forti campi magnetici esterni, il che è vero nella gran parte delle applicazioni di nostro interesse. Un classico esempio in cui questo può accadere è invece il caso della ferrite magnetizzata. Tale materiale viene infatti usato solo in presenza di un campo magnetico esterno. È interessante notare che il tensore di permeabilità magnetica di questo materiale non è mai simmetrico, né nel caso in cui si considerino le perdite, sia nel caso in cui queste non vengano prese in considerazione.

Alla luce della definizione (3.10), possiamo riscrivere la potenza dissipata come segue:

$$p_d = \frac{\omega}{4} \left[ \underline{E} \cdot \underline{\varepsilon}'' \cdot \underline{E}^* + \underline{H}^* \cdot \underline{\mu}'' \cdot \underline{H} \right] \quad (3.13)$$

Se il mezzo considerato è passivo, la quantità (3.13) deve risultare sempre positiva e questo impone che i singoli termini siano positivi. Essendo questi delle forme quadratiche, ciò impone che i tensori  $\underline{\underline{\epsilon}}''$  e  $\underline{\underline{\mu}}''$  siano definiti positivi e che quindi gli autovalori delle matrici siano reali e positivi.

Siamo riusciti ad ottenere delle proprietà per i tensori  $\underline{\underline{\epsilon}}''$  e  $\underline{\underline{\mu}}''$ , sfruttando l'espressione della potenza dissipata nel mezzo. Per trovare le proprietà delle parti reali della permittività e della permeabilità, ovvero dei tensori  $\underline{\underline{\epsilon}}'$  e  $\underline{\underline{\mu}}'$ , è naturale pensare di considerare l'espressione della potenza immagazzinata reattiva, ovvero delle espressioni (3.5) e (3.6). Così facendo si può facilmente dimostrare che anche tali tensori sono definiti positivi, ma tale procedura non è corretta. Sappiamo infatti che esistono mezzi con tensori di permittività definiti negativi od indefiniti. L'origine di tale errore sta nel fatto che le espressioni (3.5) e (3.6) rappresentano l'energia immagazzinata solo nel caso di mezzi non dispersivi, i quali, come è noto, non esistono. Nel caso di mezzi dispersivi l'energia effettivamente immagazzinata nel mezzo può essere scritta come segue [52]:

$$U = \frac{1}{16} \left[ \underline{E} \cdot \frac{d(\omega \underline{\underline{\epsilon}}')}{d\omega} \cdot \underline{E}^* + \underline{H} \cdot \frac{d(\omega \underline{\underline{\mu}}')}{d\omega} \cdot \underline{H}^* \right] \quad (3.14)$$

Tale espressione vale solo nel caso in cui le perdite elettriche e magnetiche siano basse rispetto alle proprietà dielettriche e magnetiche del mezzo. Da queste espressioni vediamo quindi che non sono i tensori  $\underline{\underline{\epsilon}}'$  e  $\underline{\underline{\mu}}'$  ad essere definiti

positivi, ma le quantità  $\frac{d(\omega \underline{\underline{\epsilon}}')}{d\omega}$  e  $\frac{d(\omega \underline{\underline{\mu}}')}{d\omega}$  ad esserlo.

In definitiva, un generico tensore complesso, come quello in (3.3), potrà essere scritto come somma complessa di due tensori hermitiani, ognuno dei quali sarà diagonalizzabile, ma in generale secondo due trasformazioni diverse, ovvero la parte reale e la parte immaginaria dei tensori di permittività e permeabilità potrebbero risultare diagonali secondo basi diverse e questo renderebbe i tensori complessivi non diagonali. Sarà quindi possibile, in un certo sistema di riferimento, rappresentare o  $\underline{\underline{\epsilon}}'$ , o  $\underline{\underline{\epsilon}}''$ , come una matrice diagonale, ma non sarà in generale possibile rappresentarli entrambi in tale forma. In genere questo è possibile sotto ipotesi restrittive, come per esempio nei semiconduttori anisotropi, dove, per rappresentare la permittività come una matrice diagonale ad elementi complessi, si deve trascurare la dispersione spaziale [54]. Infine, considereremo tutti i tensori sempre invertibili.

E' bene notare che il caso in cui entrambe le proprietà elettriche e magnetiche di un mezzo siano anisotrope è alquanto raro in natura. Molto più comune è il caso in cui solo le proprietà elettriche, come nel caso dei cristalli o dei plasmi magnetizzati, o magnetiche, come nel caso delle ferriti magnetizzate, lo siano. Tuttavia, in anni recenti sempre più metamateriali con proprietà, sia elettriche che magnetiche, anisotrope, sono stati proposti [55]. In particolare considerando un wire medium [56], ben noto metamateriale dielettrico, è facile notare che esso è un mezzo anisotropo uniassiale. Allo stesso modo un metamateriale magnetico composto da allineamenti di split ring [57] risulterà

certamente anisotropo. Ciò deriva dalla natura anisotropa dei loro componenti. Nello studio dei metamateriali si prospetta quindi la possibilità di dover considerare la propagazione di onde elettromagnetiche in mezzi sia elettricamente che magneticamente anisotropi. Inoltre è ben noto che tutti i metamateriali, finora realizzati, presentano un livello non trascurabile di perdite, a causa della presenza di metalli al loro interno. Un altro caso in cui i materiali vanno considerati anisotropi e con perdita è lo studio dei così detti Perfectly Matched Layers (PML), materiali fittizi utilizzati nella simulazione elettromagnetica, sia nel dominio del tempo, che nel dominio della frequenza [7, 8]. Per questo motivo considereremo di poter avere perdite sia di natura elettrica che di natura magnetica.

Notiamo che in generale un materiale anisotropo non può essere trasformato in un materiale isotropo tramite trasformazioni affini delle coordinate [5]. Nel caso in cui questo sia possibile, il materiale si chiama isotropo-affine. Si può dimostrare che un materiale è isotropo-affine se e solo se i suoi tensori di permittività elettrica e permeabilità magnetica sono multipli di uno stesso tensore, ovvero se si ha:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\mu}}^{-1} = \frac{\mu_a}{\varepsilon_a} \underline{\underline{I}} \quad (3.15)$$

dove  $\varepsilon_a$  e  $\mu_a$  sono le permittività e permeabilità che ha il materiale dopo la trasformazione. In modo analogo un mezzo anisotropo si dice uniassico-affine se esiste una trasformazione affine in grado di trasformarlo in un mezzo uniassico. Si può dimostrare che un generico mezzo anisotropo è uniassico-affine se e solo se i tensori delle sue caratteristiche elettromagnetiche possono essere scritti nella seguente forma:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_1 \underline{\underline{\alpha}} + \varepsilon_2 \underline{\underline{v}}\underline{\underline{v}} \quad (3.16)$$

$$\underline{\underline{\mu}} = \mu_1 \underline{\underline{\alpha}} + \mu_2 \underline{\underline{v}}\underline{\underline{v}} \quad (3.17)$$

dove  $\underline{\underline{S}}$  è una matrice simmetrica ed invertibile, mentre  $\underline{\underline{v}}$  è un generico vettore. I parametri  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  sono gli autovalori dei tensori caratteristici del mezzo uniassico che si ottiene dopo la trasformazione, i quali si possono scrivere come segue:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_a = \varepsilon_1 \underline{\underline{I}} + \varepsilon_2 \underline{\underline{u}}\underline{\underline{u}} \quad (3.18)$$

$$\underline{\underline{\mu}}_a = \mu_1 \underline{\underline{I}} + \mu_2 \underline{\underline{u}}\underline{\underline{u}} \quad (3.19)$$

Nel seguito saremo interessati alle interazioni che avvengono all'interfaccia tra un materiale anisotropo come quello sopra descritto ed un materiale isotropo convenzionale. Tali interazioni sono di interesse per diverse applicazioni, come ad esempio la definizione di alcune condizioni al contorno speciali, come la così detta condizione al contorno DB, o le condizioni Hard e Soft [88]. Inoltre, nel caso in cui il materiale anisotropo rappresenti un PML, l'interfaccia che esso forma con dei mezzi convenzionali è di estrema importanza per determinarne le proprietà di assorbimento.

Per studiare un'interfaccia tra un mezzo anisotropo generico ed un mezzo isotropo, la scelta del sistema di riferimento è particolarmente delicata. Infatti, la diade che rappresenta la caratteristica elettromagnetica di un mezzo anisotropo assume forma diagonale solo in un certo sistema di riferimento<sup>2</sup>, d'altra parte, quando si considera un'interfaccia piana, è molto importante che il sistema di coordinate sia scelto in modo da far coincidere uno dei piani coordinati con l'interfaccia stessa. Si pone quindi un serio problema sulla scelta del sistema di riferimento, soprattutto quando si vuole considerare un mezzo anisotropo generico, di cui cioè non si conoscano a priori gli assi principali (assi ottici).

Un modo per risolvere questo problema consiste nel formulare la trattazione elettromagnetica in modo tale da rimanere indipendenti dal sistema di riferimento, seguendo la falsariga della trattazione esposta in [51], o più in generale sfruttando i metodi analitici presentati in [5].

### 3.2 Equazione di dispersione

Per comprendere le caratteristiche della propagazione di un'onda piana in un mezzo anisotropo, si deve prima di tutto ricavare l'equazione di dispersione, la cui soluzione fornisce il vettore di propagazione e i vettori di polarizzazione delle onde proprie del mezzo. Consideriamo dunque le equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza:

$$\nabla \times \underline{E} = i\omega\mu_0\underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{H} \quad (3.20)$$

$$\nabla \times \underline{H} = -i\omega\varepsilon_0\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{E} \quad (3.21)$$

Nel caso in cui il campo elettromagnetico sia un'onda piana, potremo scrivere:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.22)$$

$$\underline{H} = \underline{H}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.23)$$

quindi le equazioni di Maxwell si possono riscrivere come segue:

$$\begin{aligned} \underline{k} \times \underline{E} &= \omega\mu_0\underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{H} \\ \underline{k} \times \underline{H} &= -\omega\varepsilon_0\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{E} \end{aligned} \quad (3.24)$$

eliminando alternativamente il campo elettrico o il campo magnetico da queste equazioni, si giunge alle seguenti condizioni tra loro equivalenti<sup>3</sup>:

$$\left[ k_0^2 \underline{\underline{\varepsilon}} + (\underline{k} \times \underline{I}) \cdot \underline{\underline{\mu}}^{-1} (\underline{k} \times \underline{I}) \right] \cdot \underline{E} = 0 \quad (3.25)$$

$$\left[ k_0^2 \underline{\underline{\mu}} + (\underline{k} \times \underline{I}) \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^{-1} (\underline{k} \times \underline{I}) \right] \cdot \underline{H} = 0 \quad (3.26)$$

<sup>2</sup>Il fatto che le diadi siano simmetriche assicura che esista sempre una trasformazione del sistema di coordinate tale per cui il tensore possa essere espresso in forma diagonale.

<sup>3</sup>dove notiamo che

$$\underline{u} \times \underline{A} \cdot \underline{u} \times \underline{v} = (\underline{u} \times \underline{I}) \cdot \underline{A} \cdot (\underline{u} \times \underline{I}) \cdot \underline{v}$$

se si nota che  $\underline{u} \times \underline{v} = (\underline{u} \times \underline{I}) \cdot \underline{v} = (\underline{I} \times \underline{u}) \cdot \underline{v}$ .

vediamo che, sostituendo  $\underline{E}$  con  $\underline{H}$  e  $\varepsilon$  con  $\mu$ , le due condizioni si possono ottenere l'una dall'altra. Ci concentreremo quindi sulla prima delle due. Notiamo che la condizione (3.25) è vera solo in due casi, o nel caso banale di campo elettrico nullo, oppure se il diadico tra parentesi quadre possiede l'autovalore nullo, ovvero se è nullo il suo determinante:

$$\left| k_0^2 \underline{\underline{\varepsilon}} + (\underline{k} \times \underline{I}) \cdot \underline{\underline{\mu}}^{-1} \cdot (\underline{k} \times \underline{I}) \right| = 0 \quad (3.27)$$

questa è l'equazione di dispersione per il mezzo anisotropo, la cui soluzione fornisce il vettore di propagazione  $\underline{k}$ . Si può dimostrare che nel caso di un mezzo anisotropo generico tale equazione è biquadratica in  $k$ , fornendo quindi due coppie di valori per l'indice di rifrazione del tipo  $\pm n_E$  e  $\pm n_H$  [5]. La conseguenza di tale risultato è la ben nota birifrangenza dei mezzi anisotropi, ovvero il fatto che nei mezzi anisotropi possano propagarsi due onde diverse relative ai due indici di rifrazione differenti del mezzo. Tale trattazione esula dai nostri scopi, noi ci limiteremo a considerare il caso di mezzi anisotropi uniassici affini, in cui quindi esista sempre una trasformazione tale per cui i tensori di permittività e permeabilità possano essere scritti come segue:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_t \underline{I}_t + \varepsilon_c \underline{c}\underline{c} \quad (3.28)$$

$$\underline{\underline{\mu}} = \mu_t \underline{I}_t + \mu_c \underline{c}\underline{c} \quad (3.29)$$

dove si ha:  $\underline{I}_t + \underline{c}\underline{c} = \underline{I}$  e  $\underline{c} \cdot \underline{c} = 1$ . Il vettore  $\underline{c}$  sarà l'asse ottico del mezzo e più avanti vedremo il significato che tale direzione assume.

A questo punto si ricordino le seguenti identità tensoriali [51]:

$$\underline{A} \cdot (\underline{u} \times \underline{I}) = |\underline{A}| [(\underline{u} \cdot \underline{A}^{-1}) \times \underline{I}] \cdot \underline{A}^{-1} \quad (3.30)$$

$$(\underline{u} \times \underline{I}) \cdot (\underline{u} \times \underline{I}) = \underline{v}\underline{v} - (\underline{u} \cdot \underline{v}) \underline{I} \quad (3.31)$$

$$|\alpha \underline{I} + \beta \underline{u}\underline{u} + \gamma \underline{v}\underline{v}| = \alpha [\alpha^2 + \alpha (\beta \underline{u} \cdot \underline{u} + \gamma \underline{v} \cdot \underline{v}) + \beta \gamma (\underline{u} \times \underline{v}) \cdot (\underline{u} \times \underline{v})] \quad (3.32)$$

Utilizzando l'identità (3.30) in (3.27), si può scrivere:

$$\left| k_0^2 \underline{\underline{\varepsilon}} + |\underline{\underline{\mu}}^{-1}| (\underline{k} \times \underline{I}) \cdot \left[ (\underline{k} \cdot \underline{\underline{\mu}}) \times \underline{I} \right] \cdot \underline{\underline{\mu}} \right| = 0 \quad (3.33)$$

sfruttando ora l'identità (3.31), si ottiene:

$$\left| k_0^2 \underline{\underline{\varepsilon}} + |\underline{\underline{\mu}}^{-1}| \left[ (\underline{k} \cdot \underline{\underline{\mu}}) \underline{k} - (\underline{k} \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{k}) \underline{I} \right] \cdot \underline{\underline{\mu}} \right| = 0 \quad (3.34)$$

riordinando i termini e sfruttando le espressioni (3.28) e (3.29), si potrà scrivere:

$$\left| k_0^2 (\varepsilon_t \underline{I}_t + \varepsilon_c \underline{c}\underline{c}) - |\underline{\underline{\mu}}^{-1}| (\underline{k} \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{k}) (\mu_t \underline{I}_t + \mu_c \underline{c}\underline{c}) + |\underline{\underline{\mu}}^{-1}| (\underline{k} \cdot \underline{\underline{\mu}}) (\underline{k} \cdot \underline{\underline{\mu}}) \right| = 0 \quad (3.35)$$

scrivendo ora  $\underline{I}_t = \underline{I} - \underline{c}\underline{c}$  e raccogliendo i termini omologhi, si ottiene:

$$\left| \left[ k_0^2 \varepsilon_t - \mu_t |\underline{\underline{\mu}}^{-1}| (\underline{k} \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{k}) \right] \underline{I} + \left[ k_0^2 (\varepsilon_c - \mu_c) - (\mu_c - \mu_t) |\underline{\underline{\mu}}^{-1}| (\underline{k} \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{k}) \right] \underline{c}\underline{c} + |\underline{\underline{\mu}}^{-1}| (\underline{k} \cdot \underline{\underline{\mu}}) (\underline{k} \cdot \underline{\underline{\mu}}) \right| = 0 \quad (3.36)$$

a questo punto possiamo calcolare il modulo, infatti abbiamo trasformato il diadico sotto il segno di modulo in una forma a cui può essere applicata la relazione (3.32), ottenendo:

$$\alpha \left\{ \alpha^2 + \alpha \left[ k_0^2 (\varepsilon_c - \varepsilon_t) - (\mu_c - \mu_t) |\underline{\mu}^{-1}| \left( \underline{k} \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{k} \right) + |\underline{\mu}^{-1}| \left( \underline{k} \cdot \underline{\mu} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + |\underline{\mu}^{-1}| \left[ k_0^2 (\varepsilon_c - \varepsilon_t) - (\mu_c - \mu_t) |\underline{\mu}^{-1}| \left( \underline{k} \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{k} \right) \right] \left[ \underline{c} \times \left( \underline{k} \cdot \underline{\mu} \right) \right]^2 \right\} = 0 \quad (3.37)$$

dove abbiamo posto:

$$\alpha = k_0^2 \varepsilon_t - \mu_t |\underline{\mu}^{-1}| \left( \underline{k} \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{k} \right) \quad (3.38)$$

Giunti a questo punto, per poter proseguire il ragionamento, si devono esplicitare le componenti del vettore di propagazione. Come detto, non si vuole fare uso di un sistema di riferimento fisso, ma si vogliono usare le direzioni che caratterizzano il fenomeno fisico come direzioni preferenziali. In questo senso, finora l'unica direzione che si è usata esplicitamente è quella del versore  $\underline{c}$ , il quale individua l'asse ottico del mezzo anisotropo. Scomponiamo allora il vettore di propagazione in due componenti, la componente parallela a tale asse e quella ortogonale ad essa:

$$\underline{k} = \underline{k}_\perp + k_\parallel \underline{c} \quad (3.39)$$

dove  $\underline{k}_\perp \cdot \underline{c} = 0$ . In questo modo è possibile esplicitare alcuni dei prodotti presenti nell'equazione (3.37). Ricordando ora la seguente identità vettoriale [51]:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c}) \quad (3.40)$$

Si può facilmente verificare infatti che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\left( \underline{k} \cdot \underline{\mu} \right)^2 = (\mu_t \underline{k}_\perp + \mu_c k_\parallel \underline{c}) \cdot (\mu_t \underline{k}_\perp + \mu_c k_\parallel \underline{c}) = \mu_t^2 k_\perp^2 + \mu_c^2 k_\parallel^2 \quad (3.41)$$

$$\underline{k} \cdot \left( \underline{k} \cdot \underline{\mu} \right) = (\underline{k}_\perp + k_\parallel \underline{c}) \cdot (\mu_t \underline{k}_\perp + \mu_c k_\parallel \underline{c}) = \mu_t k_\perp^2 + \mu_c k_\parallel^2 \quad (3.42)$$

$$\left[ \underline{c} \times \left( \underline{k} \cdot \underline{\mu} \right) \right]^2 = \mu_t^2 (\underline{c} \times \underline{k}_\perp) \cdot (\underline{c} \times \underline{k}_\perp) = \mu_t^2 k_\perp^2 \quad (3.43)$$

e ricordando che risulta:

$$|\underline{\mu}^{-1}| = \frac{1}{\mu_t^2 \mu_c} \quad (3.44)$$

sostituendo le espressioni trovate all'interno dell'equazione di dispersione (3.37), si ottiene:

$$\alpha \left\{ \alpha^2 + \alpha \left[ k_0^2 (\varepsilon_c - \varepsilon_t) - \frac{1}{\mu_t^2 \mu_c} (\mu_c - \mu_t) \left( \mu_t k_\perp^2 + \mu_c k_\parallel^2 \right) + \frac{1}{\mu_t^2 \mu_c} \left( \mu_t^2 k_\perp^2 + \mu_c^2 k_\parallel^2 \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{k_\perp^2}{\mu_c} \left[ k_0^2 (\varepsilon_c - \varepsilon_t) - \frac{1}{\mu_t^2 \mu_c} (\mu_c - \mu_t) \left( \mu_t k_\perp^2 + \mu_c k_\parallel^2 \right) \right] \right\} = 0 \quad (3.45)$$

A questo punto si tratta solo di esprimere l'equazione di dispersione in una forma in cui siano più esplicite le sue soluzioni. Tale equazione sarà senz'altro soddisfatta se risulta  $\alpha = 0$ , il che, ricordando l'espressione (3.38) ed inserendovi le (3.31) e (3.44), si può esplicitare nella seguente equazione:

$$k_0^2 \varepsilon_t - \frac{1}{\mu_t \mu_c} (\mu_t k_\perp^2 + \mu_c k_\parallel^2) = 0 \quad (3.46)$$

che riordinando si può scrivere come segue:

$$\mu_t k_\perp^2 + \mu_c k_\parallel^2 = \mu_c k_t^2 \quad (3.47)$$

dove, in modo naturale, abbiamo definito:  $k_t = k_0 \sqrt{\mu_t \varepsilon_t}$ . Questa rappresenta l'equazione di dispersione del mezzo, nel senso che il vettore di propagazione deve essere una soluzione di tale equazione, se si vuole questa equazione rappresenta il luogo geometrico dei punti che il vettore di propagazione può occupare nello spazio reciproco. Notiamo però che questa equazione non esaurisce tutte le soluzioni della "vera" equazione di dispersione in (3.45), infatti si potrebbe verificare l'annullamento della parentesi graffa. Se tale annullamento avvenisse per valori del vettore di propagazione diversi da quelli previsti dall'equazione (3.47), questo vorrebbe dire che il mezzo anisotropo sarebbe in grado di sostenere la propagazione di due onde piane differenti, aventi due diversi vettori di propagazione. Quanto detto è esattamente quello che si trova ed il fenomeno, ben noto nella letteratura, viene chiamato birifrangenza. Tale fenomeno è anche molto comune da osservare nell'esperienza di tutti i giorni, infatti quando si guarda un oggetto attraverso un qualsiasi cristallo anisotropo (come per esempio un cristallo di calcite) è facile vedere l'oggetto sdoppiarsi in due immagini differenti che si avvicinano o si allontanano a seconda dell'angolazione con cui si osservano; le due immagini sono proprio dovute alle due diverse onde piane che si propagano in due diverse direzioni.

A questo punto non ci rimane che calcolare questa seconda equazione di dispersione manipolando la parentesi graffa in (3.45), supponendo quindi  $\alpha \neq 0$ , potremo scrivere:

$$\begin{aligned} & \alpha \left[ \alpha + \frac{1}{\mu_t^2 \mu_c} (\mu_t^2 k_\perp^2 + \mu_c^2 k_\parallel^2) \right] + \\ & + \left( \alpha + \frac{k_\perp^2}{\mu_c} \right) \left[ k_0^2 (\varepsilon_c - \varepsilon_t) - \frac{1}{\mu_t^2 \mu_c} (\mu_c - \mu_t) (\mu_t k_\perp^2 + \mu_c k_\parallel^2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

esplicitando  $\alpha$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} & \left[ k_0^2 \varepsilon_t - \frac{1}{\mu_t \mu_c} (\mu_t k_\perp^2 + \mu_c k_\parallel^2) \right] \left\{ k_0^2 \varepsilon_t - \frac{1}{\mu_t \mu_c} (\mu_t k_\perp^2 + \mu_c k_\parallel^2) + \frac{1}{\mu_t^2 \mu_c} (\mu_t^2 k_\perp^2 + \mu_c^2 k_\parallel^2) \right\} + \\ & + \left[ k_0^2 \varepsilon_t - \frac{1}{\mu_t \mu_c} (\mu_t k_\perp^2 + \mu_c k_\parallel^2) + \frac{k_\perp^2}{\mu_c} \right] \left[ k_0^2 (\varepsilon_c - \varepsilon_t) - \frac{1}{\mu_t^2 \mu_c} (\mu_c - \mu_t) (\mu_t k_\perp^2 + \mu_c k_\parallel^2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

riordinando:

$$\begin{aligned} & \left[ \mu_c k_t^2 - (\mu_t k_\perp^2 + \mu_c k_\parallel^2) \right] \left( \mu_t \mu_c k_t^2 - \mu_t \mu_c k_\parallel^2 + \mu_c^2 k_\parallel^2 \right) + \\ & + \left( \mu_c k_t^2 - \mu_c k_\parallel^2 \right) \left[ \mu_t^2 \mu_c k_0^2 (\varepsilon_c - \varepsilon_t) - (\mu_c - \mu_t) (\mu_t k_\perp^2 + \mu_c k_\parallel^2) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

sviluppando i prodotti, si ottiene:

$$\begin{aligned} & \mu_c^2 \mu_t k_t^4 - \mu_t \mu_c^2 k_t^2 k_\parallel^2 + \mu_c^3 k_t^2 k_\parallel^2 - \mu_t^2 \mu_c k_t^2 k_\perp^2 + \mu_t^2 \mu_c k_\perp^2 k_\parallel^2 - \mu_t \mu_c^2 k_\perp^2 k_\parallel^2 - \mu_c^2 \mu_t k_t^2 k_\parallel^2 + \\ & + \mu_t \mu_c^2 k_\parallel^4 - \mu_c^3 k_\parallel^4 + \mu_t^2 \mu_c^2 k_t^2 k_0^2 \varepsilon_c - \mu_c^2 \mu_t k_t^4 - \mu_c^2 \mu_t k_t^2 k_\perp^2 + \mu_c \mu_t^2 k_t^2 k_\perp^2 - \mu_c^3 k_t^2 k_\parallel^2 + \\ & + \mu_c^2 \mu_t k_t^2 k_\parallel^2 - \mu_c^2 \mu_t^2 k_\parallel^2 k_0^2 \varepsilon_c + \mu_t \mu_c^2 k_\parallel^2 k_t^2 + \mu_c^2 \mu_t k_\parallel^2 k_\perp^2 - \mu_c \mu_t^2 k_\parallel^2 k_\perp^2 + \mu_c^3 k_\parallel^4 - \mu_c^2 \mu_t k_\parallel^4 = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

procedendo alle non poche semplificazioni, si può scrivere:

$$\mu_t^2 \mu_c^2 k_t^2 k_0^2 \varepsilon_c - \mu_c^2 \mu_t k_t^2 k_\perp^2 - \mu_c^2 \mu_t^2 k_\parallel^2 k_0^2 \varepsilon_c = 0 \quad (3.52)$$

dividendo per  $\mu_t \mu_c^2$  e per  $k_t^2$  si ottiene:

$$\mu_t k_0^2 \varepsilon_c - k_\perp^2 - \frac{k_\parallel^2 \varepsilon_c}{\varepsilon_t} = 0 \quad (3.53)$$

la quale, moltiplicando per  $\varepsilon_t$  e riordinando, fornisce:

$$\varepsilon_t k_\perp^2 + \varepsilon_c k_\parallel^2 = \varepsilon_c k_t^2 \quad (3.54)$$

la quale è l'equazione di dispersione duale della (3.47). Siamo ora in grado di definire rigorosamente il comportamento del vettore di propagazione che si propaga nel mezzo anisotropo uniassico.

Si considerino le equazioni di dispersione (3.47) e (3.54), scritte in forma vettoriale:

$$\left( \underline{k} \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{k} - \mu_c k_t^2 \right) \left( \underline{k} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{k} - \varepsilon_c k_t^2 \right) = 0 \quad (3.55)$$

o, separando i due termini dell'equazione:

$$\underline{k}_E \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{k}_E = \mu_c k_t^2 \quad (3.56)$$

$$\underline{k}_H \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{k}_H = \varepsilon_c k_t^2 \quad (3.57)$$

dove si sono posti i pedici E e H per distinguere tra le soluzioni delle due equazioni. La scelta di questi pedici sarà chiarita in seguito.

Le equazioni di dispersione scritte in questa forma sono molto significative. Prima di parlare più diffusamente del problema della birifrangenza, si considerino le equazioni di dispersione in alcuni casi particolari. Vediamo, per esempio, che nel caso in cui il mezzo sia isotropo affine, le due equazioni vanno a coincidere, questo ci dice che un mezzo isotropo affine, pur essendo in generale

anisotropo<sup>4</sup>, non presenta il fenomeno della birifrangenza. Questo ci dice che il fenomeno della birifrangenza è indipendente da eventuali trasformazioni affini, ovvero che se un mezzo presenta la birifrangenza, tutti i mezzi che si possono ottenere da questo tramite trasformazioni affini dovranno presentarla e viceversa. Si considerino poi le equazioni (3.56) e (3.57) nel caso di un mezzo isotropo, nel quale i tensori di permittività e permeabilità siano multipli del tensore identità (tensore rappresentato da una matrice identità). Vediamo che in questo caso non solo le due equazioni vanno a coincidere, ma assumono un aspetto del tutto familiare. Infine, come ultimo caso particolare, vogliamo considerare il caso in cui il mezzo sia solo elettricamente anisotropo e magneticamente isotropo<sup>5</sup>. In questo caso, l'equazione (3.56) diventa più semplice, assomigliando all'equazione di dispersione di un mezzo isotropo. L'equazione (3.57) invece rimane identica. L'onda relativa all'equazione (3.56) viene detta onda ordinaria, proprio perché, pur propagandosi in un mezzo anisotropo, si comporta come un'onda piana in un mezzo isotropo. L'onda associata all'equazione (3.57), invece, viene detta onda straordinaria. Nel caso in cui il mezzo sia anisotropo sia elettricamente che magneticamente, entrambe le onde sono, per così dire, straordinarie, nel senso che se si studiasse un mezzo solo elettricamente anisotropo e poi uno solo magneticamente anisotropo, le due onde straordinarie di questi due mezzi avrebbero le stesse caratteristiche delle onde straordinarie che stiamo andando a studiare.

Prima di ricavare le polarizzazioni di queste onde, si consideri il caso particolare in cui il vettore di propagazione dell'onda sia parallelo all'asse ottico, ovvero:

$$\underline{k} = k\hat{c} \quad (3.58)$$

dove si sta considerando un'onda piana uniforme. In questo caso si può vedere facilmente che le equazioni (3.56) e (3.57) vanno nuovamente a coincidere e che si trova un unico valore per l'ampiezza del vettore di propagazione,  $k = k_t$ . Ebbene questa è esattamente la definizione di asse ottico, ovvero l'asse ottico è quella direzione di un mezzo anisotropo in cui non si verifica il fenomeno della birifrangenza.

Il vettore di propagazione in un mezzo anisotropo con perdite, come abbiamo detto, sarà in generale un vettore complesso. In analogia con quanto fatto nei capitoli precedenti, potremo quindi scrivere tale vettore come il prodotto di un'ampiezza complessa per un vettore unitario complesso:

$$\underline{k}_{E/H} = k_{E/H} \underline{k}_{0E/H} \quad (3.59)$$

L'ampiezza complessa può essere ottenuta direttamente dalle equazioni di dispersione, infatti inserendo l'espressione (3.59) dentro le equazioni (3.56) e (3.57),

<sup>4</sup>Ricordiamo che un mezzo anisotropo è detto isotropo affine se i suoi tensori di permittività e permeabilità sono multipli di uno stesso tensore.

<sup>5</sup>Questo è il tipico caso dei cristalli, ma considerazioni analoghe a quelle che seguono possono essere tratte nel caso duale, ovvero di un mezzo che sia elettricamente isotropo e magneticamente anisotropo, come per esempio la ferrite magnetizzata.

si può scrivere:

$$k_E = \sqrt{\frac{\mu_c k_t^2}{\underline{k}_{0E} \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{k}_{0E}}} \quad (3.60)$$

$$k_H = \sqrt{\frac{\varepsilon_c k_t^2}{\underline{k}_{0H} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{k}_{0H}}} \quad (3.61)$$

ovviamente le direzioni  $\underline{k}_{0E/H}$  dipenderanno dalle condizioni di eccitazione. In analogia con quanto si faceva nel caso dei mezzi isotropi, si possono legare le ampiezze in (3.62) e (3.63) all'indice di rifrazione, potremo porre quindi:

$$k_E = n_E k_0 \quad (3.62)$$

$$k_H = n_H k_0 \quad (3.63)$$

Vediamo quindi che l'indice di rifrazione in un mezzo anisotropo non è definito univocamente, ma si hanno due indici di rifrazione. Questo è uno dei modi di giustificare la birifrangenza che prende appunto il nome da questo fatto.

Prima di concludere il paragrafo vogliamo accennare ad un concetto molto importante nello studio delle onde piane in mezzi anisotropi, ovvero alla superficie del vettore d'onda. Questa superficie si definisce come il luogo geometrico dei punti tracciati da tutti i possibili vettori d'onda che siano soluzione dell'equazione di dispersione. Riscriviamo a questo proposito le equazioni (3.56) e (3.57) come segue:

$$\frac{(\underline{k}_E \times \underline{c})^2}{f_\mu k_t^2} + \frac{(\underline{k}_E \cdot \underline{c})^2}{k_t^2} = 1 \quad (3.64)$$

$$\frac{(\underline{k}_H \times \underline{c})^2}{f_\varepsilon k_t^2} + \frac{(\underline{k}_H \cdot \underline{c})^2}{k_t^2} = 1 \quad (3.65)$$

dove  $f_\mu = \mu_c/\mu_t$  e  $f_\varepsilon = \varepsilon_c/\varepsilon_t$ <sup>6</sup>. Da queste espressioni è chiaro che, per entrambe le onde, la superficie del vettore d'onda è un ellissoide, o meglio uno sferoide, avente sezione circolare se tagliato ortogonalmente all'asse ottico del mezzo. Vediamo inoltre che gli sferoidi delle due onde hanno lo stesso asse lungo l'asse ottico, ovvero tagliando gli sferoidi con un qualsiasi piano contenente l'asse ottico, si ottengono due ellissi aventi l'asse parallelo all'asse ottico in comune, e l'altro asse diverso, gli sferoidi si ottengono ruotando tali ellissi attorno all'asse ottico. Questo vuol dire che i due sferoidi si toccheranno sui vertici lungo tale asse, il che altro non è che la rappresentazione grafica del fatto che lungo l'asse ottico i due indici di rifrazione del mezzo coincidono. I due sferoidi saranno contenuti l'uno nell'altro. Per sapere quale dei due sferoidi contenga l'altro è

<sup>6</sup>Questi parametri sono legati alla forma dello sferoide, infatti se  $f > 1$ , vuol dire che l'ellissoide ha come assi maggiori quelli trasversi all'asse ottico, mentre se  $f < 1$  l'asse maggiore è proprio l'asse ottico. Tale parametro è inoltre legato all'ellitticità della sezione ellittica, infatti si ha  $e = \sqrt{1-f}$  o  $e = \sqrt{1-1/f}$ , a seconda che  $f$  sia inferiore o superiore ad 1.

sufficiente andare a vedere se sia  $f_\varepsilon > f_\mu$  o viceversa. Ovviamente, nel caso  $f_\varepsilon = f_\mu$  i due sferoidi coincidono. Questo è il caso, infatti, in cui il mezzo è isotropo affine, caso in cui, quindi, non si presenta, come detto di precedenza, il fenomeno della birifrangenza. Infine, notiamo che tale parametro è di grande interesse anche nelle applicazioni, infatti nei casi in cui le proprietà elettromagnetiche assiali di un materiale uniassico vanno massimizzate o minimizzate, si può far vedere che ciò che va realmente massimizzato o minimizzato è il rapporto tra tali parametri ed i loro omologhi trasversali [59].

### 3.3 Polarizzazione e Energia

Cercheremo ora di capire come si dispongono i tre vettori dell'onda, campo elettrico, campo magnetico e vettore di propagazione, nei due casi in cui quest'ultimo sia soluzione dell'equazione (3.56) o (3.57). Per fare ciò consideriamo nuovamente l'espressione (3.25) e scriviamola in forma compatta come segue:

$$\underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{E}_0 = 0 \quad (3.66)$$

dove il tensore  $\underline{\underline{\Theta}}$  è la parentesi graffa dell'espressione (3.25). Di tale tensore abbiamo dimostrato la singularità, infatti perché l'equazione non avesse solo la soluzione banale, abbiamo imposto che il suo determinante fosse nullo, ovvero che:

$$\underline{\underline{\Theta}} \cdot \underline{\underline{\Theta}}^{(a)} = |\underline{\underline{\Theta}}| \underline{I} = 0 \quad (3.67)$$

dove con l'apice  $(a)$  indichiamo il tensore aggiunto. Moltiplicando scalarmente a destra il membro di sinistra dell'equazione (3.67) per un generico vettore  $\underline{u}$ , otteniamo:

$$\underline{\underline{\Theta}} \cdot \left( \underline{\underline{\Theta}}^{(a)} \cdot \underline{u} \right) = 0 \quad (3.68)$$

Confrontando le espressioni (3.66) e (3.68), troviamo che il vettore di campo elettrico è proporzionale al vettore tra parentesi della (3.68), ma data l'arbitrarietà del vettore  $\underline{u}$ , potremo scrivere:

$$\underline{E}_0 = \underline{\underline{\Theta}}^{(a)} \cdot \underline{u} \quad (3.69)$$

quindi per trovare la generica direzione del campo elettrico è sufficiente calcolare l'aggiunto del tensore  $\underline{\underline{\Theta}}$  e moltiplicarlo per un (conveniente) vettore generico. Per calcolare l'aggiunto del tensore, si consideri la seguente espressione [51]:

$$\begin{aligned} (\alpha \underline{I} + \beta \underline{u}\underline{u} + \gamma \underline{v}\underline{v})^{(a)} = & \alpha [(\alpha + \beta \underline{u} \cdot \underline{u} + \gamma \underline{v} \cdot \underline{v}) \underline{I} - \beta \underline{u}\underline{u} - \gamma \underline{v}\underline{v}] + \\ & + \beta \gamma (\underline{u} \times \underline{v}) (\underline{u} \times \underline{v}) \end{aligned} \quad (3.70)$$

Considerando l'espressione del tensore  $\underline{\Theta}$  che si era ottenuta in (3.36), potremo scrivere:

$$\begin{aligned} \underline{\Theta}^{(a)} = & \alpha \left\{ \left[ \alpha + \beta + |\underline{\mu}^{-1}| \left( \underline{k} \cdot \underline{\mu} \right)^2 \right] \underline{I} - \beta \underline{c} \underline{c} - |\underline{\mu}^{-1}| \left( \underline{k} \cdot \underline{\mu} \right) \left( \underline{k} \cdot \underline{\mu} \right) \right\} + \\ & + \beta |\underline{\mu}^{-1}| \left[ \underline{c} \times \left( \underline{k} \cdot \underline{\mu} \right) \right] \left[ \underline{c} \times \left( \underline{k} \cdot \underline{\mu} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.71)$$

dove, per convenienza, abbiamo posto:

$$\beta = \left[ k_0^2 (\varepsilon_c - \varepsilon_t) - (\mu_c - \mu_t) |\underline{\mu}^{-1}| \left( \underline{k} \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{k} \right) \right] \quad (3.72)$$

A questo punto supponiamo che il vettore di propagazione sia soluzione dell'equazione di dispersione (3.56), e chiamandolo quindi  $\underline{k}_E$ . Ricordiamo che l'equazione (3.56) era equivalente all'aver posto  $\alpha = 0$ , quindi la direzione del campo elettrico in questo caso sarà:

$$\underline{E}_{E0} = \left[ \underline{c} \times \left( \underline{k}_E \cdot \underline{\mu} \right) \right] \left[ \underline{c} \times \left( \underline{k}_E \cdot \underline{\mu} \right) \right] \cdot \underline{u} \quad (3.73)$$

dove si è inclusa l'ampiezza  $\beta |\underline{\mu}^{-1}|$ , all'interno del vettore arbitrario  $\underline{u}$ .

L'equazione (3.73) indica in modo chiarissimo qual'è la direzione in cui è obbligato a giacere il campo elettrico, infatti potremo scrivere:

$$\underline{E}_0 = E_0 \underline{e}_E \quad (3.74)$$

dove  $E_0$  è un'ampiezza complessa e  $\underline{e}_E$  è un vettore complesso che può essere scritto come segue:

$$\underline{e}_E = \underline{c} \times \left( \underline{k}_E \cdot \underline{\mu} \right) \quad (3.75)$$

o, ridefinendo la costante  $E_0$ , notando che  $\underline{k}_E \cdot \underline{\mu} = \mu_t \underline{k}_{E\perp} + \mu_c \underline{k}_{E\parallel} \underline{c}$ , si ottiene facilmente che:

$$\underline{e}_E = \underline{k}_E \times \underline{c} \quad (3.76)$$

vediamo che, individuato il piano contenente i vettori  $\underline{k}_E$  e  $\underline{c}$ , il campo elettrico risulta sempre ortogonale a questo piano, ovvero, vettore di propagazione, asse ottico e campo elettrico formano una terna trirettangola destra. Chiameremo quest'onda TE, o semplicemente E, non essendoci componenti del campo elettrico sul piano contenente il vettore di propagazione e l'asse ottico del mezzo.

E' opportuno a questo punto fare una precisazione. Infatti, nel caso generale di un mezzo anisotropo con perdite, non è detto che esista un piano che contenga il vettore complesso  $\underline{k}_E$  e contemporaneamente il versore  $\underline{c}$ ; questo perché un vettore complesso può essere sempre visto come sovrapposizione di due vettori reali, e dati tre vettori generici (i due rappresentanti il vettore complesso, più il versore) non è detto che esista un piano che li contenga tutti e tre. Si deve anche notare però che l'espressione (3.76) continua ad essere valida, semplicemente perde di senso la notazione di onda trasversa elettromagnetica. In realtà

questo problema si ha anche nel caso di mezzi isotropi con perdite e la classificazione delle diverse polarizzazione di un'onda non uniforme in questi mezzi è un compito non banale, cosa che viene ampiamente stabilita in [11].

Abbiamo così trovato le caratteristiche di una delle due onde piane che si possono propagare nel mezzo anisotropo. Per trovare un risultato analogo anche per l'altra onda non è conveniente partire dall'espressione (3.71), in questo caso infatti il vettore di campo elettrico si troverà sul piano contenente il vettore di propagazione e l'asse ottico, quindi l'espressione che troveremo per il suo vettore unitario sarebbe tutt'altro che semplice. Conviene invece riconsiderare l'espressione (3.26). Partendo da tale espressione e ripercorrendo passi del tutto analoghi a quelli svolti precedentemente, si può giungere ad un'espressione del tutto analoga a quella in (3.36), ma in cui il parametro  $\alpha$  si scriverebbe come segue:

$$\alpha_H = k_0^2 \mu_t - \varepsilon_t |\underline{\underline{\varepsilon}}^{-1}| (\underline{k} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{k}) \quad (3.77)$$

imponendo la condizione  $\alpha_H = 0$  si vede facilmente che si ritrova l'equazione di dispersione (3.57). Questo ci suggerisce che anche nel caso in cui il vettore di propagazione sia soluzione dell'equazione (3.57), si potrà scrivere una relazione analoga alla (3.73), ma questa volta varrà per il campo magnetico, in quanto siamo partiti dalla condizione (3.26). Potremo quindi scrivere:

$$\underline{H}_H = H_0 \underline{h}_H \quad (3.78)$$

dove di nuovo  $\underline{h}_H$  è un vettore complesso che assumerà la seguente forma:

$$\underline{h}_H = \underline{k}_H \times \underline{c} \quad (3.79)$$

abbiamo ottenuto tale espressione sfruttando il principio di dualità.

A questo punto possiamo ricavare gli altri due vettori per descrivere completamente il campo elettromagnetico delle due onde, ovvero i vettori  $\underline{h}_E$  e  $\underline{e}_H$ . Per trovarne l'espressione è sufficiente inserire i due vettori (3.76) e (3.79) all'interno delle equazioni di Maxwell (3.24), ottenendo:

$$\underline{H}_E = \frac{1}{\omega \mu_0} \underline{\mu}^{-1} \cdot \underline{k}_E \times \underline{E}_E = E_0 \underline{h}_E e^{i \underline{k}_E \cdot \underline{r}} \quad (3.80)$$

$$\underline{E}_H = - \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \underline{\underline{\varepsilon}}^{-1} \cdot \underline{k}_H \times \underline{H}_H = H_0 \underline{e}_H e^{i \underline{k}_E \cdot \underline{r}} \quad (3.81)$$

dove:

$$\underline{h}_E = \frac{1}{\omega \mu_0} \underline{\mu}^{-1} \cdot \underline{k}_E \times \underline{e}_E \quad (3.82)$$

$$\underline{e}_H = - \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \underline{\underline{\varepsilon}}^{-1} \cdot \underline{k}_H \times \underline{h}_H \quad (3.83)$$

Si può ora dimostrare facilmente che:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mu}}^{-1} \cdot [\underline{k}_E \times (\underline{k}_E \times \underline{c})] &= \underline{\underline{\mu}}^{-1} \cdot [\underline{k}_E (\underline{k}_E \cdot \underline{c}) - \underline{c} (\underline{k}_E \cdot \underline{k}_E)] = \underline{\underline{\mu}}^{-1} \cdot (k_{E\parallel} \underline{k}_E - k_E^2 \underline{c}) = \\ &= -\underline{\underline{\mu}}^{-1} \cdot (k_{E\perp}^2 \underline{c} - k_{E\parallel} \underline{k}_{E\perp}) = -\frac{1}{\mu_c} k_{E\perp}^2 \underline{c} - \frac{1}{\mu_t} k_{E\parallel} \underline{k}_{E\perp} = \\ &= -\frac{1}{\mu_t} \left[ (k_t^2 - k_{E\parallel}^2) \underline{c} - k_{E\parallel} (\underline{k}_E - k_{E\parallel} \underline{c}) \right] = -\frac{1}{\mu_t} [k_t^2 \underline{c} - (\underline{c} \cdot \underline{k}_E) \underline{k}_E] \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che il vettore  $\underline{k}_E$  rispetti l'espressione (3.56). Valendo inoltre una relazione analoga nel caso TM, si potrà scrivere:

$$\underline{h}_E = -\frac{1}{\omega \mu_0 \mu_t} [k_t^2 \underline{c} - (\underline{c} \cdot \underline{k}_E) \underline{k}_E] \quad (3.84)$$

$$\underline{e}_H = \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_t} [k_t^2 \underline{c} - (\underline{c} \cdot \underline{k}_H) \underline{k}_H] \quad (3.85)$$

Ricapitolando, il campo elettrico e magnetico nelle due polarizzazioni potranno essere scritti come segue:

$$\underline{E}_E = E_0 \underline{e}_E \quad \underline{H}_E = E_0 \underline{h}_E \quad (3.86)$$

$$\underline{E}_H = H_0 \underline{e}_H \quad \underline{H}_H = H_0 \underline{h}_H \quad (3.87)$$

dove i vettori di polarizzazione dipenderanno solo dal vettore di propagazione e dalle proprietà del mezzo:

$$\underline{e}_E = \underline{k}_E \times \underline{c} \quad \underline{h}_E = -\frac{1}{\omega \mu_0 \mu_t} [k_t^2 \underline{c} - (\underline{c} \cdot \underline{k}_E) \underline{k}_E] \quad (3.88)$$

$$\underline{e}_H = \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_t} [k_t^2 \underline{c} - (\underline{c} \cdot \underline{k}_H) \underline{k}_H] \quad \underline{h}_H = \underline{k}_H \times \underline{c} \quad (3.89)$$

Tali espressioni sono di estremo interesse, infatti abbiamo ridotto enormemente i gradi di libertà delle onde piane. Conoscendo i moduli dei vettori di propagazione delle due onde, grazie alle relazioni (3.62) e (3.63), le uniche grandezze incognite risultano le direzioni di propagazione delle due onde, ed in caso di onde non uniformi le direzioni dei vettori di attenuazione, ovvero le direzioni ortogonali ai piani equifase ed equiampiezza per entrambe le onde, e le due quantità complesse  $E_0$  ed  $H_0$ . Abbiamo quindi ridotto il numero di gradi di libertà per ognuna delle due onde a cinque quantità reali<sup>7</sup>.

Prima di andare oltre si può notare che le espressioni (3.88) e (3.89), risultano molto compatte e perfettamente simmetriche rispetto alle due polarizzazioni, però non sono normalizzate dal punto di vista dimensionale, ovvero lasciando i vettori di polarizzazione definiti in questo modo, né l'ampiezza  $E_0$  avrà le dimensioni di un campo elettrico, né l'ampiezza  $H_0$  quelle di un campo magnetico. Ovviamente il problema si risolve facilmente, potendo normalizzare tutto

<sup>7</sup>Cinque perché: due sono le parti reale ed immaginaria di  $E_0$  o  $H_0$ , una è l'angolo reale che definisce il piano su cui giace il vettore complesso unitario  $\underline{k}_0$ , ed altre due sono gli angoli che definiscono le direzioni delle parti reale ed immaginario del vettore su questo piano.

rispetto al numero d'onda del vuoto, ottenendo:

$$\underline{e}_E = \underline{n}_E \times \underline{c} \qquad \underline{h}_E = \frac{1}{\zeta_t} [(\underline{c} \cdot \underline{n}_E) \underline{n}_E - n_t^2 \underline{c}] \quad (3.90)$$

$$\underline{e}_H = -\zeta_t [(\underline{c} \cdot \underline{n}_H) \underline{n}_H - n_t^2 \underline{c}] \qquad \underline{h}_H = \underline{n}_H \times \underline{c} \quad (3.91)$$

dove con i vettori  $\underline{n}_s$  ( $s = E, H$ ), si indicano i vettori di propagazione normalizzati rispetto al numero d'onda del vuoto e con  $n_t$  si indica il numero d'onda trasverso  $k_t$  normalizzato rispetto al numero d'onda del vuoto. Si noti che a questo punto i vettori  $\underline{e}_E$  e  $\underline{h}_H$  sono adimensionali, mentre i vettori  $\underline{e}_H$  e  $\underline{h}_E$  hanno le dimensioni di un'impedenza e un'ammettenza, rispettivamente. Un'altra possibilità è quella di esprimere entrambe le onde in funzione dell'ampiezza di campo elettrico, sarà sufficiente in questo caso ridefinire l'ampiezza  $H_0$ , moltiplicandola per l'impedenza trasversa, ottenendo:

$$\underline{E}_E = E_{E0} \underline{e}_E \qquad \underline{H}_E = E_{E0} \underline{h}_E \quad (3.92)$$

$$\underline{E}_H = E_{H0} \underline{e}_H \qquad \underline{H}_H = E_{H0} \underline{h}_H \quad (3.93)$$

dove:

$$\underline{e}_E = \underline{n}_E \times \underline{c} \qquad \underline{h}_E = -\frac{1}{\zeta_t} [n_t^2 \underline{c} - (\underline{c} \cdot \underline{n}_E) \underline{n}_E] \quad (3.94)$$

$$\underline{e}_H = n_t^2 \underline{c} - (\underline{c} \cdot \underline{n}_H) \underline{n}_H \qquad \underline{h}_H = \frac{1}{\zeta_t} \underline{n}_H \times \underline{c} \quad (3.95)$$

in questo modo i vettori  $\underline{e}_E$  e  $\underline{e}_H$  sono adimensionali, mentre i vettori  $\underline{h}_E$  e  $\underline{h}_H$  hanno le dimensioni di un'ammettenza. Nei prossimi paragrafi si discuterà la convenienza nell'usare l'una o l'altra espressione.

Si sfrutteranno ora le relazioni appena ricavate per capire la direzione di propagazione dell'energia. Il vettore di Poynting può essere scritto come di consueto (si considererà solo la polarizzazione E, ricavando i risultati per la polarizzazione H grazie al principio di dualità):

$$\underline{\Pi}_E = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{1}{2} |E_{E0}|^2 \underline{e}_E \times \underline{h}_E \quad (3.96)$$

inserendo le espressioni (3.94), si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{\Pi}_E &= \frac{1}{2} \frac{|E_{E0}|^2}{\zeta_t} [n_t^2 \underline{c} - (\underline{c} \cdot \underline{n}_E) \underline{n}_E] \times (\underline{n}_E \times \underline{c}) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|E_{E0}|^2}{\zeta_t} \{n_t^2 [(\underline{n}_E \cdot \underline{c}) - \underline{n}_E] - (\underline{n}_E \cdot \underline{c}) [n_t^2 \underline{c} - (\underline{n}_E \cdot \underline{c}) \underline{n}_E]\} \end{aligned} \quad (3.97)$$

Sfruttando l'equazione di dispersione ed il principio di dualità, si ottiene:

$$\underline{\Pi}_E = \frac{1}{2} \frac{|E_{E0}|^2}{\zeta_t} \frac{(\underline{n}_E \times \underline{c})^2}{\mu_c} (\underline{\mu} \cdot \underline{n}_E) \quad (3.98)$$

$$\underline{\Pi}_H = \frac{1}{2} \frac{|E_{H0}|^2}{\zeta_t} \frac{(\underline{n}_H \times \underline{c})^2}{\varepsilon_c} (\underline{\varepsilon} \cdot \underline{n}_H) \quad (3.99)$$

Vediamo quindi che in un mezzo anisotropo, la direzione di propagazione dell'energia non coincide con la direzione del vettore di propagazione. Questo fatto porta ad alcuni fenomeni controintuitivi, come sarà mostrato nel seguito.

## Capitolo 4

# Interfaccia piana tra mezzi anisotropi

Ci si propone in questo capitolo di studiare la riflessione e la trasmissione di un'onda piana e uniforme proveniente da un mezzo isotropo, detto mezzo 1, all'interfaccia piana con un mezzo anisotropo del tipo descritto nei paragrafi precedenti. Si studieranno le relazioni di continuità per ottenere i vettori di propagazione delle onde trasmesse e si ricaveranno coefficienti di riflessione e trasmissione. Data la birifrangenza del mezzo anisotropo a fronte di un'onda piana incidente con una certa polarizzazione, si avranno un'onda riflessa e due onde trasmesse, quindi i coefficienti di trasmissione andranno espressi sotto forma di matrice

### 4.1 Determinazione dei vettori di propagazione

Si consideri l'interfaccia tra un mezzo isotropo di proprietà elettromagnetiche  $\varepsilon_1$  e  $\mu_1$ , per ora considerato privo di perdite, e un mezzo anisotropo. Al contrario del caso di due mezzi isotropi, in cui si avevano tre onde piane, l'onda incidente, riflessa e trasmessa, in questo caso si hanno quattro onde piane, l'onda incidente e riflessa e due onde trasmesse. Si dovranno quindi definire i seguenti vettori d'onda:  $\underline{k}_i$ ,  $\underline{k}_r$ ,  $\underline{k}_E$  e  $\underline{k}_H$ , dove è evidente il significato dei simboli usati.

Il generico vettore di propagazione potrà essere scritto esplicitando la sua componente tangenziale all'interfaccia e la sua componente ortogonale a essa. Ovviamente la prima delle due sarà comune a tutti e quattro i vettori. Prima di esprimere i diversi vettori che caratterizzano il problema, si definirà con cura il sistema di riferimento. Si chiami  $\underline{z}_0$  il versore ortogonale all'interfaccia orientato verso il mezzo anisotropo. Sia  $\underline{k}_\tau$  la componente del vettore di propagazione incidente tangenziale all'interfaccia. Si definisca  $\underline{\tau}$  come il versore unitario parallelo e concorde con  $\underline{k}_\tau$ . Si definisca il versore unitario  $\underline{\nu} = \underline{\tau} \times \underline{z}_0$ , esso è il

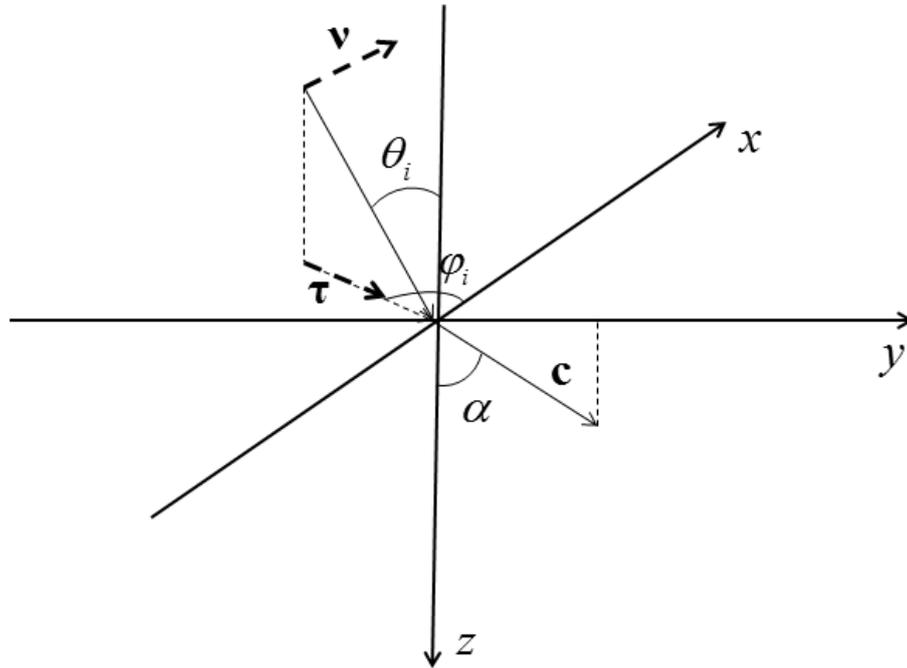


Figura 4.1: Interfaccia tra un mezzo isotropo ( $z > 0$ ) e uno anisotropo uniassico ( $z < 0$ ).

versore ortogonale al piano di incidenza. Si veda Figura 4.1. Con queste posizioni, si potrà scrivere il vettore di propagazione per la generica onda come segue:

$$\underline{k}_j = \underline{k}_\tau + k_{jz}z_0 \quad \text{with} \quad j = i, r, E, H \quad (4.1)$$

qui si vede che la componente tangenziale all'interfaccia del vettore di propagazione risulta comune alle quattro onde, mentre la componente ortogonale all'interfaccia,  $k_{zj}$  dipende da quale onda si sta considerando. In particolare, si può vedere facilmente che, essendo l'onda incidente e l'onda riflessa nello stesso mezzo isotropo e avendo in comune la componente tangenziale del vettore di propagazione, le rispettive componenti ortogonali dovranno essere uguali in modulo e quindi  $k_{iz} = -k_{rz}$ .

Le uniche incognite a questo punto rimangono le componenti ortogonali all'interfaccia di vettori di propagazione delle due onde trasmesse. Per determinare invece le componenti ortogonali dei vettori di propagazione delle onde trasmesse, si deve ricorrere alle equazioni di dispersione (3.56) e (3.57),

ottenendo le seguenti due equazioni quadratiche<sup>1</sup>:

$$(\mathbf{k}_\tau + k_{Ez}\mathbf{z}_0) \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot (\mathbf{k}_\tau + k_{Ez}\mathbf{z}_0) = \varepsilon_c k_t^2 (\mathbf{k}_\tau + k_{Hz}\mathbf{z}_0) \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot (\mathbf{k}_\tau + k_{Hz}\mathbf{z}_0) = \varepsilon_c k_t^2 \quad (4.2)$$

vista la completa dualità tra le due espressioni, si è scelto di procedere con la sola polarizzazione  $E$ , potendo sempre passare alla polarizzazione  $H$  attraverso semplici ragionamenti. Si sviluppi il prodotto in (4.2):

$$k_{Ez}^2 (\mathbf{z}_0 \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \mathbf{z}_0) + 2k_{Ez} (\mathbf{k}_\tau \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \mathbf{z}_0) + (\mathbf{k}_\tau \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \mathbf{k}_\tau) - \mu_c k_t^2 = 0 \quad (4.3)$$

dove si è sfruttato il fatto che il diadico  $\underline{\underline{\mu}}$  è simmetrico. Vediamo che si è ottenuta un'equazione quadratica per  $k_{Ez}$ , le cui soluzioni sono le seguenti:

$$k_{zE\pm} = \frac{-\mathbf{k}_\tau \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \mathbf{z}_0 \pm \Delta}{\mathbf{z}_0 \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \mathbf{z}_0} \quad (4.4)$$

con:

$$\Delta = \sqrt{(\mathbf{k}_\tau \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \mathbf{z}_0)^2 - (\mathbf{z}_0 \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \mathbf{z}_0) (\mathbf{k}_\tau \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \mathbf{k}_\tau - \mu_c k_t^2)} \quad (4.5)$$

ovviamente solo una delle due soluzioni di tale equazione sarà accettabile. Per capire quale delle due soluzioni sia quella corretta, si deve imporre che il vettore di Poynting abbia una direzione di propagazione concorde con il versore di  $\mathbf{z}_0$ , ovvero che sia  $\underline{\underline{\mu}}_E \cdot \mathbf{z}_0 > 0$ , il che dall'equazione (3.98) è equivalente a imporre che sia  $\mathbf{k}_E \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \mathbf{z}_0 > 0$ , ovvero che sia:

$$k_{Ez} > -\frac{\mathbf{k}_\tau \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \mathbf{z}_0}{\mathbf{z}_0 \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \mathbf{z}_0} \quad (4.6)$$

la quale implica che la soluzione corretta sia quella relativa al segno positivo. Potremo quindi scrivere le componenti ortogonali dei vettori di propagazione trasmessi, come segue:

$$k_{zE} = \frac{-\mathbf{k}_\tau \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \mathbf{z}_0 + \Delta_E}{\mathbf{z}_0 \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \mathbf{z}_0} \quad (4.7)$$

$$k_{zH} = \frac{-\mathbf{k}_\tau \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \mathbf{z}_0 + \Delta_H}{\mathbf{z}_0 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \mathbf{z}_0} \quad (4.8)$$

<sup>1</sup>E' bene notare che il fatto di avere due equazioni di dispersione distinte è caratteristico di un mezzo uniassico. Per un mezzo anisotropo generico non è detto che l'equazione di dispersione possa essere fattorizzata in due equazioni quadratiche, in questo caso la determinazione dei vettori di propagazione trasmessi si ottiene con una equazione di quarto grado, detta equazione di Booker. Tale equazione diventa biquadratica solo in alcuni casi particolari.

dove definiamo le seguenti quantità:

$$\Delta_E = \sqrt{\left(\underline{k}_\tau \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{z}_0\right)^2 - \left(\underline{z}_0 \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{z}_0\right) \left(\underline{k}_\tau \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{k}_\tau - \mu_c k_t^2\right)} \quad (4.9)$$

$$\Delta_H = \sqrt{\left(\underline{k}_\tau \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{z}_0\right)^2 - \left(\underline{z}_0 \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{z}_0\right) \left(\underline{k}_\tau \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{k}_\tau - \varepsilon_c k_t^2\right)} \quad (4.10)$$

e quindi i vettori di propagazione trasmessi potranno essere scritti come segue:

$$\underline{k}_E = \frac{\underline{k}_\tau \left(\underline{z}_0 \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{z}_0\right) - q_0 \left(\underline{k}_\tau \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{z}_0\right) + \Delta_E \underline{z}_0}{\underline{z}_0 \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{z}_0} \quad (4.11)$$

$$\underline{k}_H = \frac{\underline{k}_\tau \left(\underline{z}_0 \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{z}_0\right) - q_0 \left(\underline{k}_\tau \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{z}_0\right) + \Delta_H \underline{z}_0}{\underline{z}_0 \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{z}_0} \quad (4.12)$$

notiamo ora che si ha<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \underline{k}_\tau \left(\underline{z}_0 \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{z}_0\right) - \underline{z}_0 \left(\underline{k}_\tau \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{z}_0\right) &= \left(\underline{k}_\tau \underline{z}_0 - \underline{z}_0 \underline{k}_\tau\right) \cdot \left(\underline{\mu} \cdot \underline{z}_0\right) = \\ &= k_\tau \left[\left(\underline{z}_0 \times \underline{\mathcal{I}}\right) \times \underline{\mathcal{I}}\right] \cdot \left(\underline{\mu} \cdot \underline{z}_0\right) = k_\tau \left(\underline{\mu} \cdot \underline{z}_0\right) \times \underline{\nu} \end{aligned} \quad (4.13)$$

avendo indicato con  $k_\tau$  il modulo della componente tangenziale dei vettori di propagazione, potremo quindi scrivere i vettori di propagazione dell'onda trasmessa in una forma più compatta:

$$\underline{k}_E = \frac{k_\tau \left(\underline{\mu} \cdot \underline{z}_0\right) \times \underline{\nu} + \Delta_E \underline{z}_0}{\underline{z}_0 \cdot \underline{\mu} \cdot \underline{z}_0} \quad (4.14)$$

$$\underline{k}_H = \frac{k_\tau \left(\underline{\varepsilon} \cdot \underline{z}_0\right) \times \underline{\nu} + \Delta_H \underline{z}_0}{\underline{z}_0 \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{z}_0} \quad (4.15)$$

E' bene a questo punto notare una cosa: dalla trattazione svolta non sembra aver mai utilizzato il fatto che i diadici  $\underline{\varepsilon}$  e  $\underline{\mu}$  siano uniassici. In realtà questa ipotesi è stata usata implicitamente nel momento in cui abbiamo utilizzato l'equazione di dispersione nella forma ottenuta grazie ad essa.

Una rappresentazione schematica dei diversi vettori di propagazione e delle superfici di tali vettori è riportata in Figura 4.2.

## 4.2 Coefficienti di riflessione e trasmissione

In questo paragrafo ci proponiamo di ricavare le espressioni dei coefficienti di riflessione e trasmissione relativi all'interfaccia tra un mezzo isotropo ed un

<sup>2</sup>essendo [28, 51]:

$$\left(\underline{u} \times \underline{v}\right) \times \underline{\mathcal{I}} = \underline{v}\underline{u} - \underline{u}\underline{v}$$

Che può essere pensata come un'estensione della regola  $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$  al caso dei diadici.

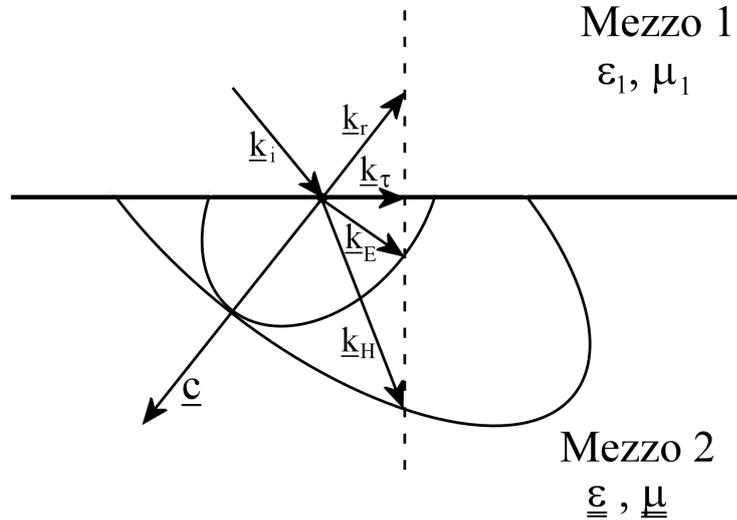


Figura 4.2: Vettori di propagazione dell'onda incidente, dell'onda riflessa e delle due onde trasmesse all'interfaccia. Sono rappresentate le due ellissi relative alla permittività dielettrica diadica e alla permeabilità magnetica diadica.

mezzo anisotropo. Per fare questo dovremo scrivere le quattro onde coinvolte scegliendo opportunamente le polarizzazioni in cui dividerle. L'onda incidente e l'onda riflessa verranno scritte, come di consueto, come la sovrapposizione di due onde polarizzate linearmente, aventi il vettore di campo elettrico ortogonale o parallelo al piano dell'interfaccia, rispettivamente, ci riferiremo a queste due polarizzazioni con il nome di polarizzazione ortogonale e verticale<sup>3</sup>. Le onde trasmesse, invece, andranno espresse secondo i vettori di campo elettrico ricavati nel paragrafo 5.2. Questa differente rappresentazione delle onde del mezzo 1 e del mezzo 2, ha come conseguenza che le due polarizzazioni dell'onda incidente non rimangano disaccoppiate, ma che se incide un'onda in polarizzazione ortogonale, l'onda riflessa sarà una sovrapposizione delle due polarizzazioni ortogonale e parallela. Vedremo che, al contrario della birifrangenza, tale fenomeno persiste anche nel caso in cui il secondo mezzo sia isotropo affine. Ricordando che il versore  $\underline{\nu}$  è ortogonale al piano di incidenza, potremo scrivere i campi incidente

<sup>3</sup>Queste stesse polarizzazioni erano state chiamate TE ed TM nel paragrafo 1.4, per sottolineare che nella polarizzazione ortogonale il vettore  $\underline{E}$  è puramente ortogonale al piano d'incidenza, mentre nella polarizzazione parallela è il vettore  $\underline{H}$  ad essere puramente ortogonale ad esso.

e riflesso, come segue<sup>4</sup>:

$$\underline{E}_i = \left[ E_{iTE} \underline{\nu} + E_{iTM} \left( \hat{k}_i \times \underline{\nu} \right) \right] e^{i\hat{k}_i \cdot \underline{r}} \quad (4.16)$$

$$\underline{H}_i = \frac{1}{\zeta_1} \left[ E_{iTE} \left( \hat{k}_i \times \underline{\nu} \right) - E_{iTM} \underline{\nu} \right] e^{i\hat{k}_i \cdot \underline{r}} \quad (4.17)$$

$$\underline{E}_r = \left[ E_{rTE} \underline{\nu} + E_{rTM} \left( \hat{k}_r \times \underline{\nu} \right) \right] e^{i\hat{k}_r \cdot \underline{r}} \quad (4.18)$$

$$\underline{H}_r = \frac{1}{\zeta_1} \left[ E_{rTE} \left( \hat{k}_r \times \underline{\nu} \right) - E_{rTM} \underline{\nu} \right] e^{i\hat{k}_r \cdot \underline{r}} \quad (4.19)$$

dove si sono indicati con  $\hat{k}_i$  e  $\hat{k}_r$  i versori dei vettori di propagazione dell'onda incidente e riflessa, rispettivamente. Con le lettere  $E_{iTE}$ ,  $E_{iTM}$ ,  $E_{rTE}$  e  $E_{rTM}$ , stiamo indicando le ampiezze delle due polarizzazioni per l'onda incidente e riflessa rispettivamente, queste ultime due ampiezze sono le nostre incognite. Notiamo inoltre che tali grandezze hanno le dimensioni di un campo elettrico [V/m]. Tale scelta non è univoca, ma in genere è preferibile scegliere come componente scalare di riferimento l'ampiezza del campo che di volta in volta è ortogonale al piano di incidenza. Ovviamente sarà sempre possibile ridefinire tali parametri stando attenti a moltiplicare o dividere tutto per una stessa quantità. Vedremo però che la scelta fatto fornirà particolari proprietà di simmetria ai coefficienti di riflessione e rifrazione.

Le onde trasmesse, potranno invece essere scritte come segue:

$$\underline{E}_E = E_E \underline{e}_E e^{i\hat{k}_E \cdot \underline{r}} \quad (4.20)$$

$$\underline{H}_E = E_E \underline{h}_E e^{i\hat{k}_E \cdot \underline{r}} \quad (4.21)$$

$$\underline{E}_H = E_H \underline{e}_H e^{i\hat{k}_H \cdot \underline{r}} \quad (4.22)$$

$$\underline{H}_H = E_H \underline{h}_H e^{i\hat{k}_H \cdot \underline{r}} \quad (4.23)$$

dove i vettori di polarizzazione sono stati definiti nelle espressioni (3.90) e (3.91). Sarà sempre possibile usare in luogo dei vettori in (3.91), i vettori in (3.89), tramite una ridefinizione del parametro  $E_H$ . Le ampiezze  $E_E$  e  $E_H$  sono anche esse due incognite del nostro problema. Di nuovo, si definiscono tali ampiezze con le unità di misura di un campo elettrico campo elettrico, in continuità con le definizioni dei vettori di polarizzazione (3.90) e (3.91). Dobbiamo quindi trovare quattro condizioni che fungano da vincoli per la determinazione delle quattro incognite. La condizione da imporre è, ovviamente, la continuità delle componenti tangenziali dei campi sull'interfaccia. Ricordando che si è già imposta la continuità della componente tangenziale dei vettori di propagazione, potremo

---

<sup>4</sup>Si noti che  $\hat{k}_i \times (\hat{k}_i \times \underline{\nu}) = -\underline{\nu}$ .

scrivere:

$$\begin{aligned} z_0 \times \left[ E_{iTE}\underline{\nu} + E_{iTM} \left( \hat{k}_i \times \underline{\nu} \right) + E_{rTE}\underline{\nu} + E_{rTM} \left( \hat{k}_r \times \underline{\nu} \right) + \right. \\ \left. - E_E \underline{e}_E - E_H \underline{e}_H \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} z_0 \times \left\{ \frac{1}{\zeta_1} \left[ E_{iTE} \left( \hat{k}_i \times \underline{\nu} \right) - E_{iTM}\underline{\nu} \right] + \frac{1}{\zeta_1} \left[ E_{rTE} \left( \hat{k}_r \times \underline{\nu} \right) - E_{rTM}\underline{\nu} \right] + \right. \\ \left. - E_E \underline{h}_E - E_H \underline{h}_H \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

dove  $\hat{k}_{iz} = k_{iz}/k_1$ . Tali condizioni si possono equivalentemente scrivere come segue:

$$\begin{aligned} E_{iTE}\underline{\nu} + E_{iTM} \left( \hat{k}_i \times \underline{\nu} \right) + E_{rTE}\underline{\nu} + E_{rTM} \left( \hat{k}_r \times \underline{\nu} \right) + \\ - E_E \underline{e}_E - E_H \underline{e}_H = \alpha z_0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_1} \left[ E_{iTE} \left( \hat{k}_i \times \underline{\nu} \right) - E_{iTM}\underline{\nu} \right] + \frac{1}{\zeta_1} \left[ E_{rTE} \left( \hat{k}_r \times \underline{\nu} \right) - E_{rTM}\underline{\nu} \right] + \\ - E_E \underline{h}_E - E_H \underline{h}_H = \beta z_0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono parametri reali non nulli. In questo modo, invece di imporre l'annullamento della componente tangenziale all'interfaccia, si sta imponendo che la componente di campo complessiva sia puramente ortogonale ad essa.

A questo punto si può moltiplicare entrambe le condizioni scalarmente per  $\underline{\nu}$  o per  $\underline{k}_r$ , ottenendo<sup>5</sup>:

$$E_{iTE} + E_{rTE} - E_E \underline{\nu} \cdot \underline{e}_E - E_H \underline{\nu} \cdot \underline{e}_H = 0 \quad (4.28)$$

$$E_{iTM} + E_{rTM} + \zeta_1 E_E \underline{\nu} \cdot \underline{h}_E + \zeta_1 E_H \underline{\nu} \cdot \underline{h}_H = 0 \quad (4.29)$$

$$\hat{k}_{iz} (E_{iTM} - E_{rTM}) - E_{E\tau} \cdot \underline{e}_E - E_{H\tau} \cdot \underline{e}_H = 0 \quad (4.30)$$

$$\hat{k}_{iz} (E_{iTE} - E_{rTE}) - \zeta_1 E_{E\tau} \cdot \underline{h}_E - \zeta_1 E_{H\tau} \cdot \underline{h}_H = 0 \quad (4.31)$$

Si può notare che nelle condizioni (4.28)-(4.31) le incognite sono tra loro accoppiate, nel senso che non esiste un modo semplice di diagonalizzare il problema, separando il problema della riflessione da quello della trasmissione. Si è costretti quindi a risolvere il sistema con il brutale metodo per sostituzione. Dall'equazione (4.30) si isola il parametro  $E_{iTM}$ :

$$E_{iTM} = E_{rTM} + E_E \frac{\tau \cdot \underline{e}_E}{\hat{k}_{iz}} + E_H \frac{\tau \cdot \underline{e}_H}{\hat{k}_{iz}} \quad (4.32)$$

Inserendo l'espressione trovata, nell'equazione (4.29), ed isolando il parametro  $E_{rTM}$ , si ottiene:

$$E_{rTM} = -\frac{1}{2\hat{k}_{iz}} \left[ E_E \left( \tau \cdot \underline{e}_E + \zeta_1 \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{h}_E \right) + E_H \left( \tau \cdot \underline{e}_H + \zeta_1 \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{h}_H \right) \right] \quad (4.33)$$

<sup>5</sup>si noti che

$$\underline{k}_r \cdot (\underline{k}_{i0} \times \underline{\nu}) = (\underline{z}_0 \times \underline{\nu}) \cdot (\underline{k}_{i0} \times \underline{\nu}) = \underline{k}_{i0} \cdot \underline{z}_0 \nu^2 = \frac{q_i}{n_1} \nu^2$$

Inserendo l'espressione di  $E_{rTM}$  in (4.32), si ottiene:

$$E_{iTM} = \frac{1}{2\hat{k}_{iz}} \left[ E_E \left( \underline{\tau} \cdot \underline{e}_E - \zeta_1 \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{h}_E \right) + E_H \left( \underline{\tau} \cdot \underline{e}_H - \zeta_1 \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{h}_H \right) \right] \quad (4.34)$$

A questo punto si può passare alle componenti TE. Dall'espressione (4.31) si può isolare il termine  $E_{iTE}$ , ottenendo:

$$E_{iTE} = E_{rTE} + \frac{\zeta_1}{\hat{k}_{iz}} (E_{E\underline{\tau}} \cdot \underline{h}_E + E_{H\underline{\tau}} \cdot \underline{h}_H) \quad (4.35)$$

tale espressione può essere inserita in (4.28), in modo da isolare il termine  $E_{rTE}$ :

$$E_{rTE} = \frac{1}{2\hat{k}_{iz}} \left[ E_E \left( \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{e}_E - \zeta_1 \underline{\tau} \cdot \underline{h}_E \right) + E_H \left( \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{e}_H - \zeta_1 \underline{\tau} \cdot \underline{h}_H \right) \right] \quad (4.36)$$

Infine, inserendo l'espressione di  $E_{rTE}$  in (4.35), si ricava:

$$E_{iTE} = \frac{1}{2\hat{k}_{iz}} \left[ E_E \left( \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{e}_E + \zeta_1 \underline{\tau} \cdot \underline{h}_E \right) + E_H \left( \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{e}_H + \zeta_1 \underline{\tau} \cdot \underline{h}_H \right) \right] \quad (4.37)$$

A questo punto siamo riusciti a disaccoppiare i due problemi, infatti considerando le espressioni (4.33), (4.34), (4.36) e (4.37), esse possono essere scritte in forma matriciale come segue:

$$\begin{pmatrix} E_{iTE} \\ E_{iTM} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\hat{k}_{iz}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_E \\ E_H \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

$$\begin{pmatrix} E_{rTE} \\ E_{rTM} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\hat{k}_{iz}} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_E \\ E_H \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

dove si sono definite le seguenti espressioni:

$$A_{11} = \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{e}_E + \zeta_1 \underline{\tau} \cdot \underline{h}_E \quad (4.40)$$

$$A_{12} = \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{e}_H + \zeta_1 \underline{\tau} \cdot \underline{h}_H \quad (4.41)$$

$$A_{21} = \underline{\tau} \cdot \underline{e}_E - \zeta_1 \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{h}_E \quad (4.42)$$

$$A_{22} = \underline{\tau} \cdot \underline{e}_H - \zeta_1 \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{h}_H \quad (4.43)$$

$$B_{11} = \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{e}_E - \zeta_1 \underline{\tau} \cdot \underline{h}_E \quad (4.44)$$

$$B_{12} = \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{e}_H - \zeta_1 \underline{\tau} \cdot \underline{h}_H \quad (4.45)$$

$$B_{21} = -\underline{\tau} \cdot \underline{e}_E - \zeta_1 \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{h}_E \quad (4.46)$$

$$B_{22} = -\underline{\tau} \cdot \underline{e}_H - \zeta_1 \hat{k}_{iz} \underline{\nu} \cdot \underline{h}_H \quad (4.47)$$

A questo punto siamo in grado di calcolare i coefficienti di riflessione e trasmissione, infatti, definendo il determinante della matrice in (4.38) come il parametro:

$$\Delta_A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \quad (4.48)$$

Si potrà invertire la relazione, ottenendo:

$$\begin{pmatrix} E_E \\ E_H \end{pmatrix} = \frac{2\hat{k}_{iz}}{\Delta_A} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{iTE} \\ E_{iTM} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

$$\begin{pmatrix} E_{rTE} \\ E_{rTM} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{iTE} \\ E_{iTM} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

dove:

$$T_{11} = A_{22} \quad (4.51)$$

$$T_{12} = -A_{12} \quad (4.52)$$

$$T_{21} = -A_{21} \quad (4.53)$$

$$T_{22} = A_{11} \quad (4.54)$$

$$\Gamma_{11} = B_{11}A_{22} - B_{12}A_{21} \quad (4.55)$$

$$\Gamma_{12} = B_{12}A_{11} - B_{11}A_{12} \quad (4.56)$$

$$\Gamma_{21} = B_{21}A_{22} - B_{22}A_{21} \quad (4.57)$$

$$\Gamma_{22} = B_{22}A_{11} - B_{21}A_{12} \quad (4.58)$$

Come anticipato all'inizio del paragrafo, vediamo che sia il coefficiente di riflessione che il coefficiente di trasmissione sono rappresentati da matrici non diagonali, questo vuol dire che le due polarizzazioni dell'onda incidente vengono mescolate sia nel processo di riflessione, sia in quello di trasmissione. Tale fenomeno è una conseguenza della birifrangenza del mezzo anisotropo, ma non solo; vedremo infatti che anche nei mezzi anisotropi isotropi affini, dove non si ha la birifrangenza, le due polarizzazioni rimangono accoppiate, ovvero le due matrici rimangono non diagonali. Notiamo inoltre che nel presente paragrafo non si è mai sfruttata l'informazione dell'uniassicità del mezzo, quindi le espressioni trovate per i coefficienti di riflessione e trasmissione hanno validità generale. Tali espressioni sono in effetti molto complesse, essendo dipendenti dai parametri  $A_{ij}$  e  $B_{ij}$ , i quali contengono tutte le caratteristiche dei due mezzi e delle polarizzazioni delle onde trasmesse nel mezzo anisotropo.

Per esplicitare i parametri  $A_{ij}$  e  $B_{ij}$ , tutto ciò che si deve fare è trovare le espressioni dei prodotti scalari dei vettori  $\underline{v}$  e  $\underline{\tau}$  per i vettori di polarizzazione delle due onde trasmesse, ovvero  $\underline{e}_{E/H}$  e  $\underline{h}_{E/H}$ . Si deve quindi andare a specificare il tipo di mezzo anisotropo che si sta considerando, infatti i vettori  $\underline{e}_{E/H}$  e  $\underline{h}_{E/H}$  dipendono dall'equazione di dispersione, ovvero dalle caratteristiche del

mezzo anisotropo. Tali prodotti scalari possono essere scritti come segue:

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{e}_E = \hat{k}_\tau \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{c} - \hat{k}_{Ez} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c} \quad (4.59)$$

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{e}_H = \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} \quad (4.60)$$

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{h}_E = -\frac{1}{\zeta_t} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} \quad (4.61)$$

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{h}_H = \frac{1}{\zeta_t} (\hat{k}_\tau \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{c} - \hat{k}_{Hz} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}) \quad (4.62)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_E = \hat{k}_{Ez} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} \quad (4.63)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_H = (1 - \hat{k}_\tau^2) \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c} - \hat{k}_\tau \hat{k}_{Hz} \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{c} \quad (4.64)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{h}_E = \frac{1}{\zeta_t} [(1 - \hat{k}_\tau^2) \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c} - \hat{k}_\tau \hat{k}_{Ez} \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{c}] \quad (4.65)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{h}_H = \frac{\hat{k}_{Hz}}{\zeta_t} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} \quad (4.66)$$

qui si sono chiamati  $\hat{k}_\tau = k_\tau/k_t$  e  $\hat{k}_{E/Hz} = k_{E/Hz}/k_t$ . Inserendo tali espressioni delle definizioni dei coefficienti  $A_{ij}$  e  $B_{ij}$ , si ottiene:

$$A_{11} = \hat{k}_{iz} (\hat{k}_\tau \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{c} - \hat{k}_{Ez} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}) - \frac{\zeta_1}{\zeta_t} [(1 - \hat{k}_\tau^2) \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c} - \hat{k}_\tau \hat{k}_{Ez} \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{c}] \quad (4.67)$$

$$A_{12} = \left( \hat{k}_{iz} + \frac{\zeta_1}{\zeta_t} \hat{k}_{Hz} \right) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} \quad (4.68)$$

$$A_{21} = \left( \frac{\zeta_1}{\zeta_t} \hat{k}_{iz} + \hat{k}_{Ez} \right) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} \quad (4.69)$$

$$A_{22} = (1 - \hat{k}_\tau^2) \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c} - \hat{k}_\tau \hat{k}_{Hz} \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{c} - \frac{\zeta_1}{\zeta_t} \hat{k}_{iz} (\hat{k}_\tau \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{c} - \hat{k}_{Hz} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}) \quad (4.70)$$

$$B_{11} = \hat{k}_{iz} (\hat{k}_\tau \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{c} - \hat{k}_{Ez} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}) + \frac{\zeta_1}{\zeta_t} [(1 - \hat{k}_\tau^2) \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c} - \hat{k}_\tau \hat{k}_{Ez} \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{c}] \quad (4.71)$$

$$B_{12} = \left( \hat{k}_{iz} - \frac{\zeta_1}{\zeta_t} \hat{k}_{Hz} \right) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} \quad (4.72)$$

$$B_{21} = \left( \frac{\zeta_1}{\zeta_t} \hat{k}_{iz} - \hat{k}_{Ez} \right) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} \quad (4.73)$$

$$B_{22} = -(1 - \hat{k}_\tau^2) \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c} + \hat{k}_\tau \hat{k}_{Hz} \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{c} - \frac{\zeta_1}{\zeta_t} \hat{k}_{iz} (\hat{k}_\tau \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{c} - \hat{k}_{Hz} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{c}) \quad (4.74)$$

Si possono notare molte relazioni e simmetrie tra i coefficienti scritti nella precedente forma, tuttavia, risulta molto difficile scriverli in una forma che sia allo stesso tempo compatta e significativa a livello fisico. Una possibilità è quella di

riscrivere i coefficienti come segue:

$$A_{11} = \left[ \hat{k}_{iz} \boldsymbol{\nu} \times \hat{\mathbf{k}}_E - \frac{\zeta_1}{\zeta_t} (\boldsymbol{\tau} - \hat{k}_\tau \hat{\mathbf{k}}_E) \right] \cdot \mathbf{c} \quad (4.75)$$

$$A_{12} = \left( \hat{k}_{iz} + \frac{\zeta_1}{\zeta_t} \hat{k}_{Hz} \right) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} \quad (4.76)$$

$$A_{21} = \left( \frac{\zeta_1}{\zeta_t} \hat{k}_{iz} + \hat{k}_{Ez} \right) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} \quad (4.77)$$

$$A_{22} = - \left[ \frac{\zeta_1}{\zeta_t} \hat{k}_{iz} \boldsymbol{\nu} \times \hat{\mathbf{k}}_H - (\boldsymbol{\tau} - \hat{k}_\tau \hat{\mathbf{k}}_H) \right] \cdot \mathbf{c} \quad (4.78)$$

$$B_{11} = \left[ \hat{k}_{iz} \boldsymbol{\nu} \times \hat{\mathbf{k}}_E + \frac{\zeta_1}{\zeta_t} (\boldsymbol{\tau} - \hat{k}_\tau \hat{\mathbf{k}}_E) \right] \cdot \mathbf{c} \quad (4.79)$$

$$B_{12} = \left( \hat{k}_{iz} - \frac{\zeta_1}{\zeta_t} \hat{k}_{Hz} \right) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} \quad (4.80)$$

$$B_{21} = \left( \frac{\zeta_1}{\zeta_t} \hat{k}_{iz} - n_{Ez} \right) \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{c} \quad (4.81)$$

$$B_{22} = - \left( \frac{\zeta_1}{\zeta_t} \hat{k}_{iz} \boldsymbol{\nu} \times \hat{\mathbf{k}}_H + \boldsymbol{\tau} - \hat{k}_\tau \hat{\mathbf{k}}_H \right) \cdot \mathbf{c} \quad (4.82)$$

Si è riusciti in questo paragrafo a scrivere i coefficienti di riflessione e di trasmissione all'interfaccia con un mezzo anisotropo. Tali coefficienti assumono una forma molto complessa nel caso generale. Come si vedrà nel seguito però essi assumono forme molto più semplici in alcuni casi particolari.



## Capitolo 5

# Mezzi anisotropi e condizioni al contorno

Nelle ricerche in ambito di elettromagnetismo, la definizione di appropriate condizioni al contorno ha sempre rivestito una grande importanza, sia per le applicazioni che per il suo legame con l'unicità del problema elettromagnetico. Nella letteratura c'è un gran numero di condizioni al contorno proposte, e.g., il conduttore elettrico perfetto (PEC), il conduttore magnetico perfetto (PMC), la condizione al contorno d'impedenza (IBC), le superfici Soft e Hard (SHS), le condizioni al contorno DB e il conduttore elettromagnetico perfetto (PEMC). Nel seguito si vedrà come sia possibile legare queste condizioni al contorno a particolari materiali anisotropi.

### 5.1 La materializzazione delle condizioni al contorno

Negli ultimi anni, sono state proposte diverse possibili realizzazioni delle condizioni al contorno attraverso la progettazione di particolari materiali aventi proprietà elettromagnetiche estreme. Due tipi di mezzi si sono rivelati particolarmente adatti allo scopo: i materiali bi-isotropi e i materiali anisotropi. È forse il caso di sottolineare che qui si intende con il termine di materializzazione, quel processo che intende definire un particolare materiale attraverso la sua permittività elettrica e la sua permeabilità magnetica, in modo che un'interfaccia con tale materiale realizzi una particolare condizione al contorno esprimibile direttamente in termini dei campi elettromagnetici all'interfaccia.

In [60], è stata proposta la materializzazione di un conduttore elettromagnetico perfetto attraverso un particolare mezzo bi-isotropo. Il conduttore elettromagnetico perfetto, supposto come una superficie  $z = 0$ , impone che le com-

ponenti tangenziali sia del campo elettrico che del campo magnetico si annullino su tale superfici. Tale condizione può essere scritta come segue:

$$\underline{z}_0 \times (\underline{H} + M\underline{E}) = 0 \quad (5.1)$$

Le caratteristiche del materiale bi-isotropo che garantiscono questa condizione all'interfaccia sono le seguenti:  $\varepsilon = Mq$ ,  $\xi = q$ ,  $\zeta = q$  e  $\mu = q/M$ , con  $q \rightarrow \infty$ . Quindi, si vede da queste espressioni che il parametro  $M$  rappresenta l'ammettenza del mezzo. Dalla condizione (5.1), si può anche notare che essa rappresenta una superficie PEC quando  $M \rightarrow \infty$  e rappresenta una superficie PMC quando  $M \rightarrow 0$ . Tale proprietà rende questo materiale molto interessante. Una possibile realizzazione pratica del materiale bi-isotropo è stata proposta in [61], come una particolare stratificazione di mezzi di Tellegen, oppure come una stratificazione di mezzi girotropici.

La IBC, è una ben nota condizione al contorno introdotta per la prima volta da Shchukin [62] e Leontovich [63] negli anni '40. La condizione può essere scritta come segue:

$$\underline{E}_\tau = \overline{\overline{Z}}_s \cdot \underline{z}_0 \times \underline{H}, \quad \text{o} \quad \underline{z}_0 \times \underline{H} = \overline{\overline{Y}}_s \cdot \underline{E} \quad (5.2)$$

dove  $\underline{E}_\tau$  rappresenta la componente tangenziale di campo elettrico alla superficie e le diadi  $\overline{\overline{Z}}_s$  e  $\overline{\overline{Y}}_s$  sono l'impedenza superficiale e l'ammettenza superficiale, rispettivamente.

In [64], è stata proposta la possibilità di realizzare la IBC attraverso particolari materiali anisotropi. I materiali suggeriti sono un particolare mezzo girotropico e un particolare mezzo biassico, entrambi aventi le componenti della permittività elettrica e della permeabilità magnetica ortogonali all'interfaccia tendenti all'infinito, il che può essere scritto come segue:

$$\underline{z}_0 \cdot \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \underline{z}_0 \rightarrow \infty \quad (5.3)$$

$$\underline{z}_0 \cdot \overline{\overline{\mu}} \cdot \underline{z}_0 \rightarrow \infty \quad (5.4)$$

Le superfici Soft e Hard possono essere pensate come un caso particolare della IBC. Le superfici Soft e Hard sono ampiamente studiate in letteratura grazie al gran numero delle loro possibili applicazioni [65, 66]. La loro realizzazione richiede l'annullamento di una certa componenti del campo elettrico e del campo magnetico sulla superficie:

$$\underline{y}_0 \cdot \underline{E} = 0 \quad \text{e} \quad \underline{y}_0 \cdot \underline{H} = 0 \quad (5.5)$$

il vettore  $\underline{y}_0$  è ovviamente un versore parallelo all'interfaccia. La condizione (5.5) si riferisce a una superficie Soft o Hard, a seconda che la direzione  $\underline{y}_0$  sia perpendicolare al piano d'incidenza o se sia contenuta in esso<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>È sufficiente ricordare che una superficie Soft è un contorno per il quale il flusso di potenza sulla superficie risulta nullo per ogni polarizzazione dell'onda incidente. Viceversa, una superficie Hard, è un contorno sul quale sia il massimo flusso di potenza. Tali denominazioni derivano dall'acustica.

Una situazione del tutto opposta a quella delle IBC si ha quando le componenti ortogonali all'interfaccia delle diadi di permittività e permeabilità tendono a zero:

$$\underline{z}_0 \cdot \overline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{z}_0 \rightarrow 0 \quad (5.6)$$

$$\underline{z}_0 \cdot \overline{\underline{\mu}} \cdot \underline{z}_0 \rightarrow 0 \quad (5.7)$$

Un'interfaccia con questo tipo di materiali è stata chiamata una condizione al contorno DB [6]. Più in generale, una condizione al contorno DB richiede l'annullamento delle componenti ortogonali all'interfaccia delle densità di flusso elettrico e magnetico:

$$\underline{z}_0 \cdot \underline{D} = 0 \quad \text{and} \quad \underline{z}_0 \cdot \underline{B} = 0 \quad (5.8)$$

Un materiale che sia in grado di realizzare allo stesso tempo una superficie Soft e Hard e una condizione al contorno DB è stato proposto in [67]. Esso è un particolare mezzo bi-anisotropo detto materiale Skewon-Axion. La condizione realizzata da tale materiale è la seguente:

$$T\omega\underline{z}_0 \cdot \underline{B} + k_0\underline{u}_y \cdot \underline{E} = 0 \quad \text{and} \quad T\omega\underline{z}_0 \cdot \underline{D} - k_0\underline{u}_y \cdot \underline{H} = 0 \quad (5.9)$$

dove  $\omega$  è la pulsazione dell'onda e  $k_0$  il numero d'onda nel vuoto. È facile vedere che quanto  $T \rightarrow 0$ , la condizione tende a rappresentare una SHS, invece, quanto  $T \rightarrow \infty$ , essa tende a rappresentare una condizione al contorno DB.

Qui si vuole introdurre una nuova condizione al contorno che sia una generalizzazione sia della SHS che della condizione al contorno DB, ma che sia realizzabile con un semplice mezzo anisotropo uniassico. Si chiami  $\underline{c}$  un generico vettore sul piano  $(y, z)$ , nel sistema di riferimento finora usato. Sia  $\alpha$  l'angolo da esso formato con l'asse  $z$ . Quello che si vuole ottenere è la seguente condizione al contorno:

$$\underline{c} \cdot \underline{D} = 0 \quad \text{e} \quad \underline{c} \cdot \underline{B} = 0 \quad (5.10)$$

Si può facilmente vedere che quando  $\alpha = 0$  tale condizione diventa una condizione al contorno DB, viceversa quando  $\alpha = \pi/2$ , essa diventa la seguente condizione:

$$\underline{u}_y \cdot \underline{D} = 0 \quad \text{e} \quad \underline{u}_y \cdot \underline{B} = 0 \quad (5.11)$$

la quale è in generale diversa dalla condizione imposta su una SHS. Se però si suppone che il mezzo di provenienza dell'onda incidente, si chiami mezzo 1, sia un mezzo isotropico, allora tale condizione va a coincidere con la (5.5), infatti si ottiene:

$$\varepsilon_1 \underline{u}_y \cdot \underline{E} = 0 \quad \text{e} \quad \mu_1 \underline{u}_y \cdot \underline{H} = 0 \quad (5.12)$$

questa condizione, per valori convenzionali di  $\varepsilon_1$  e  $\mu_1$ , è esattamente identica alla (5.5).

Per quanto detto, si potrà chiamare la condizione (5.10) una condizione al contorno SH/DB, in quanto essa può rappresentare entrambe le condizioni DB o SH al variare del parametro  $\alpha$ . Può essere interessante notare che la condizione (5.10) è intrinsecamente differente dalla condizione (5.9). Infatti, esse tendono l'una all'altra solo nei due casi  $T \rightarrow 0$  e  $\alpha = \pi/2$  o se  $T \rightarrow \infty$  e  $\alpha = 0$ . In tutti gli altri casi esse differiscono totalmente perché il mezzo con cui si ottiene la condizione (5.9) è intrinsecamente bi-anisotropo, ovvero in esso le componenti del campo elettrico e magnetico sono connesse alle componenti della densità di flusso magnetico ed elettrico, rispettivamente. Si può facilmente dimostrare che non esiste alcuna trasformazione affine che possa rendere tale mezzo semplicemente anisotropo, ovvero che possa rendere nulle le quantità  $\bar{\bar{\xi}}$  e  $\bar{\bar{\zeta}}$ .

## 5.2 Realizzazione della condizione SH/DB

Per ottenere la condizione al contorno (5.10), si deve riuscire a isolare le componenti nella direzione di  $\underline{c}$ . A questo proposito si può scrivere il campo elettrico e il campo magnetico decomponendoli nelle due direzioni, una parallela e l'altra trasversa a  $\underline{c}$ :

$$\underline{E} = \underline{E}_\perp + E_\parallel \underline{c} \qquad \underline{H} = \underline{H}_\perp + H_\parallel \underline{c} \qquad (5.13)$$

con:  $E_\parallel = \underline{E} \cdot \underline{c}$ ,  $\underline{E}_\perp \cdot \underline{c} = 0$ ,  $H_\parallel = \underline{H} \cdot \underline{c}$  e  $\underline{H}_\perp \cdot \underline{c} = 0$ . Si consideri ora un mezzo anisotropo uniassico avente l'asse ottico parallelo a  $\underline{c}$ , ovvero con la seguente permittività elettrica e permeabilità magnetica:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_t \bar{\bar{I}}_t + \epsilon_c \underline{c} \underline{c} \qquad (5.14)$$

$$\bar{\bar{\mu}} = \mu_t \bar{\bar{I}}_t + \mu_c \underline{c} \underline{c} \qquad (5.15)$$

con:  $\bar{\bar{I}}_t = \bar{\bar{I}} - \underline{c} \underline{c}$ . Si può provare ora a scrivere le condizioni (5.10) in tale mezzo. Esse assumono la seguente forma:

$$\underline{c} \cdot \underline{D} = \underline{c} \cdot (\bar{\bar{\epsilon}} \cdot \underline{E}) = \underline{c} \cdot (\epsilon_t \underline{E}_\perp + \epsilon_c E_\parallel \underline{c}) = \epsilon_c E_\parallel = 0 \qquad (5.16)$$

$$\underline{c} \cdot \underline{B} = \underline{c} \cdot (\bar{\bar{\mu}} \cdot \underline{H}) = \underline{c} \cdot (\mu_t \underline{H}_\perp + \mu_c H_\parallel \underline{c}) = \mu_c H_\parallel = 0 \qquad (5.17)$$

Tali condizioni sono certamente soddisfatte quando le componenti di permittività e permeabilità nella direzione  $\underline{c}$  risultano nulle, ovvero se:

$$\underline{c} \cdot \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \underline{c} \rightarrow 0 \qquad (5.18)$$

$$\underline{c} \cdot \bar{\bar{\mu}} \cdot \underline{c} \rightarrow 0 \qquad (5.19)$$

Il mezzo qui proposto sarebbe espresso da una matrice diagonale se si assumesse uno degli assi coordinati parallelo all'asse ottico. Tuttavia, siccome ci interessa studiare un'interfaccia nella quale la normale non sia necessariamente diretta come  $\underline{c}$ , si considera qui un generico sistema di riferimento in cui  $\underline{c}$  formi un

angolo  $\alpha$  con il versore coordinato  $\underline{z}_0$ . In questo caso, per ottenere l'espressione matriciale di  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  è possibile eseguire una rotazione di un angolo  $\alpha$  dei vari campi. Infatti, chiamiamo  $\underline{E}_R$  e  $\underline{D}_R$  il campo elettrico e la densità di flusso elettrico nel sistema di riferimento solidale con l'asse ottico del mezzo. In tale sistema di riferimento la permittività sarà esprimibile in forma diagonale:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_t & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_c \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Ora, per passare da tale riferimento a quello in cui l'asse  $z$  forma un angolo  $\alpha$  con l'asse ottico, è sufficiente effettuare una rotazione di tale angolo intorno all'asse  $x$ , in questo modo il campo elettrico si potrà scrivere come segue:

$$\underline{E} = \underline{R} \cdot \underline{E}_R \quad (5.21)$$

dove  $\underline{R}$  è la matrice di rotazione<sup>2</sup>. Analogamente, la densità di flusso elettrico si potrà scrivere come segue:

$$\underline{D} = \underline{R} \underline{D}_R = \underline{R} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_R \cdot \underline{E}_R = \underline{R} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_R \cdot \underline{R}^{-1} \cdot \underline{E} \quad (5.22)$$

come si vede da questa espressione è quindi facile scrivere la permittività elettrica nel sistema di riferimento scelto come segue:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{R} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_R \cdot \underline{R}^{-1} \quad (5.23)$$

svolgendo i prodotti si ottiene la seguente espressione:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_t & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t \cos^2 \alpha + \varepsilon_c \sin^2 \alpha & (\varepsilon_c - \varepsilon_t) \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & (\varepsilon_c - \varepsilon_t) \sin \alpha \cos \alpha & \varepsilon_t \sin^2 \alpha + \varepsilon_c \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Una espressione del tutto analoga può essere ottenuta per  $\underline{\underline{\mu}}$ .

A questo punto si cercherà di comprendere come si comporti una generica onda piana all'interno di questo materiale quando le condizioni (5.18) e (5.19) vengono soddisfatte.

L'equazione di dispersione di questo mezzo sarà quella ottenuta nel paragrafo 3.2 che si scrive di seguito per comodità:

$$\left( \underline{k} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{k} - \varepsilon_c k_t^2 \right) \left( \underline{k} \cdot \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{k} - \mu_c k_t^2 \right) = 0 \quad (5.25)$$

<sup>2</sup>La matrice di rotazione che ruoti intorno all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha$ , può essere scritta come segue:

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

dove  $k_t = k_0 \sqrt{\varepsilon_t \mu_t} = k_0 n_t$  è il numero d'onda trasverso. Si scriva ora il vettore di propagazione separando le componenti parallele e ortogonali all'asse ottico:

$$\underline{k} = \underline{k}_\perp + k_{\parallel} \underline{c} \quad (5.26)$$

quindi, considerando la soluzione di onda H, si potrà scrivere:

$$\varepsilon_t k_{H\perp}^2 + \varepsilon_c k_{H\parallel}^2 = \varepsilon_c k_t^2 \quad (5.27)$$

in questa relazione si vede che quando  $\varepsilon_c \rightarrow 0$ , si ha  $k_\perp \rightarrow 0$ , i.e., la propagazione è permessa solo lungo l'asse ottico.

Nel sistema di riferimento sopra definito, si potranno scrivere i diversi vettori come segue:<sup>3</sup>:

$$\underline{c} = \sin \alpha \underline{u}_y + \cos \alpha \underline{z}_0 \quad (5.28)$$

$$k_{H\parallel} = k_{Hy} \sin \alpha + k_{Hz} \cos \alpha \quad (5.29)$$

$$\underline{k}_{H\perp} = k_{Hx} \underline{u}_x + (k_{Hy} \cos \alpha - k_{Hz} \sin \alpha) (\cos \alpha \underline{u}_y - \sin \alpha \underline{z}_0) \quad (5.30)$$

quindi, l'equazione di dispersione assume la seguente espressione:

$$\varepsilon_t \left[ k_{Hx}^2 + (k_{Hy} \cos \alpha - k_{Hz} \sin \alpha)^2 \right] + \varepsilon_c \left[ (k_{Hy} \sin \alpha + k_{Hz} \cos \alpha) - k_t^2 \right] = 0 \quad (5.31)$$

quando  $\varepsilon_c \rightarrow 0$ , si ottiene:

$$k_{Hx}^2 = 0 \quad (5.32)$$

$$(k_{Hy} \cos \alpha - k_{Hz} \sin \alpha)^2 = 0 \quad (5.33)$$

di nuovo notiamo che tale relazione indica che la propagazione è permessa solo lungo l'asse ottico, come si vede anche dalla seguente espressione:

$$\frac{k_{Hy}}{k_{Hz}} = \tan \alpha \quad (5.34)$$

Il campo elettrico e il campo magnetico potranno essere scritti in funzione dei vettori di polarizzazione definiti nel paragrafo 3.2:

$$\underline{E} = E_{E0} e^{i \underline{k}_E \cdot \underline{r}} \underline{e}_E + E_{H0} e^{i \underline{k}_H \cdot \underline{r}} \underline{e}_H \quad (5.35)$$

$$\underline{H} = E_{E0} e^{i \underline{k}_E \cdot \underline{r}} \underline{h}_E + E_{H0} e^{i \underline{k}_H \cdot \underline{r}} \underline{h}_H \quad (5.36)$$

---

<sup>3</sup>Si noti che:

$$\underline{k}_\perp = \underline{k} - k_{\parallel} \underline{c}$$

### 5.2.1 Riflessione all'interfaccia con un mezzo SH/DB

Lo studio dell'interazione di un'onda elettromagnetica piana proveniente da un mezzo isotropo con un'interfaccia con un mezzo SHDB può essere studiata mediante i coefficienti in (4.50). Tali coefficienti assumano una forma semplice in alcuni casi particolari e qui inizieremo a studiare l'interfaccia proprio in alcuni di questi casi.

S consideri il caso in cui il piano di incidenza contenga l'asse ottico del mezzo uniassico. In questo caso i versori  $\underline{\nu}$  e  $\underline{c}$  risultano ortogonali:

$$\underline{\nu} \cdot \underline{c} = 0 \quad (5.37)$$

Mantenendo la descrizione secondo il sistema di riferimento adottato in questo paragrafo, tale situazione si ha quando il vettore di propagazione giace sul piano  $(y, z)$ , si veda Figura 4.1. La principale conseguenza della relazione (5.37) è che i termini non diagonali del coefficiente di riflessione risultano nulli, ovvero:  $A_{12} = A_{21} = B_{12} = B_{21} = 0 \Rightarrow \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = 0$ .

Per il mezzo SHDB ci aspettiamo che i coefficienti diagonali,  $\Gamma_{11}$  and  $\Gamma_{22}$ , abbiano ampiezza unitaria per ogni onda incidente meno quella che corrisponde a un'onda trasmessa propagantesi nella direzione dell'asse ottico. Si consideri il caso particolare le componenti trasverse della permittività e della permeabilità coincidano con le caratteristiche del mezzo isotropo, i.e.,  $\varepsilon_t = \varepsilon_1$  and  $\mu_t = \mu_1$ . In questo caso l'onda incidente che genera un'onda trasmessa propagantesi parallelamente all'asse ottico è proprio quella avente un angolo di incidenza  $\theta_i = \alpha$ . In questo caso, ci aspettiamo un'onda totalmente trasmessa in corrispondenza di questo angolo. In Figura 5.1, è mostrato il comportamento dell'ampiezza del coefficiente  $\Gamma_{11}$  nel caso in cui il mezzo isotropo sia il vuoto e  $\varepsilon_t = \mu_t = 1$  e  $\alpha = 30^\circ$ , al variare dell'angolo di incidenza e per diversi valori di  $\varepsilon_c = \mu_c$  ( $\Gamma_{22}$  risulta uguale a  $\Gamma_{11}$  data l'uguaglianza che si è imposta tra permittività e permeabilità).

Come prima cosa, si noti che il coefficiente di riflessione è una funzione pari dell'angolo  $\theta_i$ . Tale risultato può apparire strano, infatti, dallo studio della propagazione di un'onda piana in un mezzo uniassiale, si è visto che solo un'onda avente vettore di propagazione parallelo all'asse ottico può propagarsi quando le caratteristiche longitudinali del mezzo tendono a essere nulle. È quindi necessario trovare una spiegazione fisica a questo fenomeno, ovvero si deve capire cosa succede, in questo caso particolare, quando  $\theta_i = -\alpha$ . Prima di tutto, si dimostrerà, a partire dai risultati ottenuti, che effettivamente il coefficiente di riflessione debba essere una funzione pari dell'angolo. Si consideri che quando i coefficienti di cross-riflessione, ovvero i coefficienti non diagonali della matrice di riflessione, sono nulli, le due polarizzazioni tornano a essere disaccoppiate, esattamente come in un mezzo isotropo. Quindi, il coefficiente di riflessione per ogni polarizzazione risulta dall'imposizione della continuità dei campi tangenziali all'interfaccia della polarizzazione considerata. Essendo le componenti tangenziali dei campi delle funzioni pari dell'angolo, come si può notare facilmente visualizzando graficamente il piano di incidenza, si capisce come anche il coefficiente di riflessione debba esserlo, infatti l'interfaccia 'vede'

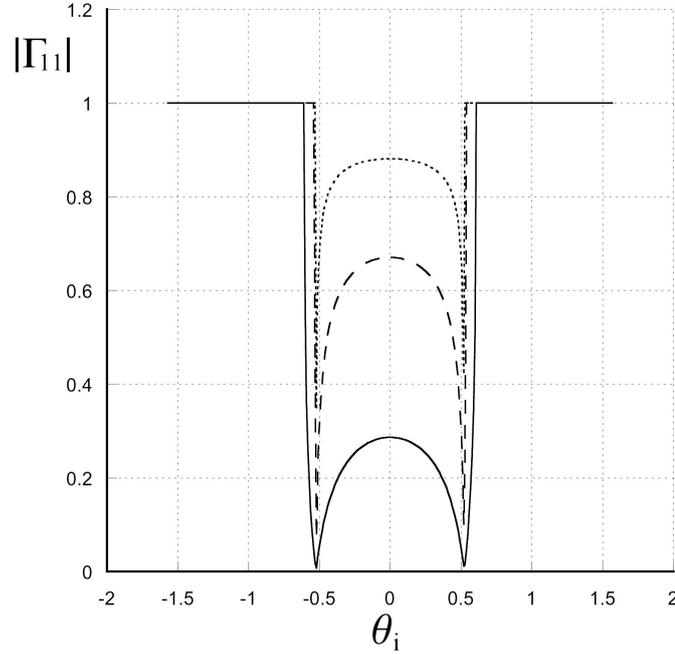


Figura 5.1: Ampiezza del coefficiente di riflessione  $\Gamma_{11}$ , quando il mezzo 1 è l'aria, il mezzo due ha  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\varepsilon_t = \mu_t = 1$  e:  $\varepsilon_c = \mu_c = 0.1$  (solid line),  $\varepsilon_c = \mu_c = 0.01$  (dashed line),  $\varepsilon_c = \mu_c = 0.001$  (dotted line). Il vettore di propagazione dell'onda incidente si suppone nel piano  $(y, z)$ .

arrivare due onde identiche per due angoli opposti. Si è così spiegato il motivo per il quale i coefficienti di riflessione debbano in generale essere delle funzioni pari in questo caso particolare, tuttavia ancora non si è spiegato come sia possibile che l'onda incidente con  $\theta_i = \alpha$  sia totalmente trasmessa nel mezzo preso in considerazione. Per capire questo, si deve scrivere l'espressione del vettore di propagazione trasmesso di questa onda. Si consideri l'espressione (4.8), e si imponga che l'asse ottico giaccia sul piano di incidenza, ottenendo<sup>4</sup>:

$$k_{Hz} = \frac{-k_y(\varepsilon_c - \varepsilon_t) \sin \alpha \cos \alpha + \sqrt{\varepsilon_c (\varepsilon_t \sin^2 \alpha + \varepsilon_c \cos^2 \alpha) k_t^2 - \varepsilon_c \varepsilon_t k_y^2}}{\varepsilon_t \sin^2 \alpha + \varepsilon_c \cos^2 \alpha} \quad (5.38)$$

se si considera il caso in cui  $\varepsilon_c \rightarrow 0$ , tale componente si può scrivere:

$$k_{Hz} = \frac{k_y \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (5.39)$$

<sup>4</sup>È importante notare che ci siamo messi nel caso molto particolare in cui  $\underline{\varepsilon} = \underline{\mu}$ , caso in cui non si osserva più il fenomeno della birifrangenza.

when  $\theta_i = -\alpha$ , we have  $k_y = -k_1 \sin \alpha$ , so we can write:

$$k_{Hz} = -k_1 \cos \alpha \quad (5.40)$$

quindi il vettore di propagazione trasmesso si potrà scrivere:  $\underline{k}_H = -k_1 \underline{e}$ . Questo risultato risponde alle nostre domande, infatti, anche l'onda trasmessa per  $\theta_i = -\alpha$  è diretta lungo l'asse ottico. Tale fenomeno assomiglia molto al caso di rifrazione negativa ben noto per i materiali a indice di riflessione negativo. In effetti in tali mezzi si ha un'onda trasmessa la cui fase si propaga su una direzione ortogonale a quella incidente, mentre la sua energia prosegue con un normale angolo di rifrazione. Anche in questo caso si può dimostrare che l'energia dell'onda trasmessa continua a propagarsi nella direzione dell'onda incidente, infatti<sup>5</sup>:

$$\underline{S}_H \cdot \underline{z}_0 = \sqrt{\varepsilon_c (\varepsilon_t \sin^2 \alpha + \varepsilon_c \cos^2 \alpha) k_t^2 - \varepsilon_c \varepsilon_t k_y^2} \quad (5.41)$$

tale quantità o è reale e positiva, oppure è puramente immaginaria. Inoltre, si noti che la componente ortogonale del vettore di Poynting tende a zero indipendentemente dall'angolo di incidenza. Questo è il motivo per cui la propagazione dell'energia nel mezzo è proibita quando le caratteristiche elettromagnetiche tendono a zero. Si può vedere che quando  $\theta_i = \pm\alpha$  e  $k_t = k_1$  il vettore di Poynting si può scrivere come segue:

$$\underline{S}_H \cdot \underline{z}_0 = \varepsilon_c k_1 \cos \alpha \quad (5.42)$$

indipendentemente dal segno del vettore di propagazione dell'onda incidente. Inoltre, si può notare che questa componente del vettore di Poynting può essere scritta, per un generico angolo del vettore di propagazione dell'onda incidente, come segue:

$$\underline{S}_H \cdot \underline{z}_0 \approx \sqrt{\varepsilon_c \varepsilon_t (k_1^2 \sin^2 \alpha - k_1^2 \sin^2 \theta_i)} \quad (5.43)$$

dove si trascura il termine  $\varepsilon_c^2$ , essendo un infinitesimo del secondo ordine. A questo punto si può capire perché il modulo del coefficiente di trasmissione è esattamente uguale all'unità quando  $|\theta_i| > \alpha$  (si veda Figura 5.1), infatti, in questi intervalli la componente ortogonale del vettore di Poynting dell'onda trasmessa è puramente immaginario, quindi nel mezzo non si propaga potenza reale.

I ragionamenti fatti valgono quando  $k_t = k_1$ . Nel caso in cui tale condizione non sia soddisfatta, i ragionamenti valgono solo nel caso in cui esista un'onda trasmessa parallela all'asse ottico. Inoltre, l'unità del coefficiente di trasmissione per valori dell'angolo di incidenza maggiori di un determinato valore può

<sup>5</sup>Si ricordi che:

$$\underline{S}_H = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{k}_H = (\varepsilon_{yy} k_{Hy} + \varepsilon_{yz} k_{Hz}) \underline{u}_y + (\varepsilon_{yz} k_{Hy} + \varepsilon_{zz} k_{Hz}) \underline{z}_0$$

being  $k_{Hz} = (\varepsilon_{yz} k_{Hy} + \sqrt{\varepsilon_c \varepsilon_{yz} k_t^2 - \varepsilon_c \varepsilon_t k_{Hy}^2}) / \varepsilon_{zz}$

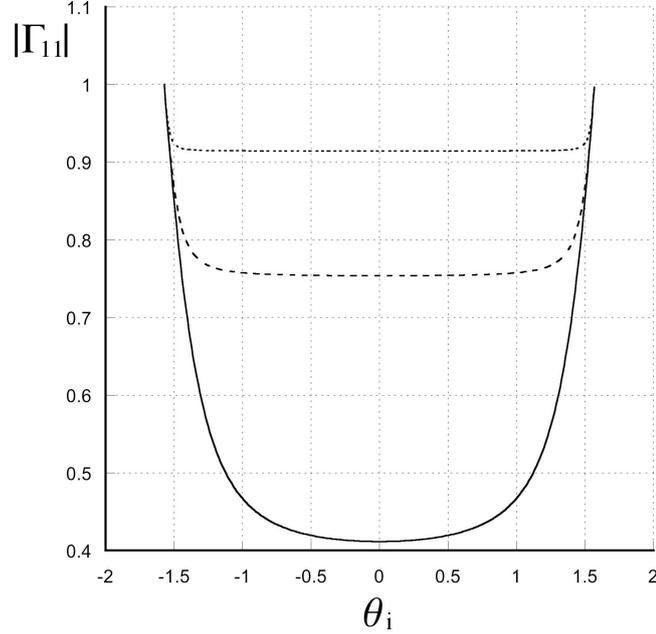


Figura 5.2: Ampiezza del coefficiente di riflessione  $\Gamma_{11}$ , quando il mezzo 1 sia l'aria e il mezzo 2 presenti un asse ottico con  $\alpha = 30^\circ$ , caratteristiche trasverse  $\varepsilon_t = \mu_t = 2$ , e caratteristiche longitudinali:  $\varepsilon_c = \mu_c = 0.1$  (linea continua),  $\varepsilon_c = \mu_c = 0.01$  (linea tratteggiata),  $\varepsilon_c = \mu_c = 0.001$  (linea puntinata). L'onda incidente si considera avere un vettore di propagazione sul piano  $(y, z)$ .

essere interpretato come una sorta di riflessione totale, in cui l'angolo dell'asse ottico assume il significato di angolo critico. A questo proposito, in Figura 5.2 è rappresentato il modulo del coefficiente di riflessione nel caso in cui  $\varepsilon_t = \mu_t = 2$ . si può notare che quando  $\varepsilon_c, \mu_c \rightarrow 0$ , l'ampiezza del coefficiente di riflessione va uniformemente all'unità, per ogni valore dell'angolo di incidenza. Questo comportamento si accentua inoltre quando  $\varepsilon_t, \mu_t \rightarrow \infty$ . Quindi la riflessione del mezzo sembra legata più al rapporto  $\varepsilon_c/\varepsilon_t$ , ovvero al rapporto delle componenti longitudinali e trasverse del mezzo, più che ai loro comportamenti singoli. Inoltre è bene notare che il vettore di propagazione dell'onda trasmessa per  $\theta_i = \pm\alpha$ , tende ancora a essere uguale a  $\pm k_{1c}$ , tuttavia un'onda con questo vettore di propagazione non può più propagarsi nel mezzo, infatti essa non è più soluzione dell'equazione di dispersione nel mezzo (5.25) se  $k_t \neq k_1$ .

A questo punto, si vuole discutere un caso particolare molto interessante. Si consideri un mezzo uniassiale come quello finora descritto, soddisfacente la relazione  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \zeta_1^2 \underline{\underline{\mu}}$  e in cui le componenti trasverse e longitudinali della permittività

siano le seguenti:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_1 M \quad \text{e} \quad \varepsilon_c = \varepsilon_1 / M \quad (5.44)$$

dove le costanti  $\varepsilon_1$  e  $\zeta_1$ , si considerano essere la permittività elettrica e l'impedenza caratteristica del mezzo isotropo da cui proviene l'onda incidente, rispettivamente. Quando  $M \rightarrow \infty$ , questo mezzo diventa un particolare mezzo SH/DB. Se ora si considera il caso in cui l'asse ottico sia ortogonale all'interfaccia, i.e.,  $\alpha = 0$ , tale mezzo diventa un Perfectly Matched Layer (PML), in una delle sue formulazioni classiche nella letteratura [7, 8]. In esso infatti sono vere le due condizioni:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \zeta_1^2 \underline{\underline{\mu}} \quad (5.45)$$

$$\varepsilon_c \varepsilon_t = \varepsilon_1^2 \quad (5.46)$$

necessarie per avere il fenomeno della trasmissione totale dell'onda piana uniforme incidente a qualsiasi angolo. Se si ragiona con attenzione su ciò che si è trovato, si arriva a capirne subito la stranezza. Infatti i mezzi SH/DB sono stati introdotti come mezzi che garantiscono l'annullamento di determinate componenti del campo elettromagnetico all'interfaccia, proibendo anche la propagazione al suo interno, come si è dimostrato quando si è visto che la componente ortogonale all'interfaccia del vettore di Poynting tende a diventare nulla per qualsiasi angolo dell'onda incidente per questo tipo di mezzi. Ora invece, non solo stiamo dicendo che la propagazione in tale mezzo è permessa, ma addirittura che l'onda viene totalmente trasmessa in esso, essendoci riflessione nulla. Inoltre, come si è visto, vi sono diversi tentativi nella letteratura di realizzazione di questa classe di mezzi, tramite particolari allineamenti di cilindri dielettrici. Si vuole quindi provare ora se sia possibile immaginare una realizzazione di un PML tramite uno di questi mezzi. Come è noto infatti, il PML è un mezzo irrealizzabile, a causa della presenza in esso di componenti attive difficilmente ottenibili nella pratica. Si procederà ora a dimostrare come sia possibile usare un mezzo SH/DB passivo per ottenere una realizzazione, se pur approssimata, di un PML.

Come è noto, in un PML è essenziale la presenza delle perdite, infatti, in assenza di perdite l'onda trasmessa continuerebbe a propagarsi indefinitamente nel mezzo e le applicazioni dello stesso come assorbitore sarebbero impossibili. Per prendere in considerazione le perdite si possono riscrivere le caratteristiche del mezzo, aggiungendo un termine esponenziale complesso:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_1 M e^{i\alpha} \quad \text{and} \quad \varepsilon_c = \frac{\varepsilon_1}{M} e^{-i\alpha} \quad (5.47)$$

dove  $\alpha \in [0, \pi/2]$ . Ora si può dire che queste rappresentino le caratteristiche di un PML. Si può vedere facilmente come la componente longitudinale presenti una parte attiva, cosa che impedisce l'effettiva realizzazione del mezzo. Sfruttiamo ora però il fatto che  $M \rightarrow \infty$ . Supponiamo che sia  $\alpha \ll 1$ , in questo caso si potranno sostituire le relazioni in (5.47) con le seguenti espressioni approssimate:

$$\varepsilon_t \approx \varepsilon_1 M (1 + i\alpha) \quad \text{and} \quad \varepsilon_c \approx \frac{\varepsilon_1}{M} \quad (5.48)$$

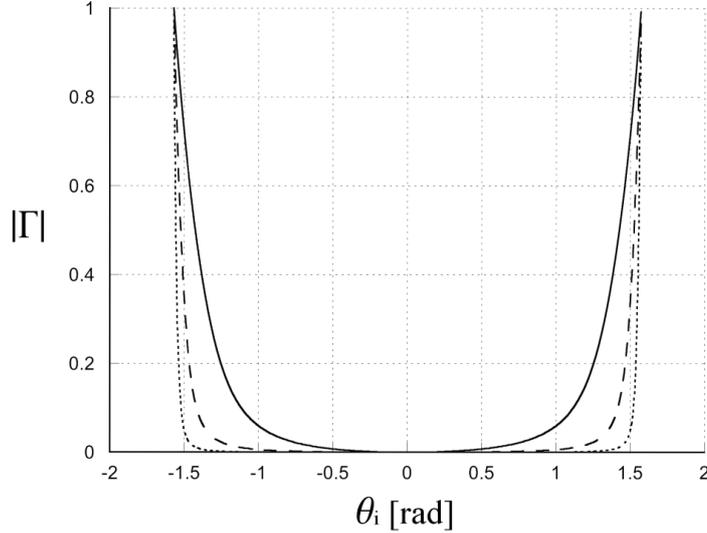


Figura 5.3: Ampiezza del coefficiente di riflessione (5.49) al variare dell'angolo di incidenza, quando:  $\alpha = 0.1$  (solid line),  $\alpha = 0.01$  (dashed line),  $\alpha = 0.001$  (dotted line).

Tali caratteristiche non rappresentano più un PML, non essendo più vere rigorosamente le condizioni (5.45), tuttavia, si può vedere che per valori sufficientemente piccoli del parametro  $a$ , questo mezzo continua a comportarsi approssimativamente come un PML. In effetti, il coefficiente di riflessione in questo caso semplice può essere scritto come segue:

$$\Gamma = \frac{\cos \theta_i - [1 - (1 + ia)^{-1} \sin^2 \theta_i]^{1/2}}{\cos \theta_i + [1 - (1 + ia)^{-1} \sin^2 \theta_i]^{1/2}} \quad (5.49)$$

si vede che tale coefficiente non dipende più dalle caratteristiche del mezzo di provenienza dell'onda incidente. Inoltre, non dipende neanche dal parametro  $M$ , ma solo dal parametro  $a$ . In Figura 5.3, il coefficiente di riflessione (5.49) è rappresentato per diversi valori del parametro  $a$ . Si vede che il coefficiente di riflessione tende a essere nullo per ogni angolo di incidenza e il fenomeno è sempre più vero più piccolo risulta il parametro  $a$ . Tale comportamento ci autorizza a chiamare tale mezzo un PML approssimato (a-PML)

Si possono fare a questo punto alcune considerazioni sul ruolo dei parametri  $a$  e  $M$ . Infatti, il parametro  $M$  non influenza il coefficiente di riflessione, mentre è fortemente legato alle perdite del mezzo, essendo queste legate al prodotto  $aM$ . Il parametro  $a$  invece è l'unico parametro del mezzo legato al coefficiente di riflessione. Un mezzo avente  $M \rightarrow \infty$  e  $a \rightarrow 0$ , è un mezzo avente il coefficiente

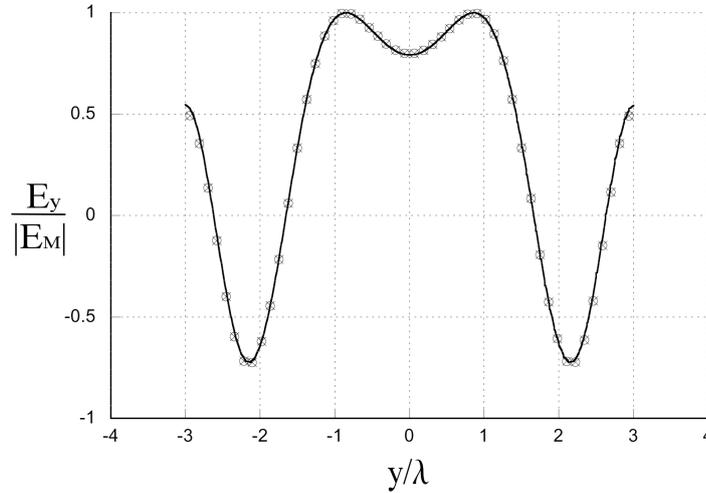


Figura 5.4: Parte reale della componente di campo elettrico parallela al dipolo calcolata a una distanza di una lunghezza d'onda dall'interfaccia in tre casi: radiazione nel vuoto (linea solida), slab composto di un materiale PML perfetto (croci) e caso in cui lo slab sia di un materiale PML approssimato (cerchi).

di riflessione di un PML, con perdite diverse da zero, ma con delle perdite non nulle. Esso quindi è a tutti gli effetti un PML passivo.

Nelle ipotesi fatte, il coefficiente di riflessione può essere approssimato alla seguente semplice espressione:

$$\Gamma \approx \frac{-i\alpha \tan^2 \theta_i}{4 + i\alpha \tan^2 \theta_i} \quad (5.50)$$

Per valutare le prestazioni del mezzo ora introdotto, si consideri un dipolo corto posto a una distanza di  $4\lambda$  da un'interfaccia piana con uno slab di materiale a-PML. Si è implementata una simulazione con il software Comsol Multiphysics 4.2. In Figura ??, è rappresentata la parte reale del campo elettrico parallela al dipolo, supposto allineato all'asse  $y$ . Il campo elettrico è calcolato su una linea parallela all'asse  $y$  a distanza di una lunghezza d'onda dall'interfaccia. Si sono considerate tre diverse situazioni: quando lo slab è assente e il dipolo irradia nel vuoto, quando lo slab è costituito di un PML perfetto, descritto dalle caratteristiche (5.47), e quando lo slab è costituito di un materiale a-PML, con  $a = 0.02$  e  $M = 20$  ( $\epsilon_t/\epsilon_c = 400$ ). Il campo è normalizzato rispetto al massimo valore sulla linea,  $|E_M|$ . Lo slab ha profondità pari a una lunghezza d'onda e termina su un piano conduttore elettrico perfetto, in modo da mettere in evidenza ogni riflessione non assorbita dal materiale. Si vede che i tre campi tendono a coincidere su tutta la linea.

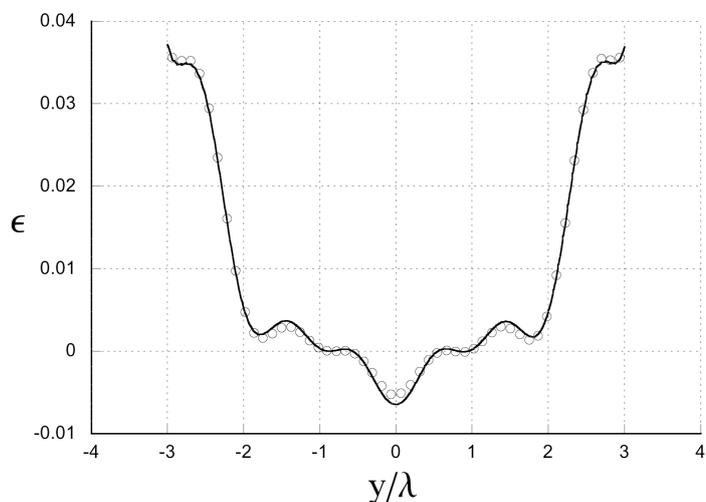


Figura 5.5: Differenze tra i campi rappresentati in Figura 5.4. La differenza è stata effettuata tra il campo nel vuoto e il campo con il PML (linea solida) e tra il campo nel vuoto e il campo con il PML approssimato (cerchi).

Per sottolineare la bontà dell'approssimazione, in Figura ??, è rappresentata la differenza tra il campo riflesso dal PML e dal a-PML, rispettivamente, con il campo in spazio libero. Si vede che in entrambi i casi si ha un errore inferiore al 1%. Tuttavia, maggiore risulta l'angolo  $\theta$ , ovvero ai bordi della linea, maggiore risulta essere l'errore. Questo è vero sia nel caso di PML perfetto che approssimato, come fatto notare anche in [7].

Per finire, si vuole anche considerare il caso di riflessione di un'onda guidata, avente uno spettro angolare ben più ampio dell'onda generata da un dipolo corto e quindi buona candidata per evidenziare eventuali imperfezioni del materiale proposto. In Figura 5.6, è rappresentata la parte reale del campo elettrico propagantesi in uno slab simmetrico nel modo  $TE_1$ . Lo slab è supposto avere un indice di rifrazione  $n = 1.7$ , e uno spessore di  $0.731\mu\text{m}$ . L'onda si suppone a una lunghezza d'onda di  $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ . Il campo elettrico è calcolato in tre diverse situazioni: quando lo slab si considera di lunghezza indefinita, quando lo slab si considera terminare su un PML perfetto e quando lo slab si considera terminare su un PML approssimato con  $M = 20$  e  $a = 0.01$ . Lo spessore del PML si considera uguale a  $2\lambda$ , mentre il campo è prelevato a distanza  $\lambda/2$  dall'interfaccia con il PML. In entrambi i casi si suppone che il PML termini su un piano conduttore elettrico perfetto. Una mappa bidimensionale di campo in questo slab è rappresentata in Figura ??

Come prima, si è considerata la differenza tra i diversi case e anche in questo

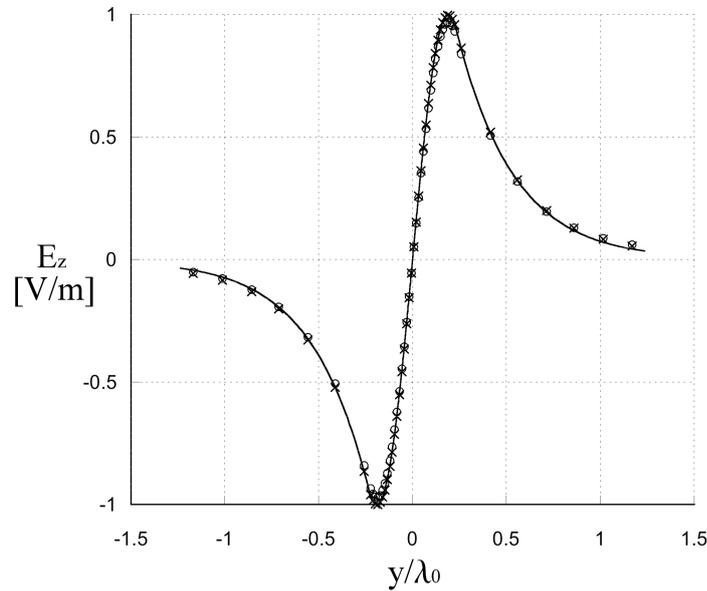


Figura 5.6: Parte reale del campo elettrico normalizzato in uno slab simmetrico privo di terminazioni (linea solida) e a una distanza  $\lambda/2$  da un PML (croci), e da un a-PML (cerchi).

caso si è ottenuto un errore inferiore al 3%, come si può vedere in Figura 5.8.

### 5.3 Mezzi adattati e unitarietà della matrice di riflessione

In questo paragrafo si vuole trattare il caso in cui il mezzo uniassiale sia isotropo affine e che sia adattato con il mezzo di provenienza dell'onda incidente. In questo caso dei diadi che rappresentano la permittività e la permeabilità sono legate da una costante e tale costante coincide con l'impedenza caratteristica trasversa:  $\underline{\underline{\epsilon}} = \zeta_1 \underline{\underline{\mu}}$  si suppone inoltre che l'asse ottico sia ortogonale al piano di incidenza, i.e.,  $\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{e}} = 0$ , in questo modo i parametri che caratterizzano la

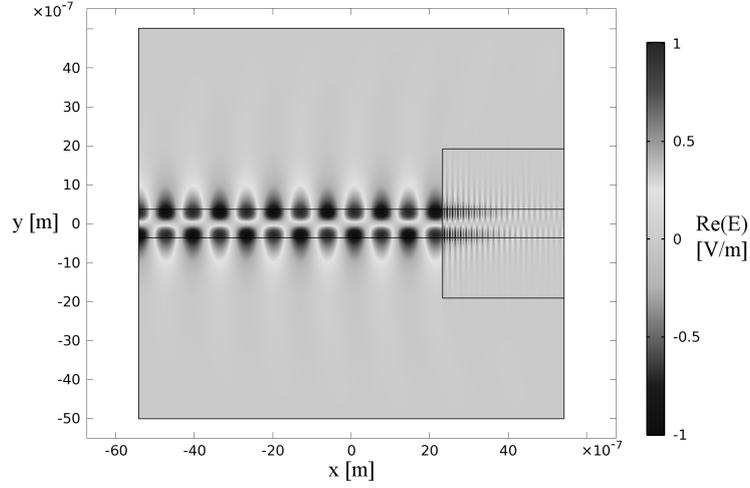


Figura 5.7: Rappresentazione bidimensionale della parte reale del campo elettrico normalizzato in uno slab simmetrico terminante su un PML approssimato sulla destra..

riflessione e la trasmissione, diventano i seguenti<sup>6</sup>:

$$A_{11} = -A_{22} = \hat{k}_\tau \left( \hat{k}_{iz} + \hat{k}_{Hz} \right) \underline{z}_0 \cdot \underline{c} \quad (5.51)$$

$$A_{12} = A_{21} = \left( \hat{k}_{iz} + \hat{k}_{Hz} \right) \underline{\nu} \cdot \underline{c} \quad (5.52)$$

$$B_{11} = -B_{22} = \hat{k}_\tau \left( \hat{k}_{iz} - \hat{k}_{Hz} \right) \underline{z}_0 \cdot \underline{c} \quad (5.53)$$

$$B_{12} = B_{21} = \left( \hat{k}_{iz} - \hat{k}_{Hz} \right) \underline{\nu} \cdot \underline{c} \quad (5.54)$$

Inserendo queste quantità nelle espressioni dei coefficienti  $\Gamma_{ij}$ , si può facilmente verificare che si ha di nuovo  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = 0$ , e:

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \frac{\hat{k}_{iz} - \hat{k}_{Hz}}{\hat{k}_{iz} + \hat{k}_{Hz}} \quad (5.55)$$

questa espressione risulta molto familiare, coincidendo sostanzialmente con l'espressione che si ha nel caso di mezzi isotropi. Quando  $\varepsilon_c, \mu_c \rightarrow 0$ , la componente  $\hat{k}_{Hz}$  tende a zero, quindi il coefficiente di trasmissione diventa nullo. In Figura 5.9, è rappresentato l'andamento dell'ampiezza di  $\Gamma_{11}$  come funzione dell'angolo di incidenza nelle stesse condizioni della Figura 5.2, ma con un'onda incidente avente il vettore di propagazione nel piano  $(x, z)$ . Ancora il comportamento di

<sup>6</sup>È sufficiente notare che in un mezzo isotropo affine non è presente il fenomeno della birifrangenza, quindi  $\hat{k}_E = \hat{k}_H$

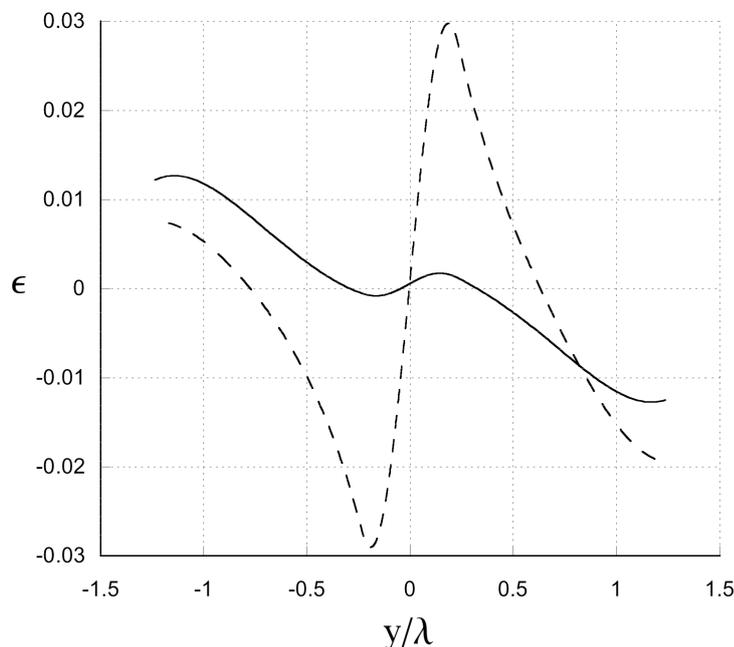


Figura 5.8: Differenze tra i campo di Figura 5.6. La differenza è stata effettuata tra il campo ottenuto con lo slab privo di terminazioni e lo slab terminato su un PML (linea solida) o su un a-PML (linea tratteggiata).

questo coefficiente può essere spiegato analizzando l'espressione della componente ortogonale all'interfaccia del vettore di propagazione dell'onda trasmessa. Se si considera l'espressione (4.8) nel caso  $k_{\tau\mathcal{I}} = k_x \underline{u}_x$ , si ottiene:

$$k_{Hz} = \sqrt{\frac{\varepsilon_c k_t^2 - \varepsilon_t k_x^2}{\varepsilon_t \sin^2 \alpha + \varepsilon_c \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_c k_t^2 - \varepsilon_t k_1^2 \sin^2 \theta_i}{\varepsilon_t \sin^2 \alpha + \varepsilon_c \cos^2 \alpha}} \quad (5.56)$$

Questa componente tende a diventare puramente immaginaria quando  $\varepsilon_c \rightarrow 0$ , il che vuol dire che l'onda trasmessa è non uniforme e attenuata ortogonalmente all'interfaccia. Quando  $\varepsilon_c$  è piccola, ma non nulla,  $k_{Hz}$  risulta reale per piccoli valori dell'angolo di incidenza, ma di nuovo immaginaria per grandi valori dello stesso, il che di nuovo è legato al fenomeno della riflessione totale.

In fine, si consideri il caso in cui l'asse ottico e il piano di incidenza formino un angolo generico l'uno con l'altro. Si manterrà l'ipotesi di un mezzo isotropo affine per via delle implicazioni che questa ipotesi comporta. Inoltre, si manterrà l'ipotesi di mezzi adattati, ovvero si supporrà  $\zeta_t = \zeta_1$ . In questo caso, è di nuovo possibile scrivere i coefficienti di riflessione e trasmissione in forma compatta. I

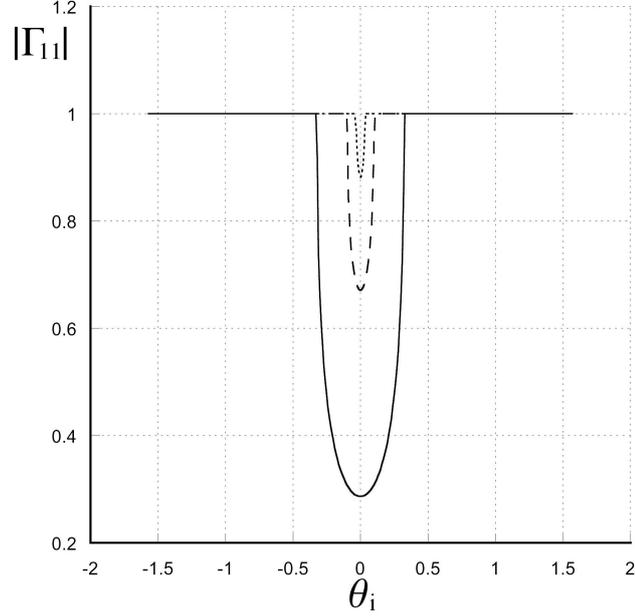


Figura 5.9: Ampiezza del coefficiente di riflessione  $\Gamma_{11}$ , quando il mezzo 1 è l'aria e il mezzo 2 ha un asse ottico formante un angolo  $\alpha = 30^\circ$  con l'asse  $z$ , ha parametri trasversi  $\varepsilon_t = \mu_t = 1$ , e longitudinali:  $\varepsilon_c = \mu_c = 0.1$  (linea solida),  $\varepsilon_c = \mu_c = 0.01$  (linea tratteggiata),  $\varepsilon_c = \mu_c = 0.001$  (linea puntinata). Il vettore di propagazione dell'onda incidente si suppone giacente sul piano  $(x, z)$ .

parametri delle matrici assumono le seguenti espressioni:

$$A_{11} = -A_{22} = \hat{k}_\tau \left( \hat{k}_{iz} + \hat{k}_{Hz} \right) \underline{z}_0 \cdot \underline{c} - \left( 1 - \hat{k}_\tau^2 + \hat{k}_{Hz} \hat{k}_{iz} \right) \underline{\tau} \cdot \underline{c} \quad (5.57)$$

$$A_{12} = A_{21} = \left( \hat{k}_{iz} + \hat{k}_{Hz} \right) \underline{\nu} \cdot \underline{c} \quad (5.58)$$

$$B_{11} = -B_{22} = \hat{k}_\tau \left( \hat{k}_{iz} - \hat{k}_{Hz} \right) \underline{z}_0 \cdot \underline{c} + \left( 1 - \hat{k}_\tau^2 - \hat{k}_{Hz} \hat{k}_{iz} \right) \underline{\tau} \cdot \underline{c} \quad (5.59)$$

$$B_{12} = B_{21} = \left( \hat{k}_{iz} - \hat{k}_{Hz} \right) \underline{\nu} \cdot \underline{c} \quad (5.60)$$

Che, inserite nelle espressioni dei coefficienti di riflessione, forniscono le seguenti relazioni:

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{22} \quad \Gamma_{12} = -\Gamma_{21} \quad (5.61)$$

Quindi, la matrice di riflessione risulta antisimmetrica (si ricordi che tali elementi risultano in generale complessi). È facile verificare inoltre che gli autovalori

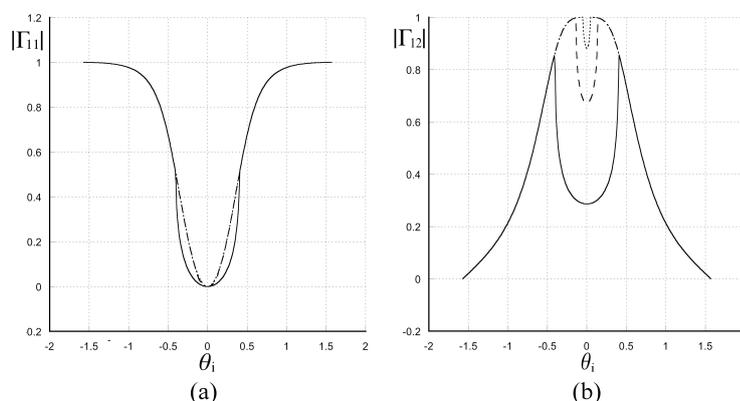


Figura 5.10: Ampiezza dei coefficienti di riflessione (a)  $\Gamma_{11}$  e (b)  $\Gamma_{12}$ , quando il mezzo 1 è l'aria e il mezzo 2 ha un asse ottico formante un angolo  $\alpha = 30^\circ$  con l'asse  $z$ , ha parametri trasversi  $\epsilon_t = \mu_t = 1$ , e longitudinali:  $\epsilon_c = \mu_c = 0.1$  (linea solida),  $\epsilon_c = \mu_c = 0.01$  (linea tratteggiata),  $\epsilon_c = \mu_c = 0.001$  (linea puntinata). Il vettore di propagazione dell'onda incidente si suppone essere contenuto in un piano ortogonale all'interfaccia e la sua proiezione su essa si considera formante un angolo  $\phi_i = 45^\circ$  con l'asse  $x$ .

di questa matrice sono i seguenti:

$$\gamma_{1/2} = \Gamma_{11} \pm i\Gamma_{12} \quad (5.62)$$

e che quindi i corrispondenti autovettori sono i seguenti:

$$\underline{\gamma}_{1/2} = (\pm i, 1) \quad (5.63)$$

Questi autovettori rappresentano due onde a polarizzazione circolare. Come conseguenza, le onde a polarizzazione circolare costituiscono gli automodi dell'interfaccia. L'andamento dei coefficienti di riflessione in questo caso è rappresentato in Figura 5.10, dove si sono considerate le ampiezze dei coefficienti  $\Gamma_{11}$  e  $\Gamma_{12}$ , visto che gli altri due sono legati a questi ultimi dalle relazioni in (5.61). Dalla Figura 5.10, si vede che i coefficienti di riflessione tendono a invertire la polarizzazione dell'onda incidente. Quando si considerano piccoli angoli di incidenza, le componenti diagonali della matrice di riflessione tendono a essere nulli, mentre le componenti non diagonali tendono all'unità. Tale comportamento si accentua quando i parametri trasversi del mezzo assumono valori maggiori. In particolare, nel caso in cui  $\epsilon_c, \mu_c \rightarrow 0$  e  $\epsilon_t, \mu_t \rightarrow \infty$ , si tende a un caso in cui la polarizzazione viene effettivamente invertita in riflessione, da cui si capisce perché l'onda a polarizzazione circolare costituisce un'autosoluzione di questa interfaccia. In Figura 5.11, sono rappresentate le ampiezze dei coefficienti di riflessione  $\Gamma_{11}$  e  $\Gamma_{12}$  nella stessa situazione della Figura 5.10, ma con i parametri trasversi  $\epsilon_t = \mu_t = 100$ .

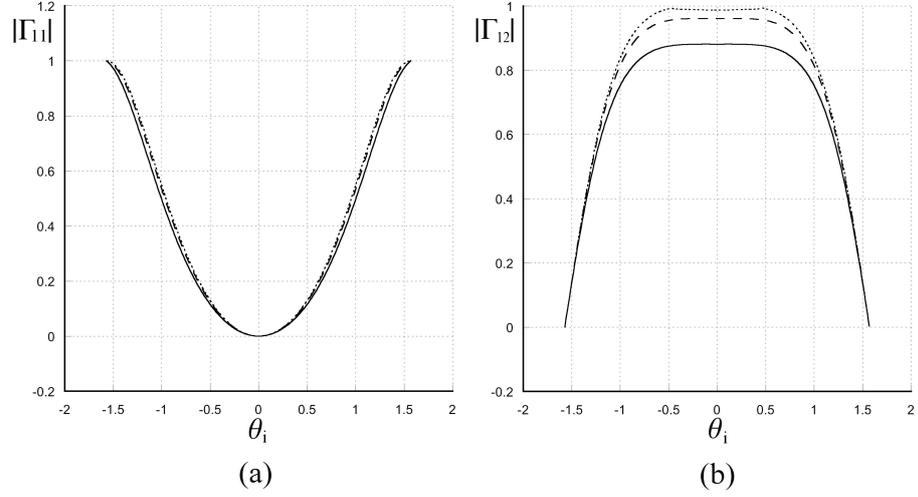


Figura 5.11: Ampiezza dei coefficienti di riflessione (a)  $\Gamma_{11}$  e (b)  $\Gamma_{12}$ , quando il mezzo 1 è l'aria e il mezzo 2 ha un asse ottico formante un angolo  $\alpha = 30^\circ$  con l'asse  $z$ , ha parametri trasversi  $\varepsilon_t = \mu_t = 100$ , e longitudinali:  $\varepsilon_c = \mu_c = 0.1$  (linea solida),  $\varepsilon_c = \mu_c = 0.01$  (linea tratteggiata),  $\varepsilon_c = \mu_c = 0.001$  (linea puntinata). Il vettore di propagazione dell'onda incidente si suppone essere contenuto in un piano ortogonale all'interfaccia e la sua proiezione su essa si considera formante un angolo  $\phi_i = 45^\circ$  con l'asse  $x$ .

Per concludere si vuole ora dimostrare un risultato di grande importanza e interesse. Quando i due mezzi sono adattati infatti è possibile dimostrare che la matrice di riflessione sia multiplo di una matrice unitaria. Partendo dalle relazioni (5.61), la cosa si può vedere che il coefficiente di proporzionalità risulta essere  $\sqrt{\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2}$ . Per dimostrare l'affermazione fatta si deve mostrare che:

$$\text{Im}[\Gamma_{11}\Gamma_{12}^*] = 0 \quad (5.64)$$

si può scrivere tale condizione in funzione dei parametri  $A_{ij}$  e  $B_{ij}$ , e, ricordando le relazioni (5.57)-(5.60), si può ottenere la seguente espressione:

$$\text{Im}[\Gamma_{11}\Gamma_{12}^*] = \frac{1}{|A_{11}^2 + A_{12}^2|^2} \text{Im}[(B_{11}A_{22} - B_{12}A_{21})(B_{12}A_{11} - B_{11}A_{12})^*] \quad (5.65)$$

di conseguenza, si deve dimostrare che la seguente quantità sia nulla:

$$\text{Im} \left[ B_{11}B_{12}^* |A_{11}|^2 - A_{11}A_{12}^* |B_{11}|^2 + A_{11}^*A_{12} |B_{12}|^2 - B_{11}^*B_{12} |A_{12}|^2 \right] \quad (5.66)$$

per proseguire nella dimostrazione è necessario fare uso delle seguenti identità:

$$|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2 = |B_{11}|^2 + |B_{12}|^2 \quad (5.67)$$

$$\text{Im} [B_{11}B_{12}^* - A_{11}A_{12}^*] = 0 \quad (5.68)$$

tali identità sono state dimostrate in Appendice D. Ora si possono scrivere le quantità  $A_{11}^*A_{12}$  e  $B_{11}^*B_{12}$  come segue:

$$A_{11}^*A_{12} = \text{Re} (A_{11}A_{12}^*) - A_{11}A_{12}^* \quad (5.69)$$

$$B_{11}^*B_{12} = \text{Re} (B_{11}B_{12}^*) - B_{11}B_{12}^* \quad (5.70)$$

Inserendo tali espressioni in (5.66), si ottiene:

$$\begin{aligned} & \text{Im} \left[ B_{11}B_{12}^* |A_{11}|^2 - A_{11}A_{12}^* |B_{11}|^2 - A_{11}A_{12}^* |B_{12}|^2 + B_{11}B_{12}^* |A_{12}|^2 + \right. \\ & \left. + |B_{12}|^2 \text{Re} (A_{11}A_{12}^*) - |A_{12}|^2 \text{Re} (B_{11}B_{12}^*) \right] \end{aligned} \quad (5.71)$$

quindi:

$$\begin{aligned} & \text{Im} \left[ B_{11}B_{12}^* (|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2) - A_{11}A_{12}^* (|B_{11}|^2 + |B_{12}|^2) + \right. \\ & \left. + |B_{12}|^2 \text{Re} (A_{11}A_{12}^*) - |A_{12}|^2 \text{Re} (B_{11}B_{12}^*) \right] \end{aligned} \quad (5.72)$$

usando l'uguaglianza (5.67), si può scrivere:

$$\begin{aligned} & \text{Im} \left[ (|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2) (B_{11}B_{12}^* - A_{11}A_{12}^*) + \right. \\ & \left. + |B_{12}|^2 \text{Re} (A_{11}A_{12}^*) - |A_{12}|^2 \text{Re} (B_{11}B_{12}^*) \right] \end{aligned} \quad (5.73)$$

a questo punto si può usare l'identità (5.68) e scrivere la seguente espressione:

$$\begin{aligned} & \text{Im} \left[ (|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2) \text{Re} (B_{11}B_{12}^* - A_{11}A_{12}^*) + \right. \\ & \left. + |B_{12}|^2 \text{Re} (A_{11}A_{12}^*) - |A_{12}|^2 \text{Re} (B_{11}B_{12}^*) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.74)$$

la quale è identicamente nulla come è facile vedere.

A questo punto può essere enunciata la seguente proprietà della matrice di riflessione di un'interfaccia: quando un mezzo uniassiale è isotropo affine, con la stessa impedenza caratteristica del mezzo isotropo da cui proviene l'onda incidente, allora la matrice del coefficiente di riflessione risulta proporzionale a una matrice unitaria, con un coefficiente di proporzionalità pari a  $\sqrt{|\Gamma_{11}|^2 + |\Gamma_{12}|^2}$ .

Tale proprietà risulta essere un'estensione di ciò che si trova nel caso di mezzi isotropi, quando, nel caso di mezzi adattati, la matrice di riflessione risulta essere un multiplo della matrice di identità, quando si scelgano opportunamente i versi dei vettori di campo elettrico e magnetico delle onde incidente e riflessa.



# Conclusione

Nel lavoro presentato sono state affrontate diverse problematiche intorno alla propagazione e alla diffrazione di onde elettromagnetiche in mezzi con perdite. I principali obiettivi raggiunti possono essere suddivisi in tre gruppi, quelli riguardanti la propagazione in mezzi con perdite, quelli riguardanti la diffrazione da strutture cilindriche e quelli legati alla propagazione in mezzi uniassici.

Nell'ambito della propagazione in mezzi con perdite, si è ottenuta un'espressione analitica per rappresentare l'angolo complesso di un vettore di propagazione in un mezzo con perdite come funzione dei parametri caratteristici dello stesso vettore nella formulazione dei vettori di fase e attenuazione. Il legame tra questi due formalismi è di grande importanza in elettromagnetismo, infatti, in molte applicazioni l'uno o l'altro formalismo risulta molto più conveniente dell'altro, è quindi fondamentale poter passare dall'uno all'altro per poter affrontare, nello stesso scenario, problemi di natura diversa.

Un'altra questione di grande interesse che è stata affrontata riguarda il bilancio energetico nell'incidenza di un'onda elettromagnetica all'interfaccia tra due mezzi con perdite. Il problema nasce dal fatto che il vettore di fase dell'onda elettromagnetica trasmessa forma un angolo con la normale all'interfaccia che, al contrario di quanto succede in mezzi privi di perdite, può superare l'angolo retto. Questo fenomeno a una prima analisi può sembrare molto strano, infatti, sembrerebbe che l'onda trasmessa nel secondo mezzo abbia un vettore di fase diretto verso il mezzo di provenienza della radiazione elettromagnetica. Una prima spiegazione del fenomeno, trovata nella letteratura, legava il fenomeno a una sorta di riflessione totale [3]. Tale ipotesi però si rivela subito errata, infatti, l'onda trasmessa è ottenuta utilizzando l'equazione di dispersione del secondo mezzo e quindi non si può ipotizzare che essa si propaghi nel primo. Nel lavoro presentato si è visto come questo fenomeno fosse legato al fatto che, in un mezzo con perdite, per un'onda non uniforme non è banale definire una direzione di propagazione dell'energia. Per interpretare i risultati in questione quindi si è individuata una possibile direzione di propagazione efficace, definita come la direzione di propagazione della sola potenza reale. In questo modo, si trova che le uniche onde trasmesse con un angolo di propagazione efficace dell'energia superiore all'angolo retto, sono quelle eccitate da un'onda incidente avente anch'essa un angolo superiore a quello retto, ovvero sono onde relative a problemi mal posti. In altre parole, si trova un'onda trasmessa che si propaga

nella direzione del primo mezzo, e non del secondo, solo quando anche l'onda incidente si propaga nella direzione del primo mezzo, invece che del secondo. Ovvero, nei casi in cui la radiazione incidente si suppone propagarsi nella direzione sbagliata. Tali problemi sono evidentemente mal posti. Questo risultato è molto importante perché evidenzia come sia molto importante avere un quadro chiaro della propagazione nell'energia nei mezzi con perdite per evitare di incorrere in errori banali. Questo aspetto della propagazione in mezzi con perdite non è molto approfondito nella letteratura e meriterebbe un più attento studio [2, 11, 74].

Infine, per quanto riguarda la riflessione e la trasmissione all'interfaccia tra due mezzi con perdite, si è trovato un fenomeno molto interessante, riguardante la radiazione trasmessa per un determinato angolo critico. Tale onda ha la proprietà di non attenuarsi nella direzione ortogonale all'interfaccia e quindi di propagarsi indefinitamente allontanandosi da questa nel mezzo con perdite. L'onda in questione, infatti, ha il vettore di attenuazione puramente parallelo all'interfaccia. Tale fenomeno è stato dimostrato sia all'interfaccia tra due mezzi con perdite, sia nella più comune interfaccia dielettrico-conduttore. In entrambi i casi, perché il fenomeno si presenti, è necessario che l'onda incidente presenti un certo grado di non uniformità [11]. Inoltre, l'onda trasmessa non attenuata gode di alcune importanti proprietà, prima tra tutte quella di tendere ad avere il vettore di fase parallelo alla normale all'interfaccia all'aumentare della non uniformità dell'onda incidente. Il fenomeno dell'onda trasmessa non attenuata è ovviamente un fenomeno ideale, che si presenta nell'ipotesi di onde non uniformi a fronte infinito. Tuttavia, esattamente come altri fenomeni limite, come la riflessione e la trasmissione totale tra mezzi non dissipativi, si può ragionevolmente supporre di riuscire a ottenere tale effetto anche in condizioni reali. La difficoltà maggiore che ci si aspetta nella pratica, riguarda lo spettro spaziale dell'onda incidente, infatti, è molto difficile ottenere un'onda non uniforme che sia una buona approssimazione di un'onda ideale, tuttavia, nella letteratura, c'è un vasto studio di questo tipo di onde e diverse antenne sono state proposte per generare onde che approssimino l'onda piana non uniforme ideale [9, 68]. Si sta facendo riferimento all'ambito delle antenne a onda leaky che, come è noto, occupano una posizione di grande importanza nello studio dell'elettromagnetismo applicato. Se il fenomeno proposto dovesse trovare conferme sperimentali, anche solo in forma approssimata, esso risulterebbe di grande importanza in una vasta gamma di applicazioni, dalla rilevazione di oggetti sepolti, al riscaldamento a microonde dei materiali.

Passando alla diffrazione da oggetti sepolti in mezzi con perdite, il principale risultato raggiunto consiste nell'aver ottenuto un codice numerico in grado di calcolare il campo elettromagnetico diffratto da un'arbitraria disposizione di cilindri sepolti in un generico mezzo con perdite. Questo risultato ha permesso di confrontare i risultati ottenuti con la letteratura in casi reali, infatti, nella grande maggioranza dei casi, quando si vuole rilevare un oggetto sepolto, esso si trova in un mezzo dissipativo. Si pensi, come esempio, alla rilevazione di tubi e cavi immersi nel terreno. Perché lo strumento teorico sia di qualche utilità in queste applicazioni, è assolutamente necessario che contempli la presenza delle perdite.

Si è visto che i risultati ottenuti sono in ottimo accordo, sia con la letteratura, sia con le simulazioni implementate su un software commerciale. Un'altra proprietà importante del codice ottenuto riguarda la sua rapidità di calcolo. Paragonato con un software commerciale di simulazione elettromagnetica general purpose, infatti, si ha un fattore dieci, quando non un fattore cento, di differenza sui tempi di elaborazione. Tale risultato è di grande importanza se si pensa a un possibile utilizzo del codice all'interno del software di elaborazione degli strumenti di rilevamento. In questi strumenti infatti è importante che la rilevazione avvenga in tempi rapidi, in modo da poter ottenere i risultati, per quanto possibile, in tempo reale.

Per quanto riguarda la propagazione in mezzi anisotropi con perdite, i principali risultati ottenuti riguardano lo studio della materializzazione delle condizioni al contorno. Infatti, avendo studiato la riflessione e la trasmissione tra un mezzo isotropo e un mezzo uniassico, avente sia la permittività elettrica che la permeabilità magnetica in forma diadica, si è riuscito a studiare le interazioni all'interfaccia nel caso più generale e quindi anche nel caso in cui le proprietà del mezzo anisotropo diventassero estreme, tendendo a zero o all'infinito. In questi casi, l'interfaccia con il mezzo uniassico realizza particolari condizioni al contorno [6]. Oltre ad aver ottenuto la soluzione generale di tale problema, si sono studiati alcuni casi particolari, studiando il mezzo che realizza una particolare condizione al contorno che richiede l'annullamento delle componenti del campo in una particolare direzione dello spazio. Tale interfaccia ha dimostrato di avere possibili applicazioni nella selezione angolare dell'onda incidente e nella manipolazione della polarizzazione, in particolare, con un'opportuna scelta delle caratteristiche assiali e trasversali e dell'asse ottico, è possibile ottenere un'inversione della polarizzazione in riflessione. Uno dei casi particolari più interessanti che si è analizzato è il caso in cui l'interfaccia si comporti come uno strato perfettamente adattato. In particolare, si è visto che, quando l'asse ottico è parallelo alla normale all'interfaccia, il mezzo uniassico è adattato con il mezzo isotropo e sussiste una particolare condizione tra le caratteristiche assiali e trasversali, allora il coefficiente di riflessione all'interfaccia risulta nullo per qualsiasi angolo di incidenza. In questo senso il mezzo uniassico si comporta come un Perfectly Matched Layer (PML) [7]. Tale risultato di per se non è sorprendente, infatti, nella letteratura è noto il fatto di poter realizzare un PML con un particolare mezzo uniassico [8]. La cosa sorprendente invece è che il mezzo, in queste condizioni rappresenti una condizione al contorno DB. Ora, come è stato dimostrato in questo lavoro, ma come era anche noto nella letteratura [6], una condizione al contorno DB corrisponde a una condizione di riflessione totale all'interfaccia. Quindi, una condizione di totale riflessione si trasforma in una condizione di totale trasmissione, scegliendo opportunamente la relazione che lega le componenti trasversali e assiali della permittività elettrica e della permeabilità magnetica. Inoltre, si è dimostrato che il mezzo uniassico proposto può approssimare una condizione PML sotto certe condizioni, rimanendo un materiale puramente passivo. Questo risultato è molto importante, infatti un mezzo uniassico passivo può sempre essere ottenuto tramite un opportuno allineamento di cilindri immersi in un mezzo omogeneo. Si configura quindi la

possibilità di realizzare un assorbitore elettromagnetico valido per qualunque angolo della radiazione incidente o, in altre parole, valido per qualsiasi forma d'onda incidente.

Infine, un risultato meno importante nelle applicazioni, ma di grande importanza nella teoria dell'elettromagnetismo, riguarda una proprietà dei coefficienti di riflessione all'interfaccia tra un mezzo isotropo e un mezzo uniassico. In particolare, si è dimostrato che quando i due mezzi sono adattati, ovvero quando il mezzo uniassico è isotropo affine con la stessa impedenza del mezzo isotropo, allora la matrice di riflessione, formata dai coefficienti relativi alle due polarizzazioni incidenti e dai coefficienti di cross-polarizzazione, è un multiplo di una matrice unitaria. La costante di proporzionalità è legata alla percentuale di energia riflessa nelle diverse polarizzazioni. Tale proprietà è del tutto generale e può essere ricavata in modo banale anche nel caso in cui entrambi i mezzi siano isotropi. In questo senso, tale proprietà sembra essere di validità generale per qualunque interfaccia e sarebbe molto interessante studiare l'interfaccia con un mezzo anisotropo generico per verificare se essa sia soddisfatta anche in quel caso.

# Lista delle pubblicazioni

## Pubblcazioni su rivista

- [R.1] F. Frezza, G. Schettini e N. Tedeschi, ‘Generalized plane-wave expansion of cylindrical functions in lossy media convergent in the whole complex plane,’ *Optics Communications*, vol. 284, pp. 3867-3871, agosto 2011.
- [R.2] F. Frezza e N. Tedeschi, ‘Deeply penetrating waves in lossy media,’ *Optics Letters*, vol. 37, pp. 2616-2618, luglio 2012.
- [R.3] F. Frezza e N. Tedeschi, ‘On the electromagnetic power transmission between two lossy media: discussion,’ *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 29, pp. 2281-2288, novembre 2012.
- [R.4] F. Frezza, L. Pajewski, C. Ponti, G. Schettini e N. Tedeschi, ‘Electromagnetic scattering by a metallic cylinder buried in a lossy medium with the Cylindrical Wave Approach,’ *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 10, pp. 179-183, gennaio 2013.
- [R.5] F. Frezza, L. Pajewski, C. Ponti, G. Schettini e N. Tedeschi, ‘On some numerical aspects of the scattering problem by buried objects,’ *The International Journal for Computational and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering (COMPEL)*, in corso di stampa, 2013.
- [R.6] F. Frezza, L. Pajewski, C. Ponti, G. Schettini e N. Tedeschi, ‘Cylindrical-Wave Approach for electromagnetic scattering by subsurface metallic targets in a lossy medium,’ *Journal of Applied Geophysics*, in corso di stampa.
- [R.7] N. Tedeschi, F. Frezza e A. Sihvola, ‘New results on the reflection of a plane wave by the interface with a uniaxial medium with applications to boundary conditions,’ *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, articolo sottomesso.

## Partecipazioni a conferenze

[C.1] W. Arrighetti, F. Frezza, L. Pajewski, D. Saccoccioni, G. Schettini e N. Tedeschi, 'Plane-Wave Expansion of Cylindrical Functions in Lossy Media,' *Atti della XVIII Riunione Nazionale di Elettromagnetismo*, Benevento, 6-10 settembre 2010, pp. 51-58.

[C.2] G. Schettini, M. A. Fiaz, F. Frezza, L. Pajewski, C. Ponti e N. Tedeschi, 'Recent advances in the cylindrical-wave approach for electromagnetic scattering by subsurface targets,' *Proceedings of the European Geosciences Union General Assembly 2011*, Vienna, 3-8 aprile 2011, p. 2101.

[C.3] F. Frezza, F. Mangini e N. Tedeschi, 'A Numerical Study for the Electromagnetic Scattering of an Elliptically Polarized Plane Wave by a Concentric Spherical Object in a Dissipative Medium,' *Proceedings of the European Geosciences Union General Assembly 2012*, Vienna, 22-27 aprile 2012, p. 14311.

[C.4] F. Frezza, L. Pajewski, C. Ponti, G. Schettini e N. Tedeschi, 'CWA for Electromagnetic Scattering by Subsurface Targets in a Lossy Medium,' *Proceedings of the European Geosciences Union General Assembly 2012*, Vienna, 22-27 aprile 2012, p. 2505.

[C.5] F. Frezza, L. Pajewski, C. Ponti, G. Schettini e N. Tedeschi, 'Electromagnetic Scattering by a Metallic Cylinder Buried in a Lossy Medium with the Cylindrical Wave Approach,' *Atti della XIX Riunione Nazionale di Elettromagnetismo*, Roma, 10-14 settembre 2012, pp. 207-210.

[C.6] N. Tedeschi, 'Deep Penetration of Inhomogeneous Plane Waves in Lossy Media,' *Atti della XIX Riunione Nazionale di Elettromagnetismo*, Roma, 10-14 settembre 2012, pp. 473-476.

# Appendici



## Appendice A

# La suscettività generalizzata

In meccanica statistica, ed in particolare nella teoria delle fluttuazioni si hanno una serie di teoremi del tutto generali sulle deviazioni che una generica grandezza fisica  $x$  può presentare intorno al suo valore medio  $\bar{x}$ . In genere queste fluttuazioni sono le piccole deviazioni che subisce la grandezza fisica quando si trova nello stato di equilibrio. Si possono però trovare leggi di carattere generali anche in cui un corpo sia sotto l'influsso di una forza esterna, e quindi non in uno stato di equilibrio. In questo caso ci si riferisce a quelle grandezze fisiche che possono essere descritte, all'interno nell'operatore di Hamilton, da un operatore avente la seguente forma:

$$\hat{V} = -\hat{x}f(t) \quad (\text{A.1})$$

dove  $\hat{V}$  è l'operatore, relativo alla grandezza fisica, che perturba l'Hamiltoniana,  $\hat{x}$  è l'operatore relativo alla grandezza fisica sottoposta alle fluttuazioni ed  $f(t)$  è grandezza esterna, dipendente dal tempo, che sta perturbando il sistema (la quale non deve necessariamente avere le dimensioni di una forza). Per legare subito il presente discorso alla teoria dell'elettromagnetismo, notiamo che la grandezza fisica  $x$  può rappresentare il dipolo elettrico e la 'forza' esterna  $f$  il campo elettrico  $E(t)$ . In questo caso, l'energia potenziale classica assume la forma  $V = pE(t)$ , quindi, per il ben noto teorema della meccanica quantistica, si può scrivere  $\hat{V} = -\hat{p}E(t)$ . Ciò detto proseguiamo con il formalismo generale in (A.1). In presenza della perturbazione, il valor medio  $\bar{x}$  della grandezza fisica  $x$  sarà diverso da zero e può rappresentarsi come il prodotto di un operatore  $\hat{\alpha}$  per l'azione esterna  $f$ :

$$\bar{x}(t) = \hat{\alpha}f(t) = \int_0^{+\infty} \alpha(\tau)f(t-\tau)d\tau \quad (\text{A.2})$$

L'operatore  $\hat{\alpha}$ , esattamente come  $\alpha$ , dipendono dalle proprietà del corpo.  $\alpha$  può essere uno scalare, od un tensore, a seconda di tali proprietà. A questo

punto sottolineiamo un fatto di fondamentale importanza: l'integrale (A.2) è esteso solo tra 0 e  $+\infty$ , in quanto la risposta del corpo può dipendere solo dai valori assunti dall'azione esterna negli istanti precedenti all'istante  $t$  che si sta considerando, ovvero la risposta del corpo non può dipendere da ciò che avverrà nel futuro. Questo è un modo di esprimere il principio di causalità, il quale viene assunto come ipotesi del presente modello. Notiamo inoltre che l'equazione (A.2), presuppone che la risposta del sistema sia lineare, dato che si suppone che l'operatore  $\hat{\alpha}$  non dipenda dalla forza esterna. Questa ipotesi è già più forte della precedente, infatti sappiamo bene che in elettromagnetismo i materiali non lineari sono tutt'altro che rari, soprattutto quando si considerano ampiezze dei campi esterni molto elevate rispetto alle energie di equilibrio del sistema. Notiamo infine che nella teoria dei sistemi l'equazione (??) può rappresentare la risposta di un qualsiasi sistema lineare e causale ad una perturbazione esterna. Quanto stiamo per definire e dimostrare, quindi, ha validità generale per un qualsiasi sistema di questo tipo.

Notiamo che l'integrale in (A.2) è un integrale di convoluzione, quindi trasformando ambo i membri secondo Fourier si ottiene:

$$\bar{x}(\omega) = \alpha(\omega)f(\omega) \quad (\text{A.3})$$

dove le grandezze in (A.3) sono ovviamente le trasformate di Fourier delle grandezze in (A.2). In particolare si avrà:

$$\alpha(\omega) = \int_0^{+\infty} \alpha(t)e^{i\omega t} dt \quad (\text{A.4})$$

La grandezza  $\alpha(\omega)$  è detta *suscettività generalizzata* e determina completamente il comportamento del corpo sotto l'azione di una data perturbazione.

La suscettività generalizzata è una funzione complessa e potremo scrivere:

$$\alpha(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega) \quad (\text{A.5})$$

dalla (A.4), si vede subito che vale:

$$\alpha(-\omega) = \alpha^*(\omega) \quad (\text{A.6})$$

dalla quale, con la (A.5), si vede che  $\alpha'$  è una funzione pari della frequenza, mentre  $\alpha''$  ne è una funzione dispari. Notiamo subito che, essendo una funzione dispari,  $\alpha''$  in  $\omega = 0$  può avere solo due comportamenti, o essere nulla, o tendere all'infinito. Notiamo che le proprietà (A.5) e (A.6), dipendono esclusivamente dal fatto che la risposta del sistema  $x$  deve mantenersi reale per ogni azione esterna  $f$  reale.

La risposta del sistema, sarà finita per ogni azione esterna finita, quindi la suscettività deve tendere ad un valore costante quando  $\omega \rightarrow \infty$  (altrimenti l'anti-trasformata di Fourier non sarebbe definibile). Supporremo qui che tale valore sia nullo, ovvero  $\alpha_\infty = 0$ . Nel caso in cui tale valore sia diverso da zero, la trattazione subisce variazioni minime.

Cercheremo ora di capire come la dissipazione dell'energia sia legata alla suscettività. Come è ben noto, le variazioni dello stato di un corpo sotto l'azione di una forza esterna sono sempre accompagnate dall'assorbimento di una parte dell'energia (secondo principio delle termodinamica). Tale dissipazione può essere scritta in funzione del valore medio dell'operatore di Hamilton. In generale la variazione dell'energia si può esprimere come segue:

$$\frac{dE}{dt} = \overline{\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)} \quad (\text{A.7})$$

la quale è ragionevole pensando all'espressione dell'operatore di Hamilton nel caso di un sistema stazionario [53]. La media temporale dell'espressione (A.7) fornisce l'energia dissipata dal sistema. Tale espressione è di fondamentale importanza, infatti se si dispone dell'espressione per la variazione temporale dell'energia, tramite la (A.7) si può risalire alla perturbazione che funge da azione esterna. Dato che l'unica perturbazione aggiunta all'operatore di Hamilton dell'equilibrio è quella in (A.1) e visto che l'Hamiltoniana di equilibrio è, ovviamente, indipendente dal tempo, potremo scrivere:

$$\frac{dE}{dt} = \overline{\left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial t}\right)} = -\bar{x} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{A.8})$$

Supponendo che l'azione esterna sia puramente monocromatica, potremo scrivere<sup>1</sup>:

$$f(t) = \text{Re} [f_0 e^{-i\omega t}] = \frac{1}{2} [f_0 e^{-i\omega t} + f_0^* e^{i\omega t}] \quad (\text{A.9})$$

la quale, inserita in (A.2), fornisce:

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{2} [\alpha(\omega) f_0 e^{-i\omega t} + \alpha^*(\omega) f_0^* e^{i\omega t}] \quad (\text{A.10})$$

Inserendo (A.9) e (A.10) in (A.8), si ottiene la seguente espressione:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{i\omega}{4} [|f_0|^2 (\alpha^* - \alpha) + 2 (\alpha f_0^2 e^{-2i\omega t} - \alpha^* f_0^{*2} e^{2i\omega t})] \quad (\text{A.11})$$

I termini armonici si annullano quando si opera la media temporale, quindi l'energia dissipata sarà:

$$Q = \frac{\omega}{2} \alpha''(\omega) |f_0|^2 \quad (\text{A.12})$$

Vediamo quindi che le caratteristiche di assorbimento del corpo sono contenute nella parte immaginaria della suscettività. Siccome ogni processo fisico deve

<sup>1</sup>Tale ipotesi non è in alcun modo restrittiva in quanto qualunque forza esterna si potrà sempre scrivere come sovrapposizione di termini monocromatici e, vista la linearità del sistema, ognuno di questi termini potrà essere trattato singolarmente

essere dissipativo, ne deduciamo che la parte immaginaria della suscettività deve essere strettamente positiva.

Ora siamo in grado di ottenere delle relazioni del tutto generali per la suscettività generalizzata. Andiamo a dimostrare le relazioni di Kramers-Kronig. Consideriamo la funzione complessa  $\alpha$  della variabile complessa  $\omega$ . Dall'espressione (A.4), vediamo che l'integrale contiene il termine  $\exp[-\omega''t]$ , siccome la funzione  $\alpha(t)$  è per definizione finita per ogni  $t$ , ne segue che per  $\omega'' > 0$ , l'integrale è sempre convergente e quindi la funzione  $\alpha(\omega)$  non è mai singolare ed è monodroma. Quindi la funzione complessa  $\alpha(\omega)$  non ha punti singolari nel semipiano superiore. Sul semipiano inferiore questo non è detto, infatti l'esponenziale diventa crescente e la funzione  $\alpha(\omega)$  potrebbe presentare dei punti di singolarità. Inoltre, la relazione (A.6) può essere generalizzata:

$$\alpha(-\omega^*) = \alpha^*(\omega) \quad (\text{A.13})$$

dalla quale troviamo che la funzione  $\alpha$  è puramente reale sull'asse immaginario  $i\omega''$ . È ora possibile dimostrare che tale asse è l'unico luogo geometrico dove la funzione assume valori puramente reali e che ivi è monotona decrescente in  $\omega'' \in [0, +\infty]$ . Per dimostrarlo si considero il principio dell'argomento di Cauchy [23]:

$$2\pi i(P - Z) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (\text{A.14})$$

dove  $P$  e  $Z$  sono rispettivamente il numero di poli e di zeri che sono contenuti nel percorso chiuso  $\mathcal{C}$ . Possiamo allora scrivere:

$$2\pi i(P - Z) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\alpha}{d\omega} \frac{1}{\alpha - a} d\omega \quad (\text{A.15})$$

dove  $a$  è un numero reale e  $P$  e  $Z$  rappresentano il numero di poli e zeri della funzione  $\alpha - a$ . Si consideri, come contorno  $\mathcal{C}$ , l'asse reale chiuso con la semicirconferenza all'infinito nel semipiano superiore, percorso in senso antiorario. Supponiamo, per ora, che  $\alpha$  assuma in 0 un valore finito  $\alpha_0$ . Abbiamo dimostrato poco sopra che  $\alpha$  non ha poli nel semipiano superiore, quindi  $P = 0$ . Rimane quindi  $Z$ , il quale rappresenta il numero di zeri di  $\alpha - a$ , ovvero il numero di volte che la funzione  $\alpha$  assume il valore reale  $a$ . Riscriviamo l'integrale (A.15), come segue:

$$2\pi iZ = \oint_{\mathcal{C}'} \frac{1}{\alpha - a} d\alpha \quad (\text{A.16})$$

dove  $\mathcal{C}'$  è la trasformazione conforme del percorso  $\mathcal{C}$ , secondo la trasformazione  $\alpha(\omega)$ . Sappiamo che sulla semicirconferenza all'infinito nel semipiano superiore,  $\alpha$  è sempre nulla, quindi tale porzione del percorso  $\mathcal{C}$ , collassa nell'origine del piano di  $\alpha$ . Vediamo ora come si trasforma l'asse reale. L'origine si trasforma nel punto, sull'asse reale del piano di  $\alpha$ ,  $\alpha_0$ . Notiamo ora che 0 ed  $\alpha_0$  sono le uniche intersezioni del percorso con l'asse reale, infatti abbiamo detto prima

che, per frequenze reali  $\alpha$  è sempre un numero complesso, in virtù del fatto che ogni mezzo è dissipativo. Inoltre, i valori assunti in uno dei semiassi reali di  $\omega$  saranno complessi coniugati con quelli assunti sull'altro semiassi. Ne segue che i due semiassi si trasformano in curve molto complesse, ma giacenti in due semipiani diversi del piano di  $\alpha$ , una nel semipiano superiore e l'altra nel semipiano inferiore, senza mai intersecare l'asse reale.  $\mathcal{C}'$ , sarà quindi una curva chiusa, intersecante l'asse reale del piano di  $\alpha$  in due punti. Se il numero  $a$  giace nell'intervallo  $[0, \alpha_0]$ , quindi è aggirato una volta dal percorso chiuso, il numero di zeri risulta uguale ad 1, altrimenti, se  $a > \alpha_0$ , è nullo. Questo vuol dire che il numero complesso  $\alpha$  assume una sola volta ogni valore reale  $a \in [0, \alpha_0]^2$ . Si può quindi dedurre prima di tutto che sull'asse immaginario del piano di  $\omega$  la funzione reale  $\alpha(i\omega'')$  non ha né massimi, né minimi, altrimenti si troverebbe ad assumere due volte lo stesso valore reale. Quindi su tale asse la funzione  $\alpha$  è monotona decrescente, andando dal valore massimo  $\alpha_0$ , per  $\omega = 0$ , al valore minimo 0, quando  $\alpha \rightarrow \infty$ . Vediamo inoltre che su tale asse vengono assunti tutti e soli i valori reali che può assumere il numero complesso  $\alpha$ .

Nel caso in  $\omega = 0$ ,  $\alpha$  assumesse un valore tendente ad infinito, la dimostrazione precedente si potrebbe ripetere in modo simile considerando al solito una circonferenza di raggio infinitesimo intorno allo zero e facendo poi tendere questo raggio a zero. Contemporaneamente, sul piano di  $\alpha$  ci sarebbe un'intersezione con l'asse reale per un valore molto grande di  $\alpha$ , valore che tende all'infinito quando il raggio tende a zero. Così si giunge alla stessa conclusione, solo che  $\alpha$  risulta monotona decrescente nell'intervallo  $\alpha \in [0, \infty]$ .

Ricaviamo ora le formule di dispersione di Kramers-Krönig. Si consideri il seguente integrale:

$$\oint_{\mathcal{C}'} \frac{\alpha}{\omega - \omega_0} d\omega \quad (\text{A.17})$$

dove  $\omega_0$  è un numero reale e  $\mathcal{C}'$  rappresenta nuovamente un percorso chiuso formato dalla circonferenza all'infinito, nel semipiano superiore, e dall'asse reale con esclusione del punto  $\omega_0$  ed eventualmente dell'origine, nel caso  $\alpha$  fosse ivi singolare. Abbiamo dimostrato che  $\alpha$  è nullo all'infinito, e la funzione integranda va a zero sulla circonferenza all'infinito ancora più velocemente. Inoltre, abbiamo dimostrato che  $\alpha$  non ha punti singolari sul semipiano superiore, ed avendo escluso anche i punti 0 e  $\omega_0$ , possiamo concludere che il percorso  $\mathcal{C}'$  non contorna alcun punto singolare della funzione integranda, quindi, per il primo teorema integrale di Cauchy, l'integrale risulta nulla e possiamo scrivere:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{\omega_0 - \rho} \frac{\alpha}{\omega - \omega_0} d\omega + \int_{\omega_0 + \rho}^{+\infty} \frac{\alpha}{\omega - \omega_0} d\omega \right) - i\pi\alpha(\omega_0) = 0 \quad (\text{A.18})$$

dove abbiamo scritto l'integrale su tutto l'asse reale come l'integrale sull'asse reale ad esclusione di un intorno di  $\omega_0$ , più il residuo in  $\omega_0$  dovuto ad un aggira-

<sup>2</sup>Ogni valore viene assunto una volta sola perché il percorso di integrazione fa un solo giro intorno ad  $a$ , e quindi lo zero è sempre singolo

mento in senso orario. Possiamo quindi scrivere l'espressione della suscettività, sostituendo i ruoli di  $\omega$  ed  $\omega_0$ , come segue:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(\omega_0)}{\omega_0 - \omega} d\omega_0 \quad (\text{A.19})$$

dove, ovviamente, l'integrale va inteso nel senso del valore principale. Il che ci permette di legare parte reale ed immaginaria di  $\alpha$ . Infatti è sufficiente separare la parte reale dalla parte immaginaria in (A.19) per ottenere le seguenti espressioni:

$$\alpha'(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha''(\omega_0)}{\omega_0 - \omega} d\omega_0 \quad (\text{A.20})$$

$$\alpha''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha'(\omega_0)}{\omega_0 - \omega} d\omega_0 \quad (\text{A.21})$$

Queste sono le relazioni di Kramers-Krönig, ricavate originariamente dal fisico olandese H.A. Kramers e dal fisico tedesco R.L. Krönig, nel 1927. Va notato che sono state usate pochissime proprietà della suscettività per ottenerle. In particolare si sono usati i seguenti concetti fisici: la linearità del fenomeno, la causalità e la presenza di perdite nel fenomeno di fluttuazione. A parte la linearità, che vale solo in alcuni casi e per alcuni valori dell'azione esterna, le altre due ipotesi vengono generalmente attribuite a qualsiasi sistema fisico, il che rende queste relazioni di validità generale per qualsiasi sistema lineare. Sfruttando il fatto che, per valori reali di  $\omega$ , le funzioni  $\alpha'$  e  $\alpha''$  sono pari e dispari, rispettivamente, si possono scrivere le relazioni di Kramers-Krönig possono essere scritte nella forma, più diffusa nella letteratura, seguente:

$$\alpha'(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega_0 \alpha''(\omega_0)}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega_0 \quad (\text{A.22})$$

$$\alpha''(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega \alpha'(\omega_0)}{\omega_0^2 - \omega^2} d\omega_0 \quad (\text{A.23})$$

Il vantaggio delle espressioni (A.22) e (A.23), rispetto alle espressioni (A.20) e (A.21), è che le parti reale ed immaginaria della suscettività vengono valutate solo per valori reali e positivi della frequenza. Quindi vengono utilizzati valori che possono essere ricavati sperimentalmente.

## Appendice B

# Determinazione del percorso di integrazione sul piano di $k_z$

Si vuole ricavare il percorso di integrazione dell'integrale (??) sul piano di  $k_z$ . In particolare si tratta di mappare la trasformazione conforme seguente:

$$k_z = k \sin w \quad (\text{B.1})$$

con

$$\begin{aligned} k_z &= k'_z + ik''_z \\ k &= k' + ik'' \\ w &= u + iv \end{aligned}$$

Si trasformerà il percorso di integrazione di Figura ?? . Per semplicità di scrittura si adotteranno dei nuovi nomi per le variabili. In particolare si pongano:

$$k_z = z \quad (\text{B.2})$$

$$k = \zeta \quad (\text{B.3})$$

Quindi si avranno le variabili:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ \zeta &= \xi + i\eta \\ w &= u + iv \end{aligned}$$

Per prima cosa si vuole vedere come si trasformano le due rette verticali  $w = \theta \pm \pi/2$ . Come si è visto per fare ciò va sudata la trasformazione conforme seguente:

$$z = \zeta \cos w \quad (\text{B.4})$$

In effetti questa trasformazione si può ricondurre alla (B.1) semplicemente tramite una traslazione di  $\pi/2$ . Si inizi separando la parte reale ed immaginaria dell'espressione (B.4):

$$z = (\xi + i\eta)(\cos u \cosh v - i \sin u \sinh v) \quad (\text{B.5})$$

da cui:

$$x = \xi \cos u \cosh v + \eta \sin u \sinh v \quad (\text{B.6})$$

$$y = \eta \cos u \cosh v - \xi \sin u \sinh v \quad (\text{B.7})$$

Si isolino ora le quantità  $\cosh v$  e  $\sinh v$ :

$$\cosh v = \frac{x}{\xi \cos u} - \frac{\eta \sin u}{\xi \cos u} \sinh v \quad (\text{B.8})$$

Inserendo questa espressione nella (B.7):

$$\begin{aligned} y &= \eta \cos u \left( \frac{x}{\xi \cos u} - \frac{\eta \sin u}{\xi \cos u} \sinh v \right) - \xi \sin u \sinh v = \\ &= \frac{\eta x}{\xi} - \frac{\eta^2 \sin u}{\xi} \sinh v - \xi \sin u \sinh v \end{aligned}$$

da cui:

$$\sinh v = \frac{\frac{\eta x}{\xi} - y}{\left(\xi + \frac{\eta^2}{\xi}\right) \sin u} = \frac{\eta x - \xi y}{(\xi^2 + \eta^2) \sin u} \quad (\text{B.9})$$

Andando ad inserire la (B.9) in (B.8), si ottiene:

$$\cosh v = \frac{x}{\xi \cos u} - \frac{\eta \sin u}{\xi \cos u} \frac{\eta x - \xi y}{(\xi^2 + \eta^2) \sin u}$$

da cui:

$$\cosh v = \frac{1}{\xi \cos u} \left[ \frac{x(\xi^2 + \eta^2) - \eta^2 x + \eta \xi y}{(\xi^2 + \eta^2)} \right]$$

e con qualche semplificazione si ottiene:

$$\cosh v = \frac{x\xi + y\eta}{(\xi^2 + \eta^2) \cos u} \quad (\text{B.10})$$

Si consideri ora la differenza dei quadrati delle espressioni (B.10) e (B.9), si ottiene:

$$\cosh^2 v - \sinh^2 v = \frac{(x\xi + y\eta)^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2 \cos^2 u} - \frac{(\eta x - \xi y)^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2 \sin^2 u} = 1$$

moltiplicando ambo i membri per  $(\xi^2 + \eta^2)^2 \cos^2 u \sin^2 u$ , si ricava:

$$\begin{aligned} (x^2 \xi^2 + y^2 \eta^2 + 2xy\xi\eta) \sin^2 u - (x^2 \eta^2 + y^2 \xi^2 - 2xy\xi\eta) \cos^2 u &= \\ &= (\xi^2 + \eta^2)^2 \cos^2 u \sin^2 u \end{aligned}$$

che riordinando diventa:

$$\begin{aligned} (\xi^2 \sin^2 u - \eta^2 \cos^2 u)x^2 + (\eta^2 \sin^2 u - \xi^2 \cos^2 u)y^2 + 2\xi\eta xy = \\ = (\xi^2 + \eta^2)^2 \cos^2 u \sin^2 u \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Nell'equazione (B.11) riconosciamo l'equazione di una conica nel piano (x, y) del tipo seguente:

$$A_{xx}x^2 + A_{yy}y^2 + 2A_{xy}xy + C = 0 \quad (\text{B.12})$$

con:

$$A_{xx} = \xi^2 \sin^2 u - \eta^2 \cos^2 u$$

$$A_{yy} = \eta^2 \sin^2 u - \xi^2 \cos^2 u$$

$$A_{xy} = \xi\eta$$

$$C = -(\xi^2 + \eta^2)^2 \cos^2 u \sin^2 u$$

Tale espressione rappresenta un'iperbole nel piano di (x, y) se il determinante:

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{xy} & A_{yy} \end{vmatrix}$$

risulta negativo [69]. Quindi se:

$$D = A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2 < 0$$

Si andrà ora a calcolare esplicitamente tale quantità:

$$\begin{aligned} D = -\xi^4 \cos^2 u \sin^2 u - \eta^4 \cos^2 u \sin^2 u + \xi^2 \eta^2 \sin^4 u + \xi^2 \eta^2 \cos^4 u - \xi^2 \eta^2 = \\ = -(\xi^4 + \eta^4) \cos^2 u \sin^2 u + \xi^2 \eta^2 (\cos^4 + \sin^4 u - 1) \end{aligned}$$

Si noti ora che vale la seguente relazione:

$$1 = (\cos^2 u + \sin^2 u)^2 = \cos^4 + \sin^4 u + 2 \cos^2 u \sin^2 u$$

da cui:

$$\cos^4 + \sin^4 u - 1 = -2 \cos^2 u \sin^2 u$$

Sfruttando questa identità nell'espressione di  $D$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} D = -(\xi^4 + \eta^4) \cos^2 u \sin^2 u - 2\xi^2 \eta^2 \cos^2 u \sin^2 u = \\ = -(\xi^2 + \eta^2)^2 \cos^2 u \sin^2 u \end{aligned}$$

Si può quindi scrivere:

$$D = -(\xi^2 + \eta^2)^2 \cos^2 u \sin^2 u \quad (\text{B.13})$$

Da questa espressione si vede facilmente che risulta sempre  $D < 0$ . Quindi l'equazione (B.11) rappresenta sempre un'iperbole nel piano di  $(x, y)$ . Tale iperbole ha l'asse principale ruotato rispetto all'asse  $x$  dell'angolo  $\phi$ , con [69]:

$$\tan 2\phi = \frac{2A_{xy}}{A_{xx} - A_{yy}} = \frac{2\xi\eta}{\xi^2 - \eta^2} \quad (\text{B.14})$$

Tale iperbole può anche essere espressa nella forma canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{B.15})$$

Che poi andrà ruotata dell'angolo  $\phi$ . Per calcolare i parametri  $a$  e  $b$  si può ricorrere alle seguenti formule [69]:

$$a^2 = -\frac{C}{\lambda_1} \quad (\text{B.16})$$

$$b^2 = \frac{C}{\lambda_2} \quad (\text{B.17})$$

dove  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono le radici della seguente equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 - (A_{xx} + A_{yy})\lambda + D = 0 \quad (\text{B.18})$$

Esplicitando le espressioni di  $A_{xx}$ ,  $A_{yy}$  e  $D$ , si ottiene:

$$\lambda^2 - (\xi^2 \sin^2 u - \eta^2 \cos^2 u + \eta^2 \sin^2 u - \xi^2 \cos^2 u)\lambda - (\xi^2 + \eta^2)^2 \cos^2 u \sin^2 u = 0$$

che riordinando diventa:

$$\lambda^2 - (\xi^2 + \eta^2)(\sin^2 u - \cos^2 u)\lambda - (\xi^2 + \eta^2)^2 \cos^2 u \sin^2 u = 0 \quad (\text{B.19})$$

Si possono quindi scrivere le soluzioni dell'equazione come segue:

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)(\sin^2 u - \cos^2 u) \pm \sqrt{(\xi^2 + \eta^2)^2(\sin^2 u - \cos^2 u)^2 + 4(\xi^2 + \eta^2)^2 \cos^2 u \sin^2 u}$$

da cui:

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)[(\sin^2 u - \cos^2 u) \pm (\sin^2 u + \cos^2 u)]$$

Quindi le due radici risultano uguali a:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (\xi^2 + \eta^2) \sin^2 u \\ \lambda_2 &= -(\xi^2 + \eta^2) \cos^2 u \end{aligned}$$

Inserendo questi valori nelle espressioni (B.16) si ottiene:

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2 \cos^2 u \sin^2 u}{(\xi^2 + \eta^2) \sin^2 u} = (\xi^2 + \eta^2) \cos^2 u \\ b^2 &= \frac{(\xi^2 + \eta^2)^2 \cos^2 u \sin^2 u}{(\xi^2 + \eta^2) \cos^2 u} = (\xi^2 + \eta^2) \sin^2 u \end{aligned}$$

Notando che  $\xi$  ed  $\eta$  sono rispettivamente la parte reale ed immaginaria di  $\zeta$ , si può anche scrivere:

$$a^2 = |\zeta|^2 \cos^2 u \quad (\text{B.20})$$

$$b^2 = |\zeta|^2 \sin^2 u \quad (\text{B.21})$$

Seondo quanto si è detto fino ad ora le due rette verticali nel piano di  $w$  si trasformeranno in due parti dei rami dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{|\zeta|^2 \cos^2 u} - \frac{y^2}{|\zeta|^2 \sin^2 u} = 1 \quad (\text{B.22})$$

Ruotata di un angolo  $\phi$  in senso antiorario, dove  $\phi$  può essere ricavato dalla seguente espressione:

$$\tan 2\phi = \frac{2\xi\eta}{\xi^2 - \eta^2} \quad (\text{B.23})$$

Andando a sostituire in queste espressioni le quantità fisicamente rilevanti, ovvero sfruttando le posizioni (B.2) e (B.3), si ottiene:

$$\frac{k_z'^2}{|k|^2 \cos^2 u} - \frac{k_z''^2}{|k|^2 \sin^2 u} = 1 \quad (\text{B.24})$$

con:

$$\tan 2\phi = \frac{2k'k''}{k'^2 - k''^2} \quad (\text{B.25})$$

Inserendo le relazioni (1.15) e (1.16) all'interno della (B.25), si ottiene:

$$\tan 2\phi = \frac{\omega^2 \mu \varepsilon''}{\omega^2 \mu \varepsilon'} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \tan \delta \quad (\text{B.26})$$

dove  $\tan \delta$  è la cosiddetta tangente di perdita del mezzo.

In analogia con quanto fatto nel piano di  $n_z$  possiamo dire che la semiretta verticale superiore  $w = \theta - \pi/2$  si trasformerà nella parte superiore del ramo sinistro dell'iperbole (B.24), mentre la semiretta verticale inferiore  $w = \theta + \pi/2$  si trasformerà nella parte superiore del ramo destro della stessa iperbole.

Per completare la trasformazione della curva di Figura ?? rimane da trasformare il segmento sull'asse reale del piano di  $w$ . Per farlo è sufficiente considerare la seguente trasformazione:

$$k_z = k \sin t \quad \text{con} \quad t \in [\theta - \pi/2, \theta + \pi/2] \quad (\text{B.27})$$

È semplice vedere che tale funzione rappresenta un tratto della retta passante per  $k_z = 0$  e  $k_z = k$ , ovvero la retta formante un angolo pari ad  $\arg(k)$  con l'asse reale. Risulta molto interessante notare come tale retta coincida in realtà con l'asse principale dell'iperbole (B.24), ovvero che risulta  $\arg(k) = \phi$ . Si può scrivere infatti:

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$$

Ricordando che  $\omega$  e  $\mu$  risultano reali, potremo anche scrivere:

$$|k| \exp[i \arg(k)] = \omega \sqrt{\mu|\varepsilon|} \exp \left[ i \frac{1}{2} \arg(\varepsilon) \right]$$

da cui si ricava:

$$\arg(k) = \frac{1}{2} \arg(\varepsilon) = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right) = \phi$$

da cui si dimostra l'asserto.

Si è visto quindi che il segmento sull'asse reale del piano di  $w$  si trasforma in un tratto di una retta, con inclinazione  $\phi$ , nel piano di  $k_z$ . In particolare tale retta andrà percorsa da  $-k \cos \theta$  fino a  $k$  e poi da  $k$  fino a  $k \cos \theta$ . Quindi, esattamente come succedeva nel piano di  $n_z$ , c'è un tratto della retta che va percorso due volte, ovvero il tratto  $k_z \in [k \cos \theta, k]$ . Il percorso di integrazione partirà quindi dall'infinito sul ramo sinistro dell'iperbole ruotata (B.24), fino al punto  $-k \cos \theta$ , da qui percorrerà la retta  $k_z'' = \tan \phi k_z'$  fino al punto  $k_z = k$ , poi tornerà indietro fino a  $k_z = k \cos \theta$  ed in fine andrà verso l'infinito sul ramo destro dell'iperbole (B.24). È bene ricordare che la trattazione è valida per  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ .

Nella sezione 2.4 si incontra un'altra trasformazione di questo tipo. L'unica differenza consiste nel fatto che in luogo delle variabili  $u$  e  $v$ , si usano rispettivamente i parametri  $\phi$  e  $t$ .

## Appendice C

# Funzione arccos di argomento complesso

Si vogliono descrivere le principali caratteristiche della funzione

$$w = \arccos z \quad (\text{C.1})$$

con  $z \in \mathbb{C}$ . Si noti che tale funzione è definita dalla seguente trasformazione conforme:

$$\cos w = z \quad (\text{C.2})$$

usando le formule di Eulero si può scrivere:

$$e^{iw} + e^{-iw} = 2z \quad (\text{C.3})$$

ponendo  $t = e^{iw}$  si ha:

$$t + \frac{1}{t} = 2z \quad (\text{C.4})$$

ovvero<sup>1</sup>:

$$t^2 - 2zt + 1 = 0 \quad (\text{C.5})$$

da cui<sup>2</sup>:

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad (\text{C.6})$$

---

<sup>1</sup>per definizione si ha  $t \neq 0$ . Si ha  $\lim_{\text{Im}(w) \rightarrow -\infty} t = 0$ , ma tale problema verrà risolto nel seguito

<sup>2</sup>non si mette il  $\pm$  perché la radice complessa già contiene le due determinazioni

che, vista la definizione di  $t$ , fornisce:

$$w = -i \ln t = -i \ln \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad (\text{C.7})$$

Notiamo subito che la rappresentazione (C.7) presenta due branch points in  $\pm 1$ , legati alla determinazione della radice quadrata. Per vederne l'effetto è sufficiente notare che per ottenere la (C.7) si poteva scegliere di fare la sostituzione  $t = e^{-iw}$ , giungendo al risultato:

$$w = i \ln \left( z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad (\text{C.8})$$

che è ugualmente valida. Notiamo ora che il prodotto delle due radici dell'equazione (C.5) è sempre pari ad 1, quindi sono una l'inverso dell'altra. Potremo quindi scrivere la seconda radice come  $t^{-1}$  e quindi  $w = -i \ln t$  sarà sostituito da  $-i \ln t^{-1}$ , la quale fornisce appunto la (C.8). Le due espressioni (C.7) e (C.8) coincideranno quindi se risulta  $t = t^{-1}$ , ovvero per  $t = \pm 1$ , che, dalla (C.6) fornisce  $z = \pm 1$ , che sono appunto i branch points di cui stavamo parlando. La funzione  $\arccos z$  presenta un ulteriore branch point in  $z \rightarrow \infty$  dovuto alla funzione logaritmo, esso è inoltre un branch point logaritmico, ovvero di ordine infinito. Per ulteriori informazioni sulla funzione logaritmica sul piano complesso si veda [34].

Si procederà ora al calcolo esplicito della parte reale ed immaginaria della funzione  $\arccos$ . Si vuole esprimere prima di tutto la funzione come la somma di due arcocoseni distinti; ricordando la formula [10]:

$$\arccos \beta + \arccos \alpha = \arccos \left[ \alpha\beta \mp \sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \alpha^2)} \right] \quad (\text{C.9})$$

si può porre:

$$z = x + iy = \alpha\beta \pm \sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \alpha^2)} \quad (\text{C.10})$$

la quale può essere scritta in modo significativo come segue:

$$x \pm \sqrt{-y^2} = \alpha\beta \pm \sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \alpha^2)} \quad (\text{C.11})$$

da cui si scrive il seguente sistema:

$$x = \alpha\beta \quad (\text{C.12})$$

$$y^2 = \sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \alpha^2)} \quad (\text{C.13})$$

dalle quali, con un po' d'algebra si possono ottenere le due seguenti equazioni biquadratiche:

$$\alpha^4 - \alpha^2(x^2 + y^2 + 1) + x^2 = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$\beta^4 - \beta^2(x^2 + y^2 + 1) + x^2 = 0 \quad (\text{C.15})$$

quindi  $\alpha$  e  $\beta$  sono le due determinazioni positive della stessa equazione bi-quadratica. Si potrà scrivere:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(x^2 + y^2 + 1) + \sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2}} \quad (\text{C.16})$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(x^2 + y^2 + 1) - \sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2}} \quad (\text{C.17})$$

Si può ora usare la ben nota formula per separare i radicali doppi<sup>3</sup>. Notando che risulta:

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 - [(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2] = 4x^2 \quad (\text{C.19})$$

si ha:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 + 2x} + \sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 2x} \right] \quad (\text{C.20})$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 + 2x} - \sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 2x} \right] \quad (\text{C.21})$$

le quali possono essere scritte in forma più compatta come segue:

$$\alpha = \frac{1}{2} (|z + 1| + |z - 1|) \quad (\text{C.22})$$

$$\beta = \frac{1}{2} (|z + 1| - |z - 1|) \quad (\text{C.23})$$

potremo quindi scrivere:

$$\arccos z = \arccos \beta + \arccos \alpha \quad (\text{C.24})$$

con:

$$\alpha = \frac{1}{2} (|z + 1| + |z - 1|) \quad (\text{C.25})$$

$$\beta = \frac{1}{2} (|z + 1| - |z - 1|) \quad (\text{C.26})$$

rimane ora da dimostrare che i due arcocoseni in cui ho diviso l'arcocoseno complesso rappresentino proprio la sua parte reale ed immaginaria. Per farlo dimostriamo prima di tutto che  $\arccos \beta \in \mathbb{R}$ . Tale relazione è vera se  $|\beta| \leq 1$ . Essendo  $\beta \geq 0$ , è sufficiente dimostrare che sia  $\beta \leq 1$ . Usando la definizione di  $\beta$ , si può scrivere:

$$\frac{1}{2} (|z + 1| - |z - 1|) \leq 1 \quad (\text{C.27})$$

<sup>3</sup>dall'algebra elementare si sa che:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a^2 - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \quad (\text{C.18})$$

essendo:

$$|z + 1| \leq |z| + 1 \quad (\text{C.28})$$

$$-|z - 1| \leq 1 - |z| \quad (\text{C.29})$$

si ha che:

$$\frac{1}{2} (|z + 1| - |z - 1|) \leq \frac{1}{2} (|z| + 1 + 1 - |z|) = 1 \quad (\text{C.30})$$

la quale verifica la (C.27)

Ora, è sufficiente dimostrare che  $\arccos \alpha \in \mathbb{I}$ , ovvero che  $|\alpha| \geq 1$ . Essendo  $\alpha \geq 0$  è sufficiente dimostrare che  $\alpha \geq 1$ . Usando la definizione di  $\alpha$  in (C.16) si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(x^2 + y^2 + 1) + \sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2}} \geq 1 \quad (\text{C.31})$$

elevando a quadrato ambo i membri e riordinando, si può scrivere

$$x^2 + y^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2} \geq 1 \quad (\text{C.32})$$

tale disequazione è vera per  $x^2 + y^2 \geq 1$ , se  $x^2 + y^2 < 1$ , si ha:

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2} \geq 1 - x^2 - y^2 \quad (\text{C.33})$$

dove a secondo membro si ha una quantità certamente positiva. Si può quindi elevare al quadrato ambo i membri, ottenendo:

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 \geq (1 - x^2 - y^2)^2 \quad (\text{C.34})$$

svolgendo le parentesi si trova:

$$4y^2 \geq 0 \quad (\text{C.35})$$

la quale è, ovviamente, sempre vera. Si è così dimostrato che  $\arccos \alpha$  è una quantità puramente immaginaria, si può quindi, con l'ausilio di (C.7), scrivere:

$$\arccos \alpha = -i \ln \left( \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \quad (\text{C.36})$$

Avendo dimostrato che  $|\alpha| \geq 1$  si vede che il logaritmo assumerà valori puramente reali. si ha quindi:

$$\arccos z = \arccos \beta - i \ln \left( \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \right) \quad (\text{C.37})$$

con:

$$\alpha = \frac{1}{2} (|z + 1| + |z - 1|) \quad (\text{C.38})$$

$$\beta = \frac{1}{2} (|z + 1| - |z - 1|) \quad (\text{C.39})$$

La quale rappresenta il valore principale della formula presentata in [10].

## Appendice D

# Dimostrazioni sull'unitarietà del coefficiente di riflessione

Si devono dimostrare le seguenti identità:

$$|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2 = |B_{11}|^2 + |B_{12}|^2 \quad (\text{D.1})$$

$$\text{Im} [B_{11}B_{12}^* - A_{11}A_{12}^*] = 0 \quad (\text{D.2})$$

- Si consideri per prima l'identità (D.1).

SI dimostrerà la seguente uguaglianza:

$$|A_{11}|^2 - |B_{11}|^2 = |B_{12}|^2 - |A_{12}|^2 \quad (\text{D.3})$$

che è ovviamente la stessa di (D.1). Per dimostrarla, si necessita di esplicitare le espressioni dei parametri  $A_{ij}$  and  $B_{ij}$ , rappresentati dalle equazioni (5.57)-(5.60). Si può vedere in tali espressioni che tutte le quantità coinvolte sono puramente reali, fatta eccezione per la componente ortogonale del vettore di propagazione trasmesso  $\hat{k}_{Hz}$ . Si consideri tale quantità divisa in parte reale e immaginaria. Partendo dall'espressione generale (4.8), si può scrivere:

$$\hat{k}_{Hz} = \text{Re}(\hat{k}_{Hz}) + i\text{Im}(\hat{k}_{Hz}) \quad (\text{D.4})$$

dove:

$$\text{Re}(\hat{k}_{Hz}) = \frac{-\hat{k}_\tau(\varepsilon_c - \varepsilon_t)\underline{z}_0 \cdot \underline{c} \underline{\tau} \cdot \underline{c}}{\varepsilon_t + (\varepsilon_c - \varepsilon_t)(\underline{z}_0 \cdot \underline{c})^2} \quad (\text{D.5})$$

$$\text{Im}(\hat{k}_{Hz}) = \left\{ \frac{\hat{k}_\tau^2[\varepsilon_t + (\varepsilon_c - \varepsilon_t)(\underline{\tau} \cdot \underline{c})^2] - \varepsilon_c}{\varepsilon_t + (\varepsilon_c - \varepsilon_t)(\underline{z}_0 \cdot \underline{c})^2} - \text{Re}(\hat{k}_{Hz})^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{D.6})$$

A questo punto si possono scrivere le espressioni  $A_{ij}$  and  $B_{ij}$  esplicitando la parte reale e immaginaria di  $\hat{k}_{Hz}$ , ottenendo:

$$A_{11} = \hat{k}_\tau \hat{k}_{iz} \hat{z}_0 \cdot \underline{c} + \hat{k}_\tau \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) \hat{z}_0 \cdot \underline{c} - (1 - \hat{k}_\tau^2) \underline{\tau} \cdot \underline{c} - \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) \hat{k}_{iz} \underline{\tau} \cdot \underline{c} + i \operatorname{Im}(\hat{k}_{Hz}) (\hat{k}_\tau \hat{z}_0 \cdot \underline{c} - \hat{k}_{iz} \underline{\tau} \cdot \underline{c}) \quad (\text{D.7})$$

$$A_{12} = [\hat{k}_{iz} + \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz})] \underline{\nu} \cdot \underline{c} + i \operatorname{Im}(\hat{k}_{Hz}) \underline{\nu} \cdot \underline{c} \quad (\text{D.8})$$

$$B_{11} = \hat{k}_\tau \hat{k}_{iz} \hat{z}_0 \cdot \underline{c} - \hat{k}_\tau \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) \hat{z}_0 \cdot \underline{c} + (1 - \hat{k}_\tau^2) \underline{\tau} \cdot \underline{c} - \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) \hat{k}_{iz} \underline{\tau} \cdot \underline{c} - i \operatorname{Im}(\hat{k}_{Hz}) (\hat{k}_\tau \hat{z}_0 \cdot \underline{c} + \hat{k}_{iz} \underline{\tau} \cdot \underline{c}) \quad (\text{D.9})$$

$$B_{12} = [\hat{k}_{iz} - \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz})] \underline{\nu} \cdot \underline{c} - i \operatorname{Im}(\hat{k}_{Hz}) \underline{\nu} \cdot \underline{c} \quad (\text{D.10})$$

Calcolando l'ampiezza dei singoli parametri, si ottiene:

$$|A_{11}|^2 = [\hat{k}_\tau \hat{k}_{iz} \hat{z}_0 \cdot \underline{c} - \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) \hat{k}_{iz} \underline{\tau} \cdot \underline{c} - (1 - \hat{k}_\tau^2) \underline{\tau} \cdot \underline{c} + \hat{k}_\tau \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) \hat{z}_0 \cdot \underline{c}]^2 + [\operatorname{Im}(\hat{k}_{Hz}) (\hat{k}_\tau \hat{z}_0 \cdot \underline{c} - \hat{k}_{iz} \underline{\tau} \cdot \underline{c})]^2 \quad (\text{D.11})$$

$$|A_{12}|^2 = [\hat{k}_{iz} + \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz})]^2 (\underline{\nu} \cdot \underline{c})^2 + \operatorname{Im}(\hat{k}_{Hz})^2 (\underline{\nu} \cdot \underline{c})^2 \quad (\text{D.12})$$

$$|B_{11}|^2 = [\hat{k}_\tau \hat{k}_{iz} \hat{z}_0 \cdot \underline{c} - \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) \hat{k}_{iz} \underline{\tau} \cdot \underline{c} + (1 - \hat{k}_\tau^2) \underline{\tau} \cdot \underline{c} - \hat{k}_\tau \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) \hat{z}_0 \cdot \underline{c}]^2 + [\operatorname{Im}(\hat{k}_{Hz}) (\hat{k}_\tau \hat{z}_0 \cdot \underline{c} + \hat{k}_{iz} \underline{\tau} \cdot \underline{c})]^2 \quad (\text{D.13})$$

$$|B_{12}|^2 = [\hat{k}_{iz} - \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz})]^2 (\underline{\nu} \cdot \underline{c})^2 + \operatorname{Im}(\hat{k}_{Hz})^2 (\underline{\nu} \cdot \underline{c})^2 \quad (\text{D.14})$$

Si sottraggano ora le espressioni (D.12) e (D.14), ottenendo:

$$|B_{12}|^2 - |A_{12}|^2 = -4 \hat{k}_{iz} \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) (\underline{\nu} \cdot \underline{c})^2 \quad (\text{D.15})$$

per dimostrare l'identità (D.3), si deve dimostrare che la differenza tra (D.11) e (D.12) è uguale alla quantità in (D.15). Si scriva tale differenza esplicitamente:

$$|A_{11}|^2 - |B_{11}|^2 = -4 [\hat{k}_\tau \hat{k}_{iz} \hat{z}_0 \cdot \underline{c} - \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) \hat{k}_{iz} \underline{\tau} \cdot \underline{c}] \left[ (1 - \hat{k}_\tau^2) \underline{\tau} \cdot \underline{c} + \hat{k}_\tau \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) \hat{z}_0 \cdot \underline{c} \right] - 4 \operatorname{Im}(\hat{k}_{Hz})^2 \hat{k}_\tau \hat{k}_{iz} \underline{\tau} \cdot \underline{c} \hat{z}_0 \cdot \underline{c} \quad (\text{D.16})$$

quindi:

$$\begin{aligned} |A_{11}|^2 - |B_{11}|^2 &= -4 \hat{k}_{iz} \left\{ [\hat{k}_\tau \hat{z}_0 \cdot \underline{c} - \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) \underline{\tau} \cdot \underline{c}] \left[ (1 - \hat{k}_\tau^2) \underline{\tau} \cdot \underline{c} + \hat{k}_\tau \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) \hat{z}_0 \cdot \underline{c} \right] + \operatorname{Im}(\hat{k}_{Hz})^2 \hat{k}_\tau \underline{\tau} \cdot \underline{c} \hat{z}_0 \cdot \underline{c} \right\} = \\ &= 4 \hat{k}_{iz} \left\{ \hat{k}_\tau^3 \underline{\tau} \cdot \underline{c} \hat{z}_0 \cdot \underline{c} - \hat{k}_\tau^2 \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) [(\underline{\tau} \cdot \underline{c})^2 - (\hat{z}_0 \cdot \underline{c})^2] - \hat{k}_\tau \hat{z}_0 \cdot \underline{c} \underline{\tau} \cdot \underline{c} [1 + \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz})^2 + \operatorname{Im}(\hat{k}_{Hz})^2] + \operatorname{Re}(\hat{k}_{Hz}) (\underline{\tau} \cdot \underline{c})^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

se ora si inseriscono le quantità (D.5) e (D.6), si ottiene:

$$\begin{aligned}
|A_{11}|^2 - |B_{11}|^2 = & \frac{4\hat{k}_{iz}\hat{k}_\tau \underline{\tau} \cdot \underline{c} \underline{z}_0 \cdot \underline{c}}{\varepsilon_t + (\varepsilon_c - \varepsilon_t)(\underline{z}_0 \cdot \underline{c})^2} \left\{ \hat{k}_\tau^2 (\varepsilon_c - \varepsilon_t) (\underline{z}_0 \cdot \underline{c})^2 - \varepsilon_t + \right. \\
& - (\varepsilon_c - \varepsilon_t) (\underline{z}_0 \cdot \underline{c})^2 - \hat{k}_\tau^2 (\varepsilon_c - \varepsilon_t) (\underline{\tau} \cdot \underline{c})^2 + \varepsilon_c + \\
& \left. + \hat{k}_\tau^2 (\varepsilon_c - \varepsilon_t) \left[ (\underline{\tau} \cdot \underline{c})^2 - (\underline{z}_0 \cdot \underline{c})^2 \right] - (\varepsilon_c - \varepsilon_t) (\underline{\tau} \cdot \underline{c})^2 \right\} \quad (D.18)
\end{aligned}$$

semplificando tale relazione si può ottenere la seguente espressione:

$$|A_{11}|^2 - |B_{11}|^2 = -4\hat{k}_{iz} \text{Re}(\hat{k}_{Hz}) \left[ 1 - (\underline{\tau} \cdot \underline{c})^2 - (\underline{z}_0 \cdot \underline{c})^2 \right] \quad (D.19)$$

a questo punto si deve chiarire il significato dei prodotti scalari. Chiamando, come si è fatto nella trattazione,  $\alpha$ , l'angolo tra l'asse  $z$  e l'asse ottico e  $\theta$  e  $\phi$  gli angoli che il vettore di propagazione dell'onda incidente formano con gli assi coordinati, si può scrivere:

$$\underline{z}_0 \cdot \underline{c} = \cos \alpha \quad (D.20)$$

$$\underline{\tau} \cdot \underline{c} = \sin \phi \sin \alpha \quad (D.21)$$

$$\underline{\nu} \cdot \underline{c} = \cos \phi \sin \alpha \quad (D.22)$$

e quindi si può finalmente ottenere:

$$\begin{aligned}
|A_{11}|^2 - |B_{11}|^2 = & -4\hat{k}_{iz} \text{Re}(\hat{k}_{Hz}) \left[ 1 - \cos^2 \alpha - \sin^2 \phi \sin^2 \alpha \right] = \\
= & -4\hat{k}_{iz} \text{Re}(\hat{k}_{Hz}) \cos^2 \phi \sin^2 \alpha = |B_{12}|^2 - |A_{12}|^2 \quad (D.23)
\end{aligned}$$

Q.e.d..

- Si passi ora alla dimostrazione dell'identità in (D.2).

Considerando le espressioni esplicite dei parametri  $A_{ij}$  e  $B_{ij}$ , si possono ottenere le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
A_{11}A_{12}^* = & \left\{ \left[ \hat{k}_\tau \hat{k}_{iz} \underline{z}_0 \cdot \underline{c} - \hat{k}_{iz} \text{Re}(\hat{k}_{Hz}) \underline{\tau} \cdot \underline{c} \right] - \left[ \left( 1 - \hat{k}_\tau^2 \right) \underline{\tau} \cdot \underline{c} - \hat{k}_\tau \text{Re}(\hat{k}_{Hz}) \underline{z}_0 \cdot \underline{c} \right] + \right. \\
& \left. + i \text{Im}(\hat{k}_{Hz}) \left( \hat{k}_\tau \underline{z}_0 \cdot \underline{c} + \hat{k}_{iz} \underline{\tau} \cdot \underline{c} \right) \right\} \left[ \hat{k}_{iz} + \hat{k}_{Hz}^* \right] \underline{\nu} \cdot \underline{c} \quad (D.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{11}B_{12}^* = & \left\{ \left[ \hat{k}_\tau \hat{k}_{iz} \underline{z}_0 \cdot \underline{c} - \hat{k}_{iz} \text{Re}(\hat{k}_{Hz}) \underline{\tau} \cdot \underline{c} \right] + \left[ \left( 1 - \hat{k}_\tau^2 \right) \underline{\tau} \cdot \underline{c} - \hat{k}_\tau \text{Re}(\hat{k}_{Hz}) \underline{z}_0 \cdot \underline{c} \right] + \right. \\
& \left. - i \text{Im}(\hat{k}_{Hz}) \left( \hat{k}_\tau \underline{z}_0 \cdot \underline{c} + \hat{k}_{iz} \underline{\tau} \cdot \underline{c} \right) \right\} \left[ \hat{k}_{iz} - \hat{k}_{Hz}^* \right] \underline{\nu} \cdot \underline{c} \quad (D.25)
\end{aligned}$$

sottraendo l'espressione (D.24) all'espressione (D.25) e con un po' di algebra, si può arrivare a scrivere la seguente relazione:

$$\begin{aligned}
\text{Im}(B_{11}B_{12}^* - A_{11}A_{12}^*) = & 2 \text{Im}(\hat{k}_{Hz}) \underline{\nu} \cdot \underline{c} \left\{ \left[ \hat{k}_\tau \hat{k}_{iz} \underline{z}_0 \cdot \underline{c} - \hat{k}_{iz} \text{Re}(\hat{k}_{Hz}) \underline{\tau} \cdot \underline{c} \right] + \right. \\
& \left. - \hat{k}_\tau \hat{k}_{iz} \underline{z}_0 \cdot \underline{c} + \text{Re}(\hat{k}_{Hz}) \hat{k}_{iz} \underline{\tau} \cdot \underline{c} \right\} \quad (D.26)
\end{aligned}$$

la quale è evidentemente nulla. Q.e.d..



# Bibliografia

- [1] J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill, 1941).
- [2] R.B. Adler, L.J. Chu e R.M. Fano, *Electromagnetic Transmission and Radiation*, Wiley, New York, 1972.
- [3] J.E. Roy, 'New Results for the Effective Propagation Constants of Nonuniform Plane Waves at the Planar Interface of Two Lossy Media', *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol 51, n. 6, pp. 1206-1215, 2003.
- [4] R.D. Radcliff e C.A. Balanis 'Modified propagation constants for nonuniform plane wave transmission through conducting media,' *IEEE Trans. Geosci. Rem. Sens.*, vol. 20, n. 3, pp. 408-411, 1982.
- [5] I.V. Lindell, *Methods for Electromagnetic Field Analysis*, 3<sup>rd</sup> ed., Wiley, New York, 2002.
- [6] I.V. Lindell and A.H. Sihvola, 'Electromagnetic boundary and its realization with anisotropic metamaterial', *Phys. Rev. E*, vol. 79, n. 2, (7 pp.), 2009.
- [7] J.P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," *J. Comp. Phys.*, vol. 114, pp. 185-200, 1994.
- [8] S.D. Gedney, "An anisotropic perfectly matched layer - absorbing medium for truncation of FDTD lattices," *IEEE Trans Antennas Propag.*, vol. 44, n. 12, pp. 1630-1639, 1996.
- [9] T. Tamir e A.A. Oliner, 'Complex guided waves,' *Proc. IEE*, vol. 110, pp. 310-334, 1963.
- [10] M. Abramowitz e I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972.
- [11] E.I. Ivlev, Structure and properties of inhomogeneous waves, *J. Mod. Opt.*, vol. 34, n. 12, pp. 1559-1569, 1987.
- [12] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon, 1959.
- [13] R.W.P. King, M. Owens e T.T. Wu, E. Wolf, *Lateral Electromagnetic Waves*, Springer-Verlag, New York, 1992.

- [14] M.A. Depertuis, M. Proctor e B. Acklin, 'Generalization of complex Snell-Descartes and Fresnel laws' *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 11, n. 3, pp. 1159–1166, 1994.
- [15] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *Lectures on Physics*, Addison-Wesley, 1964.
- [16] E. Hecht, *Optics*, Addison-Wesley, 2002.
- [17] H.B. Holl, 'Specular Reflection and Characteristics of Reflected Light,' *J. Opt. Soc. Am.*, Vol.57, no. 5, pp. 683-690, 1967.
- [18] W. König, *Handbuch der Physik*, edited by H. Geiger and K. Scheel, vol. XX, Springer-Verlag, 1928.
- [19] P.E. Ciddor, 'Refraction Into an Absorbing Media,' *Am. J. Phys.*, Vol. 77, no. 8), pp. 786-787, 1976.
- [20] T. Tamir, 'Inhomogeneous wave types at planar interfaces: III-Leaky waves,' *Optik*, vol. 38, no. 3, pp. 269–297, 1973.
- [21] P.C. Clemmow, *The plane wave spectrum representation of electromagnetic fields*, Pergamon Press, 1966.
- [22] T.B. Hansen e A.D. Yaghjian, *Plane Wave Theory of Time Domain Field*, IEEE Press, New York, 1999.
- [23] M.J. Ablowitz e A.S. Fokas, *Complex Variables*, Cambridge University Press, II edizione, Cambridge, 2003.
- [24] S.I. Hayek, *Advanced Mathematical Methods in Science and Engineering*, Marcel Dekker, New York, 2001.
- [25] J.J. Bowman, B.A. Senior e P.L.E. Uslenghi, *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*, North-Holland Publishing Company, Asterdam, 1969.
- [26] C.F. Bohren e D.R. Huffman, *Absorption and scattering of light by small particles*, Wiley, New York, 1983.
- [27] A. Baños, *Dipole radiation in the presence of a conducting half-space*, Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [28] J.G. Van Bladel *Electromagnetic Fields*, IEEE Press, Piscataway, 2007.
- [29] W. Sun, N. G. Loeb e B. Lin, 'Light scattering by an infinite circular cylinder immersed in an absorbing medium,' *Applied Optics*, vol. 44, n. 12, pp. 2338–2342, 2005.
- [30] R. Borghi, F. Gori, F. Frezza, M. Santarsiero e G. Schettini, Plane-wave scattering by a set of perfectly conducting circular cylinders in the presence of a plane surface, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 13, n. 12, pp. 2441-2452, 1996.

- [31] E.I. Ivlev, The scattering of inhomogeneous electromagnetic waves by a cylinder, *J. Mod. Opt.*, vol. 39, n. 3, pp. 499–507, 1992.
- [32] F. Gori, *Elementi di ottica*, Accademica, Roma, 1997.
- [33] A. Ghizzetti, F. Mazzarella e A. Ossicini, *Lezioni di complementi di matematica*, Veschi, II edizione, Roma, 1981.
- [34] A.I. Markushevitz, *Theory of Functions of a Complex Variable*, vol. 1, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
- [35] V.I. Smirnov, *Corso di matematica superiore*, vol. 3, parte II, Editori Riuniti, Roma, 1978.
- [36] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, II edizione, Cambridge, 1944.
- [37] G. Cincotti, F. Gori, F. Frezza, F. Furnò, M. Santarsiero e G. Schettini, Plane-wave expansion of cylindrical functions', *Opt. Comm.*, vol. 95, pp. 192-198, 1993.
- [38] F. Frezza, L. Pajewski, D. Saccoccioni e G. Schettini, Plane-wave expansion of cylindrical functions in lossy media', *Opt. Comm.*, vol. 265, pp. 47-51, 2006.
- [39] A. Sommerfeld, *Partial differential equations in physics*, Accademic Press, New York, 1949.
- [40] B.L. Van der Waerden, 'On the Method of Saddle Point', *Appl. Sci. Res.*, Vol. B2, pp. 33-45, 1952.
- [41] S. Maci, A. Neto, 'Green's Function of an Infinite Slot Printed Between Two Homogeneous Dielectrics - Part II: Uniform Asymptotic Solution', *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol 52, n. 3, pp. 666-676, 2004.
- [42] M. Di Vico, F. Frezza, L. Pajewski e G. Schettini, 'Scattering by a Finite Set of Perfectly Conducting Cylinders Buried in a Dielectric Half-Space: A Spectral-Domain Solution', *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 53, pp. 719-727, 2005.
- [43] L. Pajewski, *Scattering di onde elettromagnetiche da strutture composite*, tesi di dottorato in elettromagnetismo applicatoscienze elettrofisiche, Roma, 2001.
- [44] R. Borghi, F. Frezza, M. Santarsiero, C. Santini e G. Schettini, 'Numerical Study of the Reflection of Cylindrical Waves of Arbitrary order by a Generic Planar Interface', *J. of Electromag. Wave and Appl.*, vol. 13, pp. 27-50, 1999.
- [45] R. Borghi, F. Frezza, M. Santarsiero, C. Santini e G. Schettini, 'A Quadrature Algorithm for the Evaluation of a 2D Radiation Integral with a Highly Oscillating Kernel', *J. of Electromag. Wave and Appl.*, vol. 14, pp. 1353-1370, 2000.

- [46] F. Ciambra, F. Frezza, L. Pajewski e G. Schettini, 'A Spectral-Domain Solution for the Scattering Problem of a Circular Cylinder Buried in a Dielectric Half-Space', *Progr. Electromag. Research*, vol. 38, pp. 223-252, 2002.
- [47] R. Borghi, F. Frezza, M. Santarsiero e G. Schettini, 'Angular spectrum of modified cylindrical wave-functions,' *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, vol. 20, n. 10, pp. 1795-1801, 1999.
- [48] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 90*, II edizione, Cambridge University Press, 1996.
- [49] J.D. Kanellopoulos e N.E. Buris, 'Scattering from conducting cylinder embedded in a lossy medium', *Int. J. Electron.*, vol. 57, n. 3, pp. 391-401, 1984.
- [50] G. Dolling, M. Wegener, C.M. Soukoulis e S Linden, 'Negative-index metamaterial at 780 nm wavelength', *Opt. Lett.*, vol. 32, n. 1, pp. 53-55, 2007.
- [51] H. C. Chen, *Theory of electromagnetic waves*, McGraw Hill, 1983.
- [52] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, Pergamon Press, Oxford, 1984.
- [53] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *Statistical physics, part 1*, Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [54] R. H. Tarkhanyan e Nikolaos K. Uzunoglu, *Radiowaves and polaritons in anisotropic media*, Wiley, Verlag, 2006.
- [55] R. A. Shelby, D.R. Smith e S. Schultz, 'Experimental verification of a negative index of refraction', *Science*, vol. 292, n. 4, pp. 77-79, 2007.
- [56] J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins e W.J. Stewart 'Low frequency plasmons in thin-wire structures,' *J. Phys.: Condens. Matter.*, vol. 10, 4785-4809, 1998.
- [57] J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins e W.J. Stewart "Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena,' *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. 47, n. 11, pp. 2075-2085, 1999.
- [58] I.V. Lindell e A.H. Sihvola, "Electromagnetic boundary and its realization with anisotropic metamaterials,' *Phys. Rev. E*, vol. 79, n. 2, (7 pp.), 2009.
- [59] H. Wallèn, H. Kettunen e A.H. Sihvola, 'Mixing formulas and plasmonic composites,' *Metamaterials and plasmonics: fundamentas, modelling, applications*, S. Zouhdi, A.H. Sihvola e A.P. Vinogradov, Springer, pp. 91-102, 2009.
- [60] I.V. Lindell and A.H. Sihvola, 'Perfect Electromagnetic Conductor', *J. Electromagn. Waves Appl.*, vol. 19, n. 7, pp. 861-869, 2005.

- [61] I.V. Lindell and A.H. Sihvola, 'Realization of the PEMC Boundary', *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 53, n. 9, pp. 3012-3018, 2005.
- [62] A.N. Shchukin, *Propagation of Radio Waves*, Moscow, Russia, Svyazizdat, 1940.
- [63] M.A. Leontovich, 'Methods of solution for problems of electromagnetic waves propagation along the Earth surface', *Bull. Acad. Sci. USSR, Phys. Ser.*, vol. 8, n. 1, p. 1622, 1944.
- [64] I.V. Lindell and A.H. Sihvola, 'Realization of Impedance Boundary', *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 54, n. 12, pp. 3669-3676, 2006.
- [65] P.S. Kildal, 'Definition of Artificially Soft and Hard Surfaces for Electromagnetic Waves', *Electronic Letters*, vol. 24, n. 3, pp. 168-170, 1988.
- [66] P.S. Kildal, 'Artificially Soft and Hard Surfaces in Electromagnetics', *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 38, n. 10, pp. 1537-1544, 1990.
- [67] I.V. Lindell and A.H. Sihvola, 'Soft-and-hard/DB Boundary Conditions Defined by a Skewon-Axion Medium', *IEEE Trans. Antennas Propag.*, (in press), 2012.
- [68] G. d'Ambrosio e M.D. Migliore, 'The ground dielectric layer fed by a current line as a planar microwave applicator', *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 42, n. 11, pp. 1467-1475, 1994.
- [69] G.A. Korn e T.M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientist and Engineers*, Mc Graw-Hill, New York, 1961.
- [70] K.A. Hawick, D.P. Playne, 'Notes on Complex Number for Computer Scientists', Technical Report, CSTN-048
- [71] L. Ronchi, V. Russo, G. Toraldo di Francia e Corrado Zaccagnini, 'Scattering of evanescent waves by cylindrical structures,' *J. Mod. Opt.* vol. 8, n. 4, pp. 281-299 , 1961.
- [72] P.L.E. Uslenghi, 'Three theorems on zero backscattering,' *IEEE Trans. Antennas Propag.* vol. 44, n. 2, pp. 269-270 , 1996.
- [73] Q.A. Naqvi, A.A. Rizvi e Z. Yaqoob, 'Scattering of electromagnetic waves from a deeply buried circular cylinder', *Prog. Electromag. Res.*, vol. 27, pp. 37-59, 2000.
- [74] R. De Roo e C.-T. Tai, 'Plane wave reflection and refraction involving a finely conducting medium,' *IEEE Trans. Antennas Propag.* vol. 45, n. 5, pp. 54-61 , 2003.
- [75] A.H. Sihvola, T.K. Sarkar e B. Kolundzija, 'From radar cross section to electrostatics', *IEEE Trans. Antennas Wireless Propag. Lett.*, vol. 3, pp. 324-327, 2004.

- [76] M. Di Vico, F. Frezza, L. Pajewski e G. Schettini, 'Scattering by buried dielectric cylindrical structures', *Radio Sci.*, vol. 40, (11 pp.), 2005.
- [77] I.V. Lindell and A.H. Sihvola, 'Realization of the PEMC boundary', *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 53, n. 9, pp. 3012–3018, 2005.
- [78] I.V. Lindell and A.H. Sihvola, 'Zero backscattering from self-dual objects of finite size', *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 57, n. 9, pp. 2725–2731, 2009.
- [79] I.V. Lindell and A.H. Sihvola, 'Zero-Axial-Parameter (ZAP) medium sheet', *Prog. Electromag. Res.*, vol. 89, pp. 213–224, 2009.
- [80] S.-C. Lee, 'Scattering by closely spaced parallel nonhomogeneous cylinders in an absorbing medium', *J. Opt. Sco. A. A* vol. 28, n. 9, pp. 1812-1819 , 2011.
- [81] J.W. Gibbs e E.B. Wilson, *Vector analysis*, Arnold, London, 1901.
- [82] M. Kerker, *The scattering of light*, Accademic Press, 1969.
- [83] G. Franceschetti, *Campi elettromagnetici*, Bollati Boringhieri, 1983.
- [84] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *The classical field theory*, Pergamon Press, Oxford, 1984.
- [85] C.A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, Wiley, 1989.
- [86] G. Conciauro, *Introduzione alle onde elettromagnetiche*, McGraw-Hills, 1993.
- [87] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, 1999.
- [88] A. Sihvola, *Electromagnetic mixing formulas and applications*, Institute of Electrical Engineers, London, 1999.
- [89] R.E. Collins, *Foundamentals for Microwave Engineering*, IEEE Press, New York, 2001.
- [90] R.F. Harrington, *Time-harmonic electromagnetic fields*, IEEE Press, 2001.
- [91] A. Doicu, T. Wriedt e Y.A. Eremin, *Light Scattering by systems of particles*, Springer, 2006.
- [92] G. Gerosa e P. Lampariello, *Lezioni di campi elettromagnetici*, Ingegneria 2000, II edizione, Roma, 2006.