

Elisabetta Sellari

Modellazione matematica e
numerica del comportamento
dinamico dei terreni argillosi con
riferimento alla risposta sismica
delle dighe in terra

19 aprile 2007

Dottorato di Ricerca in Ingegneria Geotecnica
Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica

Relatore:
Prof. Claudio Tamagnini

Correlatori:
Prof. Sebastiano Rampello
Prof. Alberto Burghignoli

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Via Monte d'Oro 28, 00186 Roma
Italia

a Michele

Indice

1	Introduzione	1
----------	---------------------------	----------

Parte I Modellazione a livello di elemento di volume

2	Aspetti fondamentali del comportamento ciclico/dinamico... ...	7
2.1	Introduzione	7
2.2	Tecniche sperimentali per la determinazione del comportamento ciclico/dinamico... ..	8
2.3	Sintesi delle osservazioni sperimentali sui terreni a grana fine	15
3	La modellazione del comportamento ciclico/dinamico dei terreni a grana fine	27
3.1	Introduzione	27
3.2	Teoria della plasticità classica	28
3.3	Teoria della plasticità con incrudimento cinematico	30
3.4	Teoria della plasticità con Bounding Surface	32
3.5	Teoria della ipoplasticità con variabili interne	33
4	I modelli costitutivi presi in esame	39
4.1	Introduzione	39
4.2	Il modello di Rouainia & Wood (2000): EP–RW	40
4.2.1	Superficie di riferimento, superficie di snervamento e superficie di struttura	41
4.2.2	Legge di flusso	43
4.2.3	Leggi di incrudimento	43
4.3	Il modello di Tamagnini & D’Elia (1999): BS–TD	48
4.3.1	Bounding Surface e centro di proiezione	49
4.3.2	Legge di flusso	50
4.3.3	Leggi di incrudimento	51
4.4	Il modello di Mašín (2005): HP–MA	52
4.4.1	Operatore lineare	52
4.4.2	Tensore del secondo ordine	53
4.4.3	Legge di flusso ipoplastica	53

VI Indice

4.4.4	Coefficiente di barotropia	54
4.4.5	Coefficiente di picnotropia	55
4.4.6	Estensione alle condizioni cicliche.....	56
5	Integrazione numerica delle equazioni costitutive...	61
5.1	Introduzione	61
5.2	Percorsi di sollecitazione generalizzati e condizioni di vincolo in forma incrementale	62
5.3	L'algoritmo di Bardet & Choucair (1991)	63
5.3.1	L'algoritmo di Bardet & Choucair (1991) per modelli elastoplastici	63
5.3.2	L'algoritmo di Bardet & Choucair (1991) per modelli ipoplastici	64
5.4	Integrazione esplicita a controllo dell'errore	65
6	Valutazione della risposta dei modelli a livello di elemento di volume	69
6.1	Introduzione	69
6.2	Base di dati sperimentali	70
6.3	Calibrazione del modello BS-TD	73
6.4	Calibrazione del modello HP-MA	77
6.5	Calibrazione del modello EP-RW	79
6.6	Comportamento previsto in condizioni di carico monotono	80
6.7	Comportamento previsto in condizioni di carico ciclico	81

Parte II Modellazione di problemi al finito

7	Equazioni governanti per i processi accoppiati in campo dinamico	101
7.1	Introduzione	101
7.2	Ipotesi fondamentali: la teoria delle miscele	104
7.3	Conservazione della massa dei singoli costituenti.....	105
7.4	Conservazione della massa della miscela	107
7.5	Conservazione della quantità di moto dei singoli costituenti	107
7.6	Conservazione della quantità di moto della miscela.....	108
7.7	Equazioni costitutive.....	109
7.7.1	Equazioni costitutive per lo scheletro solido.....	109
7.7.2	Equazioni costitutive per la fase liquida	111
7.7.3	Equazioni costitutive per la fase gassosa	111
7.8	Formulazione generale: riepilogo delle equazioni governanti.....	112
7.9	Formulazioni approssimate.....	113
7.9.1	Processi estremamente lenti (ESP)	113
7.9.2	Processi lenti (SSP)	114
7.9.3	Processi di media velocità (MSP).....	114
7.9.4	Processi rapidi (HSP).....	115
7.9.5	Processi estremamente rapidi: condizioni non drenate (UP) .	115

7.9.6	Campo di applicabilità delle diverse approssimazioni	116
8	Implementazione numerica agli elementi finiti delle equazioni dinamiche	123
8.1	Introduzione	123
8.2	Discretizzazione nello spazio	124
8.2.1	Formulazione per processi (MSP)	124
8.2.2	Formulazione non drenata (UP)	127
8.3	La matrice di smorzamento	128
8.4	Discretizzazione nel tempo	129
8.4.1	Formulazione per processi (MSP)	130
8.4.2	Formulazione non drenata (UP)	131
8.5	Soluzione iterativa dei problemi non-lineari	132
9	Implementazione numerica di equazioni costitutive in codici agli elementi finiti	135
9.1	Il ruolo degli algoritmi di punto di Gauss nella formulazione del metodo degli elementi finiti in campo non lineare	135
9.2	L'algoritmo RKF-23 a passo adattativo con controllo dell'errore	137
9.3	Linearizzazione consistente mediante derivazione numerica	141
9.3.1	Esempio per la valutazione della consistenza della linearizzazione	143
9.4	Accuratezza ed efficienza dell'algoritmo proposto	146
9.4.1	Mappe di isoerrore e di isoefficienza	147
9.5	Validazione della subroutine di interfaccia: test numerici su un singolo elemento	153
<hr/>		
Parte III Applicazione ad un caso reale: la risposta sismica di una diga in terra		
<hr/>		
10	Il problema in esame: la diga Marana Capacciotti	163
10.1	Introduzione	163
10.2	Descrizione dell'opera	163
10.3	Definizione dell'input sismico	165
10.4	Calibrazione dei modelli adottati per il corpo diga	169
10.4.1	Calibrazione del modello HP-MA	170
10.4.2	Calibrazione del modello BS-TD	173
11	Modellazione FEM della diga Marana Capacciotti	187
11.1	Introduzione	187
11.2	Il modello FEM impiegato nelle analisi	188
11.2.1	Geometria del problema	188
11.2.2	Caratteristiche dei terreni	188
11.2.3	Modello agli elementi finiti	192
11.2.4	Contorni assorbenti	194
11.2.5	Baseline correction	197
11.2.6	Fasi della simulazione	199

11.3 Programma delle simulazioni	201
12 Simulazioni FEM delle fasi di costruzione	203
12.1 Introduzione	203
12.2 Risultati	203
13 Risultati delle simulazioni numeriche dinamiche	221
13.1 Introduzione	221
13.2 Effetto del modello costitutivo: approccio UP	222
13.2.1 Risultati del confronto tra analisi #1, analisi #7 ed analisi #13	223
13.2.2 Risultati del confronto tra analisi #2, analisi #8 ed analisi #14	231
13.3 Effetto della formulazione FEM: modello HP-MA	233
13.3.1 Risultati del confronto tra analisi #1 ed analisi #19	233
13.3.2 Risultati del confronto tra analisi #2 ed analisi #20	239
13.4 Effetto della parziale saturazione	241
13.4.1 Risultati relativi al sisma #1	242
13.4.2 Risultati relativi al sisma #2	255
13.5 Conclusioni	255

Parte IV

14 Conclusioni	283
A Notazioni	287
B Definizioni delle condizioni di vincolo e di carico... ..	289
B.1 Compressione isotropa	290
B.2 Compressione edometrica	290
B.3 Prova triassiale consolidata drenata	290
B.4 Prova triassiale consolidata non drenata	291
B.5 Prova a $p=\text{const}$	291
Riferimenti bibliografici	293

Introduzione

La descrizione del comportamento meccanico dei terreni in generale, e dei terreni a grana fine in particolare, per condizioni di carico monotono rappresenta un problema non semplice e le numerose ricerche svolte in tale campo non hanno ancora definito un modello costitutivo che sia universalmente accettato. Peraltro allo stato attuale sono disponibili modelli ragionevolmente accurati che consentono di prevedere le condizioni di collasso delle strutture geotecniche più comuni e di valutare, almeno in prima approssimazione, l'entità delle deformazioni irreversibili indotte nel terreno da carichi di esercizio.

La situazione diventa più complessa nello studio della risposta meccanica dei terreni sottoposti alle sollecitazioni prodotte da un evento sismico e nell'analisi qualitativa e quantitativa dei processi di interazione tra terreno, struttura di fondazione e sovrastruttura in condizioni dinamiche. In tali condizioni di sollecitazione è necessario mettere a punto opportuni modelli matematici, che oltre a tenere conto delle caratteristiche di non linearità, irreversibilità, non linearità incrementale e dipendenza dalla storia tensionale proprie del terreno, riescano a riprodurre un comportamento di tipo isteretico.

In tale tesi si analizzano in dettaglio modelli costitutivi ciclici sia a livello di elemento di volume che a livello di modellazione al finito al fine di stabilire benefici e limiti del loro impiego.

D'altro canto si cerca di mettere in evidenza l'affidabilità dell'approccio non drenato (UP) nel caso di materiale a grana fine in presenza di sisma, confrontando i risultati di tale formulazione con i risultati forniti dalla consolidazione dinamica accoppiata, sicuramente più rigorosa da un punto di vista teorico ma anche più costosa da un punto di vista computazionale.

In sintesi, scopo principale di tale lavoro è quello di scegliere le strategie computazionali ed i modelli costitutivi in grado di descrivere il comportamento dei terreni a grana fine in presenza di sisma con riferimento alla risposta sismica delle dighe in terra.

La tesi è strutturata in tre parti principali:

1. *Modellazione a livello di elemento di volume.* Il problema della modellazione del comportamento ciclico dei terreni a grana fine è affrontato sia da un punto di vista generale, considerando le evidenze sperimentali attualmente disponibili (Cap. 2), sia da un punto di vista teorico, andando ad analizzare in maniera

critica i vari possibili approcci della modellazione ciclica del comportamento dei terreni, basati sia su generalizzazioni della teoria classica della elastoplasticità sia su approcci completamente indipendenti dalla teoria della plasticità che possono essere inquadrati nella teoria della ipoplasticità (Cap. 3).

Nel Cap. 4 sono illustrati con un certo dettaglio i modelli costitutivi selezionati per la descrizione del comportamento dei terreni in condizioni di carico ciclico/dinamico:

- Il modello di Rouainia & Wood (2000) (EP–RW), inquadrato nell’ambito della teoria della plasticità con incrudimento cinematico;
- Il modello di Tamagnini & D’Elia (1999) (BS–TD), inquadrato nell’ambito della teoria della plasticità con Bounding Surface;
- Il modello di Mašín (2005) (HP–MA), inquadrato nell’ambito della teoria della ipoplasticità con variabili interne.

Le potenzialità dei modelli sopracitati, a livello di elemento di volume, sono valutate confrontando i risultati di prove di laboratorio con le relative simulazioni effettuate utilizzando i modelli stessi. Ciò richiede in primo luogo la costituzione di una base di dati sperimentali che raccolga diversi programmi di prove di laboratorio in condizioni di carico monotono e ciclico; inoltre, dal momento che caratteristica comune di tali modelli è la loro formulazione incrementale, è necessario implementare driver costitutivi (Cap. 5) che permettano di integrare nel tempo le equazioni costitutive lungo un assegnato percorso di carico a partire da condizioni iniziali note. L’integrazione di tale sistema di equazioni non ammette soluzione in forma chiusa e necessita, quindi, di ricorrere a tecniche di integrazione di tipo numerico. Inoltre risulta necessaria una linearizzazione delle condizioni di vincolo e di carico delle prove, che in genere non rimangono costanti, ma possono variare durante l’esecuzione della prova. Si ottengono così curve tensioni–deformazioni che simulano i percorsi di carico delle prove di laboratorio, le quali nel Cap. 6 sono confrontate con la base di dati sperimentali.

2. *Modellazione di problemi al finito.* In tale parte si sono considerati i problemi di analisi della risposta sismica affrontando nel dettaglio come formulare le equazioni dinamiche del moto quando il volume di terreno preso in esame sia assunto a tutti gli effetti come un mezzo multifase, focalizzando l’attenzione su come l’interazione tra le fasi in campo dinamico influenzi le equazioni del moto e come queste possano essere risolte in maniera approssimata nell’ambito del metodo degli elementi finiti (Cap. 7).

A differenza dei problemi quasi–statici nel caso dinamico l’interazione tra le fasi complica in maniera significativa la formulazione generale delle equazioni del moto. Ciò porta all’adozione di approcci approssimati che per i problemi dinamici affrontati – caratterizzati da frequenze dominanti medio–basse – possono essere ritenuti largamente accettabili.

In tale fase si valutano la formulazione completa e le sue varie approssimazioni assieme alle linee guida per formulare il problema dinamico in forma discreta nel metodo agli elementi finiti (Cap. 8).

Nel Cap. 9 al fine di applicare a problemi pratici i modelli costitutivi BS–TD e HP–MA è descritto un algoritmo di punto di Gauss, *stress-point algorithm*, robusto ed accurato, sviluppato per l’implementazione di tali modelli nei codici

di calcolo agli elementi finiti Abaqus Standard v6.4 e GEHOMadrid, utilizzati in questo lavoro di tesi per le simulazioni numeriche.

3. *Applicazione ad un caso reale: la risposta sismica di una diga in terra.* L'ultima parte del lavoro di tesi si concentra sull'analisi di un problema particolare caratterizzato da una certa rilevanza pratica. Si è considerata l'analisi dinamica di una diga in terra, la Marana Capacciotti, di cui si hanno a disposizione alcuni risultati sperimentali, tra cui quelli relativi a prove di laboratorio su campioni indisturbati del corpo diga che ci hanno permesso di calibrare i materiali (Cap. 10).

Gli obiettivi principali della modellazione agli elementi finiti (FEM) della diga Marana Capacciotti sono la valutazione dell'influenza di:

- a) modello costitutivo a parità di formulazione FEM;
- b) formulazione FEM a parità di modello costitutivo,

in relazione all'analisi sismica della stessa diga. Nel Cap. 11 sono riportate le caratteristiche del modello FEM. Risulta importante sottolineare come lo scopo di tale lavoro non sia quello di eseguire un'analisi di classe A del comportamento reale della diga in presenza di sisma. Ciò rende possibile semplificare il modello eliminando aspetti della simulazione che avrebbero complicato il problema senza dare un significativo contributo all'analisi degli aspetti sui quali è focalizzata l'attenzione. Oggetto del Cap. 12 sono i risultati della simulazione statica della costruzione della diga. Nel successivo Cap. 13 sono confrontati i risultati delle simulazioni numeriche dinamiche.

Le conclusioni sono dedicate al riesame dei principali risultati, indicando possibili sviluppi futuri.

Modellazione a livello di elemento di volume

Aspetti fondamentali del comportamento ciclico/dinamico dei terreni a grana fine

2.1 Introduzione

La descrizione del comportamento meccanico dei terreni in generale, e dei terreni a grana fine in particolare, per condizioni di carico monotono rappresenta un problema non semplice e le numerose ricerche svolte in tale campo non hanno ancora definito un modello costitutivo che sia universalmente accettato. Peraltro allo stato attuale sono disponibili modelli ragionevolmente accurati che consentono di prevedere le condizioni di collasso delle strutture geotecniche più comuni e di valutare, almeno in prima approssimazione, l'entità delle deformazioni irreversibili indotte nel terreno da carichi di esercizio.

La situazione diventa più complessa nello studio della risposta meccanica dei terreni sottoposti alle sollecitazioni prodotte da un evento sismico e per l'analisi qualitativa e quantitativa dei processi di interazione tra terreno, struttura di fondazione e sovrastruttura in condizioni dinamiche. In tali condizioni di sollecitazione è necessario tenere presente che la messa a punto di opportuni modelli matematici per la descrizione del comportamento ciclico/dinamico dei terreni richiede la conoscenza, il più possibile approfondita, degli aspetti della risposta del materiale in tali condizioni di sollecitazione, sperimentalmente osservata in sito ed in laboratorio.

A tale riguardo, è opportuno osservare che la risposta meccanica del terreno presenta degli aspetti particolari che non sono normalmente osservabili nelle prove di laboratorio convenzionali, di tipo monotone, quali:

1. le deformazioni associate alle vibrazioni indotte dal sisma sono generalmente molto basse, molto inferiori al limite di risoluzione delle apparecchiature utilizzate per prove di routine convenzionali quali, ad esempio, le attrezzature per prove triassiali con trasduttori di spostamento esterni;
2. tali deformazioni a carattere prevalentemente distorsionale hanno una natura ciclica;
3. le velocità di deformazione e le accelerazioni sono rilevanti, e gli effetti di inerzia non sono pertanto trascurabili.

L'inadeguatezza delle tecniche sperimentali convenzionali, ha motivato la messa a punto, nel corso degli ultimi 30 anni, di apparecchiature e procedure di prova che

consentono di investigare in maniera più accurata la risposta dei terreni naturali a sollecitazioni di tipo ciclico/dinamico.

Tali procedure di prova possono essere suddivise in:

- prove in laboratorio;
- prove in sito.

In alcuni casi, le procedure sperimentali sono finalizzate esclusivamente alla determinazione della risposta del materiale per piccole deformazioni ($10^{-6} \div 10^{-4}$). In altri, la prova consente di investigare un campo di deformazione più ampio ($10^{-6} \div 0.1$) su percorsi di sollecitazione di varia natura. Alcune metodologie di prova sono state sviluppate specificamente per la determinazione e la valutazione del comportamento ciclico/dinamico dei terreni. Altre rappresentano delle versioni modificate di prove geotecniche convenzionali, comunemente usate per la determinazione e la valutazione del comportamento del terreno sottoposto a condizioni di carico monotono.

La messa a punto di procedure sperimentali finalizzate alla determinazione degli aspetti fondamentali del comportamento ciclico/dinamico dei terreni non può prescindere da una valutazione di massima – di tipo qualitativo – delle condizioni di sollecitazione che un tipico elemento di terreno subisce durante un evento sismico.

Ciò consente di individuare le classi di percorsi di sollecitazione che risultano maggiormente rilevanti ai fini applicativi e di progettare le apparecchiature e le metodologie di prova in modo tale da poter simulare – per quanto possibile – tali percorsi in laboratorio.

Nel Par. 2.2 è descritto lo stato tensionale in sito durante un evento sismico. Sono state inoltre prese in considerazione le principali tecniche sperimentali di laboratorio utilizzate per la caratterizzazione meccanica dei terreni naturali in condizioni cicliche/dinamiche in relazione alla loro capacità di riprodurre in laboratorio lo stato di sollecitazione a cui l'elemento di terreno è sottoposto in sito durante il sisma. Non si sono considerate le prove in sito poichè è dalle prove di laboratorio che si ottengono le informazioni necessarie alla formulazione di modelli costitutivi inelastici avanzati per le condizioni di carico ciclico. Infine nel Par. 2.3 sono sintetizzate le principali evidenze sperimentali disponibili circa il comportamento ciclico/dinamico dei terreni a grana fine.

2.2 Tecniche sperimentali per la determinazione del comportamento ciclico/dinamico in relazione allo stato tensionale in sito durante un evento sismico

Le tecniche sperimentali per la determinazione del comportamento ciclico/dinamico dei terreni sono classificabili sulla base del tipo di sollecitazione imposto in laboratorio e della natura statica o dinamica della sollecitazione ciclica applicata. In particolare fra le prove più frequentemente utilizzate si ricordano:

- Prove di tipo dinamico;
 1. prove di colonna risonante;
 2. prove con bender elements.

- Prove cicliche “quasi-statiche”;
 1. prove triassiali;
 2. prove di taglio semplice;
 3. prove torsionali.

Nelle prove del primo tipo si determinano le proprietà dei terreni per bassi livelli di deformazione e gli effetti di inerzia non sono trascurabili. L'interpretazione di tali prove richiede in generale l'assunzione di un modello di comportamento per il terreno (ad esempio il modello elastico lineare), e si basa sulla determinazione della velocità di propagazione delle onde all'interno del provino. Le frequenze in gioco sono comprese nell'intervallo $f = 10 \div 100$ Hz ($T = 0.1 \div 0.01$ s).

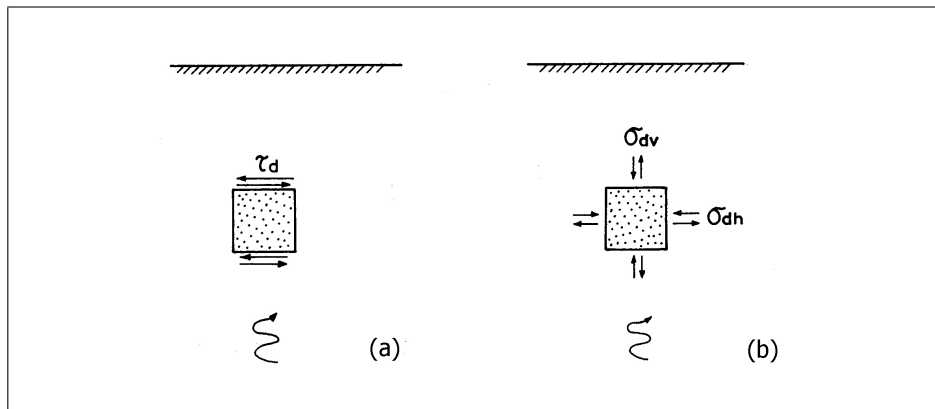


Figura 2.1. Stato tensionale indotto dalla propagazione delle onde di volume (Ishihara, 1996).

Nelle prove del secondo tipo si determinano le proprietà dei terreni per elevati livelli di deformazione. La sollecitazione ciclica è applicata in maniera quasi-statica con andamenti periodici regolari e con frequenze comprese nell'intervallo $f = 0.01 \div 1$ Hz all'interno del quale gli effetti di inerzia sono trascurabili. Tali prove consentono di determinare direttamente la relazione costitutiva tensioni-deformazioni sul percorso di carico imposto senza richiedere l'assunzione a priori di un modello di comportamento. L'ipotesi fondamentale che consente di utilizzare i risultati di tali prove per la descrizione del comportamento dinamico dei terreni è l'assenza di effetti di viscosità propria dello scheletro solido. Solo in questo caso, infatti, la risposta osservata è indipendente dalla velocità di deformazione imposta.

Di seguito si descrivono i percorsi di sollecitazione in sito indotti da un evento sismico al fine di esaminare in maniera critica le tecniche sperimentali in relazione alla loro capacità di poterli riprodurre.

Durante un evento sismico la maggior parte dei movimenti è indotto dalle onde di volume che si propagano dal bedrock verso il piano campagna. Sebbene si propagano anche onde di superficie, i loro effetti sono generalmente considerati di secondaria importanza.

Le onde di volume sono costituite da onde di compressione (onde P) e da onde di taglio (onde S). Nel caso di piano campagna orizzontale, ciascuna di tali

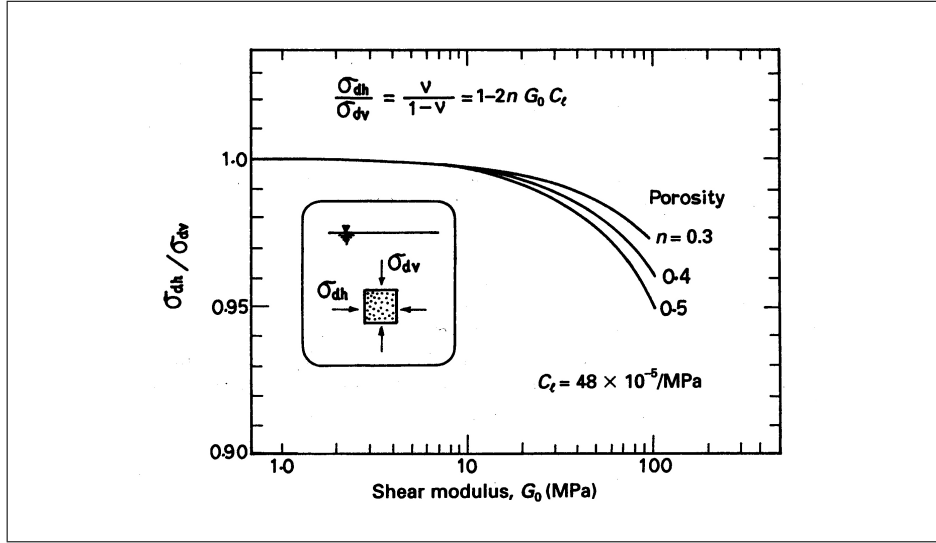


Figura 2.2. Stato tensionale indotto dalla propagazione delle onde di volume di compressione (Ishihara, 1996).

onde produce rispettivamente uno stato tensionale di compressione e uno di taglio, come illustrato in Fig. 2.1. Durante la propagazione delle onde di compressione, la tensione normale è indotta sia in direzione verticale che in direzione orizzontale.

Nel caso di piano di campagna orizzontale, all'elemento di terreno è impedita la deformazione orizzontale poiché l'estensione degli strati si assume infinita in direzione orizzontale. In tale condizione è stato dimostrato che la tensione normale in direzione orizzontale σ_{dh} può essere messa in relazione con quella verticale σ_{dv} tramite la seguente espressione:

$$\frac{\sigma_{dh}}{\sigma_{dv}} = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (2.1)$$

dove ν è il coefficiente di Poisson. Nel caso di condizione di completa saturazione del terreno sulla base della teoria dell'elasticità lineare si può dimostrare che il coefficiente di Poisson è definito come:

$$\nu = \frac{1}{2}(1 - nG_0C_l) \quad (2.2)$$

dove n è la porosità, G_0 è il modulo di taglio e C_l denota la compressibilità dell'acqua. Utilizzando le eq. 2.2 la eq. 2.1 si può esprimere come:

$$\frac{\sigma_{dh}}{\sigma_{dv}} = 1 - 2nG_0C_l \quad (2.3)$$

Tale relazione è mostrata in Fig. 2.2. Nel caso in cui G_0 assuma valori minori di 50 MPa per depositi teneri la tensione normale orizzontale σ_{dh} indotta dalla propagazione delle onde di compressione è circa pari alla tensione normale verticale σ_{dv} . Di conseguenza la propagazione delle onde di compressione attraverso

depositi teneri induce uno stato tensionale quasi esclusivamente di compressione e la componente della tensione deviatorica $\sigma_{dv} - \sigma_{dh}$ è praticamente pari a zero. Nella maggior parte dei casi il terreno è caratterizzato da una condizione di completa saturazione. Sulla base della elevata velocità di deformazione che il terreno subisce in presenza di sisma è possibile ipotizzare che il moto dell'acqua rispetto allo scheletro solido sia trascurabile (condizioni non drenate). Ciò comporta che l'entità dei movimenti associati alle onde di compressione sia decisamente inferiore a quella dei movimenti associati alle onde di volume di taglio nel caso di piano campagna orizzontale.

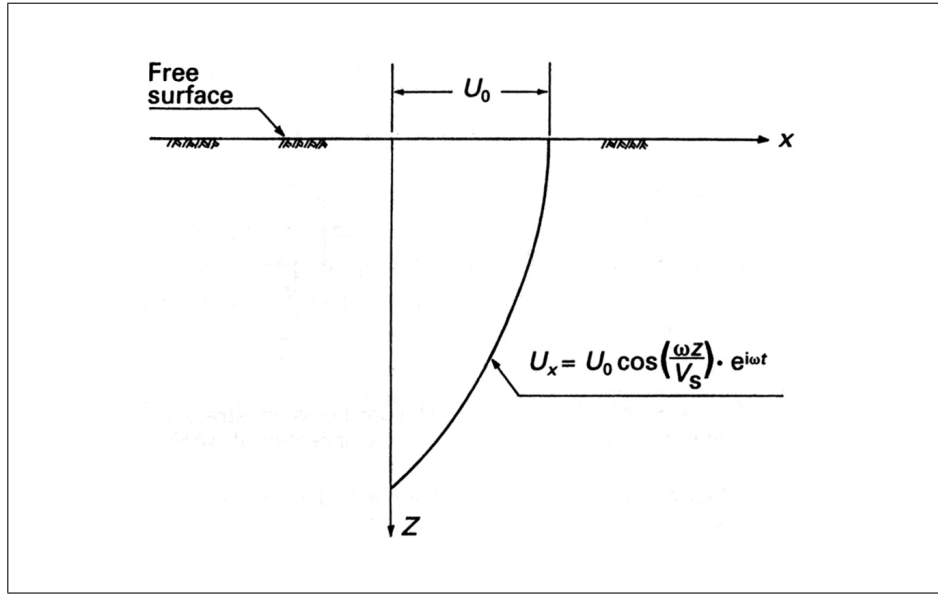


Figura 2.3. Distribuzione tipica degli spostamenti orizzontali in prossimità del piano campagna dovuta alla propagazione monodimensionale delle onde (Ishihara, 1996).

La componente orizzontale dello spostamento U_x alla propagazione unidimensionale delle onde di taglio sia data dalla funzione armonica:

$$U_x = U_0 \cos\left(\frac{\omega z}{V_s}\right) e^{i\omega t} \quad (2.4)$$

dove ω è la frequenza angolare, V_s è la velocità delle onde di taglio e U_0 è lo spostamento orizzontale del piano campagna ($z = 0$), come illustrato nella Fig. 2.3. Assimilando il terreno ad un semispazio elastico la tensione di taglio τ_d e l'accelerazione orizzontale a_h sono rispettivamente definiti come:

$$\tau_d = G_0 \frac{\partial U_x}{\partial z} \qquad a_h = \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

Introducendo l'espressione 2.4 nella eq. 2.5 e usando la relazione $G_0 = \rho V_s^2$, si ha:

$$\frac{\tau_d}{a_h \rho z} = \frac{\tan\left(\frac{\omega z}{V_s}\right)}{\left(\frac{\omega z}{V_s}\right)} \quad (2.6)$$

in cui ρ è la densità del terreno.

Per un elemento di volume prossimo alla superficie del piano campagna il valore del rapporto $\omega z/V_s$ è molto piccolo e la $\tan(\omega z/V_s) \simeq \omega z/V_s$. Di conseguenza la eq. 2.6 può essere scritta come:

$$\tau_d \simeq a_h \rho z \quad (2.7)$$

Ciò significa che la tensione di taglio che agisce alla profondità z è circa pari al

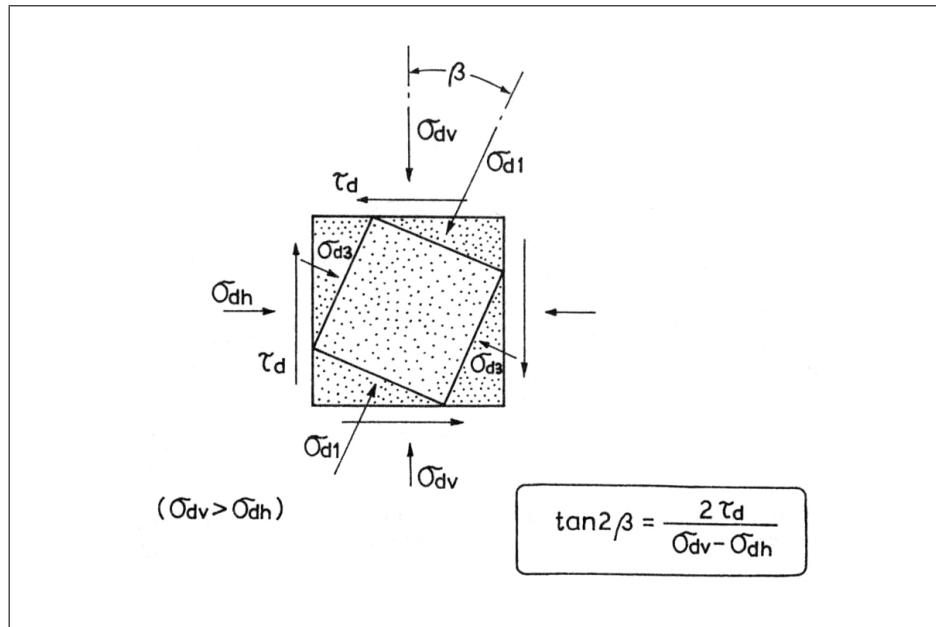


Figura 2.4. Componenti dello stato tensoriale dell'elemento di terreno (Ishihara, 1996).

prodotto della massa del terreno alla profondità z e l'accelerazione della massa del terreno sulla superficie.

Nel caso in cui il volume di terreno presenti una configurazione complessa (pendio) è necessario condurre delle analisi bidimensionali della risposta sismica al fine di determinare l'andamento nel tempo delle tensioni di taglio. In tali casi ci sono due componenti della tensione di taglio che agiscono sull'elemento di terreno, cioè la tensione di taglio τ_d e la differenza $\sigma_{dv} - \sigma_{dh}$ come mostrato in Fig. 2.4. Numerose analisi di risposta sismica hanno dimostrato che tali componenti crescono o decrescono proporzionalmente. Di conseguenza in ogni istante di tempo, il rapporto tra τ_d e $(\sigma_{dv} - \sigma_{dh})/2$ si mantiene approssimativamente costante. Questo rapporto definisce la direzione β dell'asse principale di tensione come:

$$\tan 2\beta = \frac{2\tau_d}{\sigma_{dv} - \sigma_{dh}} \quad (2.8)$$

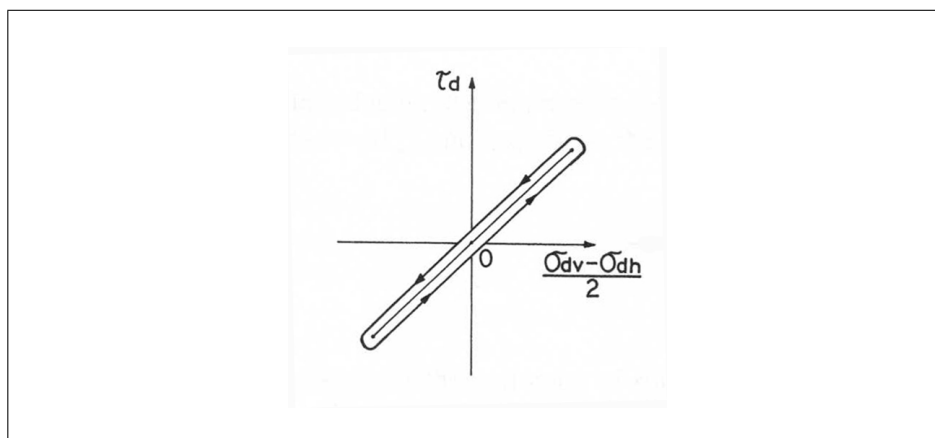


Figura 2.5. Andamento caratteristico delle due componenti dello stato tensionale tangenziale indotto da un evento sismico (Ishihara, 1996).

dove β è l'angolo compreso tra la verticale e la direzione dell'asse che individua la tensione principale massima, come illustrato in Fig. 2.4. Inoltre si può mettere in evidenza come l'andamento ciclico dello sforzo di taglio durante un evento sismico avviene in modo tale che le direzioni principali di tensione rimangono quasi immutate. Tale caratteristica è schematicamente illustrata in Fig. 2.5.

Quando si cerca di simulare in laboratorio il comportamento del terreno durante un evento sismico, l'apparecchio sperimentale che sottopone il provino allo stato tensionale che meglio riproduce quello in sito è l'apparecchio torsionale.

In una tipica prova torsionale il provino è consolidato in condizioni K_0 e successivamente sottoposto a cicli di tensioni di taglio imposto tramite un momento torcente applicato lungo l'asse verticale.

Quando si simula la condizione di piano campagna orizzontale lo stato tensionale ciclico di torsione deve essere applicato a deformazioni laterali impedito. A tale tipo di prova ci si riferisce con il nome di ACOT (Anisotropically Consolidated Oedometer-conditioned Torsion) (Ishihara & Li, 1972).

Volendo invece investigare la condizione di piano campagna inclinato, i test di laboratorio devono essere condotti a deformazioni laterali libere; ci si riferisce a tali prove con il nome di ACT (Anisotropically Consolidated Torsion) (Ishihara & Li, 1972).

Per i terreni a grana fine purtroppo non si hanno a disposizione dati di prove torsionali su terreni a grana fine, poichè tutti i programmi sperimentali di Ishihara e collaboratori sono svolti su terreni sabbiosi.

Ishihara & Yamazaki (1980) hanno svolto prove cicliche non drenate con l'apparecchio di taglio semplice, che sottopone il provino al medesimo stato tensionale che si ha in sito durante un evento sismico. Un limite di tale apparecchiatura è costituito dalla non uniformità dello stato deformativo e dal fatto che non è possibile ricostruire il percorso tensionale effettivamente seguito dal provino. Per tali ragioni si è scelto di non considerare i programmi di prove cicliche su terreni a grana fine svolte in apparecchio di taglio semplice.

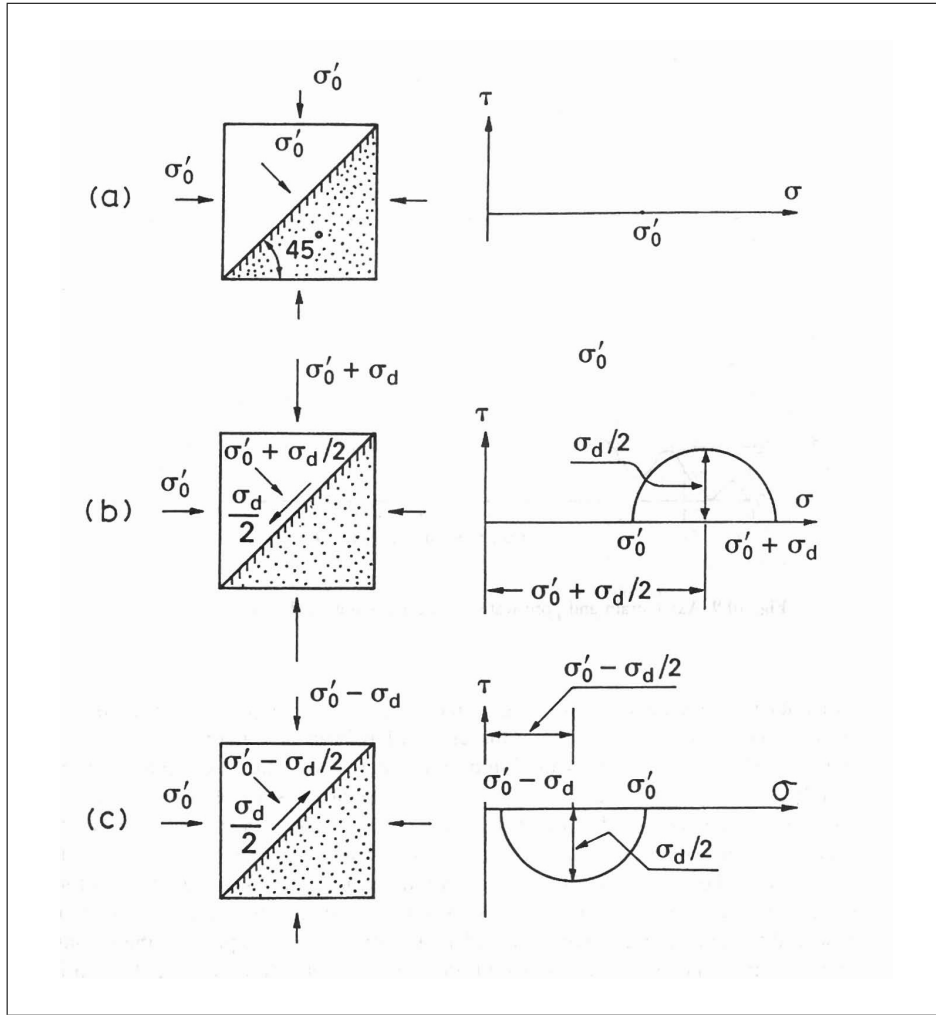


Figura 2.6. Simulazione delle tensioni geostatiche e cicliche in un provino sottoposto ad un carico triassiale ciclico (Ishihara, 1996).

L'apparecchio di gran lunga più utilizzato per lo studio del comportamento meccanico dei terreni in condizioni di carico monotono è il cosiddetto apparecchio triassiale ordinario o standard. Tale apparecchio è anche usato per l'analisi del comportamento dei terreni in condizioni di carico ciclico. L'apparecchio triassiale può controllare solo due componenti indipendenti del tensore degli sforzi o delle deformazioni: la componente assiale e quella radiale. Tali componenti nella cosiddetta prova triassiale ciclica sono fatti variare entro limiti assegnati in modo ripetuto, sia a carico controllato, sia a deformazione controllata (con sistemi di carico servoidraulici o meccanici). Solitamente si impone un percorso tensionale totale ed il carico assiale è fatto variare ciclicamente, permettendo di misurare deformazioni assiali e pressioni interstiziali. Ishihara (1996) ha messo in eviden-

za che, sottoponendo il provino ad una tensione assiale ciclica in condizioni non drenate, lo stato tensionale che si ha in corrispondenza del piano a 45° all'interno del provino riproduce lo stato tensionale cui è sottoposto – sul piano orizzontale – l'elemento di volume in sito, nel caso di piano di campagna orizzontale. In Fig. 2.6 è riportato lo stato tensionale corrispondente ad ogni stadio della prova triassiale ciclica. Quando la tensione assiale σ_d è applicata in condizioni non drenate sul piano a 45° si ha una tensione di taglio $\sigma_d/2$, si ha inoltre una componente normale $\sigma_d/2$, che essendo puramente di compressione è interamente trasmessa all'acqua senza indurre alcuna variazione della tensione efficace di confinamento σ'_0 agente. Di conseguenza la tensione normale agente sul piano a 45° può essere trascurata.

A differenza delle prove torsionali si hanno a disposizione dati sperimentali relativi a prove triassiali cicliche su terreni a grana fine, che sono descritti nel paragrafo successivo.

La prova in colonna risonante e la prova con bender elements permettono di determinare – misurando la velocità di propagazione delle onde di taglio – le proprietà dinamiche del terreno. Come messo in evidenza da Ishihara (1996) tali prove sono uno strumento utile per la determinazione delle proprietà dinamiche del terreno ma sono caratterizzate dalla necessità di assumere un modello di comportamento per il terreno (ad esempio il modello elastico lineare) al fine di interpretare i risultati.

Per tale motivo in questo lavoro il cui scopo è quello di determinare un modello costitutivo adatto a descrivere il comportamento ciclico dei terreni a grana fine non si sono considerati i dati sperimentali relative a prove dinamiche.

2.3 Sintesi delle osservazioni sperimentali sui terreni a grana fine

Le caratteristiche fondamentali del comportamento meccanico dei terreni in condizioni di carico monotono sono la non linearità, la irreversibilità e la dipendenza dallo stato tensionale corrente. In condizioni di carico ciclico si aggiunge una risposta di tipo isteretico dovuta allo sviluppo di deformazioni volumetriche residue in condizioni drenate che in condizioni di drenaggio impedito si traducono in un progressivo accumulo di sovrappressioni interstiziali.

Nelle Fig. 2.7 e Fig. 2.8 sono riportati i risultati di prove triassiali consolidate non drenate su argilla Newfield eseguita da Sangrey et al. (1969) nell'ambito di un programma di prove volto alla valutazione dell'effetto che i carichi ciclici hanno sulla resistenza dei terreni a grana fine.

Tali autori hanno messo in evidenza come l'accumulo di sovrappressioni interstiziali causa perdita di resistenza o rottura dopo un certo numero di cicli di carico–scarico. In particolare è stato possibile individuare il cosiddetto *livello critico di tensione dei carichi ripetuti* che separa un comportamento di rottura da un comportamento di non–rottura. Se si applicano cicli di carico caratterizzati da livelli tensionali che superano tale soglia (Fig. 2.8) l'accumulo di sovrappressioni interstiziali è tale che lo stato tensionale efficace raggiunge una condizione di rottura. Invece se i cicli sono caratterizzati da livelli tensionali minori di tale livello (Fig. 2.7) il terreno raggiunge una condizione di equilibrio senza rottura,

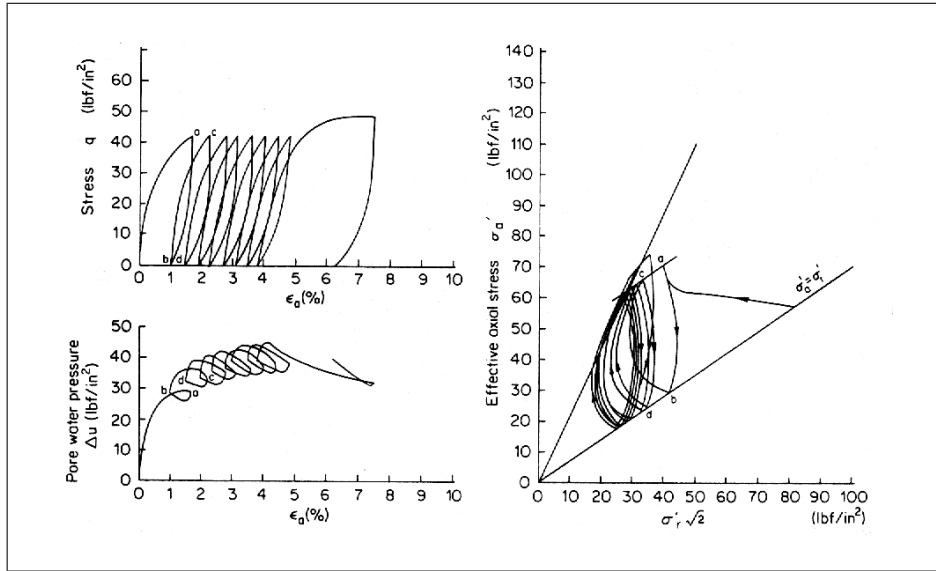


Figura 2.7. Prova di compressione triassiale ciclica consolidata non drenata su argilla Newfield, $\sigma_r = 3.92 \cdot 10^3 kPa$ e $q = 2.89 \cdot 10^3 kPa$ (Sangrey et al., 1969).

in corrispondenza della quale non si verifica ne' accumulo di deformazioni ne' di sovrappressioni interstiziali all'aumentare del numero dei cicli.

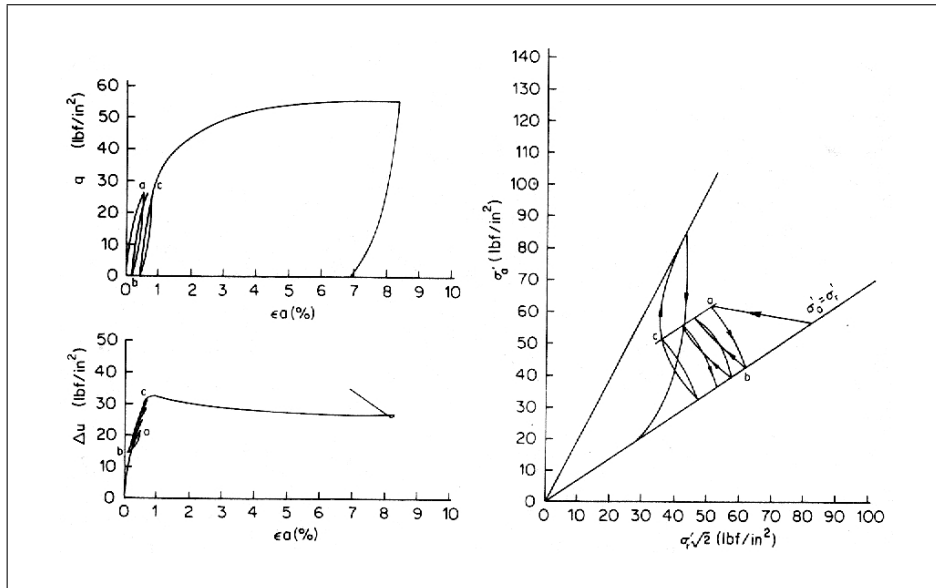


Figura 2.8. Prova di compressione triassiale ciclica consolidata non drenata su argilla Newfield, $\sigma_r = 3.92 \cdot 10^3 kPa$ e $q = 1.81 \cdot 10^3 kPa$ (Sangrey et al., 1969).

Sangrey et al. (1969) hanno proposto una relazione tra la quantità di sovrappressioni interstiziali accumulate fino alla condizione di equilibrio e il livello tensionale dei carichi applicati. Inoltre gli stessi autori hanno osservato che riportando nel piano di Rendulic (Fig. 2.9) i percorsi tensionali relativi a prove svolte a differenti valori del grado di sovraconsolidazione è possibile individuare l'involuppo che definisce il livello critico dei carichi ripetuti, dato dall'intersezione tra la linea di rottura e la cosiddetta linea di equilibrio che collega lo stato tensionale iniziale di ogni provino con la rispettiva condizione di equilibrio senza rottura.

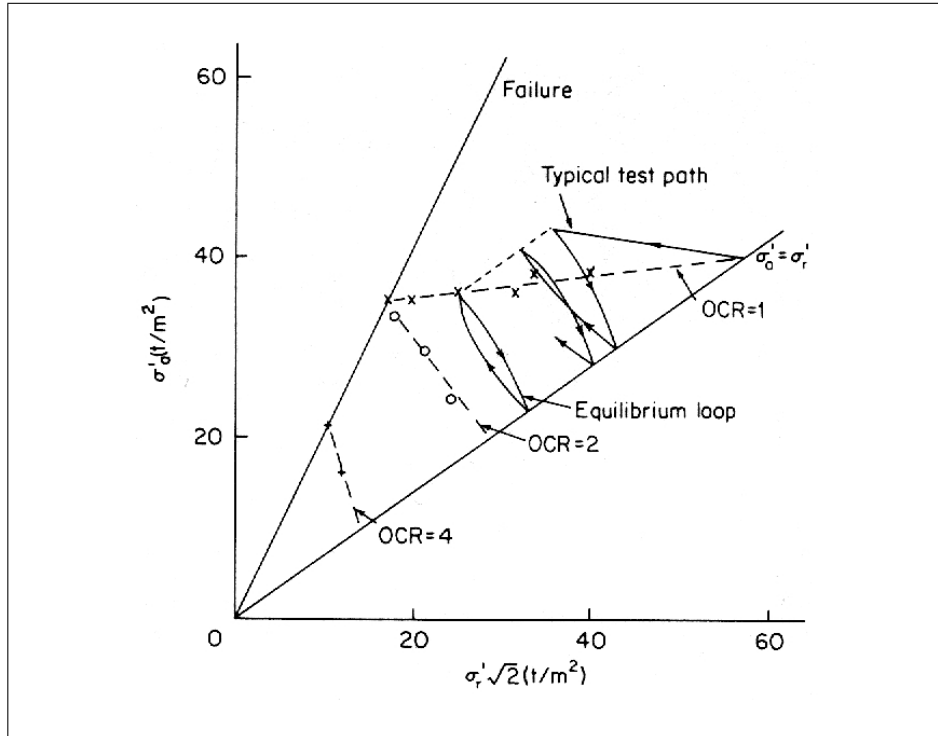


Figura 2.9. Involuppo del livello critico dei carichi ripetuti (Sangrey et al., 1969).

Un comportamento analogo a quello osservato da Sangrey et al. (1969) è stato riscontrato da Sheu & Chang (1987) su provini di caolino sottoposto a prove triassiali drenate e non drenate caratterizzate da cicli di compressione, di estensione e di compressione-estensione (Fig. 2.10). Infatti anche in tale lavoro è stato osservato che le prove cicliche terminano quando il provino si rompe (Fig. 2.11b) o raggiunge una condizioni di equilibrio senza rottura (Fig. 2.11a), in corrispondenza della quale le deformazioni volumetriche residue (in condizioni drenate) o le sovrappressioni interstiziali residue (in condizioni non drenate) che si sviluppano durante il ciclo sono le stesse relative al ciclo precedente. Nelle condizioni di equilibrio, inoltre, i percorsi tensionali formano un ciclo di isteresi chiuso (Fig. 2.11a). Si può dunque individuare, anche in tale programma di prove, un livello critico

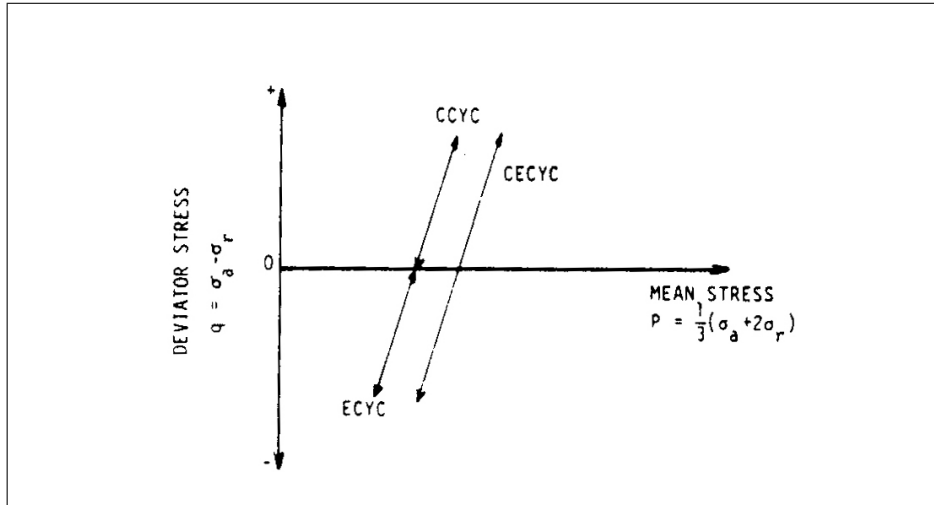


Figura 2.10. Percorsi di carico del programma di prove triassiali cicliche su caolino di Sheu & Chang (1987).

di tensione dei carichi ripetuti, al di sotto del quale si raggiunge uno stato di equilibrio senza rottura.

In particolare Sheu & Chang (1987) hanno osservato che tale livello critico di tensione per le prove di compressione ciclica (indicate con CCYC in Fig. 2.12) è maggiore di quello delle prove di estensione (ECYC) e molto maggiore di quello delle prove di compressione–estensione (CECYC). Inoltre nelle prove cicliche di estensione e di compressione–estensione si può verificare una condizioni di pseudo–equilibrio per tensioni prossime al livello critico di tensione, in cui le sovrappressioni interstiziali raggiungono una condizione di equilibrio mentre le deformazioni continuano ad accumularsi. La linea di equilibrio per le prove di compressione intercetta l'asse p (Fig. 2.12) in corrispondenza della pressione media iniziale. Ciò implica che anche una tensione ciclica molto piccola può provocare sovrappressioni interstiziali e deformazioni permanenti. Mentre la linea di equilibrio relativa alle prove di estensione non intercetta l'asse p (Fig. 2.12), quindi esiste un limite di tensione al di sotto del quale lo sviluppo di sovrappressioni interstiziali generati da carichi ciclici è trascurabile.

Wroth & Loudon (1967) hanno mostrato l'andamento del percorso tensionale efficace di una prova di compressione triassiale non drenata ciclica su un provino di caolino normalmente consolidato dovuto allo sviluppo di sovrappressioni interstiziali residue è analogo ai percorsi di prove di compressione triassiale non drenate monotone su provini di caolino sovraconsolidati, come evidente dal confronto tra la Fig. 2.13a e la Fig. 2.13b. Tali autori hanno osservato che anche le deformazioni che si sviluppano sono simili. Il fatto che il comportamento del terreno in condizioni di carico ciclico dipende dal suo stato tensionale efficace (quello a cui il terreno arriva) è di fondamentale importanza per la modellazione.

Al fine di valutare il comportamento ciclico dei terreni a grana fine in condizioni drenate va sicuramente considerato lo studio sistematico svolto da Al-

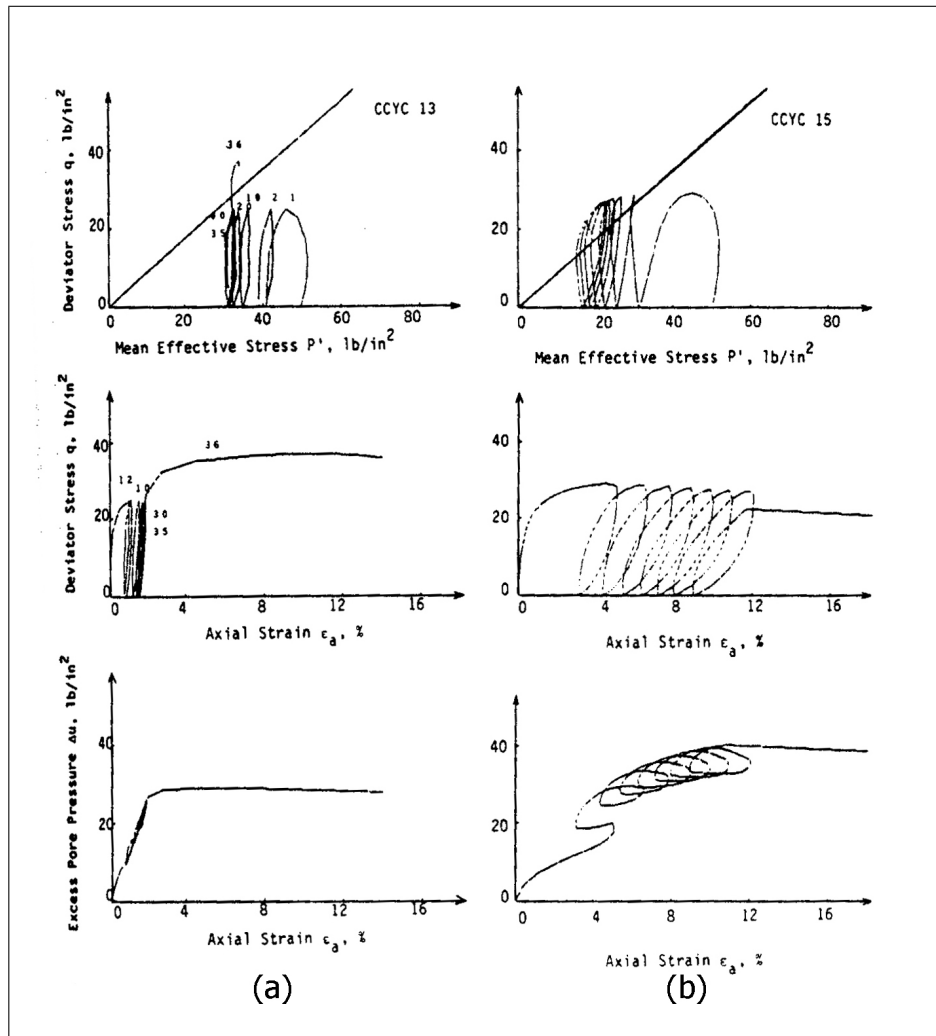


Figura 2.11. Prove triassiali cicliche di compressione su caolino in cui si raggiunge: (a) condizione di equilibrio senza rottura; (b) condizione di rottura (Sheu & Chang, 1987).

Tabbaa (1987), che ha eseguito una serie di prove cicliche su provini di caolino. Il comportamento isteretico in condizioni drenate è messo in evidenza dall'accumulo di deformazioni volumetriche permanenti come è possibile osservare dalla curva di compressibilità della prova di compressione isotropa (Fig. 2.14) ed edometrica (Fig. 2.15) e dalle curve $\eta : \epsilon_v$ (con $\eta = q/p$) relative rispettivamente a prove triassiali cicliche (Fig. 2.16, Fig. 2.17) ed a una prova a p costante ciclica Fig. 2.18. In particolare i risultati delle prove di compressione isotropa ciclica (Fig. 2.14) mostrano che il comportamento in scarico-ricarico è non lineare, infatti, il primo ciclo è caratterizzato da un elevato valore di rigidità che si riduce progressivamente all'aumentare del numero dei cicli. Inoltre si può osservare che il

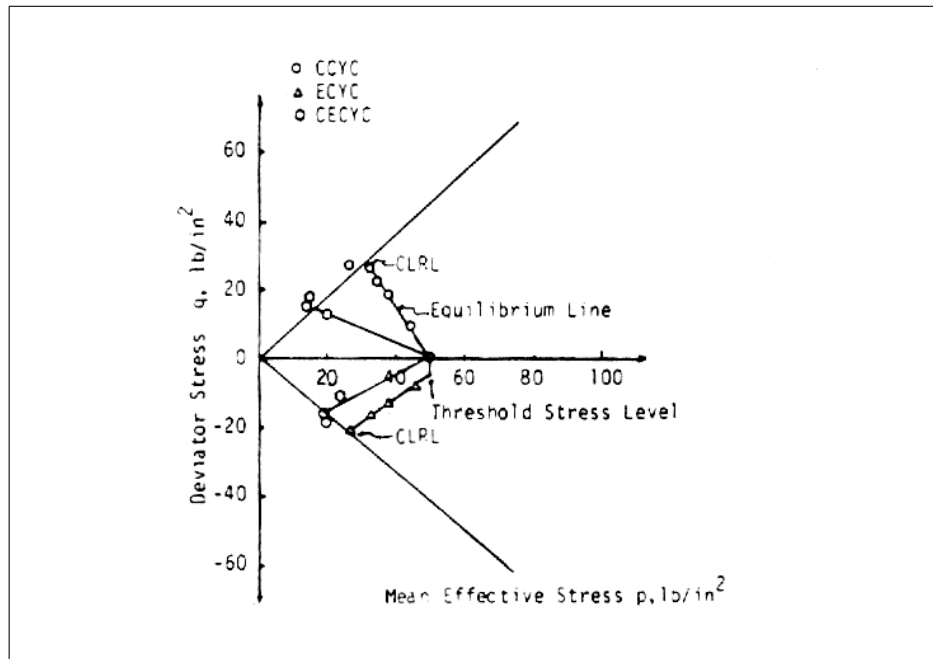


Figura 2.12. Involuppo del livello critico dei carichi ripetuti per diverse condizioni di carico (Sheu & Chang, 1987).

comportamento in scarico-ricarico è isteretico e l'area racchiusa dai loop aumenta all'aumentare dell'ampiezza dello scarico e al termine di ogni ciclo il loop è aperto, indicando lo sviluppo di deformazioni permanenti. Per quanto riguarda i risultati della prova edometrica ciclica (Fig. 2.15) si può osservare un comportamento più isteretico rispetto alla prova ciclica isotropa, infatti, i loop di isteresi racchiudono un'area pari a 1.5 volte l'area racchiusa dai cicli isotropi associati alla stessa variazione della pressione media. Inoltre la non-chiusura al termine di ogni ciclo è più pronunciata.

Dall'analisi della prova a $p = cost$ (Fig. 2.18) si osserva che la fase iniziale di ogni ciclo tensionale mostra un comportamento molto rigido, in corrispondenza del quale non si accumulano deformazioni volumetriche, superata tale fase la rigidità tende a ridursi verificandosi deformazioni. Un comportamento analogo si può osservare quando il percorso tensionale si inverte, con una elevata rigidità iniziale che diminuisce all'aumentare della tensione imposta. Risulta, inoltre interessante osservare come all'inizio della prova l'entità delle deformazioni volumetriche accumulate sia molto piccola denotando una risposta quasi elastica.

La prova triassiale (Fig. 2.16a) evidenzia elevate deformazioni volumetriche positive ed elevate deformazioni deviatoriche che si sviluppano durante il tratto AB. Quando il percorso si inverte BC si sviluppano deformazioni volumetriche positive minori, poiché il provino diviene sovraconsolidato e mantiene tale stato durante i cicli successivi. Ciò è evidente anche dalla Fig. 2.16b, che riporta dei cicli di isteresi praticamente chiusi. La Fig. 2.17a presenta delle deformazioni volumetriche nega-

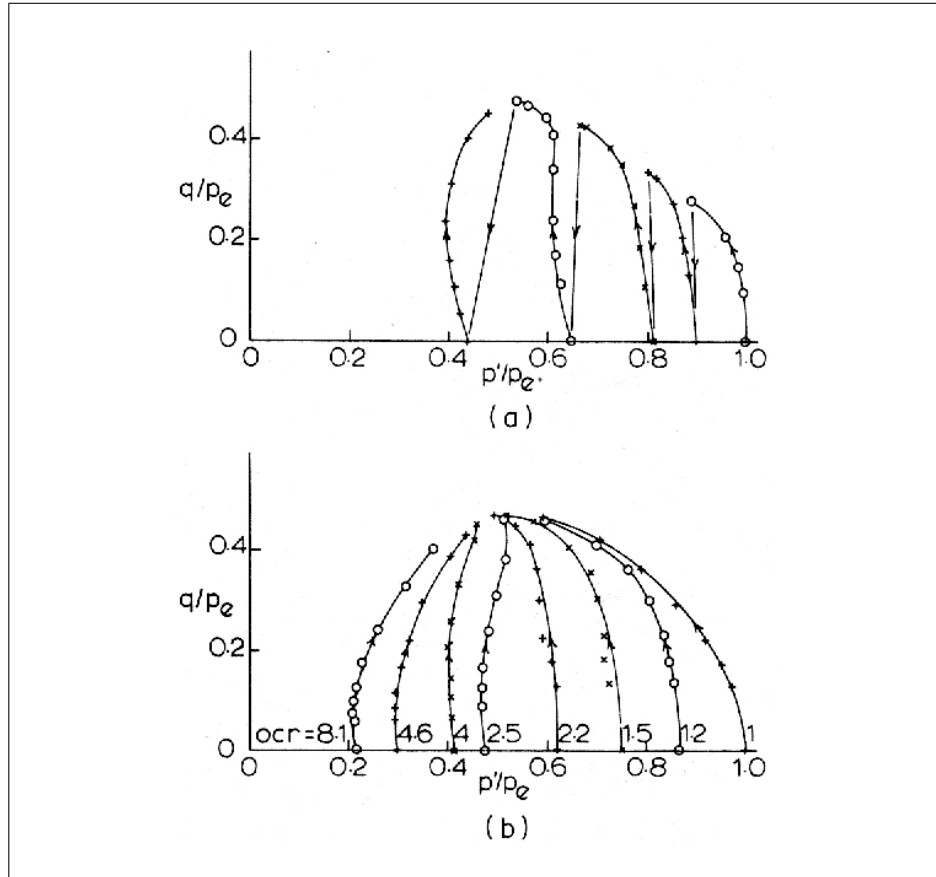


Figura 2.13. (a) Prova di compressione triassiale non drenata ciclica su un provino di caolino normalmente consolidato; (b) Prove di compressione triassiale non drenate monotone su provini di caolino sovraconsolidati (Wroth & Loudon, 1967).

tive che si sviluppano durante il primo tratto EF. Quando il percorso si inverte FG si verificano deformazioni volumetriche dilatanti di minore intensità. Negli ultimi due cicli si sviluppano due loop di isteresi coincidenti. Il comportamento dilatante nel primo tratto di carico EF e contraente nei successivi tratti di carico indica che non esiste una fase elastica iniziale. Infine Fig. 2.17b illustra che le deformazioni distorsionali che si sviluppano durante il primo tratto EF sono maggiori di quelle nei tratti successivi.

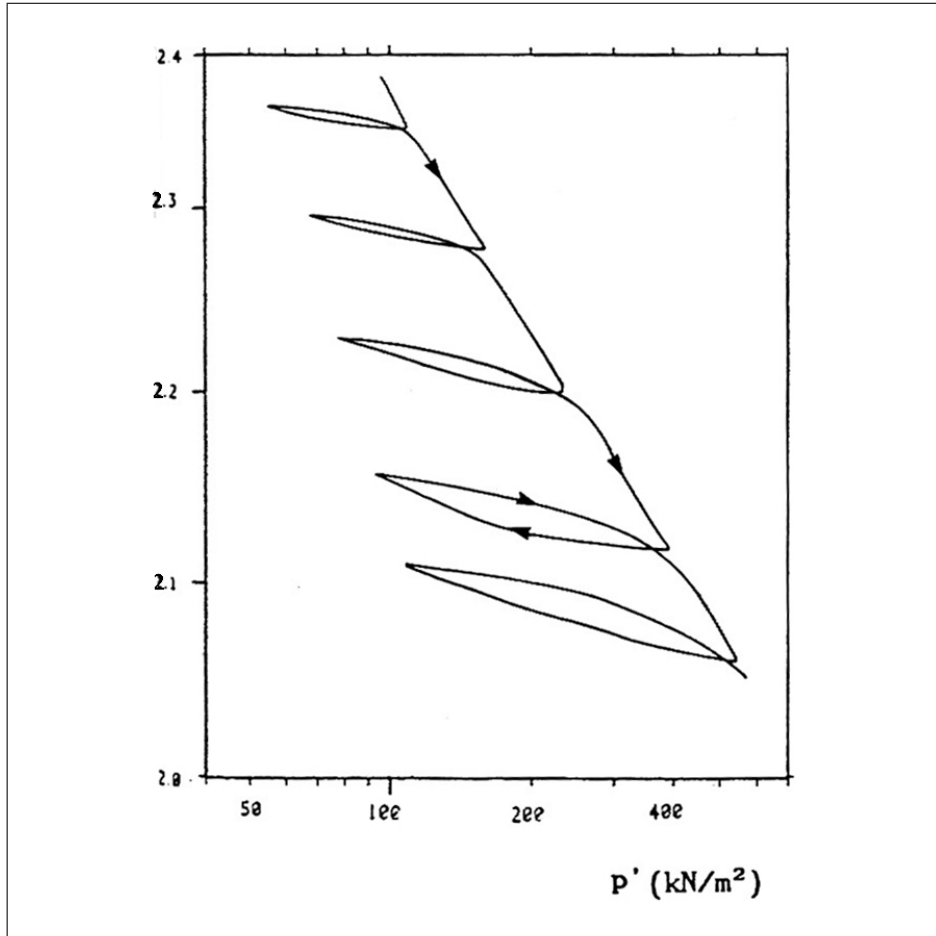


Figura 2.14. Risultati di una prova di compressione isotropa ciclica eseguita su caolino (Al-Tabbaa, 1987).

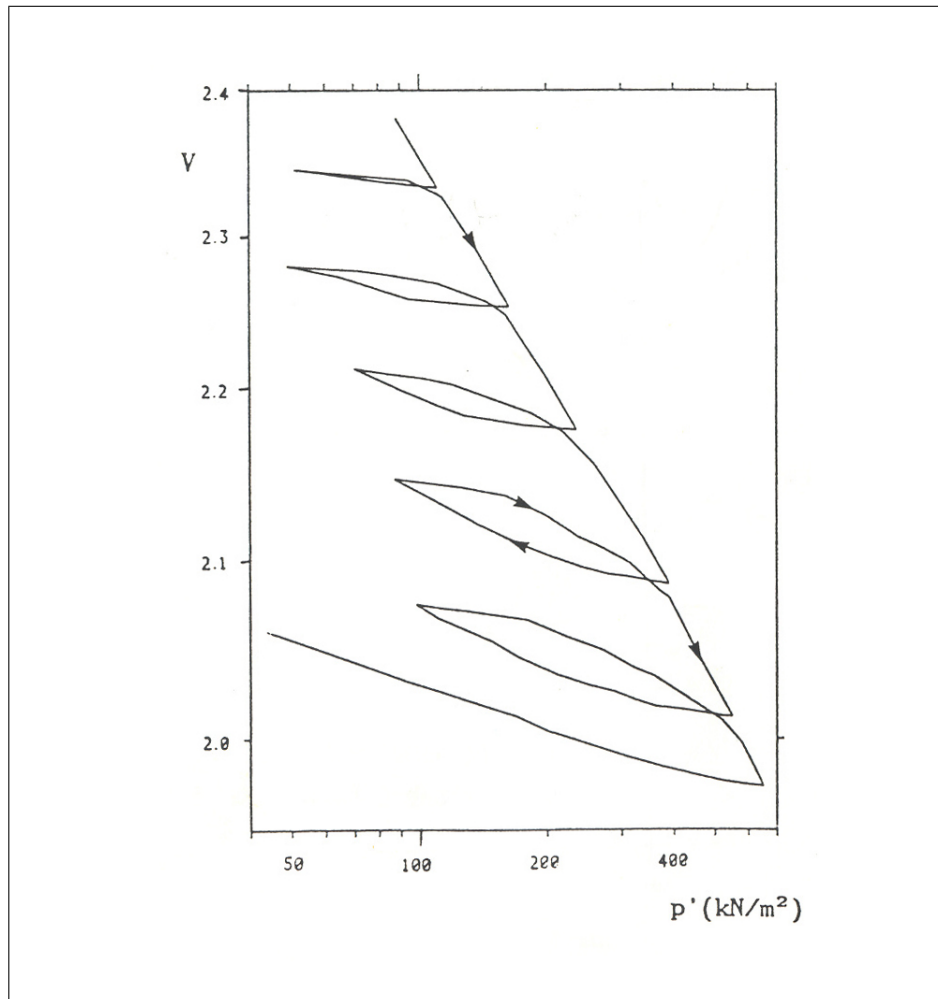


Figura 2.15. Risultati di una prova di compressione edometrica ciclica eseguita su caolino (Al-Tabbaa, 1987).

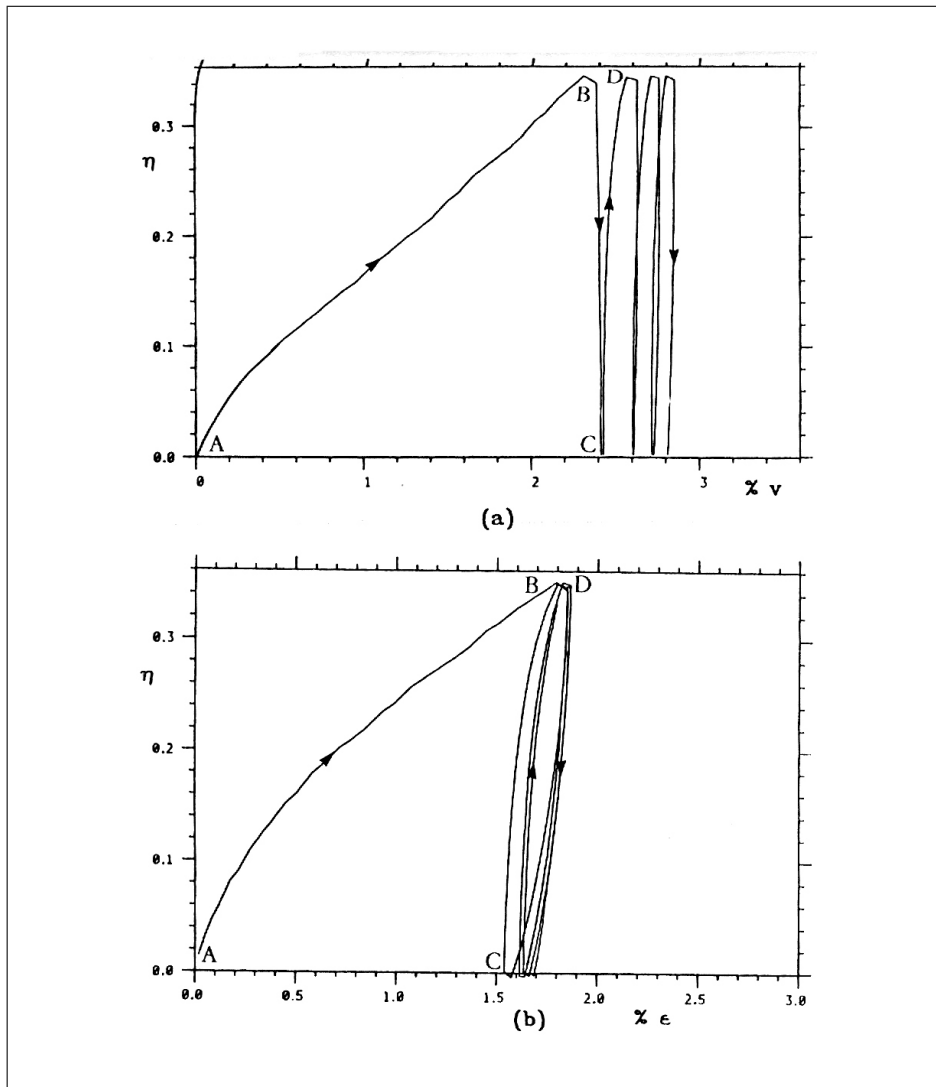


Figura 2.16. Risultati di una prova di compressione triassiale ciclica eseguita su un provino normalmente consolidato (Al-Tabbaa, 1987).

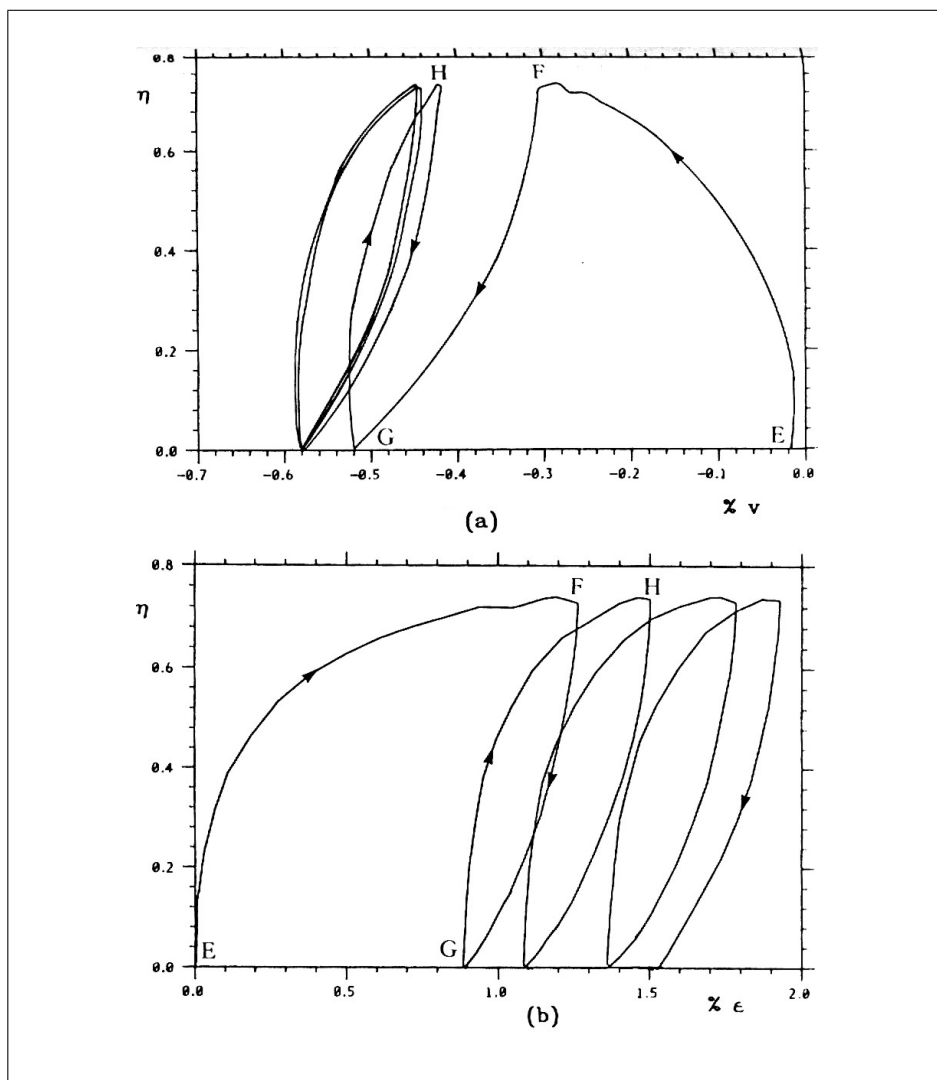


Figura 2.17. Risultati di una prova di compressione triassiale ciclica eseguita su un provino sovraconsolidato (Al-Tabbaa, 1987).

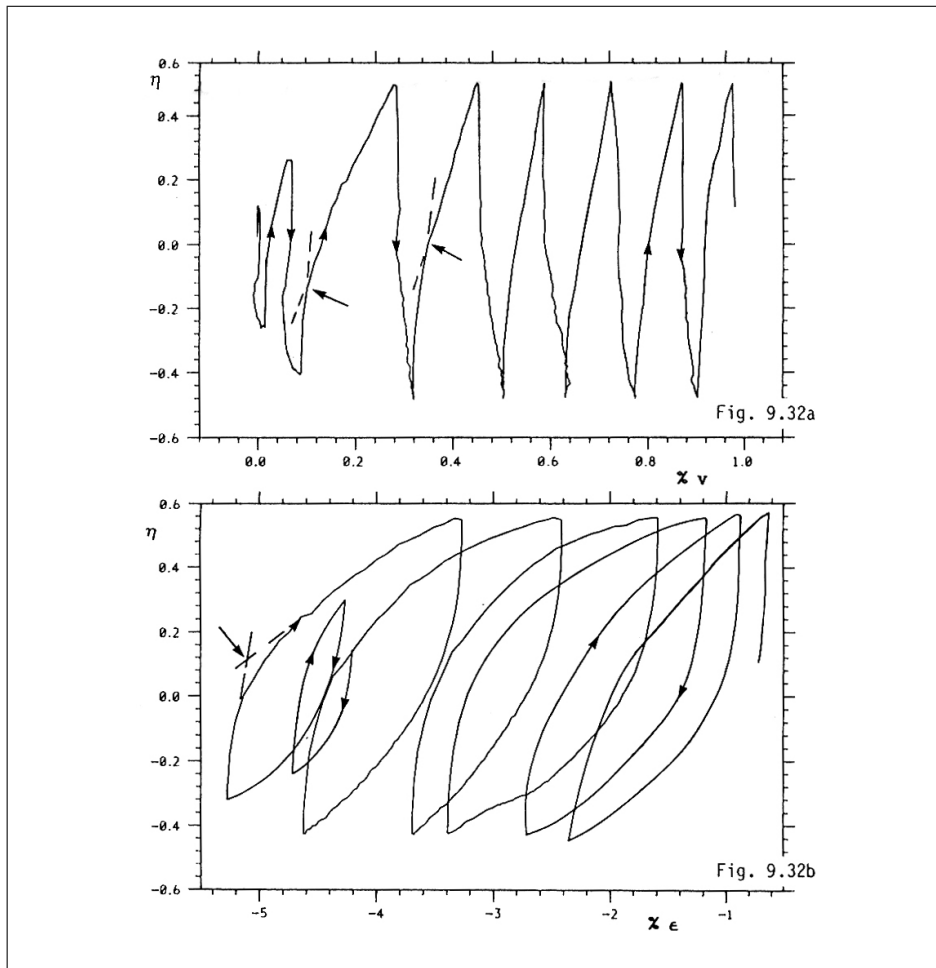


Figura 2.18. Risultati di una prova a $p = \text{cost}$ ciclica eseguita su caolino (Al-Tabbaa, 1987).

La modellazione del comportamento ciclico/dinamico dei terreni a grana fine

3.1 Introduzione

L'esecuzione di analisi numeriche avanzate finalizzate allo studio della risposta sismica delle dighe in terra richiede l'impiego di equazioni costitutive per il terreno capaci di descrivere gli aspetti essenziali del loro comportamento meccanico in condizioni di carico ciclico/dinamico, descritti nel Par. 2.3. Le evidenze sperimentali disponibili mostrano che, tra le caratteristiche della risposta ciclica/dinamica dei terreni, di particolare rilievo appaiono:

1. la non linearità;
2. l'irreversibilità e la non linearità incrementale;
3. il comportamento isteretico;
4. la dipendenza dalla storia tensionale.

I modelli elastoplastici classici per i terreni, formulati nell'ambito della teoria della plasticità classica perfetta o incrudente – oggetto del Par. 3.2 – sono in grado di riprodurre abbastanza bene i fenomeni di non linearità ed irreversibilità osservati in condizioni di carico monotono, ma non sono adeguati a descrivere correttamente l'accumulo di deformazioni irreversibili e di sovrappressioni interstiziali tipicamente associate a sollecitazioni dinamiche cicliche di elevata frequenza e hanno una limitata capacità di tenere in conto gli effetti della storia tensionale pregressa.

Negli ultimi 20 anni, numerosi approcci sono stati proposti per migliorare le capacità previsionali dei modelli costitutivi convenzionali per i mezzi granulari, con particolare riferimento alle condizioni di carico cicliche/dinamiche tipiche degli eventi sismici. Tali approcci si basano:

- sulla modifica di alcune ipotesi di base della teoria della plasticità, ricorrendo a generalizzazioni della teoria dell'elastoplasticità, quali la *teoria della plasticità con incrudimento cinematico* (Par. 3.3) e la *teoria della plasticità con Bounding Surface* (Par. 3.4);
- sullo sviluppo di modelli costitutivi alternativi alla plasticità classica, formulati come estensioni della teoria dell'ipoeleasticità di Truesdell, a partire dai principi di base della meccanica dei mezzi continui, la cosiddetta *teoria della ipoplasticità con variabili interne* (Par. 3.5).

Nel seguito si fa riferimento alle notazioni riportate in App. A.

3.2 Teoria della plasticità classica

La struttura generale della teoria della plasticità è ampiamente trattata in numerosi testi (Lubliner, 1990; Simo & Hughes, 1997; Jirasek & Bazant, 2002). La teoria della plasticità applicata alla geomeccanica è stata trattata da Desai & Siriwardane (1984), Vermeer & de Borst (1984), Loret (1990a), Loret (1990b), Zienkiewicz et al. (1999b).

Si assume l'ipotesi cinematica fondamentale di decomposizione del tensore dell'incremento di deformazione in una parte elastica reversibile, $\dot{\epsilon}^e$, e una plastica irreversibile, $\dot{\epsilon}^p$:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (3.1)$$

L'incremento di deformazione elastica è messo in relazione con l'incremento di tensione, $\dot{\sigma}$, dalla seguente equazione ipoelastica:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}^e(\sigma) \dot{\epsilon}^e = \mathbf{D}^e(\sigma) [\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p] \quad (3.2)$$

in cui \mathbf{D}^e è un tensore del quarto ordine, detto tensore di rigidità tangente elastico, il quale generalmente dipende dallo stato tensionale corrente.

La irreversibilità della risposta meccanica è tenuta in conto imponendo che lo stato (σ, \mathbf{q}) del materiale appartenga all'insieme convesso:

$$\mathbb{E}_\sigma := \left\{ (\sigma, \mathbf{q}) \mid f(\sigma, \mathbf{q}) \leq 0 \right\} \quad (3.3)$$

dove $f(\sigma, \mathbf{q})$ è la cosiddetta *funzione di snervamento*. L'evoluzione delle deformazioni plastiche è descritta dalla seguente *legge di flusso*:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \sigma}(\sigma, \mathbf{q}) \quad (3.4)$$

dove $g(\sigma, \mathbf{q})$ è il *potenziale plastico*, e $\dot{\gamma} \geq 0$ è il *moltiplicatore plastico*. La evoluzione delle variabili di stato interne è definita da una adeguata *legge di incrudimento*:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\gamma} \mathbf{h}(\sigma, \mathbf{q}) \quad (3.5)$$

dove $\mathbf{h}(\sigma, \mathbf{q})$ è una funzione assegnata. Il moltiplicatore plastico che compare nella eq. 3.4 e nella eq. 3.5 è soggetto alle cosiddette *condizioni di Kuhn-Tucker*:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\sigma, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \dot{\gamma} f(\sigma, \mathbf{q}) = 0 \quad (3.6)$$

le quali impongono che le deformazioni plastiche possono verificarsi solo per stati che si trovano sulla superficie di snervamento. Sulla base della *condizione di consistenza* $\dot{\gamma} \dot{f}(\sigma, \mathbf{q}) = 0$, della equazione costitutiva elastica eq. 3.2 e della legge di flusso eq. 3.4 è possibile ottenere la seguente espressione del moltiplicatore plastico:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{K_p} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{D}^e \dot{\epsilon} \right\rangle \quad (3.7)$$

dove $\langle x \rangle := (x + |x|)/2$ sono le parentesi di Macaulay di x , e:

$$K_p := \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{D}^e \frac{\partial g}{\partial \sigma} + H_p > 0 \quad H_p := -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} \quad (3.8)$$

La funzione scalare $H_p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$ è detta *modulo di incrudimento* del materiale. Un valore positivo di H_p rappresenta *hardening*, un valore negativo *softening*, mentre $H_p = 0$ rappresenta il caso particolare di *plasticità perfetta*. Come approfonditamente discusso in, e.g., Simo & Hughes (1997); Jirasek & Bazant (2002), l'ipotesi di $K_p > 0$ è di fondamentale importanza nella corretta formulazione delle condizioni di carico/scarico in presenza di softening. Sostituendo la precedente espressione eq. 3.7 del moltiplicatore plastico nella eq. 3.4 e nella eq. 3.2, si ottiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{ep} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{D}^{ep} := \mathbf{D}^e - \frac{\hat{h}(\dot{\gamma})}{K_p} \left(\mathbf{D}^e \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \otimes \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D}^e \right) \quad (3.10)$$

dove $\hat{h}(\dot{\gamma})$ rappresenta la funzione di Heaviside, uguale a uno se $\dot{\gamma} > 0$ e zero altrove. Introducendo i due tensori unitari:

$$\mathbf{n} := \left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\|^{-1} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \mathbf{n}_g := \left\| \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\|^{-1} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.11)$$

che rappresentano le normali unitarie alla superficie di snervamento e al flusso plastico, la eq. 3.4, la eq. 3.7 e la eq. 3.10 possono essere riscritte nella seguente forma alternativa:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{n}_g \quad (3.12)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\widehat{K}_p} \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \rangle \quad (3.13)$$

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{\hat{h}(\dot{\lambda})}{\widehat{K}_p} (\mathbf{D}^e \mathbf{n}_g) \otimes (\mathbf{n} \mathbf{D}^e) \quad (3.14)$$

dove:

$$\widehat{K}_p := \mathbf{n}_f \cdot \mathbf{D}^e \mathbf{n}_g + \widehat{H}_p \quad \widehat{H}_p := \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\| \left\| \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\| \right)^{-1} H_p \quad (3.15)$$

In accordo con le espressioni del moltiplicatore plastico riportate nella eq. 3.7 e nella eq. 3.13 il passaggio tra risposta elastica e risposta plastica è dovuto al segno del prodotto scalare $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$.

Una forte limitazione della teoria della plasticità classica è rappresentata dall'assunzione di un dominio elastico di elevate dimensioni, all'interno del quale la risposta del materiale è puramente reversibile. Infatti soltanto a partire da stati posti in corrispondenza della superficie di snervamento è possibile accumulare deformazioni plastiche irreversibili. Invece tutti gli stati all'interno della superficie di snervamento sono caratterizzati da deformazioni puramente elastiche fino a quando il percorso di carico tocca eventualmente la superficie di snervamento. Comunque un elevato numero di dati sperimentali, quali quelli illustrati nel Par. 2.3, indicano che il comportamento del terreno può essere irreversibile e dipendente dalla direzione di carico anche per stati fortemente sovraconsolidati e che il processo di incrudimento plastico è piuttosto graduale. Sebbene tali effetti possono essere considerati di secondaria importanza nella simulazione di percorsi di carico monotoni

vanno opportunamente tenuti in conto nella simulazione di percorsi ciclici. Risulta necessario osservare che esiste una forte dipendenza della rigidità a bassi livelli di deformazione dalla direzione di carico per terreni fortemente sovraconsolidati, come osservato da Atkinson et al. (1986), Stallebrass (1990).

Per tali motivi si è ricorso a generalizzazioni della teoria della plasticità, quali la teoria della plasticità con incrudimento cinematico (Par. 3.3) e la teoria della plasticità con Bounding Surface (Par. 3.4) o alla teoria della ipoplasticità con variabili interne (Par. 3.5).

3.3 Teoria della plasticità con incrudimento cinematico

I principi fondamentali della teoria della plasticità con incrudimento cinematico sono stati definiti da Mroz (1967), Iwan (1967), e Dafalias & Popov (1975) e rappresentano una naturale estensione della teoria della plasticità classica. Per tale motivo di seguito si riportano le caratteristiche principali di quest'ultima.

La teoria della plasticità con incrudimento cinematico è stata sviluppata nel corso dei primi anni '80, in risposta all'esigenza di progettare strutture sottoposte a carichi ciclici quali le piattaforme off-shore o di prevedere quantitativamente la risposta del terreno durante un evento sismico.

Nella teoria della plasticità con incrudimento cinematico la superficie di snervamento assume la seguente forma generale:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, q_k) = \hat{f}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, q_k) = 0 \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} := \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha} \quad (3.16)$$

in cui la cosiddetta *back-stress* $\boldsymbol{\alpha}$ è il tensore microstrutturale, responsabile della anisotropia indotta, e q_k ($k = 1, \dots, n$) rappresentano le variabili interne *scalari*. Quando $\boldsymbol{\alpha}$ varia durante il processo di carico, la superficie di snervamento è trascinata dal percorso tensionale come indicato qualitativamente in Fig. 3.1. Comunque il moto della superficie di snervamento è delimitato da una superficie esterna di dimensioni maggiori, solitamente denominata *Bounding Surface* (BS), di equazione:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \bar{q}_k) = 0 \quad \{\bar{q}_k\} \subset \{q_k\} \quad (3.17)$$

La BS separa gli stati ammissibili da quelli impossibili, e generalmente è caratterizzata da una forma simile a quella della superficie di snervamento (Fig. 3.2). Modelli di questo tipo sono stati proposti da vari autori; tra essi si ricordano il lavoro di Prevost (1977, 1986), Mroz et al. (1978, 1981), Hashiguchi (1985, 1988), Wood e collaboratori (Al-Tabbaa & Wood, 1989; Gajo & Wood, 1999; Rouainia & Wood, 2000). Quest'ultimo modello è dettagliatamente descritto nel Par. 4.2.

Per la variabile interna tensoriale $\boldsymbol{\alpha}$ piuttosto che assegnare in maniera esplicita una legge di flusso si attribuisce al modulo plastico H_p una funzione monotonicamente decrescente con la distanza δ tra lo stato corrente e uno *stato immagine* $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ sulla BS, definito come il punto in corrispondenza del quale le normali unitarie a $f = 0$ e a $F = 0$ hanno la stessa direzione (Fig. 3.2a):

$$H_p = \hat{H}(\bar{H}_p, \delta) \quad \frac{\partial \hat{H}}{\partial \delta} > 0 \quad \hat{H}(\bar{H}_p, 0) = \bar{H}_p \quad (3.18)$$

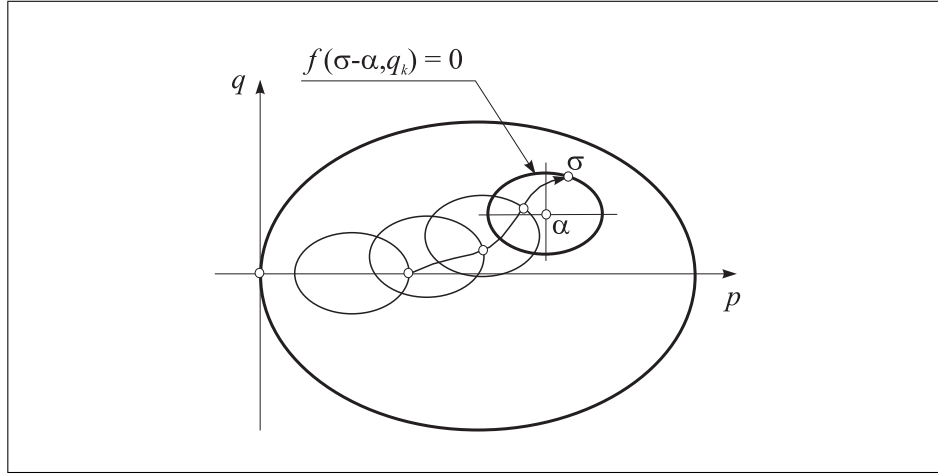


Figura 3.1. Incrudimento cinematico all'interno della bounding surface (Tamagnini & Viggiani, 2002).

Nella eq. 3.18, $\delta := \|\bar{\sigma} - \sigma\|$ e \bar{H}_p è il modulo plastico a $\bar{\sigma}$:

$$\bar{H}_p := -\frac{\partial F}{\partial p_c} h_c \tag{3.19}$$

ottenuto dalla condizione di consistenza sulla BS: $\dot{F}(\bar{\sigma}, \bar{q}_k) = 0$.

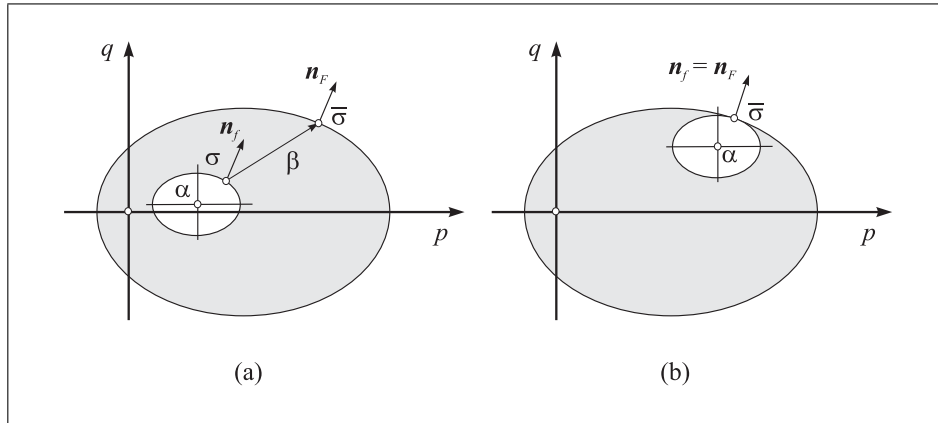


Figura 3.2. Incrudimento cinematico: determinazione del punto immagine (Tamagnini & Viggiani, 2002).

Quando il percorso tensionale tocca la BS, le due superfici devono avere la stessa tangente, altrimenti alcuni stati sarebbero *esterni* alla BS (Fig. 3.2b). Come dimostrato da Hashiguchi (1985), è possibile ottenere tale condizione tramite una appropriata definizione dell'equazione di evoluzione di α .

3.4 Teoria della plasticità con Bounding Surface

La *teoria della plasticità con Bounding Surface* rappresenta una strategia alternativa alla teoria della plasticità con incrudimento cinematico (Par. 3.2). Il concetto chiave di tale formulazione è che, come nella teoria della plasticità con incrudimento cinematico, esiste una superficie nello spazio delle tensioni – la Bounding Surface (BS), definita da una espressione simile all' eq. 3.17 – che separa gli stati ammissibili da quelli impossibili. Tale superficie è soggetta a processi di incrudimento che ne variano la dimensione, la forma e l'orientamento, in maniera analoga alla tipica superficie di snervamento nella teoria della plasticità classica (Par.3.2). Comunque tale superficie non è una superficie di snervamento poichè si possono verificare deformazioni plastiche in corrispondenza di stati tensionali posti al suo interno. In particolare per ogni stato ammissibile (all'interno della BS), si assume una legge di flusso identica alla eq. 3.12 in cui il moltiplicatore plastico $\dot{\lambda}$ assume la seguente espressione:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\tilde{K}_p} \langle \mathbf{n}_L \cdot \mathbf{D}^e \dot{\epsilon} \rangle \quad (3.20)$$

dove:

$$\tilde{K}_p := \mathbf{n}_L \cdot \mathbf{D}^e \mathbf{n}_g + \tilde{H}_p \quad (3.21)$$

in cui \mathbf{n}_L è il tensore unitario che individua la direzione di carico, e \tilde{H}_p , in maniera analoga alla formulazione standard, gioca il ruolo di moltiplicatore plastico.

L'espressione di queste ultime due quantità risulta essere cruciale nella possibilità di associare a ogni stato tensionale $\boldsymbol{\sigma}$ all'interno della BS un corrispondente *stato immagine* $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ sulla BS, tramite una *legge di corrispondenza* non-invertibile.

Un esempio di quest'ultima è la *legge di corrispondenza radiale* (Dafalias, 1986) per la quale il punto immagine sulla BS non è altro che la proiezione dello stato corrente sulla BS rispetto ad un dato *centro di proiezione* $\boldsymbol{\alpha}$ (Fig. 3.3). Una volta

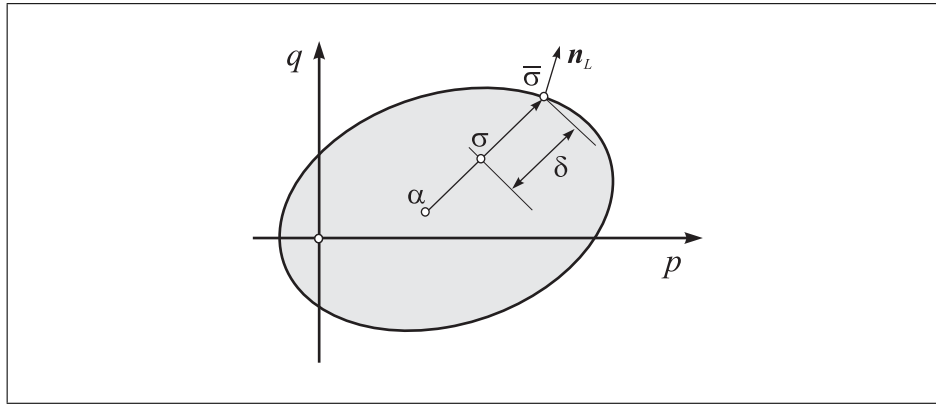


Figura 3.3. Legge di corrispondenza radiale nella plasticità Bounding Surface (Tamagnini & Viggiani, 2002).

che lo stato immagine è stato determinato, la direzione di carico è assunta come

il gradiente della BS a $\bar{\sigma}$, mentre il modulo plastico \tilde{H}_p si considera funzione monotonicamente decrescente con la distanza $\delta := \|\bar{\sigma} - \sigma\|$ tra lo stato corrente ed il suo punto immagine, e del modulo plastico \bar{H}_p in $\bar{\sigma}$:

$$\tilde{H}_p = \tilde{H}(\bar{H}_p, \delta) \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \delta} > 0 \quad \tilde{H}(\bar{H}_p, 0) = \bar{H}_p \quad (3.22)$$

Le equazioni costitutive in forma incrementale assumono una espressione analoga alla eq. 3.14, con $\dot{\lambda}$ fornito dalla eq. 3.20 e \tilde{K}_p sostituito da \bar{K}_p della eq. 3.21.

Le analogie esistenti tra tali procedure per definire la direzione di carico ed il modulo plastico e quelle della teoria della plasticità con incrudimento cinematico (Par. 3.2) sono soltanto apparenti. In effetti Dafalias (Dafalias, 1986) considera la plasticità con incrudimento cinematico come un caso particolare della plasticità con Bounding Surface caratterizzata da una particolare legge di corrispondenza. Comunque a differenza della plasticità con incrudimento cinematico nella plasticità con Bounding Surface non esiste una regione elastica. Una review della teoria della plasticità è stata svolta da Dafalias (1986). Applicazioni di tale approccio a modelli per le argille sono riportate, e.g., in Zienkiewicz et al. (1985); Dafalias & Herrmann (1986); Anandarajah & Dafalias (1986); Whittle & Kavvadas (1994); Tamagnini & D'Elia (1999). Quest'ultimo modello costitutivo è descritto nel Par. 4.3.

3.5 Teoria della ipoplasticità con variabili interne

Negli ultimi anni è stato proposto un approccio alternativo nella modellazione del comportamento dei terreni che si allontana dalle teorie della plasticità e può essere considerato una generalizzazione della teoria dell'ipoeasticità di Truesdell (Truesdell, 1956). Gli aspetti fondamentali di questo approccio sono:

- l'assenza di qualsiasi decomposizione cinematica delle deformazioni (in componenti reversibile ed irreversibile);
- la continua dipendenza non lineare del tensore di rigidezza tangente dalla direzione dell'incremento di deformazione (non linearità incrementale).

L'espressione più generale dell'equazione costitutiva è fornita dai cosiddetti modelli incrementalmente non-lineari del secondo ordine, per i quali:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{L}(\sigma, \mathbf{q}) \dot{\epsilon} + \frac{1}{\|\dot{\epsilon}\|} \mathbf{Q}(\sigma, \mathbf{q}) [\dot{\epsilon} \otimes \dot{\epsilon}] \quad (3.23)$$

in tale equazione il primo termine a destra è una funzione lineare nell'incremento di deformazione $\dot{\epsilon}$, mentre il secondo è quadratico in $\dot{\epsilon}$. \mathbf{Q} è un tensore del sesto ordine, mentre \mathbf{L} è un tensore del quarto ordine. La non-linearità incrementale è data dal termine $\frac{1}{\|\dot{\epsilon}\|} \mathbf{Q}[\dot{\epsilon} \otimes \dot{\epsilon}]$. Infatti grazie a tale termine la rigidezza tangente corrispondente alla eq. 3.23 risulta essere una funzione continua della direzione dell'incremento di deformazione.

Una particolare classe di modelli incrementalmente non lineari è stata sviluppata da Kolymbas (1991)¹, che gli ha attribuito il nome di teoria della ipoplasticità.

¹ Si noti come il termine ipoplasticità è stato usato anche da Dafalias (1986) per riferirsi a una classe differente di modelli incrementalmente non-lineari, sviluppati nell'ambito della elastoplasticità incrudente.

L'equazione costitutiva in forma incrementale per la teoria della ipoplasticità assume la seguente forma generale:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\| \quad (3.24)$$

Nella eq. 3.24 \mathbf{L} è un tensore del quarto ordine e \mathbf{N} è un tensore simmetrico del secondo ordine, entrambi dipendenti dallo stato corrente del materiale. Si nota che la eq. 3.24 è un caso particolare della eq. 3.23, ottenuta ponendo $\mathbf{Q} = \mathbf{N} \otimes \mathbf{I}^s$. Una caratteristica essenziale della eq. 3.24 è che la non-linearità rispetto a $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ è tenuta in conto attraverso la quantità scalare $\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|$.

I principi fondamentali della teoria dell'ipoplasticità sono stati definiti da Kolymbas (1991). Successivi sviluppi sono stati discussi in numerosi articoli e monografie. Tra i più recenti si richiamano i lavori di Wu & Kolymbas (2000), Tamagnini et al. (2000), Kolymbas (1991), Niemunis (2002).

Negli ultimi dieci anni sono state proposte due diverse formulazioni della ipoplasticità, allo scopo di modellare il comportamento dei terreni a grana grossa. La prima è stata sviluppata a Karlsruhe in seguito al lavoro pionieristico di Kolymbas (Kolymbas & Wu, 1993). Ad essa ci riferiremo nel seguito con il termine di K-ipoplasticità o semplicemente ipoplasticità. La seconda, sviluppata a Grenoble dal lavoro di Chambon (Chambon, 1989); (Chambon et al., 1994) con il nome generale di *CLOE*-ipoplasticità. Sebbene questi due approcci condividano alcuni aspetti essenziali il loro sviluppo sostanzialmente è indipendente come evidenziato in Tamagnini et al. (2000). Di seguito l'attenzione verrà focalizzata sulla K-ipoplasticità.

La particolare struttura dell'equazione costitutiva di base eq. 3.24 dei modelli ipoplastici può essere messa in luce attraverso il concetto di *inviluppo di risposta tensionale* (stress response envelope, SRE), proposto da Gudehus (1979) come strumento per visualizzare le proprietà di una assegnata equazione costitutiva in forma incrementale. L'inviluppo di risposta tensionale è definito come l'immagine nello spazio degli incrementi di tensione di una sfera unitaria definita nello spazio degli incrementi di deformazione, attraverso la legge di corrispondenza definita dall'equazione costitutiva eq. 3.24.

Nel caso generale un SRE è una superficie nello spazio a sei dimensioni. Nel caso particolare di condizioni di sollecitazione assial-simmetriche (triassiali), il numero delle componenti di tensione e deformazione indipendenti si riduce a due, e una conveniente rappresentazione grafica del SRE può essere fornita nel cosiddetto piano di Rendulic degli incrementi di tensione $\dot{\sigma}_a : \sqrt{2}\dot{\sigma}_r$, dove σ_a e σ_r sono rispettivamente le componenti (principali) assiali e radiali della tensione. Il tipico SRE di un materiale ipoplastico è mostrato in Fig. 3.4. Come appare evidente dalla figura il cerchio unitario definito nello spazio degli incrementi di deformazione si trasforma in un'ellisse non centrata rispetto all'origine nello spazio degli incrementi di tensione. Quest'effetto può essere spiegato considerando l'effetto combinato dei due termini presenti nella eq. 3.24, vedi Fig. 3.4.

L'effetto dell'operatore lineare \mathbf{L} è quello di trasformare il cerchio unitario di Fig. 3.5a, in un'ellisse centrata nell'origine degli assi nel piano degli incrementi di tensione (Fig. 3.5b). Risulta interessante notare che l'inviluppo in Fig. 3.5b rappresenta il tipico SRE di un modello ipoelastico per il quale la risposta del materiale è incrementalmente lineare.

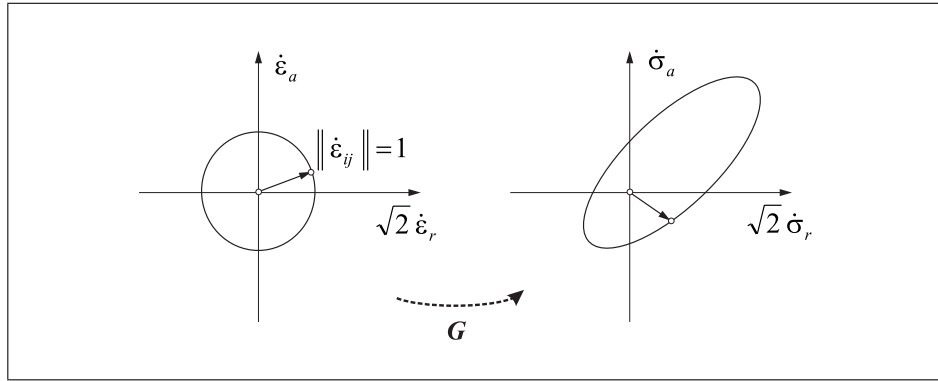


Figura 3.4. Involuppo di risposta tensionale per un materiale ipoplastico per condizioni di sollecitazione assial-simmetriche (Tamagnini & Viggiani, 2002).

La successiva applicazione del termine non lineare $N \|\dot{\epsilon}\|$ – che dipende da $\dot{\epsilon}$ solo attraverso la sua norma, costante - dà luogo alla traslazione dell’ellisse lungo la direzione definita dal tensore N (Fig. 3.5c). Nella configurazione finale SRE non è simmetrico rispetto all’origine degli assi degli incrementi di tensione. Questa mancanza di simmetria esprime graficamente il concetto di non linearità incrementale.

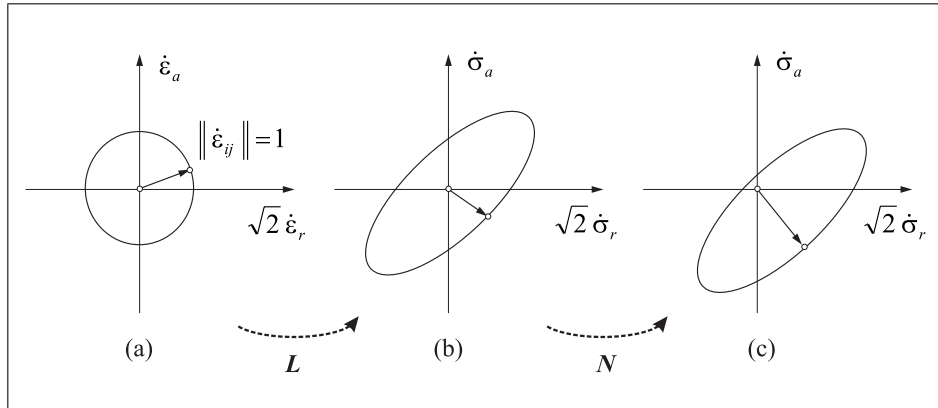


Figura 3.5. Interpretazione grafica dell’equazione costitutiva ipoplastica: a) cerchio nel piano delle deformazioni incrementali; b) effetto del termine lineare; c) effetto del termine non lineare. (Tamagnini & Viggiani, 2002).

Risulta interessante notare che il tipico SRE di un materiale elastoplastico per una singola condizione di carico-scarico è composto da due semi-ellissi, uno per lo scarico elastico e uno per il carico plastico, entrambi centrati nell’origine degli assi dello spazio degli incrementi di tensione e collegati lungo una linea che definisce la condizione di carico neutro (Fig. 3.6). Come chiaro dalla figura, questo produce un involucro non regolare che potrebbe generare risposte non realistiche per percorsi

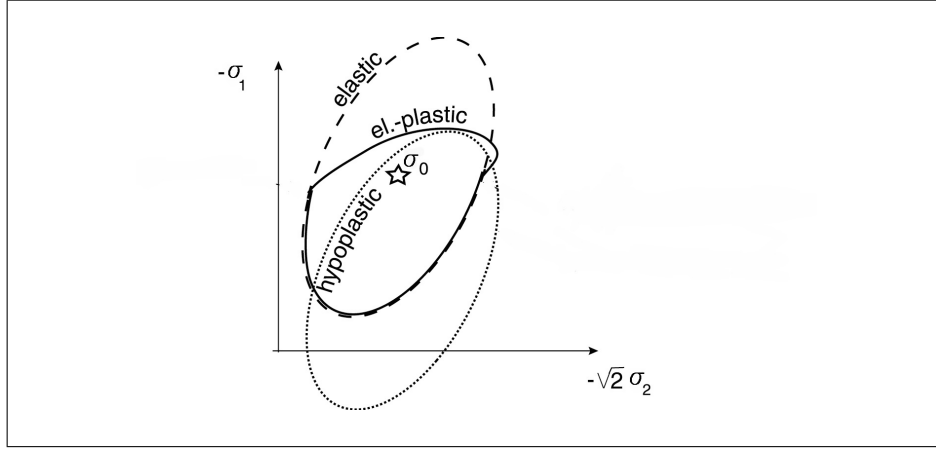


Figura 3.6. Tipico SRE generato da ipoelasticità (linea tratteggiata), elastoplasticità (linea continua) e ipoplasticità (linea puntinata) relativo allo stesso stato tensionale corrente.

Nella prima generazione di modelli costitutivi ipoplastici, l'insieme delle variabili di stato è costituito soltanto dal tensore della tensione, i.e., il tensore costitutivo \mathbf{L} e \mathbf{N} sono funzioni soltanto di $\boldsymbol{\sigma}$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}) \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\| \quad (3.25)$$

A dispetto della sua relativa semplicità è stato dimostrato che la eq. 3.25 fornisce una soddisfacente descrizione sia qualitativa che quantitativa del comportamento sperimentalmente osservato della sabbia densa e sciolta in condizioni di carico *monotono* (Bauer, 1996; Chambon et al., 1994). Comunque una delle maggiori limitazioni della teoria della ipoplasticità è rappresentata dalla incapacità intrinseca di descrivere il comportamento del terreno in condizioni di carico ciclico non-simmetrico, poichè la risposta prevista per ogni ciclo è identica a quella relativa al primo ciclo (ciò comporta il cosiddetto effetto *ratcheting*) (Fig. 3.7). Successivi sviluppi della K-ipoplasticità hanno permesso di estendere l'insieme delle variabili di stato includendo:

- i) l'indice dei vuoti, al fine di ottenere una formulazione unificata di un ampio intervallo di densità iniziali e di incorporare il concetto di stato critico (Gudehus, 1996; Bauer, 1996);
- ii) un tensore di *struttura* per tener conto dell'anisotropia intrinseca (Wu, 1998);
- iii) una variabile interna tensoriale strain-like, che permette di riprodurre un comportamento ciclico (Niemunis & Herle, 1997).

Ai fini di tale lavoro è necessario approfondire il punto (iii). Negli approcci proposti da Niemunis & Herle (1997) la eq. 3.24 diviene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}, e, \boldsymbol{\eta}_\delta, \boldsymbol{\eta}) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.26)$$

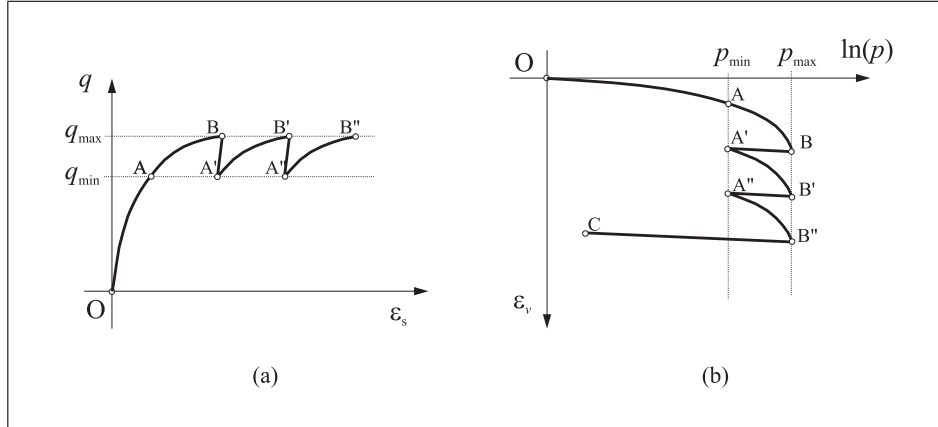


Figura 3.7. Effetto ratcheting per carichi ciclici (Tamagnini & Viggiani, 2002): (a) compressione assial-simmetrica a $p = \text{const}$; (b) compressione isotropa a $q = \text{const}$.

dove e è l'indice di vuoti, $\boldsymbol{\eta}$ è la direzione dell'incremento di deformazione, e:

$$\boldsymbol{\eta}_\delta := \begin{cases} \boldsymbol{\delta} / \|\boldsymbol{\delta}\| & \text{se: } \boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{se: } \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.27)$$

è la direzione della variabile interna $\boldsymbol{\delta}$. Il tensore del secondo ordine simmetrico $\boldsymbol{\delta}$, denominato *intergranular strain*, è caratterizzato dalla seguente legge di evoluzione:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} := \begin{cases} (\mathbf{I}^s - \rho^{\beta_r} \boldsymbol{\eta}_\delta \otimes \boldsymbol{\eta}_\delta) \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} & \text{if } \boldsymbol{\eta}_\delta \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0 \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} & \text{if } \boldsymbol{\eta}_\delta \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \leq 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Per ogni stato assegnato, il valore corrente di $\boldsymbol{\delta}$ ha memoria degli effetti della recente storia di deformazione del materiale. Denotando con $\rho := \|\boldsymbol{\delta}\| / R \in [0, 1]$ l'intensità normalizzata della intergranular strain (dove $R := \max \|\boldsymbol{\delta}\|$ è una costante del materiale), il tensore di rigidità tangente assume la seguente espressione:

$$\mathbf{D} = [\rho^\chi m_T + (1 - \rho^\chi) m_R] \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}, e) + \rho^\chi (1 - m_T) [\mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}, e) \boldsymbol{\eta}_\delta] \otimes \boldsymbol{\eta}_\delta + \rho^\chi \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, e) \otimes \boldsymbol{\eta}_\delta \quad (3.29)$$

se $\boldsymbol{\eta}_\delta \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0$, o:

$$\mathbf{D} = [\rho^\chi m_T + (1 - \rho^\chi) m_R] \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}, e) + \rho^\chi (m_R - m_T) [\mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}, e) \boldsymbol{\eta}_\delta] \otimes \boldsymbol{\eta}_\delta \quad (3.30)$$

se $\boldsymbol{\eta}_\delta \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \leq 0$. Le quantità scalari β_r , χ , m_T e m_R che compaiono nella eq. 3.29 e nella eq. 3.30 sono costanti del materiale. Come già osservato da Niemunis & Herle (1997) e da Tamagnini & Viggiani (2002), la direzione dell'incremento di deformazione $\boldsymbol{\eta}$ non compare in maniera esplicita né nella eq. 3.29 né nella eq. 3.30. Ciò è in contrasto con la corrispondente espressione del tensore di rigidità tangente della teoria della ipoplasticità (eq. 3.24):

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) + \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \otimes \boldsymbol{\eta} \quad (3.31)$$

In effetti, nella ipoplasticità con intergranular strains, la non linearità incrementale è dovuta solo con la condizione di switch associata al segno del prodotto scalare $\boldsymbol{\eta}_\delta \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. Inoltre, tale formulazione può essere considerata incrementalmente bi-lineare, e da questo punto di vista è vicina alla teoria della plasticità con bounding, piuttosto che ai veri modelli incrementalmente non lineari.

I modelli costitutivi presi in esame

4.1 Introduzione

Sulla base delle caratteristiche peculiari del comportamento dei terreni a grana fine in condizioni di carico ciclico/dinamico, dettigliatamente descritte nel Par. 2.3 e delle considerazioni sulla modellazione di tale comportamento, riportate nel Cap. 3 sono stati selezionati per la descrizione del comportamento dei terreni in condizioni di carico ciclico/dinamico i tre seguenti modelli costitutivi:

- Il modello di Rouainia & Wood (2000) (Par. 4.2) inquadrato nell'ambito della teoria della plasticità con incrudimento cinematico (Par. 3.3);
- Il modello di Tamagnini & D'Elia (1999) (Par. 4.3) inquadrato nell'ambito della teoria della plasticità con Bounding Surface (Par. 3.4);
- Il modello di Mašín (2005) (Par. 4.4) inquadrato nell'ambito della teoria della ipoplasticità con variabili interne (Par. 3.5).

Mentre il secondo modello è un modello a plasticità diffusa con incrudimento isotropo, gli altri due utilizzano una variabile interna a carattere tensoriale per riprodurre gli effetti della storia di carico recente, e sono quindi caratterizzati da un comportamento anisotropo.

Sebbene la struttura matematica dei tre modelli sia abbastanza differente, essi si fondano sui principi di base della meccanica dello Stato Critico, e sono capaci di riprodurre alcune caratteristiche del comportamento dei terreni a grana fina, quali: i) l'esistenza di una linea di compressione vergine in compressione isotropa o edometrica; ii) l'esistenza di una superficie di stato critico, raggiunta asintoticamente per elevate distorsioni. Per questa ragione, molte delle costanti che caratterizzano i tre modelli hanno lo stesso significato fisico ed assumono gli stessi valori numerici quando i modelli sono calibrati sullo stesso insieme di dati sperimentali. Questo aspetto è particolarmente importante per garantire un livello minimo di coerenza tra i vari approcci nella valutazione comparativa dei risultati ottenuti nella soluzione di un assegnato problema ai limiti. Infine, tutti e tre modelli sono in grado di descrivere gli effetti di natura meccanica dovuti alla presenza di legami di "bonding" nei depositi naturali con "struttura" e di quantificare i fenomeni di destrutturazione che si manifestano gradualmente quando tali legami sono distrutti a seguito della variazione dello stato di tensione e di deformazione nel terreno.

4.2 Il modello di Rouainia & Wood (2000): EP–RW

Il modello di Rouainia & Wood (2000) è un modello elastoplastico con incrudimento cinematico, che prevede tre differenti superfici aventi forma ellittica nel piano degli invarianti tensionali triassiali $p : q$ (Fig. 4.1).

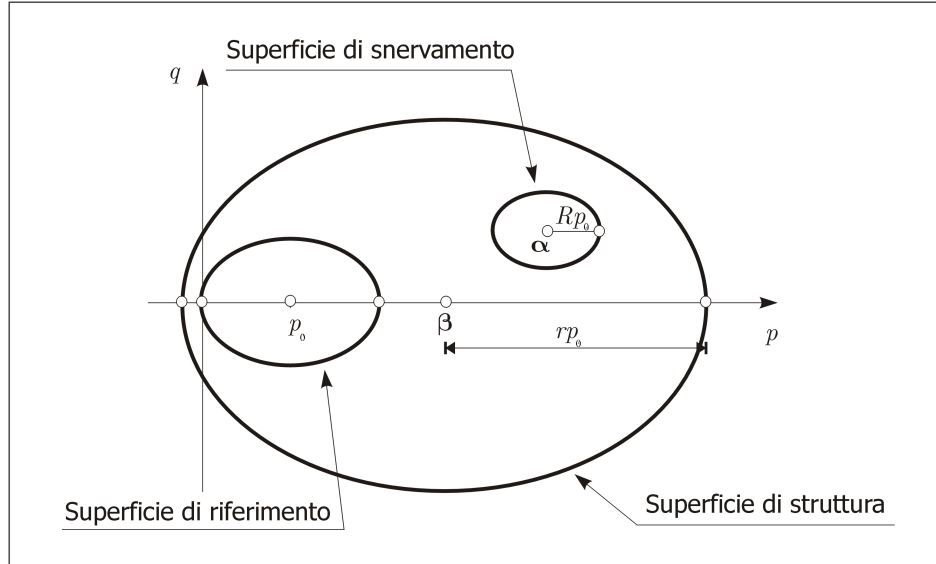


Figura 4.1. Superfici del modello di Rouainia & Wood (2000).

La superficie di snervamento divide la zona elastica da quella plastica e si muove con lo stato tensionale corrente.

La superficie di struttura rappresenta la BS e quando si sviluppano deformazioni plastiche tende a collapsare sulla superficie di riferimento, che determina il comportamento del materiale ricostituiti e di quelli completamente destrutturati.

Si assume l'ipotesi cinematica fondamentale espressa nella eq. 3.1 e l'incremento di deformazione elastica è messo in relazione con l'incremento di tensione dalla relazione ipoelastica espressa dalla eq. 3.2. Il tensore di rigidezza tangente elastico, \mathbf{D}^e , assume la seguente espressione:

$$\mathbf{D}^e = \left(K - \frac{2}{3}G \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G\mathbf{I}^s \quad (4.1)$$

dove:

$$K = \frac{\langle p - p_l \rangle + p_l}{\kappa^*}; \quad G = \frac{3(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}K \quad (4.2)$$

sono rispettivamente il modulo di volume e il modulo di taglio e ν è il coefficiente di Poisson. Nella eq. 4.2 κ^* è un parametro del materiale, che ha lo stesso significato delle variabile κ nei modelli di stato critico - eccetto per l'assunzione di leggi di compressibilità bilogaritmiche per la linea di rigonfiamento, e p_l è un valore limite

della tensione media efficace al di sotto del quale il modulo di volume e di taglio rimangono costanti.

4.2.1 Superficie di riferimento, superficie di snervamento e superficie di struttura

La superficie di riferimento, che passa per l'origine degli assi di riferimento (Fig. 4.2) è utilizzata per rappresentare il comportamento dei terreni ricostituiti.

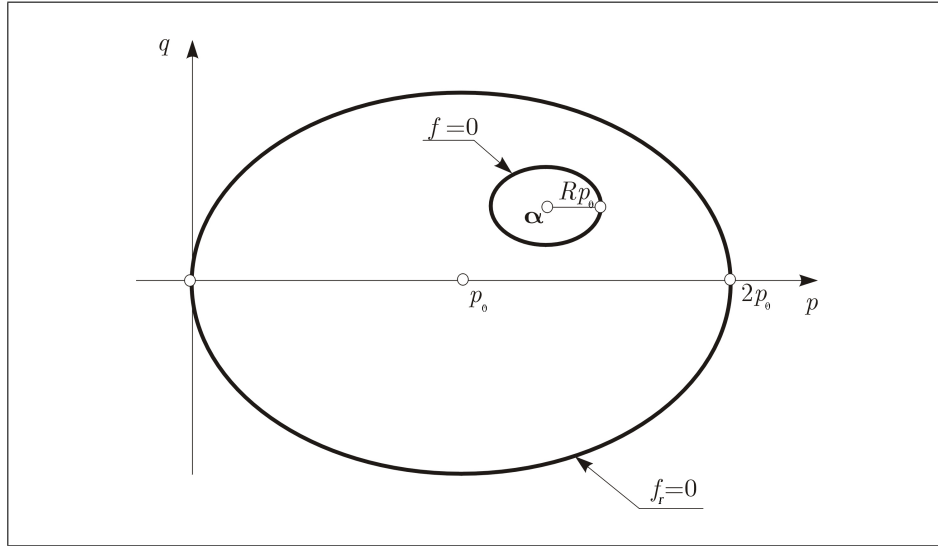


Figura 4.2. Superficie di snervamento e superficie di riferimento.

La sua espressione analitica è:

$$f_r(\boldsymbol{\sigma}, p_0) = \frac{3}{2} \frac{1}{[M(z)]^2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} + (p - p_0)^2 - p_0^2 = 0 \quad (4.3)$$

in cui la quantità scalare p_0 determina la dimensione della superficie e la funzione $M(z)$ con $z = \sin(3\theta)$ e θ , angolo di Lode di $\boldsymbol{\sigma}$, determina la forma della superficie di riferimento nel piano deviatorico e per la quale si adotta la seguente espressione di Van Eekelen & Potts (1978):

$$M(z) = \alpha(1 + \beta z)^n \quad (4.4)$$

con:

$$n = -0.25 \quad \alpha = \frac{1}{2^n} (1 + c_M^{1/n})^{1/n} M_c \quad \beta = \frac{(1 - c_M^{1/n})}{(1 + c_M^{1/n})} = const. \quad (4.5)$$

in cui $c_M = M_c/M_e$. Per un dato valore di θ , la superficie di riferimento ha la forma di un'ellisse nel piano $p : q$, con assi principali paralleli agli assi delle coordinate e

che interseca l'asse p nell'origine e in $p = 2p_0$ (Fig. 4.2). I due parametri M_c e M_e definiscono le dimensioni dell'ellisse rispettivamente in condizioni di compressione triassiale e di estensione triassiale.

La superficie di snervamento che racchiude il dominio elastico, si muove all'interno della superficie di struttura secondo una legge di incrudimento cinematica. La sua espressione analitica è la seguente:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, p_0) = \frac{3}{2} \frac{1}{[M(z_\alpha)]^2} (\mathbf{s} - dev(\boldsymbol{\alpha})) \cdot (\mathbf{s} - dev(\boldsymbol{\alpha})) + (p - p_\alpha)^2 - (Rp_0)^2 = 0 \quad (4.6)$$

in cui R è un parametro del materiale che rappresenta il rapporto di dimensioni tra $f = 0$ e $f_r = 0$ ed assume valori inferiori all'unità (Fig. 4.2). Il tensore del secondo ordine, $\boldsymbol{\alpha}$, rappresenta la posizione del centro della superficie di snervamento nello spazio tensionale, che varia con una legge di incrudimento cinematico descritta nel Par. 4.2.3. Siano inoltre $p_\alpha = 1/3(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{1})$ e $dev(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} - p_\alpha \mathbf{1}$ rispettivamente la parte sferica e la parte deviatorica di $\boldsymbol{\alpha}$. Infine la funzione $M(z_\alpha)$ con $z_\alpha = \sin(3\theta_\alpha)$ e θ_α , angolo di Lode di $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}$ determina la forma della superficie di snervamento nel piano deviatorico ed è definita analogamente a quella relativa alla superficie di riferimento (eq. 4.4).

La superficie di struttura controlla il processo di destrutturazione ed è definita come:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}, r, p_0) = \frac{3}{2} \frac{1}{[M(z_\beta)]^2} (\mathbf{s} - dev(\boldsymbol{\beta})) \cdot (\mathbf{s} - dev(\boldsymbol{\beta})) + (p - p_\beta)^2 - (rp_0)^2 = 0 \quad (4.7)$$

dove r è una variabile di stato interna che rappresenta il rapporto di dimensioni tra $F = 0$ e $f_r = 0$ ed assume valori non inferiori all'unità (Fig. 4.3), nel caso di terreni ricostituiti o completamente destrutturati $r = 1$ e $F = 0$ coincide con $f_r = 0$. Il tensore del secondo ordine $\boldsymbol{\beta}$ rappresenta la posizione del centro della

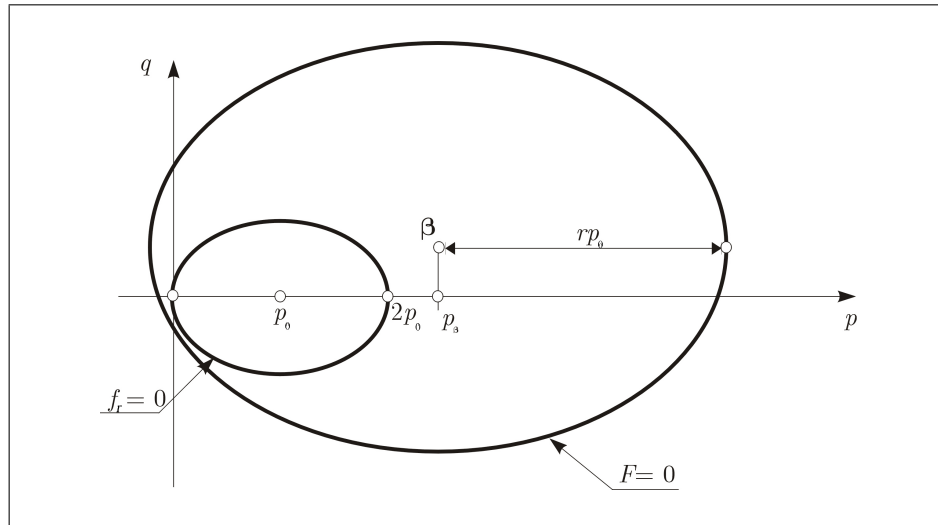


Figura 4.3. Superficie di struttura e superficie di riferimento.

superficie di struttura nello spazio tensionale e si assume essere definito come:

$$\boldsymbol{\beta} = p_0(r - 1)\boldsymbol{\eta}_0 + r\mathbf{1} \quad (4.8)$$

con $\boldsymbol{\eta}_0$ tensore del secondo ordine deviatorico che controlla la struttura (Fig. 4.4). Siano inoltre $p_\beta = 1/3(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{1})$ e $dev(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta} - p_\beta\mathbf{1}$ rispettivamente la parte sferica e

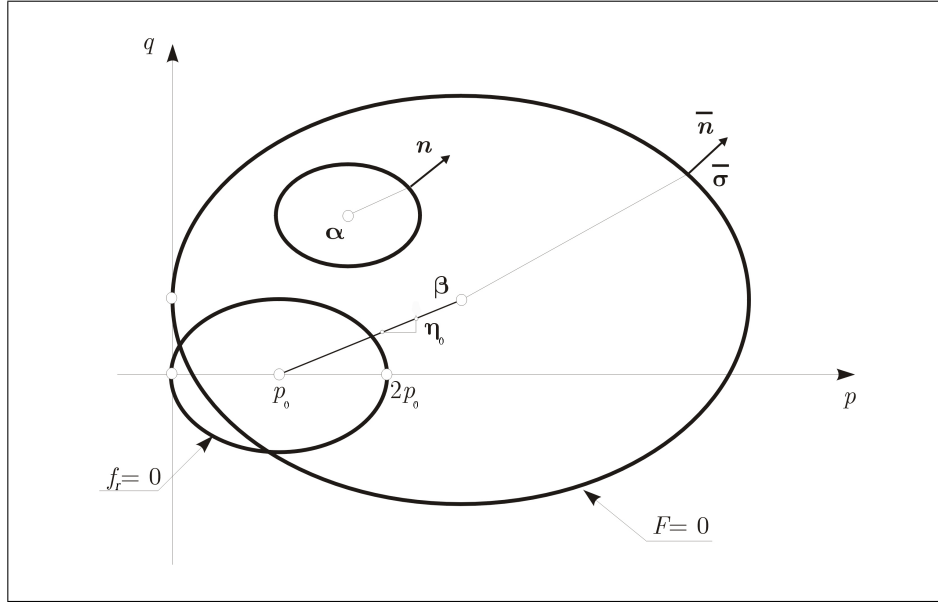


Figura 4.4. Legge di corrispondenza.

la parte deviatorica di $\boldsymbol{\beta}$. Infine la funzione $M(z_\beta)$ con $z_\beta = \sin(3\theta_\beta)$ e θ_β , angolo di Lode di $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}$ determina la forma della superficie di struttura nel piano deviatorico ed è definita analogamente a quella relativa alla superficie di riferimento (eq. 4.4).

4.2.2 Legge di flusso

L'incremento di deformazione plastica è dato dalla legge di flusso analoga alla eq. 3.12 in cui si assume l'ipotesi di flusso associato $\mathbf{n}_g \equiv \mathbf{n}$:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda}\mathbf{n} \quad (4.9)$$

dove \mathbf{n} è il tensore unitario che rappresenta la normale uscente dalla superficie di snervamento $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, p_0)$ come è possibile osservare dalla Fig. 4.4.

4.2.3 Leggi di incrudimento

In linea con il modello di Cam-Clay Modificato (Schofield & Wroth, 1968), (Roscoe & Burland, 1968) si adotta una legge di incrudimento isotropo volumetrico, che

regola la variazione di dimensione della superficie di riferimento p_0 data da una legge di evoluzione del tipo:

$$\dot{p}_0 = \dot{\lambda} h_p \quad (4.10)$$

in cui:

$$h_p = \frac{p_0}{\lambda^* - \kappa^*} \mathbf{n} \cdot \mathbf{1} \quad (4.11)$$

in cui λ^* è un parametro del materiale, che ha lo stesso significato di λ nei modelli di stato critico, eccetto per l'assunzione di leggi di compressibilità bi-logaritmiche per la linea di compressione isotropa.

La legge di evoluzione della variabile di stato interna r è del tipo:

$$\dot{r} = \dot{\lambda} h_r \quad (4.12)$$

dove:

$$h_r = -\frac{k}{\lambda^* - \kappa^*} (r - 1) \left[(1 - A)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{1})^2 + \frac{2}{3} A \|dev(\mathbf{n})\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

in cui k e A sono due parametri del materiale che descrivono rispettivamente la velocità di degradazione dei legami di bonding all'aumentare delle deformazioni plastiche e il contributo delle deformazioni plastiche volumetriche e distorsionali alla variazione di r : per $A = 1$ la destrutturazione è completamente distorsionale, per $A = 0$ è completamente volumetrica.

La definizione di una legge di evoluzione per α richiede la determinazione di una legge di corrispondenza che associa ad ogni stato plastico, che si trova su $f = 0$ un punto coniugato su $F = 0$. Si pone:

$$\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha} = \frac{R}{r} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\beta}) \quad (4.14)$$

da cui:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\beta} + \frac{r}{R} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) \quad (4.15)$$

tale che i due stati abbiano la stessa normale uscente (Fig. 4.4).

$$\mathbf{n} \equiv \bar{\mathbf{n}} = \left\| \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (4.16)$$

Introducendo uno spazio tensionale normalizzato e traslato (Fig. 4.5) rispetto al quale la superficie di struttura ha dimensione unitaria ed è centrata rispetto all'origine si ha:

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{1}{rp_0} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}) \quad \bar{\boldsymbol{\tau}}' = \frac{1}{rp_0} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\beta}) \quad \boldsymbol{\alpha}' = \frac{1}{rp_0} (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \quad (4.17)$$

Al fine di evitare che le superfici $f = 0$ e $F = 0$ si intersechino quando $\boldsymbol{\sigma} \equiv \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ si impone che sia soddisfatta la seguente condizione:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}' = \dot{\mu} (\bar{\boldsymbol{\tau}}' - \bar{\boldsymbol{\tau}}) \quad (4.18)$$

Quest'ultima quantità si ottiene anche derivando la eq. 4.17₍₃₎ come:

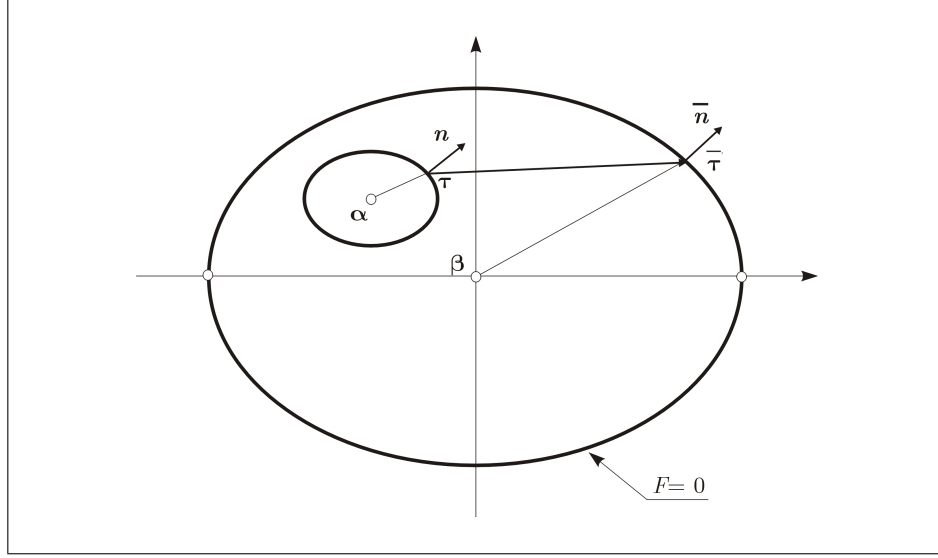


Figura 4.5. Spazio tensionale normalizzato e traslato.

$$\dot{\alpha}' = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{rp_0} (\alpha - \beta) \right\} = \frac{1}{rp_0} \left\{ \dot{\alpha} - \dot{\beta} - \left(\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{p}_0}{p_0} \right) (\alpha - \beta) \right\} \quad (4.19)$$

inoltre sottraendo la eq. 4.17(2) dalla eq. 4.17(1) si ha:

$$\bar{\tau}' - \tau' = \frac{1}{rp_0} (\bar{\sigma} - \sigma) \quad (4.20)$$

Sostituendo la eq. 4.19 e la eq. 4.20 nella eq. 4.18 si ottiene tramite opportuni passaggi:

$$\dot{\alpha} = \dot{\beta} + \left(\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{p}_0}{p_0} \right) (\alpha - \beta) + \dot{\mu} (\bar{\sigma} - \sigma) \quad (4.21)$$

Tale espressione è completamente determinata una volta che siano definiti $\dot{\beta}$ e $\dot{\mu}$. Derivando la eq. 4.8 rispetto al tempo si ottiene:

$$\dot{\beta} = \dot{\gamma} \mathbf{h}_\beta \quad \mathbf{h}_\beta := \{h_r p_0 + r h_p\} \mathbf{1} + \{h_r p_0 + (r-1) h_p\} \boldsymbol{\eta}_0 \quad (4.22)$$

Al fine di ottenere una espressione di $\dot{\mu}$ in termini di $\dot{\lambda}$ e $\dot{\epsilon}$ si utilizza la condizione di consistenza sulla superficie di snervamento:

$$\dot{f} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial f}{\partial p_0} \cdot \dot{p}_0 = 0 \quad (4.23)$$

Posto:

$$f^* := \left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\| \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = f^* \mathbf{n} \quad (4.24)$$

si ottiene:

$$f^* \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \left\{ \dot{\boldsymbol{\beta}} + \left(\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{p}_0}{p_0} \right) (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) + \dot{\mu} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \right\} + \frac{\partial f}{\partial p_0} \cdot \dot{p}_0 = 0 \quad (4.25)$$

Tenendo in conto le seguenti espressioni:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{n}) \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial f}{\partial (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha})} \frac{\partial (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -f^* \mathbf{n} \quad (4.27)$$

$$\tilde{K}_p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \mathbf{n} - \frac{1}{f^*} \frac{\partial f}{\partial p_0} h_p \quad (4.28)$$

e risolvendo la eq. 4.25 rispetto a $\dot{\mu}$ si ottiene:

$$\dot{\mu} = \frac{1}{\mathbf{n} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})} \left\{ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \left[\tilde{K}_p + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}_\beta + \left(\frac{h_r}{r} + \frac{h_p}{p_0} \right) \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \right] \right\} \quad (4.29)$$

Il moltiplicatore plastico $\dot{\lambda}$ deve essere valutato considerando le seguenti condizioni:

1. sulla superficie di struttura il modello si comporta come un modello elasto-plastico standard, quindi $\dot{\lambda}$ può essere valutato dalla condizione di consistenza su $F = 0$;
2. all'interno della superficie di struttura, il modulo plastico deve decrescere con continuità al diminuire della distanza tra lo stato corrente e lo stato immagine secondo una espressione analoga a quella fornita dalla eq. 3.18.

La condizione di consistenza su $F = 0$ impone che per ogni processo plastico si deve avere:

$$\dot{F} = 0 \implies \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\beta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \frac{\partial F}{\partial p_0} \cdot \dot{p}_0 + \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \dot{r} = 0 \quad (4.30)$$

Posto:

$$F^* := \left\| \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\| \quad \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = F^* \mathbf{n} \quad (4.31)$$

ed osservando che:

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial f}{\partial (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta})} \frac{\partial (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = - \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -F^* \mathbf{n} \quad (4.32)$$

Sostituendo la eq. 4.31 e la eq. 4.32 nella eq. 4.30 si ottiene:

$$F^* \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} - F^* \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} + \frac{\partial F}{\partial p_0} \cdot \dot{p}_0 + \frac{\partial F}{\partial r} \cdot \dot{r} = 0 \quad (4.33)$$

Sostituendo le leggi di evoluzione di: $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ dalla eq. 4.21, $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ dalla eq. 4.23, \dot{p}_0 dalla eq. 4.10 \dot{r} e dalla eq. 4.12 si ha:

$$F^* \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - F^* \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e (\dot{\lambda} \mathbf{n}) - F^* \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}_\beta \dot{\lambda} + \frac{\partial F}{\partial p_0} h_p \dot{\lambda} + \frac{\partial F}{\partial r} h_r \dot{\lambda} = 0 \quad (4.34)$$

da cui raccogliendo rispetto a $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{K_p^{BS}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.35)$$

in cui è stata introdotta la grandezza, K_p^{BS} , la cui denominazione indica che la superficie di struttura rappresenta appunto la BS, ed è definita come:

$$K_p^{BS} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}_\beta - \frac{1}{F^*} \left(\frac{\partial F}{\partial p_0} h_p + \frac{\partial F}{\partial r} h_r \right) \quad (4.36)$$

definendo il modulo plastico sulla superficie di struttura:

$$H_p^{BS} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}_\beta - \frac{1}{F^*} \left(\frac{\partial F}{\partial p_0} h_p + \frac{\partial F}{\partial r} h_r \right) \quad (4.37)$$

si ottiene la seguente espressione per K_p^{BS} :

$$K_p^{BS} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + H_p^{BS} \quad (4.38)$$

Per la determinazione del modulo plastico all'interno della superficie di struttura è necessario introdurre la seguente definizione di distanza tra $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\delta = \mathbf{n} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \quad (4.39)$$

Il cui valore massimo è:

$$\delta_{max} = 2 \left(\frac{r}{R} - 1 \right) \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) \quad (4.40)$$

Per gli stati interni alla superficie di struttura per $\dot{\lambda}$ si assume una legge del tutto analoga alla eq. 3.7:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{K_p} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.41)$$

in cui:

$$K_p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + H_p \quad (4.42)$$

dove:

$$H_p = H_p^{BS} + \frac{1}{\lambda^* - \kappa^*} B p_0^3 \left(\frac{\delta}{\delta_{max}} \right)^\psi \quad (4.43)$$

in cui B e ψ sono parametri del materiale. Si osservi che quando $\delta = 0$ $H_p = H_p^{BS}$.

Introducendo la definizione di δ espressa dalla eq. 4.39 e l'espressione di K_p della eq. 4.42 l'espressione di $\dot{\mu}$ (eq. 4.29) in corrispondenza di stati all'interno della superficie di struttura ($\delta > 0$) assume la seguente espressione:

$$\dot{\mu} = \frac{1}{\delta} \left\{ 1 - \frac{1}{K_p} \left[\tilde{K}_p + \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}_\beta + \left(\frac{h_r}{r} + \frac{h_p}{p_0} \right) \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \right] \right\} \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^e \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.44)$$

Riassumendo di seguito si riportano e le leggi di evoluzione di tutte le variabili di stato del materiale previste dal modello. L'equazione costitutiva in forma incrementale assume la seguente espressione:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{ep} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{1}{K_p} (\mathbf{D}^e \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{n} \mathbf{D}^e) \quad (4.46)$$

la legge di evoluzione per la variabile interna scalare p_0 che si ricorda determina la dimensione della superficie di riferimento è la seguente:

$$\dot{p}_0 = \dot{\lambda} h_p \quad (4.47)$$

con $\dot{\lambda}$ e h_p espressi rispettivamente dalla eq. 4.41 e dalla eq. 4.11.

La legge di evoluzione per la variabile interna scalare r che tiene conto del bonding del terreno è espressa come:

$$\dot{r} = \dot{\lambda} h_r \quad (4.48)$$

dove h_r è espresso nella eq. 4.13.

La legge di evoluzione per la variabile interna tensoriale $\boldsymbol{\beta}$, che rappresenta il centro della superficie di struttura è espressa come:

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\lambda} \mathbf{h}_\beta \quad (4.49)$$

dove h_r è espresso nella eq. 4.23.

Infine per la legge di evoluzione della variabile interna tensoriale $\boldsymbol{\alpha}$ responsabile dell'incrudimento cinematico si distinguono due espressioni: se lo stato corrente si trova all'interno di $F = 0$ ($\delta > 0$) si ha:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\lambda} \mathbf{h}_\beta + \dot{\lambda} \left(\frac{h_r}{r} + \frac{h_p}{p_0} \right) (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) + \dot{\mu} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \quad (4.50)$$

con $\dot{\mu}$ fornito dalla eq. 4.44. Se lo stato corrente sta su $F = 0$ ($\delta = 0$) dalla eq. 4.14 essendo $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \boldsymbol{\sigma}$ si ha:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{R}{r} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}) \quad (4.51)$$

derivando e sostituendo le espressioni di $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ dalla eq. 4.45, $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ dalla eq. 4.49 e \dot{r} dalla eq. 4.48 si ottiene:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \left(1 - \frac{R}{r} \right) \mathbf{D}^{ep} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \dot{\lambda} \frac{R}{r} \left\{ \mathbf{h}_\beta + \frac{h_r}{r} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\beta}) \right\} \quad (4.52)$$

4.3 Il modello di Tamagnini & D'Elia (1999): BS–TD

Il modello di Tamagnini e D'Elia (1999) è basato sulla teoria della plasticità Bounding Surface, dettagliatamente descritta nel Par. 3.4. La legge di corrispondenza tra lo stato corrente $\boldsymbol{\sigma}$ ed il corrispondente stato immagine $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ sulla BS assume l'espressione:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = b(\boldsymbol{\sigma} - p_\alpha) + p_\alpha \mathbf{1} \quad (4.53)$$

in cui la quantità scalare b è una misura della distanza tra lo stato corrente e il suo punto immagine ($b = 1$ sulla BS, $b \rightarrow \infty$ quando $\boldsymbol{\sigma} = p_\alpha \mathbf{1}$), inoltre p_α è una

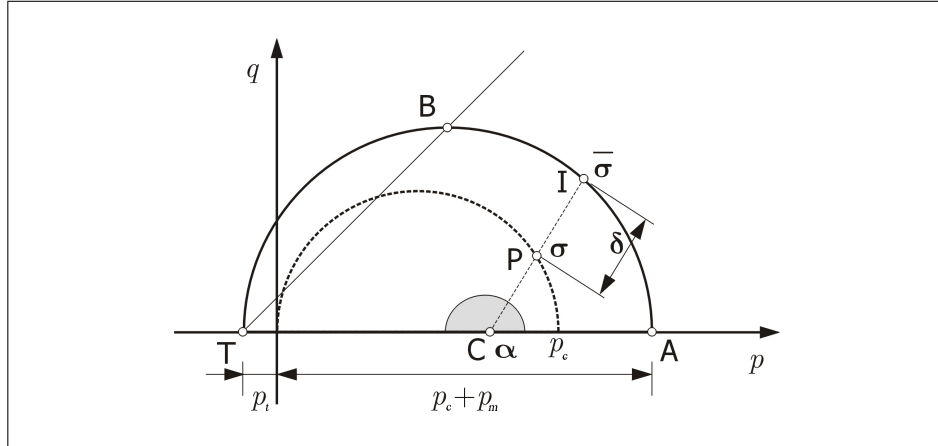


Figura 4.6. Boundin Surface (Tamagnini & D'Elia, 1999).

variabile di stato interna scalare che definisce il centro di proiezione, da cui lo stato corrente è proiettato radialmente su $\bar{\sigma}$, come è possibile osservare nella Fig. 4.6.

Si assume l'ipotesi cinematica fondamentale espressa nella eq. 3.1 e l'incremento di deformazione elastica è messo in relazione con l'incremento di tensione dalla relazione ipoelastica espressa dalla eq. 3.2. Il tensore di rigidità tangente elastico, D^e ha la stessa espressione del modello di di Rouainia & Wood (2000) riportata nella eq. 4.1.

4.3.1 Bounding Surface e centro di proiezione

La BS (Fig. 4.6) assume la seguente espressione:

$$f = (p + p_t)(p - p_c - p_m) + \frac{q^2}{[M(z)]^2} = 0 \tag{4.54}$$

con la funzione $M(z)$ definita dalla eq. 4.4. Per un dato valore dell'angolo di Lode, la BS ha la forma di un'ellisse nel piano $q:p$, con assi principali paralleli agli assi delle coordinate e interseca l'asse p a $p = -p_t$ e $p = p_c + p_m$. Sebbene la forma ellittica adottata è molto semplice – risulta direttamente correlabile con la superficie di snervamento del modello Cam Clay Modificato (Roscoe & Burland, 1968) – può rappresentare con buona accuratezza il comportamento sperimentale osservato dei terreni coesivi teneri, nell'ipotesi di materiali isotropi.

Le quantità p_c , p_m e p_t rappresentano le variabili di snervamento che tengono in conto gli effetti della storia di carico precedente e del bonding. Gli effetti della storia di carico precedente sono rappresentati da p_c , che è l'unica variabile nel caso di materiali privi di struttura. Gli effetti del bonding sono descritti dalle due quantità p_m e p_t : la prima tiene in conto dell'incremento della tensione di snervamento comunemente osservata nei terreni naturali dotati di struttura rispetto ai materiali ricostituiti o parzialmente destrutturati; il secondo è direttamente messo in relazione con la resistenza a trazione del materiale e - con una scelta appropriata dei parametri - permette di descrivere la coesione "vera". Si è assunto:

$$p_t = kp_m \quad (4.55)$$

in cui k è un parametro del materiale.

La scelta delle variabili di snervamento è del tutto analoga a quella di Lagioia & Nova (1995) per il modello elastoplastico per le rocce tenere. In tal caso, comunque i parametri sono utilizzati per descrivere l'evoluzione della BS, e non più l'evoluzione della superficie di snervamento, e il loro valore può essere influenzato dalle deformazioni plastiche che si verificano per percorsi tensionali all'interno del dominio descritto dalla eq. 4.54.

Per la posizione del centro di proiezione sulla base di Dafalias & Herrmann (1986) è stata assunta una quantità scalare p_α che è messa in relazione con p_c e p_m della seguente espressione:

$$p_\alpha := \xi(p_c + p_m) \quad (4.56)$$

dove $\xi \in [0, 1]$ è un parametro del materiale.

4.3.2 Legge di flusso

L'incremento di deformazione plastica è dato dalla legge di flusso analoga alla eq. 3.12 in cui si assume l'ipotesi di flusso associato $\mathbf{n}_g \equiv \mathbf{n}$:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \mathbf{n} \quad \mathbf{n} := \left(\left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\|^{-1} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{\boldsymbol{\sigma}=\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_{\boldsymbol{\sigma}=\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (4.57)$$

dove \mathbf{n} è il tensore unitario che rappresenta la normale uscente dalla BS in corrispondenza di $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$.

L'espressione del moltiplicatore plastico $\dot{\lambda}$ per processi plastici che iniziano sulla BS assume la seguente espressione:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\tilde{K}_p^{BS}} \langle \mathbf{n}_L \cdot \mathbf{D}^e \dot{\epsilon} \rangle \quad (4.58)$$

dove:

$$\tilde{K}_p^{BS} := \mathbf{n}_L \cdot \mathbf{D}^e \mathbf{n} + \bar{H}_p \quad (4.59)$$

in cui \mathbf{n}_L è il tensore unitario che individua la direzione di carico e che per tale modello coincide con \mathbf{n} , e \bar{H}_p è il modulo plastico in $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ la cui espressione è fornita dalla eq. 3.19.

Mentre per i processi che iniziano all'interno della BS $\dot{\lambda}$ assume l'espressione fornita dalla eq. 3.20 in cui per l'ipotesi di flusso associato:

$$\tilde{K}_p := \mathbf{n}_L \cdot \mathbf{D}^e \mathbf{n} + \tilde{H}_p \quad (4.60)$$

dove il modulo plastico \tilde{H}_p (espressione generale nella eq. 3.22) si considera funzione monotonicamente decrescente con la distanza $\delta := \|\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}\|$ tra lo stato corrente ed il suo punto immagine, e di \bar{H}_p .

4.3.3 Leggi di incrudimento

Si assume per semplicità che le leggi di evoluzione delle variabili di stato interne $\{\mathbf{q}\}^T = \{p_c, p_m\}$ la cui espressione generale è la seguente:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \mathbf{h}_{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad (4.61)$$

siano messe in relazione con gli incrementi di deformazione plastica solo attraverso i primi due invarianti $\dot{\epsilon}_v^p$ e $\dot{\epsilon}_s^p$. In accordo con i dati sperimentali disponibili si ottiene:

$$\dot{p}_c = \rho_c \bar{p}_c (\dot{\epsilon}_v^p + \chi_c \dot{\epsilon}_s^p) \quad (4.62)$$

$$\dot{p}_m = -\rho_m p_m (|\dot{\epsilon}_v^p| + \chi_m |\dot{\epsilon}_s^p|) \quad (4.63)$$

in cui $\bar{p}_c := (\langle p_c - p_l \rangle + p_l)$, ρ_c , χ_c , ρ_m e χ_m sono parametri del materiale. La eq. 4.62 è analoga alla legge di evoluzione proposta da Nova (1977). Per $\chi_c = 0$, si riduce alla legge di evoluzione volumetrica isotropa dei modelli di stato critico basati su leggi di compressione bilogarithmici (Borja & Tamagnini, 1998). Il coefficiente ρ_c può essere direttamente messo in relazione con il parametro elastico κ^* e con l'inclinazione della linea di compressione vergine λ^* dei materiali privi di struttura (o completamente destrutturati) – come definito da Butterfield (1979) – tramite la seguente equazione:

$$\rho_c = \frac{1}{\lambda^* - \kappa^*} \quad (4.64)$$

La eq. 4.63 definisce una semplice legge di decadimento esponenziale della variabile di stato interna correlata al bonding con le norme degli incrementi di deformazione plastiche volumetrica e deviatorica. L'utilizzo dei valori assoluti per $\dot{\epsilon}_v^p$ e $\dot{\epsilon}_s^p$ garantisce un andamento di p_m monotonicamente decrescente quando il materiale subisce deformazioni plastiche. Confrontando la eq. 4.62 e la eq. 4.63 con la generica eq. 4.61, è possibile ottenere le seguenti espressioni di $\mathbf{h}_{\mathbf{q}}$:

$$h_c := \rho_c \bar{p}_c \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \chi_c \|dev(\mathbf{n})\| \right) \quad (4.65)$$

$$h_m := -\rho_m p_m \left(|\mathbf{n} \cdot \mathbf{1}| + \sqrt{\frac{2}{3}} \chi_m \|dev(\mathbf{n})\| \right) \quad (4.66)$$

Considerando la eq. 4.65 e la eq. 4.66 assieme alla eq. 4.55 è possibile ricavare in base alla eq. 3.15 la seguente espressione di \bar{H}_p :

$$\bar{H}_p = \frac{(\bar{p} + k p_m)}{L} h_c + \frac{(p_c + 2 p_m - \bar{p})}{L} h_m \quad (4.67)$$

dove \bar{p} è la tensione media in corrispondenza di $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$. Si può osservare che il primo termine che compare nella eq. 4.67 può essere positivo o negativo in relazione al segno di h_c , mentre il secondo termine è sempre negativo. Il primo termine tiene conto dell'incrudimento positivo e negativo dovuto alle variazioni della microstruttura del terreno (e.g. densificazione o dilatazione), ed è presente anche nei terreni senza struttura. Il secondo termine tiene in conto del softening associato con la

rottura dei legami interparticellari che si verifica quando si deforma lo scheletro solido.

Per valutare il modulo plastico all'interno della BS, si considera la seguente espressione particolare della generica eq. 3.22, dovuta a Dafalias (1986), Dafalias & Herrmann (1986):

$$H_p = \bar{H}_p + \hat{H} \left[\left\langle \frac{b}{b-1} - s \right\rangle \right]^{-1} \quad (4.68)$$

Nella precedente equazione s è un parametro del materiale che definisce le dimensioni di un dominio omologo a $f = 0$ avente per centro α in cui $H_p = \infty$ e di conseguenza noto come nucleo elastico; \hat{H} è una funzione di snervamento scalare definita come:

$$\hat{H} := (\langle p_c - p_l \rangle + p_m + p_l) \rho_c h_0 \quad (4.69)$$

e h_0 è un parametro del materiale.

4.4 Il modello di Mašín (2005): HP–MA

Il modello di Mašín (2005) è un modello ipoplastico non viscoso, specificamente sviluppato per riprodurre gli aspetti essenziali del comportamento di terreni argillosi, ed in particolare le condizioni di stato critico.

Nel modello di Mašín l'equazione costitutiva eq. 3.24 assume l'espressione:

$$\dot{\sigma} = f_s \mathcal{L}(\sigma, \mathbf{q}) \dot{\epsilon} + f_d \mathbf{N}(\sigma, \mathbf{q}) \|\dot{\epsilon}\| \quad (4.70)$$

nella quale compaiono i fattori definiti nel seguito.

4.4.1 Operatore lineare

L'operatore lineare \mathcal{L} ha la seguente espressione:

$$\mathcal{L} = 3(c_1 \mathbf{I}^s + c_2 a^2 \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta}) \quad (4.71)$$

in cui $\boldsymbol{\eta}$ è una quantità tensoriale definita come:

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})} \quad (4.72)$$

mentre a è una quantità scalare definita come:

$$a = \frac{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi_c)}{2\sqrt{2} \sin \varphi_c} \quad (4.73)$$

dove φ_c è l'angolo di attrito del terreno in condizioni di stato critico.

Il fattore c_2 è definito come:

$$c_2 = 1 + (1 - c_1) \frac{3}{a^2} \quad (4.74)$$

mentre il parametro c_1 è dato da:

$$c_1 = \frac{2}{9r} \left(3 + a^2 - 2^\alpha \sqrt{3a} \right) \quad (4.75)$$

Il parametro r rappresenta il rapporto tra il modulo di compressione volumetrica, K_i , e il modulo di taglio G_i a partire da stati isotropi e normalmente consolidati. La quantità scalare α è definita dalla seguente eq. 4.100.

4.4.2 Tensore del secondo ordine

Il tensore del secondo ordine \mathbf{N} ha la seguente espressione:

$$\mathbf{N} = \mathcal{L} \left(-Y \frac{\mathbf{m}}{\|\mathbf{m}\|} \right) \quad (4.76)$$

in cui la funzione Y rappresenta il grado di non linearità con valore limite $Y = 1$ in corrispondenza della superficie limite di Matsuoka & Nakai. Tale quantità scalare assume l'espressione:

$$Y = (1 - Y_i) \left\{ \frac{-\frac{I_1 I_2}{I_3} - 9}{\frac{9 - \sin^2 \varphi_c}{1 - \sin^2 \varphi_c} - 9} \right\} + Y_i \quad (4.77)$$

Nella quale:

$$Y_i = \frac{\sqrt{3}a}{3 + a^2} \quad (4.78)$$

è il valore che Y assume in corrispondenza degli stati isotropi, ed

$$\mathbf{I}_1 = tr(\boldsymbol{\sigma}) \quad \mathbf{I}_2 = \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - (\mathbf{I}_1)^2 \right] \quad \mathbf{I}_3 = det(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.79)$$

sono gli invarianti principali della tensione $\boldsymbol{\sigma}$.

4.4.3 Legge di flusso ipoplastica

La quantità tensoriale \mathbf{m} , che definisce la legge di flusso ipoplastica, ha la seguente espressione:

$$\mathbf{m} = \frac{a}{F} \left[\boldsymbol{\eta} + dev(\boldsymbol{\eta}) - \frac{1}{3} \boldsymbol{\eta} \left(\frac{6\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} - 1}{\left(\frac{F}{a}\right)^2 + \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}} \right) \right] \quad (4.80)$$

nella quale $dev(\boldsymbol{\eta})$ è la parte deviatorica del tensore della tensione normalizzato. Si noti che, essendo $tr(\boldsymbol{\eta}) = tr(\boldsymbol{\eta})/tr(\boldsymbol{\sigma}) = 1$, si ha:

$$dev(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \quad (4.81)$$

La quantità scalare F è definita come:

$$F = \sqrt{\frac{1}{8} \tan^2 \psi + \frac{2 - \tan^2 \psi}{2 + \sqrt{2} \tan \psi \cos 3\theta}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan \psi \quad (4.82)$$

dove:

$$\tan \psi = \sqrt{3} \|\text{dev}(\boldsymbol{\eta})\| \quad \cos 3\theta = -\sqrt{6} \frac{\text{tr}(\text{dev}(\boldsymbol{\eta})^3)}{\{\text{dev}(\boldsymbol{\eta})^2\}^{3/2}} \quad (4.83)$$

Risulta essere interessante notare il fatto che la formulazione adottata per la funzione \mathbf{m} implica incrementi di deformazioni radiali nel piano ottaedrico allo stato critico. Per terreni granulari fini questa scelta è supportata dai dati sperimentali di Kirkgard & Lade (1993).

4.4.4 Coefficiente di barotropia

Il fattore di barotropia permette di tenere conto dell'influenza della pressione media ed è definito sulla base della formulazione della linea di compressione isotropa (LCI) della teoria dello stato critico proposta da Butterfield (1979). La LCI bilogarithmica assume la seguente espressione:

$$\ln(1 + e) = N - \lambda^* \ln p \quad (4.84)$$

Differenziando, si ottiene la seguente legge di compressione isotropa incrementale:

$$\frac{\dot{e}}{1 + e} = -\frac{\lambda^*}{p} \dot{p} \quad (4.85)$$

A partire dalle definizioni delle quantità \mathcal{L} (eq. 4.71), \mathbf{m} (eq. 4.80), Y (eq. 4.79), dal valore del fattore di picnotropia, in condizioni isotrope e normalmente consolidate (vedi Par. 4.4.5), e dai coefficienti c_1 e c_1 è possibile riscrivere la eq. 4.70 per le condizioni di compressione isotropa a partire da uno stato iniziale isotropo e normalmente consolidato (i.e., appartenente alla LCI). Considerando che:

$$\dot{p} = -\frac{1}{3} \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \quad \dot{\epsilon} = \frac{\dot{e}}{3(1 + e)} \mathbf{1} \quad \|\dot{\epsilon}\| = \frac{|\dot{e}|}{3(1 + e)} \sqrt{3} \quad (4.86)$$

si ottiene la seguente legge di compressione incrementale:

$$\dot{p} = -\frac{f_s}{3(1 + e)} (3c_1 + a^2 c_2) \left[\dot{e} + f_{di} \frac{a\sqrt{3}}{3 + a^2} |\dot{e}| \right] \quad (4.87)$$

Poiché vale la seguente uguaglianza (Herle & Kolymbas, 2004):

$$3c_1 + a^2 c_2 = 3 + a^2 \quad (4.88)$$

la eq. 4.87 può essere espressa come:

$$\dot{p} = -\frac{f_s}{3(1 + e)} (3 + a^2) \left[\dot{e} + f_{di} \frac{a\sqrt{3}}{3 + a^2} |\dot{e}| \right] \quad (4.89)$$

In condizioni di compressione isotropa, $\dot{e} < 0$, dunque:

$$\dot{p} = -\left[\frac{1}{3(1 + e)} f_s (3 + a^2 - f_{di} a\sqrt{3}) \right] \dot{e} \quad (4.90)$$

Confrontando la eq. 4.90 con eq. 4.85 si ricava la seguente espressione per il coefficiente di barotropia:

$$f_s = -\frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{\lambda^*} (3 + a^2 - f_{di} a\sqrt{3})^{-1} \quad (4.91)$$

4.4.5 Coefficiente di picnotropia

Il coefficiente di picnotropia è stato introdotto da Gudehus (1996) per considerare l'influenza della densità (indice dei vuoti). Tale fattore assume la seguente espressione:

$$f_s = \left[-\frac{2tr(\boldsymbol{\sigma})}{3p_{ref}} \exp\left(\frac{\ln(1+e) - N}{\lambda^*}\right) \right]^\alpha \quad (4.92)$$

ottenuta assumendo come limite inferiore dell'indice dei vuoti per le argille $e = 0$. La funzione di picnotropia possiede le seguenti proprietà: $f_d = 0$ per $p = 0$; $f_d = 1$ allo stato critico e $f_d = const. > 1$ per stati isotropi normalmente consolidati. Comunque il coefficiente di picnotropia assume valori costanti lungo tutte le linee di compressione vergine a $q/p = const.$

In considerazione delle suddette proprietà della funzione f_d , si può scrivere:

$$f_d = \left(\frac{p}{p_{cr}} \right)^\alpha \quad (4.93)$$

dove p_{cr} è la tensione media sulla linea dello stato critico per l'indice dei vuoti corrente (Fig. 4.7). La posizione della linea dello stato critico nel piano $\ln(1+e):\ln p$ per le argille è definita dalla superficie di snervamento del modello di Cam-Clay modificato.

L'espressione per la linea dello stato critico diventa:

$$\ln(1+e) = N - \lambda^* \ln 2 \frac{p_{cr}}{p_{ref}} \quad (4.94)$$

dove p_{ref} è riferito ad una tensione di $1kPa$.

La quantità scalare viene calcolata assumendo per le linee di rigonfiamento la seguente legge bilogarithmica:

$$\ln(1+e) = const. - \kappa^* \ln p \quad (4.95)$$

Differenziando:

$$\frac{\dot{e}}{1+e} = -\frac{\kappa^*}{p} \dot{p} \quad (4.96)$$

Imponendo uno scarico isotropo a uno stato normalmente consolidato in condizioni isotrope la eq. 4.89 assume la seguente forma:

$$\dot{p} = - \left[\frac{1}{3(1+e)} f_s \left(3 + a^2 + f_{di} a \sqrt{3} \right) \right] \dot{e} \quad (4.97)$$

Avendo definito il fattore barotropia f_s e il fattore picnotropia f_d , per stati isotropi e normalmente consolidati si ha:

$$f_{di} = 2^\alpha \quad (4.98)$$

Di conseguenza la eq. 4.97 diviene:

$$\dot{p} = - \left[\frac{p}{\lambda^*(1+e)} \left(\frac{3 + a^2 + 2^\alpha a \sqrt{3}}{3 + a^2 - 2^\alpha a \sqrt{3}} \right) \right] \dot{e} \quad (4.99)$$

Dal confronto della eq. 4.99 con la eq. 4.96 otteniamo la seguente espressione per la quantità scalare α :

$$\alpha = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{\lambda^* - \kappa^*}{\lambda^* + \kappa^*} \left(\frac{3 + a^2}{a\sqrt{3}} \right) \right] \quad (4.100)$$

Il significato fisico dei parametri N , λ^* e κ^* del modello di Mašín viene illustrato in Fig. 4.7.

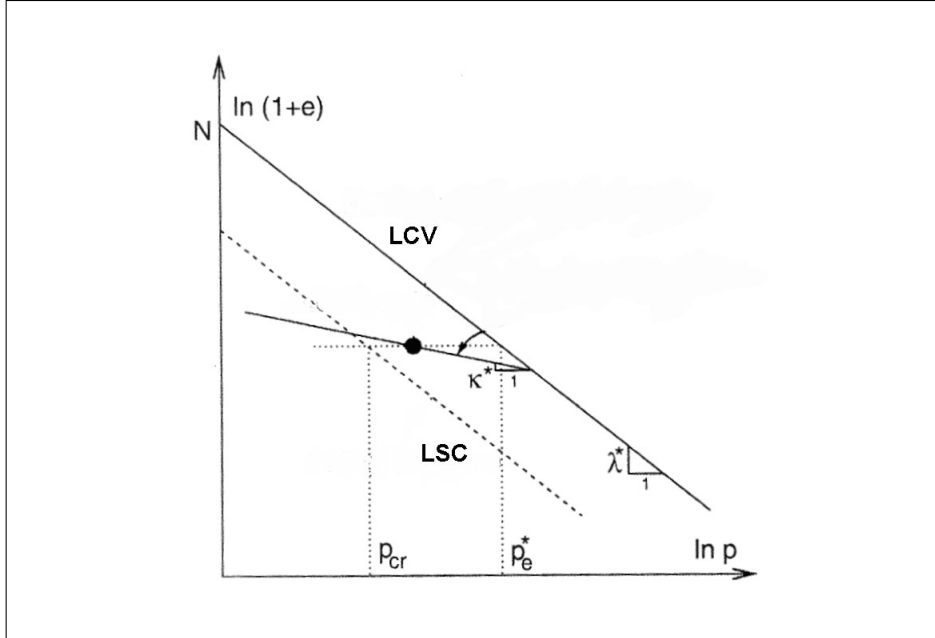


Figura 4.7. Definizione dei parametri N , λ^* e κ^* e delle quantità p_{cr} e p_{ref} (Mašín, 2005).

4.4.6 Estensione alle condizioni cicliche

Come già sottolineato nel Par. 3.5 il modello ipoplastico è capace di prevedere con soddisfacente approssimazione il comportamento dei terreni sottoposti a carichi monotoni, mentre in condizioni di carico ciclico presenta un eccessivo fenomeno di ratcheting. Tale limitazione del modello può essere superata introducendo il concetto di intergranular strain (Niemunis & Herle, 1997), secondo il quale la deformazione che il terreno subisce è caratterizzata da un contributo associato al riassetamento dello scheletro solido agli scorrimenti ai contatti tra grano e grano. Quest'ultimo contributo è valutato, in termini macroscopici, mediante una nuova variabile di stato tensoriale, δ , detta intergranular strain. La variabile δ è un tensore simmetrico del secondo ordine. L'intensità normalizzata di δ è definita come:

$$\rho = \frac{\|\delta\|}{R} \quad (4.101)$$

in cui R è il valore massimo assunto da $\|\delta\|$ mentre la direzione di δ è data dal tensore unitario:

$$\eta_\delta := \begin{cases} \delta / \|\delta\| & \text{se: } \delta \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{se: } \delta = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.102)$$

La generica equazione costitutiva in forma incrementale diviene:

$$\dot{\sigma} = \mathcal{M} \dot{\epsilon} \quad (4.103)$$

in cui il tensore di rigidità tangente \mathcal{M} è determinato a partire dal tensore ipoplastico \mathcal{L} e \mathcal{N} del modello base, e dai valori delle quantità ρ e $\eta_\delta \cdot \dot{\epsilon}$.

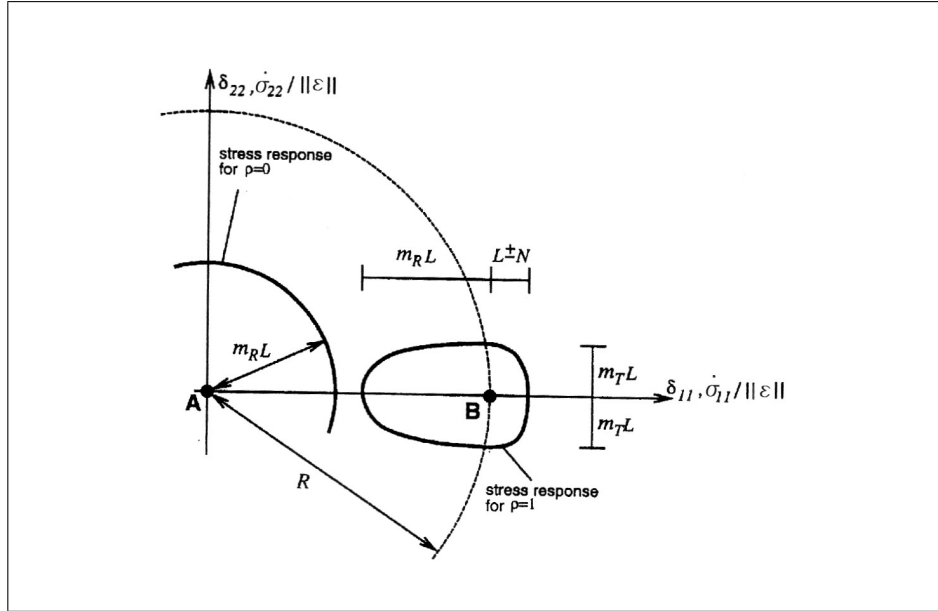


Figura 4.8. Variazione della rigidità in funzione di m_R e m_T per $\rho = 0$ e $\rho = 1$. Per semplicità si assume proporzionalità tra $\dot{\sigma}(\epsilon)$ e $\dot{\epsilon}$. (Mašín , 2005).

Si consideri il caso $\rho = 1$, rappresentato dal punto B in Fig. 4.8, il quale corrisponde al valore massimo che l'intergranular strain può assumere.

Per incrementi di deformazione che siano paralleli e concordi a η_δ (carico continuato, caso c in Fig. 4.9) si ha:

$$\mathcal{M} = \mathcal{L} + \mathcal{N} \eta_\delta \quad (4.104)$$

infatti in tal caso $\dot{\epsilon} = \eta_\delta \|\dot{\epsilon}\|$ quindi $(\mathcal{N} \otimes \eta_\delta) \dot{\epsilon} = \mathcal{N} \|\dot{\epsilon}\|$ e si ottiene la eq. 3.25.

Per una completa inversione del percorso di deformazione, i.e. $\dot{\epsilon} / \|\dot{\epsilon}\| \sim -\eta_\delta$, (caso a in Fig. 4.9), si ipotizza:

$$\mathcal{M} = m_R \mathcal{L} \quad (4.105)$$

il moltiplicatore m_R è una costante del materiale, $m_R > 1$. Il secondo termine che compare nella eq. 4.104 si annulla.

Per incrementi di deformazione tali che $\boldsymbol{\eta}_\delta \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0$ (carico neutro), corrispondenti ad una condizione di ortogonalità tra i due tensori, (caso b in Fig. 4.9) si ipotizza:

$$\mathcal{M} = m_T \mathcal{L} \quad (4.106)$$

con la costante del materiale m_T che varia nell'intervallo $m_R > m_T > 1$.

Si consideri il caso $\rho = 0$, rappresentato dal punto A in Fig. 4.8 per il quale è stata assunta la condizione 4.105, la quale implica che la rigidità viene aumentata dal fattore m_R indipendentemente dalla direzione di $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$.

Per il caso più generale in cui $0 < \rho < 1$, è possibile calcolare la rigidità \mathcal{M} usando la seguente interpolazione:

$$\mathcal{M} = [\rho^x m_T + (1 - \rho^x) m_R] \mathcal{L} + \mathcal{A} \quad (4.107)$$

con:

$$\mathcal{A} = \rho^x (1 - m_T) f_s(\mathcal{L} \boldsymbol{\eta}_\delta) \otimes \boldsymbol{\eta}_\delta + \rho^x f_s f_d \mathbf{N} \otimes \boldsymbol{\eta}_\delta \text{ se: } \boldsymbol{\eta}_\delta \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0 \quad (4.108)$$

$$\mathcal{A} = \rho^x (m_R - m_T) f_s(\mathcal{L} \boldsymbol{\eta}_\delta) \otimes \boldsymbol{\eta}_\delta \text{ se: } \boldsymbol{\eta}_\delta \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \leq 0 \quad (4.109)$$

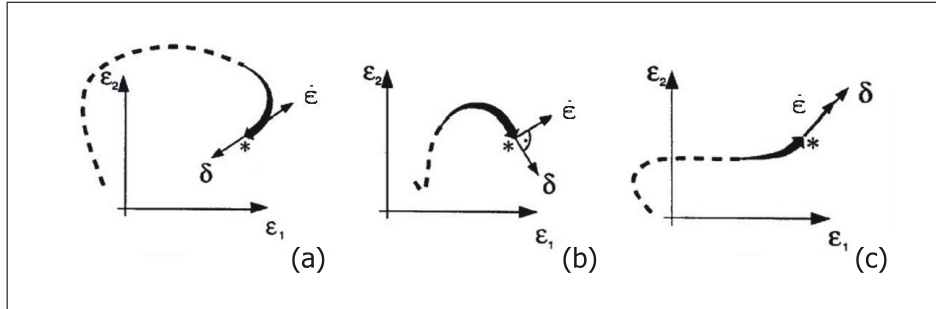


Figura 4.9. (a) completa inversione di carico; (b) carico neutro; (c) continuazione di carico (Niemunis & Herle, 1997).

La legge di evoluzione di $\boldsymbol{\delta}$, è descritta come:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} := \begin{cases} (\mathbf{I}^s - \rho^{\beta_r} \boldsymbol{\eta}_\delta \otimes \boldsymbol{\eta}_\delta) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} & \text{se: } \boldsymbol{\eta}_\delta \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0 \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} & \text{se: } \boldsymbol{\eta}_\delta \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \leq 0 \end{cases} \quad (4.110)$$

dove β_r è una costante del materiale.

Introducendo il concetto di intergranular strain nel modello di Mašín per le argille, da un punto di vista fisico, si ottiene che per le condizioni di scarico o carico neutro ($\boldsymbol{\eta}_\delta \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \leq 0$) il comportamento dei terreni è di tipo ipoplastico; al contrario per condizioni di carico continuato ($\boldsymbol{\eta}_\delta \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0$) si osserva che la risposta del

materiale è controllata prevalentemente dal riassetto dello scheletro solido, ed ha un carattere ipoplastico.

Il modello ipoplastico con intergranular strain richiede 5 parametri addizionali: m_R , m_T , R , β_r e χ .

Le procedure relative alla calibrazione di tali parametri sono dettagliatamente descritte nel Par. 6.4.

Integrazione numerica delle equazioni costitutive su percorsi di carico generalizzati

5.1 Introduzione

Una caratteristica comune dei modelli costitutivi descritti nel Cap. 4 sviluppati nell'ambito della plasticità ad incrudimento cinematico, della plasticità BS e della ipoplasticità risiede nella loro formulazione incrementale. Piuttosto che fornire lo stato tensionale associato ad uno specifico stato di deformazione, tali modelli definiscono le leggi di evoluzione delle variabili di stato a partire da uno stato iniziale noto. Pertanto, la valutazione quantitativa degli effetti prodotti da un assegnato "carico" esterno - sia esso un incremento di tensione o di deformazione o una loro combinazione - richiede l'integrazione nel tempo delle equazioni costitutive lungo un assegnato percorso di carico a partire da assegnate condizioni iniziali.

L'integrazione di questo sistema di equazioni presenta delle difficoltà. Innanzitutto l'impossibilità di ottenere una soluzione in forma chiusa e la necessità, quindi, di ricorrere a tecniche di integrazione di tipo numerico. Viene poi la necessità di definire delle *condizioni di vincolo* e di *carico* da imporre all'elemento di terreno al fine di poter simulare un determinato percorso di carico, dato che la risposta alle sollecitazioni esterne dipende non solo dal tipo e dall'entità delle tensioni applicate, ma anche dal modo in cui ciò avviene.

Le condizioni di vincolo esprimono delle limitazioni - in termini di tensione e deformazione - alle quali l'elemento di terreno è soggetto; la condizione di carico esprime il modo con il quale i carichi esterni vengono applicati. Queste condizioni in genere non rimangono costanti, ma possono variare durante l'applicazione dei carichi esterni.

Per tenere in conto tali aspetti Bardet & Chouhair (1991) hanno proposto un versatile algoritmo (Par. 5.3) che permette di ottenere curve sforzi-deformazioni per equazioni costitutive non viscosi (si trascura la viscosità propria dello scheletro solido del terreno) durante il generico percorso di carico, linearizzando le condizioni di vincolo e di carico e mettendole in relazione con le equazioni costitutive. L'originale versione di tale algoritmo dettagliatamente descritta nel Par. 5.3.1 permette di integrare equazioni costitutive elastoplastiche. Nell'ambito di tale lavoro di tesi è stata sviluppata una modifica di tale algoritmo (Par. 5.3.2) al fine di ottenere curve tensioni-deformazioni per equazioni costitutive ipoplastiche.

Driver costitutivi dei modelli descritti nel Cap. 4 sono stati implementati in MATLAB, in cui le condizioni di carico e di vincolo sono state linearizzate (Par. 5.2) e come suggerito da Bardet & Chouhair (1991) il sistema così ottenuto è stato integrato numericamente dall' algoritmo esplicito adattativo di Runge–Kutta–Fehlberg (RKF23) dettagliatamente descritto nel Par. 5.4.

5.2 Percorsi di sollecitazione generalizzati e condizioni di vincolo in forma incrementale

L'ipotesi fondamentale che permette di assimilare il provino ad un elemento di volume è che sia omogeneo. Le condizioni di prova che si vogliono simulare sono definite in funzione dello stato tensionale, $\boldsymbol{\sigma}$, dello stato deformativo, $\boldsymbol{\epsilon}$, e del tempo, t , nel caso in cui la variabile di controllo varia con legge nota come derivata nel tempo.

Matematicamente sono rappresentate dalla seguente serie di funzioni:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}, t) = 0 \quad (5.1)$$

in cui ϕ è un vettore a sei componenti, una per ogni componente dello spazio tensionale.

Di solito non si è in grado di scrivere la eq. 5.1 in forma compiuta in termini di $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\epsilon}$ attuali, ma in forma anolonomia, i.e., come relazione tra gli incrementi delle componenti di $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\epsilon}$. Differenziando le funzioni eq. 5.1 ed uguagliandole a zero si ottiene:

$$\dot{\phi} = \mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \mathbf{E} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad \mathbf{V} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.2)$$

in cui \mathbf{S} ed \mathbf{E} sono opportune matrici di vincolo di ordine 6×6 dipendenti dal percorso di carico imposto e \mathbf{V} è l'incremento di carico generalizzato per il percorso di carico prescelto rappresentato da un vettore a sei componenti definito come:

$$\mathbf{V} := \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v\} \quad (5.3)$$

in accordo con Bardet & Chouhair (1991) le prime cinque relazioni lineari descrivono le condizioni di vincolo linearizzate mentre la sesta relazione introduce la variabile di carico v che controlla l'evoluzione del processo di carico.

Le settantadue componenti delle matrici \mathbf{S} ed \mathbf{E} sono costanti durante un generico incremento di carico generalizzato, ma possono variare da un incremento di carico ad un altro per descrivere vincoli non lineari. Inoltre il sistema 5.2 è abbastanza generale per descrivere tutti i percorsi di laboratorio che inducono nel provino uno stato tensionale e deformativo omogeneo.

Risulta essere importante osservare che le relazioni 5.2 possono contenere come parametri i valori correnti di $\boldsymbol{\sigma}$ e delle variabili di stato \mathbf{q} , ma l'incremento della tensione, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, e della deformazione, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, che rappresentano le incognite del problema, non compaiono nelle espressioni di \mathbf{S} , \mathbf{E} e \mathbf{V} . Nell'App. B si riportano le espressioni di \mathbf{S} e \mathbf{E} relative alle simulazioni di alcune prove di laboratorio standard.

5.3 L'algoritmo di Bardet & Choucair (1991)

L'espressione 5.2 rappresenta sei equazioni lineari nelle dodici incognite $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. Per rendere il problema determinato è necessario introdurre l'equazione costitutiva che si intende validare. Nel Par. 5.3.1 si riporta la versione originale dell'algoritmo di Bardet & Choucair (1991) per modelli elastoplastici, nel Par. 5.3.2 si descrive una versione modificata dell'algoritmo per modelli ipoplastici.

5.3.1 L'algoritmo di Bardet & Choucair (1991) per modelli elastoplastici

Introducendo nella eq. 5.2 la generica equazione costitutiva elastoplastica 3.9 (in cui D^{ep} è stato sostituito con D), si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{V} = \mathbf{0} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = D\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{cases} \quad \text{con} \quad D = \begin{cases} D^e & \dot{\gamma} = 0 \\ D^{ep} & \dot{\gamma} > 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Il tensore di rigidezza D può essere elastico in caso di scarico (moltiplicatore plastico, $\dot{\gamma}$, nullo) o elastoplastico in caso di carico ($\dot{\gamma}$ positivo). In entrambi i casi D è funzione dello stato corrente del materiale. Tale sistema non ammette soluzione in forma chiusa per la complessità della equazione costitutiva, di conseguenza si ricorre al metodo di integrazione esplicito adattativo di Runge–Kutta–Fehlberg di terzo ordine (Par. 5.4), il quale richiede che le equazioni differenziali del sistema siano scritte nella forma:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (5.5)$$

in cui \mathbf{f} è un vettore avente le stesse dimensioni di \mathbf{y} ed è funzione dello stato del materiale ed eventualmente del tempo.

Le grandezze incognite del problema scritte nella forma 5.5 sono:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{S}D + \mathbf{E} \quad (5.6)$$

in cui la matrice quadrata di ordine sei \mathbf{A} può essere elastica o elastoplastica a seconda del segno di $\dot{\gamma}$. Se il problema è ben posto, ovvero se il materiale si trova in condizioni di potenziale controllabilità per il percorso di carico imposto, \mathbf{A} è positivo ($\mathbf{A} > \mathbf{0}$).

Sostituendo la eq. 5.6 nell'equazione costitutiva si ha:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = D\mathbf{A}^{-1}\mathbf{V} \quad (5.7)$$

Come dettagliatamente discusso nel Cap. 3 nella teoria della plasticità in caso di plasticizzazione è necessario tenere in conto delle leggi di evoluzione che permettono di aggiornare le variabili di stato interne espresse dalla eq. 3.5. Da quest'ultima equazione considerando l'espressione di $\dot{\gamma}$ (eq. 3.7) e la eq. 5.5 si ottiene:

$$\dot{q} = \frac{1}{K_p} \mathbf{h} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot D^e \mathbf{A}_{ep}^{-1} \mathbf{V} \quad (5.8)$$

Si ricordi che le eq. 5.6–5.8 sono sottoposte ai seguenti vincoli algebrici:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (5.9)$$

associati alle condizioni di consistenza descritti nel Par. 3.2.

Riassumendo le incognite del sistema sono dunque:

$$\mathbf{y} = \{\boldsymbol{\epsilon}^T, \boldsymbol{\sigma}^T, \mathbf{q}^T\}^T \quad (5.10)$$

e le rispettive espressioni del tipo 5.5 sono le seguenti:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \left\{ \mathbf{A}^{-1} \mathbf{V}, D\mathbf{A}^{-1} \mathbf{V}, \frac{1}{K_p} \mathbf{h} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot D^e \mathbf{A}_{ep}^{-1} \mathbf{V} \right\}^T \quad (5.11)$$

Si è così ottenuto un sistema di equazioni differenziali che possono essere integrate con l'algoritmo esplicito adattativo di Runge–Kutta–Fehlberg di terzo ordine.

Sia $\mathbb{I} = \bigcup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}]$ una partizione dell'intervallo di tempo di interesse in step di tempo. Si assume che all'istante $t_n \in \mathbb{I}$ lo stato del materiale $(\boldsymbol{\epsilon}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{q}_n)$ sia noto. Sia $\{V_k : k = 0, 1, \dots, n+1\}$ l'andamento temporale noto delle condizioni di carico generalizzate (eq. 5.3).

Il problema computazionale consiste nell'aggiornare lo stato del materiale attraverso le eq. 5.6–5.8.

Il primo passo è il calcolo del cosiddetto *stato elastico di tentativo* che si valuta dalle eq. 5.6–5.8 congelando il flusso plastico (i.e., ponendo $\dot{\gamma} = 0$), e considerando uno step *elastico*. La soluzione è valutata tramite l'algoritmo esplicito di Eulero in avanti.

Il secondo passo è quello di valutare se lo stato così ottenuto soddisfa le eq. 5.9 se sì lo stato finale è elastico e di conseguenza coincidente con quello di tentativo altrimenti è necessario ricorrere alla valutazione adattativa del problema elastoplastico descritta nel Par. 5.4.

5.3.2 L'algoritmo di Bardet & Chouair (1991) per modelli ipoplastici

All'eq. 5.2 in tal caso si introduce la equazione costitutiva ipoplastica 4.103 ottenendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{S}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{V} = \mathbf{0} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{M}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}_\epsilon) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \end{cases} \quad (5.12)$$

Si osservi come in base alle eq. 4.107–4.109 il tensore di rigidità tangente \mathcal{M} dipende dalla direzione di deformazione, $\boldsymbol{\eta}_\epsilon$. Di conseguenza la eq. 5.6 e la eq. 5.7 devono tenere in conto di tale dipendenza e si scrivono come:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_\epsilon) \mathbf{V} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{M}(\boldsymbol{\eta}_\epsilon) \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_\epsilon) \mathbf{V} \quad \mathbf{A}(\boldsymbol{\eta}_\epsilon) = \mathbf{S}\mathcal{M}(\boldsymbol{\eta}_\epsilon) + \mathbf{E} \quad (5.13)$$

In maniera analoga anche le variabili di stato interne devono tenere in conto di tale dipendenza. Nel modello di Mašín con intergranular strain $\mathbf{q} = \{e, \boldsymbol{\delta}^T\}^T$. La legge di evoluzione per l'indice dei vuoti può essere espressa come:

$$\dot{e} = h_e \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_\epsilon) \mathbf{V} \quad h_e = (1 + e) \mathbf{1} \quad (5.14)$$

mentre quella per l'intergranular strain sulla base della eq. 4.110 come:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{H}_\delta \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_\epsilon) \mathbf{V} \quad \mathbf{H}_\delta = \begin{cases} (\mathbf{I}^s - \rho^{\beta_r} \boldsymbol{\eta}_\delta \otimes \boldsymbol{\eta}_\delta) & \text{se: } \boldsymbol{\eta}_\delta \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0 \\ \mathbf{I}^s & \text{se: } \boldsymbol{\eta}_\delta \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \leq 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

In tal caso le incognite del problema sono:

$$\mathbf{y} = \left\{ \boldsymbol{\epsilon}^T, \boldsymbol{\sigma}^T, \boldsymbol{\delta}^T, e \right\}^T \quad (5.16)$$

e per una fissata $\boldsymbol{\eta}_\epsilon$ si ha:

$$\mathbf{f}_\epsilon(\mathbf{y}) = \left\{ \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_\epsilon) \mathbf{V}, \mathcal{M}(\boldsymbol{\eta}_\epsilon) \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_\epsilon) \mathbf{V}, \mathbf{H}_\delta \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_\epsilon) \mathbf{V}, h_e \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_\epsilon) \mathbf{V} \right\}^T \quad (5.17)$$

In maniera analoga alle equazioni elastoplastiche sia $\mathbb{I} = \bigcup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}]$ una partizione dell'intervallo di tempo di interesse in step di tempo. Si assume che all'istante $t_n \in \mathbb{I}$ lo stato del materiale $(\boldsymbol{\epsilon}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{q}_n)$ sia noto. Sia $\{V_k : k = 0, 1, \dots, n+1\}$ l'andamento temporale noto delle condizioni di carico generalizzate.

Il problema computazionale è aggiornare lo stato del materiale attraverso le eq. 5.13–5.15.

Essendo la relazione tra il tensore di rigidità tangente e $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ continua è stato necessario introdurre la cosiddetta *iterazione direzionale* per la valutazione di $\boldsymbol{\eta}_\epsilon$ con Eulero in avanti.

La struttura dell'algoritmo diviene la seguente:

1. si assume un valore di $\boldsymbol{\eta}_\epsilon^{(k)}$ di primo tentativo;
2. si valuta \mathbf{A}^k tramite la eq. 5.13₃;
3. si valuta $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{k+1}$ tramite la eq. 5.13₁;
4. si calcola $\boldsymbol{\eta}_\epsilon^{(k+1)}$ come:

$$\boldsymbol{\eta}_\epsilon^{(k+1)} = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{k+1} - \boldsymbol{\epsilon}_k}{\|\boldsymbol{\epsilon}_{k+1} - \boldsymbol{\epsilon}_k\|} \quad (5.18)$$

5. si verifica se:

$$\left\| \boldsymbol{\eta}_\epsilon^{(k+1)} - \boldsymbol{\eta}_\epsilon^{(k)} \right\| < TOL \quad (5.19)$$

se è soddisfatta si esce altrimenti si torna al PUNTO 1 aggiornando $\boldsymbol{\eta}_\epsilon^{(k)} \leftarrow \boldsymbol{\eta}_\epsilon^{(k+1)}$.

Una volta determinato il valore di $\boldsymbol{\eta}_\epsilon$ si procede alla valutazione adattativa del problema ipoplastico descritta nel Par. 5.4.

5.4 Integrazione esplicita a controllo dell'errore

Poichè la struttura matematica delle equazioni costitutive è abbastanza differente da modello a modello, l'individuazione di una strategia computazionale unica che possa adattarsi sia ai modelli basati su generalizzazione della teoria classica della plasticità sia ai modelli ipoplastici ha rappresentato uno dei punti chiave del lavoro

di tesi. Tra tutte le possibili strategie utilizzabili a tale scopo, la scelta è caduta su una particolare classe di algoritmi di tipo esplicito a passo variabile ed a controllo dell'errore mediante procedura adattativa. Tali algoritmi risultano sufficientemente versatili e robusti da consentire la loro applicazione a tutti i modelli considerati.

Il particolare schema di integrazione messo a punto è l'algoritmo esplicito adattativo di Runge–Kutta–Fehlberg di terzo ordine (RKF23), che adotta lo schema di Eulero modificato (di ordine 2) e lo schema di Runge–Kutta di ordine 3. Tale scelta è il miglior compromesso tra accuratezza della soluzione e tempo macchina, come dimostrato da Tamagnini et al. (2000).

Le due soluzioni sono confrontate per stimare la soluzione del passo di integrazione da adottare sulla base di un valore prefissato (opportunamente basso) dell'errore di integrazione stimato. Se l'errore stimato è minore della tolleranza, è possibile aumentare l'ampiezza del passo per aumentare l'efficienza della procedura (Haier & Wanner, 1991; Sloan, 1987).

Come illustrato nel Par. 5.3 lo scopo è di aggiornare le variabili di stato per ogni assegnato incremento di carico generalizzato $\Delta \mathbf{V}_{n+1}$ nell'intervallo di tempo $[t_n, t_{n+1}]$. In accordo con il metodo di Bardet ciò significa aggiornare lo stato \mathbf{y}_n all'istante t_n valutando il nuovo stato \mathbf{y}_{n+1} all'istante t_{n+1} .

All'interno del passo temporale $[t_n; t_{n+1}]$ si introduce una suddivisione in substeps la cui ampiezza è definita in modo adattativo dalla procedura di Runge–Kutta–Fehlberg.

Introducendo la variabile adimensionale T , definita come:

$$T := \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{t - t_n}{\Delta t_{n+1}} \quad t \in [t_n; t_{n+1}] \quad (5.20)$$

l'ampiezza del generico substep k risulta dunque pari a:

$$\Delta T_{k+1} := T_{k+1} - T_k = \frac{t_{k+1} - t_k}{\Delta t_{n+1}} \quad \sum_{k=1}^{n_s} \Delta T_{k+1} = 1 \quad (5.21)$$

con n_s numero variabile di substeps. Quando il substep coincide con il passo Δt_{n+1} si ha $\Delta T_{k+1} = 1$.

Nella procedura RKF23 due differenti soluzioni sono calcolate simultaneamente nel generico substep k mediante le seguenti relazioni di ricorrenza:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \Delta T_k \sum_{j=1}^N \tilde{C}_j \mathbf{k}_j(\mathbf{y}_k, \Delta T_k) \quad (5.22)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \Delta T_k \sum_{j=1}^{N+1} \hat{C}_j \mathbf{k}_j(\mathbf{y}_k, \Delta T_k) \quad (5.23)$$

che rappresentano rispettivamente lo schema di Eulero modificato (di ordine 2) e lo schema esplicito di Runge–Kutta di ordine 3, in cui $N = 2$, $\tilde{C}_1 = 0$, $\tilde{C}_2 = 1$, $\hat{C}_1 = \hat{C}_3 = 1/6$, $\hat{C}_2 = 2/3$, mentre le funzioni \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 e \mathbf{k}_3 sono definite come:

$$\mathbf{k}_1 := \mathbf{f}(\mathbf{y}_k) \quad (5.24)$$

$$\mathbf{k}_2 := \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_k + \frac{1}{2}\Delta T_k \mathbf{k}_1\right) \quad (5.25)$$

$$\mathbf{k}_3 := \mathbf{f}(\mathbf{y}_k - \Delta T_k \mathbf{k}_1 + 2\Delta T_k \mathbf{k}_2) \quad (5.26)$$

Poichè le due approssimazioni del valore incognito $\mathbf{y}(t_{k+1})$ hanno due differenti ordini di convergenza globale, si può definire la seguente strategia per il controllo adattativo della dimensione dei substep. Si consideri il seguente tensore differenza:

$$\mathbf{R}_{k+1} := \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1} \quad (5.27)$$

a cui si può associare la seguente misura scalare:

$$R_{k+1} := \frac{\|\mathbf{R}_{k+1}\|}{\|\tilde{\mathbf{y}}_{k+1}\|} \quad (5.28)$$

L'integrazione sull'intervallo k -esimo si assume accettabile quando per una assegnata TOL (ragionevolmente piccola), si ha:

$$R_{k+1} < TOL \quad (5.29)$$

Se tale disuguaglianza è verificata, lo stato del materiale è aggiornato e la dimensione del substep successivo è assunta, in accordo con Sloan (1987), come:

$$\Delta T_{k+1} = \min \left\{ 0.9\Delta T_k \left[\frac{TOL}{R_{k+1}} \right]^{1/3}; 4\Delta T_k \right\} \quad (5.30)$$

Nel caso contrario, l'ampiezza del substep è ridotta scegliendo un nuovo valore di ΔT_k tramite la funzione:

$$\Delta T_{k+1} = \min \left\{ 0.9\Delta T_k \left[\frac{TOL}{R_{k+1}} \right]^{1/3}; \frac{1}{4}\Delta T_k \right\} \quad (5.31)$$

L'ampiezza del substep è ridotta fino a quando l'accuratezza della soluzione fornita dalla condizione 5.29 è soddisfatta e un nuovo substep può essere iniziato. Tale procedura si arresta quando $T_k = 1$ e si passa allo step successivo $[t_{n+1}; t_{n+2}]$. La Tab. 5.1 sintetizza l'algoritmo utilizzato.

Tabella 5.1. Algoritmo esplicito adattativo di Runge–Kutta–Fehlberg di terzo ordine (RKF23)

1. Inizializzazione del contatore dei substep, dello stato del materiale e del tempo:

$$k = 1 \quad \mathbf{y}_k|_{k=1} = \mathbf{y}_n \quad T_k = 0 \quad \Delta T_k = 1$$

2. Controllare se il processo di integrazione è completo:

SE: $T_k = 1$ VA AL PUNTO 10, ALTRIMENTI:

3. Valutare le soluzioni approssimate di \mathbf{y}_{k+1} :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + \Delta T_k \sum_{j=1}^N \tilde{C}_j \mathbf{k}_j(\mathbf{y}_k, \Delta T_k) \\ \hat{\mathbf{y}}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + \Delta T_k \sum_{j=1}^{N+1} \hat{C}_j \mathbf{k}_j(\mathbf{y}_k, \Delta T_k) \end{aligned}$$

4. Valutare l'errore relativo \mathbf{R}_{k+1} :

$$\mathbf{R}_{k+1} := \frac{\|\mathbf{R}_{k+1}\|}{\|\hat{\mathbf{y}}_{k+1}\|}$$

5. Se l'errore è non minore della tolleranza imposta:

SE: $\mathbf{R}_{k+1} \geq TOL$ VA AL PUNTO 9, ALTRIMENTI

6. Aggiornamento del tempo adimensionale e dello stato del materiale:

$$T_{k+1} = T_k + \Delta T_k \quad \mathbf{y}_{k+1} = \hat{\mathbf{y}}_{k+1}$$

7. Valutazione della dimensione del substep successivo:

$$\Delta T_{k+1} = \min \left\{ 0.9 \Delta T_k \left[\frac{TOL}{\mathbf{R}_{k+1}} \right]^{1/3}; 4 \Delta T_k \right\}$$

8. Controllo che la dimensione del substep sia minore del tempo residuo e inizio di un nuovo substep:

$$\begin{aligned} \Delta T_{k+1} &\leftarrow \min \{ \Delta T_{k+1}, 1 - \Delta T_{k+1} \}; & k &\leftarrow k + 1; \\ T_k &\leftarrow T_{k+1}; & \mathbf{y}_k &\leftarrow \mathbf{y}_{k+1} \\ && &\text{VA AL PUNTO 2} \end{aligned}$$

9. Lo step non ha fornito una soluzione accettabile, riduzione delle dimensioni del substep:

$$\Delta T_{k+1} = \min \left\{ 0.9 \Delta T_k \left[\frac{TOL}{\mathbf{R}_{k+1}} \right]^{1/3}; \frac{1}{4} \Delta T_k \right\}$$

VA AL PUNTO 3

10. Il processo di integrazione è completato; si fornisce il valore dello stato del materiale:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_{k+1} \text{ EXIT}$$

Valutazione della risposta dei modelli a livello di elemento di volume

6.1 Introduzione

La valutazione delle potenzialità e dei limiti dei modelli ciclici BS–TD, HP–MA e EP–RW descritti nel Cap. 4 in relazione alla loro capacità di riprodurre la risposta del terreno a livello di elemento di volume sia in condizioni di carico monotono che in condizioni di carico ciclico consiste nel confronto tra i risultati di prove di laboratorio e le relative simulazioni effettuate utilizzando i modelli stessi.

A tale fine è stato necessario da una parte implementare i driver costitutivi, dettigliatamente descritti nel Cap. 5, tramite i quali è possibile ottenere le curve tensioni–deformazioni dei modelli considerati.

D'altra parte è stato necessario costituire una base dei dati sperimentali, la quale rappresenta il risultato di un'estesa ricerca bibliografica della letteratura tecnica avvenuta focalizzandosi sui lavori che forniscono informazioni sufficienti a consentire la ricostruzione completa dell'evoluzione nel tempo degli stati di deformazione e tensione efficace. Tale base è descritta nel Par. 6.2.

Nei successivi Par. 6.3–Par. 6.5 sono rispettivamente presentate la calibrazione dei modelli BS–TD, HP–MA e EP–RW, la quale è stata effettuata a partire da prove convenzionali. Il fatto che la calibrazione di tali modelli ciclici non richieda l'esecuzione di prove non convenzionali rappresenta sicuramente un vantaggio in fase di applicazione a problemi pratici, poichè non sono necessarie prove speciali.

Nel Par. 6.6 è analizzato il comportamento previsto in condizioni di carico monotono dai tre modelli, confrontano le simulazioni delle prove di laboratorio con i relativi dati sperimentali.

Infine nel successivo Par. 6.7 si mettono in evidenza le potenzialità dei modelli in condizioni di carico ciclico comparando simulazioni e dati relativi.

Risulta importante sottolineare che tanto le simulazioni monotone che quelle cicliche discusse in tale capitolo costituiscono delle vere *previsioni di classe A* in quanto la calibrazione del modello è stata condotta utilizzando solo risultati di prove monotone convenzionali.

6.2 Base di dati sperimentali

La base di dati sperimentali raccoglie i risultati di differenti programmi di prove su caolino.

La scelta è ricaduta su tale materiale poichè è stato indagato da diversi autori in condizioni di carico monotono e Al-Tabbaa (1987) nella sua tesi di dottorato ha condotto un esteso programma di prove su tale materiale in condizioni di carico ciclico su differenti percorsi tensionali.

Tabella 6.1. Base di dati sperimentale per la validazione monotona dei modelli

TEST	DESCRIZIONE	CONSOLIDAZIONE	$OCR = \frac{\sigma'_{v,max}}{\sigma'_v}$	RUN
t101	ISO	ISO	1.00	r101
t201	EDO	K_0	1.00	r201
t301	TX-CD	ISO	1.00	r301
t302	TX-CD	ISO	1.20	r302
t303	TX-CD	ISO	1.50	r303
t304	TX-CD	ISO	2.00	r304
t305	TX-CD	ISO	3.00	r305
t306	TX-CD	ISO	6.00	r306
t307	TX-CD	ISO	12.00	r307
t401	TX-CU	ISO	1.00	r401
t402	TX-CU	ISO	1.25	r402
t403	TX-CU	ISO	1.60	r403
t404	TX-CU	ISO	2.50	r404
t405	TX-CU	ISO	5.00	r405

Tabella 6.2. Base di dati sperimentale per la validazione ciclica dei modelli

TEST	DESCRIZIONE	CONSOLIDAZIONE	$OCR = \frac{\sigma'_{v,max}}{\sigma'_v}$	RUN
t101c	ISO	ISO	1.00	r101c
t201c	EDO	K_0	1.00	r201c
t301c	TX-CD	ISO	1.00	r301c
t302c	TX-CD	ISO	3.00	r302c
t501c	$p = cost.$	K_0	2.00	r501c
t502c	$p = cost.$	K_0	1.00	r502c
t601c	$q = cost.$	K_0	1.00	r601c
t602c	$q = cost.$	K_0	1.45	r602c

Per quanto riguarda le prove monotone sono stati considerati i dati su caolino di Cekerevac & Laloui (2004), che hanno eseguito un programma di prove triassiali monotone consolidate drenate su provini caratterizzati da diversi gradi di sovraconsolidazione. Altro set di risultati selezionato è stato quello di Sivakumar et al.

(2002), che hanno eseguito prove triassiali monotone consolidate non-drenate su provini di caolino con differenti gradi di sovraconsolidazione.

In Tab. 6.1 sono riassunte le prove per la calibrazione e la validazione monotona dei modelli e le relative simulazioni.

Per quanto riguarda le prove cicliche il programma di prove di Al-Tabbaa (1987) ha previsto prove su caolino caratterizzate da differenti percorsi tensionali: compressione isotropa ed edometrica, triassiale drenato, a $p = const$ e a $q = const$ a partire sia da stati normalmente consolidati che sovraconsolidati. Tali prove per la validazione ciclica dei modelli sono riportate in Tab. 6.2.

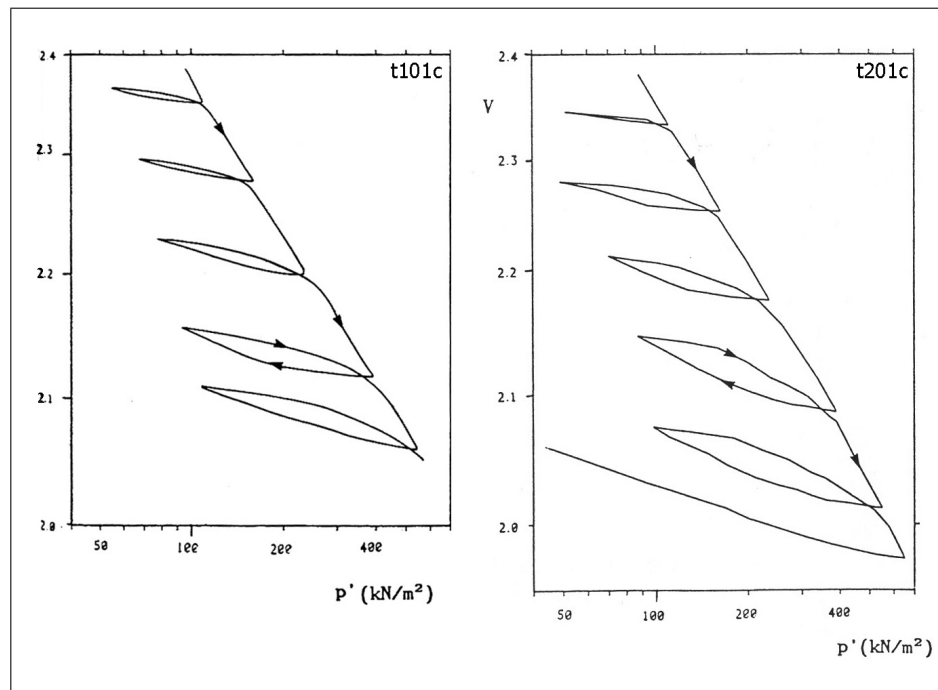


Figura 6.1. Prova t101c e prova t201c (Al-Tabbaa, 1987).

Nella Fig. 6.1 sono riportati i risultati della prova di compressione isotropa ciclica (t101c) e della prova di compressione edometrica (t201c) nel piano $\ln(v) : p$. Si può osservare che il comportamento in scarico-ricarico è nonlineare, infatti, il primo ciclo è caratterizzato da un elevato valore di rigidità che si riduce progressivamente all'aumentare del numero dei cicli. Inoltre si può osservare che il comportamento in scarico-ricarico è isteretico e l'area racchiusa dai loop aumenta all'aumentare dell'ampiezza dello scarico e al termine di ogni ciclo il loop aperto, indicando lo sviluppo di deformazioni permanenti. Inoltre confrontando le due curve si evidenzia come la t201c è caratterizzata da un comportamento più isteretico rispetto alla t101c, infatti, i loop di isteresi racchiudono un'area pari a 1.5 volte l'area racchiusa dai cicli isotropi associati alla stessa variazione della pressione media. Inoltre la non-chiusura al termine di ogni ciclo è più pronunciata.