

Figura 6.2. Prova t301c e prova t301c (Al-Tabbaa, 1987).

Nella Fig. 6.2 sono riportati i risultati delle prove triassiali cicliche consolidate drenate t301c e t302c.

La t301c mostra elevate deformazioni volumetriche positive ed elevate deformazioni deviatoriche che si sviluppano durante il tratto AB poichè il provino si trova in una condizione di snervamento. Quando il percorso si inverte BC si sviluppano deformazioni volumetriche positive minori, poichè il provino diviene sovraconsolidato e mantiene tale stato durante i cicli successivi. La t302c mostra delle deformazioni volumetriche negative che si sviluppano durante il primo tratto EF. Quando il percorso si inverte FG si verificano deformazioni volumetriche dilatanti di minore intensità. Negli ultimi due cicli si sviluppano due loop di isteresi coincidenti. Il comportamento dilatante nel primo tratto di carico EF e contraente nei successivi tratti di carico indica che non esiste una fase elastica iniziale. Infine la t302c illustra che le deformazioni distorsionali che si sviluppano durante il primo tratto EF sono maggiori di quelle nei tratti successivi.

Nella Fig. 6.3-6.4 sono riportati i risultati delle prove ad invarianti tensionali costanti t501c, t502c, t601c e t602c. Dall'analisi di tali prove si può osservare che le prove a $p = cost$ (Fig. 6.3) sono caratterizzate da cicli volumetrici aperti e cicli distorsionali chiusi, mentre per le prove a $q = cost$ (Fig. 6.4) vale il viceversa, i.e., cicli volumetrici chiusi e distorsionali aperti. Nelle due prove a $p = cost$ (Fig. 6.3) si verifica un progressivo accumulo di deformazioni volumetriche indipendentemente dallo stato tensionale iniziale. In generale si può osservare un comportamento

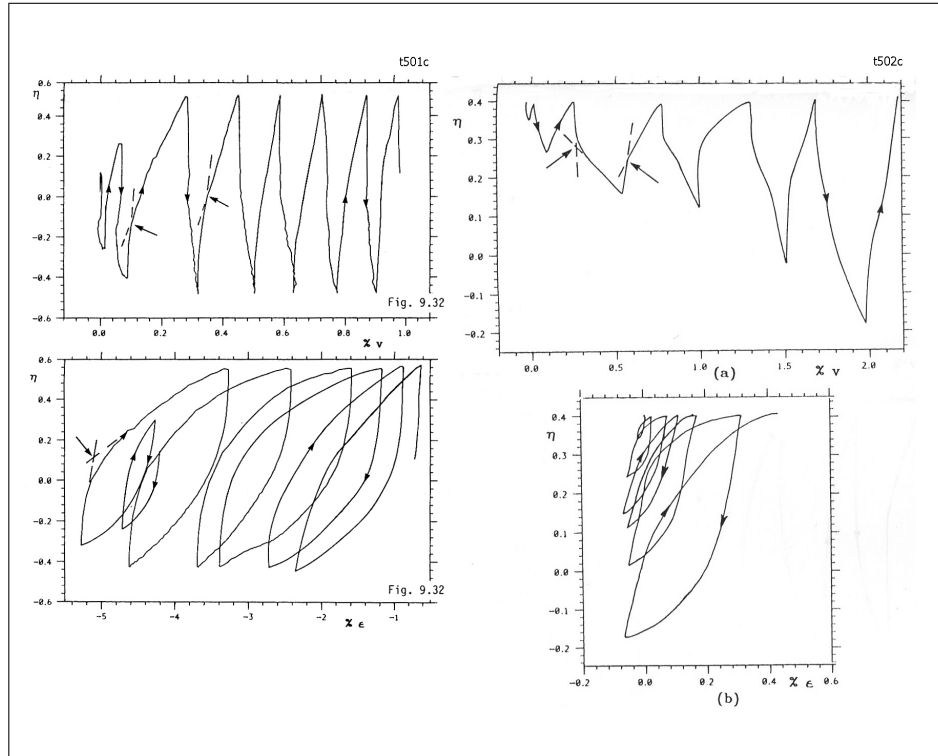


Figura 6.3. Prova t501c e prova t502c (Al-Tabbaa, 1987).

non-lineare: all'inizio di ogni ciclo di carico si osserva un comportamento molto rigido, in corrispondenza del quale non si accumulano deformazioni volumetriche nelle t501c e t502c e deformazioni distorsionali nelle t601c e t602c. Superata tale fase la rigidità tende a ridursi verificandosi deformazioni. Un comportamento analogo si può osservare quando il percorso tensionale si inverte, con una elevata rigidità iniziale che diminuisce all'aumentare della tensione imposta. Risulta, inoltre interessante osservare come all'inizio della prova l'entità delle deformazioni volumetriche accumulate sia molto piccola denotando una risposta quasi elastica.

6.3 Calibrazione del modello BS-TD

Il modello BS-TD è caratterizzato da un totale di 13 parametri. A parte la pressione limite p_l , che non ha alcun effetto sulla risposta del modello ai livelli tensionali tipici delle applicazioni geotecniche, i parametri possono essere suddivisi nei seguenti tre gruppi:

1. Parametri che controllano il comportamento del materiale nello stato vergine privo di struttura (κ^* , λ^* , χ_c , G , M_c e c_M);
2. Parametri che controllano la degradazione dei legami interparticellari (ρ_m , χ_m e k);

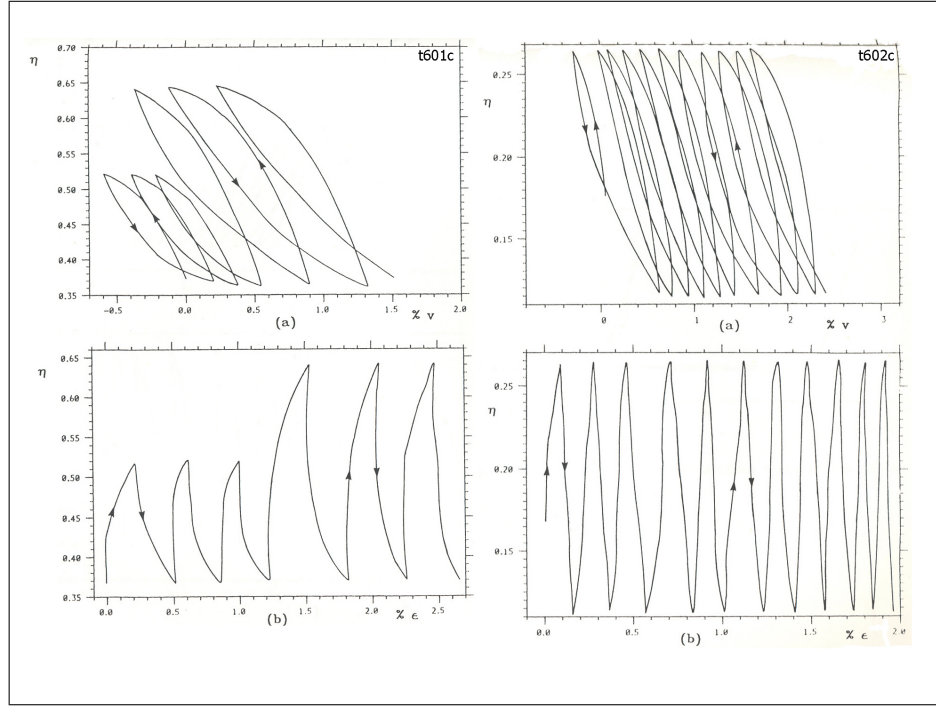


Figura 6.4. Prova t601c e prova t602c (Al-Tabbaa, 1987).

3. Parametri che controllano l'evoluzione della deformazioni plastiche all'interno della BS (ξ , s e h_0).

Il primo gruppo di parametri è stato determinato sulla base delle prove monotone riportate in Tab. 6.1.

Le costanti κ^* e λ^* hanno lo stesso significato delle variabili nei modelli di stato critico – eccetto per l'assunzione di leggi di compressione bilogarithmiche per la linea di compressione vergine e per la linea di rigonfiamento – e possono essere facilmente determinabili da prove di compressione. Nella Fig. 6.5 è riportata la simulazione (r101) confrontata con i relativi risultati sperimentali.

Il parametro χ_c è correlato alla dilatanza in condizioni di rottura (i.e., $\dot{p}_c = 0$ e $K_p = 0$) in prove di compressione o estensione triassiali drenate, quando:

$$\dot{p}_c = 0 \Rightarrow \chi_c = -\frac{\dot{\epsilon}_v}{\dot{\epsilon}_s} \quad (6.1)$$

Poiché il flusso plastico a rottura del caolino avviene a volume costante (i.e., il materiale ammette stato critico) è stato assunto $\chi_c = 0$.

Una volta valutato χ_c , le costanti M_c e $c_M = M_c/M_e$ possono essere determinati sulla base dei luoghi degli stati di rottura sperimentalmente osservati in prove di compressione o estensione triassiale, dalla eq. 4.54 e dalla eq. 4.65 in condizioni di rottura si ha:

$$\left[\frac{q}{p} \right] (\theta) = \chi_c + \sqrt{\chi_c^2 + [M(\theta)]^2} \quad (6.2)$$

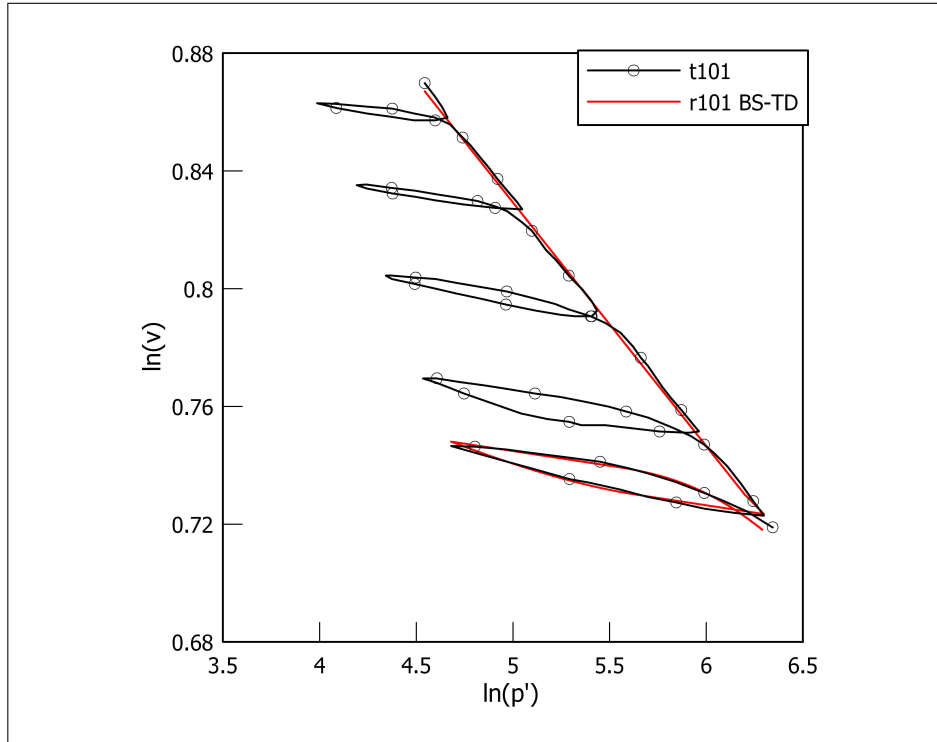


Figura 6.5. Prova di compressione isotropa t101 e relativa simulazione r101 BS-TD.

Per $\chi_c = 0$, M_c e M_e definiscono le inclinazioni della linea di stato critico (LSC) rispettivamente in compressione ed in estensione triassiale, per la cui determinazione si sono adottate le prove t301–t307 e t401–t405, che sono riportate rispettivamente nelle Fig. 6.6a e Fig. 6.6b assieme alla linea di stato critico. Per la determinazione di c_M si assume che $\phi_c = \phi_e$.

Il valore costante del modulo di taglio G deve essere determinato in modo che l'andamento di G/K con p sia tale che al variare di p il coefficiente di Poisson $\nu = (3 - 2\eta)/(6 + 2\eta)$ assuma valori realistici variabile tra 0 e 0.3 (Fig. 6.7).

Per evitare che a bassi valori della pressione media ν assuma valori negativi irrealistici si introduce la legge di elasticità non lineare descritta dalla eq. 4.2, imponendo per $p < p_l$ un valore di ν costante e maggiore di circa 0.1. A valori di p elevati ν deve assumere il suo valore massimo non superiore a 0.3.

Per ciò che riguarda i parametri che controllano la degradazione dei legami interparticellari (ρ_m , χ_m e k) sono stati assunti tutti nulli poiché il caolino è un materiale artificiale privo di struttura.

Il parametro ξ controlla la posizione del centro di proiezione sull'asse in accordo con la eq. 4.53 e la eq. 4.56. Tale costante può essere facilmente valutata da prove di compressione isotropa (o edometrica) con un ciclo di scarico-ricarico, come mostrato in Fig. 6.5 considerando il fatto che il centro di proiezione deve posizionarsi sul percorso di scarico dove si verifica una sensibile deviazione dalla curva lineare di rigonfiamento dovuta a deformazioni plastiche irreversibili.

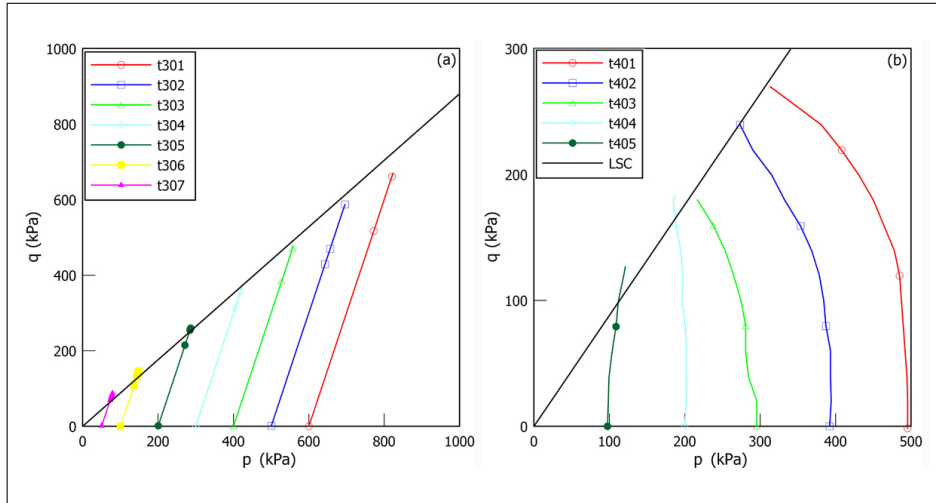


Figura 6.6. (a) t301–t307 (Cekerevac & Laloui, 2004). (b) t401–t405 (Sivakurar et al., 2002).

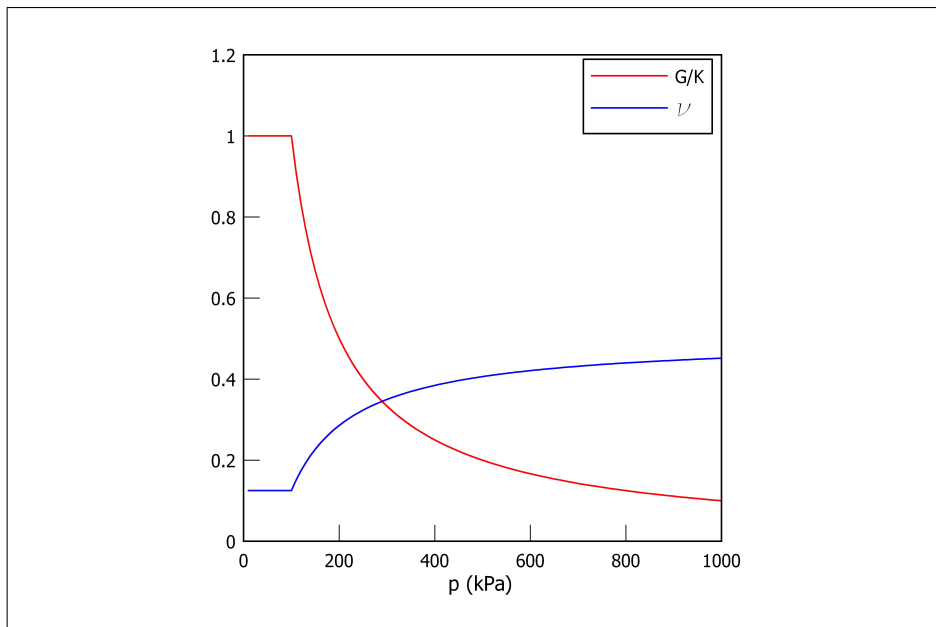


Figura 6.7. Variazione di G/K e ν con la pressione media.

Per ogni stato del materiale il modulo delle deformazioni plastiche – che si verificano all'interno della BS per ogni incremento di carico che soddisfa la condizione $\dot{\lambda}$ – è controllato dal valore del parametro h_0 in accordo con la eq. 4.69. Inoltre il valore di h_0 può essere determinato dalle curve che interpolano la forma del loop di isteresi sperimentalmente osservato nelle prove di compressione isotropa, ottenuto in un ciclo di scarico-ricarico sufficientemente ampio (Fig. 6.5). Più basso è il valore di h_0 maggiore è la dimensione del loop, ciò è dovuto al maggiore decadimento della rigidità isotropa nel ricarico dovuto a maggiori deformazioni plastiche irreversibili.

L'ultimo parametro di tale modello, s , controlla la dimensione del nucleo elastico, introdotto da Dafalias & Herrmann (1986) per riprodurre il fenomeno sperimentalmente osservato della stabilizzazione della risposta a carichi ciclici deviatorici di piccola ampiezza, a partire da stati normalmente consolidati o debolmente sovraconsolidati.

I valori dei parametri relativi al caolino sono riportati in Tab. 6.3.

Tabella 6.3. Parametri del caolino relativi al modello BS–TD

λ^*	κ^*	χ_c	G	M_c	c_M	ρ_m	χ_m	k	ξ	s	h_0
(-)	(-)	(-)	(kPa)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)
0.080	0.013	0.00	10000	0.88	0.77	0.00	0.00	0.00	0.5	1.01	4.00

6.4 Calibrazione del modello HP–MA

Nel modello HP–MA (Par. 4.4), il comportamento del materiale è definito da un totale di 10 parametri che possono essere suddivisi in due gruppi:

1. Parametri associati al modello di base (φ_c , λ^* , κ^* , N^* e r);
2. Parametri associati all'intergranular strain (m_R , m_T , R , β_r e χ).

Il parametro φ_c rappresenta l'angolo di attrito in condizioni di stato critico ed è legato alla pendenza M_c della linea di stato critico nel piano $q : p$ dalla relazione:

$$M_c = \frac{6 \sin(\varphi_c)}{3 - \sin(\varphi_c)} \quad \sin(\varphi_c) = \frac{3M_c}{6 + M_c} \quad (6.3)$$

Quindi sostituendo M_c , determinato nel paragrafo precedente si ottiene il valore di φ_c riportato in Tab. 6.4.

Le costanti λ^* e κ^* hanno lo stesso significato delle variabili nei modelli di stato critico – eccetto per l'assunzione di leggi di compressibilità bilogaritmiche per la linea di compressione vergine e per la linea di rigonfiamento – e possono essere facilmente determinabili da prove di compressione isotropa come già illustrato nel paragrafo precedente. La costante N^* rappresenta il logaritmo del volume specifico corrispondente al valore unitario di p .

Il parametro r può essere calcolato direttamente usando la definizione (Par. 4.4.1); rappresenta, infatti, il rapporto tra il modulo di compressione volumetrica, K_i , e

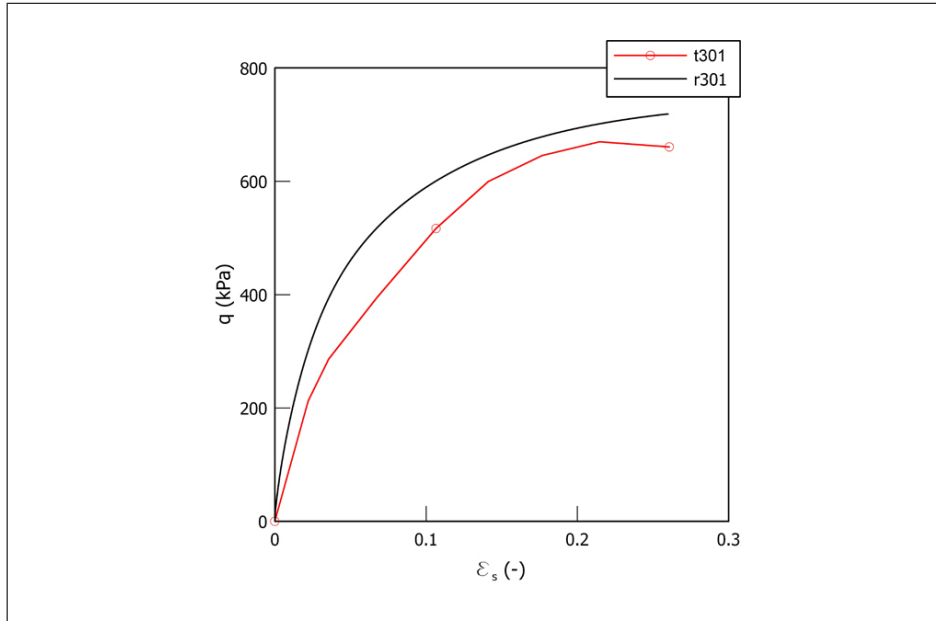


Figura 6.8. Prova di compressione triassiale consolidata drenata eseguita su un provino isotropo in condizioni normalmente consolidate piano q : ϵ_s (r301).

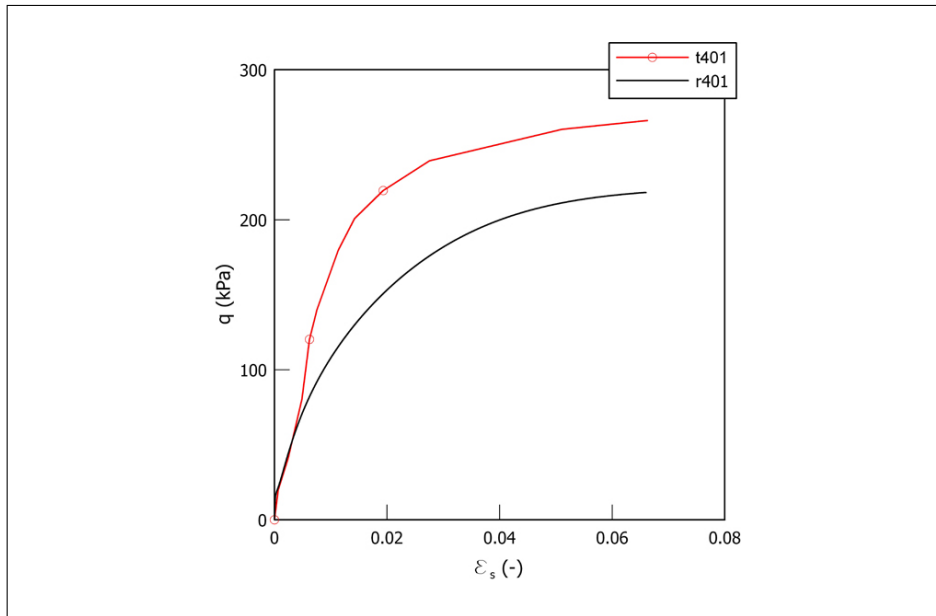


Figura 6.9. Prova di compressione triassiale non consolidata drenata eseguita su un provino isotropo in condizioni normalmente consolidate piano q : ϵ_s (r401).

il modulo di taglio G_i a partire da stati isotropi e normalmente consolidati. Nelle Fig. 6.8 e Fig. 6.9 sono state rispettivamente riportate le curve sforzi–deformazioni relative alle prove t301 e t401 e le relative simulazioni r301 e r401.

La calibrazione dei parametri per le piccole deformazioni (m_R , m_T , R , β_r e χ) è dettagliatamente descritta da Niemunis & Herle (1997). Comunque l’esperienza dimostra che tali parametri sono approssimativamente costanti per un’ampia classe di terreni, quindi a partire dai valori indicati in letteratura si sono determinati i valori riportati in Tab. 6.4 per successivi tentativi in modo tale da ottenere una soddisfacente approssimazione sia per prove monotone che cicliche.

I valori dei parametri determinati per il caolino sono riassunti in Tab. 6.4.

Tabella 6.4. Parametri del caolino relativi al modello HP–MA.

φ_c (deg)	λ^* (-)	κ^* (-)	N^* (--)	r (-)	m_R (-)	m_T (-)	R (-)	β_r (-)	χ (-)
22.56	0.080	0.013	1.23	0.5	3.0	3.0	0.0002	0.13	5.00

6.5 Calibrazione del modello EP–RW

Il modello EP–RW è caratterizzato da un totale di 11 parametri, 10 scalari e uno tensoriale. A parte la pressione limite p_l , che non ha alcun effetto sulla risposta del modello ai livelli tensionali tipici delle applicazioni geotecniche, i parametri possono essere suddivisi nei seguenti tre gruppi:

1. Parametri che controllano il comportamento del materiale nello stato vergine privo di struttura (κ^* , λ^* , ν , R , M_c e c_M);
2. Parametri che controllano la degradazione dei legami interparticellari (η_0 , k e A);
3. Parametri che controllano l’evoluzione della deformazioni plastiche all’interno della superficie di struttura (B e ψ).

Le costanti λ^* e κ^* hanno lo stesso illustrato nei paragrafi precedenti e assumono il valore riportato in Tab. 6.5.

Sulla base delle considerazioni riportate nel Par. 6.3 e della Fig. 6.7 si assume i valori di ν , M_c e c_M in Tab. 6.5.

In linea di principio la dimensione della superficie di snervamento del modello EP–RW si può mettere in relazione con il valore massimo assunto da $\|\delta\|$ rappresentato da R del modello di HP–MA. A partire da stati isotropi normalmente considerati e coincidenti con il centro della superficie di snervamento ($\sigma_0 \equiv \alpha_0$) imponendo un percorso a deviatore costante fino a che si tocca la superficie di snervamento si ha:

$$G = \frac{\Delta q}{3\Delta\epsilon_s} \quad M_c = \frac{\Delta q}{Rp_0} \quad (6.4)$$

da cui è stato possibile ricavare il valore di R di EP–RW riportato in Tab. 6.5.

Per ciò che riguarda i parametri che controllano la degradazione dei legami interparticellari (η_0 , k e A) sono stati assunti tutti nulli poiché, come già osservato nel Par. 6.3 il caolino è un materiale artificiale privo di struttura.

La calibrazione dei parametri che controllano l'evoluzione della deformazioni plastiche all'interno della superficie di struttura (B e ψ) sono stati determinati i valori riportati in Tab. 6.5 per successivi tentativi in modo tale da ottenere una soddisfacente approssimazione sia per prove monotone che cicliche.

Tabella 6.5. Parametri del caolino relativi al modello EP–RW.

λ^*	κ^*	ν	R	M_c	c_M	η_0	k	A	B	ψ
(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)
0.080	0.013	0.3	0.1	0.88	0.77	0	0.0	0.0	0.05	2.0

6.6 Comportamento previsto in condizioni di carico monotono

Le Fig. 6.10–6.11 mostrano i dati sperimentalmente osservati e le relative simulazioni numeriche dei modelli EP–RW, BS–TD e HP–MA delle prove triassiali consolidate drenate (t301–t307) riferite a provini consolidati a diversi valori di pressione di cella con $OCR = 1 \div 12$ rispettivamente nei piani degli invarianti tensionali, $q : p$, e della deformazione deviatorica–deviatore, $q : \epsilon_s$.

Le Fig. 6.12 e 6.13 riportano le prove triassiali consolidate non drenate (t401–t405) riferite a provini consolidati a diversi valori di pressione di cella con $OCR = 1 \div 5$ e le relative simulazioni eseguite con i tre modelli rispettivamente nei piani $q : p$ e $q : \epsilon_s$.

Si osserva come tutti i modelli riescano a cogliere l'andamento delle curve sperimentali. In particolare dall'analisi delle curve sforzi–deformazioni (Fig. 6.11 e 6.13) si nota come i modelli riescano a riprodurre il passaggio da comportamento duttile a comportamento fragile all'aumentare del valore della pressione di confinamento.

Inoltre considerando i percorsi tensionali sul piano $q : p$ (Fig. 6.10 e 6.12) si osserva che gli stati di rottura tendono a disporsi sulla linea di stato critico (CSL). Per quanto riguarda il modello HP–MA si deve infatti ricordare che le funzioni di barotropia e picnotropia sono costruite in maniera tale che il modello ammetta una superficie di stato critico.

Si nota in particolare dalle Fig. 6.11 e 6.13 che passando da valori bassi della pressione di confinamento a valori più elevati all'inizio la rigidezza aumenta fino ad un certo punto limite al di sopra del quale la rigidezza iniziale invece che continuare ad aumentare all'aumentare della pressione di confinamento tende a diminuire poiché ci stiamo avvicinando alla linea di compressione vergine e lo stato iniziale di prova anziché essere sovraconsolidato diventa normalmente consolidato e la rigidezza del materiale è influenzata in maniera significativa dalle deformazioni plastiche che si accumulano fin da bassi livelli di deformazione. Tale fenomeno sperimentalmente osservato è colto dai modelli considerati.

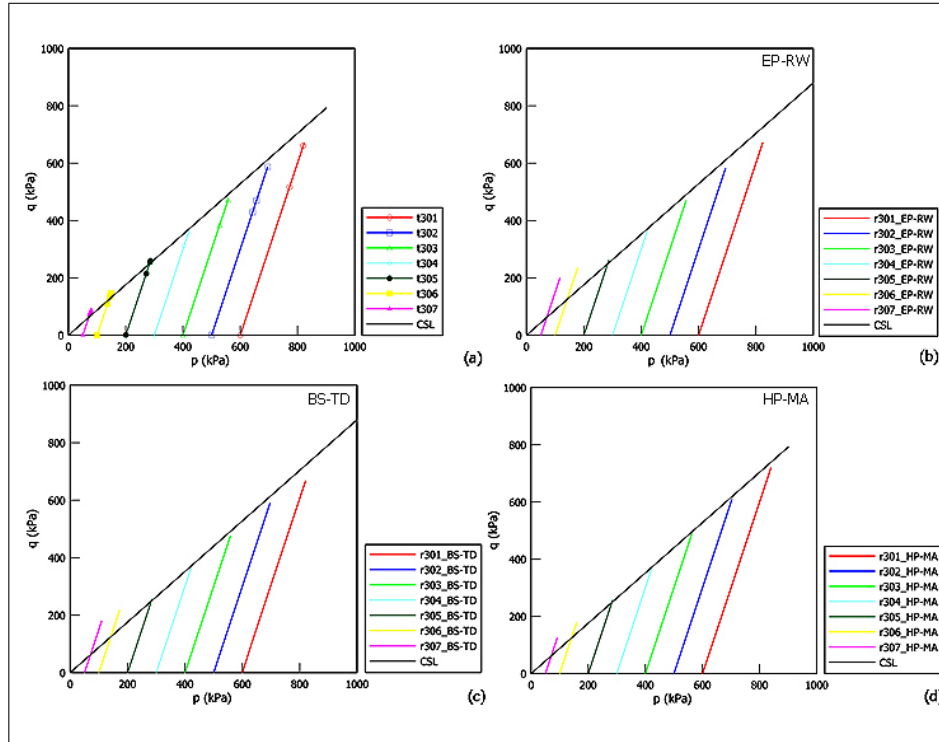


Figura 6.10. Piano $q : p$: (a) Prove triassiali consolidate drenate (t301–t307) e relative simulazioni numeriche (r301–r307): (b) modello EP–RW; (c) modello BS–TD; (d) modello HP–MA.

Per le prove TX-CU si può osservare che in Fig. 6.12 i percorsi di carico con OCR basso deviano a sinistra, denotando un comportamento contrente con sovrappressioni interstiziali positive, mentre i percorsi di carico con OCR elevato sono quasi verticali, mettendo in evidenza un comportamento neutro o dilatante.

Inoltre i modelli sottostimano leggermente il valore massimo del deviatore per i provini consolidati a valori di OCR più bassi.

6.7 Comportamento previsto in condizioni di carico ciclico

In figura Fig. 6.14a si riporta il percorso di carico imposto in laboratorio da Al-Tabbaa che è un percorso di compressione isotropa a partire da uno stato isotropo normalmente consolidato con numerosi cicli di carico scarico fino a valori di OCR relativamente elevati. I tre modelli riescono a riprodurre una risposta isteretica sui cicli di scarico–ricarico. Tale comportamento isteretico può essere trascurato in molti casi, ma non nel caso della risposta ciclica perché quando il terreno è sottoposto ad un numero elevato di cicli, dovuti ad esempio ad un sisma, gli effetti isteretici accumulati possono essere rilevanti. Tale risposta isteretica è colta qualitativamente ed in buona misura anche quantitativamente dai modelli.

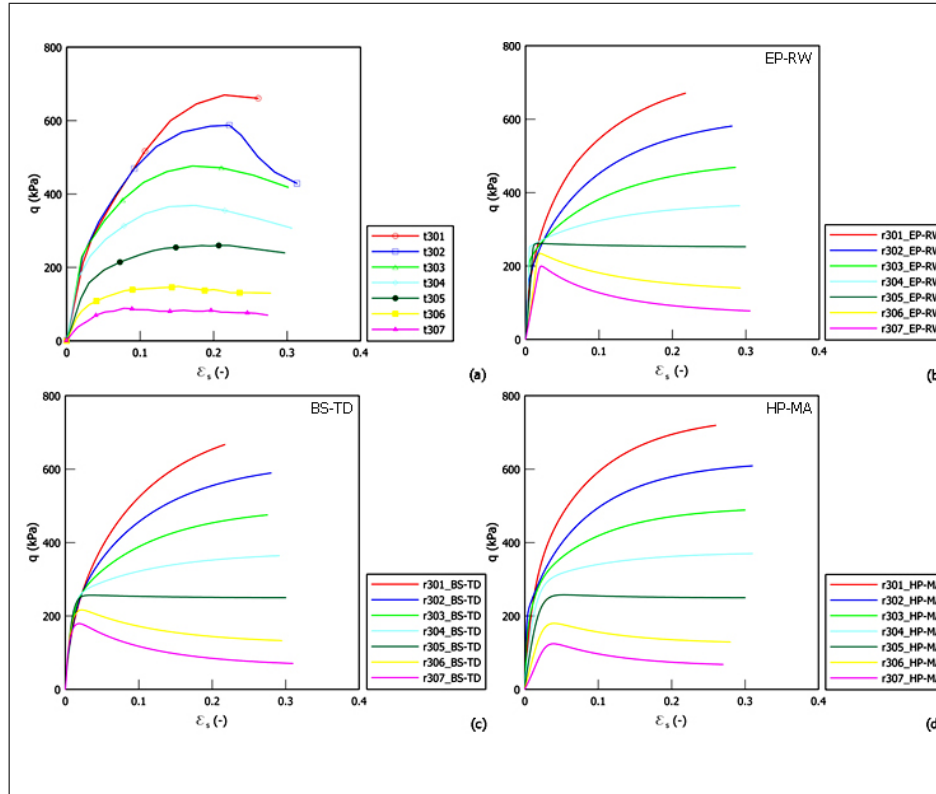


Figura 6.11. Piano $q : \epsilon_s$: (a) Prove triassiali consolidate drenate (t301–t307) e relative simulazioni numeriche (r301–r307): (b) modello EP–RW; (c) modello BS–TD; (d) modello HP–MA.

Si può osservare che le misure sperimentali mostrano ampiezze dei cicli maggiori all’aumentare della pressione media, ciò è colto da tutti i modelli anche se i cicli riprodotti dal modello HP–MA tendono a chiudersi troppo rapidamente, poiché la rigidezza isotropa in fase di ricarica si degrada troppo velocemente. Nel complesso i modelli EP–RW e BS–TD si avvicinano di più ai dati sperimentali. Osservazioni analoghe possono essere fatte per la prova di compressione edometrica ciclica riportata in Fig. 6.15.

Nelle Fig. 6.16 e 6.17 possiamo osservare i risultati della t301c e relative simulazioni rispettivamente in termini di $\eta : \epsilon_s$ e $\eta : \epsilon_v$ ($\eta = q/p$). I tre modelli riescono a simulare il comportamento di tipo isteretico sperimentalmente osservato. Il modello BS–TD ed in minor misura il modello EP–RW sono caratterizzati però dal fenomeno del “rachtening”, i.e. eccessivo accumulo di deformazioni, mentre il modello HP–MA è caratterizzato da un’ampiezza dei cicli molto minore di quella sperimentalmente osservata.

Nelle figure Fig. 6.18 e 6.19 possiamo osservare i risultati della t302c e le relative simulazioni rispettivamente in termini di $\eta : \epsilon_s$ e $\eta : \epsilon_v$. I modelli BS–TD e HP–MA riescono ancora a riprodurre un comportamento ciclico, mentre il modello EP–RW

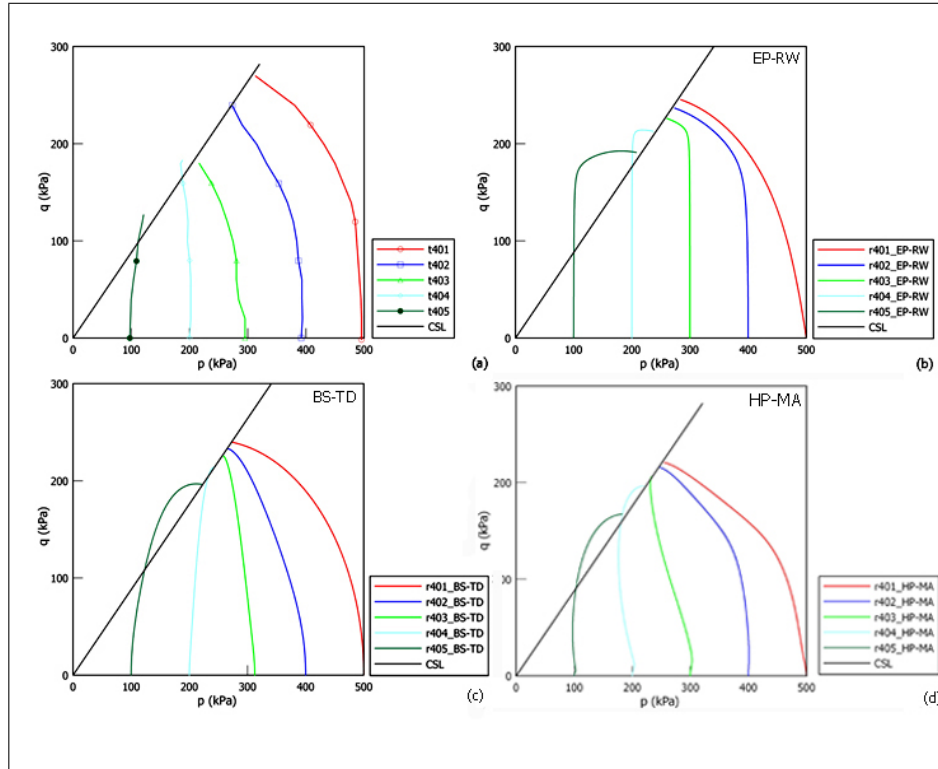


Figura 6.12. Piano $q : p$: (a) Prove triassiali consolidate non drenate (t401–t405) e relative simulazioni numeriche (r401–r405); (b) modello EP–RW; (c) modello BS–TD; (d) modello HP–MA.

è caratterizzato da un'ampiezza dei cicli molto minore di quella sperimentalmente osservata.

Per quanto riguarda le deformazioni volumetriche (Fig. 6.19) il modello BS–TD coglie il comportamento dilatante del materiale, mentre i modelli EP–RW e HP–MA evidenziano un comportamento di tipo contraente. D'altro canto HP–MA coglie bene l'andamento generale delle deformazioni deviatoriche (Fig. 6.18) anche se tende a sovrastimarle leggermente.

Di contro il modello BS–TD è di nuovo caratterizzato da racheting.

Nelle Fig. 6.20–6.23 possiamo osservare rispettivamente i risultati delle t501c–t502c e le relative simulazioni in termini di $\Delta\epsilon_s : \Delta\eta$ e $\Delta\epsilon_v : \Delta\eta$ per tenere conto degli stati di deformazione iniziali non nulli dei dati sperimentali.

Focalizzando l'attenzione sulle deformazioni distorsionali (Fig. 6.20 e 6.22) si osserva come il modello HP–MA riproduce sia a partire da uno stato sovraconsolidato (Fig. 6.19) che da uno stato normalmente consolidato (Fig. 6.21) una risposta isteretica simile a quella sperimentalmente osservata, ma i cicli sono leggermente più piccoli di quelli misurati, quindi c'è una tendenza a sottostimare l'energia dissipata nel singolo ciclo per il tipo di calibrazione fatta, si ricordi che le previsioni delle prove cicliche sono *previsioni di classe A*. In più i dati mostrano delle de-

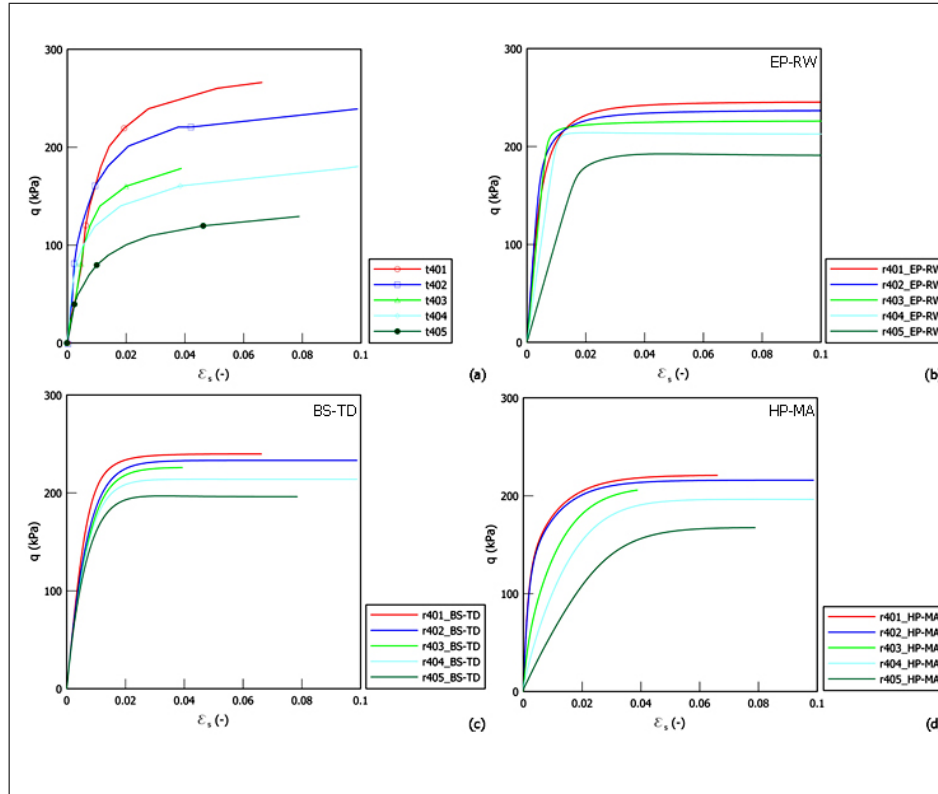


Figura 6.13. Piano $q : \epsilon_s$: (a) Prove triassiali consolidate non drenate (t401–t405) e relative simulazioni numeriche (r401–r405): (b) modello EP–RW; (c) modello BS–TD; (d) modello HP–MA.

formazioni permanenti accumulate che traslano le curve sforzi–deformazioni verso destra, mentre il modello mostra tale spostamento ma è molto più piccolo di quello misurato. I modelli EP–RW e BS–TD funzionano abbastanza bene a partire da uno stato sovraconsolidato ($OCR = 2.0$), riproducendo un comportamento di tipo isteretico, in cui si sottostima l’energia dissipata. Mentre BS–TD a partire da uno stato normalmente consolidato le simulazioni sono caratterizzate da eccessive deformazioni plastiche deviatoriche accumulate nei cicli di scarico–ricarico. Per quanto riguarda le deformazioni volumetriche (Fig. 6.21 e Fig. 6.23) tutti e tre i modelli riescono a simulare una risposta iniziale quasi elastica denotata da minori deformazioni volumetriche cumulate in corrispondenza dei primi cicli di carico.

Nelle Fig. 6.24–6.27 possiamo osservare rispettivamente i risultati delle t601c–t602c e le relative simulazioni in termini di $\Delta\epsilon_s : \Delta\eta$ e $\Delta\epsilon_v : \Delta\eta$ per tenere conto degli stati di deformazione iniziali non nulli dei dati sperimentali.

Tutti e tre i modelli riescono a simulare una risposta iniziale quasi elastica denotata da minori deformazioni distorsionali e volumetriche cumulate in corrispondenza dei primi cicli di carico. In particolare per le deformazioni distorsionali (Fig. 6.25 e 6.26) il modello HP–MA è l’unico che riesce a simulare cicli analoghi

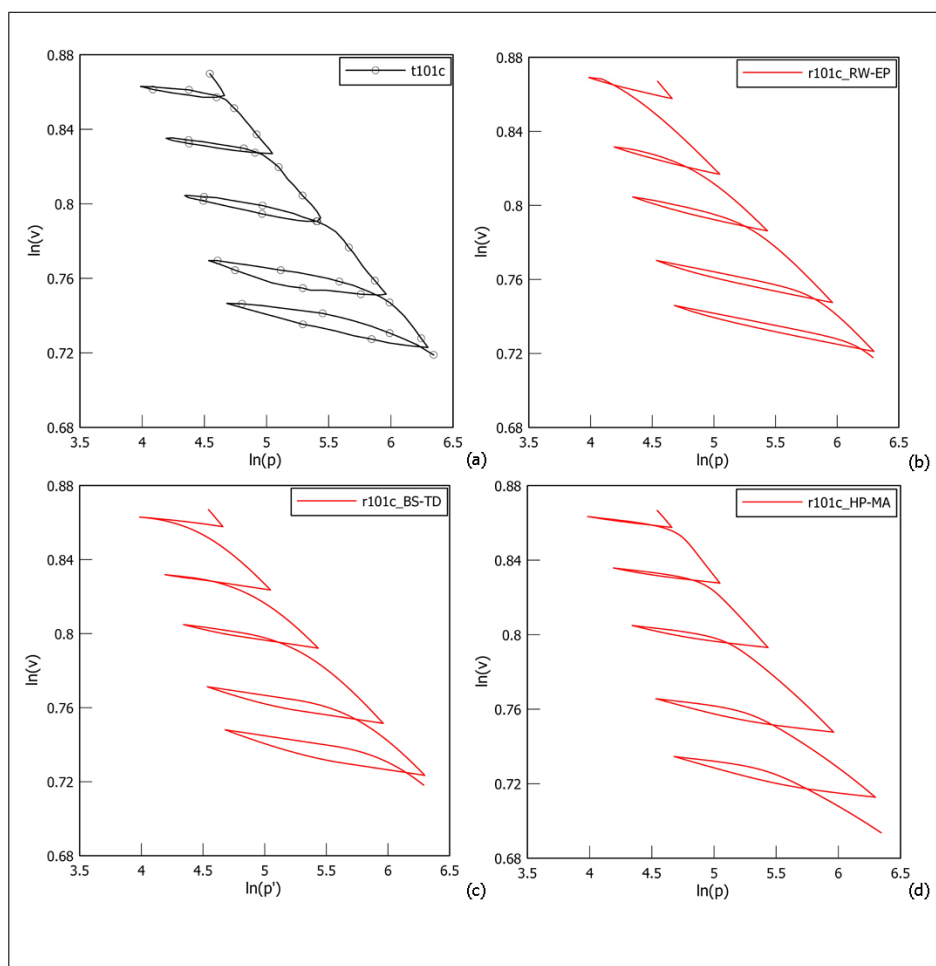


Figura 6.14. (a) Prova di compressione isotropa ciclica (t101c) e relative simulazioni (r101c): (b) modello EP–RW; (c) modello BS–TD; (d) modello HP–MA.

a quelli sperimentalmente osservati mentre per i modelli elastoplastici tali cicli risultano più stretti.

Dall'esame complessivo dei risultati illustrati in tale capitolo è possibile evidenziare come i modelli ciclici considerati sono in grado di riprodurre (qualitativamente e quantitativamente) gli aspetti fondamentali del comportamento dei terreni argillosi in condizioni di carico monotone e si sono dimostrati capaci di riprodurre - almeno qualitativamente - gli aspetti essenziali della risposta ciclica delle argille, per una vasta gamma di condizioni di carico. Risulta importante sottolineare che le simulazioni discusse nel presente capitolo costituiscono delle vere *previsioni di classe A* in quanto la calibrazione del modello è stata condotta utilizzando solo risultati di prove monotone convenzionali.

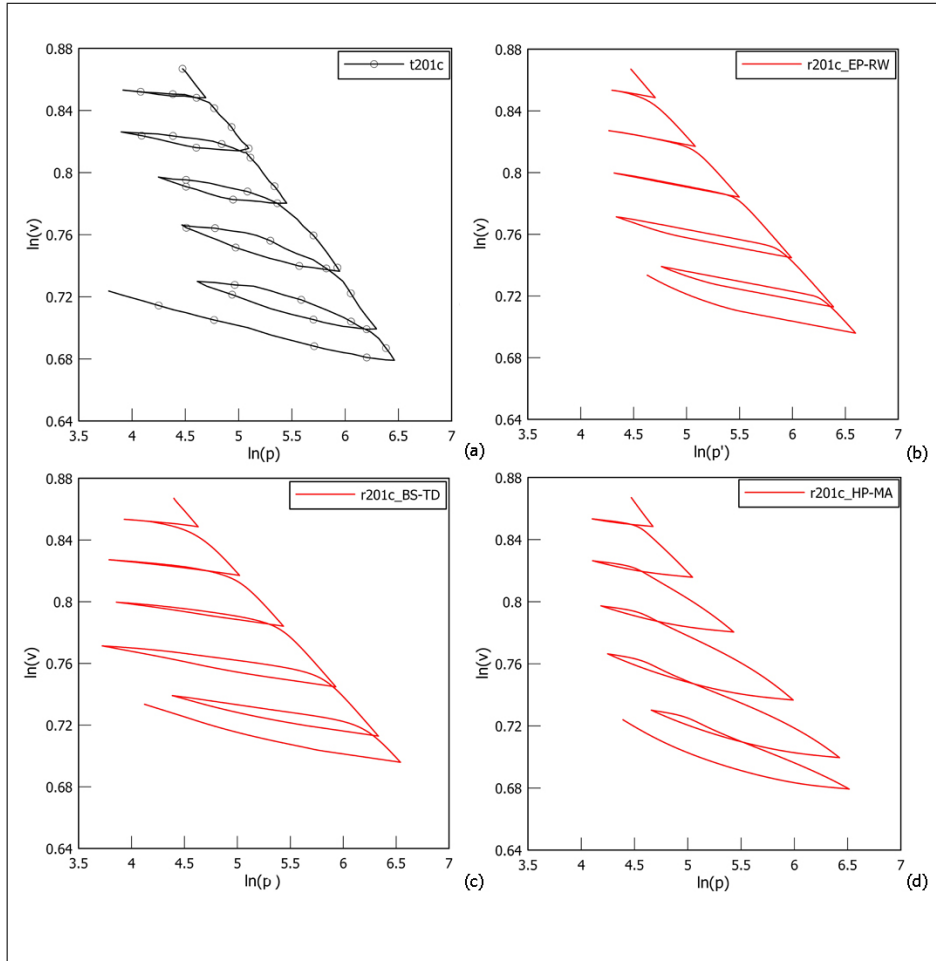


Figura 6.15. (a) Prova di edometrica ciclica (t201c) e relative simulazioni (r201c): (b) modello EP-RW; (c) modello BS-TD; (d) modello HP-MA.

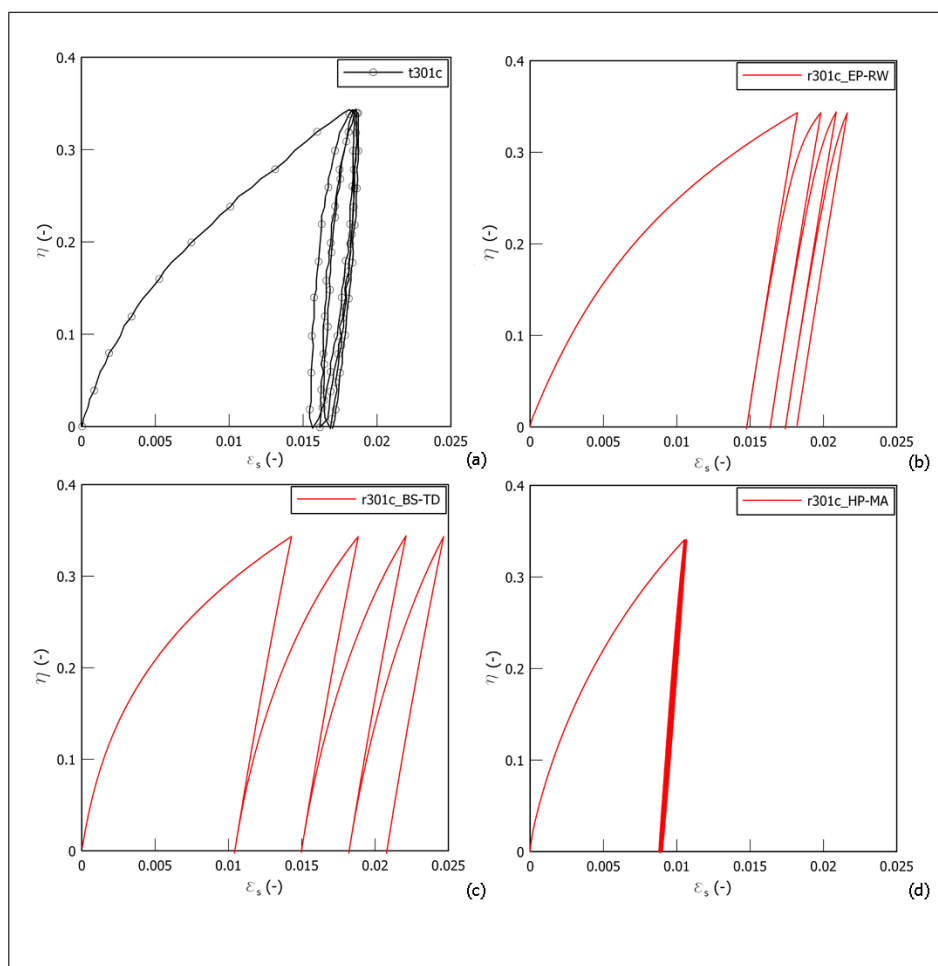


Figura 6.16. Piano $\eta : \epsilon_s$: (a) Prova di compressione triassiale consolidata drenata (t301c) e relative simulazioni (r301c): (b) modello EP-RW; (c) modello BS-TD; (d) modello HP-MA.

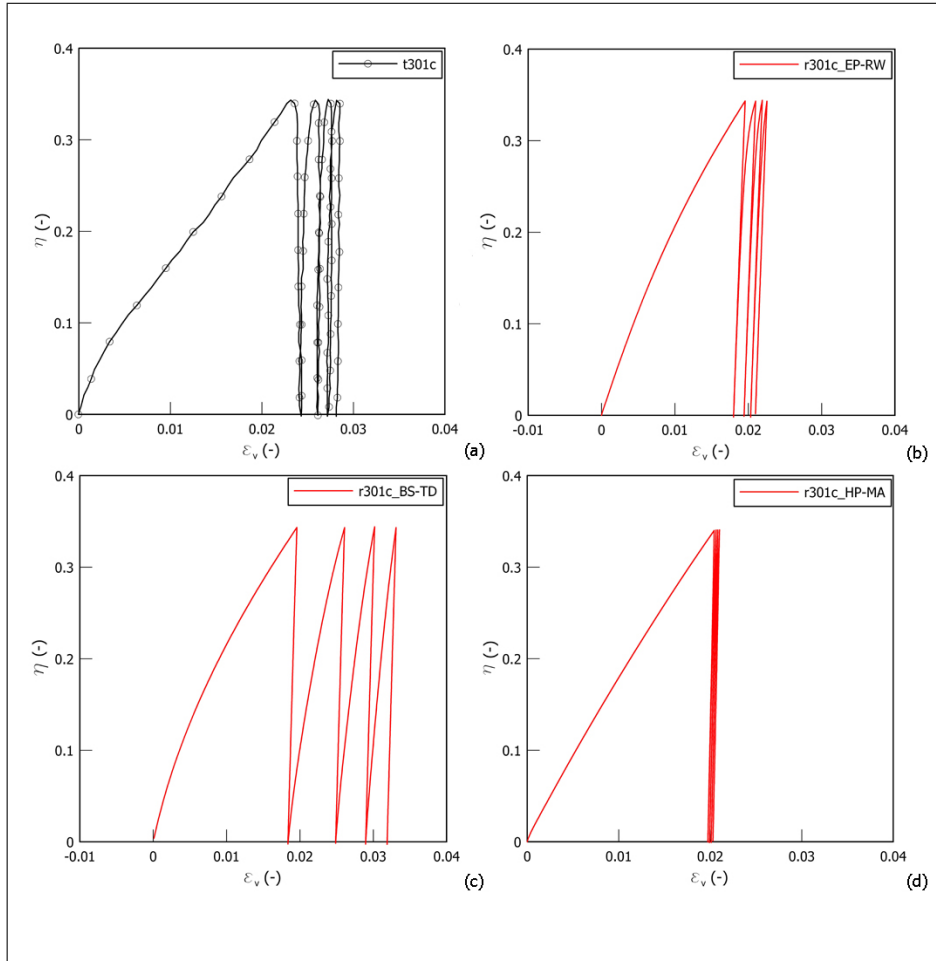


Figura 6.17. Piano $\eta : \epsilon_v$: (a) Prova di compressione triassiale consolidata drenata (t301c) e relative simulazioni (r301c): (b) modello EP-RW; (c) modello BS-TD; (d) modello HP-MA.

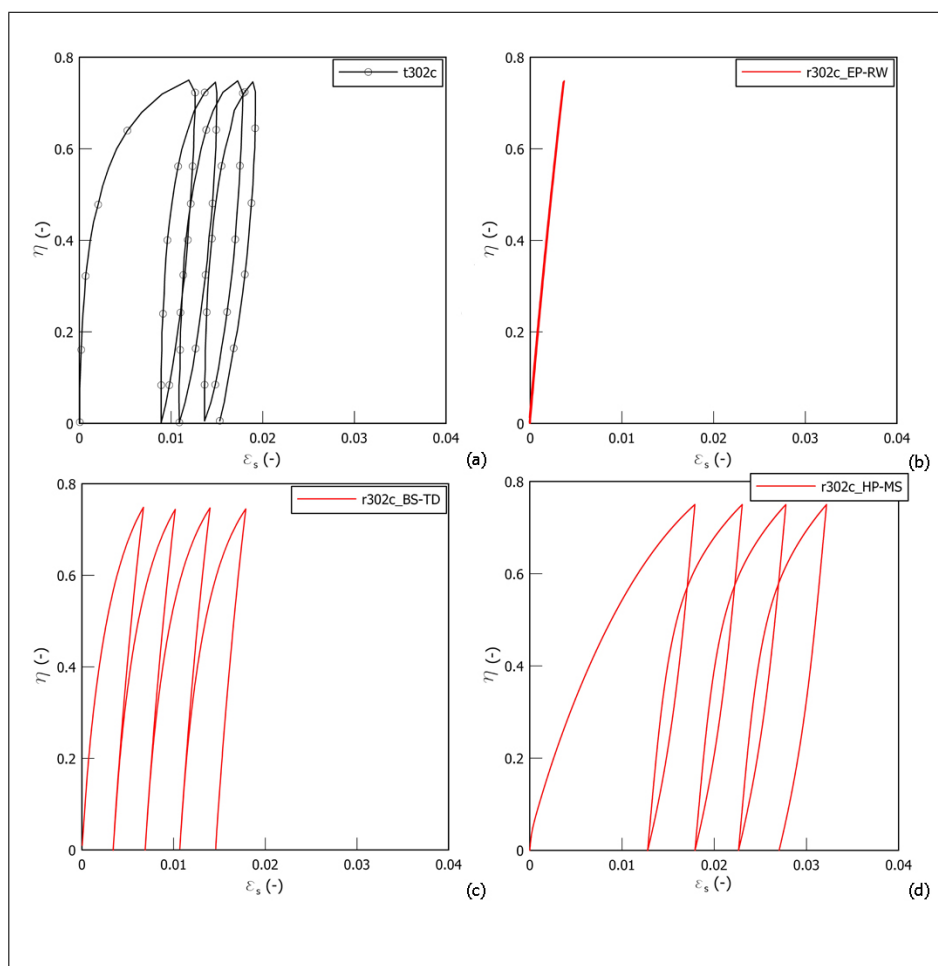


Figura 6.18. Piano $\eta : \epsilon_s$: (a) Prova di compressione triassiale consolidata drenata (t302c) e relative simulazioni (r302c): (b) modello EP-RW; (c) modello BS-TD; (d) modello HP-MA.

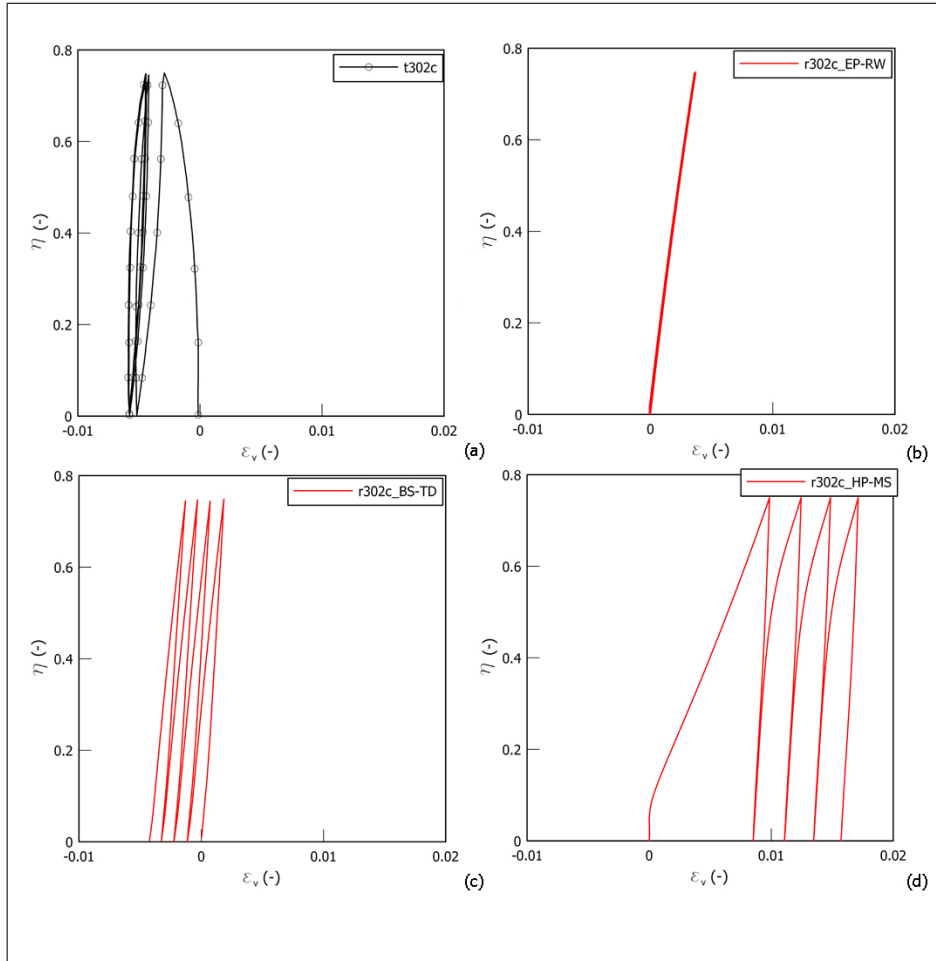


Figura 6.19. Piano $\eta : \epsilon_v$: (a) Prova di compressione triassiale consolidata drenata (t302c) e relative simulazioni (r302c): (b) modello EP-RW; (c) modello BS-TD; (d) modello HP-MA.

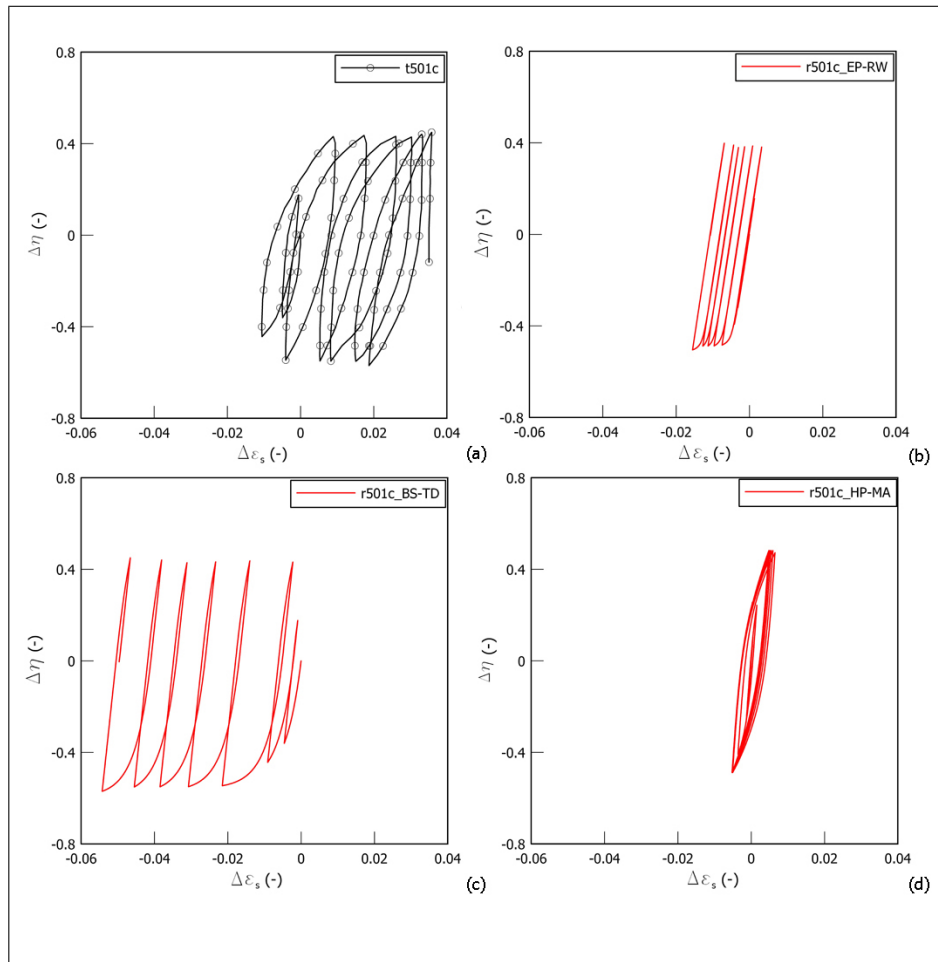


Figura 6.20. Piano $\eta : \varepsilon_s$: (a) Prova a $p = cost$ (t501c) e relative simulazioni (r501c): (b) modello EP-RW; (c) modello BS-TD; (d) modello HP-MA.

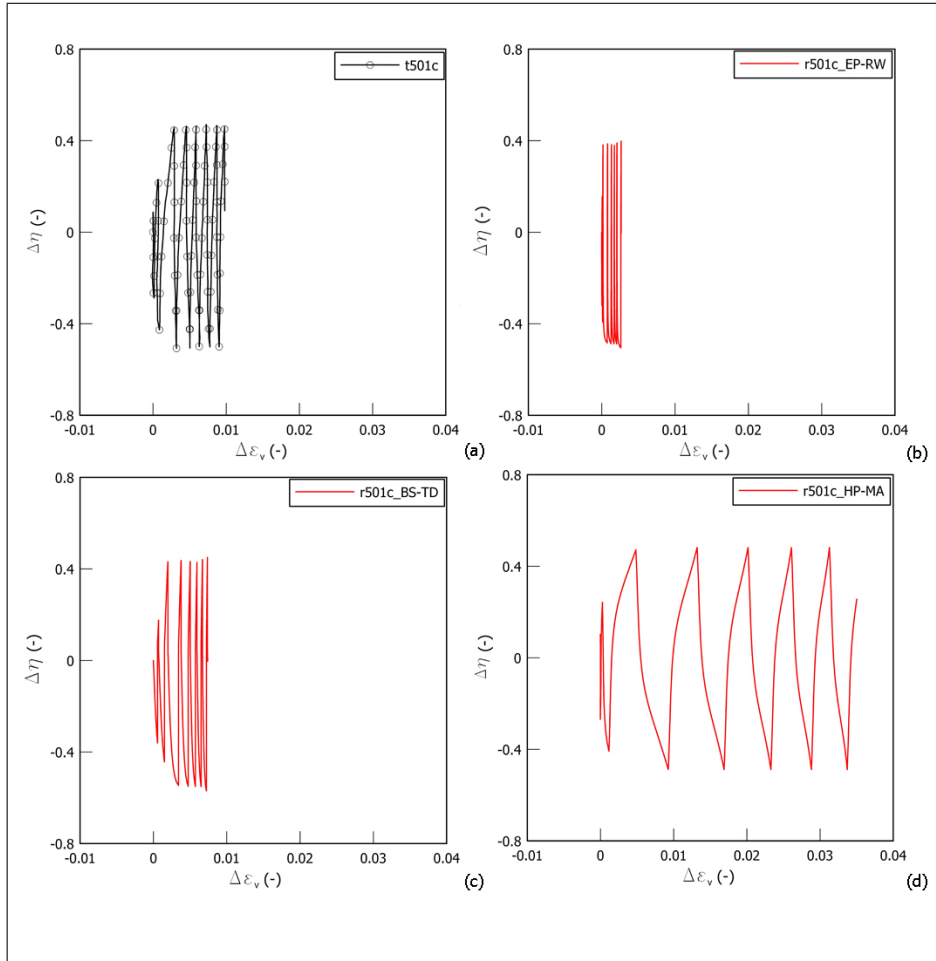


Figura 6.21. Piano $\eta : \epsilon_v$: (a) Prova a $p = cost$ (t501c) e relative simulazioni (r501c): (b) modello EP-RW; (c) modello BS-TD; (d) modello HP-MA.

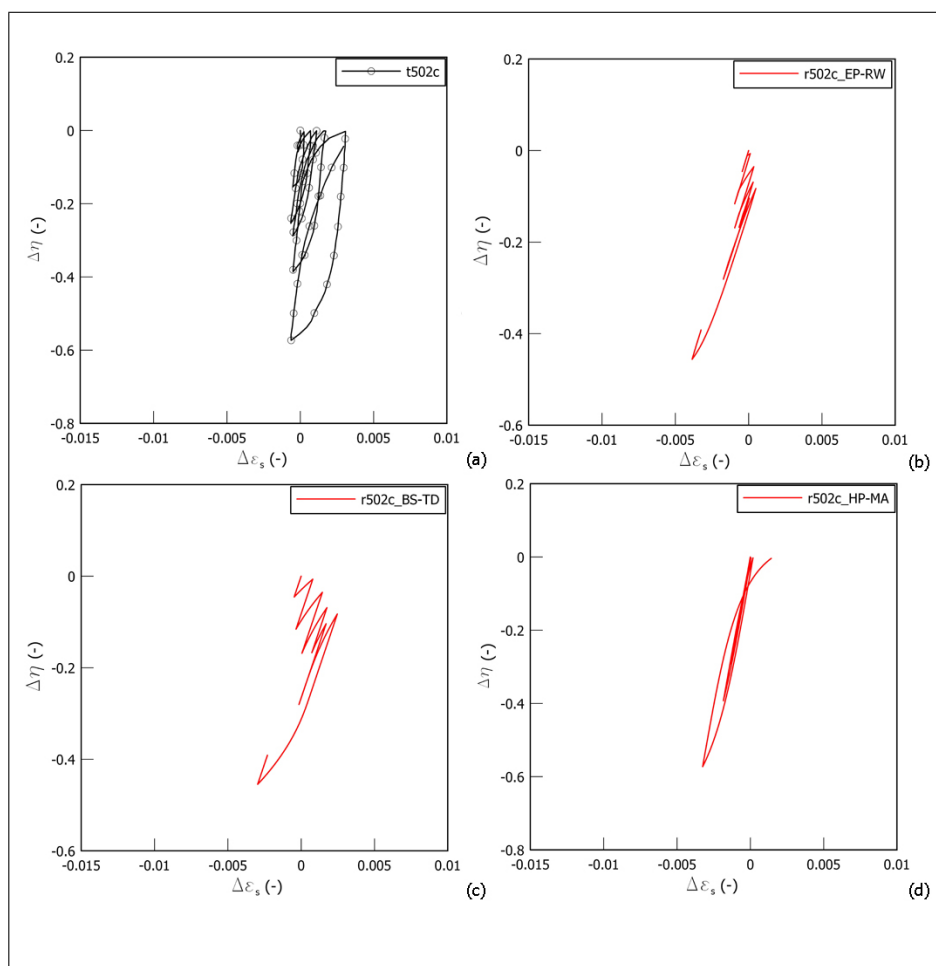


Figura 6.22. Piano $\eta : \varepsilon_s$: (a) Prova a $p = cost$ ($t502c$) e relative simulazioni ($r502c$): (b) modello EP-RW; (c) modello BS-TD; (d) modello HP-MA.

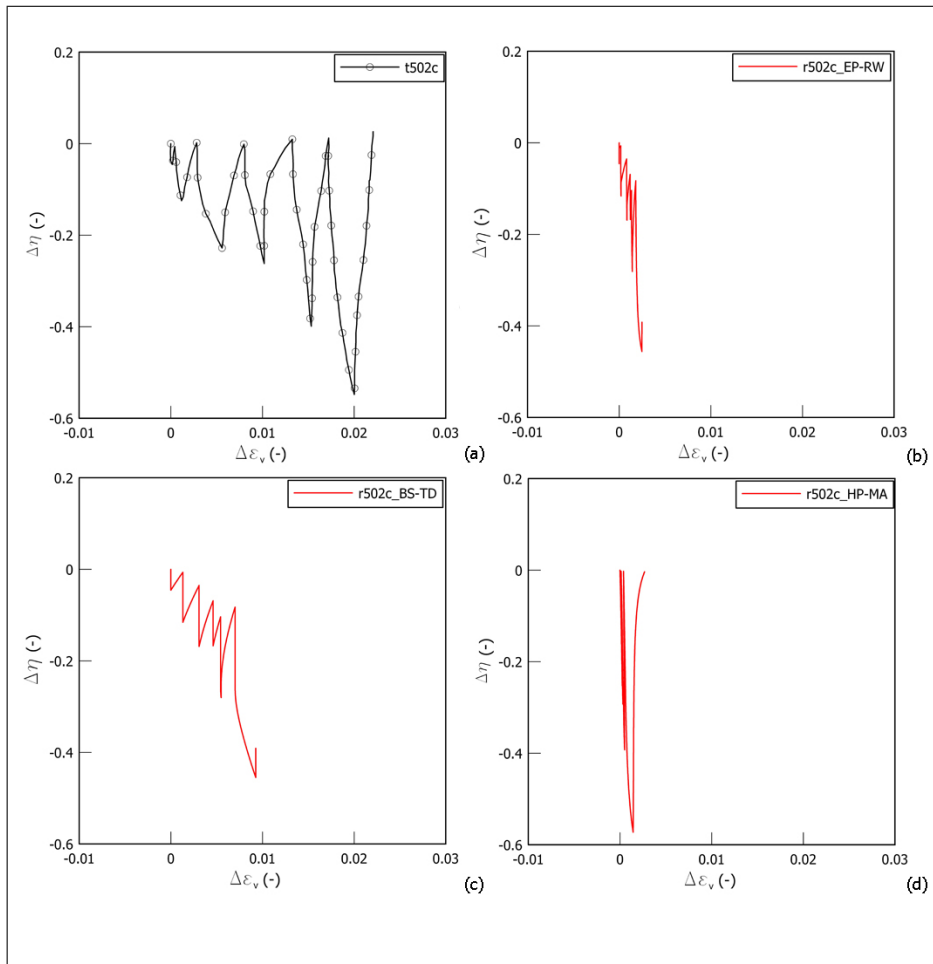


Figura 6.23. Piano $\eta : \epsilon_v$: (a) Prova a $p = cost$ (t502c) e relative simulazioni (r502c): (b) modello EP-RW; (c) modello BS-TD; (d) modello HP-MA.

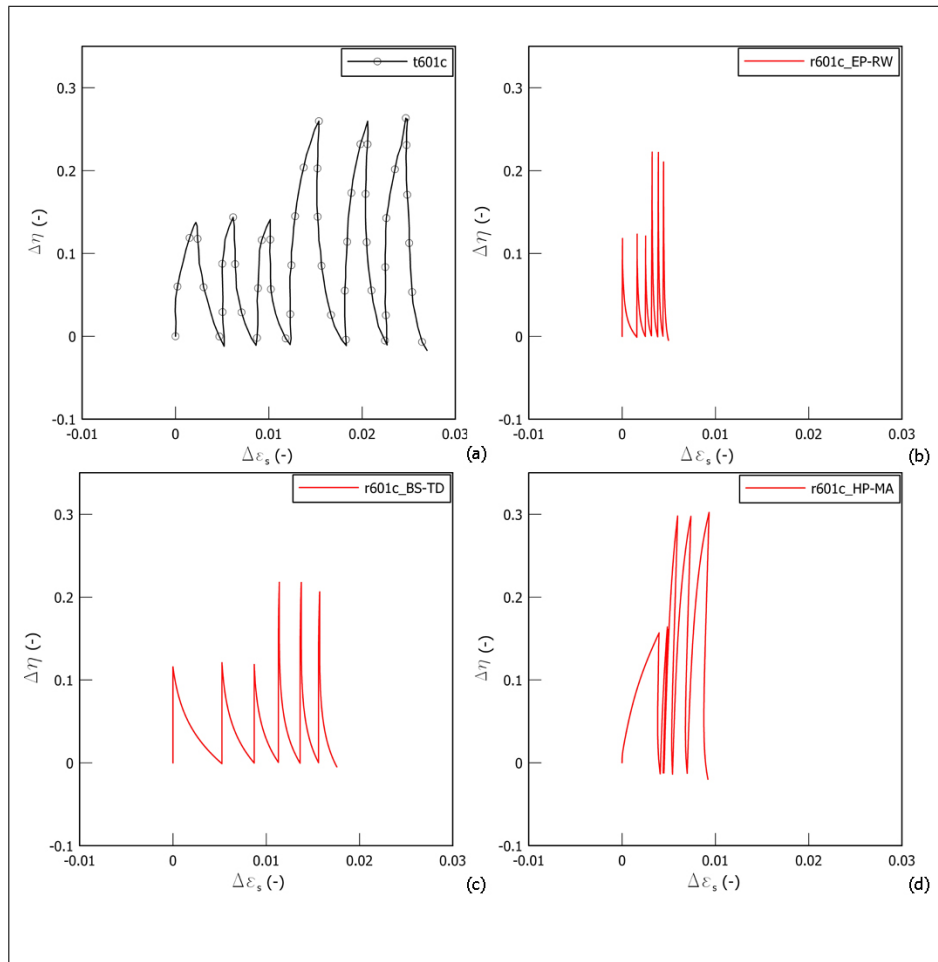


Figura 6.24. Piano $\eta : \varepsilon_s$: (a) Prova a $q = \text{cost}$ (t601c) e relative simulazioni (r601c): (b) modello EP-RW; (c) modello BS-TD; (d) modello HP-MA.

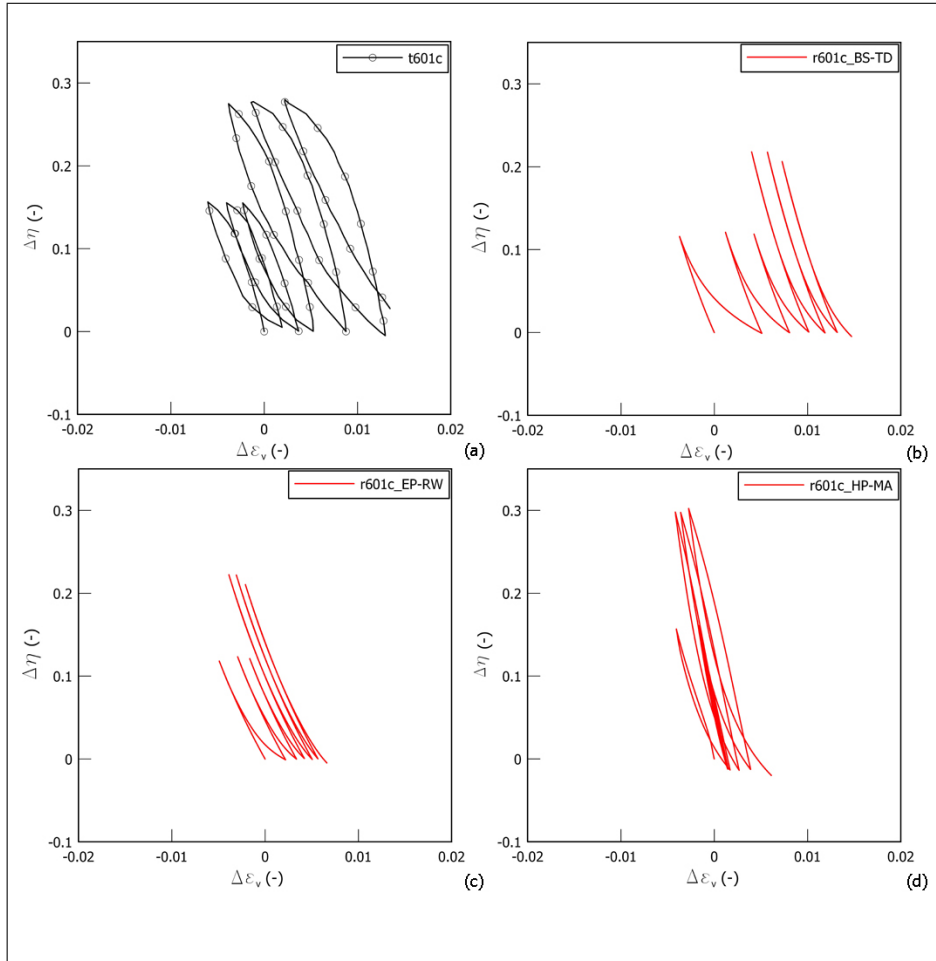


Figura 6.25. Piano $\eta : \varepsilon_v$: (a) Prova a $q = cost$ (t601c) e relative simulazioni (r601c): (b) modello EP-RW; (c) modello BS-TD; (d) modello HP-MA.

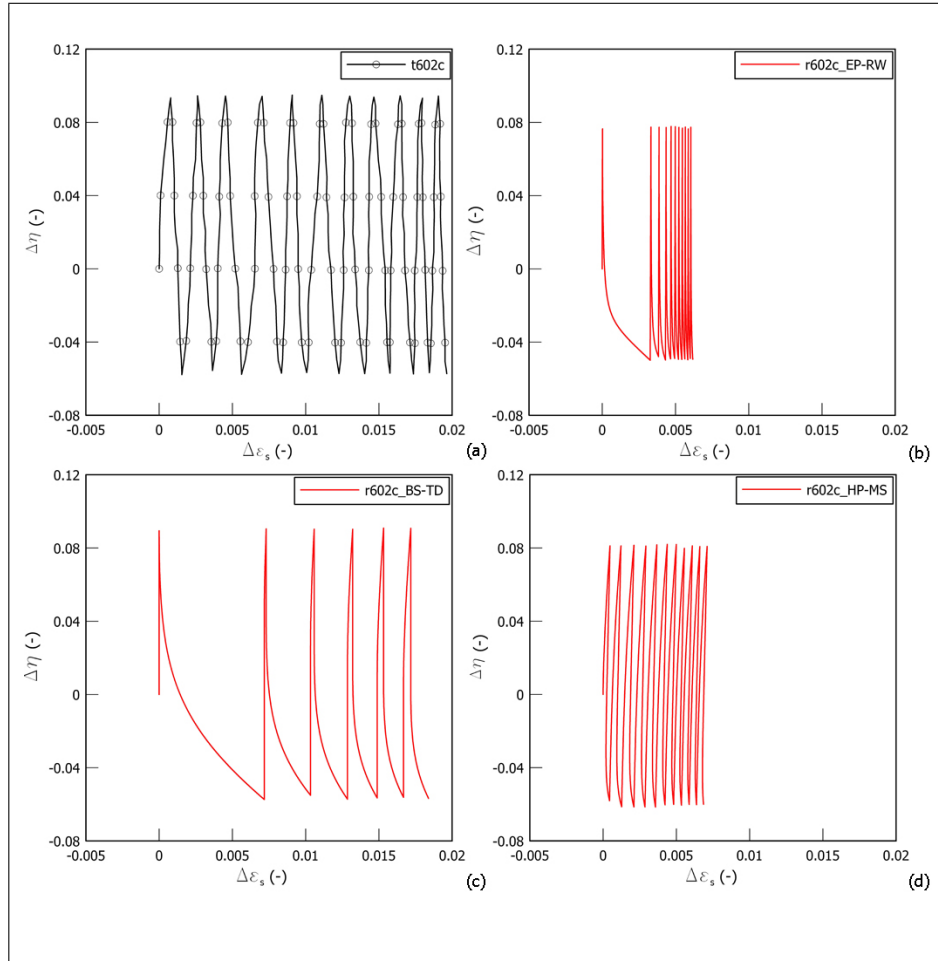


Figura 6.26. Piano $\eta : \varepsilon_s$: (a) Prova a $q = cost$ (t602c) e relative simulazioni (r602c): (b) modello EP-RW; (c) modello BS-TD; (d) modello HP-MA.

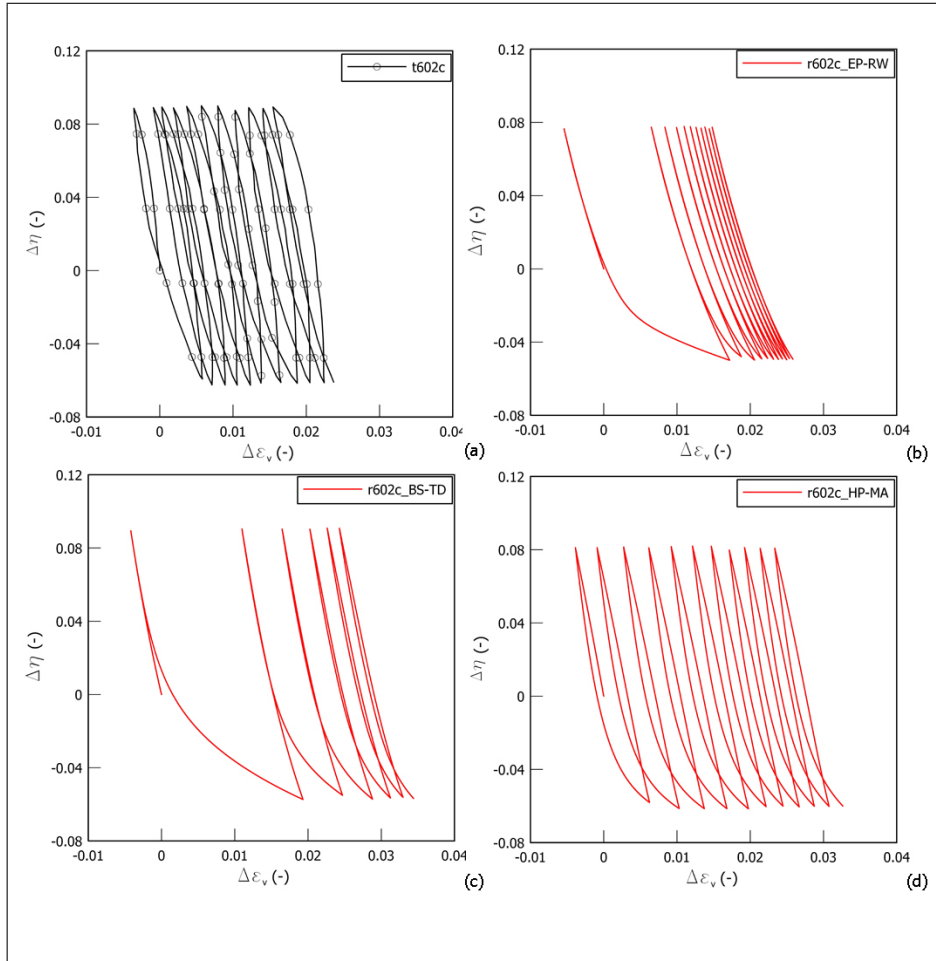


Figura 6.27. Piano $\eta : \epsilon_v$: (a) Prova a $q = cost$ (t602c) e relative simulazioni (r602c): (b) modello EP-RW; (c) modello BS-TD; (d) modello HP-MA.

Modellazione di problemi al finito

Equazioni governanti per i processi accoppiati in campo dinamico

7.1 Introduzione

In tale capitolo sono descritte in un certo dettaglio le equazioni governanti per i processi accoppiati di deformazione e filtrazione nei mezzi porosi in campo dinamico, derivate a partire dai principi fondamentali di conservazione della massa e della quantità di moto e dalla scelta di opportune equazioni costitutive per lo scheletro solido e per le fasi fluide.

In molti casi è possibile semplificare considerevolmente le equazioni governanti tenendo conto che, in relazione al campo di frequenze caratteristiche delle sollecitazioni applicate, alcuni termini che compaiono nelle equazioni governanti risultano trascurabili. Tale possibilità è stata esplorata da Zienkiewicz et al. (1980). I principali risultati raggiunti da Zienkiewicz et al. sono sintetizzati nel Par. 7.9, con riferimento al solo caso di mezzo saturo.

I fenomeni di carattere meccanico (e.g., deformazioni, spostamenti, variazioni di stato tensionale, sviluppo di sovrappressioni interstiziali, raggiungimento di stati limite di collasso) che si innescano in presenza di azioni sismiche all'interno di un corpo di terreno possono essere descritti sulla base dei principi fondamentali della *teoria delle miscele*, formalizzata, ad es., in Bowen (1976) o in Truesdell (1984).

Nella teoria classica delle miscele, il terreno è assimilato ad un mezzo continuo multifase, nel quale la fase solida ed i fluidi interstiziali (acqua ed eventualmente gas) occupano simultaneamente il dominio dello spazio oggetto di studio.

Al fine di capire tale concetto si consideri il caso generale di mezzo multifase definito dalla sovrapposizione delle fasi α , con $\alpha = 1, \dots, k$. Nella configurazione corrente il punto spaziale \boldsymbol{x} è occupato simultaneamente dai punti materiali \boldsymbol{X}^α di tutte le fasi. Il moto di ogni fase è comunque descritto indipendentemente.

Tutte le grandezze fisiche che caratterizzano lo stato delle singole fasi e del mezzo multifase nell'insieme sono in relazione ad un volume caratteristico, detto *volume elementare rappresentativo* (representative elementary volume, REV, Fig. 7.1 relativa al caso particolare del terreno). Caratteristiche essenziali del REV sono:

1. le dimensioni caratteristiche del REV sono sufficientemente grandi (rispetto alle dimensioni dei grani) da rendere trascurabili le fluttuazioni dei valori medi calcolati su tale volume delle grandezze fisiche significative;

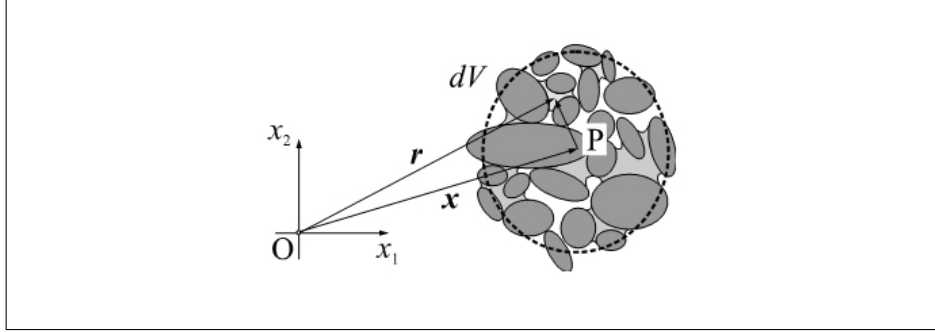


Figura 7.1. Volume elementare rappresentativo.

2. le dimensioni caratteristiche del REV sono sufficientemente piccole (rispetto alla scala del problema applicativo in esame) da consentire di trattare tali valori medi alla stregua di valori locali, riferiti ad un singolo punto materiale del mezzo continuo.

In ogni punto del mezzo è possibile definire la frazione di volume della fase α come:

$$n_\alpha := \frac{dV_\alpha}{dV} \quad dV_\alpha := \int \chi_\alpha(\mathbf{r}) dv \quad (7.1)$$

dove:

$$\chi_\alpha(\mathbf{r}) := \begin{cases} 1 & \text{se: } \mathbf{r} \in \alpha \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (7.2)$$

Il volume parziale occupato dal costituente α all'interno del REV è espresso in termini di frazione di volume come:

$$V_\alpha = \int_V n_\alpha dv \quad (7.3)$$

Il volume totale della miscela è la somma dei volumi occupati dai singoli costituenti:

$$V = \sum_{\alpha=1}^k V_\alpha = \sum_{\alpha=1}^k \int_V n_\alpha dv = \int_V \left[\sum_{\alpha=1}^k n_\alpha \right] dv = \int_V dv \quad (7.4)$$

la frazione di volume è soggetta alla seguente condizione di saturazione:

$$\sum_{\alpha=1}^k n_\alpha = 1 \quad (7.5)$$

In particolare, per un terreno di porosità n in cui siano presenti una fase solida (s), una fase liquida (w) ed una fase gassosa (g), si ha:

$$n_s = 1 - n \quad n_w = S_r n \quad n_g = (1 - S_r)n \quad (7.6)$$

Per ogni assegnata grandezza fisica estensiva \hat{q}_α del costituente α è possibile definire:

- la *densità intrinseca* (o *reale*) q_α definita come:

$$q_\alpha := \frac{d\widehat{q}_\alpha}{dV_\alpha} = \frac{1}{dV_\alpha} \int_{dV_\alpha} \widetilde{q}_\alpha \chi_\alpha(\mathbf{r}) dv \quad (7.7)$$

dove \widetilde{q}_α è la densità di volume *vera* di \widehat{q}_α a livello microscopico e dV_α è il volume che la fase α occupa all'interno del REV;

- la *densità parziale* (od *apparente*) che è invece definita come:

$$q^\alpha := \frac{d\widehat{q}_\alpha}{dV} = \frac{1}{dV} \int_{dV} \widetilde{q}_\alpha \chi_\alpha(\mathbf{r}) dv \quad (7.8)$$

in cui dV è il volume *totale* del REV.

Si osservi che la densità intrinseca e la densità parziale sono messe tra loro in relazione dalla frazione di volume n_α :

$$q^\alpha(\mathbf{x}, t) = n_\alpha(\mathbf{x}, t) q_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (7.9)$$

quando \widehat{q}_α è la massa del costituente α si ha:

$$\rho_\alpha := \frac{1}{dV_\alpha} \int_{dV_\alpha} \widetilde{\rho}_\alpha \chi_\alpha(\mathbf{r}) dv \quad (7.10)$$

$$\rho^\alpha := \frac{1}{dV} \int_{dV} \widetilde{\rho}_\alpha \chi_\alpha(\mathbf{r}) dv \quad (7.11)$$

che rappresentano rispettivamente la densità di massa intrinseca e la densità di massa parziale.

Adottando una descrizione Lagrangiana o materiale del moto la posizione di ogni punto materiale \mathbf{x}^α al tempo t è una funzione della sua posizione nella configurazione di riferimento, \mathbf{X}^α e del tempo corrente t :

$$x_i^\alpha = \phi_i^\alpha(X_1^\alpha, X_2^\alpha, X_3^\alpha, t) \quad (\alpha = 1, \dots, k) \quad (7.12)$$

Affinchè tale legge di corrispondenza sia continua e biunivoca è necessario che lo Jacobiano sia non nullo e strettamente positivo, poichè quest'ultimo è uguale al determinante del tensore gradiente di trasformazione \mathbf{F}^α :

$$F_{ij}^\alpha = x_{i,j}^\alpha \quad (7.13)$$

Nella rappresentazione spaziale delle derivate materiali rispetto al tempo delle varie grandezze fisiche che caratterizzano il moto della fase α , si utilizzerà nel seguito la seguente notazione:

$$\frac{d^\alpha(\cdot)}{dt} := \frac{\partial^\alpha(\cdot)}{\partial t} + v_i^\alpha \frac{\partial^\alpha(\cdot)}{\partial x_i} \quad (7.14)$$

nella quale

$$v_i^\alpha = \frac{\partial \phi_i^\alpha}{\partial t}(\phi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (7.15)$$

è la velocità della fase α .

Nella applicazione dei principi della teoria delle miscele alla meccanica dei geomateriali, è possibile individuare tre differenti approcci:

1. Teorie macroscopiche delle miscele, *Macroscopic theories*; (Biot, 1941, 1956; Coussy, 1995; Coussy et al., 1998);
2. Teorie delle miscele con frazioni di volume *Mixture theories with volume fractions*; (Bowen, 1976, 1982, 1983; Prevost, 1980; de Boer et al., 1991; de Boer, 1996, 1997; Bluhm & de Boer, 1996, 1997; Svendsen & Hutter, 1995; Wilmanski, 1996, 1998);
3. Teorie delle miscele *ibride*, *Hybrid mixture theories*; (Hassanizadeh & Gray, 1979a,b; Zienkiewicz et al., 1988, 1990b,a; Schrefler et al., 1990; Lewis & Schrefler, 1998).

Ciascuno di tali approcci considera il mezzo poroso come una miscela multifase con componenti immiscibili, la cui struttura interna è definita, nel più semplice dei casi, dalle funzioni $n_\alpha(\boldsymbol{x}, t)$. Le principali differenze tra le diverse teorie sono riscontrabili essenzialmente nelle ipotesi adottate per descrivere l'evoluzione nel tempo delle frazioni di volume delle diverse fasi e nella formulazione delle equazioni costitutive delle singole fasi e della miscela.

Nel seguito verrà preso in considerazione unicamente l'approccio della teoria delle miscele ibride, come descritto in Zienkiewicz et al. (1988, 1990b,a), Schrefler et al. (1995) e Lewis & Schrefler (1998).

7.2 Ipotesi fondamentali: la teoria delle miscele

Le equazioni governanti per il moto della miscela possono essere derivate a partire dalle leggi di conservazione della fisica matematica (massa, quantità di moto, momento della quantità di moto, etc.) e dai seguenti *principi fondamentali* della teoria delle miscele stabiliti da Truesdell (1984):

- le proprietà della miscela sono deducibili matematicamente dalle proprietà dei suoi costituenti;
- nel descrivere il moto di un singolo costituente, è possibile considerare quest'ultimo come idealmente isolato dal resto della miscela, purchè si tengano opportunamente in conto le *azioni* che su di esso esercitano gli altri costituenti;
- il moto della miscela è governato dalle stesse equazioni che regolano il moto di un corpo continuo monofase.

Nel seguito si assumeranno inoltre le seguenti ipotesi restrittive:

1. i processi di deformazione accoppiati delle varie fasi avvengono in condizioni isoterme;
2. lo scambio di massa tra i singoli costituenti è nullo;
3. lo scambio di momento della quantità di moto tra i singoli costituenti è trascurabile;
4. la sola forza esterna di volume agente è la gravità;
5. gli effetti di non linearità geometrica sono trascurabili (ipotesi di *piccole deformazioni*).

Per il comportamento dei singoli costituenti si ritengono accettabili le seguenti ipotesi fondamentali.

Per la fase solida:

1. la fase solida è incompressibile ($\rho_s = \text{cost.}$);
2. la relazione tensioni–deformazioni è non lineare e non viscosa;

Per la fase fluida:

1. sia la fase liquida che quella gassosa sono barotropiche ed in contatto con la fase solida;
2. a livello macroscopico le tensioni di taglio sono trascurabili in entrambi le fasi, ovviamente a livello microscopico sono presenti ed il loro effetto è tenuto in conto tramite forze di trascinamento viscoso che agiscono sullo scheletro solido;
3. il grado di saturazione S^α della fase α è definito come il rapporto tra il volume occupato dalla fase α ed il volume dei vuoti ed è funzione nota della pressione di capillarità p_c :

$$S^\alpha = S^\alpha(p_c) \qquad p_c = p_c(S^\alpha) \qquad (7.16)$$

dove

$$p_c = p_g - p_w \qquad (7.17)$$

e i pedici g e w si riferiscono rispettivamente alla fase gassosa e a quella liquida.

Tali ipotesi possono essere considerate largamente accettabili per il problema in esame e permettono di esprimere le equazioni di conservazione utilizzando principi della teoria delle miscele.

In campo dinamico si introducono le seguenti ulteriori ipotesi:

1. i termini convettivi, che sono associati ai gradienti delle velocità di ogni fase sono assunte trascurabili;
2. il termine di scambio di momento tra solido e fluidi dipende soltanto dalle velocità relative;
3. l'accelerazione locale delle velocità dei fluidi è trascurabile;
4. il flusso di filtrazione non è influenzato dal gradiente delle densità dei fluidi.

7.3 Conservazione della massa dei singoli costituenti

Si consideri un arbitrario volume (regolare) \mathcal{B} della miscela delimitato dalla superficie chiusa \mathcal{S} e sia α il generico costituente. La massa di α contenuta in \mathcal{B} può essere espressa integrando la densità di massa parziale della fase ρ^α (eq. 7.11) su \mathcal{B} :

$$M_\alpha = \int_{\mathcal{B}} \rho^\alpha dV \qquad (7.18)$$

Sulla base della eq. 7.9 la stessa quantità può essere espressa come:

$$M_\alpha = \int_{\mathcal{B}} n_\alpha \rho_\alpha dV \qquad (7.19)$$

in cui ρ_α è la densità di massa intrinseca della fase e n_α è la porosità.

Il principio di conservazione della massa della generica fase α richiede che per \mathcal{B} si abbia:

$$\frac{d^\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho_\alpha n_\alpha dv = 0 \quad (7.20)$$

Applicando all' eq. 7.14 i teoremi di Reynolds e della divergenza si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^\alpha}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho_\alpha n_\alpha dv = \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \rho_\alpha n_\alpha}{\partial t} dv + \int_{\mathcal{S}} \rho_\alpha n_\alpha v_i^\alpha n_i da = \\ &= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{\partial \rho_\alpha n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (n_\alpha \rho_\alpha v_i^\alpha) \right\} dv \end{aligned} \quad (7.21)$$

Tenendo conto dell'arbitrarietà del volume \mathcal{B} l'equazione di conservazione (eq. 7.21) è equivalente alla seguente equazione di bilancio locale:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \rho_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i} (n_\alpha \rho_\alpha v_i^\alpha) = 0 \quad (7.22)$$

Per un terreno non saturo tenendo conto delle eq. 7.6, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{(1-n)\rho_s\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{(1-n)\rho_s v_i^s\} = 0 \quad (7.23)$$

per la fase solida;

$$\frac{\partial}{\partial t} \{S_w n \rho_w\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{S_w n \rho_w v_i^w\} = 0 \quad (7.24)$$

per la fase liquida, e

$$\frac{\partial}{\partial t} \{S_g n \rho_g\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \{S_g n \rho_g v_i^g\} = 0 \quad (7.25)$$

per la fase gassosa. Nella eq. 7.24 e nella eq. 7.25, $S_w = S_r$ ed $S_g = 1 - S_r$ rappresentano i gradi di saturazione del liquido e del gas, rispettivamente.

Le precedenti equazioni 7.23–7.25 possono essere espresse in una forma più conveniente combinando tra loro le equazioni di conservazione per la massa dei due fluidi con quella del solido. Si ottiene così Lewis & Schrefler (1998):

$$n \dot{S}_w + S_w \frac{n}{\rho_w} \dot{\rho}_w + S_w \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad (7.26)$$

per la combinazione solido+liquido, e

$$n \dot{S}_g + S_g \frac{n}{\rho_g} \dot{\rho}_g + S_g \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^g}{\partial x_i} = 0 \quad (7.27)$$

per la combinazione solido+gas. Nelle precedenti equazioni, il punto indica la derivata materiale rispetto al tempo; le quantità:

$$w_i^w := n_w (v_i^w - v_i^s) \quad w_i^g := n_g (v_i^g - v_i^s) \quad (7.28)$$

rappresentano le velocità (apparenti) di filtrazione delle fasi liquida e gassosa. Nella loro derivazione, sono stati trascurati i gradienti spaziali delle densità ρ_w e ρ_g .

7.4 Conservazione della massa della miscela

In accordo con il primo ed il terzo principio di Truesdell la conservazione della massa della miscela nel suo complesso deve essere formalmente uguale a quella di un corpo monofase, che è:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (7.29)$$

e deve essere ottenuto come conseguenza delle equazioni di conservazione della massa dei singoli costituenti.

Dalle eq. 7.23–7.25 si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\alpha=1}^3 \rho_{\alpha} n_{\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{\alpha=1}^3 \rho_{\alpha} n_{\alpha} v^{\alpha} \right) = 0 \quad (7.30)$$

Confrontando la eq. 7.29 con la eq. 7.30 si ottengono le seguenti equivalenze:

$$\rho := \sum_{\alpha=1}^3 \rho_{\alpha} n_{\alpha} = (1-n)\rho_s + S_w n \rho_w + S_g n \rho_g \quad (7.31)$$

$$\mathbf{v} := \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^3 \rho^{\alpha} \mathbf{v}^{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^3 c^{\alpha} \mathbf{v}^{\alpha} = c^s \mathbf{v}^s + c^w \mathbf{v}^w + c^g \mathbf{v}^g \quad (7.32)$$

in cui ρ è la *densità* della miscela, \mathbf{v} è la *velocità della miscela* e $c^{\alpha} := \rho^{\alpha}/\rho$ è la *concentrazione di massa* del costituente α nella miscela.

7.5 Conservazione della quantità di moto dei singoli costituenti

Il principio di conservazione della quantità di moto della generica fase α richiede che, per un arbitrario volume \mathcal{B} della miscela, delimitato dalla superficie regolare chiusa \mathcal{S} , si abbia:

$$\frac{d^{\alpha}}{dt} \int_{\mathcal{B}} n_{\alpha} \rho_{\alpha} v_i^{\alpha} dv = \int_{\mathcal{B}} (n_{\alpha} \rho_{\alpha} b_i + \widehat{p}_i^{\alpha}) dv + \int_{\mathcal{S}} \sigma_{ij}^{\alpha} n_j da \quad (7.33)$$

nella quale b_i è l'accelerazione di gravità, σ_{ij}^{α} il tensore della tensione parziale per la fase α , n_j il versore della normale alla superficie \mathcal{S} , e \widehat{p}_i^{α} la forza di interazione trasmessa alla fase α dagli altri costituenti della miscela.

La forma locale di tale equazione, ottenibile trasformando la eq. 7.33 mediante i teoremi di Reynolds e della divergenza, e tenendo conto dell'equazione di conservazione della massa eq. 7.21 e dell'arbitrarietà del volume \mathcal{B} , è data da:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{\alpha}}{\partial x_i} + n_{\alpha} \rho_{\alpha} (b_i - a_i) + \widehat{p}_i^{\alpha} = 0 \quad (7.34)$$

dove a_i è l'accelerazione della fase α . Per un terreno non saturo, la eq. 7.34 si specializza in:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial x_i} + n_s \rho_s (b_i - a_i) + \widehat{p}_i^s = 0 \quad (7.35)$$

per la fase solida;

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^w}{\partial x_i} + n_w \rho_w (b_i - a_i) + \widehat{p}_i^w = 0 \quad (7.36)$$

per la fase liquida, e

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^g}{\partial x_i} + n_g \rho_g (b_i - a_i) + \widehat{p}_i^g = 0 \quad (7.37)$$

per la fase gassosa.

Risulta essere opportuno osservare che, per le fasi liquida e gassosa, le tensioni parziali possono essere considerate isotrope, e pari a:

$$\sigma_{ij}^w = -n S_w p_w \quad \sigma_{ij}^g = -n S_g p_g \quad (7.38)$$

nelle quali p_w e p_g rappresentano le pressioni nelle fasi liquida e gassosa, rispettivamente, considerate positive in compressione.

7.6 Conservazione della quantità di moto della miscela

Le forze di interazione scambiate tra le fasi che compaiono nelle eq. 7.36–7.38, in quanto azioni interne alla miscela, sono autoequilibrate. Dunque:

$$\sum_{\alpha=0}^n \widehat{p}_i^\alpha = 0 \quad (7.39)$$

Inoltre, il tensore delle tensioni totali è legato alle tensioni parziali tra le varie fasi dalla relazione:

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha=0}^n (\sigma_{ij}^\alpha + n_\alpha + \rho_\alpha v_i^\alpha v_j^\alpha) \cong \sum_{\alpha=0}^n \sigma_{ij}^\alpha \quad (7.40)$$

nella quale le componenti diffusive di Reynolds possono essere considerate trascurabili.

Tenendo conto di tali risultati ed introducendo alcune altre semplificazioni minori (si veda, ad es., Lewis & Schrefler (1998)), dalla somma delle equazioni di conservazione delle singole fasi si ottiene la seguente equazione di equilibrio dinamico locale per la miscela solido-liquido-gas:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho (b_i - a_i^s) - n S_w \rho_w a_i^{ws} - n S_g \rho_g a_i^{gs} = 0 \quad (7.41)$$

dove:

$$\rho := (1 - n) \rho_s + S_w n \rho_w + S_g n \rho_g \quad (7.42)$$

è la densità media della miscela, mentre le quantità a_i^{ws} ed a_i^{gs} sono date da:

$$a_i^{ws} = \frac{d^s}{dt} \left\{ \frac{w_i^s}{n S_w} \right\} + \frac{1}{n S_w} w_{i,k}^w w_k^w \quad (7.43)$$

$$a_i^{gs} = \frac{d^s}{dt} \left\{ \frac{w_i^s}{n S_g} \right\} + \frac{1}{n S_g} w_{i,k}^g w_k^g \quad (7.44)$$

e rappresentano le accelerazioni relative delle fasi liquida e gassosa rispetto alla fase solida.

7.7 Equazioni costitutive

7.7.1 Equazioni costitutive per lo scheletro solido

Nelle teorie delle miscele per i mezzi porosi, le equazioni costitutive per lo scheletro solido sono generalmente definite come relazioni (in forma finita o incrementale) tra il tensore della deformazione, ϵ_{ij} , ed il tensore della tensione parziale dello scheletro solido, σ_{ij}^s .

In geomeccanica, invece, è prassi consolidata – e confermata dalle evidenze sperimentali disponibili – costruire le relazioni costitutive per lo scheletro solido, e stabilire le modalità di interazione tra questo e le fasi fluide, a partire dalla definizione di opportune grandezze tensoriali, dette *tensioni efficaci*. Per un terreno saturo ($S_w = 1$, $S_g = 0$), il *principio delle tensioni efficaci* di Terzaghi (1948) stabilisce che tutti gli effetti misurabili sullo scheletro solido associabili ad una variazione delle sollecitazioni applicate dipendono solo dalle variazioni della tensione efficace, definita come:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p_w \delta_{ij}^1 \quad (7.45)$$

Per tenere conto delle caratteristiche di non linearità, irreversibilità e dipendenza dalla storia dello stato tensionale tipicamente osservabili nei terreni, particolarmente in condizioni di carico ciclico/dinamico, la relazione tra deformazione e stato tensionale efficace è tipicamente definita in forma incrementale. Per un materiale a comportamento non viscoso, si ha:

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}(\sigma'_{ab}, q_c, \eta_{uv}) \dot{\epsilon}_{kl} \quad (7.46)$$

Il tensore del quarto ordine D_{ijkl} è detto tensore di rigidità tangente del materiale, e dipende, in generale, dallo stato tensionale corrente, da un certo numero di variabili di stato addizionali – dette *variabili interne* – raccolte nel vettore q_i , e dalla direzione della velocità di deformazione $\eta_{ij} := \dot{\epsilon}_{ij} / \|\dot{\epsilon}\|$.

Alla eq. 7.46 vanno aggiunte delle opportune leggi di evoluzione per le variabili interne, nella forma generale:

$$\dot{q}_i = H_i(\sigma'_{ab}, q_c, \dot{\epsilon}_{lm}, \eta_{pq}) \quad (7.47)$$

dove le funzioni H_i sono dette *funzioni di incrudimento*.

Per un terreno non saturo ($S_w < 1$, $S_g = 1 - S_w > 0$), il principio delle tensioni efficaci di Terzaghi non è più valido. L'evidenza sperimentale mostra che la risposta meccanica dello scheletro solido alle sollecitazioni imposte non può più essere associata alle variazioni di una singola grandezza tensionale: in un mezzo trifase (solido, liquido e gas), la determinazione delle deformazioni dello scheletro solido richiede la conoscenza di almeno due grandezze tensoriali indipendenti, definite a partire dalle sollecitazioni nelle tre fasi. Nella scelta di tali grandezze tensionali, Fredlund & Morgenstern (1977) suggeriscono di impiegare le seguenti quantità:

$$\bar{\sigma}_{ij} := \sigma_{ij} - p_g \delta_{ij} \quad s_{ij} := (p_g - p_w) \delta_{ij} \quad (7.48)$$

¹ Le componenti dei tensori delle tensioni (totale ed efficace) sono assunte positive se di compressione.

Il tensore $\bar{\sigma}_{ij}$ è definito “tensione netta” e rappresenta la tensione totale al netto della pressione del gas presente nei pori; il tensore isotropo $s_{ij} = s\delta_{ij}$ detto “tensore di suzione” o, semplicemente “suzione”, ed è pari, in modulo, alla differenza tra le pressioni nella fase gassosa e nella fase liquida. Tale approccio è alla base dei modelli costitutivi proposti, e.g., da Alonso et al. (1986) “Barcelona Basic Model”, Wheeler & Sivakumar (1995); Wheeler et al. (2003).

In alternativa, una scelta equivalente consiste nell'utilizzare come grandezze tensionali indipendenti il tensore di suzione eq. 7.48₍₂₎ (in cui si considera $s_{ij} = s - \delta_{ij}$) e la “tensione efficace di Bishop/Schrefler”:

$$\sigma''_{ij} := \sigma_{ij} - \{S_w p_w + S_g p_g\} \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \{p_g - S_w s\} \delta_{ij} \quad (7.49)$$

Tale approccio, già utilizzato in Zienkiewicz et al. (1988, 1990b,a), Schrefler et al. (1995) e Lewis & Schrefler (1998), è alla base dei modelli costitutivi proposti, ad es., da Jommi & di Prisco (1994); Bolzon et al. (1996); Jommi (2000), e verrà adottato nel seguito.

L'espressione 7.49 della tensione efficace di Bishop/Schrefler può essere modificata per tenere in conto della deformabilità dello scheletro solido (Biot & Willis, 1957; Aubry et al., 1986) nel seguente modo:

$$\sigma''_{ij} := \sigma_{ij} - \alpha \delta_{ij} \bar{p} \quad (7.50)$$

in cui $\bar{p} = S_w p_w + S_g p_g$ e α è il coefficiente dato dalla:

$$\alpha = 1 - \frac{\delta_{ji} D_{ijkl} \delta_{kl}}{9K_s} \quad (7.51)$$

in cui K_s è la rigidità volumetrica della fase solida. Nel caso di materiale elastico ed isotropo la eq. 7.51 diviene $\alpha = 1 - \frac{K_t}{K_s}$ con K_t rigidità volumetrica della miscela. Nella maggior parte dei terreni $K_s \gg K_t$ e di conseguenza $\alpha = 1$.

L'individuazione dei tensori che determinano la risposta meccanica della miscela consente di estendere il principio delle tensioni efficaci ai terreni non saturi nel modo seguente:

Tutti gli effetti misurabili in termini di deformazioni dello scheletro solido, variazioni delle frazioni di volume delle varie fasi, e variazioni della resistenza a taglio del materiale, dipendono unicamente dalle variazioni della tensione efficace e della suzione.

In accordo con tale enunciato, confermato sperimentalmente dalle prove di zero (“null tests”) presentate da Fredlund & Morgenstern (1977) e Tarantino et al. (1990), le equazioni costitutive per lo scheletro solido possono porsi nella seguente forma incrementale:

$$\dot{\sigma}''_{ij} = D_{ijkl} \{\sigma''_{pq}, s, q_r, \eta_{st}\} \dot{\epsilon}_{kl} + C_{ij} \{\sigma''_{pq}, s, q_r\} \dot{\eta}_w \quad (7.52)$$

$$\dot{s} = G_{kl} \{\sigma''_{pq}, s, q_r\} \dot{\epsilon}_{kl} + D^w \{\sigma''_{pq}, s, q_r\} \dot{\eta}_w \quad (7.53)$$

Si noti che, nelle eq. 7.52 e 7.53, la frazione di volume del liquido, $n_w = nS_w$ è interpretata come grandezza di deformazione coniugata alla suzione s , come suggerito da Houlby (1997). La eq. 7.53, nella quale si trascuri il primo termine di accoppiamento con la deformazione dello scheletro solido, descrive in forma incrementale la cosiddetta “curva caratteristica” del terreno, vale a dire, la relazione

che lega la suzione alle variazioni del contenuto d'acqua del terreno. Anche in questo caso, alle equazioni costitutive per $\dot{\sigma}_{ij}''$ ed \dot{s} vanno aggiunte opportune leggi di evoluzione per le variabili interne, simili nella forma alle eq. 7.47:

$$\dot{q}_i = H_i(\sigma_{ab}'', q_e, \dot{\epsilon}_{lm}, \eta_{pq}, \dot{n}_w) \quad (7.54)$$

Le equazioni costitutive 7.46–7.47 (per il mezzo saturo) e le 7.52–7.54 (per il mezzo non saturo) sono poste in una forma sufficientemente generale da includere come casi particolari gran parte dei modelli costitutivi recentemente proposti per la descrizione del comportamento ciclico/dinamico dei terreni, quali quelli descritti nel Cap. 4.

7.7.2 Equazioni costitutive per la fase liquida

Assumendo per la fase liquida un comportamento barotropico, la compressibilità del liquido può essere definita mediante la relazione:

$$\frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} = \frac{1}{K_w} \dot{p}_w \quad (7.55)$$

con K_w = rigidezza volumetrica della fase liquida.

La velocità apparente di filtrazione del liquido è legata al gradiente spaziale della pressione p_w , alle forze di volume nel liquido ed alle forze di inerzia attraverso la seguente “legge di D’Arcy generalizzata” (Lewis & Schrefler, 1998):

$$w_i^w = -\frac{k_{ij}^w}{\mu_w} \left\{ \frac{\partial p_w}{\partial x_j} - \rho_w (b_j - a_j^s - a_j^{ws}) \right\} \quad (7.56)$$

nella quale μ_w è la viscosità del liquido e k_{ij}^w è la permeabilità intrinseca dello scheletro solido rispetto al liquido. Quest’ultima, dipende in generale sia dalla porosità del mezzo che dal grado di saturazione S_w .

La eq. 7.56 può essere derivata direttamente dalla equazione di conservazione della quantità di moto del liquido, a partire dalla ipotesi di interazione viscosa tra liquido e solido (Lewis & Schrefler, 1998).

7.7.3 Equazioni costitutive per la fase gassosa

Assumendo che la fase gassosa sia assimilabile ad un gas perfetto, la compressibilità del gas può essere definita mediante la relazione:

$$\frac{\dot{\rho}_g}{\rho_g} = \frac{1}{p_g} \dot{p}_g \quad (7.57)$$

La velocità apparente di filtrazione del gas è legata al gradiente spaziale della pressione p_g , alle forze di volume nel gas ed alle forze di inerzia attraverso la seguente “legge di D’Arcy generalizzata” (Lewis & Schrefler, 1998):

$$w_i^g = -\frac{k_{ij}^g}{\mu_g} \left\{ \frac{\partial p_g}{\partial x_j} - \rho_w (b_j - a_j^s - a_j^{gs}) \right\} \quad (7.58)$$

nella quale μ_w è la viscosità del gas e k_{ij}^g è la permeabilità intrinseca dello scheletro solido rispetto alla fase gassosa. Quest'ultima, dipende in generale sia dalla porosità del mezzo che dal grado di saturazione S_g .

La eq. 7.58 può essere derivata direttamente dalla equazione di conservazione della quantità di moto del gas, a partire dalla ipotesi di interazione viscosa tra gas e solido (Lewis & Schrefler, 1998).

7.8 Formulazione generale: riepilogo delle equazioni governanti

In base a quanto discusso nei precedenti paragrafi, il sistema completo di equazioni differenziali alle derivate parziali che controlla l'evoluzione nello spazio e nel tempo dei processi di deformazione dello scheletro solido e di flusso dei fluidi interstiziali può dunque porsi nella forma seguente:

$$n\dot{S}_w + S_w \frac{n}{\rho_w} \dot{\rho}_w + S_w \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad (7.59)$$

$$n\dot{S}_g + S_g \frac{n}{\rho_g} \dot{\rho}_g + S_g \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^g}{\partial x_i} = 0 \quad (7.60)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho(b_i - a_i^s) - nS_w \rho_w a_i^{ws} - nS_g \rho_g a_i^{gs} = 0 \quad (7.61)$$

$$w_i^w = -\frac{k_{ij}^w}{\mu_w} \left\{ \frac{\partial p_w}{\partial x_j} - \rho_w (b_j - a_j^s - a_j^{ws}) \right\} \quad (7.62)$$

$$w_i^g = -\frac{g_{ij}^w}{\mu_g} \left\{ \frac{\partial p_g}{\partial x_j} - \rho_w (b_j - a_j^s - a_j^{gs}) \right\} \quad (7.63)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}'' = D_{ijkl} + \{ \sigma_{pq}'', s, q_r, \eta_{st} \} \dot{\epsilon}_{kl} + C_{ij} + \{ \sigma_{pq}'', s, q_r \} \dot{\eta}_w \quad (7.64)$$

$$\dot{s} = G_{kl} + \{ \sigma_{pq}'', s, q_r \} \dot{\epsilon}_{kl} + D^w + \{ \sigma_{pq}'', s, q_r \} \dot{\eta}_w \quad (7.65)$$

$$\dot{q}_i = H_i(\sigma_{ab}'', q_e, \dot{\epsilon}_{lm}, \eta_{pq}, \dot{\eta}_w) \quad (7.66)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right\} \quad (7.67)$$

per il caso di terreno non saturo, e

$$\frac{n}{K_w} \dot{p}_w + \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad (7.68)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho(b_i - a_i^s) - n\rho_w a_i^{ws} = 0 \quad (7.69)$$

$$w_i^w = -\frac{k_{ij}^w}{\mu_w} \left\{ \frac{\partial p_w}{\partial x_j} - \rho_w (b_j - a_j^s - a_j^{ws}) \right\} \quad (7.70)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}' = D_{ijkl}(\sigma_{ab}', q_r, \eta_{st}) \dot{\epsilon}_{kl} \quad (7.71)$$

$$\dot{q}_i = H_i(\sigma_{ab}', q_c, \dot{\epsilon}_{lm}, \eta_{pq}) \quad (7.72)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right\} \quad (7.73)$$

per il caso di terreno saturo.

Nelle precedenti equazioni, si è tenuto conto delle leggi di compressibilità dei due fluidi eq. 7.55 e eq. 7.57; le eq. 7.67 e eq. 7.73 definiscono invece il legame tra la velocità di deformazione $\dot{\epsilon}_{ij}$ ed il gradiente della velocità dello scheletro solido, nella ipotesi di piccole deformazioni.

Le eq. 7.59–7.67 e le eq. 7.68–7.73 costituiscono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE) costituito rispettivamente da $(24+k)$ e da $(19+k)$ funzioni incognite [$k = \dim(\mathbf{q})$].

7.9 Formulazioni approssimate

Il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che controlla l'evoluzione nello spazio e nel tempo dei processi di deformazione dello scheletro solido e di flusso dei fluidi interstiziali, in linea di principio, può essere risolto per via numerica, utilizzando il metodo degli elementi finiti, assegnate le opportune condizioni ai limiti (iniziali ed al contorno) per il problema in esame. Tale approccio è discusso, ad es., in Zienkiewicz & Shiomi (1985).

In molti casi, tuttavia, è possibile semplificare considerevolmente le equazioni governanti tenendo conto che, in relazione al campo di frequenze caratteristiche delle sollecitazioni applicate, alcuni termini che compaiono nelle equazioni governanti risultano trascurabili. Tale possibilità è stata esplorata da Zienkiewicz et al. (1980) per il caso speciale di terreno elastico lineare. I principali risultati raggiunti da Zienkiewicz et al. sono sintetizzati nel seguito, con riferimento al solo caso di mezzo saturo.

7.9.1 Processi estremamente lenti (ESP)

In questo caso, la velocità di variazione delle sollecitazioni applicate è talmente bassa (al limite, nulla) che, nelle equazioni di bilancio, tutti i termini contenenti derivate delle varie grandezze rispetto al tempo sono trascurabili, con la sola eccezione della velocità di filtrazione.

In tali condizioni, cui si attribuisce il nome di “condizioni drenate” (Drained processes, DP), si ha:

$$\frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad (7.74)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_i = 0 \quad (7.75)$$

$$w_i^w = -\frac{k_{ij}^w}{\mu_w} \left\{ \frac{\partial p_w}{\partial x_j} - \rho_w b_j \right\} \quad (7.76)$$

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}(\sigma'_{ab}, q_r, \eta_{st})\dot{\epsilon}_{kl} \quad (7.77)$$

$$\dot{q}_i = H_i(\sigma'_{ab}, q_c, \dot{\epsilon}_{lm}, \eta_{pq}) \quad (7.78)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right\} \quad (7.79)$$

In questo caso, l'equazione di conservazione della massa del liquido è completamente disaccoppiata dall'equazione di equilibrio dello scheletro solido, e può essere risolta indipendentemente.

7.9.2 Processi lenti (SSP)

Quando i fenomeni transitori sono sufficientemente lenti da poter considerare trascurabili tutti i termini inerziali (“slow speed processes”, SSP), le equazioni governanti si riducono a:

$$\frac{n}{K_w} \dot{p}_w + \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad (7.80)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_i = 0 \quad (7.81)$$

$$w_i^w = -\frac{k_{ij}^{sw}}{\mu_w} \left\{ \frac{\partial p_w}{\partial x_j} - \rho_w b_j \right\} \quad (7.82)$$

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}(\sigma'_{ab}, q_r, \eta_{st}) \dot{\epsilon}_{kl} \quad (7.83)$$

$$\dot{q}_i = H_i(\sigma'_{ab}, q_c, \dot{\epsilon}_{lm}, \eta_{pq}) \quad (7.84)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right\} \quad (7.85)$$

Le eq. 7.80–7.85 corrispondono alle ben note equazioni governanti della teoria della consolidazione accoppiata, le cui incognite fondamentali sono il campo di spostamenti u_i^s dello scheletro solido e la pressione del liquido p_w .

7.9.3 Processi di media velocità (MSP)

Nel caso in cui la frequenza dei carichi applicati sia sufficientemente elevata da rendere non trascurabili le forze di inerzia, ma ancora non abbastanza rapidi da consentire di distinguere le accelerazioni della fase solida da quelle della fase liquida (“medium speed processes”, MSP), nelle equazioni governanti è possibile trascurare l'accelerazione relativa a_i^{ws} . Inoltre, alla luce delle incertezze esistenti nella determinazione sperimentale delle caratteristiche di permeabilità del mezzo, è possibile trascurare tutte le forze di inerzia che compaiono nella legge di d'Arcy. Si ha quindi:

$$\frac{n}{K_w} \dot{p}_w + \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i^w}{\partial x_i} = 0 \quad (7.86)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho(b_i - a_i^s) = 0 \quad (7.87)$$

$$w_i^w = -\frac{k_{ij}^{sw}}{\mu_w} \left\{ \frac{\partial p_w}{\partial x_j} - \rho_w b_j \right\} \quad (7.88)$$

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}(\sigma'_{ab}, q_r, \eta_{st}) \dot{\epsilon}_{kl} \quad (7.89)$$

$$\dot{q}_i = H_i(\sigma'_{ab}, q_c, \dot{\epsilon}_{lm}, \eta_{pq}) \quad (7.90)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right\} \quad (7.91)$$

Anche in questo caso, le incognite fondamentali del problema dinamico accoppiato sono il campo di spostamenti dello scheletro solido u_i^s e la pressione del liquido p_w .

Il problema di consolidazione dinamica governato dalle eq. 7.86–7.91 risulta identico alla cosiddetta “formulazione $\mathbf{u} - p_w$ ” di Zienkiewicz & Shiomi (1985) e Zienkiewicz et al. (1999b).

7.9.4 Processi rapidi (HSP)

Quando, in presenza di sollecitazioni esterne ad elevata frequenza, non sia possibile trascurare alcuno dei termini inerziali (“high speed processes”, HSP), il problema risulta governato dal sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali 7.68–7.73, che non sono ulteriormente semplificabili. Le incognite fondamentali del problema dinamico accoppiato sono, in questo caso, il campo di spostamenti u_i^s dello scheletro solido, ed il campo di spostamenti U_i^w del liquido, definito a partire dalla velocità:

$$\dot{U}_i^w = v_i^s + \frac{w_i^w}{n} \quad (7.92)$$

si veda ad es., Zienkiewicz & Shiomi (1985).

7.9.5 Processi estremamente rapidi: condizioni non drenate (UP)

Un caso limite di processi molto rapidi si ha quando è possibile ipotizzare che il moto relativo tra fase solida e fase liquida sia trascurabile ($w_i^w = a_i^{ws} = 0$). Si parla in questo caso di condizioni non drenate (“undrained process”, UP). Sebbene, comunemente, l’analisi delle condizioni di equilibrio di un corpo di terreno in condizioni non drenate siano affrontate con leggi costitutive formulate ad hoc, in termini di tensioni totali, è comunque possibile affrontare il problema mediante un approccio più razionale, utilizzando equazioni costitutive formulate in termini di tensioni efficaci, purchè si assuma che la deformazione di volume dello scheletro solido sia dovuta alla compressibilità dell’acqua interstiziale, e quest’ultima venga descritta mediante una opportuna legge di compressibilità.

In tal caso dalla equazione di continuità 7.68 e dall’equazione di congruenza 7.73 si ottiene:

$$\dot{p}_w = - \left(\frac{K_w}{n} \right) \frac{\partial v_i^s}{\partial x_i} = \left(\frac{K_w}{n} \right) \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij} \quad (7.93)$$

Introducendo tale espressione nella equazione costitutiva 7.71, e tenendo conto della definizione di tensione efficace, si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= D_{ijkl}(\sigma'_{pq}, q_r, \eta_{st}) \dot{\epsilon}_{kl} + \delta_{ij} \left(\frac{K_w}{n} \right) \delta_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} = \\ &= \{ D_{ijkl}(\sigma'_{pq}, q_r, \eta_{st}) \dot{\epsilon}_{kl} + \delta_{ij} \left(\frac{K_w}{n} \right) \delta_{kl} \} \dot{\epsilon}_{kl} \end{aligned} \quad (7.94)$$

Dunque, in condizioni non drenate è possibile riformulare il legame costitutivo dello scheletro solido direttamente in termini di tensioni totali, nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= \bar{D}_{ijkl}(\sigma'_{pq}, q_r, \eta_{st}, n, K_w) \dot{\epsilon}_{kl} \\ \bar{D}_{ijkl}(\sigma'_{pq}, q_r, \eta_{st}, n, K_w) &= D_{ijkl}(\sigma'_{pq}, q_r, \eta_{st}) + \left(\frac{K_w}{n} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \end{aligned} \quad (7.95)$$

Il sistema di equazioni governanti si riduce dunque a:

$$\dot{p}_w = \frac{K_w}{n} \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij} \quad (7.96)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho(b_i - a_i^s) = 0 \quad (7.97)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \bar{D}_{ijkl}(\sigma'_{pq}, q_r, \eta_{st}, n, K_w) \dot{\epsilon}_{kl} \quad (7.98)$$

$$\dot{q}_i = H_i(\sigma'_{ab}, q_c, \dot{\epsilon}_{lm}, \eta_{pq}) \quad (7.99)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^s}{\partial x_i} \right\} \quad (7.100)$$

Il problema può essere affrontato considerando il vettore spostamento come incognita primaria. Il campo di spostamenti si ottiene integrando l'equazione di equilibrio 7.97, nella quale il tensore delle tensioni totali è espresso direttamente in funzione della deformazione mediante l'equazione costitutiva 7.98. La pressione interstiziale e il tensore delle tensioni efficaci sono determinati in funzione della deformazione di volume dello scheletro solido (dovuta alla sola compressibilità volumetrica del liquido) integrando nel tempo la legge di evoluzione 7.96.

Risulta interessante notare come in questo caso le equazioni governanti siano molto simili a quelle che descrivono le condizioni di equilibrio dinamico di un mezzo monofase; le sole differenze riguardano la valutazione, a livello locale, degli effetti della deformazione sul campo di pressioni interstiziali.

7.9.6 Campo di applicabilità delle diverse approssimazioni

Per le finalità specifiche che tale lavoro di tesi si propone, tra gli approcci precedentemente discussi nei Par. 7.9.2–7.9.5, quelli che rivestono maggiore interesse sono senza dubbio quelli relativi ai casi in cui gli effetti di natura inerziale non sono trascurabili (MSP, HSP, UP).

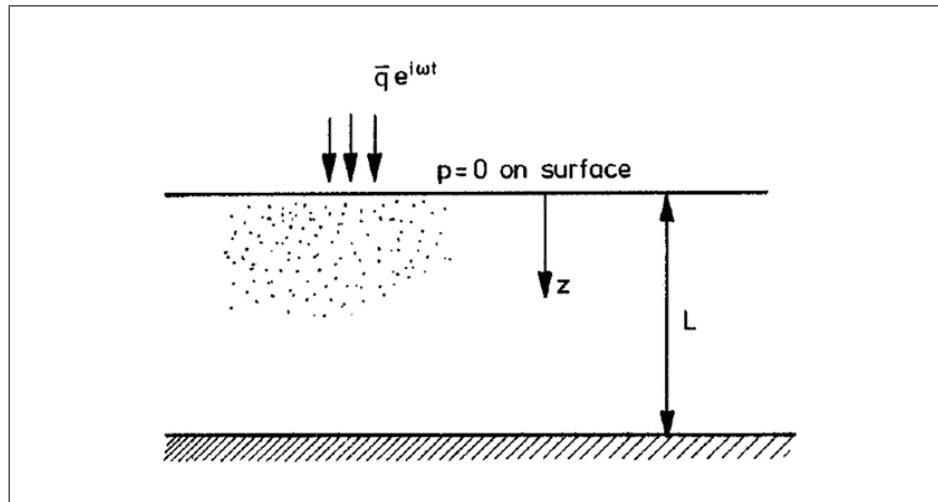


Figura 7.2. Problema preso in esame da Zienkiewicz et al. (1980).

Uno studio parametrico finalizzato ad individuare i limiti di applicabilità dei diversi approcci dinamici è stato presentato da Zienkiewicz et al. (1980). I principali risultati di tale studio sono sintetizzati nel seguito.

Il problema analizzato da Zienkiewicz et al. (1980) si riferisce ad uno strato di terreno omogeneo, elastico lineare, soggetto ad un carico uniforme infinitamente esteso, e variabile nel tempo con legge sinusoidale, ampiezza \bar{q} e frequenza angolare ω , come illustrato in Fig. 7.2. La figura riporta inoltre le condizioni al contorno imposte.

Per la relativa semplicità della geometria e delle condizioni di carico, per il problema in esame i sistemi di equazioni governanti dei problemi SSP, MSP, HSP e UP possono essere risolti in forma chiusa. In particolare, Zienkiewicz et al. (1980) hanno mostrato che la risposta del sistema alla sollecitazione applicata dipende dai valori assunti dalle 5 grandezze adimensionali seguenti:

$$\Pi_1 = \frac{2}{\pi} \frac{\rho}{\rho_w} \frac{\kappa}{g} \frac{T}{T_0^2} \quad \Pi_2 = \pi^2 \frac{T_0^2}{T} \quad \Pi_3 = \frac{\rho}{\rho_w} \quad \Pi_4 = n_w \quad \Pi_5 = \frac{K_w}{n_w E_{ed} + K_w} \quad (7.101)$$

dove:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (7.102)$$

è il periodo della sollecitazione applicata;

$$T_0 = \frac{2L}{V_p} \quad V_p = \sqrt{\frac{E_{ed} + K_w/n}{\rho}} \quad (7.103)$$

sono, rispettivamente, il periodo proprio dello strato elastico e la velocità di propagazione delle onde di compressione, ed infine E_{ed} e κ rappresentano il modulo edometrico del terreno e la sua permeabilità, legati al modulo di Young ed alla permeabilità intrinseca dalle relazioni:

$$E_{ed} = \frac{1 - \nu'}{(1 + \nu')(1 - 2\nu')} E' \quad \kappa = \frac{k\rho_w g}{\mu_w} \quad (7.104)$$

Tenendo presente le equazioni eq. 7.103, la variabile adimensionale Π_1 può essere anche espressa nel modo seguente:

$$\Pi_1 = \frac{2}{\pi} \frac{\rho}{\rho_w} \frac{\kappa}{g} \frac{T}{T_0^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{k(E_{ed} + K_w/n)}{\rho_w g} \frac{T}{L^2} \quad (7.105)$$

Tale equazione mostra che Π_1 ha la forma tipica di un fattore tempo: quando Π_1 è molto basso, inferiori a 1.0e-2, l'ipotesi di deformazione in condizioni non drenate (UP) è applicabile. Al contrario, per valori di Π_1 molto elevati, superiori a 1.0e2, il drenaggio all'interno dei pori avviene così facilmente che è possibile assumere l'esistenza di condizioni completamente drenate (DP).

Il parametro Π_2 , invece, quantifica il rapporto tra il periodo dell'eccitazione ed il periodo proprio dello strato; quando questo si avvicina all'unità, lo strato entra in risonanza.

Nelle Fig. 7.3 – 7.6 sono illustrate alcune delle soluzioni ottenute da Zienkiewicz et al. (1980), al variare delle grandezze adimensionali Π_1 e Π_2 , per $\Pi_3 = 0.333$, $\Pi_4 = 0.333$ e $\Pi_5 = 0.973$.

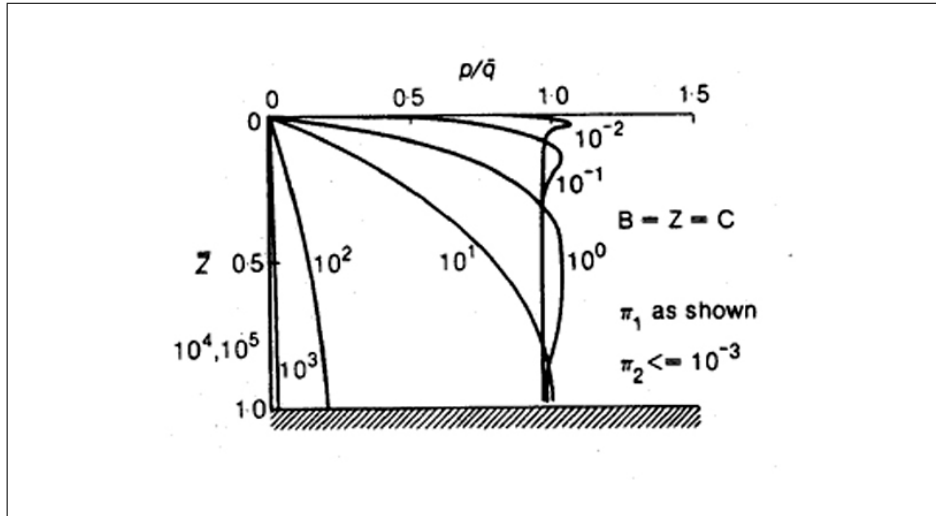


Figura 7.3. Compressione ciclica di uno strato elastico saturo: pressioni interstiziali normalizzate p_w/\bar{q} in funzione della profondità normalizzata z/L . Caso 2, $\Pi_2 \leq 10^{-3}$; C = SSP; Z = MSP; B = HSP (Zienkiewicz et al., 1980).

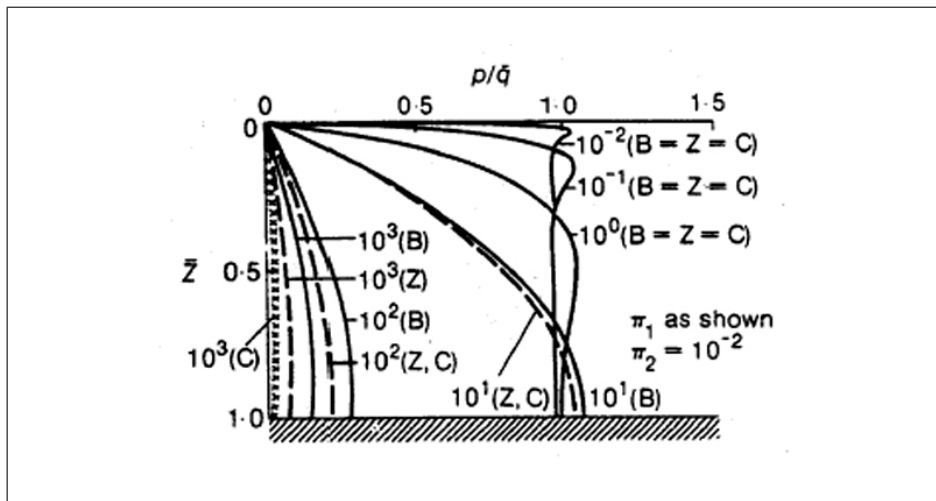


Figura 7.4. Compressione ciclica di uno strato elastico saturo: pressioni interstiziali normalizzate p_w/\bar{q} in funzione della profondità normalizzata z/L . Caso 3, $\Pi_2 = 10^{-2}$; C = SSP; Z = MSP; B = HSP (Zienkiewicz et al., 1980).

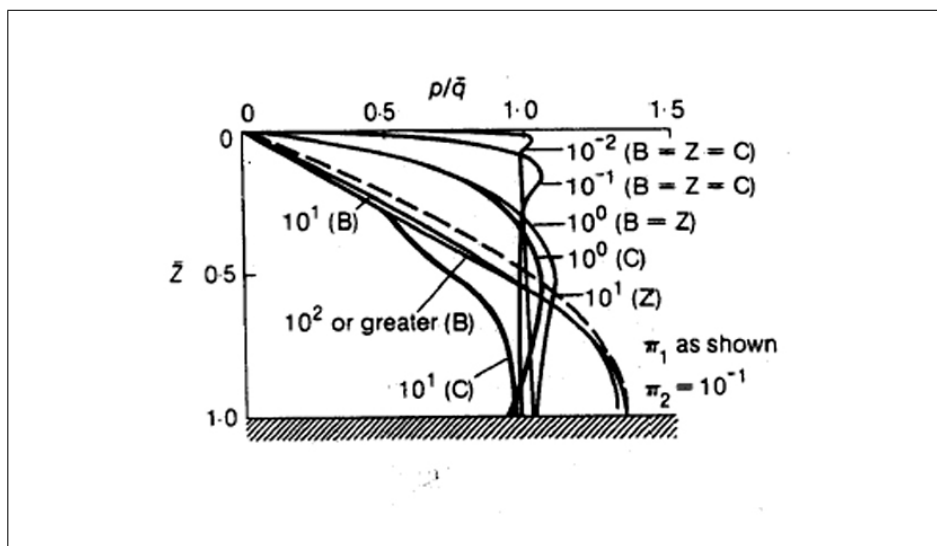


Figura 7.5. Compressione ciclica di uno strato elastico saturo: pressioni interstiziali normalizzate p_w/\bar{q} in funzione della profondità normalizzata z/L . Caso 3, $\Pi_2 = 10^{-1}$; C = SSP; Z = MSP; B = HSP (Zienkiewicz et al., 1980).

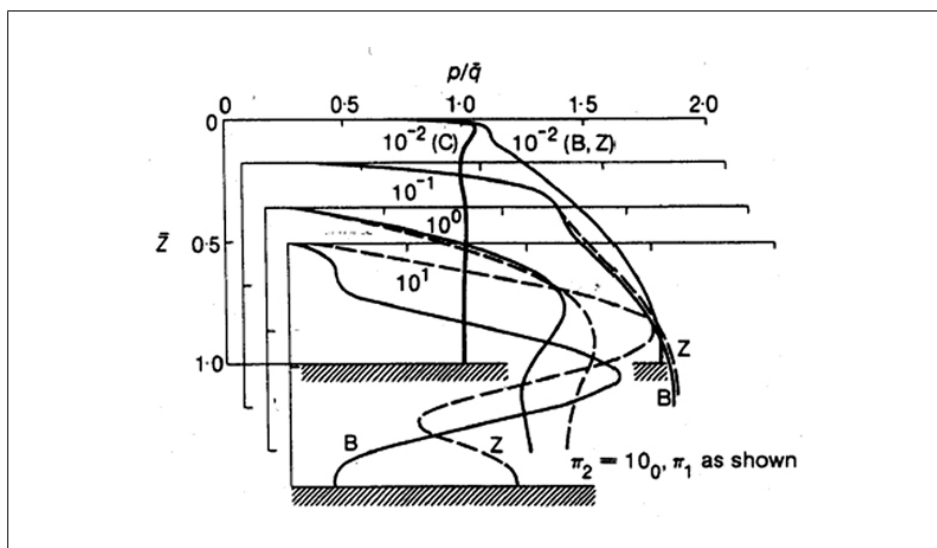


Figura 7.6. Compressione ciclica di uno strato elastico saturo: pressioni interstiziali normalizzate p_w/\bar{q} in funzione della profondità normalizzata z/L . Caso 4, $\Pi_2 = 1.0$; C = SSP; Z = MSP; B = HSP (Zienkiewicz et al., 1980).

Dall'esame delle figure si nota come, per valori del periodo T molto piccoli rispetto al periodo proprio dello strato ($\Pi_2 \leq 1.0e - 3$), le varie soluzioni risultano praticamente coincidenti per tutto il campo di valori della permeabilità preso in considerazione. All'aumentare di Π_2 , le due soluzioni dinamiche sono ancora pressochè coincidenti per carichi variabili ad alta frequenza, mentre possono differire per carichi variabili a bassa frequenza (valori di Π_1 elevati).

Una sintesi delle conclusioni ottenute da Zienkiewicz et al. (1980) nello studio parametrico è fornita dalla Fig. 7.7. Nella figura, la zona (I) rappresenta il campo dei cosiddetti "fenomeni lenti", per il quale le soluzioni fornite dagli approcci SSP, MSP ed HSP risultano coincidenti (effetti dinamici trascurabili). La zona (II) rappresenta invece il campo dei fenomeni di media velocità, per i quali gli effetti dinamici non sono trascurabili, ma le soluzioni ottenute con l'approccio MSP sono paragonabili a quelle fornite dall'approccio rigoroso (HSP). Quest'ultimo si rende invece necessario nel caso dei processi dinamici ad alta frequenza, individuati dalla zona (III) del piano di Fig. 7.7.

Considerando la natura dei processi dinamici che rivestono interesse ai fini della presente attività di ricerca, le considerazioni precedenti – per quanto limitate ad una situazione estremamente idealizzata e ad un problema lineare – suggeriscono le seguenti considerazioni (Zienkiewicz et al., 1999a):

1. per terreni con coefficiente di permeabilità relativamente modesta, dell'ordine di $1.0e-4 \div 1.0e-5$ m/s o inferiori, l'approccio UP (completamente non drenato) può risultare giustificabile.
2. quando la permeabilità dei depositi interessati dall'opera sia inferiore a circa $1.0e-2$ m/s per i valori delle frequenze dominanti nei problemi di ingegneria sismica, l'approssimazione MSP è certamente utilizzabile.

Pertanto, ai fini della modellazione numerica del comportamento dinamico delle dighe in terra l'attenzione è stata rivolta prevalentemente alle formulazioni FEM degli approcci MSP ed UP, le cui implementazioni numeriche agli elementi finiti sono dettagliatamente discusse nel seguente Cap. 8.

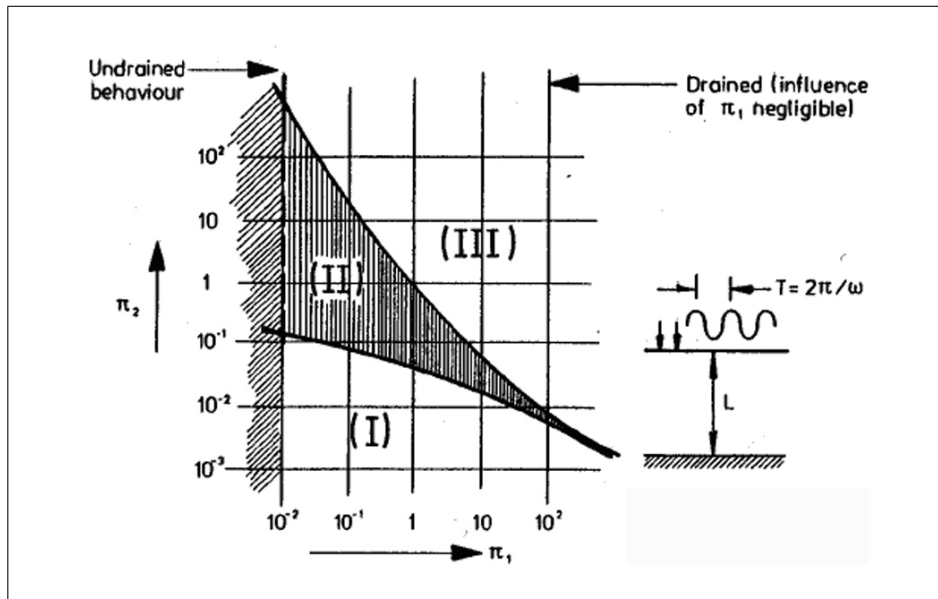


Figura 7.7. Campo di applicabilità delle diverse teorie approssimate nel piano delle variabili adimensionali (Zienkiewicz et al., 1980).

Implementazione numerica agli elementi finiti delle equazioni dinamiche

8.1 Introduzione

Una caratteristica comune dei modelli costitutivi descritti nel Cap. 4 sviluppati nell'ambito della plasticità ad incrudimento cinematico, della plasticità BS e della ipoplasticità risiede nella loro formulazione incrementale. Piuttosto che fornire lo stato tensionale associato ad uno specifico stato di deformazione, tali modelli definiscono le leggi di evoluzione delle variabili di stato a partire da uno stato iniziale noto. Pertanto, la valutazione quantitativa degli effetti prodotti da un assegnato "carico" esterno - sia esso un incremento di tensione o di deformazione o una loro combinazione - richiede la soluzione di un problema di valori iniziali (IBVP), i.e., l'integrazione nel tempo delle equazioni costitutive lungo un assegnato percorso di carico a partire da assegnate condizioni iniziali. Poiché la soluzione di tale problema non è generalmente ottenibile in forma chiusa, salvo che in casi molto particolari, l'implementazione di ogni equazione costitutiva in forma incrementale nell'ambito del metodo degli elementi finiti richiede la messa a punto di un opportuno algoritmo di integrazione che svolga questo compito a livello locale, per ciascun punto di Gauss. La corretta scelta dell'algoritmo di integrazione rappresenta dunque un elemento essenziale in qualsiasi problema di geomeccanica computazionale in campo non lineare. Più in particolare, nell'applicazione del metodo degli elementi finiti alla soluzione di un assegnato IBVP, la strategia generale di risoluzione si articola nel modo seguente:

1. a partire dal sistema originale di equazioni differenziali governanti, si ricava il sistema equivalente di equazioni algebriche non lineari mediante opportune procedure di discretizzazione spaziale e temporale (tipicamente FEM e algoritmo di Newmark);
2. per la generica iterazione globale, le equazioni di equilibrio in forma discreta generano un campo di spostamenti incrementali che è utilizzato per determinare gli incrementi di deformazione in ciascun elemento, sulla base delle relazioni cinematiche esistenti tra spostamenti e deformazioni;
3. per un assegnato incremento di deformazione, i valori aggiornati delle variabili di stato vengono calcolati integrando numericamente le equazioni costitutive a livello locale, a partire da condizioni iniziali note;

4. le equazioni di equilibrio discrete vengono verificate al termine dell'iterazione. Se la condizione di convergenza non è verificata, si esegue una nuova iterazione a partire dal passo (2).

L'integrazione delle equazioni costitutive a livello locale - passo (3) - costituisce il problema centrale della meccanica computazionale in campo non lineare. Gli altri aspetti della procedura generale, pure importanti, sono legati esclusivamente al tipo di strategia computazionale impiegata e riguardano il comportamento del materiale solo in misura molto limitata. Inoltre il livello di precisione raggiunto nella integrazione delle equazioni costitutive ha un impatto diretto e significativo sull'accuratezza globale dell'analisi.

La discretizzazione spaziale e temporale del sistema di equazioni governanti la formulazione MSP e quella UP costituiscono l'oggetto del presente capitolo. Nel capitolo successivo ci si occupa dell'implementazione delle equazioni costitutive nel metodo degli elementi finiti.

8.2 Discretizzazione nello spazio

La discretizzazione nello spazio detta *metodo di Galerkin* consiste nel sostituire alla effettiva soluzione del problema una soluzione approssimata, ottenuta a partire da funzioni semplici (es., polinomi di primo o secondo ordine) definite su porzioni limitate del dominio.

8.2.1 Formulazione per processi (MSP)

La derivazione della formulazione agli elementi finiti del problema governato dalle eq. 7.86–7.91 (formulazione MSP) è descritta in dettaglio in Lewis & Schrefler (1998) e Zienkiewicz et al. (1999b). Di seguito si richiamano brevemente gli aspetti fondamentali.

Nell'approccio MSP, le funzioni incognite del problema sono:

1. il campo di spostamenti dello scheletro solido: $u_i^s(x_i, t)$, e
2. il campo di pressioni interstiziali nella fase liquida: $p_w(x_i, t)$.

Il primo passo per la derivazione di una soluzione numerica approssimata per il problema MSP consiste nel derivare, attraverso il metodo dei residui pesati, una formulazione variazionale equivalente alle eq. 7.86–7.91.

Per il caso in questione, questa può essere enunciata come segue. Siano:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_u &:= \{u_i^s(x_k, t) : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid u_i^s \in \mathbf{H}^1, u_i^s = \bar{u}_i^s \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}_u\} \\ \mathcal{C}_p &:= \{p_w(x_k, t) : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid p_w \in \mathbf{H}^1, p_w = \bar{p}_w \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}_p\} \end{aligned} \quad (8.1)$$

gli spazi delle soluzioni per le funzioni incognite, costruite in modo tale da rispettare le condizioni al contorno di Dirichlet sulle porzioni della frontiera dove sono assegnate le componenti di spostamento (\bar{u}_i^s) o la pressione interstiziale (\bar{p}_w).

Siano inoltre:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_u &:= \{\delta u_i^s(x_k, t) : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid \delta u_i^s \in \mathbf{H}^1, \delta u_i^s = 0 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}_u\} \\ \mathcal{V}_p &:= \{\delta p_w(x_k, t) : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid \delta p_w \in \mathbf{H}^1, \delta p_w = 0 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}_p\} \end{aligned} \quad (8.2)$$

gli spazi delle variazioni δu_i^s e δp_w del campo di spostamenti e delle pressioni interstiziali, rispettivamente, definite in modo tale da essere nulle in corrispondenza dei contorni \mathcal{S}_u ed \mathcal{S}_p . La forma variazionale del problema dinamico accoppiato è formulata nel modo seguente: si determinino le funzioni $u_i^s \in \mathcal{C}_u$ e $p_w \in \mathcal{C}_p$ in modo che, per ogni $\delta u_i^s \in \mathcal{V}_u$ e $\delta p_w \in \mathcal{V}_p$, risulti:

$$-\int_{\mathcal{B}} \rho \delta u_i^s a_i dv + \int_{\mathcal{B}} \rho \delta u_i^s b_i dv + \int_{\mathcal{S}_l} \delta u_i^s \bar{t}_i dv - \int_{\mathcal{B}} \delta \epsilon_{ij} \sigma'_{ij} dv + \int_{\mathcal{B}} \delta \epsilon_{kk} p_w dv = 0 \quad (8.3)$$

$$\int_{\mathcal{B}} \delta p_w \{C_w \dot{p}_w + \dot{\epsilon}_{kk}\} dv + \int_{\mathcal{B}} (\delta p_w)_{,i} \frac{k_{ij}}{\mu_w} \{(p_w)_{,i} - \rho_w b_j\} dv + \int_{\mathcal{S}_q} \delta p_w \bar{q}_w da = 0 \quad (8.4)$$

Nelle precedenti equazioni,

$$\epsilon_{ij} = u_{(i,j)}^s \quad \delta \epsilon_{ij} = \delta u_{(i,j)}^s \quad (8.5)$$

rappresentano i tensori della deformazione dello scheletro solido, e la parte simmetrica del gradiente della variazione $\delta u_{(i,j)}^s$, rispettivamente, mentre il coefficiente $C_w = n/K_w$ è la compressibilità specifica della fase liquida.

La formulazione discreta del problema di consolidazione dinamica accoppiata si ottiene dalle eq. 8.3–8.4 introducendo una opportuna suddivisione del dominio \mathcal{B} in elementi finiti, e definendo opportune approssimazioni per le funzioni incognite, a partire da funzioni interpolanti a supporto locale. In particolare, si pone:

$$u_i^s(x_k, t) = \sum_{A=1}^{n_{nu}} N_A^u(x_k) d_{Ai}(t) \quad \mathbf{u}_i^s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^u \mathbf{d}(t) \quad (8.6)$$

per gli spostamenti dello scheletro solido, e:

$$p_w(x_k, t) = \sum_{A=1}^{n_{nu}} N_A^p(x_k) a_A(t) \quad p_w(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^p \mathbf{a}(t) \quad (8.7)$$

per la pressione interstiziale. Nelle eq. 8.6 e nella eq. 8.7, i vettori \mathbf{d} ed \mathbf{a} rappresentano i vettori degli spostamenti e delle pressioni interstiziali nodali, mentre \mathbf{N}^u ed \mathbf{N}^p sono le matrici delle funzioni di forma per gli spostamenti e le pressioni interstiziali (generalmente diverse tra loro).

Seguendo l'approccio classico di Galerkin, per le funzioni variazione δu_i^s e δp_w si adottano tipicamente le stesse approssimazioni utilizzate per il campo di spostamenti e delle pressioni interstiziali:

$$\delta u_i^s(x_k, t) = \sum_{A=1}^{n_{nu}} N_A^u(x_k) \delta d_{Ai}(t) \quad \delta \mathbf{u}_i^s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^u \delta \mathbf{d}(t) \quad (8.8)$$

$$\delta p_w(x_k, t) = \sum_{A=1}^{n_{nu}} N_A^p(x_k) \delta a_A(t) \quad \delta p_w(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^p \delta \mathbf{a}(t) \quad (8.9)$$

dove $\delta \mathbf{d}$ e $\delta \mathbf{a}$ sono i vettori delle variazioni nodali per gli spostamenti e le pressioni interstiziali, rispettivamente.

Sostituendo le espressioni 8.6–8.9 nelle eq. 8.3 e 8.4, si ottiene infine la seguente forma discreta del problema di consolidazione accoppiato: si determinino i vettori degli spostamenti nodali, \mathbf{d} , e delle pressioni interstiziali nodali, \mathbf{a} , in modo che le equazioni:

$$\delta \mathbf{d}^T \cdot \left\{ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) - \mathbf{C}_{sw} \mathbf{a} - \mathbf{f}^{ext} \right\} = 0 \quad (8.10)$$

$$\delta \mathbf{a}^T \cdot \left\{ \mathbf{C}_{ws} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{P} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{H} \mathbf{a} - \mathbf{q}^{ext} \right\} = 0 \quad (8.11)$$

risultino soddisfatte per qualunque valore dei vettori delle variazioni nodali (arbitrarie) $\delta \mathbf{d}$ e $\delta \mathbf{a}$. Le matrici ed i vettori che compaiono nelle eq. 8.10 e 8.11 sono definite come segue:

$$\mathbf{M} := A_{e=1}^{n_{el}} \int_{\mathcal{B}^e} \rho \mathbf{N}^{uT} \mathbf{N}^u dv \quad (8.12)$$

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) := A_{e=1}^{n_{el}} \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^{uT} \boldsymbol{\sigma}'[\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{d})] dv \quad (8.13)$$

$$\mathbf{C}_{sw} := A_{e=1}^{n_{el}} \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^{uT} \mathbf{m} \mathbf{N}^p dv \quad (8.14)$$

$$\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{d}) := A_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}^{uT} \rho \mathbf{B} dv + \int_{\mathcal{S}^e} \mathbf{N}^{uT} \bar{\mathbf{t}} da \right\} \quad (8.15)$$

$$\mathbf{C}_{ws} := A_{e=1}^{n_{el}} \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}^{pT} \mathbf{m}^T \mathbf{B}^u dv = \mathbf{C}_{sw}^T \quad (8.16)$$

$$\mathbf{P} := A_{e=1}^{n_{el}} \int_{\mathcal{B}^e} C_w \mathbf{N}^{pT} \mathbf{N}^p dv \quad (8.17)$$

$$\mathbf{H} := A_{e=1}^{n_{el}} \int_{\mathcal{B}^e} \frac{1}{\mu_w} \mathbf{E}^{pT} \mathbf{K} \mathbf{E}^p dv \quad (8.18)$$

$$\mathbf{q}^{ext}(\mathbf{d}) := A_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{E}^{pT} \frac{\rho_w}{\mu_w} \mathbf{K} \mathbf{B}^u dv - \int_{\mathcal{S}^e} \mathbf{N}^{pT} \bar{\mathbf{q}} da \right\} \quad (8.19)$$

\mathbf{M} rappresenta la matrice di massa; $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d})$ è il vettore delle forze interne dipendente dal valore corrente del tensore della tensione totale. Quest'ultimo a sua volta è funzione del vettore degli spostamenti nodali attraverso il legame costitutivo e la relazione cinematica spostamenti–deformazioni; \mathbf{C}_{sw} è la matrice di accoppiamento e \mathbf{C}_{ws} è la sua trasposta; \mathbf{P} rappresenta la matrice di compressibilità in cui $C_w = n/K_w$ (ipotesi di incompressibilità dei grani); \mathbf{H} è la matrice di permeabilità ed infine $\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{d})$ e $\mathbf{q}^{ext}(\mathbf{d})$ sono i vettori delle forze esterne dipendenti da quantità note. Inoltre il simbolo \mathbf{A} rappresenta l'operazione di assemblaggio dei contributi dei singoli elementi; \mathbf{B}^u è l'operatore gradiente discreto per il campo di spostamenti, ed \mathbf{E}^p l'operatore gradiente discreto per il campo di pressione interstiziale.

Data l'arbitrarietà dei vettori $\delta \mathbf{d}$ e $\delta \mathbf{a}$, affinché le eq. 8.10 e 8.11 siano soddisfatte, è necessario che risulti:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) - \mathbf{C}_{sw} \mathbf{a} - \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad (8.20)$$

$$\mathbf{C}_{ws} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{P} \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{H} \mathbf{a} - \mathbf{q}^{ext} = \mathbf{0} \quad (8.21)$$

Le eq. 8.20 e 8.21 rappresentano un sistema di equazioni differenziali ordinarie, nelle incognite $\mathbf{d}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$, che devono essere risolte numericamente ricorrendo ad opportune procedure numeriche (tipicamente, il metodo di Newmark, descritto nel Par. 8.4.1). L'accoppiamento tra problema meccanico e problema idraulico è legato alla presenza dei termini $\mathbf{C}_{sw}\mathbf{a}$ nella eq. 8.20 e $\mathbf{C}_{sw}\dot{\mathbf{d}}$ nella eq. 8.21. Il vettore delle “forze nodali interne”, \mathbf{f}^{int} , dipende (in maniera non lineare) dagli spostamenti nodali, in quanto questi determinano lo stato di deformazione, e quindi lo stato di tensione efficace corrente.

8.2.2 Formulazione non drenata (UP)

Nel caso non drenato, il problema di equilibrio dinamico dello scheletro solido risulta disaccoppiato dalla equazione di conservazione della massa del liquido. Pertanto la eq. 7.97 può essere risolta direttamente.

Siano:

$$\mathbf{C}_u := \{u_i^s(x_k, t) : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid u_i^s \in \mathbf{H}^1 \& u_i^s = \bar{u}_i^s \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}_u\} \quad (8.22)$$

lo spazio delle soluzioni per la funzione incognita u_i^s , costruite in modo tale da rispettare le condizioni al contorno di Dirichlet sulle porzioni della frontiera dove sono assegnate le componenti di spostamento (\bar{u}_i^s), e:

$$\mathbf{V}_u := \{\delta u_i^s(x_k, t) : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid \delta u_i^s \in \mathbf{H}^1 \& \delta u_i^s = 0 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}_u\} \quad (8.23)$$

lo spazio delle variazioni δu_i^s del campo di spostamenti, scelte in modo tale da essere nulle in corrispondenza del contorno \mathcal{S}_u . La forma variazionale del problema dinamico è formulata nel modo seguente: si determini la funzione $u_i^s \in \mathbf{C}_u$ in modo che, per ogni $\delta u_i^s \in \mathbf{V}_u$, risulti:

$$- \int_{\mathcal{B}} \rho \delta u_i^s a_i dv + \int_{\mathcal{B}} \rho \delta u_i^s b_i dv + \int_{\mathcal{S}_i} \delta u_i^s \bar{t}_i dv - \int_{\mathcal{B}} \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dv = 0 \quad (8.24)$$

Introducendo una opportuna discretizzazione spaziale in elementi finiti, ed approssimando la funzione incognita e la sua variazione mediante le interpolazioni eq. 8.6 e 8.8, si ottiene:

$$\delta \mathbf{d}^T \cdot \{ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) - \mathbf{f}^{ext} \} = 0 \quad (8.25)$$

e, quindi, per l'arbitrarietà del vettore $\delta \mathbf{d}$,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) - \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad (8.26)$$

Tale equazione è formalmente analoga alla equazione (discreta) di equilibrio dinamico di un mezzo monofase. Ciò che la caratterizza è la natura del vettore delle forze nodali interne (totali):

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) := A_{e=1}^{n_{el}} \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^{uT} \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{d})] dv \quad (8.27)$$

nella quale il tensore delle tensioni totali $\boldsymbol{\sigma}$ si ottiene mediante integrazione numerica (a livello locale) dell'equazione costitutiva 7.98 e della equazione di continuità 7.96:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left\{ \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}) + \left(\frac{K_w}{n} \right) \mathbf{m}^T \mathbf{m} \right\} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (8.28)$$

$$\dot{p}_w = -\frac{K_w}{n} \mathbf{m}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = -\frac{K_w}{n} \mathbf{m}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{d}} \quad (8.29)$$

Rispetto alla formulazione MSP, l'approccio non drenato UP presenta il notevole vantaggio di poter impiegare formulazioni standard per la costruzione delle matrici degli elementi. Infatti, le sole modifiche da apportare rispetto al caso monofase riguardano la formulazione del legame costitutivo (in termini di tensioni efficaci) e l'integrazione nel tempo delle eq. 8.28–8.29. Questo rende relativamente semplice modificare codici di calcolo già esistenti che consentano l'estensione della libreria dei modelli costitutivi.

8.3 La matrice di smorzamento

Quando le soluzioni del problema numerico cadono nel campo delle piccole deformazioni, in cui l'isteresi associata al modello costitutivo elastoplastico risulta piccola, o nel caso in cui per semplificare l'analisi si assuma un comportamento del materiale elastico, potrebbe risultare necessario aggiungere alla matrice di massa \mathbf{M} , nelle equazioni dinamiche 8.20 (MSP) ed 8.26 (UP) una matrice di smorzamento \mathbf{C} , in modo da modificarle come segue:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) - \mathbf{C}_{sw} \mathbf{a} - \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad (8.30)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) - \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad (8.31)$$

Il modo più semplice per formulare una matrice di smorzamento è quello di renderla proporzionale o alla matrice di massa oppure a quella di rigidità del sistema libero di vibrare. In questo modo tale matrice potrebbe essere espressa da:

$$\mathbf{C} = \alpha_r \mathbf{M}, \quad \text{oppure, } \mathbf{C} = \beta_r \mathbf{K} \quad (8.32)$$

in cui le costanti di proporzionalità α_r e β_r hanno le dimensioni rispettivamente dell'inverso di un tempo e di un tempo. In questi casi il valore del rapporto di smorzamento modale ξ , definito in dinamica (Clough & Penzien, 1993) come rapporto tra il coefficiente di damping ed il suo valore critico ($\xi = c/c_c$), vale rispettivamente:

$$\xi_n = \frac{\alpha_r}{2\omega_n} \quad \text{oppure, } \xi_n = \frac{\beta_r \omega_n}{2} \quad (8.33)$$

Le espressioni 8.33 mostrano come, nel caso di matrice di smorzamento proporzionale a quella di massa, il rapporto di smorzamento risulta inversamente proporzionale alla frequenza, mentre nell'altro caso di proporzionalità rispetto alla matrice di rigidità, tale rapporto è direttamente proporzionale alla frequenza di vibrazione. Un ovvio miglioramento dei risultati può essere ottenuto assumendo

una matrice di smorzamento proporzionale alla combinazione delle matrici di massa e di rigidità, come proposto per la prima volta da Lord Rayleigh. In questo caso, sommando tra loro le due espressioni alternative date dalle eq. 8.32, si ottiene la matrice di smorzamento alla Rayleigh:

$$\mathbf{C} = \frac{\alpha_r}{2\omega_n} \mathbf{M} + \beta_r \mathbf{K} \quad (8.34)$$

dove \mathbf{M} è la matrice di massa e \mathbf{K} è una matrice di rigidità del sistema, di solito assunta pari a quella di “rigidità tangente”.

Risulta dunque evidente come lo smorzamento alla Rayleigh conduca alla seguente relazione tra rapporto di smorzamento e frequenza di vibrazione:

$$\xi_n = \alpha_r \mathbf{M} + \beta_r \mathbf{K} + \frac{\beta_r \omega_n}{2} \quad (8.35)$$

In Fig. 8.1 sono mostrate in maniera schematica le relazioni tra ξ e ω espresse dalle eq. 8.33 e dalla eq. 8.35. Si comprende, quindi, come nel caso di smorzamento alla Rayleigh, i due fattori α_r e β_r , possono essere valutati dalla soluzione del sistema di due equazioni in due incognite rappresentato da:

$$\begin{Bmatrix} \xi_n \\ \xi_m \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_m & \omega_m \\ 1/\omega_n & \omega_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{Bmatrix} \quad (8.36)$$

ottenuto imponendo che siano verificate contemporaneamente due equazioni del tipo 8.35 per due valori noti di ξ_n e ξ_m , associati a due specifiche frequenze ω_n e ω_m . Poiché però la maggior parte delle volte non si hanno sufficienti informazioni sulla variazione del rapporto di smorzamento con la frequenza, allora di solito si assume un valore dello smorzamento uguale per le due differenti frequenze, ovvero $\xi_n = \xi_m = \xi$. In questo caso i due fattori di smorzamento incogniti α_r e β_r , si ottengono dal sistema semplificato ottenuto dalla eq. 8.36:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \end{Bmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_n + \omega_m} \begin{Bmatrix} \omega_n \omega_m \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (8.37)$$

Clough e Penzien propongono di scegliere un valore di ω_m prossimo alla frequenza fondamentale del sistema in esame ed un valore di ω_n da scegliere tra i valori delle frequenze più alte che possono contribuire alla sua risposta dinamica. Così facendo, infatti, i valori di frequenza compresi tra ω_n e ω_m avranno dei rapporti di smorzamento minori di $\xi_n = \xi_m = \xi$ assunto nel calcolo, mentre tutti i modi con frequenze più alte di ω_n avranno valori di smorzamento che aumentano proporzionalmente con la frequenza. In questa maniera l'effetto finale è quello di smorzare maggiormente i modi di vibrazione ad alte frequenze.

8.4 Discretizzazione nel tempo

Nel caso in cui le grandezze siano dipendenti dalla variabile tempo $\mathbf{d}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$ si rende necessaria una ulteriore discretizzazione nel dominio temporale. A tal fine una delle famiglie di metodi diretti più utilizzata è la famiglia dei *metodi alla Newmark* dettagliatamente descritte da Hughes (2000).

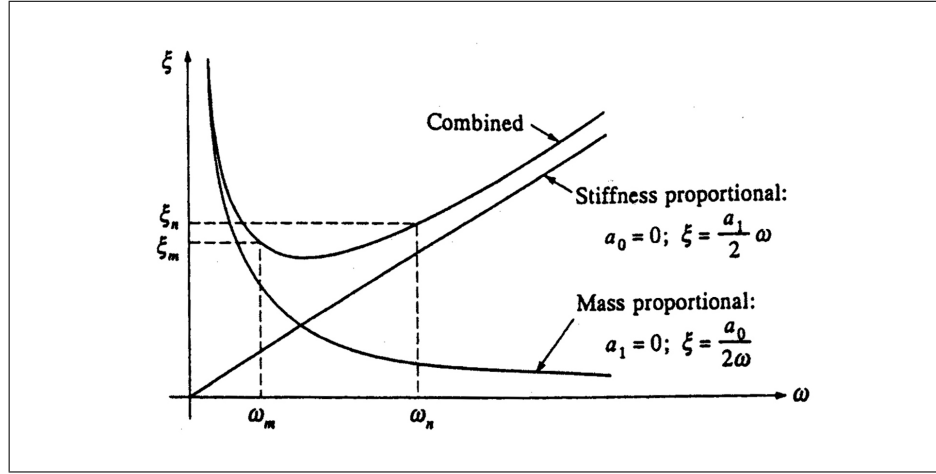


Figura 8.1. Relazione tra rapporto di smorzamento e frequenza di vibrazione per il damping alla Rayleigh (Clough & Penzien, 1993).

8.4.1 Formulazione per processi (MSP)

Per completare la soluzione numerica del problema MSP si descrive il metodo di integrazione nel tempo delle equazioni differenziali ordinarie 8.30–8.21 utilizzato nel codice GEHOMadrid.

Si consideri una suddivisione della scala dei tempi intervalli $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. In corrispondenza di t_n si ha:

$$M\ddot{\mathbf{d}}_n + C\dot{\mathbf{d}}_n + \mathbf{f}_n^{int}(\mathbf{d}_n) - C_{sw}\mathbf{a}_n - \mathbf{f}_n^{ext} = \mathbf{0} \quad (8.38)$$

$$C_{sw}\dot{\mathbf{d}}_n + P\dot{\mathbf{a}}_n + H\mathbf{a}_n - \mathbf{q}_n^{ext} = \mathbf{0} \quad (8.39)$$

in cui sono noti i valori di \mathbf{d}_n , \mathbf{a}_n , $\dot{\mathbf{d}}_n$ e $\dot{\mathbf{a}}_n$, i valori di $\ddot{\mathbf{d}}_n$ e $\ddot{\mathbf{a}}_n$ possono dunque essere ricavati.

Al tempo t_{n+1} si ha:

$$M\ddot{\mathbf{d}}_{n+1} + C\dot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{f}_{n+1}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}) - C_{sw}\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{f}_{n+1}^{ext} = \mathbf{0} \quad (8.40)$$

$$C_{sw}\dot{\mathbf{d}}_{n+1} + P\dot{\mathbf{a}}_{n+1} + H\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{q}_{n+1}^{ext} = \mathbf{0} \quad (8.41)$$

La più diffusa famiglia di metodi diretti per risolvere le eq. 8.40–8.41 è quella dei “Generalized Newmark methods” (Katona & Zienkiewicz, 1985) indicati con l’abbreviazione GNpj, in cui “p” è l’ordine dello schema e “j” è l’ordine dell’equazione differenziale (con $p \geq j$).

Lo schema GN22 (vale a dire il metodo di Newmark) si utilizza per \mathbf{d} e lo schema GN11 per \mathbf{a} .

Lo schema GN22 si scrive come:

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n + \beta_1 \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{d}}_n \quad (8.42)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_n + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 \Delta \ddot{\mathbf{d}}_n \quad (8.43)$$

dove $\Delta\ddot{\mathbf{d}}_n = \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{d}}_n$.

Lo schema G11 è:

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n + \theta \Delta t \dot{\mathbf{a}}_n \quad (8.44)$$

nelle eq. 8.42–8.44 le uniche incognite sono $\Delta\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}$ e $\Delta\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$, mentre i parametri β_1 , β_2 e θ determinano le caratteristiche di stabilità ed accuratezza dell'algoritmo considerato. Hughes (2000) ha messo in evidenza che l'ordine di accuratezza è pari a due se e solo se $\beta_1 = 1/2$ e la soluzione è incondizionatamente stabile se i valori dei tre parametri soddisfano le seguenti condizioni:

$$2\beta_2 \geq \beta_1 \geq \frac{1}{2} \quad \theta \geq \frac{1}{2} \quad (8.45)$$

Hughes (2000) ha osservato che la discretizzazione temporale dell'equazione produce dei modi ad origine spuria in corrispondenza delle alte frequenze, che non sono rappresentativi del comportamento dell'equazione. Di conseguenza è opportuno e spesso assolutamente necessario avere degli algoritmi con damping numerico per rimuovere l'effetto di tali componenti modali. In termini di metodo di Newmark un valore di $\beta_1 > 1/2$ è necessario per avere dissipazione alle alte frequenze, provocando come effetto collaterale una degradazione dell'ordine di accuratezza.

Sostituendo nelle O.D.E. scritte al tempo t_{n+1} (eq. 8.40 e 8.41) le espressioni ottenute con il metodo GNpj si ottiene un sistema di equazioni algebriche non-lineari nelle incognite $\Delta\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}$ e $\Delta\dot{\mathbf{a}}_{n+1}$:

$$\mathbf{G}_{n+1}^d = \mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{d}}_n + \mathbf{C}\beta_1\Delta t\Delta\ddot{\mathbf{d}}_n + \mathbf{f}_{n+1}^{int} - \mathbf{C}_{sw}\theta\Delta t\Delta\dot{\mathbf{a}}_n - \mathbf{F}_{n+1}^d = \mathbf{0} \quad (8.46)$$

$$\mathbf{G}_{n+1}^a = \mathbf{C}_{ws}\beta_1\Delta t\Delta\ddot{\mathbf{d}}_n + \mathbf{H}\theta\Delta t\Delta\dot{\mathbf{a}}_n + \mathbf{P}\Delta\dot{\mathbf{a}}_n - \mathbf{F}_{n+1}^a = \mathbf{0} \quad (8.47)$$

in cui

$$\mathbf{F}_{n+1}^d = \mathbf{f}_{n+1}^{ext} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_n - \mathbf{C}\left(\dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t\ddot{\mathbf{d}}_n\right) + \mathbf{C}_{sw}\left(\mathbf{a}_n + \Delta t\dot{\mathbf{a}}_n\right) \quad (8.48)$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^a = \mathbf{q}_{n+1}^{ext} - \mathbf{C}_{ws}\left(\dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t\ddot{\mathbf{d}}_n\right) - \mathbf{H}\left(\mathbf{a}_n + \Delta t\dot{\mathbf{a}}_n\right) - \mathbf{P}\dot{\mathbf{a}}_n \quad (8.49)$$

I due termini \mathbf{F}_{n+1}^d e \mathbf{F}_{n+1}^a sono funzioni di variabili note, poiché tutte riferite al tempo t_n , mentre per valutare $\mathbf{f}_{n+1}^{int} = \mathbf{f}_n^{int} + \Delta\mathbf{f}_n^{int}$ della eq. 8.46 è necessario ricorrere alla soluzione iterativa, descritta nel Par. 8.5.

8.4.2 Formulazione non drenata (UP)

Per completare la soluzione numerica del problema UP si descrive il metodo di integrazione nel tempo delle equazioni differenziali ordinarie eq. 8.28 per l'approccio UP utilizzato dal codice Abaqus.

Quest'ultimo utilizza l'operatore implicito detto metodo- α di Hilber et al. (1978) che è uno schema ad un singolo parametro con controllo del damping numerico.

Si consideri uno step temporale $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, la eq. 8.31 al tempo t_{n+1} è sostituita dalla somma delle forze inerziali alla fine dello step e da una media pesata tra le forze stiche all'inizio e alla fine dello step:

$$M\ddot{\mathbf{d}}_{n+1} + (1+\alpha)C\dot{\mathbf{d}}_{n+1} - \alpha C\dot{\mathbf{d}}_n + (1+\alpha)\mathbf{f}_{n+1}^{int} - \alpha\mathbf{f}_n^{int} = \mathbf{f}^{ext}(t_{n+1} + \alpha\Delta t) \quad (8.50)$$

La definizione dell'operatore è completata con le formule di integrazione di Newmark per spostamenti e velocità riportate nelle eq. 8.42 e 8.43.

La soluzione è incondizionatamente stabile se i parametri soddisfano le seguenti condizioni:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \alpha \quad \beta_2 = \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2 \quad -\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 0 \quad (8.51)$$

Il vantaggio di tale operatore è rappresentato dal suo controllo sul damping numerico che cresce lentamente alle basse frequenze e più rapidamente alle alte frequenze, in cui si hanno dei modi ad origine spuria correlati agli errori introdotti dalla discretizzazione spaziale dell'equazione di equilibrio. Il controllo di tale damping è fornito dal parametro α : con $\alpha = 0$ non c'è damping e l'operatore diventa la legge trapezoidale (Newmark, $\beta = 1/4$); mentre con $\alpha = -1/3$ si ha un elevato damping.

Una volta sostituite le espressioni di spostamenti e velocità riportate nelle eq. 8.42 e 8.43 si ottiene il seguente sistema di equazioni algebriche non-lineari nell'incognita $\Delta\dot{\mathbf{d}}_{n+1}$:

$$\mathbf{G}_{n+1}^d = M\Delta\ddot{\mathbf{d}}_n + (1+\alpha)\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)C\Delta t\Delta\ddot{\mathbf{d}}_n + (1+\alpha)\mathbf{f}_{n+1}^{int} = \mathbf{0} \quad (8.52)$$

in cui

$$\mathbf{F}_{n+1}^d = \mathbf{f}^{ext}(t_{n+1} + \alpha\Delta t) - M\ddot{\mathbf{d}}_n - (1+\alpha)C\left(\dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t\ddot{\mathbf{d}}_n\right) + \alpha C\dot{\mathbf{d}}_n + \alpha\mathbf{f}_n^{int} \quad (8.53)$$

in maniera analoga al paragrafo precedente il termine \mathbf{F}_{n+1}^d è funzioni di variabili note, poiché tutte riferite al tempo t_n , mentre per valutare $\mathbf{f}_{n+1}^{int} = \mathbf{f}_n^{int} + \Delta\mathbf{f}_n^{int}$ della eq. 8.52 è necessario ricorre alla soluzione iterativa, descritta nel Par. 8.5.

8.5 Soluzione iterativa dei problemi non-lineari

A seguito della discretizzazione e dell'integrazione temporale, si ottiene un sistema di equazioni algebriche non-lineari del tipo:

$$\mathbf{G}_{n+1}(\mathbf{x}_{n+1}) = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{S}_{n+1}(\mathbf{x}_{n+1}) = \mathbf{0} \quad (8.54)$$

in cui per l'approccio MSP:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \Delta\ddot{\mathbf{d}} \\ \Delta\dot{\mathbf{a}} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}^d \\ \mathbf{G}^a \end{Bmatrix} \quad (8.55)$$

mentre per quello UP:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \Delta\ddot{\mathbf{d}} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}^d \end{Bmatrix} \quad (8.56)$$

\mathbf{f} è il vettore delle variabili indipendenti da \mathbf{x} e \mathbf{S} è il vettore delle variabili dipendenti. La eq. 8.54 può essere risolta in maniera iterativa impiegando il metodo di Newton-Raphson. Il residuo \mathbf{R}_{n+1} è definito come:

$$\mathbf{R}_{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{S}_{n+1}(\mathbf{x}_{n+1}) \quad (8.57)$$

e si calcola attraverso iterazioni successive il valore delle incognite nodali \mathbf{x}_{n+1} che lo rendono nullo.

Si supponga di aver determinato una prima approssimazione, all'iterazione k , del vettore incognito; una soluzione più accurata $(\mathbf{x}_{n+1})^{(k+1)}$, all'iterazione successiva, può essere valutata tramite uno sviluppo in serie di Taylor come:

$$\mathbf{R}_{n+1}^{(k+1)} \approx \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} + \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{n+1}^{(k)} d\mathbf{x}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{0} \quad (8.58)$$

in cui compare la derivata parziale \mathbf{R} rispetto alla variabile \mathbf{x} , che è la matrice jacobiana \mathbf{J} , detta *operatore tangente consistente*. Per l'approccio MSP tale operatore è definito come:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G^d}{\partial \Delta \hat{\mathbf{d}}} & \frac{\partial G^d}{\partial \Delta \hat{\mathbf{a}}} \\ \frac{\partial G^a}{\partial \Delta \hat{\mathbf{d}}} & \frac{\partial G^a}{\partial \Delta \hat{\mathbf{a}}} \end{bmatrix} \quad (8.59)$$

che sulla base delle eq. 8.46 e 8.47 può essere scritta come:

$$\mathbf{J}_{n+1}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} + \mathbf{C}\beta_2\Delta t + \mathbf{K}_T\frac{1}{2}\beta_2\Delta t^2 & -\mathbf{C}_{sw}\theta\Delta t \\ \mathbf{C}_{ws}\beta_1\Delta t & \mathbf{H}\theta\Delta t + \mathbf{P} \end{bmatrix}_{n+1}^{(k)} \quad (8.60)$$

dove:

$$(\mathbf{K}_T)_{n+1}^{(k)} = A_{e=1}^{n_{el}} \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{B}^{uT} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}} \right)_{n+1}^{(k)} dv \quad (8.61)$$

Il termine tra parentesi rappresenta la *matrice di rigidezza tangente* del materiale (Simo & Taylor, 1986), espressa come:

$$\tilde{\mathbf{D}}_{n+1}^{(k)} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}} \right)_{n+1}^{(k)} \quad (8.62)$$

Tale quantità non coincide con il tensore di rigidezza tangente del materiale, \mathbf{D} , sebbene rappresenti la *linearizzazione* degli *stress-point algorithms* (algoritmi di punto di Gauss) utilizzati per integrare la legge costitutiva del materiale e descritti in dattaglio nel prossimo capitolo.

Il metodo di Newton-Raphson è caratterizzato da una convergenza di tipo quadratico, quindi molto rapida, ma presenta lo svantaggio che l'operatore tangente consistente è calcolato, secondo l'espressione 8.58, ad ogni iterazione.

Implementazione numerica di equazioni costitutive in codici agli elementi finiti

9.1 Il ruolo degli algoritmi di punto di Gauss nella formulazione del metodo degli elementi finiti in campo non lineare

Al fine di applicare a problemi pratici i modelli costitutivi presi in esame (Cap. 4) si rende necessario sviluppare un algoritmo di punto di Gauss, *stress-point algorithm*, robusto ed accurato per l'implementazione di tali modelli in codici di calcolo agli elementi finiti. Nel presente lavoro i modelli sono stati implementati nel codice di calcolo commerciale Abaqus Standard v6.4. L'implementazione ha richiesto lo sviluppo di una "user material subroutine" (UMAT) scritta in Fortran 77, in accordo con quanto prescritto dal manuale del programmatore di Abaqus. Il modello HP-MA è stato incorporato anche nella libreria dei modelli costitutivi di GEHOMadrid mediante una subroutine di interfaccia che mette in relazione la struttura del programma con la routine costitutiva UMAT. La validazione di tale subroutine tramite test numerici su un singolo elemento è descritta nel Par. 9.5.

Il problema numerico consiste nell'integrare le equazioni costitutive in forma incrementale, aggiornando lo stato del materiale (noto al tempo t_n) nell'intervallo di tempo $[t_n; t_{n+1}]$.

Come messo in evidenza da Hughes (1984), tale integrazione delle equazioni costitutive a livello locale rappresenta il problema centrale della plasticità computazionale, poichè esso è in relazione con il ruolo principale svolto dalle equazioni costitutive nella computazione. Certamente esistono molti altri importanti ingredienti computazionali nell'intera procedura, ma sono propri del tipo di strategia impiegata e coinvolgono la teoria costitutiva solo in modo limitato. Inoltre la precisione con cui le equazioni costitutive sono impiegate ha un effetto diretto sull'accuratezza dell'analisi.

A partire dai primi lavori sulla plasticità dei metalli, riassunti in Hughes (1984), un numero di studi fondamentali sono stati pubblicati su tale argomento. Gli stress-point algorithms maggiormente impiegati in meccanica computazionale possono essere suddivisi in due classi:

1. *algoritmi espliciti* sia di tipo "return mapping" che basati su "metodi di Runge-Kutta di ordine differente a controllo dell'errore", i quali sono stati descritti in

Ortiz & Simo (1986), Sloan (1987) e Sloan et al. (2001). Studi comparativi sulle prestazioni delle diverse strategie applicate alla teoria della plasticità classica sono presentati in Gens & Potts (1988) e in Potts & Ganendra (1994).

2. *algoritmi impliciti* che sono basati sul concetto di “operator split” e “closest point projection return mapping”, presentati, ad es., in Simo & Hughes (1987) e in Simo & Govindjee (1991). Tali algoritmi sono stati applicati alla geomeccanica computazionale in molti articoli recenti, tra cui Borja & Lee (1990), Borja (1991), Borja & Tamagnini (1998), Alawaji et al. (1992), Macari et al. (1997), Jeremić & Sture (1997), Tamagnini et al. (2002).

In uno schema di integrazione esplicito le leggi di evoluzione sono valutate in corrispondenza di uno stato del materiale noto e per la determinazione dello stato finale non è strettamente necessaria alcun tipo di iterazione. Comunque nell'integrazione di modelli elastoplastici è sempre opportuno introdurre una semplice correzione iterativa per riportare lo stato del materiale sulla superficie di snervamento, quando tale condizione non è imposta dall'integrazione. In un algoritmo implicito le leggi di evoluzione sono valutate in corrispondenza di uno stato del materiale non noto, di conseguenza il sistema di equazioni non-lineari deve essere risolto in maniera iterativa. Se per esempio si utilizza un metodo di Newton è necessario valutare la derivata seconda della funzione di snervamento e del potenziale plastico. Nella pratica entrambi gli schemi sono stati impiegati per l'integrazione di modelli costitutivi avanzati.

I metodi impliciti presentano il vantaggio che il risultato soddisfa automaticamente il criterio di snervamento con una tolleranza imposta. Inoltre non è necessario valutare il punto di intersezione del percorso di carico con la superficie di snervamento se si passa da uno stato elastico a uno plastico. Tra i metodi menzionati, uno degli schemi più diffusamente utilizzati in plasticità computazionale è il metodo generalizzato di Eulero all'indietro (Generalized Backward Euler, GBE) (Simo & Hughes, 1997; Simo, 1998) per le sue caratteristiche di accuratezza e stabilità per ampi intervalli di tempo. Nell'ambito della geomeccanica, tale procedura è stata applicata per la prima volta a modelli di Stato Critico a due invarianti da Borja & Lee (1990); Borja (1991); Runesson (1987). In seguito, Alawaji et al. (1992) e Jeremić & Sture (1997) hanno esteso l'applicazione del metodo GBE a modelli a tre invarianti ad incrudimento isotropo, mentre Borja & Tamagnini (1998) hanno sviluppato un particolare metodo GBE nello spazio delle deformazioni principali elastiche per il modello classico di Cam-Clay Modificato per deformazioni finite. Tramite il metodo GBE lo stato finale del materiale è determinato risolvendo un sistema di equazioni differenziali non-lineari in corrispondenza di ogni punto di Gauss. Quando per tale integrazione si utilizza l'algoritmo di Newton – Raphson è necessario far attenzione alla convergenza. Inoltre le maggiori difficoltà nell'applicazione di schemi GBE a modelli costitutivi sono: i) comportamento elastico dipendente dalla pressione; ii) leggi di incrudimento fortemente non-lineari; iii) espressioni complesse del potenziale plastico e della funzione di snervamento che sono state semplificate introducendo una o entrambe delle seguenti ipotesi semplificative:

1. si elimina la dipendenza della funzione di snervamento e/o del potenziale plastico dal terzo invariante;

2. si considera che il tensore di rigidezza elastico è costante nell'intervallo di tempo.

Comunque entrambe le semplificazioni producono elevate discrepanze tra il comportamento del terreno previsto e quello osservato nelle pratiche applicazioni. In particolare l'ipotesi (1) porta a valori irrealistici del rapporto critico delle tensioni per i terreni caratterizzati da elevati valori dell'angolo di attrito in compressione triassiale, ogni volta che il problema ai limiti è caratterizzato da un ampio intervallo di variazione della direzione del percorso tensionale. Dall'altra parte, come ha osservato per primo Borja (1991), l'ipotesi (2) degrada in maniera sostanziale le prestazioni dello schema di integrazione su percorsi di carico con elevate variazioni della tensione media (analisi di scavi). Tali limitazioni sono state superate da Tamagnini et al. (2002) che hanno utilizzato tale schema per un modello elastoplastico ad incrudimento isotropo e degradazione chimica.

Rispetto agli algoritmi impliciti, gli algoritmi espliciti presentano il vantaggio di essere più semplici da implementare, poichè richiedono soltanto le derivate prime della funzione di snervamento e del potenziale plastico. Wissmann & Hauck (1983) e Sloan (1987) hanno messo in evidenza che l'accuratezza e l'efficienza dei metodi espliciti sono notevolmente migliori combinandoli con substepping automatico e controllo dell'errore. Gli algoritmi espliciti, a differenza di quelli impliciti non richiedono la risoluzione di un sistema di equazioni non-lineari per determinare lo stato tensionale in ogni punto di Gauss. D'altro canto quando si passa da uno stato elastico a uno plastico si rende necessario determinare il punto di intersezione tra il percorso di carico e la superficie di snervamento. Tale fase richiede la risoluzione di una sola equazione non-lineare, ma va trattata con una certa attenzione per evitare di determinare intersezioni spurie.

Due differenti studi di Potts & Ganendra (1982, 1994) hanno comparato le prestazioni dell'algoritmo return mapping di Ortiz & Simo (1986) con lo schema esplicito di Sloan (1987), il secondo relativamente al modello di Cam-Clay Modificato risulta essere più robusto ed efficiente del primo.

I metodi di substepping espliciti di Sloan (1987) sono stati originariamente applicati a modelli elastoplastici classici e successivamente (Sloan et al., 2001) sono stati estesi a modelli elastoplastici avanzati.

In tale capitolo si descrive l'algoritmo esplicito adattativo di Runge-Kutta-Fehlberg di terzo ordine (RKF23) che è stato applicato sia a modelli elastoplastici avanzati (BS-TD e EP-RW) sia ad un modello ipoplastico (HP-MA).

9.2 L'algoritmo RKF-23 a passo adattativo con controllo dell'errore

Lo schema di integrazione considerato è l'algoritmo esplicito adattativo di Runge-Kutta-Fehlberg di terzo ordine (RKF23), che adotta lo schema di Eulero modificato (di ordine 2) e lo schema di Runge-Kutta di ordine 3.

Tale algoritmo non è strettamente associato alla piattaforme impiegate nel presente lavoro, ma può essere utilizzato in qualunque altro codice agli elementi finiti che permetta l'ampliamento della libreria dei modelli costitutivi.

Tale schema di integrazione richiede che le leggi di evoluzione delle variabili di stato siano espresse nella forma generale:

$$\dot{\mathbf{y}} := \mathbf{F}(\mathbf{y}) \quad (9.1)$$

Nel modello EP-RW tali leggi di evoluzione possono essere espresse sinteticamente come:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{D}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{aligned} \quad (9.2)$$

in cui il vettore \mathbf{q} che raccoglie le variabili di stato interne è espresso come:

$$\mathbf{q} = \{p_0, r, \boldsymbol{\alpha}^T, \boldsymbol{\beta}^T, e\}^T \quad (9.3)$$

Il tensore di rigidezza tangente \mathbf{D}^{ep} è definito come:

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{1}{K_p} (\mathbf{D}^e \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{n} \mathbf{D}^e) \quad (9.4)$$

Infine le leggi di evoluzione delle variabili interne sono state date da:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{cases} \dot{p}_0 = h_{p_0}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{r} = h_r\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{h}_\alpha\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{h}_\beta\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{e} = h_e\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{cases} \quad (9.5)$$

confrontando quest'ultima espressione con la eq. 9.2₂:

$$\mathbf{H} = \begin{cases} h_{p_0} \\ h_r \\ \mathbf{h}_\alpha \\ \mathbf{h}_\beta \\ h_e \end{cases} \quad (9.6)$$

le cui espressioni sono fornite nel Par. 4.2 assieme al significato fisico di tutte le grandezze.

Per il modello BS-TD la eq. 9.1 assume l'espressione 9.2 in cui il vettore delle variabili interne è espresso come:

$$\mathbf{q} = \{p_c, p_m\}^T \quad (9.7)$$

le cui leggi di evoluzione sono date da:

$$\begin{cases} \dot{p}_c = h_{p_c}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{p}_m = h_{p_m}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{cases} \quad (9.8)$$

le cui espressioni sono fornite nel Par.4.3 assieme al significato fisico di tutte le grandezze.

Infine nel modello HP-MA le leggi di evoluzione possono essere espresse sinteticamente come:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}_\delta) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}_\delta) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{cases} \quad (9.9)$$

in cui il vettore delle variabili interne è espresso come:

$$\mathbf{q} = \{\boldsymbol{\delta}, e\}^T \quad (9.10)$$

Il tensore di ridezza tangente è definito dalla eq. 4.107 e le leggi di evoluzione delle variabili interne sono date da:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{h}_\delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\ \dot{e} = h_e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{cases} \quad (9.11)$$

le cui espressioni sono fornite nel Par.4.4 assieme al significato fisico di tutte le grandezze.

L'algoritmo RKF23 confronta due soluzioni differenti, ottenute applicando due algoritmi di Runge-Kutta di ordine diverso, per stimare la soluzione del passo di integrazione da adottare sulla base di un valore prefissato (opportunamente basso) dell'errore di integrazione stimato. Se l'errore stimato è minore della tolleranza, è possibile aumentare l'ampiezza del passo per aumentare l'efficienza della procedura (Haier & Wanner, 1991; Sloan, 1987).

All'interno del passo temporale $[t_n; t_{n+1}]$ si introduce una suddivisione in substeps la cui ampiezza è definita in modo adattativo dalla procedura di Runge-Kutta-Fehlberg.

Introducendo la variabile adimensionale T , definita come:

$$T := \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{t - t_n}{\Delta t_{n+1}} \quad t \in [t_n; t_{n+1}] \quad (9.12)$$

l'ampiezza del generico substep k risulta dunque pari a:

$$\Delta T_{k+1} := T_{k+1} - T_k = \frac{t_{k+1} - t_k}{\Delta t_{n+1}} \quad \sum_{k=1}^{n_s} \Delta T_{k+1} = 1 \quad (9.13)$$

con n_s numero variabile di substeps. Quando il substep coincide con il passo Δt_{n+1} si ha $\Delta T_{k+1} = 1$.

Nella procedura RKF23 due differenti soluzioni sono calcolate simultaneamente nel generico substep k mediante le seguenti relazioni di ricorrenza:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \Delta T_k \sum_{j=1}^2 \tilde{C}_j \mathbf{k}_j(\mathbf{y}_k, \Delta T_k) \quad (9.14)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \Delta T_k \sum_{j=1}^3 \hat{C}_j \mathbf{k}_j(\mathbf{y}_k, \Delta T_k) \quad (9.15)$$

Le costanti che compaiono nelle eq. 9.14-9.15 assumono i valori $\tilde{C}_1 = 0$, $\tilde{C}_2 = 1$, $\hat{C}_1 = \hat{C}_3 = 1/6$, $\hat{C}_2 = 2/3$ mentre le funzioni \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 e \mathbf{k}_3 sono definite come:

Tabella 9.1. Algoritmo esplicito adattativo di Runge–Kutta–Fehlberg di terzo ordine (RKF23)

1. Inizializzazione del contatore dei substep, dello stato del materiale e del tempo:

$$k = 1 \quad \mathbf{y}_k|_{k=1} = \mathbf{y}_n \quad T_k = 0 \quad \Delta T_k = 1$$

2. Controllare se il processo di integrazione è completo:

SE: $T_k = 1$ VA AL PUNTO 10, ALTRIMENTI:

3. Valutare le soluzioni approssimate di \mathbf{y}_{k+1} :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + \Delta T_k \sum_{j=1}^N \tilde{C}_j \mathbf{k}_j(\mathbf{y}_k, \Delta T_k) \\ \hat{\mathbf{y}}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + \Delta T_k \sum_{j=1}^{N+1} \hat{C}_j \mathbf{k}_j(\mathbf{y}_k, \Delta T_k) \end{aligned}$$

4. Valutare l'errore relativo \mathbf{R}_{k+1} :

$$\mathbf{R}_{k+1} := \frac{\|\mathbf{R}_{k+1}\|}{\|\hat{\mathbf{y}}_{k+1}\|}$$

5. Se l'errore è non minore della tolleranza imposta:

SE: $\mathbf{R}_{k+1} \geq TOL$ VA AL PUNTO 9, ALTRIMENTI

6. Aggiornamento del tempo adimensionale e dello stato del materiale:

$$T_{k+1} = T_k + \Delta T_k \quad \mathbf{y}_{k+1} = \hat{\mathbf{y}}_{k+1}$$

7. Valutazione della dimensione del substep successivo:

$$\Delta T_{k+1} = \min \left\{ 0.9 \Delta T_k \left[\frac{TOL}{\mathbf{R}_{k+1}} \right]^{1/3}; 4 \Delta T_k \right\}$$

8. Controllo che la dimensione del substep sia minore del tempo residuo e inizio di un nuovo substep:

$$\begin{aligned} \Delta T_{k+1} &\leftarrow \min \{ \Delta T_{k+1}, 1 - \Delta T_{k+1} \}; & k &\leftarrow k + 1; \\ T_k &\leftarrow T_{k+1}; & \mathbf{y}_k &\leftarrow \mathbf{y}_{k+1} \\ && &\text{VA AL PUNTO 2} \end{aligned}$$

9. Lo step non ha fornito una soluzione accettabile, riduzione delle dimensioni del substep:

$$\Delta T_{k+1} = \min \left\{ 0.9 \Delta T_k \left[\frac{TOL}{\mathbf{R}_{k+1}} \right]^{1/3}; \frac{1}{4} \Delta T_k \right\}$$

VA AL PUNTO 3

10. Il processo di integrazione è completato; si fornisce il valore dello stato del materiale:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_{k+1} \text{ EXIT}$$

$$\mathbf{k}_1 := \mathbf{f}(\mathbf{y}_k) \quad (9.16)$$

$$\mathbf{k}_2 := \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_k + \frac{1}{2}\Delta T_k \mathbf{k}_1\right) \quad (9.17)$$

$$\mathbf{k}_3 := \mathbf{f}(\mathbf{y}_k - \Delta T_k \mathbf{k}_1 + 2\Delta T_k \mathbf{k}_2) \quad (9.18)$$

Con le due soluzioni disponibili è ora possibile adattare le dimensioni del passo di integrazione tramite la seguente procedura. Si consideri il tensore differenza:

$$\mathbf{R}_{k+1} := \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1} \quad (9.19)$$

a cui si può associare una misura scalare dell'errore relativo:

$$R_{k+1} := \frac{\|\mathbf{R}_{k+1}\|}{\|\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}\|} \quad (9.20)$$

L'integrazione sull'intervallo k -esimo si assume accettabile quando per una assegnata TOL (ragionevolmente piccola), si ha:

$$R_{k+1} < TOL \quad (9.21)$$

Se tale disuguaglianza è verificata, lo stato del materiale è aggiornato e la dimensione del substep successivo è assunta, in accordo con Sloan (1987), come:

$$\Delta T_{k+1} = \min \left\{ 0.9\Delta T_k \left[\frac{TOL}{R_{k+1}} \right]^{1/3}; 4\Delta T_k \right\} \quad (9.22)$$

Nel caso contrario, l'ampiezza del substep è ridotta scegliendo un nuovo valore di ΔT_k tramite la funzione:

$$\Delta T_{k+1} = \min \left\{ 0.9\Delta T_k \left[\frac{TOL}{R_{k+1}} \right]^{1/3}; \frac{1}{4}\Delta T_k \right\} \quad (9.23)$$

L'ampiezza del substep è ridotta fino a quando l'accuratezza della soluzione fornita dalla condizione 9.21 è soddisfatta e un nuovo substep può essere iniziato. Tale procedura si arresta quando $T_k = 1$ e si passa allo step successivo $[t_{n+1}; t_{n+2}]$ La Tab. 9.1 sintetizza l'algoritmo utilizzato.

9.3 Linearizzazione consistente mediante derivazione numerica

Nel Par. 8.5 è stato descritto con dettaglio il metodo di Newton–Raphson per la risoluzione iterativa di problemi non lineari. Tale schema richiede la determinazione della matrice di rigidezza tangente consistente, il cui calcolo, a causa della non-linearità del legame costitutivo non è possibile in forma chiusa, ma è condotto tramite il processo di linearizzazione dell'algoritmo di punto di Gauss sviluppato per integrare l'equazione incrementale espressa dalla eq. 9.2 per i modelli elastoplastici e dalla eq. 9.9 per i modelli ipoplastici.

Sia $\Delta\epsilon_{n+1}$ l'incremento di deformazione *finito* dall'iterazione globale (k) durante lo step temporale $[t_n, t_{n+1}]$.

L'idea alla base del concetto di linearizzazione dell'algoritmo è determinare come varia σ_{n+1} al variare di $\Delta\epsilon_{n+1}$ prescritto. Infatti l'espressione della matrice di rigidità tangente consistente è la seguente:

$$\tilde{\mathbf{D}}_{n+1}^{(k)} = \left(\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1}} \right)_{n+1}^{(k)} \quad (9.24)$$

Si osservi come $\tilde{\mathbf{D}}_{n+1}^{(k)} \neq \mathbf{D}$ e la differenza si riduce al diminuire della dimensione dello step temporale. Quando si utilizza \mathbf{D} al posto di $\tilde{\mathbf{D}}_{n+1}^{(k)}$ la convergenza dell'algoritmo di Newton è fortemente deteriorata.

A causa della non linearità del legame costitutivo, il calcolo di $\tilde{\mathbf{D}}_{n+1}^{(k)}$ è stato condotto per via numerica, sfruttando il concetto di derivata direzionale di Frechet.

Detto $\boldsymbol{\eta}$ un tensore unitario nello spazio delle deformazioni ϵ_{n+1} , si vuole valutare la variazione di σ_{n+1} nella direzione $\boldsymbol{\eta}$ per una perturbazione infinitesima θ del modulo di ϵ_{n+1} in tale direzione.

Dalla definizione di derivata direzionale di Frechet, la derivata di σ_{n+1} rispetto ad ϵ nella direzione $\boldsymbol{\eta}$ è data da:

$$\mathbf{D}\sigma_{n+1}[\boldsymbol{\eta}] = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\theta} [\sigma_{n+1}(\epsilon_{n+1} + \theta\boldsymbol{\eta}) - \sigma_{n+1}(\epsilon_{n+1})] \right\} \quad (9.25)$$

Le componenti di $\tilde{\mathbf{D}}$ sono valutate tramite le derivate di Frechet attraverso una scelta opportuna di $\boldsymbol{\eta}$. In particolare si considerino i seguenti 6 casi:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_1 = \{1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \quad (9.26)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_2 = \{0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \quad (9.27)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_3 = \{0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \quad (9.28)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_4 = \{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\}^T \quad (9.29)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_5 = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0\}^T \quad (9.30)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_6 = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}^T \quad (9.31)$$

prendendo in esame, ad esempio, il caso fornito dalla eq. 9.26, la eq. 9.25 fornisce la derivata di σ_{n+1} rispetto ad ϵ_{n+1} nella direzione \mathbf{e}_1 e rappresenta dunque il primo vettore colonna di $\tilde{\mathbf{D}}$, che si indica con la notazione:

$$\tilde{\mathbf{D}}_1 = \mathbf{D}\sigma_{n+1}[\mathbf{e}_1] \quad (9.32)$$

La matrice $\tilde{\mathbf{D}}$, può essere determinata a partire dai sei vettori colonna:

$$\tilde{\mathbf{D}}_\alpha = \mathbf{D}\sigma_{n+1}[\mathbf{e}_\alpha] = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\theta} [\sigma_{n+1}(\epsilon_{n+1} + \theta\mathbf{e}_\alpha) - \sigma_{n+1}(\epsilon_{n+1})] \right\} \quad (9.33)$$

Se si sceglie θ molto piccolo, il limite tende a coincidere con il rapporto incrementale, dove $\sigma_{n+1}(\epsilon_{n+1} + \theta\mathbf{e}_\alpha)$ è ottenuto per integrazione numerica a partire dalla deformazione perturbata $\epsilon_{n+1} + \theta\mathbf{e}_\alpha$.

Ripetendo tale operazione per tutte le direzioni dello spazio delle tensioni si ottiene l'intera matrice di rigidità consistente. L'algoritmo viene quindi utilizzato sia per stimare la soluzione corretta $\sigma_{n+1}(\epsilon_{n+1})$, che per ogni soluzione perturbata $\sigma_{n+1}(\epsilon_{n+1} + \theta e_\alpha)$ nella direzione e_α , vale a dire sette volte ad ogni iterazione, nel caso più generale di stato di tensione tridimensionale.

9.3.1 Esempio per la valutazione della consistenza della linearizzazione

La procedura di linearizzazione numerica è stata valutata simulando una prova di compressione triassiale consolidata drenata (TX-CD) eseguita su un provino costituito da un unico elemento assial-simmetrico a 4 nodi, di dimensioni unitarie. Lo stato iniziale assunto è isotropo e normalmente consolidato, con pressione media $\sigma = 100$ kPa, $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = -5.77 \cdot 10^{-5}$ ed indice dei vuoti $e = 0.77$. I parametri utilizzati per l'analisi sono riportati in Tab. 9.2.

Tabella 9.2. Parametri del modello HP-MA utilizzati nella simulazione numerica della prova TX-CD.

ϕ (deg)	λ^* (-)	κ^* (-)	N^* (kPa)	r (-)	m_r (-)	m_t (-)	R (-)	β_r (-)	ξ (-)
27.0	0.043	0.013	0.774	0.45	3.9	3.9	1.0e-4	0.2	6.0

Nella fase iniziale delle simulazioni tutti i nodi dell'elemento sono stati bloccati in ogni direzione (Fig. 9.1a), ed è stato imposto lo stato tensionale iniziale.

Nel passo successivo sono stati sbloccati i nodi 3 e 2 nella direzione orizzontale e contemporaneamente è stata applicata sul contorno 2-3 una pressione orizzontale $p = 100$ kPa (Fig. 9.1b). Nell'ultimo passo si è assegnato ai nodi 4 e 3 uno spostamento verticale $u_2 = 0.05$ m (Fig. 9.1c), corrispondente ad una deformazione assiale imposta del 5%.

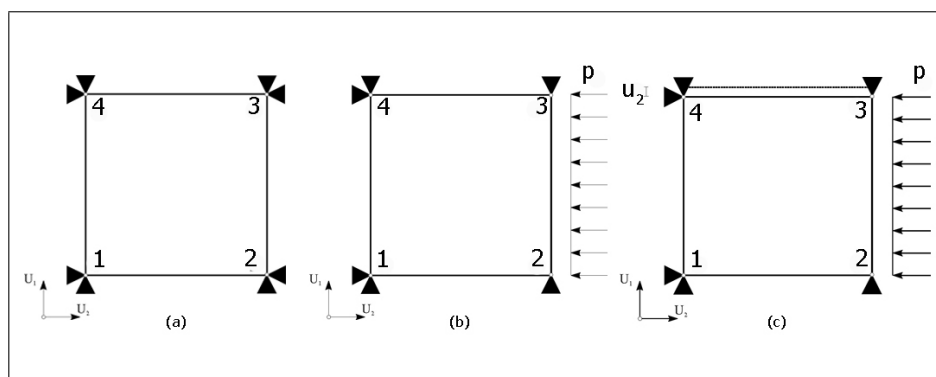


Figura 9.1. Prova TX-CD: (a) condizioni iniziali; (b) applicazione pressione; (c) applicazione spostamento in testa

L'abbassamento u_2 è stato imposto in una serie di passi temporali successivi, a ciascuno dei quali è assegnata la stessa deformazione verticale, che nel caso di n passi è pari a $\epsilon_2^n = \frac{5}{n}\%$.

In una prima fase, al fine di valutare l'influenza del numero dei passi sulla soluzione, sono state svolte diverse simulazioni, riportate in Tab. 9.3, nelle quali lo stesso abbassamento è stato imposto in un numero variabile di passi.

Tabella 9.3. Numero di steps di carico nelle diverse simulazioni.

TEST	A	B	C	D
N. PASSI	10	20	50	1000

Nella Fig. 9.2 sono riportate le curve $\epsilon_v : \epsilon_s$ e $q : \epsilon_s$ relative alle quattro simulazioni.

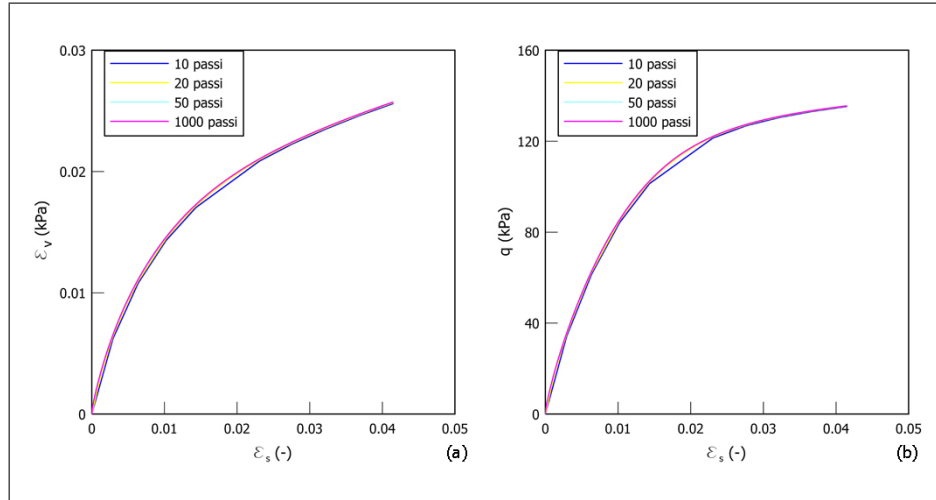


Figura 9.2. Andamento delle curve: (a) $\epsilon_v : \epsilon_s$; (b) $q : \epsilon_s$ nelle quattro prove.

Le curve riproducono il comportamento tipico di un terreno normalmente consolidato sottoposto ad un percorso di carico TX-CD.

Si noti che tutte le curve relative alle quattro simulazioni sono praticamente coincidenti, a testimonianza dell'elevata accuratezza dell'algorithmo anche per ampiezze elevate del passo di carico.

La efficacia della procedura di linearizzazione numerica è stata valutata calcolando la velocità di convergenza dell'algorithmo di integrazione ad un fissato passo temporale. Ricordando la definizione di residuo 8.58 la convergenza della procedura iterativa per la soluzione del problema discreto di equilibrio risulta quadratica se:

$$\|\mathbf{R}^{(k+1)}\| = c \|\mathbf{R}^{(k)}\|^2 \quad (9.34)$$

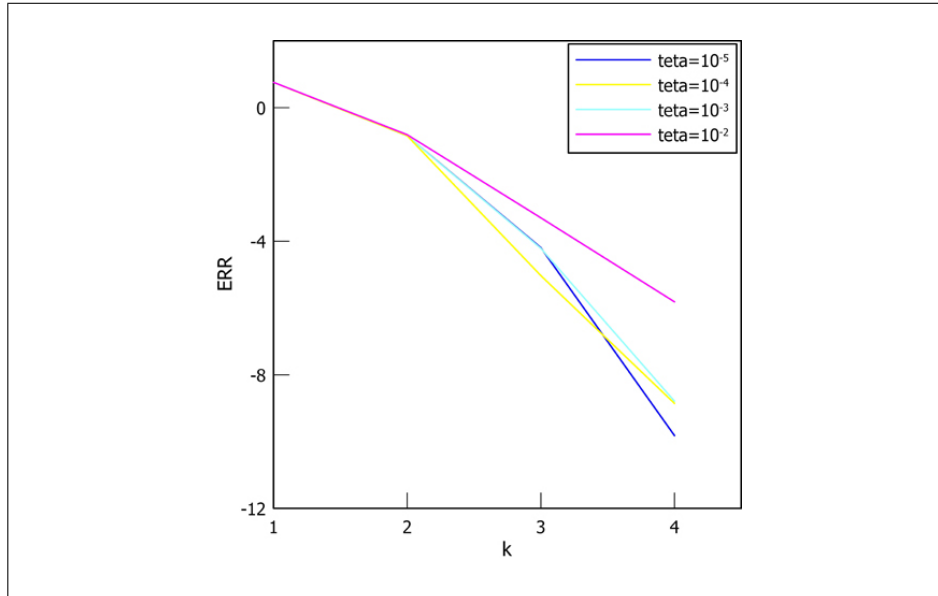


Figura 9.3. Andamento del logaritmo della norma del residuo al variare del numero di iterazioni nei quattro casi a diverso valore del parametro di perturbazione θ .

al variare dell'indice di iterazione k , con c pari ad una costante.

Ciò è facile da valutare in un grafico avente in ascisse il numero di iterazioni k all'interno di uno step, ed in ordinate il logaritmo della norma di $\mathbf{R}^{(k)}$, poiché dalla eq. 9.34 posto $k = 0$ si ottiene:

$$\|\mathbf{R}^{(1)}\| = c \|\mathbf{R}^{(0)}\|^2 \tag{9.35}$$

quindi al generico passo si ha:

$$\|\mathbf{R}^{(k)}\| = c \|\mathbf{R}^{(0)}\|^{2k} \tag{9.36}$$

Passando in scala logaritmica:

$$\log \|\mathbf{R}^{(k)}\| = 2k \log(c) + 2k \log \|\mathbf{R}^{(0)}\| \tag{9.37}$$

quindi se la convergenza della procedura iterativa è quadratica, dopo le prime iterazioni interpolando i punti sul grafico $k : \log \|\mathbf{R}\|$ si ottiene una retta con pendenza pari a 2.

Nel caso in esame si è centrata l'attenzione sul TEST C e si è valutato in corrispondenza del ventiseiesimo passo (al quale corrisponde una deformazione imposta pari al 2.5%) il numero delle iterazioni e il valore del residuo, identificato in Abaqus come "max residual force". L'operazione è stata svolta per vari valori del parametro di perturbazione θ definito nella eq. 9.33:

- $\theta = 10^{-5}$;

- $\theta = 10^{-4}$;
- $\theta = 10^{-3}$;
- $\theta = 10^{-2}$.

Lo scopo dell'analisi è quello di determinare il valore ottimale di θ , quello che cioè porta la convergenza dell'algoritmo ad essere di tipo quadratico, come teoricamente previsto da per il metodo di Newton-Raphson.

I risultati sono riportati in Tab. 9.4 e diagrammati nel grafico $k : \log \|\mathbf{R}\|$ di Fig. 9.3.

Si noti come in tutti i casi il decremento del residuo nell'iterazione è molto rapido, cosa che denota una convergenza veloce. Sono necessarie solo quattro iterazioni per ottenere il grado di accuratezza imposto; è importante sottolineare che il livello di tolleranza imposto è dell'ordine di 10^{-8} , cioè è richiesto un alto grado di accuratezza. Dalla figura è chiaro inoltre come il valore ottimale del parametro di perturbazione sia $\theta = 10^{-5}$.

Risulta importante sottolineare che la convergenza quadratica gioca un ruolo fondamentale nelle analisi di grandi dimensioni. Infatti i tempi di calcolo richiesti per portare a termine una singola analisi dipendono linearmente dal numero totale di iterazioni richieste per ottenere la convergenza nei vari passi di carico.

Dalla velocità di convergenza dell'algoritmo iterativo globale dipende dunque in maniera cruciale l'efficienza della procedura di calcolo.

Tabella 9.4. Valori della norma del residuo al variare del numero di iterazioni nei quattro casi a diverso valore del parametro di perturbazione θ .

k	$\ \mathbf{R}\ $ per $\theta = 10^{-2}$	k	$\ \mathbf{R}\ $ per $\theta = 10^{-3}$	k	$\ \mathbf{R}\ $ per $\theta = 10^{-4}$	k	$\ \mathbf{R}\ $ per $\theta = 10^{-5}$
1	5.72317	1	5.72248	1	5.72241	1	5.72241
2	0.15540	2	0.14491	2	0.14386	2	0.14375
3	$5.03714 \cdot 10^{-4}$	3	$9.38576 \cdot 10^{-6}$	3	$6.11183 \cdot 10^{-5}$	3	$6.40674 \cdot 10^{-5}$
4	$1.55357 \cdot 10^{-6}$	4	$1.39696 \cdot 10^{-9}$	4	$1.62984 \cdot 10^{-9}$	4	$1.52824 \cdot 10^{-10}$

9.4 Accuratezza ed efficienza dell'algoritmo proposto

In tale paragrafo si riportano i risultati numerici relativi ad un esteso programma di simulazioni numeriche al fine di valutare le prestazioni dell'algoritmo proposto.

Tali simulazioni sono state eseguite assumendo per il modello ipoplastico per le argille di Mašín (2005) il set di parametri riportato in Tab. 9.5.

Tabella 9.5. Parametri del materiale adottati nella simulazione numerica.

ϕ	λ^*	κ^*	N^*	r	m_r	m_t	R	β_r	ξ
(deg)	(-)	(-)	(kPa)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)
22.56	0.080	0.013	1.23	0.8	4.5	4.5	2.0e-4	0.2	6.0

Il significato di ciascun parametro è dettagliatamente descritto nel Par. 4.4.

Il programma numerico è tale da poter determinare gli effetti, in termini sia di accuratezza che di efficienza, delle seguenti variabili: stato iniziale, direzione dell'incremento di deformazione e della tolleranza imposta.

A tal fine sono stati considerati i due seguenti stati iniziali:

- Stato (A): normalmente consolidato in condizioni edometriche, con $p = 259.7$ kPa, $q = 104.42$ kPa ($\sigma_{11} = 329.32$ kPa, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 224.9$ kPa) e $\delta_{11} = 2.0e - 4$, $\delta_{22} = \delta_{33} = 0$, $e = 1.17$.
- Stato (C): sovraconsolidato in condizioni edometriche, con $p = 259.7$ kPa, $q = 12.6$ kPa ($\sigma_{11} = 268.4$ kPa, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 255.8$ kPa) e $\delta_{11} = -2.0e - 4$, $\delta_{22} = \delta_{33} = 0$, $e = 1.07$.

La prima condizione corrisponde ad un valore di $K_0 = \sigma_{33}/\sigma_{11} = 0.68$, che è il valore asintotico ottenuto in una prova di compressione edometrica a partire da uno stato caratterizzato da un basso stato tensionale, con il set di parametri adottato (Fig. 9.4). La seconda condizione è stata ottenuta in maniera analoga a partire dallo stesso stato iniziale imponendo un carico in condizioni edometriche fino a un valore di $p = 500.0$ kPa quindi scaricando fino allo stato (C).

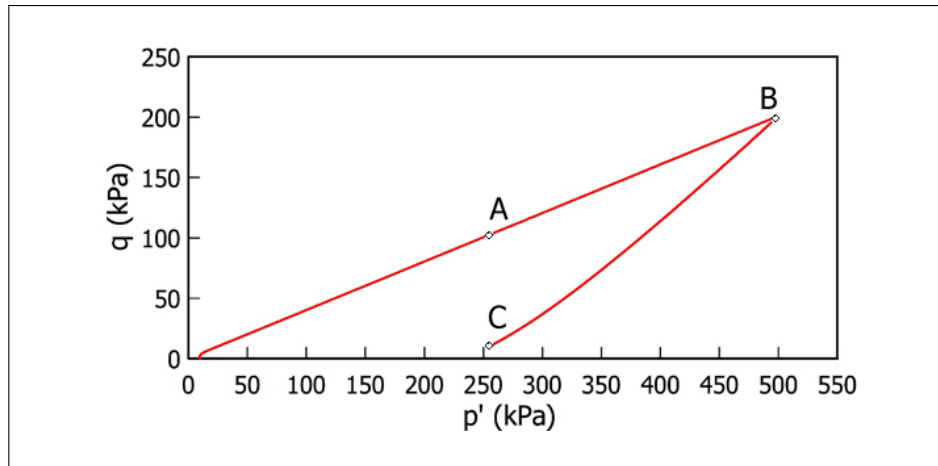


Figura 9.4. Determinazione delle condizioni iniziali.

Al fine di valutare l'effetto della direzione dell'incremento di deformazione e della tolleranza sono stati considerati vari percorsi di carico in condizioni di assial-simmetria in un singolo passo, caratterizzati da un modulo $\rho = \|\Delta\epsilon\|$ variabile nell'intervallo $[1.0e - 5; 1.0e - 3]$ e da una direzione α variabile nell'intervallo $[0; 2\pi]$ (Fig. 9.5). Nel Par. 9.4.1 sono state adottate varie rappresentazioni grafiche per spiegare i risultati ottenuti in termini di accuratezza ed efficienza.

9.4.1 Mappe di isoerrore e di isoefficienza

Tutte le simulazioni sono caratterizzate da un singolo step, in modo che la dimensione di quest'ultimo è in ogni caso uguale al modulo dell'incremento di de-

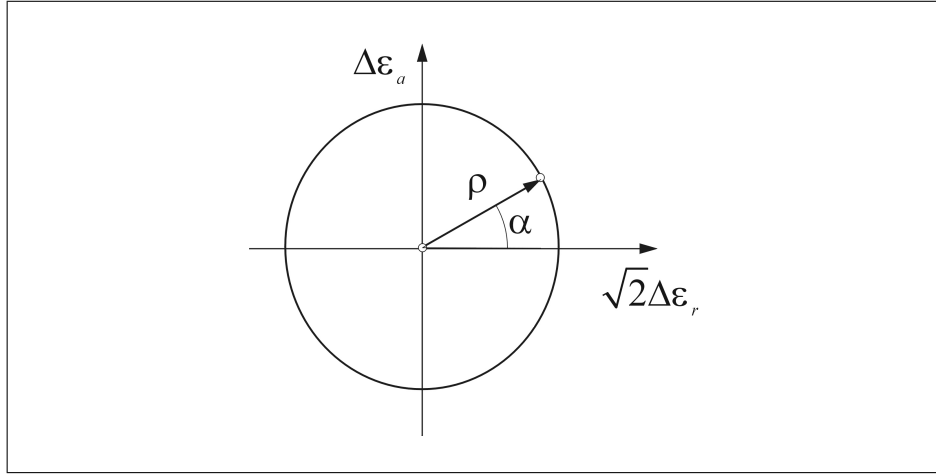


Figura 9.5. Percorsi di carico in condizioni di assialsimmetria.

formazione. Ad ogni percorso di deformazione – caratterizzato dalle due quantità (ρ, α) – l'accuratezza della soluzione numerica è stata stimata sulla base della seguente misura relativa dell'errore di integrazione:

$$\text{ERR} = \text{ERR}_\sigma + \text{ERR}_\delta + \text{ERR}_e \quad (9.38)$$

in cui si considerano i contributi delle variabili che definiscono lo stato del materiale: tensione, “intergranular strain” e indice dei vuoti, rispettivamente definiti come:

$$\text{ERR}_\sigma := \frac{\|\sigma - \sigma^*\|}{\|\sigma^*\|} \quad (9.39)$$

$$\text{ERR}_\delta := \frac{\|\delta - \delta^*\|}{\|\delta^*\|} \quad (9.40)$$

$$\text{ERR}_e := \frac{|e - e^*|}{e^*} \quad (9.41)$$

dove σ , δ e e sono rispettivamente la tensione, l'intergranular strain e l'indice dei vuoti ottenuti numericamente e σ^* , δ^* e e^* rappresentano le rispettive soluzioni “esatte”, determinate numericamente con l'algoritmo RKF23 per una tolleranza $TOL = 1.0e - 8$.

Tale valutazione dell'errore è stata eseguita per quattro valori della tolleranza sull'errore 10^{-4} , 10^{-3} , 10^{-2} , 10^{-1} .

In Fig. 9.6–9.7 ed in Fig. 9.8–9.9 sono riportati i contour di $\log(\text{ERR})$ nel piano $\rho : \alpha$, le cosiddette *mappe di isoerrore*, ottenute rispettivamente per lo stato A e per lo stato (C) per i valori di TOL considerati.

Come ci si doveva aspettare all'aumentare della TOL l'accuratezza della soluzione diminuisce. Si deve osservare che nell'algoritmo RKF23 di tipo esplicito adattativo l'accuratezza della soluzione numerica è direttamente controllata dall'utente tramite il parametro TOL . Ad un valore di TOL molto basso può

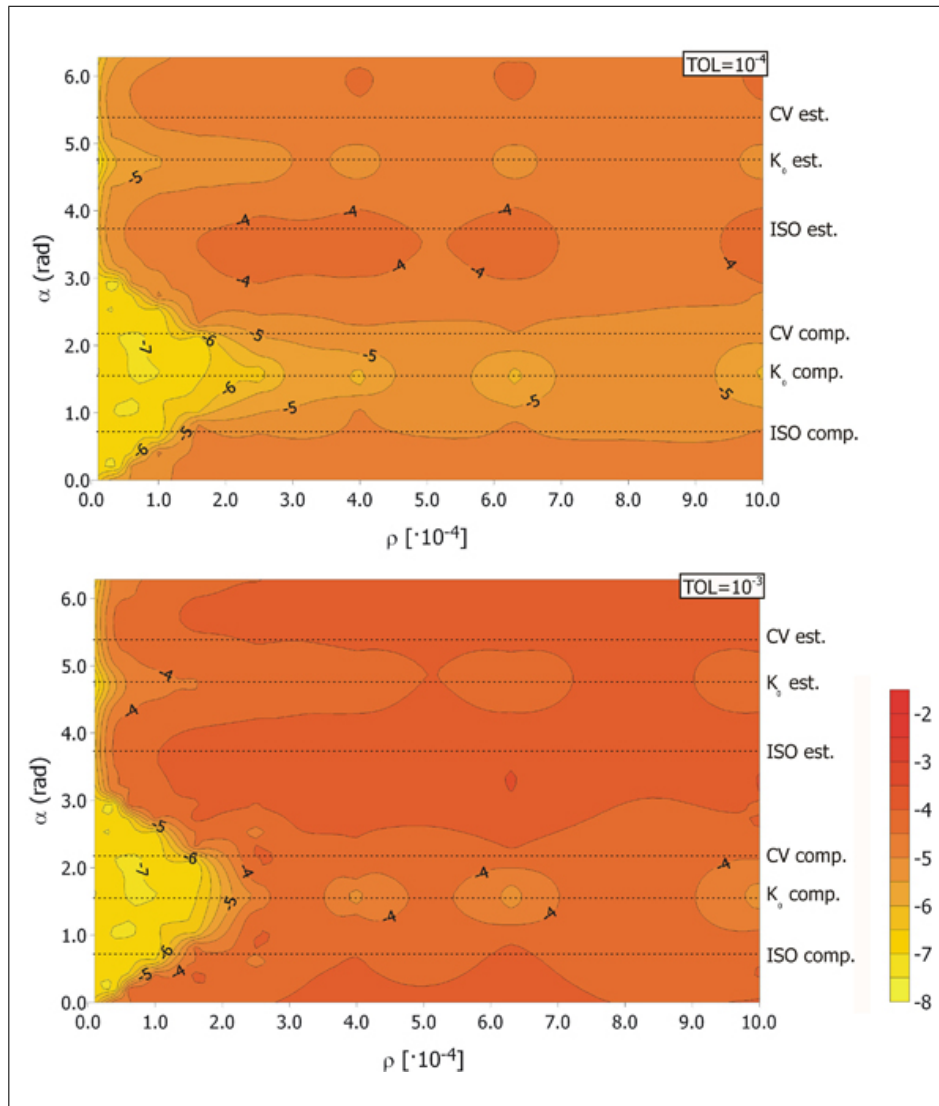


Figura 9.6. Mappe di isoerrore di $\log(ERR)$, per lo Stato (A) per $TOL = 10^{-4}$ e $TOL = 10^{-3}$.

corrispondere un numero di substep molto elevato, a scapito della efficienza della procedura (elevati tempi di calcolo). La scelta ottimale per TOL si ottiene come miglior compromesso tra le esigenze contrastanti di elevata accuratezza ed elevata efficienza.

Nel presente studio l'efficienza della soluzione numerica è stata determinata come numero totale, NFEV, di valutazioni della funzione \mathbf{F} a secondo membro della ODE fondamentale (eq. 9.1). Infatti il numero dei substep richiesti per un dato incremento di deformazione cresce al diminuire della TOL .

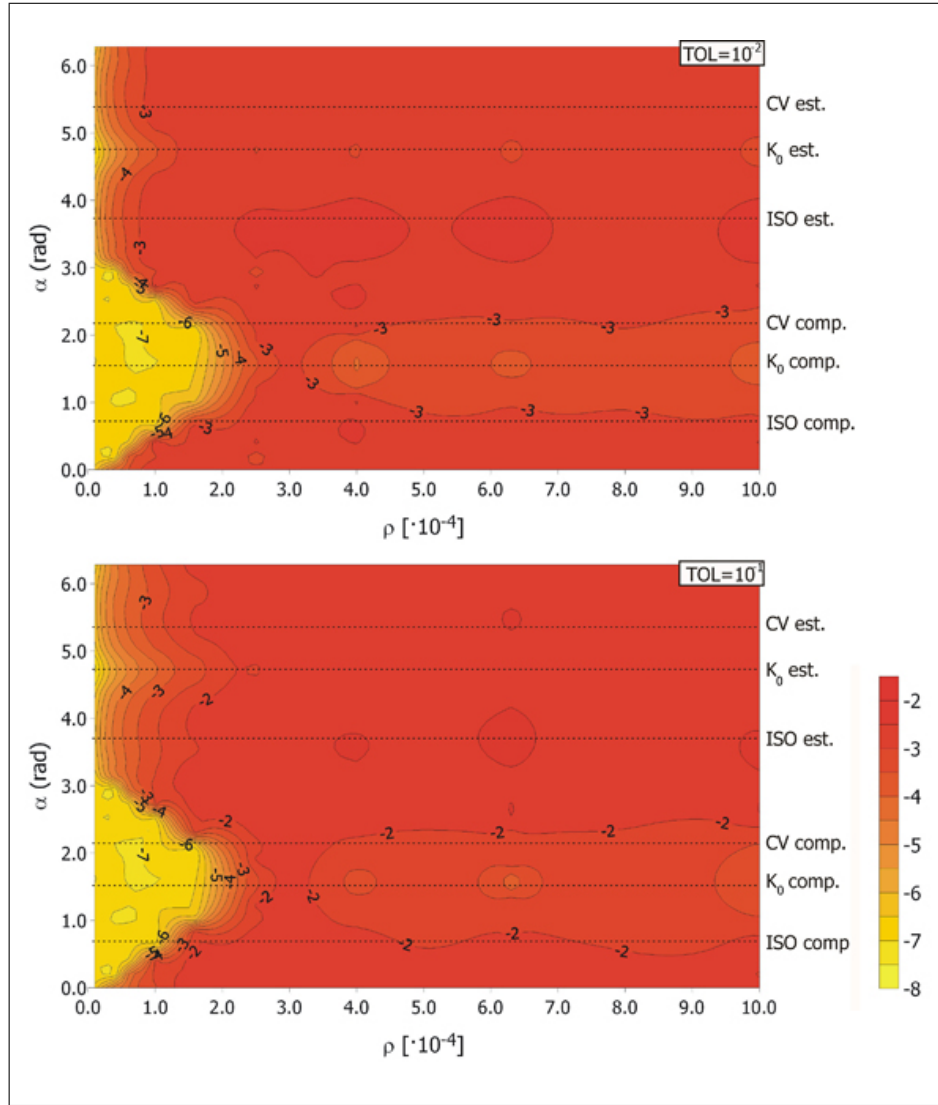


Figura 9.7. Mappe di isoerrore di $\log(\text{ERR})$, per lo Stato (A) per $TOL = 10^{-2}$ e $TOL = 10^{-1}$.

Inoltre imponendo un valore troppo basso di TOL si potrebbe verificare un aumento dei substep rigettati dopo la condizione di check.

Risulta importante notare che NFEV ha il vantaggio di essere non dipendente dalla macchina.

In Fig. 9.10–9.11 ed in Fig. 9.12–9.13 sono riportati i contour di NFEV nel piano $\rho : \alpha$, le cosiddette *mappe di isoefficienza*, ottenute rispettivamente per lo stato (A) e per lo stato (C) per i valori di considerati di TOL .

In tali grafici in ascissa è riportata la dimensione del passo, ρ , e in ordinata la direzione del passo, α . In generale come ci si doveva aspettare all'aumentare di

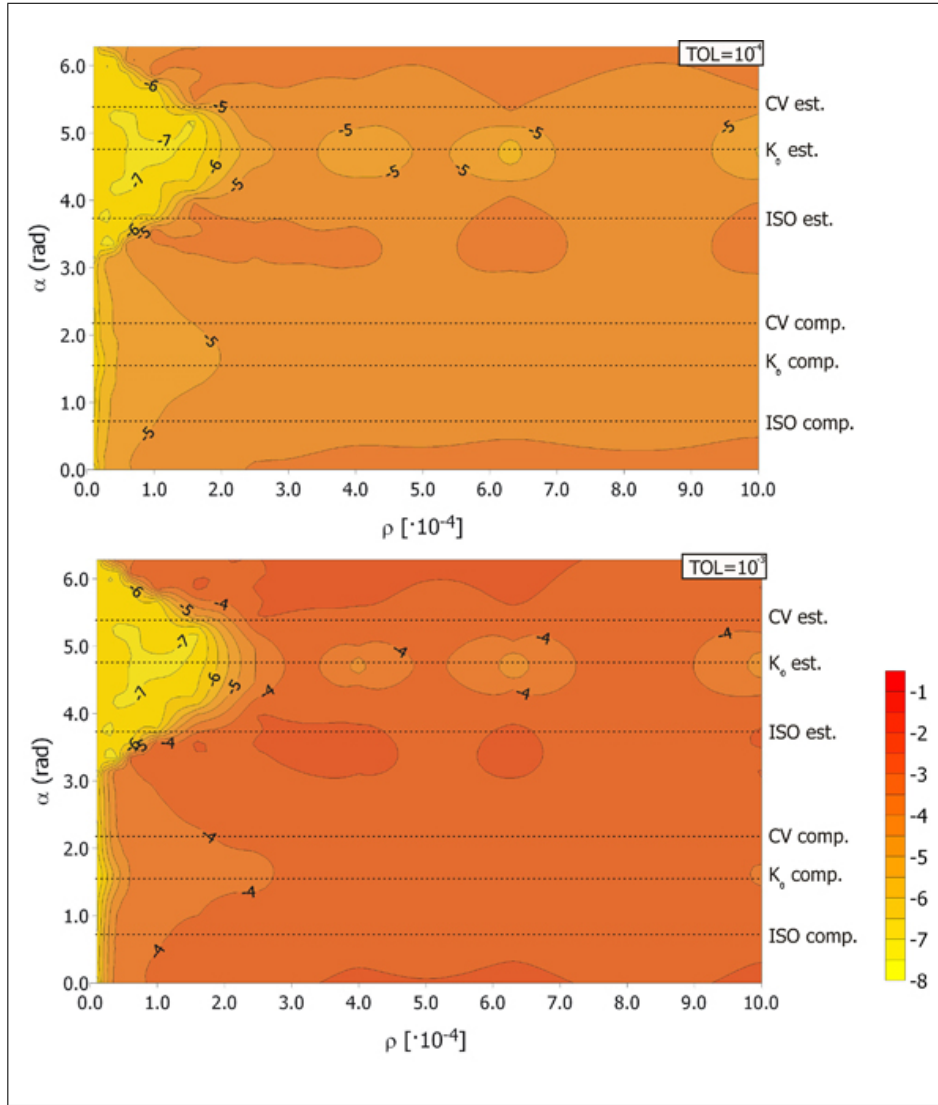


Figura 9.8. Mappe di isoerrore di $\log(\text{ERR})$, per lo Stato (C) per $TOL = 10^{-4}$ e $TOL = 10^{-3}$.

TOL l'algoritmo è meno accurato e più efficiente.

Inoltre a parità di TOL l'errore tende ad aumentare al crescere di ρ , poiché più il passo è grande più l'algoritmo funziona male.

Risulta più interessante mettere in evidenza l'effetto della direzione: ci sono delle direzioni rispetto allo stato iniziale in cui l'algoritmo funziona meglio, e direzioni in cui l'algoritmo fa più fatica. Le direzioni in cui è più accurato sono quelli in cui c'è la continuazione di carico rispetto alla direzione della storia di carico precedente, infatti: per lo stato (A) la direzione meno efficiente è il carico in condizioni K_0 e per lo stato (C) lo scarico in condizioni K_0 .