



**DOTTORATO DI RICERCA IN INGEGNERIA DELLE STRUTTURE**

**XXIV CICLO**

**IL COORDINATORE DEL DOTTORATO**

**RELATORE**

**PROF. GIUSEPPE REGA**

**PROF. ANNA SINOPOLI**

**Roma, 7 Ottobre 2013**



**HISTORICAL RULES AND THEORIES ON MASONRY**  
**ARCHES FROM THE RENAISSANCE**  
**TO MONASTERIO AND PERSY**

**Maria Antonietta Buttarazzi**

## INDICE

<b>INTRODUZIONE</b>	p. 5
<b>I. REGOLE COSTRUTTIVE PER LE STRUTTURE VOLTATE FINO AL XVII SECOLO</b>	
<b>I.1. INTRODUZIONE</b>	p. 9
<b>I.2. LEON BATTISTA ALBERTI</b>	p. 9
<b>I.3. LA REGOLA DEL CINQUIÈME</b>	p. 15
<b>I.4. LEONARDO DA VINCI</b>	p. 16
<b>I.5. ANDREA PALLADIO</b>	p. 33
<b>I.6. RODRIGO GIL DE HONTAÑÓN</b>	p. 35
<b>I.6.1. <i>Due regole basate sull'esperienza</i></b>	p. 37
<i>I.6.1.1. Regola strutturale n°1</i>	p. 37
<i>I.6.1.2. Regola strutturale n°2</i>	p. 38
<b>I.6.2. <i>Tre regole geometriche per contrafforti di archi semicircolari</i></b>	p. 38
<i>I.6.2.1. Prima regola geometrica</i>	p. 38
<i>I.6.2.2. Seconda regola geometrica</i>	p. 40
<i>I.6.2.3. Terza regola geometrica</i>	p. 41
<b>I.7. FRANÇOIS DERAND</b>	p. 46
<b>II. L'APPROCCIO CINEMATICO NEL SECOLO DEI LUMI</b>	
<b>II.1. INTRODUZIONE</b>	p. 48
<b>II.2. PHILIPPE DE LA HIRE</b>	p. 48
<b>II.2.1. <i>Traité de Mécanique</i></b>	p. 49
<i>II.2.1.1. Osservazione</i>	p. 66
<b>II.2.2. <i>Memoria del 1712</i></b>	p. 73
<b>II.3. LORENZO MASCHERONI</b>	p. 79
<b>III. CHARLES AUGUSTIN COULOMB</b>	
<b>III.1. INTRODUZIONE AL MÉMOIRE</b>	p. 87
<b>III.2. EQUILIBRIO LIMITE RISPETTO AGLI SCORRIMENTI</b>	p. 90
<b>III.3. EQUILIBRIO LIMITE RISPETTO ALLA ROTAZIONE</b>	p. 98



<b>III.3.1.</b>	<i>Considerazione sul punto di arrivo al giunto <math>\alpha</math> della curva delle pressioni applicata in chiave nel generico punto S. Adeguamento del formalismo per un confronto con la teoria di Coulomb</i>	p. 99
<b>III.3.2.</b>	<i>Considerazioni sulla variazione del punto di applicazione in chiave della curva delle pressioni</i>	p. 104
<b>III.3.3</b>	<i>Ultime considerazioni di Coulomb</i>	p. 112
<b>III.4.</b>	<b>IL METODO DI COULOMB</b>	p. 116
<b>IV. JOAQUIN MONASTERIO</b>		
<b>IV.1.</b>	<b>INTRODUZIONE</b>	p. 119
<b>IV.2.</b>	<b>L'INTRODUZIONE DEL TRATTATO</b>	p. 121
<b>IV.3.</b>	<b>IL METODO PROPOSTO DA MONASTERIO PER IMPERIRE E IL COLLASSO DI PURO SCORRIMENTO</b>	p. 130
<b>IV.4.</b>	<b>IL METODO PROPOSTO DA MONASTERIO PER IMPEDIRE IL COLLASSO DI ROTAZIONE</b>	p. 135
<b>V. NICOLAS PERSY</b>		
<b>V.1.</b>	<b>L'INTRODUZIONE DEL MÉMOIRE</b>	p. 136
<b>V.2.</b>	<b>IL METODO PROPOSTO DA PERSY: GENERALIZZAZIONE DEL METODO DI COULOMB</b>	p. 143
<b>V.2.1.</b>	<i>Considerazioni teoriche sui meccanismi di collasso in caso di attrito finito</i>	p. 147
<b>V.2.2.</b>	<i>Conseguenze del metodo del metodo generale dei massimi e dei minimi riproposto da Persy</i>	p. 148
<b>V.3.</b>	<b>NOTA SUL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA SPINTA IN CHIAVE. LA RIDUZIONE AD UN UNICO PUNTO</b>	p. 152
<b>V.4.</b>	<b>NOTA SUL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA SPINTA IN CHIAVE. I PUNTI DI APPLICAZIONE ALL'ESTRADOSSO E ALL'INTRADOSSO</b>	p. 159
<b>V.5.</b>	<b>LE CONSEGUENZE DEL METODO NEL CASO IN CUI NON SI VERIFICHINO L'ALTERNANZA DELLE CERNIERE</b>	p. 162
<b>V.5.1.</b>	<i>Il meccanismo reale di collasso di un arco con estradosso ed imposta orizzontale</i>	p. 171
<b>V.5.2.</b>	<i>Il collasso di un arco con estradosso en chape ed imposta orizzontale</i>	p. 175
<b>V.5.3.</b>	<i>Il meccanismo reale di collasso di un arco con estradosso en chape ed imposta orizzontale</i>	p. 178

<b>V.6.</b>	<b>I MECCANISMI DI COLLASSO CHE SI ATTIVANO QUANDO L'ATTRITO NON È SUFFICIENTE AD IMPEDIRE LO SCORRIMENTO</b>	p. 184
<b>V.7.</b>	<b>LE CONSEGUENZE DEL METODO DEI MASSIMI E DEI MINIMI UTILIZZATO SIA PER L'EQUILIBRIO RISPETTO ALLE ROTAZIONI SIA PER L'EQUILIBRIO RISPETTO ALLO SCORRIMENTO</b>	p. 186
<b>V.7.1.</b>	<i>Analisi delle diverse situazioni in cui si verifica il collasso per un arco circolare estradossato parallelamente</i>	p. 187
<b>V.7.2.</b>	<i>Le ultime considerazioni di Persy sulla stabilità delle volte</i>	p. 196
	<b>CONCLUSIONI</b>	p. 198
	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	p. 202

## INTRODUZIONE

Questo lavoro si propone di costruire un cammino storico evolutivo sulle regole e sulle teorie degli archi in muratura a partire dal Rinascimento fino ai primi anni del XIX° secolo.

Tale percorso è iniziato con la rivisitazione mediante lettura esegetica e critica delle regole costruttive proposte o utilizzate nel Rinascimento: le regole dell'Alberti<sup>1</sup> e quelle del Cinquème orientate specificatamente alla costruzione degli archi da ponte; le considerazioni di Leonardo sui problemi di resistenza e di stabilità emergenti dalla pratica del costruire; le proporzioni degli ordini architettonici suggerite da Palladio; le 5 regole di Gil de Hontañón<sup>2</sup> quale sintesi del gotico e del classicismo e la regola empirica di Derand, per la determinazione dello spessore dei piedritti. Il percorso evolutivo è quindi proseguito con le teorie pre-elastiche del XVIII° secolo: il meccanismo di collasso del portale di La Hire<sup>3</sup> per il miglior dimensionamento dei piedritti; le *nuove ricerche* di Mascheroni<sup>4</sup> in cui si analizza il collasso degli archi attraverso una nuova e matura formulazione di natura assiomatica, basata sull'utilizzazione del Principio dei Lavori Virtuali; la prima formulazione corretta ed esaustiva - nel caso di attrito sufficiente ad impedire scorrimenti - del problema dell'equilibrio dell'arco di Coulomb<sup>5</sup>, che può essere definita un approccio tipo *lower bound* della teoria della rigido-plasticità; fino ad arrivare all'inizio del XIX° secolo alla teoria sugli archi non simmetrici descritta da Monasterio in un Manoscritto inedito dal titolo *Nueva Teórica sobre el Empuje de Bóvedas*<sup>6</sup> "trovato" nel 1993 da Santiago Huerta<sup>7</sup> nella Biblioteca della Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos dell'Universidad Politécnica de Madrid e alla teoria sugli archi descritta da Persy nel capitolo *Stabilité des voûtes* contenuto nella raccolta di lezioni dal titolo *Cours sur la stabilité des constructions, à l'usage des élèves de l'École Royale de l'Artillerie et du*

---

<sup>1</sup> Alberti L. B., 1443-52, *De re aedificatoria* a cura di G. Orlandi, (1966), introduzione e note di Portoghesi P., Il Polifilo, Milano.

<sup>2</sup> Sanabria S. L., 1982, The Mechanization of Design in the 16<sup>th</sup> Century. The structural Formulae of Rodrigo Gil de Hontañón, *Journal of the Society of Architectural Historians*, **XLI**.

<sup>3</sup> La Hire P. de, 1712, *Sur la construction des voûtes dans les édifices*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, p. 69-77, Paris.

<sup>4</sup> Mascheroni L., 1785, *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte*, Locatelli, Bergamo.

<sup>5</sup> Coulomb C. A., 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, Mémoires de mathématique & de physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par Divers Savans, vol. 7, p. 343-382, année 1773, Paris, 1776.

<sup>6</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teórica sobre el empuje de las bóvedas*. Manoscritto non pubblicato, Biblioteca della Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos della Universidad Politécnica de Madrid. Ed. by S. Huerta and F. Foce con traduzione in inglese. Madrid, Instituto Juan de Herrera (in stampa).

<sup>7</sup> Huerta Santiago, Professore di Storia della Costruzione all'Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, Dipartimento di Strutture, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Spagna.

*Génie*<sup>8</sup> che egli tenne all'École Militaire d'Application de l'Artillerie et du Génie di Metz dal 1802 al 1838.

Come si vedrà, l'esegesi critica di questi testi storici evidenzierà:

- il ruolo fondamentale esercitato dalla geometria e dal “costruire a regola d'arte” nelle regole costruttive del Rinascimento (Alberti, regola del Cinquème, Palladio, Gil de Hontañón e Derand);
- il contributo di Leonardo alla comprensione del comportamento statico degli archi;
- le prime formulazioni in termini di analisi limite dell'arco murario eseguite nelle teorie di La Hire e Mascheroni mediante un approccio cinematico (tipo *Upper Bound Theorem*);
- la prima formulazione corretta dell'analisi limite - nel caso di attrito sufficiente e di archi simmetrici – proposta da Coulomb con il suo metodo dei *maximis* e *minimis* che può essere considerata a tutti gli effetti un approccio statico in accordo al *Lower Bound Theorem* della moderna rigido-plasticità;
- la generalizzazione del metodo di Coulomb al caso di archi non simmetrici proposta da Monasterio,
- ed infine, il tentativo effettuato da Persy di individuare tutti i possibili meccanismi dell'arco simmetrico con un approccio spurio tra il metodo *lower bound* di Coulomb ed un approccio *upper bound* basato sulla selezione a priori dei giunti di rottura.

Per l'analisi critica delle teorie succitate, per le strutture ad arco o voltate, in blocchi lapidei o muratura, si è fatto riferimento al modello di corpo rigido soggetto a vincoli unilaterali ed attrito, per tenere in debito conto la scarsa resistenza a trazione del materiale e l'elevata resistenza a compressione.

Altro riferimento è stato l'approccio pionieristico di Heyman<sup>9</sup> che ha trasferito la filosofia dell'analisi limite della plasticità dallo “steel” allo “stone skeleton”.

Il modello meccanico adottato per l'arco murario è quello di una struttura mono-dimensionale governata ai giunti di contatto da opportune leggi di contatto, rispettivamente normale e tangenziale. La cinematica, la statica e la cinetica del sistema possono così essere definite, permettendo di individuare in condizioni di equilibrio stabile i domini delle reazioni staticamente ammissibili come funzione della spinta in chiave.

Se l'attrito è sufficiente ad impedire scorrimenti, il sistema è caratterizzato da una legge di normalità fra campo di spostamenti cinematicamente ammissibili e sistema di reazioni staticamente equilibrate;

---

<sup>8</sup> Persy Nicolas, 1825, *Cours sur la stabilité des constructions, à l'usage des élèves de l'École royale de l'Artillerie et du Génie*, Lithographie de l'École Royale de l'Artillerie et du Génie, Metz, 1827.

<sup>9</sup> Heyman J., 1966, The stone skeleton, *International Journal of Solids and Structures*, **2**, 249-279.

in tali condizioni, la condizione di collasso può essere individuata indifferentemente mediante il “lower” o l’“upper bound theorem” della rigido-plasticità, che consentono di individuare l’unica condizione limite di equilibrio instabile - sulla frontiera (*yield surface*) del dominio delle soluzioni equilibrate - ed il corrispondente unico meccanismo di collasso come legge di flusso associata alla condizione limite di equilibrio (legge di normalità).

Se l’attrito è sufficiente ad impedire scorrimenti e fintantoché l’equilibrio si mantiene stabile, il dominio delle reazioni interne staticamente ammissibili è esteso e la corrispondente frontiera individua - dal punto di vista cinematico - archi isostatici o iperstatici; la condizione limite di equilibrio è raggiunta quando il dominio delle reazioni staticamente ammissibili si riduce ad un unico punto, individuando dal punto di vista cinematico un meccanismo: il meccanismo di collasso.

In caso di attrito finito, invece, i teoremi della rigido plasticità cessano di valere dal momento che l’attrito di Coulomb non corrisponde ad un criterio di stabilità ed il collasso non è caratterizzato da una legge di flusso associato; la condizione di collasso si colloca tra la frontiera delle soluzioni equilibrate in presenza di attrito sufficiente e quella delle soluzioni equilibrate per attrito finito. Il meccanismo di collasso non è più *a priori* unico e la sua individuazione richiede l’uso combinato di un approccio cinematico e statico ed il riferimento ad opportuni criteri energetici.<sup>10</sup>

Scopo precipuo della tesi è quello di analizzare criticamente le teorie proposte per l’analisi delle strutture voltate nell’arco storico che si estende dal Rinascimento all’inizio del XIX° secolo, e cioè fino all’avvento della teoria dell’elasticità, per riconoscere come anche in questo settore di carattere applicativo persistano le stesse difficoltà che hanno caratterizzato su un piano più teorico il cammino verso la conquista dei concetti chiave per l’analisi di un problema di equilibrio.

Inoltre, nella stessa direzione prima individuata da Heyman, la tesi intende riabilitare la validità delle teorie pre-elastiche sulle strutture voltate, basate sul modello di corpo rigido.

In particolare, la teoria di Mascheroni - ultimo epigono di un approccio in cui l’equilibrio dei pesi è governato dalla geometria - si configura come primo esempio di analisi limite in accordo all’*Upper Bound Theorem* della moderna rigido-plasticità; mentre la teoria di Coulomb, basata su una ormai matura consapevolezza del concetto di forza e del ruolo delle reazioni interne, segna un cambiamento di paradigma rispetto alle precedenti teorie geometriche e si configura - restando nell’ambito della teoria di corpo rigido ed in caso di attrito sufficiente - come la prima formulazione corretta ed

---

<sup>10</sup> Sinopoli, A., Aita, D., Foce, F. 2007. Further Remarks on the collapse of Masonry Arches with Coulomb Friction, *ARCH07 - 5th, International Conference on Arch Bridges*, Funchal, Madeira (Portugal), 2007, SEPTEMBER 12-14, MULTICOMP, GUIMARÃES, 2007: P. B. Lourenço, D. V. Oliveira, A. Portela (eds), pp. 649-657.

esaustiva dell'analisi limite in accordo al *Lower Bound Theorem* della moderna rigido-plasticità.

La teoria di Coulomb resterà pietra miliare per tutti i meccanici che si occuperanno in seguito - restando nell'ambito delle teorie pre-elastiche - dell'equilibrio delle strutture voltate consentendo la definizione di tabelle e parametri geometrici garanti della stabilità di tali strutture (Audoy<sup>11</sup>, Petit<sup>12</sup>, etc.).

Gli unici tentativi di generalizzare la teoria di Coulomb al caso di archi non simmetrici (Monasterio) o per l'individuazione di tutti i possibili meccanismi di collasso (Persy) riveleranno il limite del metodo dei *maximis e minimis* di Coulomb da loro assunto come riferimento, soprattutto nel caso di attrito finito e per l'analisi dei meccanismi di collasso con scorrimento, da cui sia Coulomb ed in seguito anche Heyman avevano preso le distanze considerandoli come improbabili per valori usuali dell'attrito tra le superfici di contatto di strutture murarie o lapidee.

---

<sup>11</sup> Audoy, 1820, *Mémoire sur la poussée des voûtes en berceau*, Mémorial de l'Officier du Génie, Paris, n. 4, p. 1-96.

<sup>12</sup> Petit, 1835, *Mémoire sur le calcul des voûtes circulaires*, Mémorial de l'Officier du Génie, Paris, n. 12, p. 73-150.

## I. REGOLE COSTRUTTIVE PER LE STRUTTURE VOLTATE FINO AL XVII SECOLO

### I.1. INTRODUZIONE

Forse è lecito affermare che una teoria statica sugli archi non fu mai stabilita in termini quantitativi sino alla fine del XVIII secolo. Ma nessuno può dubitare che già in precedenza fossero stati messi in luce alcuni aspetti salienti del comportamento strutturale atti ad orientare le norme costruttive. Ad esempio, nel capitolo XI Libro VI dei Dieci Libri sull'Architettura Vitruvio scrive:

“...Devesi anche procurare, che gli archi leuino i pesi con le divisioni dei cunci, di legamenti che rispondino al centro, perché quando gli archi saranno serrati da i cunei oltra le travi, & i capi de i sopralimitari, prima la materia solleuata dal carico non si aprirà... Et però se le pilastrate angolari saranno di grandezza maggiore, contenendo i cunei saranno l'opere più ferme.”<sup>13</sup>

Egli dimostra chiaramente di aver intuito che la volta esercita un effetto spingente sui muri e sui pilastri che la sostengono ma, non contraddisse la comune convinzione che la geometria, non la statica, poteva provvedere alle più semplici, le più armoniose e più sicure proporzioni nel costruire archi.<sup>14</sup>

E ancor più evidente appare l'attenzione per il complesso gioco statico tra l'arco rampante e la volta nervata che caratterizza i grandi edifici del gotico. Secondo Viollet le Duc i costruttori medioevali possedevano l'*istinto* di una teoria assai raffinata, quella che consiglia di approssimare la forma dell'arco alla “curva delle pressioni”.<sup>15</sup>

Nonostante gli scritti moderni affrontino in modo meramente descrittivo le peculiarità delle tecniche più propriamente ingegneristiche dei capomastri medievali e benché sia quasi certo che i costruttori fossero incapaci di eseguire anche la più semplice analisi strutturale, potrebbe, tuttavia, non esserci dubbio di capacità pratiche dei capomastri; una cattedrale che dura quasi intatta per 800 anni è chiaramente lavoro di genio.<sup>16</sup>

### I.2. LEON BATTISTA ALBERTI

Credo che gli uomini abbiano appreso a costruir l'arco in questo modo. Accortisi che due travi con le estremità superiori unite

---

<sup>13</sup> Marco Vitruvius Pollio, I secolo A.C, De Architectura, Libro VI, cap. XI.

<sup>14</sup> Benvenuto Edoardo, 1991, *An introduction to the History of Structural Mechanics Part II: Vaulted Structures and Elastic System*, Springer-Verlag, New York, pag.380.

<sup>15</sup> Benvenuto E., 1981, *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*, Ed. Sansoni, Firenze, pag. 323.

<sup>16</sup> Heyman Jacques, 1966, Department of Engineering, University of Cambridge, The stone skeleton, Int. *Journal of Solids and Structures*, pp. 249-279, Pergamon Press Ltd. Printed in Great Britain.

potevano essere fissate in basso, nel luogo in cui le loro basi erano divaricate, in modo tale che, reciprocamente collegate ed equilibrandosi con identico peso, si reggessero tra loro, la scoperta ebbe successo, e con questa tecnica si cominciarono ad impiegare negli edifici i tetti a displuvio. In seguito, probabilmente, avendo intenzione di coprire con quelli un maggiore spazio e ciò non potendo per essere le travi più corte, sistemarono una trave intermedia nel punto più alto, alla sommità dei tronchi, facendone risultare a un dipresso la figura di una P greca  $\pi$ ; e l'elemento aggiunto chiamarono probabilmente concio. Anche questa invenzione ebbe fortuna, anzi i conci vennero moltiplicandosi, giungendo a costituire una sorta di arco, la cui forma piacque.<sup>17</sup>

Questo è quanto scrive Leon Battista Alberti (1404-1472), nel suo *De re aedificatoria* (1443-52), per spiegare la genesi dell'arco. Non si è certi di quanto egli abbia attinto da opinioni comuni, e quanto sia invece frutto delle sue riflessioni. Egli non fa alcuna distinzione fra travi ed archi; un arco è una trave curva, mentre la trave è una colonna collocata trasversalmente sugli appoggi. Egli ha in mente un unico blocco di pietra, la cui forma può essere indifferentemente quella della trave o dell'arco.

Vi sono diversi tipi di arco. È arco intero quello che consta di un intero semicerchio, e la cui corda passa perciò per il centro del cerchio stesso. Vi è poi un tipo che somiglia più a un architrave che a un arco, e si dice ribassato, perché non è un intero semicerchio, bensì una certa parte di esso, e la sua corda è situata al di sopra del centro, a una data distanza. L'arco è infine acuto (detto pure da alcuni angolare e da altri composto), quando consta di due archi ribassati, e la sua corda contiene i centri delle due curve che s'intersecano.<sup>18</sup>

L'arco può, dunque, essere di tre forme diverse: intero, ossia a semicerchio; ribassato, ottenuto da una parte di arco a semicerchio, e acuto, ottenuto da due parti ad arco ribassato. Secondo l'Alberti il più solido tra i tre è l'arco intero e parlando del ruolo dei conci egli scrive:

Che il più solido di tutti sia l'arco intero, si può constatare con i fatti e dimostrare col ragionamento. Non si vede in che modo esso possa sconnettersi per conto proprio; salvoché l'un concio spinga fuori l'altro; ma essi sono tanto lungi dal danneggiarsi in questa maniera, che anzi si rafforzano prestandosi reciproco sostegno. Del resto, quand'anche fossero disposti a tentare di scalzarsi a vicenda, la

---

<sup>17</sup> Alberti Leon Battista 1443-52, *De re aedificatoria*, testo e traduzione a cura di G. Orlandi, introduzione e note di P. Portoghesi, Il Polifilo, Milano, 1966, Libro III, cap. XIII, pag. 234.

<sup>18</sup> Alberti L. B., 1443-52, *De re aedificatoria*, *ibidem* pag. 234.



presenza stessa dei pesi onde sono caricati o che contengono in sé basta ad impedirlo.

L'Alberti intuisce dunque che i conci hanno un comportamento a cuneo e che, nel caso in cui uno di essi avesse voglia di uscire dal suo alloggiamento, gli altri agendo per compressione glielo impedirebbero.

Di qui il giudizio di Varrone<sup>19</sup>: nelle strutture ad arco la parte destra è sostenuta dalla sinistra non meno che questa da quella. E consideriamo bene il fenomeno. Il concio posto in cima, unico nel punto di mezzo dell'arco, non si vede come possa trovare la forza di spinger fuori i conci che lo fiancheggiano; così come questi, per quanta pressione facciano, non potranno mai scalzare quello dal posto che occupa; quelli poi che fanno seguito ad essi occupando i fianchi dell'arco, verranno agevolmente tratti nell'ambito della loro funzione dall'equilibrarsi dei pesi; infine, i conci posti alle due estremità inferiori, non si comprende come possano spostarsi una volta che gli altri, sopra di essi, restino fermi al loro posto. Pertanto gli archi interi non abbisognano di corda (di catena, secondo l'Orlandi), poiché essi sono in grado di mantenersi intatti da sé. Invece quelli ribassati vanno rinforzati con una catena di ferro o con qualcos'altro di equivalente, assicurato nei due lati a tratti di muro; tali tratti non dovranno avere un'altezza a quanto occorre per completare il semicerchio di cui l'arco ribassato fa parte. Questo accorgimento non fu mai trascurato dagli architetti dell'antichità, che procurarono sempre, dov'era possibile, d'integrare gli archi ribassati, fiancheggiandoli con muri. Osservavano anzi giustamente la consuetudine di collocare l'arco ribassato laddove se ne presentava l'opportunità, sopra architravi, e di sistemargli di sopra anche un arco intero, con la funzione di proteggere l'arco ribassato sottostante intercettando i danni che potevano derivargli dalle masse che gravavano sopra (struttura tipica dell'architettura gotica senese). Di archi acuti mancano esempi nell'antichità. Pensano alcuni che tali siano da utilizzare per le aperture nelle torri, in modo da dividere in due, quasi opponendovi una prua, la pressione del materiale soprastante; sebbene l'arco acuto dal gravare dei pesi siffatti riesce piuttosto rafforzato che messo in difficoltà.

I conci con cui si costruisce l'arco devono essere, a mio giudizio, di pietre squadrate e ove è possibile, di grandi dimensioni. Giacché in ogni corpo è meno divisibile la parte concresciuta e unita naturalmente di quella che è stata congiunta e saldata dal lavoro dell'uomo. Essi inoltre devono essere uguali tra loro, in modo che quelli di destra

---

<sup>19</sup> Varrone Marco Terenzio, 116-27 a.C., *Disciplinarum Libri IX*.

siano esattamente bilanciati da quelli corrispondenti di sinistra, per forma, volume, peso, etc.<sup>20</sup>

Un arco fatto di più conci è per sua natura meno solido di un arco fatto di un solo blocco che esprime, per così dire, la massima solidità; se si escludono problemi di resistenza del materiale. Un arco di questo tipo lo è solo per la forma e dal punto di vista meccanico è simile alla trave; in altre parole è impossibile determinare il valore della spinta, pur con i moderni metodi dell'analisi strutturale, perché essa deriva dalla deformabilità del materiale. Se, come si è supposto, il materiale è indeformabile, il sistema è in equilibrio anche se si assume che la spinta sia nulla, perché questa è una delle infinite soluzioni possibili.

Naturalmente la situazione risulta completamente diversa se l'arco è composto da più conci perché in questo caso ci si trova di fronte ad un meccanismo potenzialmente attivabile dai carichi che esso è chiamato a sopportare; e quanto maggiore è il numero dei conci tanto maggiore è il numero dei meccanismi attivabili. In questo senso, dunque, Alberti afferma una verità.<sup>21</sup>

L'arco, dunque, non è un monolite, ma una costruzione composta da un numero limitato di conci, sagomati a semicerchio, ciascuno di essi somigliante ad un cuneo - una delle cinque macchine semplici sul cui funzionamento prima Aristotele, poi Erone, si erano soffermati ad indagare - e su cui Alberti tenta di dare una spiegazione. I conci sono parti di cunei, visto che questi dovrebbero terminare con lo spigolo vivo, con le facce necessariamente rivolte verso il centro dell'arco ed individuate da piani perpendicolari alle sue superfici di intradosso ed estradosso.

L'effetto del colpo esercitato sulla testa del cuneo individuato come azione trasmessa dalle sue facce al corpo da dividere, è un'azione che si manifesta con l'allontanamento delle parti che, mantenendosi aderenti alle facce del cuneo, si muovono in direzioni ad esse ortogonali.

E quando Alberti asserisce che i cunei terminali dell'arco a tutto sesto, i suoi conci di imposta, non possono muoversi, sta semplicemente affermando che l'azione da essi esercitata è diretta verso il basso ed è contrastata dai sostegni; perciò l'arco a tutto sesto, non esercitando alcuna spinta, come invece è per l'arco ribassato, "non abbisogna di catena". È vero che, a parità di luce e di carichi, la spinta di un arco è tanto più piccola quanto più è grande la sua freccia, dunque minore nell'arco a tutto sesto rispetto all'arco ribassato.<sup>22</sup>

In seguito l'Alberti propone regole per il dimensionamento della figura delle volte e per la proporzione tra gli elementi che si basano su criteri

---

<sup>20</sup> Alberti L. B. 1443-52, *De re aedificatoria*, *ibidem* pag. 234 - 238.

<sup>21</sup> Di Pasquale S., 1996, *L'arte del costruire, Tra conoscenza e scienza*, Marsilio, Venezia, pag. 240, 241.

<sup>22</sup> Di Pasquale S., 1996, *L'arte del costruire, ibidem*, pag. 259.

diversi tra cui figurano obiettivi estetici, riferimenti simbolici, caratteri stilistici derivanti dalla tradizione classica, ma tutti caratterizzati da una quasi totale assenza di riferimenti a problemi di equilibrio e resistenza.

Di particolare interesse sono i suggerimenti per il dimensionamento dei ponti, la cui progettazione era considerata un'estensione dell'analogia tecnica usata per l'arco in muratura; e riferendosi all'arco a tutto sesto Alberti dice:

lo spessore del pilone  $l$  sarà un quarto dell'altezza  $h$  del ponte:

$$l = \frac{1}{4} h \quad (1.1)$$

ed ancora:

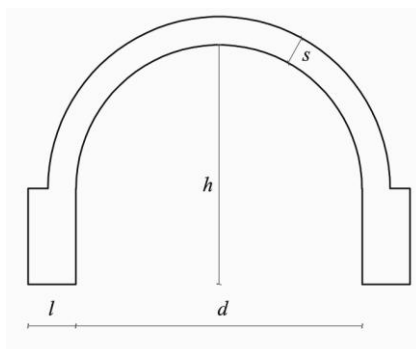
la corda (catena dell'arco) non dev'essere più lunga di sei volte lo spessore  $d$  del pilone, né meno lunga di quattro volte tanto:

$$4l \leq d \leq 6l \quad (1.2)$$

ed infine:

le pietre (i conci) non devono essere più sottili (spessore  $s$ ) di un decimo della corda  $d$  di esso (arco):

$$s \geq \frac{1}{10} d \quad (1.3)$$



**Fig. 1.1.** Rapporto fra piedritto e corda dell'arco  $d \leq 6l$ .

Per l'arco ribassato, invece, nel caso in cui fosse necessario diminuire l'altezza della curva del ponte rispetto alle rive, Alberti aggiunge alle precedenti la condizione di rafforzare anche le spalle del ponte. Tale affermazione sembra anticipare le teorie francesi di fine Settecento che riconoscevano a questa parte della struttura il compito di resistere alle spinte orizzontali.

L'Alberti era consapevole che gli archi ribassati producevano spinte orizzontali maggiori, infatti nel suo *De re Aedificatoria* si trova un piccolo accenno relativo all'idea di controbilanciare tali spinte, non all'interno della

singola campata, ma all'estremità di una serie di arcate. È molto probabile che la ragione del rafforzamento delle spalle nel caso degli archi ribassati sia dovuta a finalità estetiche più che strutturali.

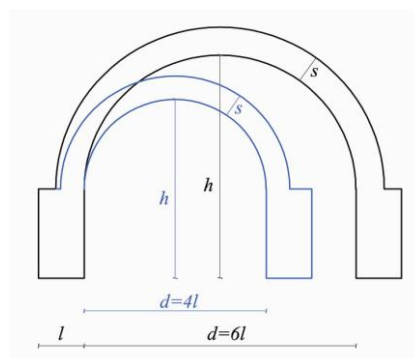
L'Alberti si interessa comunque e prevalentemente degli archi a tutto sesto. La loro altezza  $h$ , misurata dall'intradosso al piano delle fondazioni, rappresenta la variabile da cui dipende proporzionalmente lo spessore dei piloni  $l$ . Tale spessore influisce sulla determinazione della luce dell'arco  $d$  con un fattore che oscilla da 4 a 6. Questo significa che, a parità di altezza  $h$  e di larghezza dei piloni  $l$ , la luce dell'arco  $d$  può aumentare fino al massimo di  $1/3$  in più rispetto alla minima dimensione prescritta. Quindi, la luce dell'arco  $d$  risulta dipendente dall'altezza  $h$  secondo la duplice disuguaglianza:

$$h < d < \frac{3}{2}h \quad (1.4)$$

cosicché a parità di altezza è possibile variare il raggio di curvatura dell'arco entro un intervallo definito, senza dover modificare altri parametri. Questa regola conduce però ad alcune incoerenze: quando la luce dell'arco è minima, ossia pari all'altezza, la struttura forma un quadrato perfetto, mentre, quando la luce dell'arco è massima, pari a una volta e mezza l'altezza, l'imposta dell'arco si trova ad una altezza pari allo spessore dei piloni. La teoria dell'Alberti, come si può notare, tratta le strutture delle arcate da ponti in termini bidimensionali e non tiene conto dell'influenza dello spessore trasversale delle arcate sul peso complessivo delle costruzioni e sulla loro stabilità.

Infine, il rapporto che egli propone per il rapporto tra lo spessore  $l$  dei piedritti e la luce  $d$  dell'arco oscilla fra un quarto ed un sesto:

$$\frac{1}{6}d < l < \frac{1}{4}d \quad (1.5)$$



**Fig. 1.2.** La corda dell'arco  $d$  può variare fra  $4l$  e  $6l$ .

Tale relazione tuttavia risultava talvolta insufficiente per il dimensionamento adeguato delle spalle del ponte; per questo motivo, nella pratica costruttiva, era necessario incrementare ulteriormente lo spessore,

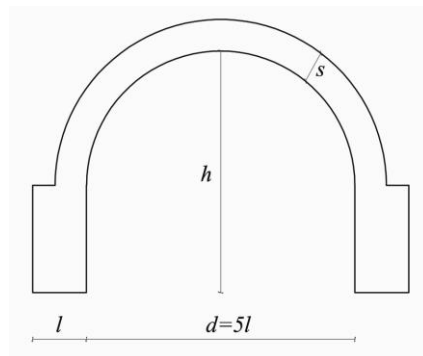
rischiando in tal modo di pregiudicare il flusso della corrente e di conseguenza la stabilità complessiva della struttura. Le cronache dell'epoca documentano numerosi disastri capitati durante le piene dei fiumi che, trasportando molti materiali solidi, non trovavano sufficiente spazio fra le campate degli archi ed erodevano la muratura dei piloni fino a condurre le volte al collasso. Piloni troppo spessi e sezioni diminuite furono talvolta la causa sconosciuta di molti crolli di ponti, il cui collasso era attribuito ad una eccessiva debolezza dei supporti e delle fondazioni.

Avvenne così che il valore da utilizzare per lo spessore del piedritto, definito dall'Alberti come variabile tra un sesto ed un quarto del diametro dell'arco, fu sostituito dal valore corrispondente alla *regola del cinquième* utilizzata fino a metà del XVIII° secolo.<sup>23</sup>

### I.3. LA REGOLA DEL CINQUIÈME

La *regola del cinquième* (Fig. 1.3) suggerisce per la stabilità dell'arco uno spessore del piedritto pari a circa un quinto della luce dell'arco:

$$l = \frac{1}{5} d \quad (1.6)$$



**Fig. 1.3.** La regola del cinquième,  $l = \frac{1}{5} d$

Questa regola, analogamente a quella dell'Alberti, non tiene conto dell'altezza dei piedritti come parametro fondamentale e considera sempre la struttura del ponte in termini bidimensionali. Essa fu riproposta da Henry Gautier nel *Traité des ponts*<sup>24</sup> ed in seguito da Emiland Marie Gauthey nel *Traité de la construction des ponts*.<sup>25</sup>

<sup>23</sup> Postir B., Tesi di laurea I.U.A.V., relatore A. Sinopoli, *La rilevanza della geometria nella definizione di regole e trattati per la stabilità di archi e volte: una rivisitazione in chiave cinematica da Leonardo a De La Hire*, Venezia, a.a. 1998-99, pag. 7.

<sup>24</sup> Gautier Henry, 1765, *Traité des ponts, où il est parlé de ceux des romains, et de ceux des modernes (...), et une Dissertation sur les Culées, Piles, Vaussoirs et Poussées des Ponts, et plusieurs Devis set Règlements faits à ce sujet*, quatrième édition, Duchesne libraire, Paris.

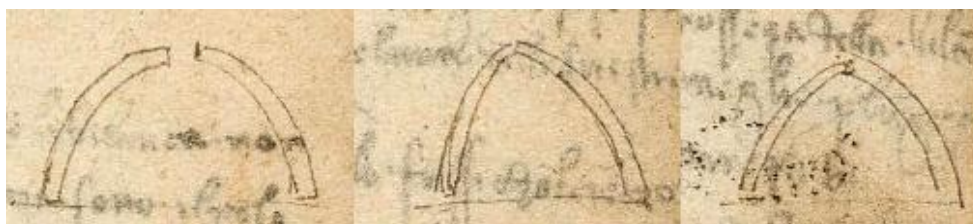
<sup>25</sup> Gauthey Emiland Marie, 1843, *Traité de la construction des ponts, public par M. Navier, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées (...), troisième édition, corrigée et augmentée*, Leduc, Liegi.

#### I.4. LEONARDO DA VINCI

L'approccio puramente geometrico nel dimensionamento strutturale è stato ampiamente utilizzato dagli architetti del gotico e del rinascimento; esso era supportato dalla convinzione che a geometrie simili corrispondessero simili comportamenti statici.

Tra gli “artisti” del tempo Leonardo da Vinci (1452-1519) rappresenta un'importante eccezione perché si discosta da questo tipo di approccio.

Nei suoi scritti è, infatti, possibile rintracciare numerosi riferimenti agli archi, nei quali sono contenute intuizioni sulla peculiarità della loro geometria e sul loro modo di rompersi, quando ad essi siano applicati differenti carichi in posizioni diverse.



**Fig. 1.4.** *Manoscritto A*, fol. 50 recto.

La definizione di arco di Leonardo (Fig 1.4), nel *Manoscritto A*, fol 50 recto, dei dodici *Manoscritti di Francia*, descrive perfettamente la natura strutturale dell'arco:

Arco non è altro che una fortezza causata da dua debolezze imperò che l'arco negli edifizii è composto di 2 quarti di circolo, i quali quarti circuli ciascuno debilissimo per sé, desidera cadere e opponendosi alla ruina l'uno dell'altro, le due debolezze si convertano in unica fortezza.<sup>26</sup>

Una straordinaria intuizione che esprime l'ammirazione che l'arco ha sempre ispirato. Nell'arco lapideo, Leonardo sembra suggerire che la gravità sia vinta da meravigliosi e ambigui mezzi. Il “desiderio di cadere” (gravità) spinge le due curve insieme, rafforzando la loro unione. La maestria dell'uomo ha il sopravvento sulla natura attraverso un paradosso; come il poeta greco Antifone, dice: “Possa l'arte condurre alla vittoria che la natura impedisce”.<sup>27</sup>

Due debolezze opportunamente disposte in modo da collaborare, proprio in virtù della loro debolezza si trasformano quindi in una resistenza.

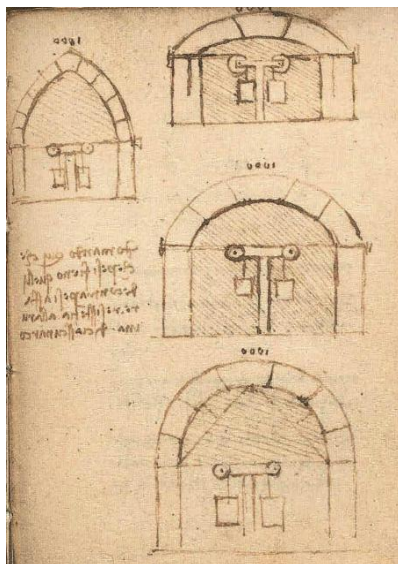
---

<sup>26</sup> Leonardo da Vinci, 1492-1516, *Manoscritti di Francia (A-M)*, Paris, Institut de France, *Manoscritto A*, fol. 50 recto.

<sup>27</sup> Benvenuto E., 1991, *An introduction to the History of Structural Mechanics Part II*, *ibidem*, pag. 309.

Il fondamento di tale paradosso consiste nel corretto posizionamento e contemporaneamente nel corretto proporzionamento.<sup>28</sup>

Nel fol. 92 recto del *Codice Forster II*<sup>29</sup> si scorgono degli schizzi di archi in cui la catena è interrotta, ed alle due estremità del punto di distacco sono posti due pesi sostitutivi del ruolo della catena, quasi a voler valutare la tensione cui essa deve essere soggetta (Fig. 1.5).



**Fig. 1.5.** *Codice Forster II*, fol 92 recto.

Alla catena, intesa come vincolo geometrico, è attribuito dunque un comportamento statico, esemplificato attraverso l'uso di pesi che la sostituiscono. E Leonardo si domanda:

qui che pesi fieno quelli de' contrappesi a fare resistenza ala ruina di ciascun arco?<sup>30</sup>

Negli schemi Leonardo si chiede infatti se è possibile contrastare la *ruina* di un arco poggiante su piedritti, intuendo così che essa possa essere dovuta ad una luce eccessiva, e quindi ad una eccessiva spinta.

Se Leonardo fosse riuscito a portare a termine il suo *Libro di Meccanica* avremmo oggi un riferimento più preciso sulla sua interpretazione in termini spiccatamente meccanici dei problemi di resistenza e di stabilità emergenti dalla pratica del costruire; egli ha lasciato voluminosi quaderni di appunti, pubblicati come *Codici di Madrid*<sup>31</sup> e *Manoscritti di Francia* nei quali è probabilmente raccolto tutto il materiale preparatorio per il suo trattato di

<sup>28</sup> Sinopoli A., 2002, A Re-examination of some theories on vaulted structures: The role of geometry from Leonardo to de La Hire, *Towards a History of Construction*. Basel: Birkhäuser. 601-624.

<sup>29</sup> Leonardo da Vinci, 1493-1505, *Codice Forster II*, *Codici Forster*, London, Victoria and Albert Museum.

<sup>30</sup> Leonardo da Vinci, 1493-1505, *Codice Forster II*, *ibidem*, fol 92 recto.

<sup>31</sup> Leonardo da Vinci, 1503-1505, *I codici di Madrid*, a cura di L. Reti, Firenze, Giunti-Barbera, 1974.

meccanica.

Al problema degli archi sono dedicate alcune pagine del *Codice di Madrid I*, inframmezzate ad altre questioni meccaniche, nelle quali con estrema chiarezza sono messi a fuoco problemi di stabilità e di resistenza; la loro importanza non deriva tanto dall'esattezza delle sue intuizioni, quanto dalla testimonianza che egli sia stato attento nel cogliere la possibilità di applicazione delle elaborazioni teoriche sviluppate nella meccanica medievale a problemi generati dalla pratica dell'edificazione.<sup>32</sup>

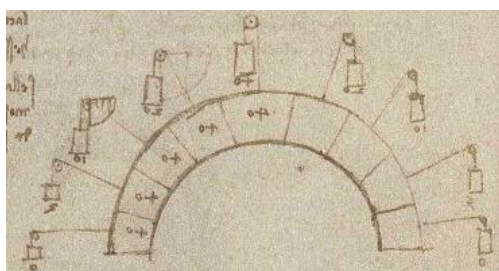
Questa si dimanda pratica, ma ricordati di mettere la teorica dinanzi.<sup>33</sup>

Nelle annotazioni che accompagnano i suoi disegni è facile riconoscere gli argomenti trattati nel testo base della meccanica medievale, l'opera di Giordano Nemorario, in cui è enunciato il concetto della *gravitas secundum situm* che Leonardo utilizza magistralmente per definire le azioni cui sono sottoposti i conci di un arco durante la loro ideale e progressiva collocazione in opera a partire dalle imposte (Fig. 1.6).

Gravità è un certo spingimento ovvero desiderio di fuga che ffa l'uno elemento trasportato e richiuso nell'altro, il quale con continuo modo d'opremere si forza di tal sito scarcerarsi.<sup>34</sup>

Qui si comincia a far menzione del peso accidentale, detto forza, il quale aplicandosi ai pesi fa ufizio di gravità.<sup>35</sup>

Forza dico essere una virtù spirituale, una potenza invisibile, la quale per accidentale, estrema violenza è causata dal moto e collocata e infusa ne' corpi, i quali sono dal loro naturale uso retratti, e piegati, dando a quelli vita attiva di maravigliosa potenza. Costringe tutte le create cose a mutazione di forma e di sito.<sup>36</sup>



**Fig. 1.6.** *Codice di Madrid I*, fol. 142 verso.

Con riferimento alla *gravitas secundum situm* Leonardo nel *Codice di Madrid I*, fol. 142 verso, attraverso l'uso di pesi sostenuti da carrucole determina il valore della componente attiva del peso di ciascun concio (Fig. 1.6) lungo il piano inclinato che lo sostiene: per il concio alle imposte

<sup>32</sup> Di Pasquale S., 1996, *L'arte del costruire*, *ibidem*, pag. 242.

<sup>33</sup> Leonardo da Vinci, 1503-1505, *Codice di Madrid I*, *ibidem*, 164 verso.

<sup>34</sup> Leonardo da Vinci, 1503-1505, *Codice di Madrid I*, *ibidem*, 144 verso.

<sup>35</sup> Leonardo da Vinci, 1503-1505, *Codice di Madrid I*, *ibidem*, 159 recto.

<sup>36</sup> Leonardo da Vinci, 1492-1516, *Manoscritto A*, *ibidem*, fol 34 verso.



questo valore è nullo, mentre esso è massimo per il concio in chiave.<sup>37</sup>

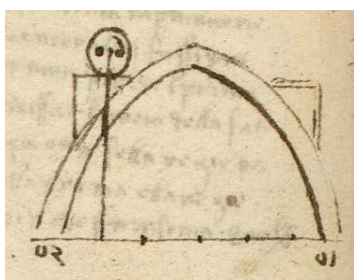
Ed ancora nel fol. 47 verso del *Manoscritto A*, sulla resistenza dell'arco a sesto acuto, Leonardo scrive:

Se l'arco nel suo volersi rompere fa forza per 200 libbre, dalli per contrasto 200 libbre di peso o di forza, e starà bene.<sup>38</sup>

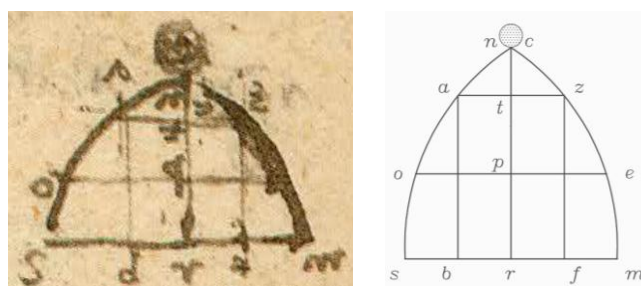
Inoltre, nella Fig. 1.7 Leonardo ci mostra come un arco acuto sottoposto ad un carico di 60 su una sola arcata ripartisce la sua azione in due parti che sono definite dai bracci che il peso intercetta sull'orizzontale; le due parti del peso 10 e 50 stanno fra loro in rapporto inverso a quello dei bracci corrispondenti – principio della leva.

Con la stessa idea guida del principio della leva, nel fol 49 verso del *Manoscritto A* (Fig. 1.8), Leonardo scrive:

Quella parte dell'arco che fia più piana farà minore resistenza al peso sopra postoli. Ciascuno 1/2 arco, sendo vinto dal superchio peso, si romperà ne' 2/3 della sua altezza, la quale parte risponde, perpendicolare linia, sopra il 1/2 della sua basa, come appare in ab.



**Fig. 1.7** *Manoscritto A*, fol. 47 verso.



**Fig. 1.8.** *Manoscritto A*, *ibidem*, fol. 49 verso.

E questo accade che 'l peso desidera cadere e passare nel punto r, e s'egli desiderassi contra sua natura cadere dal punto s, l'arco ns si romperebbe nel suo mezzo appunto. E se l'arco ns fussi d'un sol legno, il peso posto in n desidererebbe cadere in m e romperebbe in 1/2 all'arco cm; altrimenti si romperà nel terzo di sopra nel punto

<sup>37</sup> Leonardo da Vinci, 1503-1505, *Codice di Madrid I*, *ibidem*, 142 verso.

<sup>38</sup> Leonardo da Vinci, 1492-1516, *Manoscritto A*, *ibidem*, fol 47 verso.

a, perché da an è l'arco più piano che non è da ao, e che non è da os; e tanto quanto pt è maggiore che tn, tanto fia più forte ao che non è an e similmente tanto fia più forte so che oa, quanto rp fia maggiore che pt.<sup>39</sup>

Da quanto lui scrive si desume che maggiore è la pendenza della porzione di arco, maggiore è la sua stabilità dal momento che a maggiore pendenza corrisponde, a parità di altezza, un braccio minore dell'eventuale momento destabilizzante, e cioè "più piana" è la porzione di arco meno esso è stabile. La porzione za in chiave dell'arco in Fig. 1.8 risulta essere meno resistente delle porzioni ao e ze alle reni, e che queste ultime a loro volta sono meno resistenti delle porzioni os e em a ridosso delle imposte.

Leonardo fissa il giunto di rottura in corrispondenza della metà della basa in modo che i bracci br e ta risultino uguali cosicché la proiezione verticale del punto medio b individua il giunto di rottura a sull'arco. Nella ricerca di questo giunto di rottura in diverse tipologie di archi a sesto acuto, ci si accorge che il punto a trovato da Leonardo non corrisponde ai 2/3 dell'altezza nr, bensì ad un punto più in basso, collocato fra a e o, la cui proiezione verticale sulla *basa* non risulta cadere al centro della stessa.

In altre pagine dello stesso manoscritto (Fig. 1.9a,b) Leonardo suggerisce gli accorgimenti da adottare nella costruzione di un arco a tutto sesto, di un arco a sesto rialzato e di un arco ribassato, affinché esso sia solido:

De la fortezza dell'arco. Il modo di fare l'arco premanente si è a riempire i sua angoli di buono ripieno insino al suo raso ovvero culmine...Due archi, più o meno curvi, con bnamc; codpf, l'arco poco curvo fia sicuro per sé, ma se fia carico, le spalli bisogna bene armare. L'arco d'assai curvità fia per sé debole, e più se fia carico, e farà poca noia alle sua spalli, e lui romperà in op.<sup>40</sup>



**Fig. 1.9a,b.** *Manoscritto A*, fol. 50 verso.

C'è poi una pagina nel *Codice di Madrid I* dedicata allo studio delle fratture e dei conseguenti meccanismi che si innescano in un arco sotto particolari condizioni di carico; è questo il caso in cui è disegnato un arco a tutto sesto, caricato in chiave, con il suo meccanismo di rottura. Il disegno è

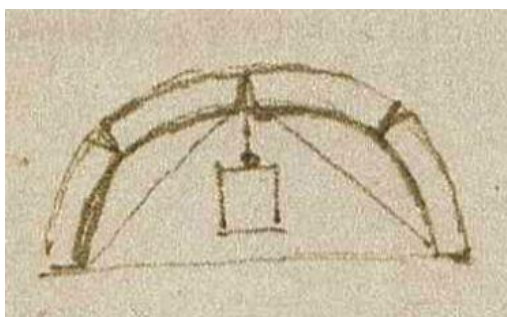
<sup>39</sup> Leonardo da Vinci, 1492-1516, *Manoscritto A*, *ibidem*, fol. 49 verso.

<sup>40</sup> Leonardo da Vinci, 1492-1516, *Manoscritto A*, *ibidem*, fol 50 verso.

accompagnato da un'annotazione:

Se ll' arco fia carico nel mezo della sua alteza e che tal graveza superi la potentia d'esso arco, cierto esso arco si romperà in ciascun quarto della sua lungheza, cioè infora lla potentia del peso che llo carica e la resistentia de' piedi d'esso arco. Perché tanto peso opunto fia sopra de' sua piedi quanto è quello che sta sopra del suo mezo.<sup>41</sup>

Leonardo sta affermando, nella prima parte della sua nota, che la rottura di un arco a tutto sesto non può avvenire per qualsiasi carico posto in chiave (Fig. 1.10) perché prima bisogna vincere la *potentia*, ovvero la sua stabilità. Solo quando, immaginando che il carico possa crescere, questa stabilità sarà vinta, si avrà l'istantanea apertura di giunti di rottura con la trasformazione della struttura in meccanismo.<sup>42</sup>



**Fig. 1.10.** Codice di Madrid, fol. 139 verso.

L'intuizione che la possibilità di collasso sia dovuta alla formazione di un meccanismo è corretta nei suoi aspetti fondamentali, con le cerniere di apertura dei giunti di rottura collocati alternativamente all'intradosso e all'estradosso dell'arco; la chiave di lettura per l'individuazione della posizione dei giunti di rottura, sia nel caso di carico simmetrico che nel caso di carico non simmetrico, è fornita da Leonardo nella *propositione* e nella *difinitione* di Fig. 1.11.

L'analisi è affrontata da Leonardo nel *Codice di Madrid I*, fol.139 verso, per un arco semicircolare soggetto al peso proprio e a due carichi verticali concentrati in due punti generici b e a delle reni:

Se ll'arco fia carico nel mezo della sua alteza e che tal graveza superi la potentia d'esso arco, cierto esso arco si ronperà in ciascun quarto della sua lungheza, cioè infra lla potentia del peso che llo carica e lla resistentia de' piedi d'esso arco. Perché tanto peso apunto fia sopra de' sua piedi quanto è quello che sta sopra del suo mezo, per la 5<sup>a</sup> del 7<sup>o</sup>, che dice ch'ogni peso è tucto per tucto il suo sostantucolo e tutto in ogni parte di quello.<sup>43</sup> (Fig. 1.11, arco in alto).

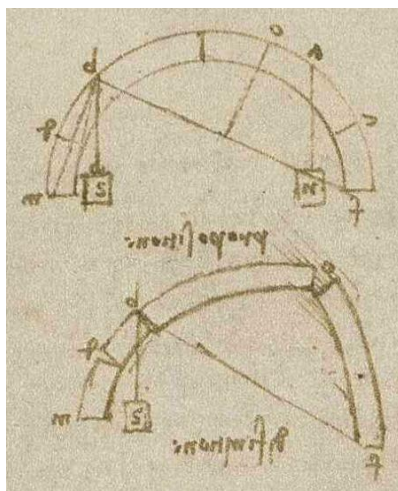
<sup>41</sup> Leonardo da Vinci, 1503-1505, *Codice di Madrid I*, *ibidem*, fol. 139 verso.

<sup>42</sup> Di Pasquale S., 1996, *L'arte del costruire*, *ibidem*, pag. 243.

<sup>43</sup> Leonardo da Vinci, 1503-1505, *Codice di Madrid I*, *ibidem*, 139 verso.

Ed ancora, per un arco semicircolare soggetto al peso proprio e ad un solo carico verticale concentrato in una delle due reni, Leonardo scrive:

Perché il peso è tucto per tucto e tutto nella parte della lunghezza del suo sostentaculo, il peso S essendo sostenuto dalla parte dell'arco b-m, esso per la 5<sup>a</sup> del 9<sup>o</sup> vole ronpere in mezo del punto d, il quale punto d non ciederà se prima la parte dell'arco f-o-b non si ronpe nel suo mezo o. Ma quel peso che ronperà in d sarà si potente che facil cosa li fia a ronpere in detto o, ancora che 'l peso dell'arco f-o-b s'appoggi e agravi sopra b e che dia aumento al peso S di ronpere in detto loco d.<sup>44</sup> (Fig 1.11, arco in basso).



**Fig. 1.11.** Codice di Madrid, fol. 139 verso.

In altre parole, se un arco è caricato con due pesi collocati lungo il suo estradosso, ad esempio il peso S applicato in b ed il peso N applicato in a, e se tali pesi superano la *potentia* dell'arco, l'arco si romperà proprio nel punto di mezzo fra ognuno dei pesi applicati e l'imposta ad esso corrispondente; e questo perché rispetto ad ognuno dei giunti di rottura così individuati, metà del peso del concio di arco, rispettivamente bm e af, grava sulle imposte e metà sul giunto di rottura. Nel caso, invece, di un arco caricato asimmetricamente soltanto su un lato, i giunti di rottura si trovano a metà dei conci di arco bm e bf, rispettivamente in d e o.

Nell'individuazione del giunto di rottura sembra che Leonardo rappresenti l'azione del peso applicato come quella di una fune, di cui una estremità è solidale con l'imposta e l'altra estremità che sostiene il peso passa attraverso una carrucola solidale con il punto di applicazione del peso.

Pertanto, l'azione sull'arco del peso applicato diventa equivalente a quella della tensione che si genera lungo la fune, per cui per simmetria il giunto di rottura non può che trovarsi a metà del concio di arco in tensione,

<sup>44</sup> Leonardo da Vinci, 1503-1505, *Codice di Madrid I*, *ibidem*, 139 verso.

fra il punto di applicazione del peso e l'imposta.<sup>45</sup>

Nella Fig. 1.12 Leonardo ripropone il concetto che l'azione di un peso che agisce su un arco o su una parte di esso determina un giunto di rottura in corrispondenza della metà della corda che congiunge il punto di applicazione del peso con l'imposta.

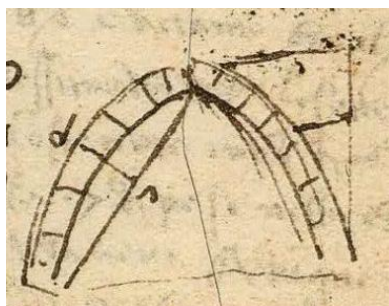


Fig. 1.12. *Manoscritto A*, fol. 51 recto.

Infatti, per un arco a sesto acuto caricato in corrispondenza di una sola delle due semiarcate Egli afferma:

Quello arco il quale fia carico dall'uno dei lati: il peso si caricherà su la sommità dell'altro mezzo e passerà il peso per insino al suo fondamento e romperà in quella parte che fia più lontana dai sua stremi e da la sua corda.<sup>46</sup>

Un fenomeno del genere non si verifica però se l'arco è dotato di sufficiente spessore, come dice lo stesso Leonardo nel *Manoscritto A* trattando *del riparo 'a terremoti* per un arco acuto:

L'arco non si romperà se la corda de l'archi di fori non toccherà l'arco di dentro. Questo appare per isperienza che ogni volta che la corda a-o-n dell'arco di fori n-r-a toccherà l'arco di dentro x-b-y l'arco darà principio a sua debolezza, e tanto si farà più debole quanto l'arco di dentro romperà dessa corda.<sup>47</sup>

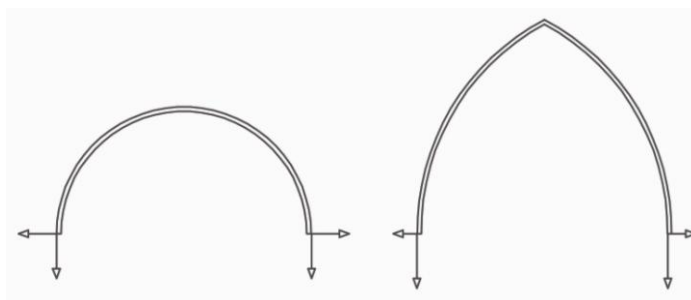


Fig. 1.13. Spinte laterali di un arco a tutto sesto e di un arco a sesto acuto.

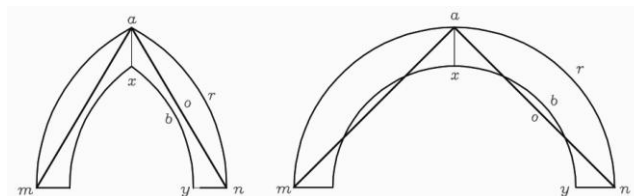
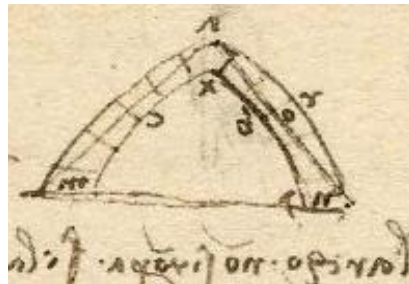
<sup>45</sup> Sinopoli A., 2012, *Il problema dell'equilibrio da Aristotele a Varignon*, Franco Angeli, (in fase di stampa).

<sup>46</sup> Leonardo da Vinci, 1492-1516, *Manoscritto A*, *ibidem*, fol. 51 recto.

<sup>47</sup> Leonardo da Vinci, 1492-1516, *Manoscritto A*, *ibidem*, fol. 51 recto.

Questa è una “regola empirica” che si ritroverà ancora nella tarda trattatistica architettonica in base alla quale la stabilità dell’arco è tanto maggiore quanto più l’arco cessa di essere a tutto sesto per trasformarsi in arco a sesto acuto; infatti, l’arco a sesto acuto offre una resistenza superiore all’arco a tutto sesto, per via delle minori spinte laterali (Fig. 1.13) ed è utilizzato quando l’arco deve sopportare forti carichi in chiave.

Come si può notare in Fig. 1.14, a parità di monta e di spessore dell’arco, la corda rimane all’interno dello spessore dell’arco a sesto acuto e fuoriesce invece nel caso dell’arco a tutto sesto.



**Fig. 1.14.** *Manoscritto A*, fol. 51 recto.

Tale regola è stata spesso interpretata come un’anticipazione del principio di decomposizione delle forze, ed in particolare della decomposizione lungo due linee d’azione tutte contenute nello spessore dell’arco di un eventuale peso applicato in chiave all’estradosso. I manoscritti di Leonardo rivelano invece che nel caso di un arco, egli pensa che il peso di ogni semiarco si trasmette all’altro semiarco attraverso la chiave e si scarica quindi sulle imposte attraverso la corda che congiunge l’estradosso della chiave con l’estradosso dell’imposta. Se l’arco è stabile, la corda è tutta contenuta nello spessore dell’arco, che inizia a diminuire la sua stabilità non appena la corda tocca il profilo di intradosso. Può essere interessante allora rivisitare, in termini di P.L.V., principio dei lavori virtuali, nella sua forma ristretta, la “regola empirica” data da Leonardo. È importante a questo proposito precisare che ai tempi di Leonardo si sapevano calcolare i baricentri e valutare i pesi come aree o volumi, ed era ancora in vigore l’assioma Aristotelico che coniugava nei problemi di equilibrio le potenze come prodotto dei pesi per gli spostamenti corrispondenti, descritti in tempo eguale.

Sembra, allora, che rivisitare la “regola empirica” di Leonardo adottando una formulazione che dia la massima importanza ai parametri geometrici sia



il giusto modo per valutare la sua correttezza e quantificare il grado di stabilità per la struttura.

La formulazione attraverso l'uso del P.L.V. nella sua forma ristretta coincide fra l'altro con l'analisi limite della moderna teoria della rigido-plasticità e cioè, tenendo in conto che al collasso il lavoro interno è nullo, essa coincide con l'uso dell' "upper bound theorem". In accordo ad esso, poiché condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema rigido-labile soggetto a vincoli unilaterali ed attrito sufficiente è che il lavoro virtuale delle forze attive sia minore o eguale a zero:

$$\delta L^{(a)} \leq 0 \quad (1.7)$$

la condizione limite è raggiunta quando la (1.7) è soddisfatta come eguaglianza da un solo meccanismo – il meccanismo di collasso – mentre è strettamente soddisfatta come disuguaglianza da tutti gli altri meccanismi possibili.

A tale scopo si consideri un arco semicircolare estradossato parallelamente formato da conci lapidei, modellato come un sistema rigido soggetto a vincoli unilaterali e ad attrito sufficiente, e si calcoli il lavoro delle forze attive in relazione a valori diversi dello spessore dell'arco ed ai diversi meccanismi che si possono ottenere variando la posizione del giunto di rottura alle reni, ma tenendo fissa la posizione delle cerniere all'estradosso della chiave e delle imposte.

La condizione limite, che separa l'ultima configurazione di equilibrio dal collasso, è individuata dal valore zero della (1.7) in corrispondenza di un particolare valore dello spessore dell'arco, misurato come rapporto  $K = R/r$ , e di una particolare posizione del giunto di rottura alle reni; il valore critico  $K_{crit}$  del parametro  $K = R/r$  consente di rivisitare la regola di Leonardo e di quantificare il corrispondente coefficiente di sicurezza.

Si noti che in questo caso i pesi possono essere ridotti ad enti puramente geometrici perché, fissato il materiale, possono essere trattati come volumi o aree nel caso piano; i pesi, trattati come enti geometrici e gli spostamenti virtuali – in sostanza entrambi parametri geometrici - sono pertanto responsabili dell'equilibrio e della stabilità.

Con un'ottica orientata alla ricerca della condizione di collasso, dal momento che il meccanismo di collasso è caratterizzato dal numero minimo di cerniere, si consideri soltanto il meccanismo a cinque cerniere. Si consideri lo spostamento generalizzato  $\delta q$ , che corrisponde alla formazione di un meccanismo caratterizzato da cinque cerniere alternate, una all'estradosso della chiave e le altre collocate simmetricamente all'estradosso delle imposte e all'intradosso delle reni, in corrispondenza del giunto di rottura individuato dall'angolo  $\alpha$  variabile con continuità da  $0^\circ$  a  $90^\circ$ . Si indichi inoltre con  $Q$  il vettore generalizzato, le cui componenti rappresentano i pesi dei quattro conci in cui l'arco è suddiviso dal

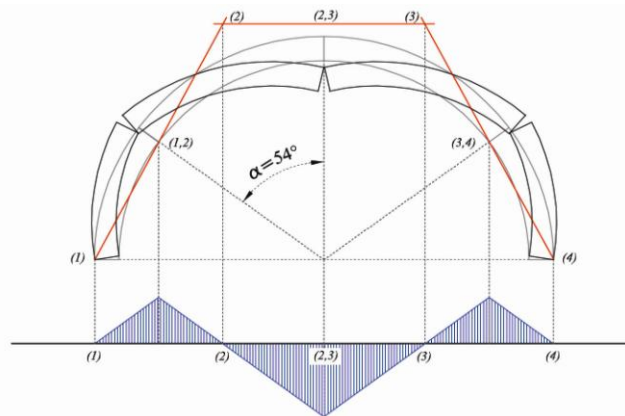
meccanismo considerato. Sia  $\delta q$ , sia  $Q$  dipendono dai parametri geometrici dell'arco e dal meccanismo considerato, e cioè dal valore dell'angolo  $\alpha$  al giunto di rottura e dal rapporto  $K = R/r$ .

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del sistema, in relazione al meccanismo considerato, è che il lavoro virtuale delle forze attive  $\delta L^{(a, \text{tot})}$  soddisfi la relazione:

$$\delta L^{(a, \text{tot})} = Q^T \delta q \leq 0 \quad (1.8)$$

Fissata la geometria del sistema e a partire da una configurazione di equilibrio stabile, la ricerca della condizione di collasso può essere effettuata diminuendo il parametro geometrico  $K$  in accordo all'*Upper Bound Theorem*<sup>48</sup>: la condizione di collasso è unica e corrisponde al lavoro totale nullo delle forze attive ( $\delta L^{(a, \text{tot})}$ ), in corrispondenza al valore di  $K = K_{\text{crit}}$  e al valore dell'angolo  $\alpha = \alpha_{\text{crit}}$  per la posizione del giunto di rottura alle reni del meccanismo  $\delta q$ . Per tutti gli altri meccanismi  $\delta q$  che corrispondono a valori di  $K \geq K_{\text{crit}}$  e a valori di  $\alpha$  diversi da  $\alpha_{\text{crit}}$ , il lavoro totale delle forze attive è negativo e l'equilibrio dell'arco è stabile.

In accordo alla formulazione esposta, in presenza di attrito sufficiente la condizione di collasso dell'arco circolare estradossato parallelamente corrisponde al valore  $K_{\text{crit}} = 1.1136$  e ad un angolo  $\alpha_{\text{crit}} = 54^\circ$ ; il meccanismo di collasso è detto in questo caso di tipo rotazionale<sup>49</sup> (Fig. 1.15).



**Fig. 1.15.** Meccanismo e catena cinematica per  $K_{\text{crit}} = 1.1136$  e  $\alpha_{\text{crit}} = 54^\circ$ .

La “regola” di Leonardo invece indica un valore prefissato  $\alpha_{\text{Leo}} = 45^\circ$  per l'angolo del giunto di rottura ed un valore  $K_{\text{Leo}} = 1.4142$  (Fig. 1.16), come condizioni per le quali l'arco “inizia a diventare debole”. In corrispondenza a tali valori è stato valutato il lavoro totale delle forze attive per mettere a confronto la condizione reale di collasso con quella suggerita da Leonardo.

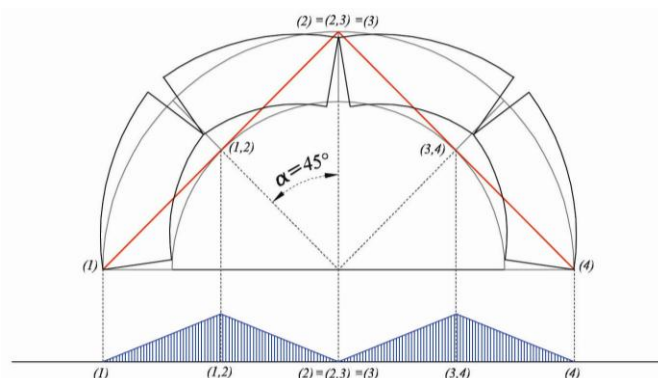
<sup>48</sup> Sinopoli A., 2002, *ibidem*.

<sup>49</sup> Sinopoli A., Corradi M. e Foce F., (1997), A Modern formulation for pre-elastic theories on masonry arches, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, **123**(3), 204-213.

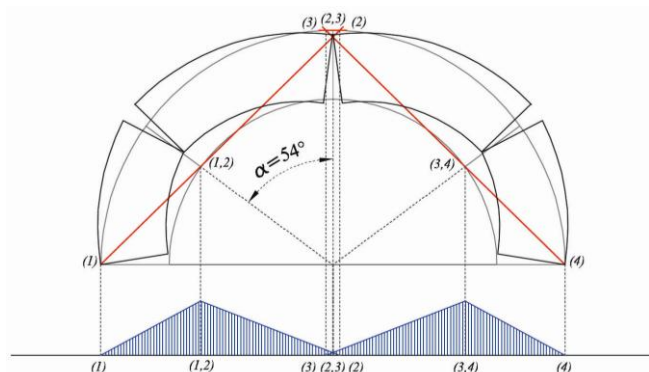


Per comparare in altro modo le diverse situazioni, si è pensato inoltre di valutare il lavoro totale delle forze attive in corrispondenza al meccanismo reale di collasso a cinque cerniere - posizione del giunto di rottura alle reni per  $\alpha_{crit} = 54^\circ$  - ma per il valore di  $K = K_{Leo} = 1.4142$  suggerito da Leonardo.

Analizzando, per confronto, le catene cinematiche di Fig. 1.16 e di Fig. 1.17 si può notare che, nel caso di Fig. 1.16 con  $K_{Leo} = 1.4142$  e  $\alpha_{Leo} = 45^\circ$ , i centri di istantanea rotazione (2), (2,3) e (3) coincidono in un'unica posizione all'estradosso della chiave ed il lavoro compiuto dal peso dei quattro conci dell'arco è stabilizzante; mentre, nel caso di Fig. 1.15 con  $K_{Leo} = 1.4142$  e  $\alpha_{crit} = 54^\circ$ , i centri assoluti di istantanea rotazione dei due conci contigui alla chiave si sono spostati simmetricamente rispetto alla chiave in posizioni opposte rispetto al concio di pertinenza (il centro (2) del secondo concio, che è a sinistra, si trova a destra della chiave, e viceversa per il centro (3) cosicché il lavoro stabilizzante compiuto dal peso dei quattro conci è aumentato<sup>50</sup>.



**Fig. 1.16.** Meccanismo e catena cinematica per  $K_{Leo} = 1.4142$  e  $\alpha_{Leo} = 45^\circ$ .



**Fig. 1.17.** Meccanismo e catena cinematica per  $K_{Leo} = 1.4142$  e  $\alpha_{crit} = 54^\circ$ .

La “regola” suggerita da Leonardo si differenzia, dunque, dalla reale condizione di collasso per l’errata posizione del giunto di rottura e per il valore dello spessore critico.

<sup>50</sup> Ciò si verifica aumentando lo spessore dell’arco e corrisponde a condizioni di stabilità della struttura.

È interessante tuttavia notare che, per quanto riguarda la posizione del giunto di rottura, la regola di Leonardo di Fig. 1.16 rappresenta una situazione di minore stabilità rispetto a quella di Fig. 1.17; più in particolare, tanto più i centri assoluti di rotazione dei conci contigui alla chiave sono distanti tra loro e collocati da parte opposta rispetto al concio di pertinenza, tanto più stabile è l'arco perché il lavoro totale dovuto ai pesi diventa sempre più negativo.

Tenuto fisso lo spessore dell'arco con  $K_{Leo} = 1.4142$ , la "regola" di Leonardo rappresenta la condizione limite di passaggio di codesti centri assoluti da una collocazione opposta a quella dei conci di pertinenza rispetto alla chiave, ad una collocazione concorde; in quest'ultimo caso il lavoro dovuto ai pesi dei conci contigui alla chiave diventa destabilizzante.

La regola di Leonardo rappresenta allora l'ultima situazione in cui i pesi di tutti i conci dell'arco per lo spessore assegnato compiono lavoro negativo stabilizzante. Al diminuire dello spessore, il peso dei conci contigui alla chiave diventa positivo e destabilizzante; in questo senso sembra corretta l'affermazione di Leonardo:

l'arco darà principio a sua debolezza e tanto si farà più debole.

Infine, definendo come coefficiente di sicurezza geometrico il rapporto fra il valore  $K_{Leo} = 1.4142$  proposto da Leonardo ed il valore  $K_{crit} = 1.1136$  corrispondente alla situazione di collasso:

$$C_s = \frac{K_{Leo}}{K_{crit}} \quad (1.9)$$

la regola di Leonardo fornisce un coefficiente di sicurezza  $C_s = 1.27$ .

Qui colpisce la sua osservazione sulla dinamica del fenomeno, in realtà istantaneo all'atto del collasso ma, visto nelle sue fasi successive a partire dalla creazione del primo giunto di rottura che egli individua con grande acutezza. Leonardo non poteva conoscere né le equazioni cardinali della statica né tanto meno i teoremi che governano il calcolo a rottura degli archi ed i relativi corollari sull'alternanza in intradosso ed estradosso delle cerniere di rotazione dei blocchi individuati dalle fratture. Qui interessa sottolineare che il fenomeno, colto nei suoi aspetti fisici essenziali, poteva essere spiegato solo a parole, con un linguaggio difficile da comprendere nelle sue sfumature e che diventa chiaro per ciò che complessivamente significa solo oggi, poiché siamo in grado di dimostrare matematicamente che così deve essere, che quello è il meccanismo di rottura.<sup>51</sup>

Leonardo ci offre, qui come altrove, pensieri e modi per esprimerli, linguaggi oggi dimenticati relativi a problemi del costruire, sperimentati attraverso quotidiane esperienze di cantiere, quando i materiali disponibili sono pietre o mattoni. Egli coglie perfettamente la manifestazione del

---

<sup>51</sup> Di Pasquale S., 1996, *L'arte del costruire*, *ibidem*, pag. 244.

fenomeno e ne tenta una giustificazione; non inventa un problema da risolvere, perché quello che investiga si presenta ogni volta che si costruisce un arco e, tolta la centina, si comincia a caricarne le reni per migliorarne la stabilità; il disegno che egli chiama “diffinitione” (Fig. 1.11) rappresenta un arco con due carichi simmetricamente disposti alle reni, corrispondenti alla contemporanea applicazione dei riempimenti stabilizzanti; ma in questo caso non si verifica il meccanismo di collasso, se non raramente, come invece si verifica quando si carica l'arco da una sola parte. Per ritrovare nella letteratura tecnica problemi di questo genere bisognerà attendere quasi due secoli, dopo che sarà stata compiuta da Newton la sistemazione delle leggi della meccanica.<sup>52</sup>

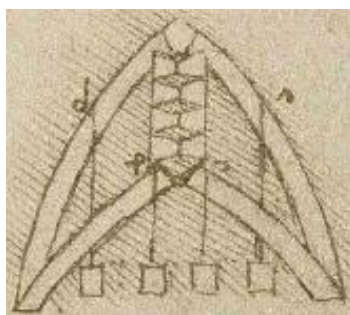
Su come caricare l'arco acuto Leonardo scrive:

Se caricherai l'arco acuto nel mezo della sua altezza, esso si romperà in dentro. Molte volte accade il caricare li archi sopra i mezi della loro altezza, la quale cosa quanto si po' è da sschifare, inperoché sse ccadessi a dare loro troppo carico, essi sono mal sicuri e portan pericolo d'inginocchiarsi in verso il cietro del loro circolo. Onde per fuggire tal pericolo, fa come vedi figurato per adesso, che qui non mi vò distendere più oltre ma nel mio trattato delle matematiche si dirà distintamente ongni prova e ragion precisamente.<sup>53</sup>

Nella Fig. 1.18 notiamo che, a prescindere che l'arco acuto sia più o meno ribassato, i pesi sono collocati lungo la proiezione verticale sull'orizzontale.

Tale proiezione, infatti, è associata allo spostamento naturale del peso che è verticale, quindi, siccome la luce dell'arco e la posizione della chiave sono le stesse per i due archi, secondo Leonardo anche la posizione dei pesi che determinano il collasso deve essere la stessa; il tutto trascurando il peso proprio degli archi.

E' come se Leonardo fosse concentrato a considerare la potenza associata ai pesi, i quali, ovviamente, compiono spostamenti solo in direzione verticale.



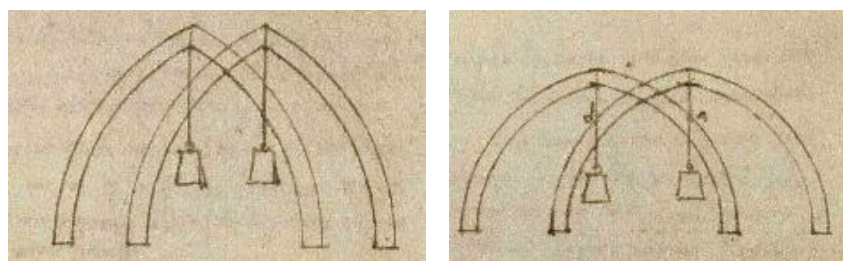
**Fig. 1.18.** *Codice di Madrid I*, 139 recto.

<sup>52</sup> Di Pasquale S., 1996, *L'arte del costruire*, *ibidem*, pagg. 244-245.

<sup>53</sup> Leonardo da Vinci, 1503-1505, *Codice di Madrid I*, *ibidem*, 139 recto.

Per un arco privo di peso, tenendo fisse la luce dell'arco e la posizione della chiave ed avendo deciso i pesi applicati in chiave, se il collasso è imputabile soltanto ai pesi applicati alle reni, è chiaro che i pesi compiranno lo stesso lavoro se essi saranno collocati nella stessa posizione sull'orizzontale, a prescindere che l'arco sia più o meno ribassato.

Nelle Figg. 1.19a,b Leonardo mostra due tipologie di archi acuti, per ognuna delle quali disegna due archi uguali “splittati” di una certa distanza e con peso applicato in chiave.

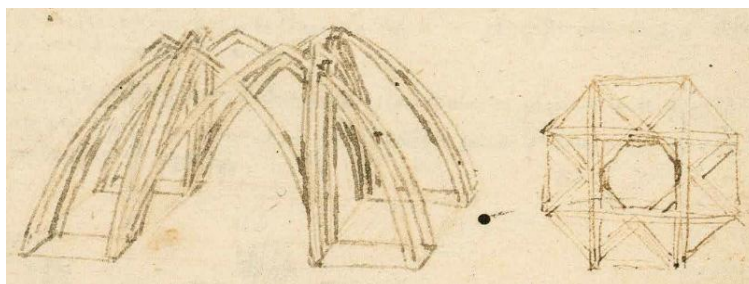


**Fig. 1.19a,b.** *Codice di Madrid I*, 139 recto.

Con tale gioco simmetrico, egli va a rafforzare l'arco laddove potrebbe risultare debole ossia in prossimità dei punti in cui ogni arco per effetto del peso applicato in chiave potrebbe rompersi. Come si vede in Fig. 1.16, la proiezione verticale del peso applicato in chiave di ciascuno dei due archi cade sulla porzione dell'altro arco deputata alla rottura. Mediante proprietà di simmetria Leonardo rende stabili gli archi acuti di diversa luce e altezza ed in tal modo può realizzare strutture articolate capaci di sostenere grossi carichi come la struttura di Fig. 1.20 composta da 8 coppie di archi acuti in cui ogni coppia è “splittata” della stessa distanza, che si ritrova nelle Figg. 1.19a, b, per far sì che i carichi siano ben distribuiti.

Nel fol. 27 recto del *Manoscritto B* dei *Manoscritti di Francia* Leonardo, descrivendo una struttura di archi e figure ligee, scrive:

La sperienza che un peso posto sopra un arco non si carica tu(tto) sopra alle sua colonne, anzi quanto maggior peso fia posto sopra li archi, tanto men pesa l'arco e 'l peso alle colonne, la sperienza si è questa.<sup>54</sup>



**Fig. 1.20.** *Manoscritto B*, fol. 27 recto.

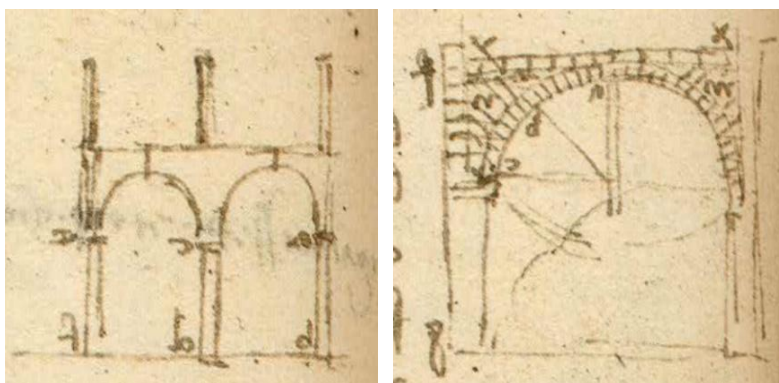
<sup>54</sup> Leonardo da Vinci, 1492-1513, *Manoscritto B*, *ibidem*, fol.27 recto.

In altre pagine del *Manoscritto A* ci sono alcuni disegni riguardanti le fratture che si innescano nei muri di appoggio di un arco: si tratta probabilmente di registrazioni di fenomeni osservati direttamente, accompagnati da un tentativo di quantificazione delle forze in gioco.

Nel fol. 49 verso Leonardo, descrivendo ciò che accade per *un doppio arco su colonne ab-cd-ef* (Fig. 1.21a), scrive:

Quel pilastro che fia carico di più diseguale peso, verrà più presto al manco (a crollare). La colonna cd per essere carica di eguale somma fia più premanente, e l'altre due di fori hanno bisogno di tanto peso dal loro centro in fori, quant'è dal loro centro in dentro, cioè dal centro della colonna insino a mezzo l'arco.<sup>55</sup>

Affinché ci sia equilibrio è chiaro che la colonna centrale cd dovrà sostenere il carico maggiore corrispondente alla somma del peso delle due semiarcate degli archi ac e ce; la colonna ab il peso della semiarcata dell'arco ca, e la colonna ef il peso della semiarcata dell'arco ec.



**Fig. 1.21a,b.** *Manoscritto A, ibidem, fol. 27 recto.*

E, per l'*arco su pilastri xy-f-nm abc-g* (Fig. 1.21b):

Li archi che stanno per forza di catene, non fieno premanenti. L'arco fia di più lunga perpetuità, il quale arà bono contrario al suo spingere. L'arco per sé desidera cadere, e se l'arco fia 30 braccia e lo intervallo ch'è in fra i muri che lo sostengano, sia 20, noi sappiamo che 30 non passerà per 20, se 20 non si fa an(c)ora lui 30. Onde sendo vinto l'arco dal superchio peso, si dirizza e i muri male resistenti s'aprano e danno l'entrata in fra 'l loro spazio alla ruina dell'arco. Ma se tu non volessi mettere all'arco la sua corda di ferro, li debbi fare tali spalle che faccino resistenza al suo spingere, la qual cosa farai così. Carica li angoli mn di pietre, che le linie de le loro giunture si dirizzino al centro del circulo dell'arco. E la ragione che farà l'arco premanente, fia questa. Noi sappiamo chiaro che chi carica l'arco nel quarto suo ab di superchio peso, che 'l muro fg fia sospinto, perché l'arco si vorrà

<sup>55</sup> Leonardo da Vinci, 1492-1513, *Manoscritto A, ibidem, fol. 49 verso.*

dirizzare; e chi caricassi l'altro quarto bc, che li tirerebbe il muro fg in dentro, se non fussi la linia delle pietre xy che fa sostegno.<sup>56</sup>

Un arco con catena è più stabile di uno senza catena; nel caso in cui non si voglia mettere la catena, per controbilanciare la spinta dell'arco e renderlo stabile irrobustire le sue *spalle*.

Nella Fig 1.22a osserviamo *un muro con archi e crepe* (con *crmoxk-dsnp-y7-eal-z6-fb*):

Questo muro si romperà sotto l'arco e f, perché i sette quadrelli integri non sono sufficienti a sostenere il pié dell'arco sopra postoli, e romperannosi questi 7 quadrelli nel mezzo a punto, come appare in a b. la ragione siè che il quadrello a ha solamente sopra di sé il peso ak, e l'ultimo quadrello sotto l'arco ha sopra di sé cdka. Cd pare che facci forza all'arco ver la spalla nel punto p, ma il peso po li fa resistenza, onde tutto il peso ne va nella radice dell'arco.

E conclude affermando:

adunque fa la radice delli archi come 76, ch'è più forte il doppio che xz (Fig. 1.22b).<sup>57</sup>

Per i pilastri di un portale ad arco, affinché la struttura non abbia problemi di stabilità e sopporti al meglio i carichi a cui è sottoposto, Egli consiglia di utilizzare i *quadrelli* interi (portale a destra di Fig.1.22b).

La curiosità di Leonardo verso il comportamento statico degli archi fu quasi unico. Mentre gli altri elementi strutturali e le tecniche di costruzione erano sotto vivace (e qualche volta aspra) discussione, l'arco rimaneva, per così dire, ai margini sino all'inizio del XVIII° secolo. Perché l'arco veniva pensato come un esempio di perfezione geometrica, che includeva il suo stesso principio già perfetto.

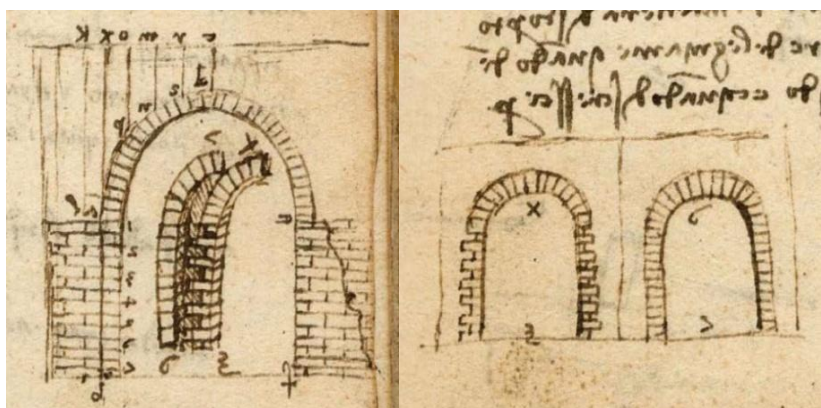


Fig. 1.22. *Manoscritto A*, fol. 53 recto.

<sup>56</sup> Leonardo, 1492-1516, *Manoscritto A*, *ibidem*, fol 49 verso.

<sup>57</sup> Leonardo, 1492-1516, *Manoscritto A*, *ibidem*, fol 53 recto.



## I.5. ANDREA PALLADIO

L'architetto italiano del Rinascimento Andrea Palladio (1508-1590) teorizzò le proporzioni architettoniche ideali nel Trattato *I Quattro Libri dell'Architettura*<sup>58</sup>, pubblicato a Venezia nel 1570, in cui è riconoscibile sia per la struttura sia per lo schema di presentazione dell'opera il riferimento a precedenti autori quali Vitruvio, Serlio e Vignola.

Nel *I Libro* è evidente la tendenza a semplificare e ad unificare il più possibile i rapporti degli elementi appartenenti ad ordini diversi, accompagnata da una chiara disposizione delle tavole, nelle quali si succedono per ciascun ordine dapprima il sistema architravato, poi quello degli archi e da ultimo i particolari architettonici.

L'unità di misura adottata come modulo è il diametro della colonna e Palladio descrive per ciascuno dei 5 ordini i giusti rapporti da adottare per le misure dei vari elementi (Fig. 1.23).

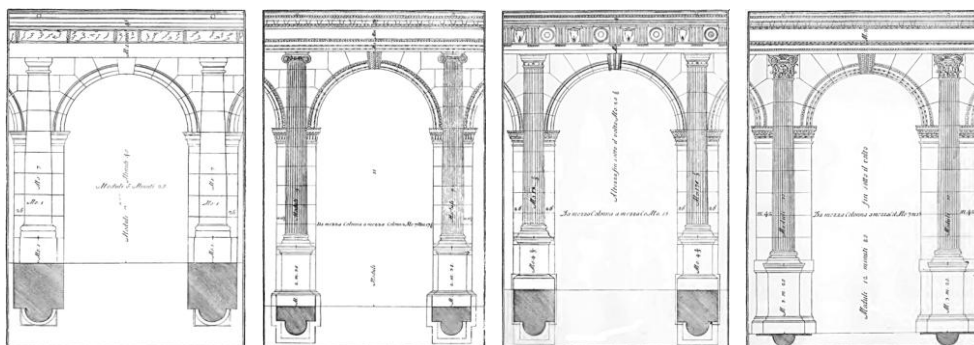


Fig. 1.23. *I Quattro Libri dell'Architettura*, I Libro, Tav. 6, 10, 15, 19.

Nella Fig. 1.23 sono riportati i disegni che descrivono il criterio di dimensionamento per sistemi di archi appartenenti ai diversi ordini: toscano, dorico, ionico e composito.

In particolare nel capitolo XIV, con riferimento all'Ordine Toscano e con riguardo al sistema di archi, Palladio scrive:

Ma se si faranno porte, ó loggie con gli Archi; si seruaranno le misure poste nel disegno, nel quale si ueggono disposte, & incatenate le pietre, come pare a me che si dourebbe fare, quando si facesse di pietra: il che ho auertito ancho nel fare i disegni de gli altri quattro ordini: e questo disporre, e legare insieme le pietre ho tolto da molti Archi Antichi, come si uederà nel mio libro degli Archi: & in questo ho usato grandissima diligenza.<sup>59</sup>

Il libro di cui Palladio parla non fu mai pubblicato e, a tal riguardo, Girolamo Tiraboschi nel 1796 scrisse che Palladio aveva in progetto di

<sup>58</sup> Palladio Andrea, 1990, *I Quattro Libri dell'Architettura*, copia prima edizione Venezia 1570, edizioni Hoepli, Milano.

<sup>59</sup> Palladio A., 1570, *I Quattro Libri dell'Architettura*, I Libro, *ibidem*, pag. 16, 18.

pubblicare un Libro sui templi, sugli archi, sui ponti e su altre strutture ma che non riuscì a farlo.<sup>60</sup>

Nella parte finale del *I Libro* in cui sono trattati i particolari architettonici, quali ad esempio: pavimenti, altezza delle stanze, porte e scale, c'è un breve capitolo dedicato al modo di costruire le volte:

Delle maniere de' volti. Sei sono le maniere de' volti cioè a crociera (terza nella Fig. 1.24), a fascia (ultima), a remenato (che così si chiamano i volti, che sono di portione di cerchio, e non arriano al semicircolo) (seconda), ritondi (prima), a lunette (sesta), & a conca (quarta e quinta): i quali hanno di frezza (freccia) il terzo della larghezza della stanza... Ho sposto qui di sotto le figure di tutte queste maniere applicate alle forme delle stanze.<sup>61</sup> (Fig. 1.24)

Se il *Libro II*, è dedicato alla descrizione dei caratteri costruttivi delle case greco-romane e dei progetti per la costruzione di ville e palazzi realizzati da Palladio, e nel *IV Libro*, si descrivono e si figurano i *Tempij Antichi che sono in Roma, et alcuni altri che sono in Italia, e fuori d'Italia*<sup>62</sup>, nel *Libro III* è discusso il modo di costruire vie, ponti, piazze, basiliche e palestre, riportando alcuni disegni descrittivi di costruzioni antiche, come ad esempio quelli riguardanti il ponte di Rimini.

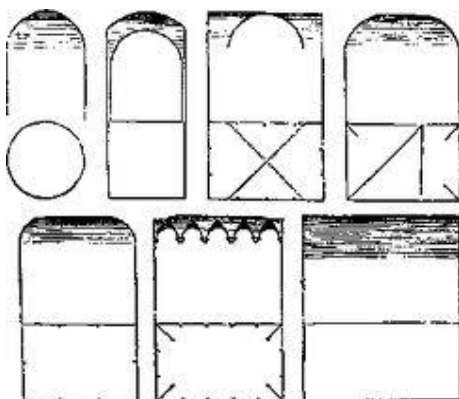


Fig. 1.24. *I Quattro Libri dell'Architettura, I Libro, Cap. XXIII.*

E, proprio nella descrizione e negli accorgimenti da seguire nella costruzione di ponti di pietra, Palladio scrive:

Non deuno essere i pilastri più sottili della sesta parte della larghezza dell'arco; ne ordinariamente più grossi della quarta. ... Gli archi si deuno fare ben fermi, e forti, & con pietre grandi, le quali siano benissimo commesse insieme; accioche possino resistere al continuo passar de' carri, e reggere al peso, che per qualche accidente sarà

<sup>60</sup> Tiraboschi G., 1796, *Storia della Letteratura Italiana*, Tomo VII, dall'anno MD fino all'anno MDC, parte seconda, Venezia, pag. 498.

<sup>61</sup> Palladio A., 1570, *I Quattro Libri dell'Architettura, ibidem, I Libro, Cap. XXIII* pag. 54.

<sup>62</sup> Palladio A., 1570, *I Quattro Libri dell'Architettura, ibidem*, frontespizio del IV Libro.



condutto lor sopra. Quelli archi sono fortissimi, che si fanno di mezzo cerchio; perché posano sopra i pilastri, e non si urtano l'un l'altro: ma se per qualità del sito e per la disposition de' pilastri, il mezo cerchio intiero per la troppo altezza offendesse, facendo la salita del ponte difficile; si seruiremo del diminuito, facendo gli archi c'habbiano di frezza il terzo di lor diametro, e si faranno in tal caso le fondamenta nelle ripe fortissime.<sup>63</sup>

Le “ricette costruttive” di Palladio non soltanto richiamano regole di suoi predecessori, come ad esempio la (1.5) dell'Alberti, ma sono soprattutto il frutto di un'attenta osservazione del modo di costruire o meglio del “saper fare” di Greci e Romani. I modelli di Palladio furono presi ad esempio nell'architettura occidentale non solo nel Rinascimento, ma lo stile ad essi associato - il *Palladianesimo* - fu destinato a durare per ben tre secoli.

## **I.6. RODRIGO GIL DE HONTAÑÓN**

Rodrigo Gil de Hontañón (1500/10-1577) può essere considerato il più prolifico e versatile architetto spagnolo del XVI secolo, periodo che vide il tramonto dell'arte gotica e la nascita dell'arte rinascimentale.

Le opere di Rodrigo Gil de Hontañón sono, infatti, sia architetture tardo gotiche sia architetture rinascimentali. Tra le prime figurano: la cattedrale di Astorga (1530-1559); le cattedrali di Salamanca e di Segovia (1538), entrambe cominciate sotto la direzione di suo padre Juan Gil de Hontañón; il chiostro della cattedrale di Santiago di Compostela (1538) e la cattedrale di Plasencia (1544), lavori ereditati da Juan de Álava.

La sua opera maggiore, la facciata del Collegio di San Idelfonso all'Università ad Alcalá de Henares (1538), è un'opera del Rinascimento Plateresco di cui Rodrigo Gil de Hontañón fu uno dei più importanti esponenti, in cui l'artista mescola i metodi proporzionali geometrici del gotico - che conosceva bene - con le “nuove forme” classiche rinascimentali che provenivano dall'Italia.<sup>64</sup>

Durante la sua attività Rodrigo Gil de Hontañón prese e annotò appunti che dovevano servirgli per scrivere un trattato di architettura - quale sintesi del gotico e del classicismo - che, però, non riuscì a portare a compimento. Nonostante non esistano testi e disegni originali, questi ci sono pervenuti attraverso copie fatte prima del 1681 da Simón Garcia, architetto di Salamanca, che le inserì nel suo compendio barocco. Il “Compendio de Architectura y Simetria de los Templos”, oggi conservato nella Biblioteca Nazionale di Madrid, è un codice amanuense di 141 pagine, diviso in 77

---

<sup>63</sup> Palladio A., 1990, *I Quattro Libri dell'Architettura*, *ibidem*, III Libro, Cap. X pag. 20, 21.

<sup>64</sup> Sanabria S. L., 1982, *The Mechanization of Design in the 16<sup>th</sup> Century. The structural Formulae of Rodrigo Gil de Hontañón*, *Journal of the Society of Architectural Historians*, vol. XLI, n. 4, pagg. 281-293.

capitoli. I capitoli dall'uno al sei, il 75 ed un'illustrazione del sedicesimo sono basati sugli appunti di Rodrigo Gil de Hontañón.

Anche se Simón Garcia riscrisse gran parte del testo di Rodrigo Gil de Hontañón, poiché il suo stile è grossolano e approssimativo ed il testo risulta prolisso e pieno informazioni inopportune, è difficile attribuire sia gli scritti sia le idee all'uno o all'altro dei due architetti.

Nel trattato dedicato all'architettura sono contenute comunque le regole pratiche che Rodrigo Gil de Hontañón utilizzò e verificò nelle costruzioni che diresse; il suo intento era quello di ridurre la tecnica del costruire ad una sequenza di regole di natura geometrica o norme di tipo estetico - architettonico. Tali regole da un lato intendono sintetizzare i metodi di proporzione gotici e classici, dimostrandone la fondamentale somiglianza, e dall'altro vogliono definire una "scienza" indipendente, relativa al progetto strutturale.

Il lavoro di Rodrigo Gil de Hontañón è la principale testimonianza ancora esistente di un approccio duplice al problema strutturale tipico dei capomastri del XVI secolo.

Le regole distributive degli spazi interni sono ottenute da proporzioni che obbediscono a due criteri o metodi.

**1° Metodo.** Il primo metodo si basa sulla proporzionalità del corpo umano: esso deriva da una tradizione vitruviana ripresa, tra gli altri, nei lavori di Francesco di Giorgio e di Albert Dürer, i quali delinearono le analogie tra il corpo umano e la struttura di una chiesa: sia il progetto sia l'altezza della struttura erano stabiliti dalle proporzioni del corpo umano ideale.

Il sistema di dimensionamento umano è applicato a tutti gli elementi visibili all'interno dell'edificio, inclusi i costoloni che sono proporzionati in accordo allo spessore delle dita della mano. È interessante sottolineare a tale proposito che, sebbene il criterio di dimensionamento su base umana derivi dal pensiero rinascimentale, le proporzioni corrispondenti sono applicate da Hontañón ad edifici in stile gotico. La norma, in tal caso, trae la sua consistenza da concezioni trascendentali di bellezza e di valore estetico-politico.

**2° Metodo.** Il secondo metodo è geometrico e trae le sue origini da più antiche regole costruttive gotiche. Lo schema del progetto è sviluppato partendo da un quadrato che è sovrapposto ad un intero edificio o alla sua parte principale, manipolati poi geometricamente con l'ausilio di riga e compasso.

In caso di irregolarità nello schema del progetto, lo spazio rimanente dalla suddivisione geometrica è utilizzato per creare le dimensioni di parti più piccole, come le luci delle navate e le navate laterali. Sebbene il sistema sembri rigoroso, è come se il suo fondamento si trovi altrove e tragga consistenza dal primato della geometria o anche da altri principi di carattere

ignoto. I due metodi sembrano essere più che altro tra loro complementari e non in contraddizione; e tutto ciò sembra essere molto naturale per Rodrigo Gil de Hontañón.

Inoltre, se le regole di distribuzione della fabbrica sono definite in accordo ai due atteggiamenti filosofici descritti, i singoli elementi strutturali sono risolti con formulazioni indipendenti.

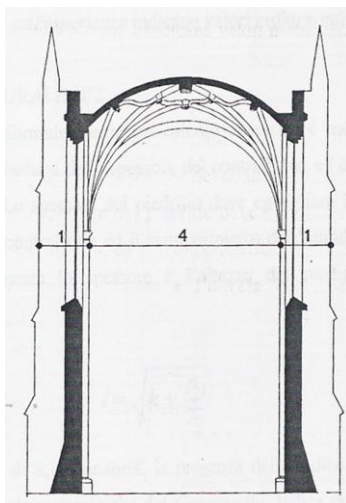
Nel sesto capitolo Rodrigo Gil de Hontañón inizia la discussione e la ricerca di regole per il corretto dimensionamento dello spessore del piedritto di un arco a garanzia della sua stabilità. Le uniche informazioni che gli potevano essere giunte a riguardo gli erano state fornite da direttori dei lavori spagnoli e stranieri, i quali benché conoscessero qualche regola basata sull'esperienza di cantiere non sapevano darne però alcuna spiegazione razionale.

Nei prossimi paragrafi saranno presi in esame cinque problemi strutturali fra i tanti di cui Hontañón si è interessato. Le regole di Rodrigo Gil de Hontañón, anche se prive di fondamento teorico, sono qui riportate e rivisitate per completezza storica.

### ***1.6.1. Due regole basate sull'esperienza***

#### *1.6.1.1. Regola strutturale n°1*

Questa regola non differisce dalle tante regole basate sull'esperienza pratica. Essa vuole che lo spessore di un contrafforte, a supporto di una volta, debba essere  $1/4$  della campata<sup>65</sup> (Fig. 1.25).



**Fig. 1.25.** *Compendio de Architectura y Simetria de los Templos*, Cap. VI.

Per Rodrigo Gil de Hontañón lo spessore del contrafforte, include lo spessore e la colonnina del muro, e prevede dunque una misurazione dall'interno della chiesa fino alla parte più esterna della superficie del

---

<sup>65</sup> Sanabria S. L., 1982, *The Mechanization of Design in the 16<sup>th</sup> Century. The structural Formulae of Rodrigo Gil de Hontañón*, *ibidem*, pag. 286.

contrafforte; la misurazione deve essere presa sempre per un valore pari o maggiore e mai per approssimazione.

#### *1.6.1.2. Regola strutturale n°2*

Anche questa regola riguarda lo spessore del contrafforte, ma si riferisce in particolare ad archi semicircolari. Lo spessore  $l$  del piedritto deve eguagliare la radice quadrata della somma dell'altezza  $h$  del contrafforte (piedritto) e del semiperimetro  $p/2$  dell'intradosso dell'arco:

$$l = \sqrt{h + \frac{p}{2}} \quad (1.10)$$

Sanabria ritiene che questa regola corrisponda ad uno strumento matematico arbitrario ad uso dei capomastri e non corrisponda, non soltanto ad alcun criterio meccanico, ma neanche ad un criterio di proporzionalità geometrica, perché scorretta dal punto di vista dimensionale. Le regole tardo-gotiche, che propongono dimensionamenti geometrici, non sono basate su alcuna teoria o interpretazione meccanica del tempo; esse si configurano come linee guida empiriche che garantiscono peraltro valori conservativi per la stabilità di particolari elementi strutturali.

#### **1.6.2. Tre regole geometriche per contrafforti di archi semicircolari**

Le tre regole di cui si parla ora sono di carattere geometrico e si ottengono attraverso un procedimento di successive costruzioni geometriche in progressione. Anche esse riguardano il dimensionamento del piedritto, benché caratterizzate rispetto alle precedenti da una diversa consistenza sia teorica che risolutiva. In particolare, esse stabiliscono lo spessore di un piedritto che sorregga un arco semicircolare in presenza di alzata; lo spirito che le anima è quello geometrico gotico, anche se la loro applicazione riguarda problemi tecnici posti dall'architettura rinascimentale.

##### *1.6.2.1. Prima regola geometrica*

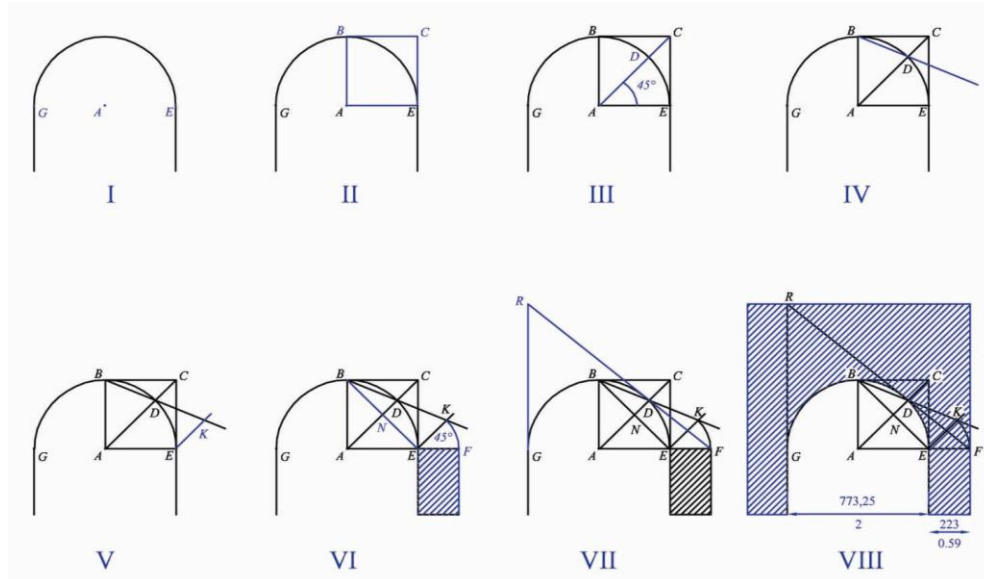
La prima regola geometrica è presentata attraverso un procedimento costruttivo che prevede diversi passaggi. È importante notare che la regola stabilisce una correlazione tra lo spessore del contrafforte e l'altezza del carico, entrambe definite come funzioni del raggio di intradosso.

Si consideri l'intradosso di un arco semicircolare di diametro  $GE$  (Fig. 1.26), e dal centro  $A$  esca il segmento  $ADC$  inclinato di  $45^\circ$ . Il punto  $D$  sia l'intersezione di tale segmento con la linea di intradosso. All'esterno dell'arco si individui il punto  $K$ , tale da appartenere alla retta passante per i punti  $B$  (sommità dell'intradosso) e  $D$ , e che il segmento  $EK$ , parallelo ad  $AD$ , sia inclinato anch'esso di  $45^\circ$ . La lunghezza  $EK$  definisce lo spessore richiesto del piedritto perché sia garantita la stabilità dell'arco.

La quantità EK può essere facilmente interpretata da un punto di vista geometrico.

Detto N il punto medio di BE, si considerino i triangoli rettangoli BND e BEK, simili poiché hanno l'angolo NBD in comune; allora vale la relazione:

$$BE = 2BN \quad (1.11)$$



**Fig. 1.26.** *Compendio de Architectura y Simetria de los Templos*, Cap. VI.

Anche gli altri lati dei due triangoli stanno tra loro nel rapporto 1:2; allora, detto r il raggio AE di intradosso dell'arco, si ha:

$$EK = 2ND \quad (1.12)$$

in cui:

$$ND = AD - AN = r - \frac{\sqrt{2}}{2}r = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}r \quad (1.13)$$

Lo spessore EF del contrafforte sarà dunque pari a EK e di conseguenza dalla (1.11) esso sarà  $(2 - \sqrt{2})r$ , ovvero circa 0,586 volte il raggio. Il rapporto fra lo spessore del contrafforte e la luce è di 1:3.414, che è più conservativo del rapporto 1:4 della prima regola strutturale. Con questa formula l'arco può essere caricato più di quanto sarebbe richiesto per una semplice volta, dal momento che la distanza GR è  $(2/3 + \sqrt{2})r$ , ovvero 2.081 volte il raggio. Infatti, detta H la proiezione del punto D sull'imposta dell'arco, in base alla similitudine dei triangoli RGF e DHF si ottiene che:

$$DH : GR = HF : GF \quad (1.14)$$

in cui:

$$DH = \frac{\sqrt{2}}{2} r;$$

$$HF = r - AH + EF = r - \frac{\sqrt{2}}{2} r + (2 - \sqrt{2})r = 3 \frac{2 - \sqrt{2}}{2} r; \quad (1.15)$$

$$GF = 2r + EF = (4 - \sqrt{2})r$$

e di conseguenza l'altezza dell'alzato GR è:

$$GR = \frac{DH \cdot GF}{HF} = \left(\sqrt{2} + \frac{2}{3}\right)r \quad (1.16)$$

### 1.6.2.2. Seconda regola geometrica

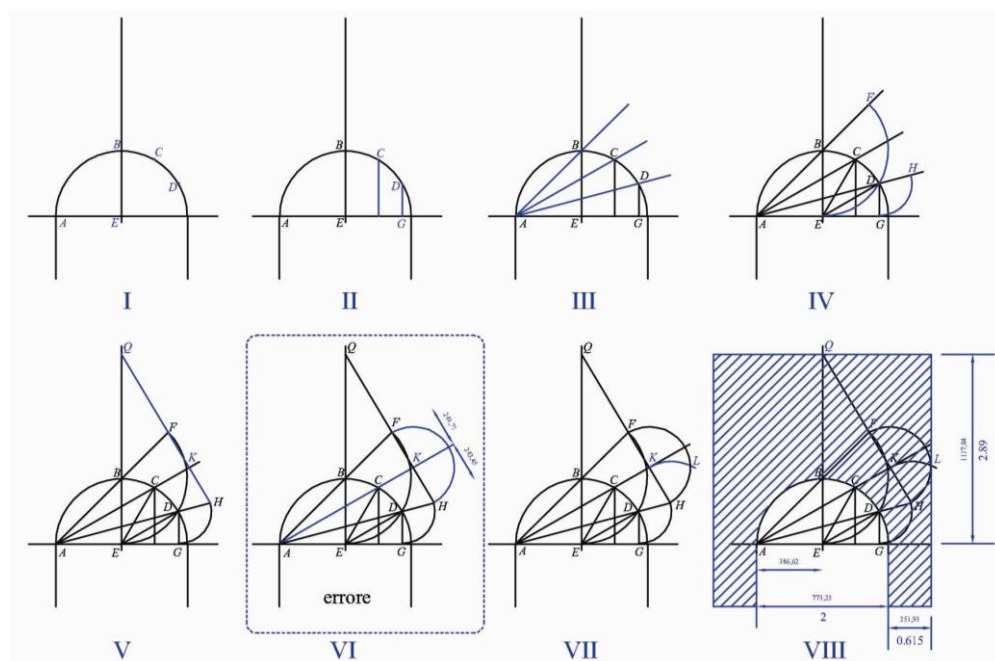
Anche la seconda regola geometrica è presentata attraverso un procedimento di successive costruzioni geometriche in progressione. Lungo l'intradosso dell'arco di centro E, si disegnino il punto di linea di imposta A e di chiave B; inoltre, il quarto di circonferenza opposto ad AB sia diviso in tre parti uguali dai punti C e D. Da C e D si traccino le perpendicolari ad AG e, a partire da A, si traccino tre semirette che intersechino la semicirconferenza nei punti B, C e D. Con centro in B, si tracci l'arco di circonferenza ED il cui prolungamento interseca le semirette passanti per AC e AB nei punti K e F, rispettivamente. Inoltre, con centro in D, si tracci un altro arco di circonferenza passante per G che intersechi la semiretta passante per AD nel punto H; i due segmenti così definiti, AF ed AH, non sono uguali anche se Rodrigo Gil de Hontañón credette che lo fossero.

Infine, i punti F e H siano uniti da una linea che interseca il prolungamento del raggio EB nel punto Q esterno alla circonferenza: il punto Q definisce l'altezza massima del carico possibile.

Il passaggio successivo richiede una costruzione geometricamente impossibile. Considerando K come centro di una circonferenza, si disegni l'arco FH. Poiché AF non è uguale ad AH, il punto K non è equidistante da F e H. L'errore (passaggio VI in Fig. 1.27) è così piccolo – 0.95% - da essere impercettibile anche in una grande struttura. Il passaggio finale della costruzione grafica considera un arco di circonferenza KL con centro in H: il punto L definisce l'estensione richiesta per la proiezione verticale del piedritto. Utilizzando i punti L e Q, l'arco può dunque essere disegnato completato del suo piedritto e del suo alzato.

Attraverso un tedioso calcolo si può stabilire che l'altezza di carico permessa sopra la linea di imposta è 2.89 volte il raggio dell'arco e lo spessore del contrafforte è 0.615 o 0.626 volte il raggio (quale dei due? e perché?).

Il rapporto tra lo spessore del piedritto e la luce è misurabile e vale 1:3.22 o 1:3.25. Questo valore è maggiore rispetto a quello della prima regola geometrica che proponeva un rapporto di 1:3.414, ma anche il carico è maggiore, cioè 2.894 contro 2.081.



**Fig. 1.27.** *Compendio de Architectura y Simetria de los Templos*, Cap. VI.

Rodrigo Gil de Hontañón con questa regola determina le dimensioni esatte per contenere la spinta degli archi ed insiste sul fatto che la formula da lui proposta è appena sufficiente; pertanto, è sempre meglio prendere un margine di sicurezza.

Si noti che la grande particolarità delle due costruzioni geometriche proposte fa riflettere sulla loro natura e sul loro fondamento; egli dice infatti che i valori predeterminati per l'altezza del carico e lo spessore del piedritto, anche se teoricamente corretti, richiedono un aggiustamento.

Che Egli indichi la necessità di una verifica sperimentale o che l'abbia di fatto condotta, di certo la sua posizione come direttore dei lavori di Salamanca e Segovia gli permetteva di assumere apprendisti per condurre esperimenti all'interno del cantiere. Se questa interpretazione fosse corretta, gli esperimenti condotti sarebbero i primi esempi di sperimentazione strutturale in sito, e potrebbero essere considerati come *incipit* dello sviluppo della meccanica sperimentale.

### 1.6.2.3. Terza regola geometrica

La terza regola geometrica è un altro tentativo di stabilire una legge strutturale per lo spessore del piedritto. Essa rappresenta il più importante ma anche il più oscuro e incompiuto passaggio dell'intero *Compendio*.

Nella prima parte Rodrigo Gil de Hontañón progetta un contrafforte per un arco con uno spessore del concio pari ad un terzo del raggio di intradosso. Questa proporzione del concio è stabilita per analogia, forse alle proporzioni umane, sebbene le parti del corpo che dovrebbero essere state usate non sono esplicitamente dichiarate; dati i valori dello spessore dell'arco e del contrafforte, si ottiene l'altezza del contrafforte stesso. La costruzione richiede che il diametro dell'intradosso sia diviso in tre parti; lo spessore del contrafforte è dato dalla distanza CE che è 1/3 del diametro e pertanto il rapporto tra lo spessore del piedritto e la luce è di 1:3.

Si disegni, a proposito, una linea dal punto A, chiave dell'estradosso, che passi per uno dei punti di divisione sul diametro, fino all'intersezione con la base del pilastro al punto D: esso definisce l'altezza del pilastro, che sarà  $(1+1/3)$  la luce dell'arco. Il limite dell'alzato è stabilito nella costruzione dell'arco considerando l'arco di circonferenza che ha centro nel punto d'imposta E e raggio eguale alla distanza di E dall'imposta dell'opposto estradosso. L'intersezione di quest'arco con la retta perpendicolare all'imposta passante per la chiave determina la linea di massimo carico ad un'altezza di 1.236 volte il diametro (Fig. 1.28a).

Per un arco a pieno centro lo spessore del piedritto prescritto dalla regola vale:

$$p = \frac{hr}{h+r+s} \quad (1.17)$$

Nella seconda parte è stabilita una diversa serie di condizioni. Le dimensioni dello spessore dell'arco e dell'altezza del piedritto al di sotto dell'imposta sono fissate arbitrariamente; in particolare, lo spessore dell'arco è pari a 1/5 del diametro, mentre l'altezza è tre volte il raggio. Lo spessore del piedritto è invece ottenuto con la stessa costruzione seguita nella prima parte. Si tracci una retta HK dall'estradosso della chiave fino alla base del pilastro, intersecando la linea d'imposta nel punto L. La distanza di L dalla più vicina imposta E definisce lo spessore del contrafforte che è 15/44 del diametro dell'arco.

Allo stesso modo si ottiene l'altezza dell'alzato, che corrisponde a 1.3 volte il diametro, misurata a partire dall'imposta (Fig. 1.28b).

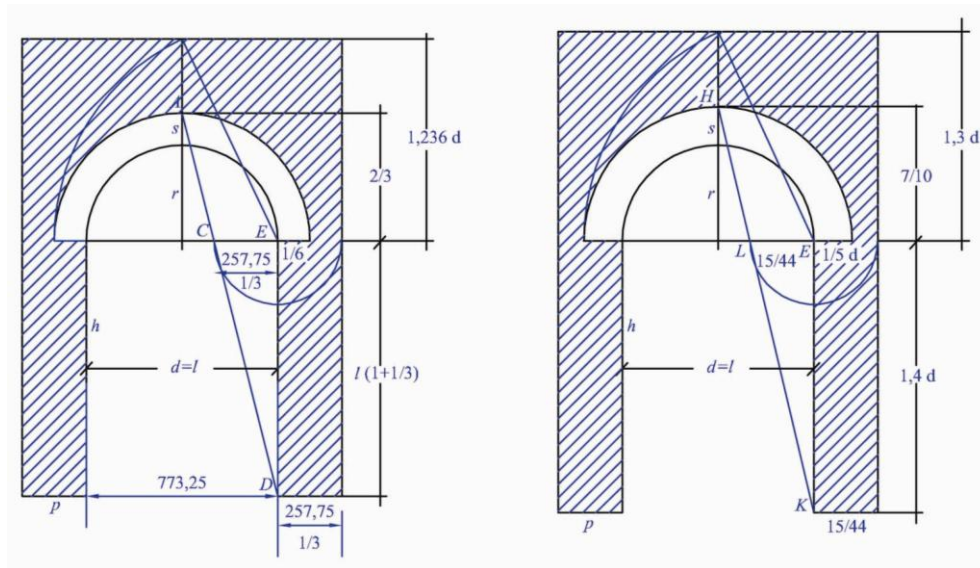
È importante notare che i parametri considerati nella formula sono quattro:

1. il diametro dell'arco;
2. lo spessore dell'arco;
3. lo spessore del piedritto;
4. l'altezza del piedritto.

Per poter trovare il valore di una di queste quattro dimensioni devono essere dati i valori delle altre tre. Se, però, si conoscono soltanto i valori di

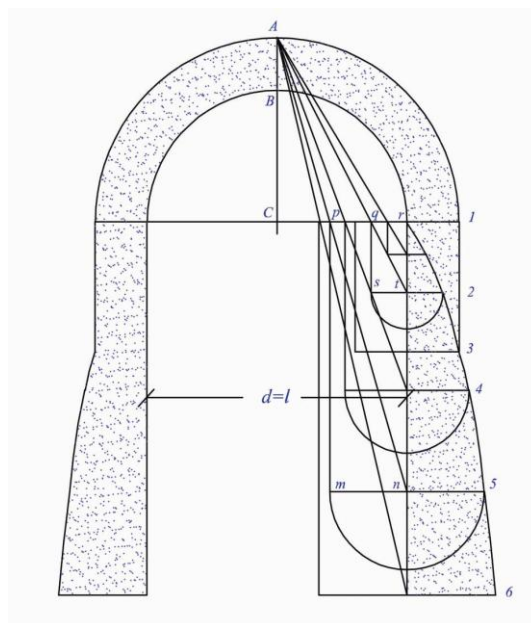


due parametri, dalla formula è possibile ottenere una curva che mette in relazione gli altri due.



**Fig. 1.28a,b.** *Compendio de Architectura y Simetria de los Templos*, Cap. VI.

Perciò, conoscendo ad esempio il diametro dell'arco e lo spessore del concio, la formula definisce una curva iperbolica relativa all'altezza ed allo spessore del contrafforte. Tale curva (Fig. 1.29) è il risultato della generalizzazione parametrica del metodo di Rodrigo Gil de Hontañón; essa definisce per ogni quota lo spessore minimo del pilastro.



**Fig. 1.29.** *Compendio de Architectura y Simetria de los Templos*, Cap. VI.

Lo spessore del piedritto approssima un valore asintotico quando l'altezza del piedritto tende all'infinito. Sebbene Rodrigo Gil de Hontañón non abbia esplicitamente discusso questo profilo iperbolico, la sua generalizzazione è implicita nella costruzione geometrica.

Dovrebbe essere chiaro che la terza legge geometrica è ancora lontana dall'essere una moderna formula strutturale. Non c'è alcun riferimento al fondamento della formula, che rimane una prescrizione dotata di valenze magiche. Ciononostante, la terza regola geometrica può essere vista come la più importante sintesi delle formulazioni tradizionali del tardo-gotico e delle formule classiche del Rinascimento. Sebbene molte di queste proposizioni siano inspiegabili dal punto di vista meccanico, la ricerca di una soluzione pratica e generale per un problema strutturale difficile rivela un incipiente tentativo di utilizzare come postulato delle relazioni quantitative tra variabili geometriche, integrate tra loro in modo coerente.

Le formule di Rodrigo Gil de Hontañón sono classificabili in due categorie:

1. formule geometriche;
2. formule algebriche.

Le prime sono connesse ad una tradizione medievale e possono essere fatte risalire all'XI secolo; le seconde sono invece il risultato della lenta assimilazione di un nuovo modo di definire la norma estetica che, in ogni caso, conduce a regole matematiche.

La regola più antica sembra comunque essere *legge n° 1* e cioè quella che richiede il rapporto tra lo spessore del piedritto e la luce di 1:4 (Fig. 1.25). La sua incapacità di tenere in conto altre variabili essenziali, come l'altezza del piedritto o lo spessore dell'arco, la renderebbe non meno preziosa in caso di decisioni progettuali preliminari relative alla pianta di un piano.

Le tre formule geometrico-strutturali di Rodrigo Gil de Hontañón sembrano essere lo stadio avanzato di una vecchia tradizione geometrica gotica appresa attraverso i processi verbali della controversia di Milano, tra Roriczer, Schuttemayer e Lechler.<sup>66</sup> Questa tradizione geometrica-strutturale si ritrova ancora nel XVII secolo, nel famoso trattato di stereotomia di François Derand; la sua regola sullo spessore del piedritto coincide con quella di tradizione gotica descritta molto prima da Rodrigo Gil de Hontañón.<sup>67</sup>

La messa a punto dell'autentica natura degli esperimenti, suggeriti per archi semplici semicircolari, indica un'attenzione quasi moderna ad isolare poche variabili per studiare le loro relazioni mutue, una procedura spesso presente negli esperimenti pensati dallo stesso Leonardo.

L'unica conclusione possibile è che tali relazioni spesso funzionavano e fornivano in ogni caso ampi margini di stabilità.

---

<sup>66</sup> Sanabria S. L., 1982, *The Mechanization of Design in the 16<sup>th</sup> Century. The structural Formulae of Rodrigo Gil de Hontañón*, *ibidem*, pag. 293.

<sup>67</sup> Huerta Santiago, 2002, *The medieval "scientia" of structures: The rules of Rodrigo Gil de Hontañón*, Atti del seminario internazionale "Omaggio a Edoardo Benvenuto", Birkhäuser, Basilea.

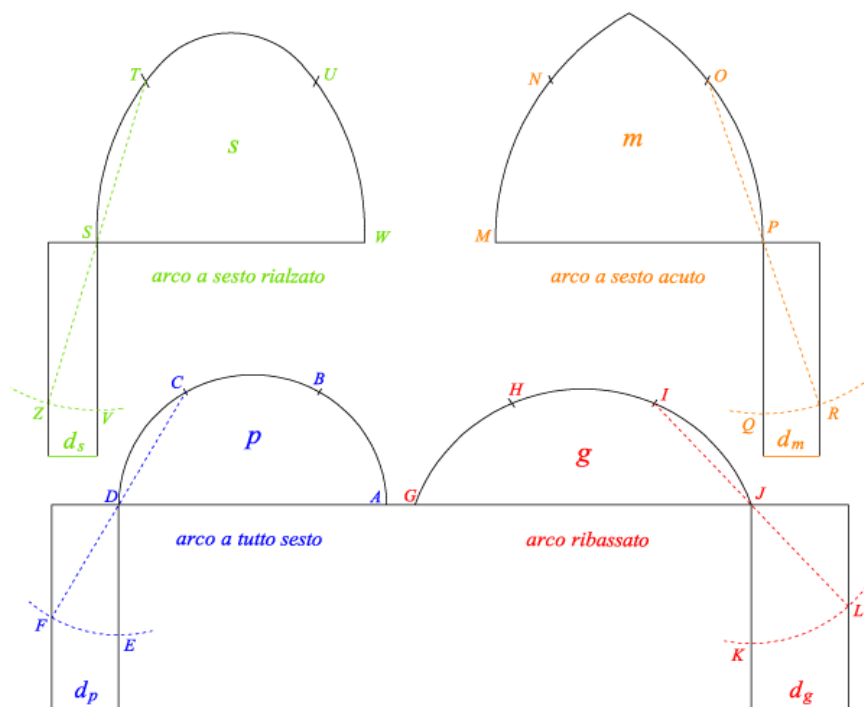
REGOLE Rodrigo Gil de Hontañón	TIPOLOGIA	LUCE ARCO $l$	SPESSORE ARCO $s$	SPESSORE PIEDRITTO $sp$	ALTEZZA PIEDRITTO $hp$	ALTEZZA ALZATO $ha$	RAPPORTO $sp/l$
legge strutturale n° 1	portale	$2r$	$s$	$(1/4) 2r$	$hp$	--	1 : 4
legge strutturale n° 2	portale	$2r$	$s$	$\sqrt{hp + \frac{p}{2}}$	$hp$	--	--
1 <sup>a</sup> regola geometrica	portale	$2r$	$s$	$0,586r = (2 - \sqrt{2})r$	$hp$	$2,081r = (2/3 + \sqrt{2})r$	1 : 3,414
2 <sup>a</sup> regola geometrica	portale	@ $2r$	$s$	$0,615r - 0,626r$	$hp$	$2,89 r$	1 : 3,22 - 1 : 3,25
1 <sup>a</sup> parte terza regola geometrica	portale	$2 ri = d$	$1/3 ri$	$1/3 d$	$(1+1/3) d$	$1,236 d$	1 : 3,33
2 <sup>a</sup> parte terza regola geometrica	portale	$2 ri = d$	$1/5 d$	$15/44 d$	$1/4 d$	$1/3 d$	1 : 3,41

**Tabella 1.1.** Tabella di riepilogo: misure degli elementi del portale trovate seguendo le regole di Rodrigo Gil de Hontañón.

## I.7. FRANÇOIS DERAND

Il medioevo trasmette ai posteri una regola empirica per la determinazione dello spessore dei piedritti. Il Rondelet<sup>68</sup> attribuisce tale semplice e celebre regola a François Derand, mentre il suo uso spetterebbe al Blondel<sup>69</sup>. Nel 1643 Padre Derand pubblicò infatti un trattato di 119 capitoli su archi volte e cupole, dal titolo *L'architecture des voûtes, ou l'art des traits et coupes des voûtes*, nel quale espose diverse regole senza darne, però, esaurienti dimostrazioni. Derand fornisce risposte dettagliate per una varietà di problemi pratici che richiedono un esperto disegno geometrico; egli era, infatti, molto più attento a fornire disegni e descrizioni piuttosto che dimensioni strutturali.

In tutto il trattato è presente un solo capitolo - il numero 6 - che affronta il problema della spinta che le volte trasmettono ai loro piedritti e suggerisce regole per la determinazione dello spessore dei muri, necessario a sostenerle (Fig. 1.30).



**Fig. 1.30.** La Regola applicata a diversi tipi di archi.

Si consideri la volta circolare ABCD, di centro P; la si divida in tre (parti) uguali ai punti B, C; da uno di questi terzi, CD, si tracci la linea retta CDF; e preso lo stesso punto D come centro e aperto il compasso di un'ampiezza pari alla corda CD, si segni l'arco EF al di sotto e fuori dello stesso centro. E dal punto F, dove il detto arco interseca la

<sup>68</sup> Rondelet J., 1802, *Traité théorique et pratique de l'art de bâtir*, Paris.

<sup>69</sup> Blondel F., 1729, *Résolution de quatre principaux problèmes d'Architecture, Mémoire de l'Académie royale des Sciences. Depuis 1666 jusqu'à 1699*, Tome V, Paris.

linea CF, si tracci la linea verticale FG; essa sarà il lato esterno del muro che sorreggerà l'arco ACD; così lo spessore di detto muro può essere compreso tra le linee EH e FG, ( $d_p$  in Fig. 1.30), ed esso sarà sufficiente per resistere alla spinta dell'arco, come pratica ed esperienza hanno dimostrato. Se gli archi sono ribassati, come IKA (IJL in Fig. 1.30) in figura Q (g in Fig. 1.30), usando la stessa costruzione, il muro sarà più grosso; ciò è necessario perché la spinta di questi archi è maggiore di quella degli archi a tutto sesto; come nel precedente, e ancor più intensa di quella delle volte ogivali ... Ora non è sempre necessario che i suddetti spessori dati dalla pratica debbano essere mantenuti per tutta l'estensione dei muri che sostengono le volte; sarà sufficiente conservarli nei punti degli archi principali, dove essi formeranno dei giunti che sono comunemente chiamati archi rampanti.<sup>70</sup>

Derand utilizza i termini pratica ed esperienza certamente perché questa regola, a lui attribuita, era già in uso prima di lui. C'è da precisare che questa regola è buona e conduce agli stessi risultati di quelle più rigorose dei primi teorici del XVIII secolo solo quando la luce dell'arco non superi i 4-5 metri e non siano presenti sovraccarichi.

Nel corso dei secoli quasi tutti i trattatisti di argomenti statico-architettonici hanno menzionato la regola di padre Derand; Belidor<sup>71</sup> e Giovanni Battista Borra<sup>72</sup> la riportano senza darne alcuna giustificazione, ma suggerendo anche regole alternative basate su principi statici.

Bernardo Antonio Vittone<sup>73</sup> nel tardo XVIII secolo considera questa regola come l'unica e la più sicura; Viollet le Duc<sup>74</sup> menzionandola nel suo *Dictionnaire* la ritiene precedente a Derand, poiché della sua applicazione si troverebbe riscontro nelle cattedrali gotiche ed inoltre Santiago Huerta,<sup>75</sup> all'inizio del XXI secolo, afferma che di essa si trovano tracce anche in Germania a partire dalla prima metà del XVI secolo.

Nonostante la continua utilizzazione di questa regola, le furono mosse diverse critiche sulla sua affidabilità strutturale, visto che tutte le volte costruite con "questo sistema arbitrario" erano in rovina<sup>76</sup>.

---

<sup>70</sup> Derand François, 1743, *L'architecture des voûtes ou l'art des traits, et coupes des voûtes*, nuova ed., Paris, parte I, cap. 6, pag. 10.

<sup>71</sup> Belidor Bernard Forest de, 1729, *La scienza degli ingegneri nella direzione delle opere di fortificazione e di architettura civile*, Mantova.

<sup>72</sup> Borra G. B., 1748, *Trattato delle cognizioni delle resistenze*, Torino.

<sup>73</sup> Vittone B. A., 1760, *Istruzioni elementari per l'indirizzo dei giovani allo studio dell'Architettura*, Lugano.

<sup>74</sup> Viollet le Duc E.-E., *Dictionnaire raisonné de l'Architecture française du XI au XVI siècle*, anche trad. in it., in *L'Architettura ragionata*, a cura di A. M. Crippa, Jaka Book, Milano, 1982.

<sup>75</sup> Huerta Santiago, 2002, *ibidem*.

<sup>76</sup> Milizia Francesco, *Principi di Architettura civile*, rist. Mazzotta, Milano, 1972.

## II. L'APPROCCIO CINEMATICO NEL SECOLO DEI LUMI

### II.1. INTRODUZIONE

Può essere interessante osservare che la grande importanza rivestita dalla geometria come disciplina cardine nella definizione di teorie o regole costruttive prima del XVIII° secolo ha una consistenza teorica e trova giustificazione soprattutto in relazione alle strutture lapidee per le quali può essere assunto un comportamento rigido-plastico. In tal caso, infatti, rinunciando alla ricerca della condizione di esercizio, e utilizzando l'analisi limite ed il Teorema dei Lavori Virtuali per misurare la distanza della condizione reale dal collasso, la stabilità dell'arco trova la sua consistenza in una legge che coniuga pesi e geometria con la possibilità di definire un coefficiente di sicurezza di natura puramente geometrica. Lungo il corso della storia, fra l'altro, le riflessioni e le teorie scientifiche elaborate in relazione alle "questioni meccaniche" sono state quasi sempre caratterizzate da una attenzione prevalentemente orientata all'analisi degli spostamenti possibili o reali del sistema, oppure dei parametri geometrici che li caratterizzavano, e cioè di grandezze direttamente osservabili e misurabili, di natura sostanzialmente geometrica.

Tale circostanza è forse connessa al fatto che prima dell'introduzione di concetti ed enti astratti attraverso l'utilizzazione del linguaggio matematico, le "questioni meccaniche" si configuravano come riflessioni su fatti sostanzialmente pratici e di natura empirica, alla ricerca della legge naturale che governava il fenomeno. In particolare, il problema dell'equilibrio è stato spesso analizzato come la ricerca della condizione limite per cui un sistema mobile potesse essere posto in uno stato di non-mobilità.

E' stata codesta accentuazione forte sulla mobilità non attivata, ma possibile del sistema – in linguaggio moderno potremmo dire sulle particolari condizioni di equilibrio di un sistema labile – che ha fatto sì che il riferimento principale delle teorie scientifiche elaborate nel corso della storia sia stato il cosiddetto "Principio" dei Lavori Virtuali (P.L.V.), assunto come legge naturale o postulato fondamentale.<sup>77</sup>

### II.2 PHILIPPE DE LA HIRE

Dopo Leonardo si dovranno aspettare circa tre secoli, perché il tema degli archi e delle volte, con La Hire, potesse essere affrontato con un approccio scientifico.

Philippe De La Hire (1640-1718) è stato uno dei membri più prestigiosi dell'Académie Royale des Sciences a Parigi, alla quale fu associato nel 1678. Egli apprese disegno e prospettiva dal padre, il quale era pittore al

---

<sup>77</sup> Sinopoli A., 2002, A Re-examination of some theories on vaulted structures: The role of geometry from Leonardo to De La Hire, *Towards a History of Construction*. Basel: Birkhäuser. 601-624.

servizio reale e aveva insegnato all'Académie Royale de Peinture et Sculpture a Parigi; in seguito Philippe si dedicò allo studio della geometria e delle sezioni coniche e nel 1679 scrisse tre trattati: *Nouveaux éléments des sections coniques*, *Les lieux géométriques* e *La construction ou effectation des équations*. Si occupò di questioni di idraulica, geometria, termologia, acustica, ottica, pittura e astronomia, fu chiamato da Luigi XIV a perfezionare la mappa di Francia di Colbert, insegnò all'Académie d'Architecture e si distinse per la qualità delle sue pitture.

Ma è a lui che si devono i primi importanti sviluppi di una prima teoria statica degli archi; essi sono contenuti in due opere fondamentali: il *Traité de Mécanique*,<sup>78</sup> inserito negli atti dell'Académie Royale des Sciences di Parigi dal 1666 al 1699 e pubblicato nel 1730, e una Memoria del 1712 pubblicata dalla stessa Accademia nel 1731 dal titolo *Sur la construction des voutes dans les édifices*.<sup>79</sup>

Occorre, quindi, aspettare il XVIII° secolo per pervenire alle prime considerazioni meccaniche dell'arco; fino ad allora, il compito di “tenere a bada” simili strutture era spettato solo all'esperienza senza alcun aiuto da parte della teoria. Improvvisamente, però, nel *Secolo dei Lumi*, tutto cambia e nasce un nuovo interesse per i difficili problemi della scienza delle strutture.

I due problemi che stimolarono il pensiero degli scienziati illuministi furono *il problema dell'uovo* ed *il problema del muro* i quali, per essere affrontati e risolti, richiedevano un'adeguata preparazione matematica e meccanica.

In riferimento al *problema dell'uovo* ci si chiedeva come, una curva così fragile in apparenza, potesse sostenere carichi tanto elevati, ed in riferimento al *problema del muro* si cercava il giusto dimensionamento degli speroni o dei piedritti.

### II.2.1 *Traité de Mécanique*

Philippe de La Hire nel *Traité de Mécanique* studierà *le cinq premières machines et quelques machines composées des précédents*<sup>80</sup>. Egli dimostrerà che tutte le Macchine possono essere rapportate ad una sola di esse, alla Leva. In tutte le Macchine si possono sempre considerare tre Potenze: la Potenza che Muove, la Potenza che è Mossa e la Potenza che Sostiene (Hypomochlion). Fra queste potenze ce n'è sempre una che resiste all'azione delle altre due ed essa deve essere posizionata fra le due.

---

<sup>78</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, où l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des Arts*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, vol. 9, Paris 1730, pagg. 1-333.

<sup>79</sup> La Hire P. de, 1712, *Sur la construction des voûtes dans les édifices*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris 1731, pagg. 69-77.

<sup>80</sup> Le macchine semplici ed alcune combinazioni di esse: la Leva, la Carrucola, il Cuneo, il Piano Inclinato e la Vite, la Leva e la Bilancia; l'Argano e le Ruote Dentate; la Carrucola; il Cuneo; il Piano Inclinato e la Vite.

In tutte le regole dell'equilibrio si considerano le Macchine prive di quelle parti che potrebbero impedirne l'azione (*effet*), sia per il loro peso sia per l'attrito che fra loro si genera. A tale riguardo, egli dice che, benché non si possano dare delle regole precise per la determinazione della quantità dell'attrito nelle Macchine, si può, almeno, in qualche circostanza, far vedere come sia possibile diminuirlo, cosa che era molto in uso nella pratica.<sup>81</sup>

La Hire spiega il metodo seguito nel Trattato:

Noi dimostreremo tutte le proposizioni di questo trattato alla maniera dei Geometri, facendo qualche ipotesi per rendere più semplice la comprensione delle dimostrazioni; ma, alla fine di questo lavoro ci saranno delle nuove dimostrazioni delle principali regole della Meccanica in cui si mostrerà come esse possano essere dedotte geometricamente dalla costituzione degli elementi che compongono la Macchina, ciò che può essere denominato 'dimostrazione fisica dell'effetto della leva.'<sup>82</sup>

Prima di iniziare con le dimostrazioni, La Hire introduce quattro definizioni generali:

- I. Il Peso è l'attitudine (*effort*) che ha un corpo a cadere, ed esso si distingue in peso assoluto e relativo;
- II. la Direzione di una potenza applicata alla macchina è la linea dritta che essa segue e sulla quale essa produce la sua azione;
- III. il Centro di Gravità di un corpo pesante è il punto dal quale esso può essere sospeso, mentre tutte le sue parti restano in equilibrio, quale che sia la loro posizione rispetto al luogo (centro della terra) verso il quale esso tende a scendere;
- IV. il Momento (*moment*) di un corpo applicato ad una macchina è l'azione con cui esso può agire su un altro corpo<sup>83</sup>. Quest'azione è una combinazione sia delle sue parti di peso assoluto (misura del peso rispetto ad una unità di misura) sia delle parti di forza (termine con cui

---

<sup>81</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique*, *ibidem*, pag. 5.

<sup>82</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique*, *ibidem* pag. 6 : *Nous démontrerons toutes les propositions de ce traité à la manière des Géomètres, aiant établi quelques hypothèses pour rendre le démonstrations plus simples & plus aisées à comprendre : mais à la fin de cet ouvrage nous apporterons des démonstrations nouvelles des principales règles de Mécanique, où nous ferons voir comment on les peut déduire géométriquement de la constitution des corps qui servent dans la composition de la machine, ce qu'on peut appeler une démonstration physique de l'effet du levier.*

<sup>83</sup> È opinione di A. Sinopoli che La Hire intende qui descrivere l'azione che un corpo esercita su di un altro, con cui non sia in diretto contatto, ma a cui sia collegato grazie alla presenza di una macchina. E poiché per La Hire, la macchina per eccellenza è la leva cui tutte le macchine possono essere ricondotte, l'azione di un corpo su di un altro collegato in una leva si manifesta con quello che La Hire chiama *moment*, prodotto del peso per le parti di forza considerate come misura del braccio, parametro in grado di variare l'azione del corpo sull'altro A. Sinopoli, 2012, *Il problema dell'equilibrio da Aristotele a Varignon*, Franco Angeli, (in fase di stesura).



La Hire intende espressamente la misura del braccio) con cui esso agisce sull'altro corpo; tale combinazione è più propriamente il loro prodotto.

Dopo le definizioni, La Hire fa tre ipotesi:

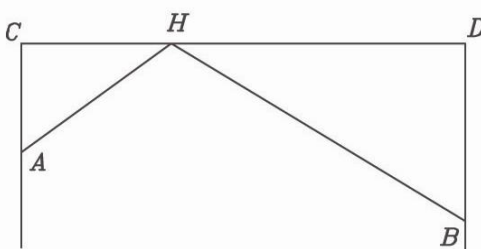
- I. Il cambiamento di forma di un corpo non cambia necessariamente il suo peso; nel senso che un corpo sferico può essere trasformato in uno cubico di eguale peso.
- II. Le direzioni di due corpi pesanti applicati ad una macchina, e di tutte le loro parti considerate separatamente, tendono tutte verso il centro della terra e poiché esso è molto lontano possono essere considerate come parallele.
- III. I corpi pesanti hanno stesso peso in tutti i punti della loro linea di direzione.

Con tali premesse La Hire inizia le sue “dimostrazioni geometriche” delle macchine.

La Leva è un'asta dritta o angolare (due linee dritte che formano un angolo) supposta priva di peso ed inflessibile, a cui sono applicate tre Potenze. Egli, inoltre, divide la Leva dritta in tre tipi: la prima con l'Hypomochlion al centro, la seconda con la Potenza che è Mossa al centro ed una terza con al centro la Potenza che Muove; in tal modo sia i Pesi applicati sia l'Appoggio sono Potenze.<sup>84</sup>

Alcune fra le dimostrazioni delle 61 *propositions* del capitolo sulla Leva meritano una particolare attenzione.

*Proposition VIII.* Una leva angolare AHB, caricata alle sue estremità da due pesi A e B, le cui direzioni AC e BD sono parallele fra loro, può essere trasformata in una leva dritta equivalente senza cambiare i pesi e le loro direzioni (Fig. 2.1).



**Fig. 2.1.** *Traité de Mécanique, Proposition VIII.*

Dimostrazione: dal punto H della leva AHB si tracci una linea dritta CHD perpendicolare alle direzioni di AC e BD. I due pesi A e B, per la *Supposition III*, saranno in equilibrio fra loro sia sulla leva dritta CHD sia sulla leva angolare AHB.<sup>85</sup>

<sup>84</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pag. 10.

<sup>85</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pag. 30.

*Proposition IX.* Come conseguenza della *VIII*, l'azione dei pesi A e B non deve essere misurata come prodotto degli stessi pesi per i bracci di leva a cui essi sono applicati, ma come prodotto dei pesi per le perpendicolari tracciate dal punto d'appoggio H della leva alle direzioni dei pesi.

Tali perpendicolari HD e HC sono le linee più corte che possono essere tracciate dal punto d'appoggio H alle linee di direzione AC e BD dei due pesi A e B.

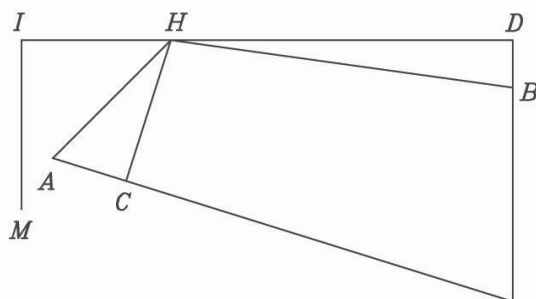
Dimostrazione: ci sarà equilibrio fra i due pesi A e B, applicati sulla leva dritta CHD nei punti C e D, se questi pesi saranno fra loro come il reciproco del rapporto tra le lunghezze dei bracci e HC e HD. L'azione di questi pesi va misurata solo rispetto alla lunghezza delle linee HC e HD che sono le più corte che si possono tracciare da H sulle linee di direzione, perpendicolari ad esse.<sup>86</sup>

*Proposition X.* Se le direzioni AC e BD delle potenze A e B applicate ad una leva angolare AHB non sono parallele fra loro, per garantire l'equilibrio la leva angolare AHB può essere trasformata in un'altra leva angolare equivalente CHD, in cui l'effort delle potenze A e B è misurato sulle lunghezze dei bracci di quest'ultima leva CHD senza cambiare i pesi e le direzioni<sup>87</sup> (Fig. 2.2).

Dimostrazione: i bracci HD e HC della leva CHD sono ortogonali alle direzioni delle potenze A e B.

*Proposition XI.* Una leva angolare CHD, in cui le direzioni AC e BD delle potenze A e B sono perpendicolari ai suoi bracci HC e HD, per garantire l'equilibrio può essere trasformata nella leva dritta equivalente IHD senza cambiare né la lunghezza dei bracci (HI=HC, HD=HD) né il valore delle potenze, ma trasformando la direzione di A nella direzione IM ortogonale ad HI (Fig. 2.2).

Dimostrazione: si noti, che in questa proposizione, è stato supposto che lo schema CAIBD sia piano con fulcro in H, e che IM sia la direzione della potenza A perpendicolare al braccio di leva HI della leva dritta IHD.

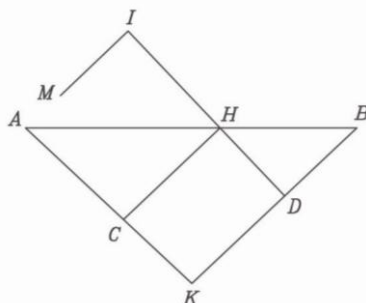


**Fig. 2.2.** *Traité de Mécanique Proposition X-XI.*

<sup>86</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique*, *ibidem*, pag. 31.

<sup>87</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique*, *ibidem*, pag. 32.

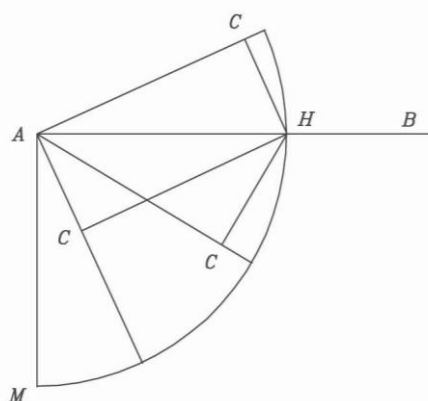
*Proposition XII.* Una leva dritta AHB, in cui le direzioni AC, BD, delle potenze A e B, sono diversamente inclinate rispetto alla leva, può essere trasformata, senza cambiare né potenze né direzioni, in una leva angolare equivalente CHD in cui i bracci HC e HD sono perpendicolari alle direzioni delle potenze AC e BD (Fig. 2.3).



**Fig. 2.3.** *Traité de Mécanique, Proposition XII.*

Dimostrazione: per la *Proposition XI*, la leva angolare CHD può essere trasformata a sua volta in una leva dritta equivalente IHD cambiando una sola delle due direzioni, AC in IM, mentre la lunghezza dei bracci rimane la stessa se per costruzione  $HI=HC$ . In conclusione, l'equilibrio fra le potenze A e B applicate alla leva dritta AHB, che agiscono lungo le direzioni inclinate AC e BD, sarà equivalente all'equilibrio che le stesse potenze garantiscono sulla leva dritta IHD, in cui le stesse potenze agiscono lungo le direzioni IM e BD, perpendicolari ai bracci di leva  $HI=HC$  e HD.<sup>88</sup>

*Proposition XIII.* Le diverse azioni AC, che una potenza A applicata nel punto A - estremo del braccio HA di una leva dritta AHB - esercita lungo direzioni diverse, stanno fra loro come i seni degli angoli che le diverse direzioni AC formano con il braccio di leva HA (Fig. 2.4).



**Fig. 2.4.** *Traité de Mécanique, Proposition XIII.*

Dimostrazione: per la *Proposition IX*, le azioni della potenza A, applicata alla leva lungo le diverse direzioni AC, devono essere misurate sulle perpendicolari HC tracciate dal punto d'appoggio H della leva sulle diverse

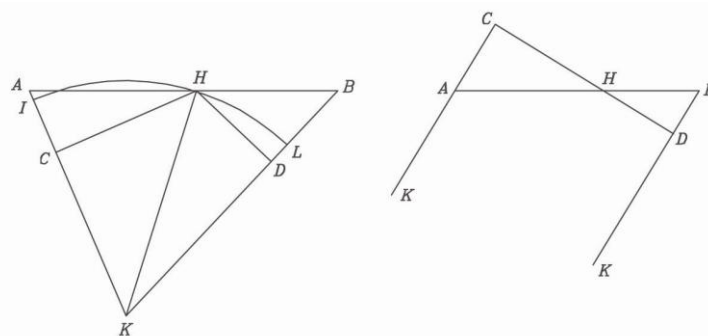
<sup>88</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pag. 34.

direzioni. Se, infatti, con centro in A si traccia una circonferenza di raggio unitario AH, per la trigonometria tutti i segmenti HC saranno i seni degli angoli HAC che le direzioni AC formano con il braccio di leva HA e staranno fra loro come le perpendicolari che misurano le azioni della potenza A lungo le diverse direzioni.

È evidente inoltre che la direzione AM è quella lungo cui l'azione della potenza A è maggiore poiché l'angolo HAC diventa retto, pertanto l'azione AM sarà la potenza assoluta di A.<sup>89</sup>

*Proposition XIV.* Nel caso in cui le estremità A e B di una leva dritta AHB o le estremità C e D di una leva angolare CHD siano tirate da due potenze che, agendo lungo le direzioni AK e BK, concorrono nel punto K, affinché ci sia equilibrio fra le due potenze è necessario che esse stiano fra loro come il reciproco del rapporto dei seni degli angoli che le direzioni AK e BK formano con la congiungente il punto K con il punto d'appoggio H (Fig. 2.5 dx).

Dimostrazione: per la *Proposition IX*, le azioni delle due potenze devono essere misurate come prodotto delle potenze per le perpendicolari HC e HD, tracciate a partire dal punto d'appoggio H, sulle direzioni AK e BK; mentre per la *Proposition XII* la leva angolare può essere trasformata in una leva dritta equivalente in cui ci sarà equilibrio fra le due potenze applicate A e B, se il rapporto fra le due sarà uguale all'inverso del rapporto fra le perpendicolari HC e HD alle direzioni AK e BK.



**Fig. 2.5.** *Traité de Mécanique, Proposition XIV.*

Ma, se si traccia una circonferenza con centro in K e raggio unitario KH, è evidente che HC è il seno dell'angolo AKH ed HD è il seno dell'angolo BKH; per garantire l'equilibrio allora le potenze devono stare fra loro come l'inverso dei seni degli angoli che le direzioni delle due potenze formano con la congiungente KH.

Come conseguenza, se le direzioni delle potenze AK e BK fossero parallele fra loro e perpendicolari ai bracci di leva HC e HD (Fig. 2.5 sx), il rapporto fra i bracci HC e HD lungo la linea CHD fornirebbe lo stesso rapporto dei seni degli angoli della circonferenza trigonometrica anche se in

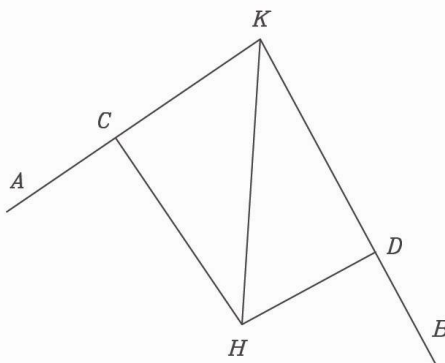
<sup>89</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pagg. 34, 35.

questo caso essa avrebbe il centro  $K$  all'infinito a causa del parallelismo delle direzioni  $AK$  e  $BK$ . Le linee  $HC$  e  $HD$ , il cui rapporto è il reciproco di quello delle potenze, staranno fra loro come i bracci  $HA$  e  $HB$  della leva  $AHB$ , dal momento che i triangoli rettangoli  $HCA$  e  $HDB$  sono simili.<sup>90</sup>

*Proposition XV.* Data un'asta  $HK$ , con punto d'appoggio in  $H$  e tirata all'estremità  $K$  da due potenze  $A$  e  $B$ , affinché ci sia equilibrio fra le due potenze è necessario che esse stiano fra loro in rapporto inverso alle perpendicolari  $HC$  e  $HD$ , tracciate dal punto d'appoggio  $H$  alle direzioni  $AK$  e  $BK$  (Fig. 2.6).<sup>91</sup>

Dimostrazione:  $KHK$  non è altro che una leva in cui i due bracci sono sovrapposti e che, in accordo alle *propositions* precedenti, può essere trasformata in una leva ad essa equivalente.

Allora, senza cambiare né le potenze  $A$  e  $B$  né le loro direzioni  $AK$  e  $BK$ , troviamo che, la leva dritta  $KHK$  con bracci sovrapposti è equivalente alla leva angolare  $CHD$ , ed infatti, tracciando le perpendicolari  $HC$  e  $HD$  dall'appoggio  $H$  alle direzioni  $AK$  e  $BK$ , queste possono considerarsi come i bracci di una leva angolare alle cui estremità  $C$  e  $D$  sono applicate le potenze  $A$  e  $B$ .



**Fig. 2.6.** *Traité de Mécanique, Proposition XV-XVI.*

*Proposition XVI.* Quando le direzioni delle potenze  $A$  e  $B$  non sono parallele, qualunque sia il tipo di leva su cui esse agiscono questo può essere trasformato in una leva equivalente  $KHK$  con un solo braccio  $HK$ , o meglio, i cui due bracci sono sovrapposti.

Dimostrazione: data la leva angolare  $CHD$  i cui bracci  $HC$  e  $HD$  sono rispettivamente ortogonali alle direzioni delle potenze  $A$  e  $B$ , se si prolungano le direzioni  $AC$  e  $BD$  delle potenze  $A$  e  $B$  fino ad incontrarsi nel punto  $K$  (senza cambiare né le potenze né le loro direzioni), la leva angolare  $CHD$  potrà essere trasformata nella leva dritta  $KHK$  a bracci giunti equivalente alla leva iniziale  $CHD$  poiché i bracci  $HC$  e  $HD$  ortogonali alle direzioni delle potenze sono gli stessi<sup>92</sup>.

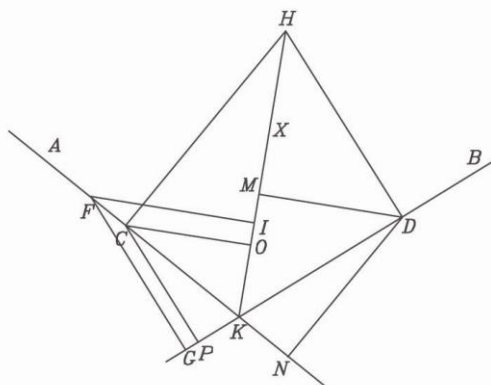
<sup>90</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pagg. 36, 37.

<sup>91</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pag. 37.

<sup>92</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pag. 38.

*Proposition XVII.* Nelle *propositions* precedenti sono state esaminate leve angolari con fulcro in H le cui estremità sono “tirate” o “spinte” da due potenze A e B, le cui direzioni concorrono in un punto K ed i cui valori sono tali da garantire l’equilibrio rispetto al fulcro H. Ci si chiede quale dovrà essere la potenza X che sosterrà in H queste due potenze e quale la sua direzione (Fig. 2.7).

Dimostrazione: Per la *proposition XVI* la leva angolare CHD può essere trasformata in una leva equivalente KHK a bracci sovrapposti, senza cambiare né le potenze né le loro direzioni. Allora le potenze A e B agiscono lungo le direzioni CK e DK su entrambe le leve; il punto d’appoggio H (fulcro di entrambe le leve) deve essere sostenuto da una potenza X la cui direzione sarà la congiungente H (fulcro) con K (punto su cui confluiscono le azioni delle due potenze A e B che devono essere contrastate).



**Fig. 2.7.** *Traité de Mécanique, Proposition XVII.*

Poiché A e B tirano o spingono i bracci di leva HC e HD lungo le direzioni CK e DK, e queste due potenze insieme alla potenza X, che le sostiene e che ha direzione HK, garantiscono l’equilibrio, si potranno considerare altre leve, senza cambiare né le potenze né le loro direzioni.

Sia preso il punto D lungo la direzione KD come fulcro di una nuova leva i cui bracci DM e DN sono rispettivamente le perpendicolari tracciate dal fulcro D alle direzioni HK della potenza X e AK della potenza A. Il rapporto fra le potenze A e X sarà uguale al rapporto fra i bracci DM e DN della leva MDN:

$$A : X = DM : DN \quad (2.1)$$

Allo stesso modo potrà essere determinato il rapporto fra la potenza B e la potenza X, considerando il punto C come fulcro della leva OCP i cui bracci sono rispettivamente le perpendicolari CO e CP alle direzioni HK della potenza X e BK della potenza B. Il rapporto fra le potenze B e X sarà uguale al rapporto fra i bracci CO e CP della leva OCP:

$$B : X = CO : CP \quad (2.2)$$

Ne segue che il rapporto fra le potenze A e B scaturirà dai due rapporti fra le potenze A e X, e fra le potenze B e X.

Si noti che il rapporto fra B e X potrà essere espresso anche in altro modo. A tale scopo, se sulla linea KC si prende la distanza  $KF=KD$ , il punto F sarà il fulcro di una nuova leva IFG di cui le perpendicolari FI su HK e FG su BK saranno i bracci delle potenze X e B; è evidente allora che, per la similitudine dei triangoli FIK e COK, e FKG e CKP, il rapporto fra FI e FG sarà uguale al rapporto fra CO e CP, per cui:

$$B : X = FI : FG \quad (2.3)$$

Inoltre, poiché i triangoli FKG e DKN sono uguali per costruzione, allora  $FG=DN$  e quindi:

$$B : X = FI : DN \quad (2.4)$$

di conseguenza il rapporto fra le potenze A e B sarà:

$$A : B = DM : FI \quad (2.5)$$

A dimostrazione della correttezza del rapporto fra A e B così ottenuto, La Hire nota che il triangolo rettangolo HDK è simile al triangolo rettangolo DMK, per cui:

$$DM : HD = DK : HK \quad (2.6)$$

Tale rapporto, poiché  $DK=FK$  per costruzione, può anche essere espresso come:

$$DM : HD = FK : HK \quad (2.7)$$

E poiché, inoltre, il triangolo rettangolo HCK è simile al triangolo FIK:

$$FI : HC = FK : HK \quad (2.8)$$

si ottiene:

$$DM : HD = FI : HC \quad (2.9)$$

ed il rapporto fra le potenze A e B è proprio uguale al rapporto fra la perpendicolare HD alla direzione BK della potenza B e la perpendicolare HC alla direzione AK della potenza A:

$$A : B = HD : HC \quad (2.10)$$

In sintesi, La Hire fissa le direzioni arbitrarie e non parallele delle due potenze A e B; fissa inoltre H, fulcro della leva angolare su cui esse agiscono, e si prefigge di trovare la direzione ed il valore della potenza X, ovviamente applicata in H, che “sostiene” le due potenze A e B. Fra  $\infty^2$  bracci di leva angolare con fulcro in H, La Hire sceglie i bracci HC e HD ortogonali alle direzioni di A e B. Allora, per la proposizione XVI, senza alterare i valori delle potenze e le loro direzioni, la leva angolare CHD è trasformata nella leva KHK ad essa equivalente, con fulcro in H e bracci

coincidenti. Ma, poiché le due potenze sono in equilibrio rispetto al fulcro H e le loro azioni confluiscono nel punto K, la potenza X – rappresentata da una verga rigida – che le sostiene in H e che deve contrastare in K la loro azione, deve necessariamente avere la direzione HK.

Per valutare l'intensità della potenza X La Hire considera i piedi delle perpendicolari - abbassate da H alle direzioni delle potenze - e cioè C per A e D per B come fulcri di due nuove leve angolari all'estremità dei bracci sulle quali agiscono rispettivamente X ed A, ed X e B.

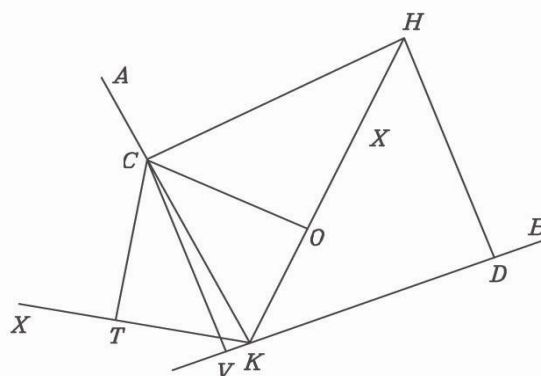
Il valore della potenza X sarà determinato in termini di rapporto con ciascuna delle due potenze A e B attraverso considerazioni di leve equivalenti.<sup>93</sup>

*Proposition XVIII.* Si può fare un'ulteriore riduzione, da una leva angolare ad un'altra, senza cambiare le potenze e gli angoli di inclinazione delle loro direzioni. In tal modo, si può trovare il rapporto fra le potenze A e B applicate all'estremità e la potenza X che le sostiene (Fig. 2.8).<sup>94</sup>

Dimostrazione: a partire dal punto K si tracci KT che formi un angolo CKT con la direzione CK, uguale all'angolo CKH, angolo che la direzione CK (sostegno della potenza A) forma con HK (sostegno della potenza X). Di seguito dal punto C si traccino le perpendicolari CT su KT e CV su KD. In questo modo si otterrà la leva angolare VCT con fulcro C e bracci CT, CV. I triangoli rettangoli COK e CKT sono uguali, CK è comune ad entrambi e CO=CT, pertanto il rapporto fra la potenza B e la potenza X sarà:

$$B : X = CO : CV \quad \text{o} \quad B : X = CT : CV \quad (2.11)$$

Questo rapporto è uguale sia nel caso in cui X sia applicata lungo HK sia nel caso in cui sia applicata lungo KT.



**Fig. 2.8.** *Traité de Mécanique, Proposition XVIII.*

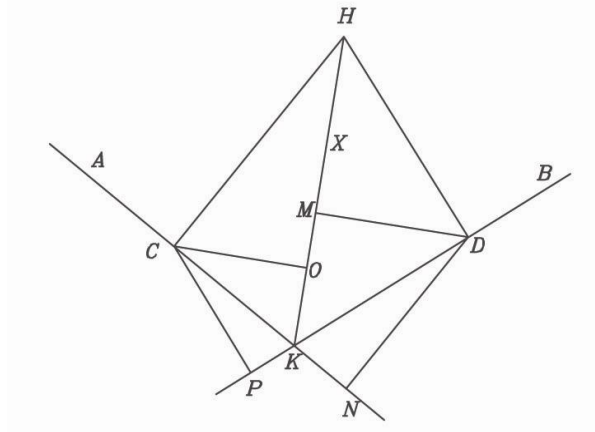
*Proposition XIX:* in una leva angolare CHD, il rapporto fra la potenza A e la potenza X è uguale al rapporto fra il seno dell'angolo DKH, formato dalle direzioni delle due potenze X e B (o del suo supplementare HKP) ed il

<sup>93</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pagg. 39-42.

<sup>94</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pagg. 42, 43.



seno dell'angolo CKD (o del suo supplementare DKN), formato dalle direzioni delle potenze A e B (Fig. 2.9).<sup>95</sup>



**Fig. 2.9.** *Traité de Mécanique, Proposition XIX.*

Dimostrazione. per la *proposition XVII*:

$$A : X = DM : DN \quad (2.12)$$

e poiché l'angolo CKD è il supplementare di DKN, consegue che:

$$A : X = \sin DKH : \sin CKD \quad (2.13)$$

Inoltre, sempre per la *proposition XVII*:

$$B : X = CO : CP \quad (2.14)$$

e poiché l'angolo CKP è il supplementare di CKD:

$$B : X = \sin CKH : \sin CKD \quad (2.15)$$

Allora, il rapporto fra la potenza B e la potenza X è uguale al rapporto fra il seno dell'angolo CKH, formato dalle direzioni delle due potenze X e A (o del suo supplementare HKN) ed il seno dell'angolo CKD (o del suo supplementare CKP) formato dalle direzioni delle potenze A e B.

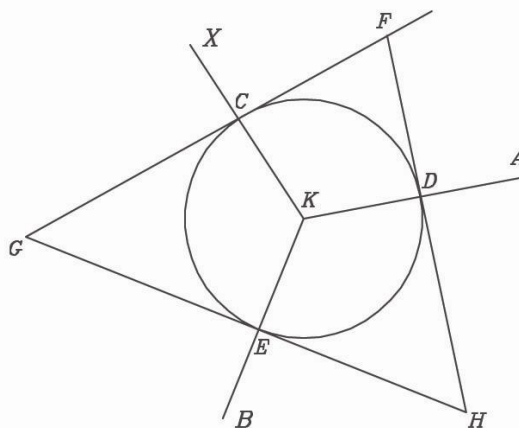
*Propositions XXII:* date le direzioni AK, XK, BK di tre potenze A, X, B, che concorrono nel punto K, si trovino i rapporti fra queste tre potenze in modo che ci sia equilibrio fra loro (Fig. 2.10).<sup>96</sup>

Dimostrazione: si scelga un punto su una delle tre direzioni, ad una distanza qualsiasi dal punto K, ad esempio il punto E sulla direzione KB e si tracci una circonferenza di raggio KE e centro K, che intercetterà il punto C sulla direzione KX ed il punto D sulla direzione KA. Di seguito si traccino le tangenti alla circonferenza nei punti D, C, E; queste risulteranno perpendicolari alle tre direzioni AK, XK, BK e le loro intersezioni daranno origine ad un triangolo di vertici F, G, H. Poichè in tutti i triangoli i seni degli angoli stanno fra loro come i lati opposti agli angoli, il rapporto fra le

<sup>95</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pagg. 43, 44.

<sup>96</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pag. 48.

tre potenze A, X, B sarà uguale al rapporto fra i lati del triangolo FH, FG, GH, presi in quest'ordine (Fig. 2.10).



**Fig. 2.10.** *Traité de Mécanique, Proposition XXII.*

Per le *propositions XVII, XVIII, XIX*, ogni punto della circonferenza D, C, E, può essere considerato come fulcro della leva angolare i cui bracci sono perpendicolari alle direzioni delle altre due potenze; i rapporti di proporzionalità fra le potenze saranno uguali al reciproco dei rapporti di proporzionalità fra le perpendicolari alle loro direzioni.

Ad esempio, prendendo in esame il punto C sulla direzione XK, della potenza X, le altre due potenze concorrenti nel punto K saranno A e B; la leva angolare che si formerà avrà fulcro in C ed i suoi bracci saranno le perpendicolari CO e CP, abbassate da C sulle direzioni AK e BK, delle potenze A e B, per cui:

$$A : B = CO : CP \quad (2.16)$$

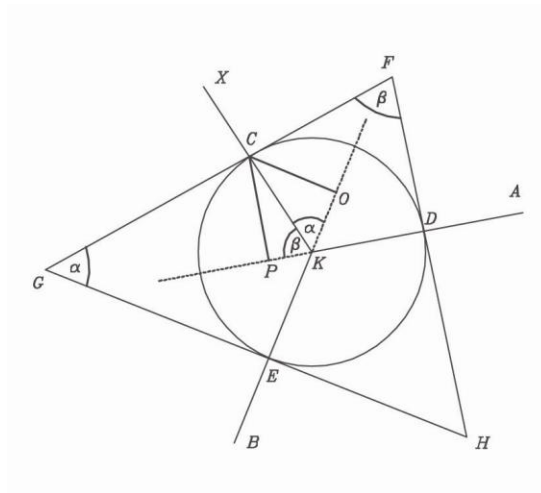
che, con riferimento alla Fig. 2.11 per la supplementarietà degli angoli, può essere posta nella forma:

$$\begin{aligned} A : B &= \sin OKC : \sin PKC \\ &= \sin \alpha : \sin \beta = \sin CKE : \sin CKD \end{aligned} \quad (2.17)$$

Poiché è, inoltre, possibile dimostrare che l'angolo GFH è eguale all'angolo  $\beta$ , mentre l'angolo FGH è eguale all'angolo  $\alpha$ , allora:

$$A : B = \sin FGH : \sin GFH \quad (2.18)$$

e cioè, il rapporto fra due delle tre potenze, le cui direzioni si incontrano in K, è eguale al reciproco del rapporto dei seni degli angoli che ciascuna delle ortogonali a queste due potenze forma con l'ortogonale all'altra potenza. In dettaglio, il rapporto fra A e B è uguale al reciproco del rapporto fra il seno dell'angolo FGH - formato dalle direzioni ortogonali ad A e X - ed il seno dell'angolo GFH - formato dalle direzioni ortogonali a B e X (Fig. 2.11).



**Fig. 2.11.** *Traité de Mécanique, Proposition XXII* – schema angoli.

Infine, poiché il rapporto fra due lati di un triangolo è eguale al rapporto fra i seni degli angoli ad essi opposti, consegue che:

$$A : B = FH : GH \quad (2.19)$$

Analogamente, prendendo il punto E ed il punto D come fulcri di leve angolari, si ottengono rispettivamente il rapporto fra le potenze A e X ed il rapporto fra le potenze B e X:

$$\begin{aligned} A : X &= FG : FH \\ B : X &= FG : GH \end{aligned} \quad (2.20)$$

In conclusione, il rapporto fra tre potenze A, X e B, le cui direzioni si incontrano in un punto K, è eguale al rapporto fra i corrispondenti lati FH, FG e GH del triangolo che si ottiene tracciando le ortogonali alle direzioni di ciascuna delle tre potenze; ortogonali passanti per punti appartenenti alle direzioni delle potenze ed equidistanti da K. Si dirà, allora, che le tre potenze A, X, B, stanno fra loro come i tre lati FH, FG, GH del triangolo.<sup>97</sup>

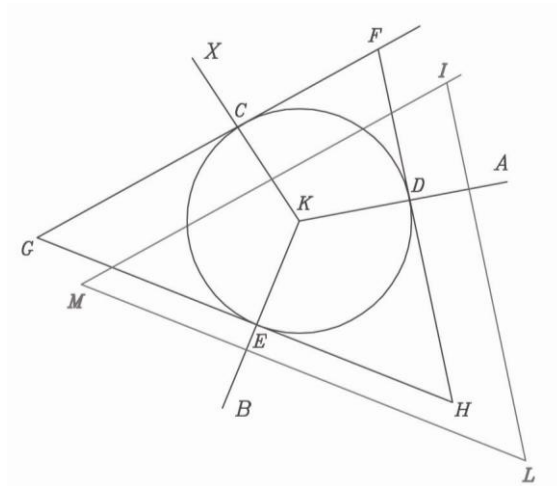
$$A : B : X = FH : FG : GH \quad (2.21)$$

*Proposition XXIII.* I rapporti fra le tre potenze possono essere trovati in un altro modo, diverso dal precedente, e più facilmente (Fig. 2.12).<sup>98</sup>

Dimostrazione: si può notare che tracciando delle perpendicolari alle direzioni delle potenze AK, XK, e BK, passanti per i punti arbitrari, come in Fig. 2.10, si formerà un triangolo di vertici IML, con i lati paralleli ai lati del triangolo FGH. Trattandosi di triangoli simili, i rapporti fra i loro lati saranno uguali, la (2.20) può essere generalizzata affermando che il rapporto fra tre potenze, le cui direzioni concorrano in un punto è uguale al rapporto dei tre lati corrispondenti del triangolo che si ottiene tracciando perpendicolari arbitrarie alle direzioni delle tre potenze (Fig. 2.12).

<sup>97</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pagg. 49, 50.

<sup>98</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pagg. 50, 51.

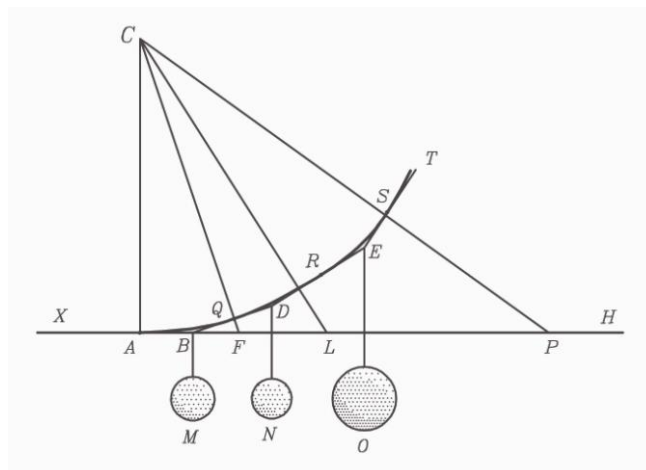


**Fig. 2.12.** *Traité de Mécanique, Proposition XXIII.*

La Hire sottolinea infine il fatto che le direzioni delle tre potenze devono sempre formare un angolo fra di loro, perché se delle tre potenze due sono fra loro parallele, la terza direzione sarà la base del triangolo ma *le sommet* sarà a distanza infinita, ed il problema sarà impossibile da risolvere.<sup>99</sup>

Alla fine del trattato La Hire fa *nuove dimostrazioni delle principali regole della Meccanica: dimostrazione fisica dell'effetto della leva*, in particolare nelle *propositions CXXIII* e *CXXV* che seguono.

*Propositions CXXIII*: determinare i pesi da applicare alle diverse parti di una corda, supposta non pesante, in modo tale che tirando, tutti insieme i pesi trovati, essa possa assumere la forma di una qualsivoglia curva<sup>100</sup> (Fig.2.13).



**Fig. 2.13.** *Traité de Mécanique, Proposition CXXIII.*

**Dimostrazione:** Si tracci una curva e la si divida in parti uguali AQ, QR, RS. Per i punti A, Q, R, S si traccino le tangenti alla curva XA, BD, DE, ET, le quali intersecandosi intercetteranno i punti B, D, E. In particolare, la

<sup>99</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pag. 51.

<sup>100</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pag. 308.

tangente alla curva nel punto A è l'orizzonte XH. Dal punto A si elevi la perpendicolare all'orizzonte e contemporaneamente dal punto Q si elevi la perpendicolare a BD, il loro incontro individuerà il punto C, dal quale si abbasseranno le perpendicolari a DE e a ET. Queste perpendicolari prolungate fino all'orizzonte XH individueranno su di essa i punti AFLP.

I pesi M, N, O, considerati come potenze, saranno sospesi nei punti B, D, E, punti d'intersezione delle tangenti alla curva nei punti A, Q, R, S. Per l'equilibrio delle potenze, le direzioni dei pesi sono parallele fra loro. Infatti, per le *propositions XXII - XXIII* ognuno dei punti B, D, E può considerarsi il punto K in cui concorrono tre potenze.

Prendendo in esame il punto B, le tre potenze concorrenti in esso sono XB, MB, DB ed il triangolo, individuato dalle perpendicolari, CA, AF, CF alle tre potenze, ha vertici CAF; il rapporto fra le potenze è uguale al rapporto fra i lati corrispondenti del triangolo:

$$XB : MB : DB = CA : AF : CF \quad (2.22)$$

Prendendo in esame il punto D, le tre potenze concorrenti in esso sono BD, ND e ED ed il triangolo, individuato dalle perpendicolari CF, FL e CL alle tre potenze, ha vertici CFL; il rapporto fra le potenze è uguale al rapporto fra i lati del triangolo:

$$BD : ND : ED = CF : FL : CL \quad (2.23)$$

Prendendo in esame il punto E, le tre potenze concorrenti in esso sono DE, OE, TE ed il triangolo, individuato dalle perpendicolari CL, LP e CP alle tre potenze, ha vertici CLP; il rapporto fra le potenze è uguale al rapporto fra i lati corrispondenti del triangolo:

$$DE : OE : TE = CL : LP : CP \quad (2.24)$$

Mettendo in relazione i primi due triangoli (Fig. 2.14), si trova che:

$$\begin{aligned} MB : DB &= AF : CF \\ BD : ND &= CF : FL \end{aligned} \quad (2.25)$$

da cui:

$$MB : ND = AF : FL \quad (2.26)$$

Mettendo in relazione il secondo ed il terzo triangolo (Fig. 2.14), si trova che:

$$\begin{aligned} ND : ED &= FL : CL \\ DE : OE &= CL : LP \end{aligned} \quad (2.27)$$

da cui:

$$ND : OE = FL : LP \quad (2.28)$$

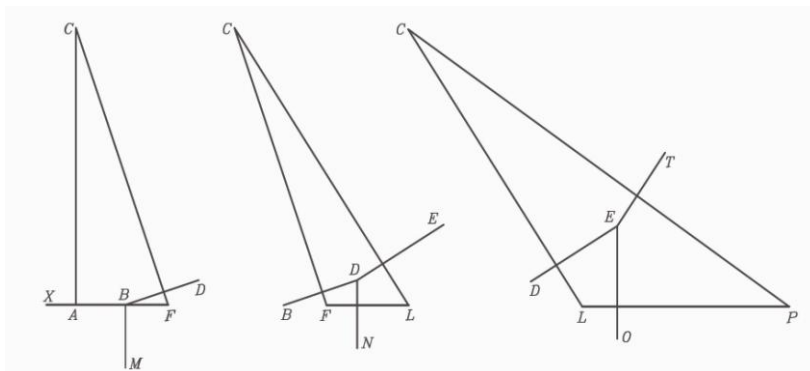
Riassumendo, le perpendicolari alle tangenti XA, BD, DE, ET, nei punti della curva A, Q, R, S, decidono il rapporto dei pesi M, N, O, che dovranno essere applicati alle diverse parti della curva; tale rapporto, infatti, è

proporzionale ai segmenti AF, FL, LP, intercettati dalle suddette perpendicolari lungo l'orizzonte XH:

$$M:N:O = AF:FL:LP \quad (2.29)$$

Per l'equilibrio, i pesi M, N, O sono proporzionali ai segmenti AF, FL, LP.

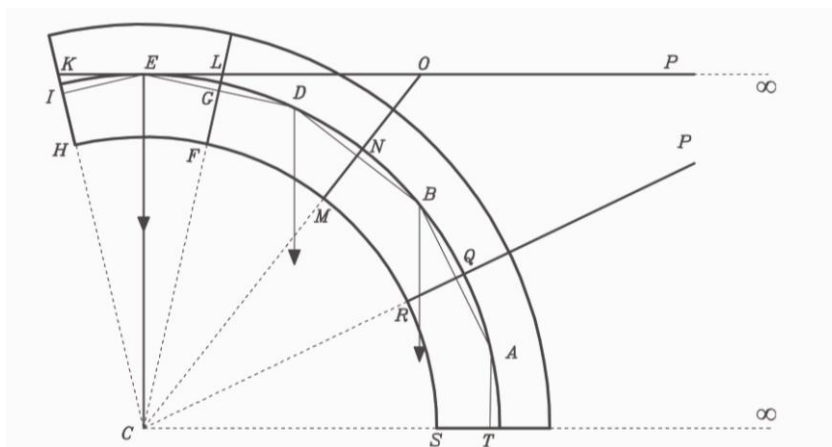
Tutti i pesi M, N, O sono in equilibrio fra loro, nella disposizione descritta, in rapporto alle due potenze estreme X e T che "tirando" la curva ne determinano la forma.



**Fig. 2.14.** *Traité de Mécanique, Proposition CXXIII* – schema.

Nel caso particolare in cui la curva sia una porzione di cerchio, il centro C sarà il centro del cerchio e, per quanto detto sopra, i pesi da applicare alle porzioni uguali dell'arco di cerchio saranno proporzionali ai segmenti, individuati dalle tangenti al cerchio, sull'orizzonte XH.<sup>101</sup>

*Propositions CXXV:* determinare il carico da dare ad ogni concio, che formi un arco o una volta, tale che essi stiano in equilibrio, nell'ipotesi che i loro giunti di contatto siano infinitamente lisci, tanto da poter scorrere l'uno contro l'altro senza alcun impedimento (Fig. 2.15).



**Fig. 2.15.** *Traité de Mécanique, Proposition CXXV.*

<sup>101</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, ibidem*, pagg. 308-310.

Questa proposition non è che il ribaltamento della CXXIII.<sup>102</sup>

Dimostrazione: la volta, con centro in C, è supposta circolare e formata da conci uguali i cui pesi sono applicati nei rispettivi baricentri E, D, B, A. Poiché, i piani dei giunti di contatto fra i conci sono supposti infinitamente lisci, si deve considerare solo la direzione del peso dei conci.

Dando un peso qualsiasi al concio in chiave, con baricentro in E, la sua direzione EC sarà perpendicolare alla linea d'orizzonte KP e, visto che i giunti IH e GF si incontrano nel centro C della volta, il concio lo si considera come un cuneo, pertanto la potenza E, che ha direzione EC, è sostenuta dalle potenze G ed I, le cui direzioni sono perpendicolari, nell'ordine, ai giunti FG ed HI.

Si osservi che in questo problema La Hire non soltanto ipotizza l'assenza dell'attrito ai giunti – eliminando così l'indeterminazione connessa alla direzione della risultante ai giunti – ma ipotizza inoltre che le tre potenze agenti sul concio abbiano come punto di intersezione il baricentro del concio – eliminando così un'altra indeterminazione. La terza indeterminazione tipica dell'equilibrio di un arco dotato di spessore è intrinsecamente eliminata dalla simmetria del sistema.

Continuando nella sua dimostrazione La Hire afferma che per la *proposition CXXIII*, i segmenti IE, EB, DB, BA, AT, perpendicolari ai giunti, sono le tangenti alla curva EDDBA, nei punti I, G, N, Q, T, ed i baricentri, *les points pesants*, dei conci E, D, B, A sono i punti di intersezione di queste tangenti.

Per le *propositions XXII - XXIII*, dal triangolo CKL, risulterà che KL è il peso del concio E e CL e CK sono le potenze che lo sostengono lungo le direzioni EG ed EI perpendicolari ai giunti FG ed HI. A questo punto, il concio contiguo, che ha come baricentro D, dovrà sostenere la potenza G; si prolunga la retta che individua il giunto CMN fino ad incontrare la linea KP in O, in questo modo si ottiene il triangolo CLO che fornirà i rapporti delle potenze G, D, e N, in cui la potenza G sarà rappresentata dal lato CL, il peso D dal lato LO e la potenza N dal lato CO.

Affinché i due conci contigui stiano in equilibrio fra loro, il rapporto fra il peso del concio in chiave E e quello del concio D deve essere uguale al rapporto fra i segmenti KL e LO. Inoltre, affinché ci sia l'equilibrio, si deve sempre supporre che la potenza I sia applicata sulla parte opposta della chiave. Ciò che si è fatto per i conci E e D si farà anche per il concio B; una volta individuato il triangolo COP, la potenza N sarà rappresentata dal lato CO, il peso B dal lato OP e la potenza Q dal lato CP. Il peso B è determinato rispetto ai pesi dei conci E e D e tutti e tre sono proporzionali, rispettivamente, ai segmenti KL ed LO sull'orizzonte KP.

---

<sup>102</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique*, *ibidem*, pag. 315 :“...Cette propositions n'est qu'une converse de la précédente...”.

Infine, il peso A del concio che poggia sull'imposta dovrebbe essere infinito. Geometricamente, infatti, la direzione della retta che individua il giunto ST all'imposta risulta essere parallela alla linea dell'orizzonte KP e come dice La Hire:

questo è ciò che si otterrà per il concio A, nell'ipotesi di giunti infinitamente lisci<sup>103</sup>

La più piccola forza può spostare il concio A lungo la direzione BQ, perpendicolare al suo giunto RQ e lo allontanerà dal punto C, perché, come si può vedere, ci sono solo due perpendicolari per le tre potenze che sono: A peso del concio, con direzione verticale, T potenza perpendicolare al giunto d'imposta ST, e la terza con direzione parallela a quella di A, che non permette la costruzione del triangolo. Per poter chiudere il triangolo delle tre potenze, il concio A all'imposta dovrebbe avere peso infinito; con un peso finito e senza attrito ai giunti è difficile controbilanciare la spinta della chiave e degli altri conci che tendono a farla slittare allontanandola dal suo alloggiamento.

Ma – La Hire continua - siccome nella realtà nei giunti di contatto dei conci in pietra c'è attrito, lo scorrimento non si verificherà e di conseguenza non ci sarà bisogno di attenersi rigorosamente alla proporzione determinata per i carichi di ciascuno dei conci di cui la volta è formata; e benché l'attrito non possa essere quantificato, nel caso in cui esso sia presente ai giunti e all'imposta, l'arco potrebbe solo ruotare intorno all'imposta.

#### II.2.1.1 Osservazione

Pierre Varignon (1654-1722) nella *Section II* della sua *Nouvelle Mécanique ou Statique*<sup>104</sup> del 1687, trattando di pesi sostenuti da un certo numero di corde che formano fra loro tutti gli angoli possibili, non si discosta molto dall'analisi che La Hire fa nelle *propositions XVII, XXII e CXXIII* studiate nel suo *Traité de Mécanique* del 1695. Ci si chiede se La Hire possa aver avuto informazione di quanto scritto da Varignon nella *Nouvelle Mécanique* del 1687, la cui pubblicazione è però del 1725, e quindi postuma sia alla sua stesura sia alla morte dell'autore. E' interessante allora controllare quanto scritto da Varignon sugli stessi argomenti trattati da La Hire.

*Tome Premier – Section II - Théorème I.* Quando un peso qualunque K, diretto lungo la sua retta d'azione KX, è sostenuto solo da due corde GP e HR tenute dalle due potenze P e R, in equilibrio con esso, le direzioni KX, PG e RH del peso e delle due potenze staranno sempre sullo stesso piano; tutte e tre passeranno per uno stesso punto A, o saranno fra loro parallele, in

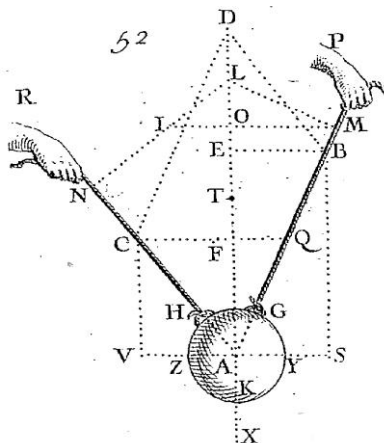
---

<sup>103</sup> La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique*, *ibidem*, pag. 317 : “et c'est ce qui doit arriver à ce voussoirs A dans la supposition des lits infiniment polis.”

<sup>104</sup> Varignon P., 1687, *Nouvelle Mécanique ou statique* dont le projet fut donné en 1687, 2 tomes, opera postuma, Paris, 1725.



modo tale che la direzione XK del peso K passi sempre fra le altre due direzioni PG e RH (Fig. 2.16).<sup>105</sup>



**Fig. 2.16.** *Nouvelle Mécanique*, Plan. 7, Fig. 52.

Dimostrazione: In caso di equilibrio, la risultante delle potenze P e R, sarà sempre uguale al peso K e la sua direzione sarà la sua retta d'azione XK; per analogia, il peso K non è altro che la potenza X, potenza con direzione HK che sostiene le potenze A e B della proposition XVII studiata da La Hire.

Sempre in caso di equilibrio, sulla direzione XK, che attraversa l'angolo PAR e passa per il punto A, quale intersezione del peso K con le due potenze P e R, si prenda un punto D arbitrario tale che AD diventi la diagonale del parallelogramma ABDC che avrà come lati AB e AC, paralleli rispettivamente alle direzioni delle corde PG e RH.

Poiché il peso K è sostenuto dalle potenze P e R, in caso di equilibrio tale peso K sarà la forza risultante di queste due potenze diretta lungo la stessa retta d'azione XK ma con verso opposto, questa forza K sarà, non soltanto uguale ed opposta al peso K ma essa starà a ciascuna di queste potenze P e R, come la diagonale AD del parallelogramma ABDC starà a ciascuno dei lati AB e AC:<sup>106</sup>

$$\begin{aligned} K : P &:= AD : AB \\ K : R &= AD : AC \end{aligned} \tag{2.30}$$

da cui risulterà che:

$$P : R = AB : AC \tag{2.31}$$

Regola del parallelogramma. Per l'equilibrio del sistema accadrà che le potenze P, R tireranno il peso K lungo KX in direzione D e

<sup>105</sup> Varignon P., 1687, *Nouvelle Mécanique ou statique*, tome premier, Paris, 1725, pag. 94.

<sup>106</sup> Varignon P., 1687, *Nouvelle Mécanique ou statique*, *ibidem*, pag. 95.

contemporaneamente il peso K tirerà con uguale intensità lungo KX, in direzione opposta verso A.<sup>107</sup>

*Corollaire I.* Come conseguenza, se da un punto qualsiasi L sulla diagonale AD del parallelogramma ABDC, si tracciano le perpendicolari LM, LN sulle direzioni AP, AR delle potenze P, R, il rapporto fra le potenze P e R sarà uguale al rapporto fra la perpendicolare LN alla direzione AR della potenza R e la perpendicolare LM alla direzione AP della potenza P:<sup>108</sup>

$$P : R = LN : LM \quad (2.32)$$

Questa proporzione è la stessa che La Hire, in base ad un principio di analogia, sfruttando le proprietà della leva, fornisce nella *proposition XVII*, (2.10).

A questo punto, Varignon continua scrivendo che in caso di equilibrio fra il peso K e le due potenze P e R, il prodotto di queste due potenze, P e R, per le perpendicolari LM e LN, tracciate da un punto qualsiasi L sulla retta d'azione XK del peso K, sarà sempre uguale fra loro:

$$P \times LM = R \times LN \quad (2.33)$$

*Corollaire II.* Se AL è il seno dell'angolo PAR, le perpendicolari LN e LM saranno rispettivamente i seni degli angoli LAN e LAM che le loro direzioni AP e AR formano con la direzione KX del peso K, come conseguenza si otterrà:

$$P : R = \sin LAN : \sin LAM \quad (2.34)$$

oppure, considerando gli angoli complementari RAX, PAX e PAR si avrà:

$$K : P : R = \sin PAR : \sin RAX : \sin PAX \quad (2.35)$$

*Corollaire VI.* Se si individua un altro triangolo ILM (in rosso in Fig. 2.17) di tre lati LM, LI, MI, perpendicolari in M, N e O rispettivamente alle tre direzioni AP, AR e AX delle tre potenze P, R, K; si può vedere come il rapporto fra i tre lati LM, LI, MI del triangolo ILM sia uguale al rapporto fra i seni degli angoli DAR, DAP, PAR:

$$LM : LI : MI = \sin DAR : \sin DAP : \sin PAR \quad (2.36)$$

o dei loro complementari RAX, PAX, PAR:

$$LM : LI : MI = \sin RAX : \sin PAX : \sin PAR \quad (2.37)$$

quindi, il rapporto fra le tre potenze P, R, K, è uguale al rapporto fra le tre perpendicolari LM, LI, MI:

$$P : R : K = LM : LI : MI \quad (2.38)$$

<sup>107</sup> Varignon P., 1687, *Nouvelle Mécanique ou statique*, *ibidem*, pag. 96.

<sup>108</sup> Varignon P., 1687, *Nouvelle Mécanique ou statique*, *ibidem*, pag. 99.

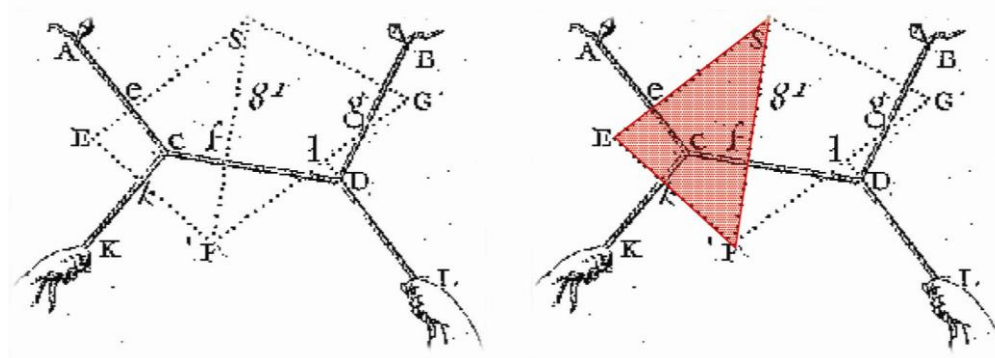


*Théorème IX.* Con riferimento alla Fig. 2.16, alla corda ACDB del *Théorème VIII*, tenuta ferma alle due estremità A e, B siano applicate due potenze K e L in due punti qualsiasi C e D della corda, lungo le direzioni CK e LD. Si prenda un punto qualsiasi S nel piano del poligono ACDB e da esso si traccino le perpendicolari Se, Sf e Sg ai tre lati AC, CD e DB, i cui punti di intersezione saranno rispettivamente e, f e g. Inoltre, se si traccia la perpendicolare ad una delle due direzioni delle due potenze K e L, ad esempio la perpendicolare a CK passante per il punto generico k, essa individuerà il punto E dato dall'intersezione con Se, ed il punto F dato dall'intersezione con Sf; se poi dal punto F si traccia la perpendicolare alla direzione DL della potenza L si individuerà il punto l su DL ed il punto G su Sg (Fig.2.18).

In caso di equilibrio le due potenze K e L staranno fra loro come le basi EF e FG, dei due triangoli ESF e FSG:

$$K : L = EF : FG \quad (2.40)$$

in tal caso le due potenze K e L manterranno la corda ACDB nella posizione data.<sup>114</sup>



**Fig. 2.18.** *Nouvelle Mécanique, Plan. 10, Fig. 81.*

Dimostrazione: In caso di equilibrio, ciascuno dei tratti della corda AC, CD, DB, è tirato dalle forze e, f, g, nei due sensi opposti, ad esempio la forza e tira il tratto di corda AC contemporaneamente da C verso A e da A verso C.

Poiché, inoltre, i tre lati SF, EF, SF, del triangolo ESF sono perpendicolari alle direzioni CA, CK, CD delle tre forze e, K, f, per il *Théorème I* essi devono stare fra loro come le tre forze:

$$e : K : f = ES : EF : SF \quad (2.41)$$

e analogamente per il triangolo SFG:

$$f : L : g = SF : FG : GS \quad (2.42)$$

<sup>114</sup> Varignon P., 1687, *Nouvelle Mécanique ou statique, ibidem*, pag. 182.

Mettendo in relazione i due triangoli si ottiene:

$$K : f = EF : SF \quad \text{e} \quad f : L = FS : FG \quad (2.43)$$

da cui:

$$K : L = EF : FG \quad (2.40)$$

Si noti come il triangolo evidenziato in rosso in Fig. 2.18 sia simile al triangolo costruito da La Hire nella *proposition XXII* in cui erano date le direzioni AK, XK, BK di tre potenze A, X, B, che concorrevano nel punto K, e bisognava trovare i rapporti fra queste tre potenze in modo che ci fosse equilibrio fra loro.

*Corollario IV-V-VI-VII-VIII.* Nei punti C, D, P, Q, di una curva ACD, si applichino i pesi K, L, M, N, (le cui direzioni sono parallele fra loro), in modo tale che la corda assuma la forma di un poligono ACDPQB (Fig 2.19).

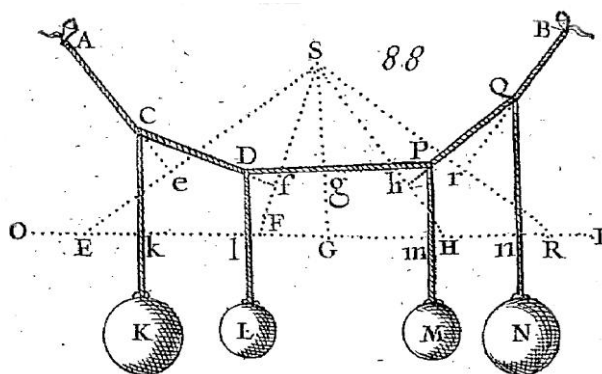


Fig. 2.19. *Nouvelle Mécanique, Plan.11, Fig. 88.*

Si disegni un'orizzontale OI perpendicolare alle direzioni dei pesi nei punti k, l, m, n, e da un punto S arbitrario si traccino le perpendicolari SE, SF, SG, SH, SR, alle porzioni di corda AC, CD, DP, PQ, QB. Per l'equilibrio del sistema ed il mantenimento della posizione della corda ACD il rapporto fra tali pesi K, L, M, N, deve essere uguale al rapporto fra i segmenti EF, FG, GH, HR, intercettati su OI dalle perpendicolari SE, SF, SG, SH, SR.<sup>115</sup>

I pesi sono quindi proporzionali ai segmenti EF, FG, GH, HR.

La corda ACD potrebbe assumere la forma di un arco uguale o minore ad un quarto di cerchio ACDPQB (Fig. 2.20) con centro in S e divisa in parti uguali infinitamente piccole AC, CD, DP, PQ. Le estremità A e B della corda ACD la tengono ferma in questa posizione con una forza quasi infinita. Nei punti estremi C, D, P, Q, delle parti uguali AC, CD, DP, PQ, sono applicati i pesi K, L, M, N, le cui direzioni sono parallele fra loro e

<sup>115</sup> Varignon P., 1687, *Nouvelle Mécanique ou statique, ibidem*, pagg. 187, 188.

perpendicolari in k, l, m, n, all'orizzontale OI, tangente alla corda nel suo punto più basso A.

Dal centro S si tracciano le secanti la corda SE, SF, SG, SH, SR, nei centri e, f, g, h, r, delle parti uguali AC, CD, DP, PQ, che intersecano l'orizzontale OI nei punti E, F, G, H, R.

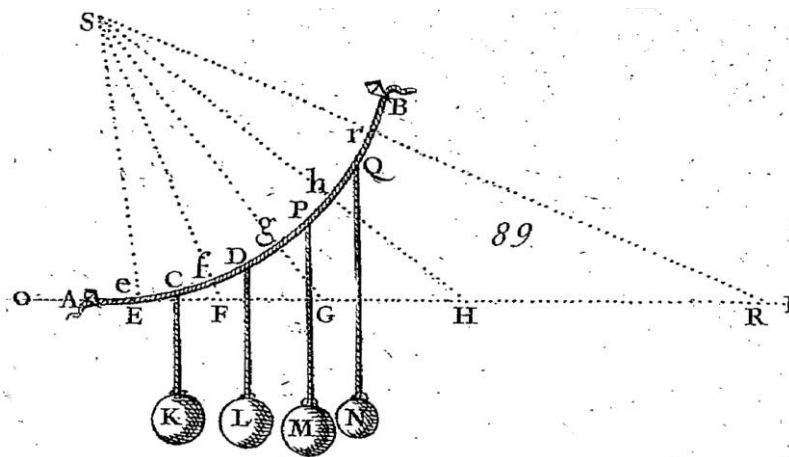


Fig. 2.20. *Nouvelle Mécanique, Plan 11, Fig. 89.*

Per quanto detto sulla corda di Fig. 2.18, anche in questo particolare caso i pesi K, L, M, N, sono proporzionali ai segmenti EF, FG, GH, HR, delle tangenti AE, AF, AG, AH, AR, degli archi circolari Ae, Af, Ag, Ah, Ar, che manterranno la corda ACD nella posizione iniziale e garantiranno l'equilibrio del sistema.

Nel caso in cui la corda ACD assuma una curvatura qualsiasi ACDPQB, il rapporto fra i pesi K, L, M, N, sarà uguale al rapporto fra i segmenti EF, FG, GH e HR - perpendicolari alle direzioni CK, DL, PM e QN dei pesi - i cui punti estremi E, F, G, H e R sono i punti d'intersezione tra l'orizzontale OI e le perpendicolari SE, SF, SG, SH e SR tracciate da un punto qualsiasi S<sup>116</sup> ai lati uguali AC, CD, DP, PQ e QB della corda. Questi lati, essendo infinitamente piccoli risulteranno tangenti alla curva nei punti estremi C, D, P e Q del poligono ACDPQB a cui la curva sarà inevitabilmente ridotta. Nei punti C, D, P e Q saranno sospesi i pesi K, L, M e N in modo tale che, per l'equilibrio del sistema e per la curvatura che si vuole far assumere alla corda, i rapporti fra i segmenti EF, FG, GH e HR ed i pesi ad essi corrispondenti devono essere costanti ed uguali fra loro:

$$\frac{EF}{K}, \quad \frac{FG}{L}, \quad \frac{GH}{M}, \quad \frac{HR}{N} \quad (2.41)$$

e che il loro numeratore EF, FG, GH, HR, sia una delle parti dell'orizzontale OI, perpendicolare alle direzioni CK, DL, PM, QN, dei pesi K, L, M, N.

<sup>116</sup> Il punto S è preso sullo stesso piano della curvatura o del poligono ACDPQB.

Riepilogando, i segmenti EF, FG, GH, HR, sono le parti di una stessa linea dritta OI perpendicolare alle direzioni CK, DL, PM, QN dei pesi K, L, M, N, individuate su di essa dalle perpendicolari SE, SF, SG, SH, SR, tracciate da un punto qualsiasi S ai lati del poligono o alle tangenti alla curva ACDPQB che la corda deve formare sotto l'azione dei pesi K, L, M, N, ciascuno dei quali è applicato nei punti C, D, P, Q, punti d'intersezione di due tangenti contigue alla curva o spigoli del poligono in cui la curva degenera.

Reciprocamente, se saranno queste le frazioni, i pesi staranno in equilibrio fra loro e manterranno la posizione data della corda, oppure gliene faranno assumere una nel caso in cui non ce l'abbia.<sup>117</sup>

Facendo un parallelismo fra i *Corollari VI-VII* del *Théorème IX* di Varignon e la *Proposition CXXIII* di La Hire possiamo concludere che i due, affrontando il problema di quali pesi applicare ad una corda in modo che essa possa assumere la forma di una qualsivoglia curva, arrivano allo stesso risultato: per l'equilibrio i pesi saranno proporzionali ai segmenti individuati sull'orizzontale OI (2.41) (2.29).

Il principio che sta alla base sia del *Théorème VIII* di Varignon sia della *proposition XXII* di La Hire è quello dell'equilibrio di tre potenze che concorrono in un punto: in entrambi i casi il rapporto fra le tre potenze è uguale al rapporto fra le loro tre perpendicolari che formano necessariamente un triangolo.

Nel caso specifico della fune che assume la forma di una curva, si può notare che La Hire applica i pesi nei punti d'intersezione delle tangenti alla curva nei punti estremi delle parti uguali in cui la fune è suddivisa, invece Varignon assimila le corde sottese dalle parti uguali della fune - considerate come infinitamente piccole - alle tangenti alla curva ed applica i pesi nei loro punti estremi. È chiaro che il risultato non cambia.

Si noti, infine che Varignon si ferma al problema della forma da dare ad una corda e non “capovolge” il problema, come fa La Hire nella *Propositions CXXV*, in cui ricerca l'equilibrio dei conci di un arco.

## II.2.2 Memoria del 1712

L'ultima affermazione del *Traité de Mécanique* servirà a La Hire per affrontare il problema del miglior dimensionamento dei piedritti di un portale nella memoria del 1712, caratterizzata dalla stessa introduzione della *propositions CXXV* del *Traité*:

È uno dei Problemi più difficili in Architettura, quello di conoscere la forza che devono avere i piedritti delle Volte per sostenere la spinta, e gli Architetti, fino ad ora, non hanno trovato alcuna regola certa per determinarla. Questo problema appartiene alla Meccanica ed è con

<sup>117</sup> Varignon P., 1687, *Nouvelle Mécanique ou statique*, *ibidem*, pagg. 189, 190.





essa, deve poggiare sull'altro piedritto.<sup>120</sup>

E continua:

Si vede, allora, che, quando la parte superiore LMF dell'arco spinge con il suo peso sul punto L, seguendo la direzione dei corpi pesanti per allontanare il piedritto HSIB unito alla parte dell'arco ILM, questo piedritto essendo poggiato sulla fondazione HS tende a sollevarsi sul suo punto H, in cui resiste alla spinta, e questo punto H deve essere considerato come l'hypomochlion (fulcro) di un braccio di leva HL caricato del peso del piedritto HI.<sup>121</sup>

Formulando l'ipotesi di spessore e peso specifico costanti per l'arco, La Hire cerca il rapporto fra peso del piedritto e peso del cuneo in chiave che corrisponde ad una condizione limite di equilibrio. Egli osserva che il cuneo costituito dalla parte superiore della volta LMF, al di sopra del giunto di rottura - arbitrariamente collocato a 45° - scivolando per peso proprio rispetto alla direzione del giunto di rottura, tende a far ruotare il piedritto solidale con la restante porzione della volta intorno al punto H, che diventa fulcro del braccio di leva HL dal momento che il contatto fra piedritto e cuneo è mantenuto in L. Inoltre sul braccio di leva HL gravano il peso del piedritto ed il peso della parte inferiore della volta, i cui bracci - passanti per H e perpendicolari alla direzione verticale dei pesi - sono quindi lungo HA.

La proporzione corrispondente all'equilibrio limite fornita da La Hire è calcolata, dunque, considerando una leva a gomito (angolare) LHA, con bracci HL e HA, e con il ricorso ad una spinta immaginaria D, applicata in L, ortogonale al braccio HL, ma equivalente all'azione che il cuneo FML esercita sulla parte inferiore della volta e sul piedritto considerati come pezzo unico MLISHB.

La Hire afferma inoltre che l'azione del corpo LMF, che agisce lungo LM, tende a spingere in fuori il punto L del braccio HL della leva per l'azione della potenza D che spinge all'estremità L di tale leva secondo la

---

<sup>120</sup> La Hire P. de, 1712, *Sur la construction des voûtes dans les édifices*, *ibidem*, pag. 70 : *Soit donc dans la figure suivante un Berceau ou Voûte IMFN en plein cintre, dont le centre est C, & l'on suppose tous les Voussoirs depuis le joint LM & sont opposés de l'autre coté comme une seule pierre, & dont la moitié soit LMF, le point F étant le haut de la clef. La partie inférieure ILM de cette Voûte pose sur le pied-droit ISHB où l'on suppose aussi qu'elle est fortement attachée, ensorte qu'elle ne fait avec elle que comme une seule pierre. On ne considère ici que la moitié LMH de la partie supérieure de toute la Voûte, laquelle pose sur un des pieds-droits ; car l'autre partie qui lui est égale, doit être posée sur l'autre pied-droit.*

<sup>121</sup> La Hire P. de, 1712, *Sur la construction des voûtes dans les édifices*, *ibidem*, pag. 70 : *On voit donc que lorsque la partie LMF de l'arc fait effort par son poids au point L suivant la direction des corps pesants, pour écarter le pied-droit HSIB joint à la partie de l'arc ILM, ce pied-droit étant posé sur la fondation HS, elle tend à l'élever sur son point H où il résiste à cet effort, & ce point H doit être considéré comme L'hypomochlion d'un bras de levier HL, lequel est chargé de la pesanteur du pied-droit HI.*

direzione LD (Fig. 2.21).

Si rende, quindi, necessario cercare l'equilibrio tra la potenza D, che spinge l'estremità L del braccio HL della leva a gomito LHA, e la resistenza del piedritto unito all'arco ILM che agisce sull'altro braccio HA della stessa leva.<sup>122</sup>

Indicando con  $Q_c$  il peso del corpo LMF, con  $Q_{c_1}$  il peso del corpo ILM, applicato nel baricentro K in direzione KO, e con  $Q_p$  il peso del piedritto ISHB, applicato nel baricentro P in direzione PT, l'equazione che definisce l'equilibrio limite secondo La Hire è:

$$D \cdot HL = Q_p \cdot HT + Q_{c_1} \cdot HO \quad (2.42)$$

Il problema è, allora, la determinazione della spinta D; tale problema consiste nel tradurre l'azione del peso del concio superiore ILM nella potenza D, perpendicolare in L al braccio di leva HL, e nell'esprimere i pesi delle parti stabilizzanti riportandole sui punti appropriati dell'altro braccio della leva.

Per determinare la spinta D La Hire risolve il problema attraverso delle relazioni geometriche tra segmenti rappresentativi delle direzioni degli spostamenti della spinta D e del peso del cuneo  $Q_c$ .

Ma siccome la parte superiore dell'arco LMFN agisce sui due lati in L e in N come un cuneo, la metà del peso  $Q_c$  agirà nel punto L seguendo la direzione LA parallela alla verticale CF, "on sçait par la Mécanique, que" la sua spinta sarà la potenza D che gli dà equilibrio, come LG sta a CG,<sup>123</sup>

si avrà, allora, la seguente proporzione:

$$LG : CG = Q_c : D \quad (2.43)$$

Da cui si ricava la potenza D:

$$D = Q_c \frac{CG}{LG} \quad (2.44)$$

Questa proporzione vede il rapporto fra forze legato al rapporto fra grandezze geometriche, in accordo alla legge della scienza dei pesi governata dalla geometria.<sup>124</sup>

<sup>122</sup> La Hire P. de, 1712, *Sur la construction des voûtes dans les édifices, ibidem*, pag. 71 : *Il faut donc Chercher l'équilibre entre la puissance D contre l'extrémité L du bras HL du levier coudé LHA, & l'effort du pied-droit joint à l'arc ILM sur l'autre bras HA de ce même levier.*

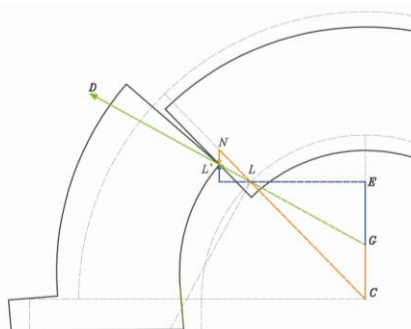
<sup>123</sup> La Hire P. de, 1712, *Sur la construction des voûtes dans les édifices, ibidem*, pag. 72 : *Mais comme la partie supérieure de l'arc LMFN agit des deux cotes en L en N comme un coin, la moitié de sa pésanteur  $Q_c$  agira au point L suivant la direction LA parallèle à la verticale CF, on sçait par la mécanique, que son effort sera la puissance D qui lui fait équilibre, comme LG est à CG.*

<sup>124</sup> Sinopoli A., 2002, *ibidem*.

Questi passaggi, che La Hire giustifica solo con l'espressione *on sçait par la Mécanique* non sono stati chiariti in dettaglio né dallo stesso autore né dai suoi successori probabilmente perché la loro comprensione non è diretta.

La spinta  $D$  è diretta lungo la direzione  $LG$ , mentre il peso  $Q_c$  è diretto lungo la direzione  $CG$ . Se si immagina di ruotare il piedritto intorno al punto  $H$ , in modo che il punto  $L$  compia uno spostamento  $GL$  – corrispondente ad un innalzamento  $GE$  – il nuovo punto di contatto del cuneo con il punto  $L$  del piedritto sarà quello caratterizzato da uno spostamento assoluto verso il basso tale da colmare la distanza verticale fra le due direzioni  $LG$  e  $LC$ , a parità di spostamento  $LG$ ; lo spostamento assoluto di  $Q_c$  è allora  $GC$  (la compressione è più chiara se si riflette la figura di La Hire rispetto alla verticale).

Sembra che la proporzione di La Hire possa essere ottenuta considerando il fatto che il cuneo compie uno spostamento verticale e la sua azione determina la rotazione del piedritto intorno al fulcro di imposta; tale azione è rappresentata da una spinta immaginaria  $D$ , il cui lavoro è equivalente a quello del cuneo, ed il cui spostamento è parallelo alla sua direzione (Fig. 2.22).



**Fig. 2.22.** Schema degli spostamenti.

La proporzione (2.43), che consente di trasformare in termini di equivalenza l'azione del cuneo nell'azione della spinta può, allora, essere reinterpretata come:

$$D \cdot LG = Q_c \cdot CG \quad (2.45)$$

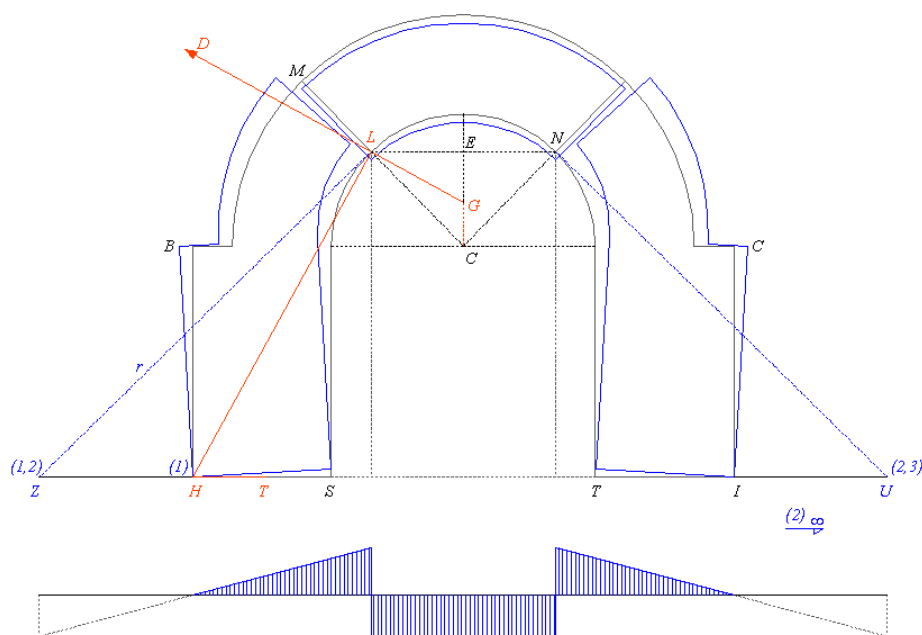
L'equivalenza richiede che il lavoro compiuto dalla spinta  $D$  lungo la direzione  $GL$  sia uguale al lavoro compiuto dal peso  $Q_c$  lungo la direzione  $GC$ .<sup>125</sup>

L'interpretazione proposta può risultare più chiara analizzando il meccanismo del portale di La Hire e la corrispondente catena cinematica (Figg. 2.22, 2.23).

La catena cinematica di Fig. 2.23 per il portale di La Hire mostra come  $H$  sia il centro assoluto di rotazione (1) per il corpo  $LSHBM$  e come il punto  $L$

<sup>125</sup> Sinopoli A., 2002, *ibidem*.

si comporti come un vincolo a molteplicità uno – pendolo semplice - avendo supposto che il giunto LM sia privo di attrito.



**Fig. 2.23.** Meccanismo di collasso e catena cinematica per il portale di La Hire.

Per l'assenza di attrito nel punto di contatto, il centro relativo di istantanea rotazione (1,2) si trova sulla retta  $r$  (ZL) lungo la perpendicolare LZ al giunto di rottura LM e tangente all'intradosso delle reni dell'arco in L; poiché i centri di rotazione (1) e (1,2) devono essere allineati e, per ragioni di simmetria, il centro assoluto di rotazione (2) non può che essere la direzione orizzontale (punto improprio), il centro relativo (1,2) coinciderà con Z, punto intersezione delle rette  $r$ (ZL) e HS. È, quindi, confermato che una rotazione del piedritto intorno al suo punto di base H implica un abbassamento assoluto del cuneo LMFN eguale a GC.

Riepilogando, il meccanismo di collasso del portale di La Hire prevede la rottura in tre parti del portale:

1. il cuneo LMFN, che si estende simmetricamente rispetto alla chiave, per assenza di attrito, scivola lungo i giunti di contatto, - LM ed il suo simmetrico rispetto alla chiave - per  $\alpha_{crit} = 45^\circ$ ;
2. i due conci laterali costituiti dal piedritto e dalla parte dell'arco al di sotto del giunto di rottura, per  $\alpha_{crit} = 45^\circ$ , avendo ipotizzato attrito infinito alle imposte, ruotano verso l'esterno intorno ai loro spigoli di base - H ed il suo simmetrico rispetto al centro dell'arco - per l'azione dovuta al peso del cuneo che viene giù.

Philippe de La Hire, ignorando totalmente l'influenza della coesione ai vari giunti e dell'attrito soltanto lungo i piani di scorrimento, considerò la parte superiore della volta come un cuneo che, agendo simmetricamente da una parte e dall'altra della chiave, rovesciava le parti laterali ed inferiori, per

rotazione intorno allo spigolo esterno della base dei piedritti dove era supposto attrito sufficiente. È chiaro, che l'ipotesi dei giunti lisci (scabri) alle reni della volta non era in realtà ammissibile.<sup>126</sup>

De La Hire viene comunemente considerato il primo autore ad avvicinare il soggetto degli archi e delle volte da un punto di vista scientifico e statico. Molti autori, a lui posteriori, considerarono le sue teorie come il primo valido tentativo di dare spiegazioni meccaniche alle regole costruttive che, fino ad allora, si erano basate sull'esperienza e sull'intuizione.<sup>127</sup>

### II.3 LORENZO MASCHERONI

Nel 1785, l'Abate professore e rettore all'Università di Pavia, Lorenzo Mascheroni (1750-1800) scrive *Nuove Ricerche sull'Equilibrio delle Volte*<sup>128</sup> nelle quali analizza il collasso degli archi attraverso una nuova e matura formulazione di natura assiomatica, basata sull'utilizzazione del T.L.V. assunto come postulato fondamentale, formulazione che corrisponde dunque ad un approccio cinematico; è grazie a queste sue *nuove ricerche* che lo schema ed il meccanismo di collasso del portale proposto da La Hire trovano la loro giustificazione.<sup>129</sup>

I problemi della Meccanica erano stati per lungo tempo considerati come riflessioni geometriche su problemi reali di natura sostanzialmente empirica e nella prefazione Mascheroni scrive:

...sono arti dirette all'uso, e la complicazione delle molteplici circostanze, che alterando lo stato della questione fanno che la sola speculazione riesca a decisioni lontanissime dall'esperienza, facilmente si vede dovere la teorica aver predominio nella Statica; siccome per lo contrario dovere la pratica essere consultata a preferenze nella Meccanica. Questa seconda (la Meccanica) procurando il moto trova gli intoppi nelle resistenze dei mezzi, nelle asprezze delle superfici, nelle tenacità, ed attrazioni varie delle materie, il qual genere di circostanze non è così facile di perfettamente rilevare per via di principj, e molto meno di assoggettare alla precisione del calcolo. Ma dovendosi pure ad esse avere tutto il riguardo da chi desidera conseguire l'effetto dei suoi tentativi, quindi

---

<sup>126</sup> Poncelet, 1852, *Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voûtes*, Tome trente-cinquième, Compte Rendu des stances de l'académie des sciences, Paris, pag. 494.

<sup>127</sup> Benvenuto E., 1991, *ibidem*, pagg. 315-316: *De La Hire is commonly considered the first author to approach the subject of arches and vaults from a scientific and static viewpoint. Many later authors considered his theories to be the first more or less successful attempt to give mechanical reasons for the rules of construction which, until then, had been based solely on experience and intuition.*; pag. 321: *For the introduction of an understanding of the static of the arch, we are indebted to Philippe De La Hire.*

<sup>128</sup> Mascheroni L., 1785, *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte*, Locatelli, Bergamo.

<sup>129</sup> Sinopoli A., 2003 The role of geometry in the theories on vaulted structures by Lorenzo Mascheroni, in S. Huerta (ed.), *Proceedings First International Congress on Construction History*, Instituto Juan de Herrera, 20-24 January, Madrid, **III**, 1865-1873.

è avvenuto che Geometri anche sommi hanno fatto precedere diligentissime e per più capi diversificate prove di fatto, dalle quali raccogliessero qualche legge da tenersi poi nel luogo d'un principio nella risoluzione de' Problemi.<sup>130</sup>

La Meccanica è, quindi, considerata come la scienza dei movimenti, ed è nella geometria dei movimenti - i teoremi della cinematica - che vanno ricercate le soluzioni dei problemi.

Egli continua scrivendo:

Al contrario la statica cercando di introdurre in varj aggregati di corpi equilibrio e quiete trova ajuto al suo scopo in quelle medesime cose che contrastano colla Meccanica; sicché qualora essa abbia colla scorta della Geometria trovato il sito, e la distribuzione di quelle materie, che deggion star ferme, non può per conto delle circostanze annoverate di sopra se non istarsene più sicura.<sup>131</sup>

La statica, invece, non è interessata al movimento ma alla ricerca delle condizioni di equilibrio; essa può trarre vantaggio dall'analisi di tipo geometrico della posizione e della mobilità del sistema con lo scopo di cercare le condizioni che impediscono il movimento e che "terranno a bada" il pericolo di collasso del sistema. Questo tipo di analisi è possibile facendo riferimento al T.L.V.

La metodologia proposta da Mascheroni è basata su assiomi ed ipotesi che lo porteranno alla soluzione dei *Problemi X e XI*, che rappresentano il primo corretto esempio di analisi limite nella storia della Meccanica.

L'analisi geometrica della mobilità da lui proposta, sintesi di un cammino di conoscenze conquistate lungo il corso della storia, rivela la sua completa conoscenza delle caratteristiche dello spostamento infinitesimo di corpo rigido. Mascheroni, prima di affrontare l'equilibrio delle volte, si sofferma su alcuni problemi di equilibrio delle linee dritte. Questi problemi sono preceduti da assiomi ed ipotesi che rappresentano il modello meccanico - geometrico:

1. ipotesi di spostamento infinitesimo del primo ordine, quello che noi oggi chiamiamo spostamento virtuale:

...il moto è lungo una linea infinitesima, perché in tale ipotesi il moto segue con velocità uniforme per tutta la linea, il che è necessario per calcolare la quantità di moto. Inoltre, tale ipotesi è necessaria per ogni caso in cui il centro di gravità di un corpo muovendosi cambi continuamente direzione.<sup>132</sup>

2. la "gravità relativa" è quella che spinge un corpo lungo un piano

---

<sup>130</sup> Mascheroni L., 1785, *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte*, *ibidem*, pag. XXIV.

<sup>131</sup> Mascheroni L., 1785, *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte*, *ibidem*, pag. XXV.

<sup>132</sup> Mascheroni L., 1785, *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte*, *ibidem*, pag. 2.

inclinato. Il prodotto di tale gravità per la massa è il cosiddetto “peso relativo” alla giacitura. E’ questo l’antico e ormai consolidato concetto di *gravitas secundum situm* di Giordano Nemorario.

- l’equilibrio nasce dall’eguaglianza delle “forze” o meglio delle potenze, intese come prodotti dei pesi relativi per le loro velocità - Principio dei Lavori Virtuali - infatti:

si considererà il rapporto che possono avere tra loro due forze contrarie facendo seguire per supposizione il moto di due centri di gravità lungo due linee infinitesime da una parte e dall’altra; uno dei due moti è effetto dell’altro.<sup>133</sup>

Oltre agli assiomi e alle ipotesi, per il modello meccanico-geometrico vanno considerati i seguenti teoremi: *Teorema I*, *Teorema II* o *Teorema di Torricelli* e *Teorema III*.

*Teorema I* o Teorema dell’equilibrio di due pesi collegati per costruzione di macchina.

Dimostrazione: si considerino due pesi  $P_a$  e  $P_b$  inizialmente posizionati in A e B (Fig. 2.24a).

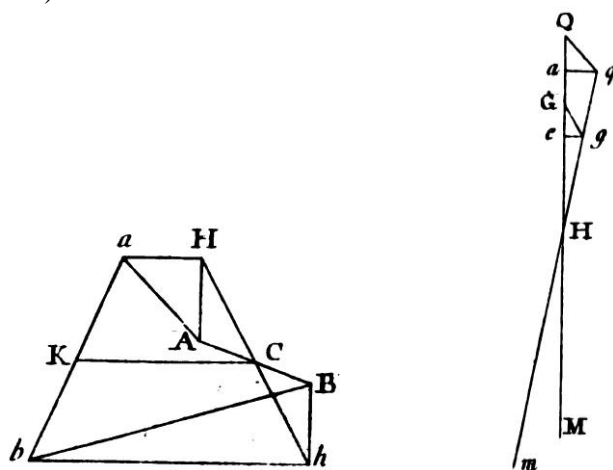


Fig. 2.24a,b. *Nuove ricerche, Tav I, Fig. 1 e Fig. 2.*

Consideriamo la traiettoria infinitesima Aa di  $P_b$  verso l’alto lungo un piano inclinato e, simultaneamente, per costruzione di macchina, la traiettoria infinitesima Bb di  $P_b$  verso il basso. Se lo spostamento avviene nello stesso intervallo di tempo unitario, Aa e Bb rappresentano le velocità virtuali di A e B. Inoltre, AH e Bh rappresentano le proiezioni verticali delle traiettorie Aa e Bb. La condizione di equilibrio del sistema richiede che il prodotto dei pesi per le corrispondenti traiettorie verticali nelle due opposte direzioni deve essere uguale<sup>134</sup>.

$$P_a \cdot AH = P_b \cdot Bh \quad (2.46)$$

<sup>133</sup> Mascheroni L., 1785, *Nuove ricerche sull’equilibrio delle volte*, *ibidem*, pag. 2.

<sup>134</sup> Sinopoli A., 2003, *ibidem*.

La (2.46) ed il teorema I sono diretta conseguenza del concetto di “peso relativo” e della soluzione del problema dell’equilibrio di un peso su di un piano inclinato.

*Teorema II o Teorema di Torricelli:* se c’è equilibrio, cioè se la (2.46) è valida, il centro di gravità di A e B non si abbassa.

*Teorema III o Teorema sulle caratteristiche di spostamento infinitesimo di corpo rigido:*

Se una linea retta fa un moto infinitamente piccolo qualunque, tutti i punti di essa linea fanno un viaggio eguale sulla direzione della medesima linea.<sup>135</sup>

Dimostrazione:

Si consideri l’asta QM (Fig. 2.24b) che, per effetto di uno spostamento infinitesimo, si porta in qm. Abbassata dalla posizione variata di ogni punto la perpendicolare a QM, e individuato lungo l’asta il punto H caratterizzato soltanto da uno spostamento parallelo alla configurazione iniziale QM, si afferma che:  $Hg = He$ ,  $Hq = Ha$  e quindi:  $gq = ea$ .<sup>136</sup>

Dati gli Assiomi, fatte le Ipotesi ed enunciati i Teoremi, Mascheroni passa ad analizzare i vari problemi. Di particolare interesse per la nostra indagine risultano il *Problema X* ed il *Problema XI*, che richiedono però l’analisi e soluzione del *Problema I* e del *Problema II*.

*Problema I:* equilibrio di pesi posti alle estremità di aste inclinate (Fig. 2.25).

Soluzione: Il sistema è costituito da due aste rigide CB e BA incerniate in B. Il peso applicato in B si muove lungo la direzione data dalla rotazione dell’asta CB intorno al punto C, mentre il peso applicato in A scende lungo una traiettoria verticale.

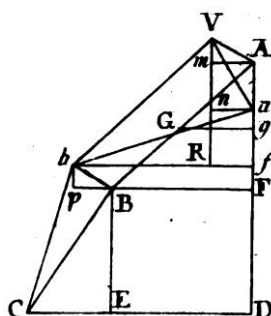


Fig. 2.25. Nuove ricerche, Tav I, Fig. 4.

Si tratta della prima schematizzazione del meccanismo di collasso di un arco simmetrico con la formazione di cinque cerniere: una all’estradosso

<sup>135</sup> Mascheroni L., 1785, *Nuove ricerche sull’equilibrio delle volte*, *ibidem*, pag. 4-5.

<sup>136</sup> Sinopoli A., 2003, *ibidem*.



della chiave, due all'intradosso delle reni – in corrispondenza dei giunti di rottura – e due all'estradosso delle imposte.

Questo modello semplificato non considera il peso delle aste e concentra i pesi alle estremità A e B.<sup>137</sup> Secondo il *Teorema I*, l'equilibrio richiede che il prodotto del peso  $P_b$  in B per la sua traiettoria verticale verso l'alto  $pb$  sia eguale al prodotto del peso  $P_a$  per la sua traiettoria verso il basso  $Aa$ .

$$P_B \cdot pb = P_A \cdot Aa \quad (2.47)$$

Questa dimostrazione è puramente geometrica ed è basata sull'ipotesi che lo spostamento  $bB$  di B sia ortogonale a CB, spostamento virtuale cioè di corpo rigido dovuto alla rotazione  $\delta\theta$  intorno al polo C, per cui:

$$pb = CE\delta\theta_1 = CE \frac{pB}{BE} \quad (2.48)$$

Lo spostamento  $Aa$  di A è considerato come il risultato di uno spostamento verticale  $Vn$  dovuto alla rotazione relativa di A intorno a B, da cui deve essere sottratto lo spostamento verticale  $pb$  dovuto a B, cosicché:

$$Vn = BF\delta\theta_2 = BF \frac{nA}{AF} = pb \frac{BF}{AF} \quad (2.49)$$

e:

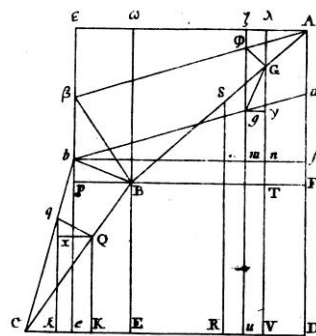
$$Aa = Vn - pb = \left( \frac{BF}{AF} - \frac{CE}{BE} \right) pB \quad (2.50)$$

Allora, per l'equilibrio:

$$P_B \frac{CE}{BE} = P_A \left( \frac{BF}{AF} - \frac{CE}{BE} \right) \quad (2.51)$$

*Problema II*: equilibrio di aste pesanti incernierate (Fig. 2.26).

Dimostrazione: essa è simile a quella del *Problema I*, in questo caso i pesi sono concentrati nei rispettivi centri di gravità Q e G delle due aste.



**Fig. 2.26.** Nuove ricerche, Tav I, Fig. 5.

<sup>137</sup> Sinopoli A., 2003, *ibidem*.

La soluzione è:

$$P_Q \frac{CK}{BE} = P_G \left( \frac{BT}{AF} - \frac{CE}{BE} \right) \quad (2.52)$$

*Problema X*: equilibrio degli archi in presenza di attrito infinito (Fig. 2.26).

Sulla base degli Assiomi, dei *Teoremi I, II, III* e dei risultati forniti dalle soluzioni ai *Problemi I e II*, Mascheroni è pronto ad eseguire con coerenza e rigore l'analisi limite per i *Problemi X e XI*.<sup>138</sup>

Il *Problema X* è così formulato:

Supposto che nell'arco solido LHAONVBM posto sopra le due basi LCRM, NSTO il punto A che si trova alla sommità possa discendere perpendicolarmente aprendosi l'arco in V, e lateralmente in H e P, e ascendendo i due punti B e X, restando sempre congiunte in un pezzo solo le parti HLCRMB, XPOTSN, le quali debbano alzarsi col girare intorno a' due centri C e T, seguendo il tutto come se in C, B, A, X, T vi fossero delle cerniere; trovare la ragione delle due forze.<sup>139</sup>

Soluzione: Data la simmetria del sistema, il problema è stato analizzato per il semiarco (Fig. 2.27).

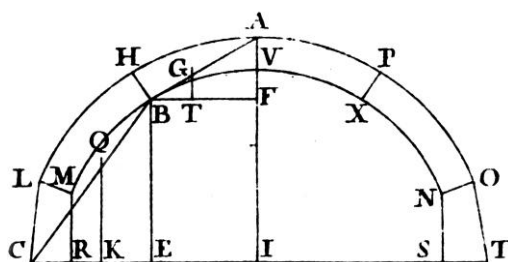


Fig. 2.27. Nuove ricerche, Tav IV, Fig. 11.

La soluzione è ottenuta usando la stessa relazione usata per il *Problema II*. La situazione limite di equilibrio corrisponde alla (2.52).

*Problema XI*: equilibrio degli archi in presenza di attrito infinito alle imposte e privo di attrito ai giunti di rottura (Fig. 2.28).

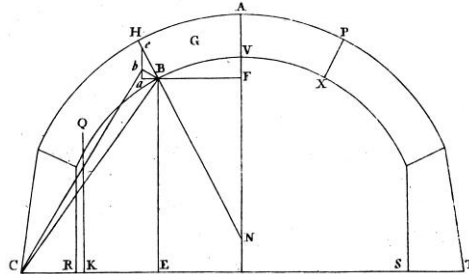
Si tratta dello stesso meccanismo analizzato da De La Hire per il portale, in questo caso il problema è formulato nel modo seguente: Supponendo che il pezzo di arco solido HBVXPAH (Fig. 2.28) discenda perpendicolarmente, e parallelamente a sé stesso, e facendo cogli sdruciolamenti de' lati Hb, PX alzare i due pezzi HCRB, PTSX giranti intorno i centri C e T, trovare la ragione delle forze contrarie.<sup>140</sup>

<sup>138</sup> Sinopoli A., 2003, *ibidem*.

<sup>139</sup> Mascheroni L., 1785, *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte, ibidem*, pag. 28.

<sup>140</sup> Mascheroni L., 1785, *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte, ibidem*, pag. 29.

Soluzione: Data la simmetria del sistema, anche in questo caso, il problema è analizzato per il semiarco. Al momento del collasso il concio in chiave si sposta verticalmente verso il basso pur mantenendo il contatto nel punto B - intradosso del giunto di rottura HB alle reni – con il concio sottostante che, nel frattempo, ruota verso l'esterno intorno al punto C, estradosso del giunto di imposta.



**Fig. 2.28.** Nuove ricerche, Tav IV, Fig. 13.

Dal momento che, in accordo con il *Teorema III*, bB è ortogonale a CB, dalla soluzione del Problema II deriva che gli spostamenti verticali ba del punto B e  $y_Q$  del baricentro Q, dovuti alla rotazione infinitesima  $\delta\theta_1$  del concio di imposta intorno a C, sono rispettivamente:

$$ba = CE\delta\theta_1 = CE \frac{Ba}{BE} \quad (2.53a)$$

e:

$$y_Q = CK\delta\theta_1 = CK \frac{Ba}{BE} \quad (2.53b)$$

Lo spostamento verticale assoluto di tutti i punti del concio in chiave e, quindi, anche del baricentro G, è considerato come la somma algebrica dello spostamento verticale relativo verso il basso ea di G rispetto a B più lo spostamento di trascinamento verso l'alto ab di B.

Tale somma corrisponde a:

$$y_G = eb = ea - ab = BA \frac{FN}{BF} - Ba \frac{CE}{BE} \quad (2.54a)$$

La condizione limite per l'equilibrio corrisponde allora a:

$$P_Q \frac{CK}{BE} = P_G \left( \frac{FN}{BF} - \frac{CE}{BE} \right) \quad (2.54b)$$

È solo dopo aver letto Mascheroni che lo schema del portale di De La Hire ed il metodo proposto per calcolare la spinta D responsabile del ribaltamento del piedritto possono essere compresi e giustificati. Soprattutto, gli assiomi che Mascheroni stabilisce a fondamento della sua teoria, considerano come sapere acquisito il fatto che, in un sistema

costituito da due pesi uniti per costruzione di macchina (meccanismo o dispositivo), l'equilibrio è garantito se il prodotto dei due pesi – siano essi assoluti o relativi perché su traiettorie verticali o su piani inclinati – per le corrispondenti velocità virtuali è bilanciato. Ricordando la proporzione di La Hire:

$$LG : CG = Q_c : D \quad (2.43)$$

grazie alle dimostrazioni delle *nuove ricerche* di Mascheroni possiamo affermare che l'equilibrio dei due pesi collegati per costruzione di macchina corrisponde ad un primo peso che si muove su un piano inclinato compiendo un movimento verso l'alto  $GL$  – e tale peso è il “peso relativo”  $D$ , e ad un secondo peso  $Q_c$  - cuneo in chiave – che si muove verticalmente scivolando lungo il giunto di rottura  $ML$  alle reni dell'arco.

Per le cose dette, sembrerebbe che la conoscenza della geometria e delle caratteristiche cinematiche nelle cosiddette “questioni meccaniche” fossero molto più diffuse e ben consolidate di quanto si potrebbe desumere dall'analisi dei testi storici. E, come afferma Mascheroni nella prefazione alle sue *Nuove Ricerche*, il ruolo della geometria, intesa come geometria dei movimenti, era la reale area di ricerca in Meccanica, avendo assunto il Principio delle Velocità Virtuali come unico postulato fondamentale.<sup>141</sup>

---

<sup>141</sup> Sinopoli A., 2003, *ibidem*.

### III. CHARLES AUGUSTIN COULOMB

#### III.1. INTRODUZIONE AL MÉMOIRE

Nel 1773 Charles Augustin Coulomb, nel suo mémoire *Applications des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*,<sup>142</sup> ha indicato per primo, in modo preciso, le reali condizioni dell'equilibrio e della stabilità delle volte a botte supposte simmetriche rispetto al piano verticale che le divide in chiave in due parti uguali (archi circolari estradossati parallelamente). Egli, nel suo metodo, fa intervenire la coesione e l'attrito sui piani dei giunti, con il risultato che i conci, oltre a poter scivolare gli uni sugli altri, possono anche ruotare intorno agli spigoli estremi dei giunti, nelle aree della volta in cui virtualmente ci può essere rottura.<sup>143</sup>

Dopo i primi studi di carattere scientifico di La Hire sull'arco, si deve aspettare la fine del XVIII secolo per avere con Charles Augustin Coulomb la prima formulazione corretta ed esaustiva sul problema dell'equilibrio dell'arco, che in linguaggio moderno potremmo definire come approccio tipo *lower bound* della teoria della rigido-plasticità.

Nel suo mémoire Coulomb scrive:

Concludo questa memoria con l'intenzione di ricercare le dimensioni delle volte, i loro punti di rottura, i limiti che circoscrivono il loro stato di equilibrio, allorché aderenza e attrito contribuiscano alla loro resistenza.<sup>144</sup>

L'attrito e la coesione non sono delle forze attive come la forza di gravità, che esercita il suo effetto sempre per intero, esse sono solo delle forze coercitive; esse si stimano attraverso i limiti della loro resistenza...Io qui supporrò che la resistenza dovuta all'attrito è proporzionale alla pressione, come l'ha trovato M. Amontons<sup>145</sup>;

---

<sup>142</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, Mémoires de Mathématique & de Physique, Présentés à l'Académie Royale des Sciences par Divers Savans, vol. 7, pp. 343-382, année 1773, Paris 1776; cfr. Articolo XVIII *De l'équilibre des voûtes, en ayant égard au frottement & à la cohésion*.

<sup>143</sup> Poncelet, 1852, *Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voûtes*, *ibidem*, pag. 496.

<sup>144</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, *ibidem*; pag. 345: *Enfin on termine ce mémoire par chercher les dimensions des voûtes, leurs points de rupture, les limites qui circonscrivent leur état de repos, lorsque la cohésion & le frottement contribuent à leur solidité*.

<sup>145</sup> Amontons Guillaume, 1699, *De la resistance causée dans les Machines, tant par les frottemens des parties qui les composent, que par la roideur des cordes qu'on y employe, et la maniere de calculer l'un et l'autre*, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Troisième édition*, Paris 1732, pp. 206-222.

sebbene nelle grosse masse l'attrito non segue esattamente questa legge.<sup>146</sup>

La coesione si misura tramite la resistenza che i corpi solidi oppongono alla disunione diretta delle loro parti. Ogni elemento dei solidi, quando essi sono omogenei, è dotato di questa stessa resistenza. La coesione totale è proporzionale al numero delle parti da dividere e di conseguenza alla superficie di rottura dei corpi.<sup>147</sup>

Nella teoria, inoltre, essendo la curva interna una quantità determinata, anche la lunghezza dei giunti sarà sempre data; quantità che tuttavia gli Architetti variano all'infinito nell'esecuzione.

Ma l'attrito e la coesione tramite la loro resistenza conservano l'equilibrio che la forza di gravità tende a distruggere.

Noi cercheremo nel seguito il modo di far entrare nelle formule delle volte queste nuove forze coercitive.<sup>148</sup>

Le formule trovate, a prescindere dall'attrito e dalla coesione dei giunti, non possono essere di alcuna utilità nella pratica, come se ne sono resi conto tutti i Geometri che si sono occupati di questa materia; così, per ottenere dei risultati affidabili, sono stati obbligati a fondare i loro calcoli su delle supposizioni che li avvicinasero di più alla Natura.

Queste ipotesi consistono solitamente nel considerare le volte come divise in varie parti, e quindi nel cercare le condizioni di equilibrio di queste parti differenti: però questa divisione è fatta in modo arbitrario; per definirla in modo rigoroso, ho cercato attraverso le regole dei massimi e dei minimi quali siano i veri punti di rottura nelle volte

---

<sup>146</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, ibidem; pag. 347 : *Le frottement et la cohésion ne sont point des forces actives comme la gravité, qui exerce toujours son effet en entier, mais seulement des forces coercitives ; l'on estime ces deux forces par les limites de leur résistance...je supposerai ici que la résistance due au frottement est proportionnelle à la pression, comme l'a trouvé M. Amonons ; quoique dans les grosses masses ne suive pas exactement cette loi.*

<sup>147</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, ibidem; pag. 348 : *La cohésion se mesure par la résistance que les corps solides opposent à la désunion directe de leur parties. Comme chaque éléments solides, lorsqu'ils sont homogènes, est doué de cette même résistance ; la cohésion totale est proportionnelle au nombre des parties à désunir, & par conséquent à la surface de rupture des corps.*

<sup>148</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, ibidem; pag. 374: *Dans la théorie, en outre, la courbe intérieure étant donnée, la longueur du joint est toujours une quantité donnée ; quantité cependant que les Architectes varient à l'infini dans l'exécution. Mais le frottement & la adhérence conservent par leur résistance l'équilibre, que la force de la gravité tend à détruire. Nous chercherons dans la suite la manière de faire entrer dans l'expression des voûtes ces nouvelles forces coercitive.*

molto deboli, e i limiti delle forze che si possono applicare alle volte le cui dimensioni sono determinate.<sup>149</sup>

Nel problema XVIII del mémoire, *De l'équilibre des voûtes, en ayant égard au frottement & à la cohésion*, Coulomb intende determinare i valori limite per l'equilibrio dell'arco.

A tal fine, egli considera un concio di arco, che si estende dalla chiave al giunto Mm e si pone il problema di determinare il valore della spinta H, applicata in un qualunque punto S della chiave, che garantisca l'equilibrio del concio GaMm (Fig. 3.1).

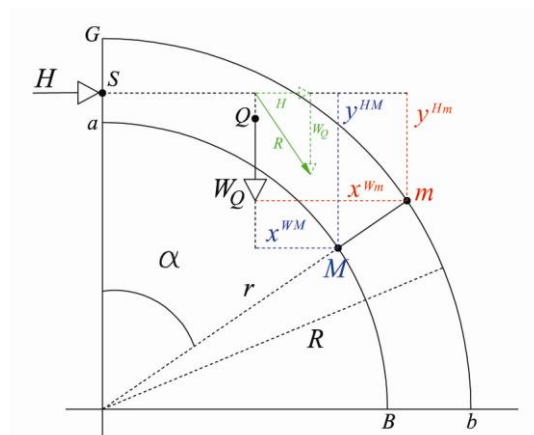


Fig. 3.1. Schema delle forze agenti su un semiarco.

Come applicazione del problema dell'equilibrio di una struttura soggetta ad attrito e di cui non si può ignorare l'estensione geometrica della sezione – che fra l'altro è la garante dell'equilibrio per il carattere unilaterale del contatto tra conci – Coulomb scrive due equazioni di equilibrio limite per ognuno dei due possibili spostamenti generalizzati analizzati: lo scorrimento relativo e la rotazione relativa tra conci contigui.

In una volta per la quale siano assegnate la curva interna aB, (intradosso), e la curva esterna Gb, (estradosso), sono dati anche i giunti Mm perpendicolari agli elementi della curva interna (intradosso ed estradosso sono quindi circolari) : si richiedono i limiti della pressione orizzontale in S che sostiene questa volta, supponendo che

<sup>149</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, ibidem*; pag. 345-346: *Les formules trouvées, en faisant abstraction des frottements & de la cohésion des joints, ne peuvent être d'aucune utilité dans la pratique ; tous les Géomètres qui se sont occupés de cet objet s'en sont aperçus : ainsi, pour avoir des résultats que l'on peut employer, ils ont été obligés de fonder leurs calculs sur des suppositions qui les rapprochent de la Nature. Ces suppositions consistent ordinairement à considérer les voûtes comme divisées en plusieurs parties, & à chercher ensuite les conditions d'équilibre de ces différentes parties : mais comme cette division se fait à peut-près, d'une manière arbitraire ; dans le dessein de l'apprécier, j'ai cherché par les règles le maximis & minimis, quels seroient les véritables points de rupture dans les voûtes trop foibles, & les limites des forces que l'on pourroit appliquer à celle dont les dimensions seroient données.*

essa sia sollecitata dal peso proprio, e sia trattenuta dalla coesione e dall'attrito dei giunti.<sup>150</sup>

Per comprendere il metodo enunciato da Coulomb, si consideri per ragioni di simmetria, la metà destra di un arco semicircolare estradossato parallelamente, e si indichi con  $\alpha$  l'angolo formato dal giunto Mm con la verticale passante per la chiave.

### III.2 EQUILIBRIO LIMITE RISPETTO AGLI SCORRIMENTI

Amontons, nel suo lavoro *De la resistance causée dans les Machines, tant par les frottemens des parties qui les composent, que par la roideur des cordes qu'on y employe, et la maniere de calculer l'un et l'autre*, enunciò le prime due leggi classiche sull'attrito, secondo le quali la forza d'attrito è proporzionale al carico e non dipende dall'area di contatto. Amontons indica la causa dell'attrito nelle asperità di superficie, considerate come ostacoli rigidi oppure come protuberanze elastiche deformate dal corpo in movimento. Nel primo caso l'attrito è dovuto alla forza necessaria per sormontare le asperità, come su un piano inclinato, nel secondo esso è legato alla forza necessaria per deformarle. In entrambi i casi, la forza dipende appunto dal peso totale e non dall'area di contatto.

Coulomb, nella sua *Theorie des machines simples: en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*<sup>151</sup>, riprende i risultati di Amontons e studia l'attrito radente, di rotolamento e delle corde e le applicazioni alle macchine. Coulomb distingue subito fra attrito di primo distacco e attrito dinamico, e li studia separatamente. Si propone di investigare la dipendenza dell'attrito statico da quattro cause: la natura dei materiali in contatto, l'area delle superfici, il carico che le superfici sopportano, la durata del contatto e la dipendenza dell'attrito dinamico dalle prime tre cause precedenti e in più dalla velocità. Egli trova sempre una relazione di proporzionalità abbastanza precisa fra forza d'attrito e carico.

Per quanto riguarda la spiegazione fisica dell'attrito, Coulomb dice, vi sono due possibili cause: l'incastro delle asperità delle superfici, che possono liberarsi solo piegandosi, rompendosi, sollevandosi le une sulle altre; oppure bisogna supporre che le molecole delle due superfici in contatto esercitano, a causa della loro vicinanza, una coesione che si deve

---

<sup>150</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, *ibidem*; pag. 377 : *Dans une voûte, la courbe intérieure aB, la courbe extérieure Gb étant données, les joints Mm, perpendiculaires aux élémens de la courbe intérieure, seront aussi donnés : l'on demande les limites de la pression horizontale en S, qui soutiendra cette voûte, en supposant qu'elle soit sollicitée par la propre pesanteur, retenue par la cohésion et le frottement des joints.*

<sup>151</sup> Coulomb Charles Augustin, 1785, *Theorie des machines simples: en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*, *Collection des Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, vol. X, pp. 161-342, Nuova edizione: Paris, Bachelier, 1821.



vincere per produrre il movimento: solo l'esperienza potrà farci decidere sulla realtà di queste differenti cause.<sup>152</sup>

La coesione influirebbe solo pochissimo, perché essa agirebbe in modo proporzionale al numero dei punti di contatto o all'area delle superfici, mentre si è visto che l'attrito è quasi sempre indipendente dall'area.

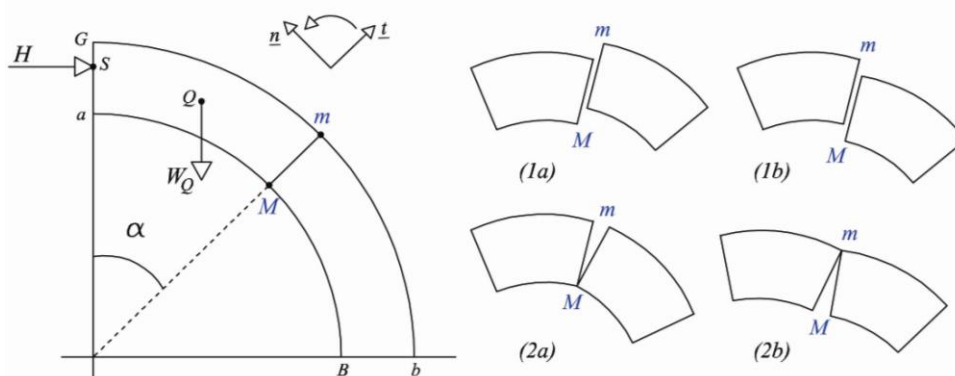
Tuttavia la coesione non è esattamente nulla ed occorre aver cura di determinarla nelle diverse situazioni.<sup>153</sup>

Essa si aggiunge all'effetto proporzionale al carico, con una regola del tipo  $F = \mu W$ . Coulomb propone quindi un'interpretazione dell'attrito in termini di asperità superficiali che s'incastano di più o di meno secondo il carico e si deformano lateralmente sotto una sollecitazione tangenziale.

Con questi presupposti e ignorando la condizione di equilibrio in direzione normale al giunto garantita da un valore dello sforzo normale non nullo corrispondente a compressione, come già detto, Coulomb considera quattro situazioni di equilibrio limite, due per ogni spostamento generalizzato possibile: tali situazioni limite sono quelle che immediatamente precedono la rottura locale secondo gli schemi rappresentati in Fig. 3.2.

La condizione per l'equilibrio in direzione tangente al giunto richiede che la proiezione lungo la direzione  $Mm$  della risultante del peso del concio  $W_Q$  e della spinta  $H$  sia interna al cono d'attrito di Coulomb, il cui asse è diretto come la normale al giunto  $Mm$ ; questo a prescindere dal punto  $S$  di applicazione della spinta  $H$  in chiave.

La condizione per l'equilibrio in direzione tangente al giunto richiede che la proiezione lungo la direzione  $Mm$  della risultante del peso del concio  $W_Q$  e della spinta  $H$  sia interna al cono d'attrito di Coulomb, il cui asse è diretto come la normale al giunto  $Mm$ ; questo a prescindere dal punto  $S$  di applicazione della spinta  $H$  in chiave.



**Fig. 3.2.** Possibili spostamenti generalizzati: lo scorrimento relativo e la rotazione relativa tra conci contigui.

<sup>152</sup> Coulomb Charles Augustin, 1785, *Theorie des machines simples: en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*, *ibidem*, pag. 5.

<sup>153</sup> Coulomb Charles Augustin, 1785, *Theorie des machines simples: en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*, *ibidem*, pag.4.

In linguaggio moderno<sup>154</sup> tale condizione richiede che:

$$|T| \leq \mu N \quad (3.1)$$

che corrisponde alle seguenti due disequazioni, in relazione al valore di T:

$$\begin{array}{ll} T \leq \mu N & \text{per: } T \geq 0 \\ T \geq -\mu N & \text{per: } T < 0 \end{array} \quad (3.2)$$

Coulomb scrive:

Io supporrò inizialmente che la porzione GaMm sia un tutt'uno solido, di sorta che essa non possa dividersi se non seguendo Mm. Affinché questa porzione di volta sia in equilibrio è dunque necessario che la forza H orizzontale, applicata in S sia tale da impedirle di scorrere secondo Mm; ma la componente di H secondo Mm è  $H \sin \alpha$ , la componente di  $W_Q$  (peso di aGMm) secondo mM è  $W \cos \alpha$ , la componente di H perpendicolare a Mm è  $H \cos \alpha$ , e la componente di  $W_Q$  perpendicolare a Mm è  $W \sin \alpha$ .<sup>155</sup>

È da precisare che gli scorrimenti che si considerano, verso il basso  $\delta r^t < 0$  o verso l'alto  $\delta r^t > 0$ , sono sempre concordi alla forza attiva  $R^{(a,t)}$ .

Con riferimento alle Figg. 3.3, 3.4 ed alle corrispondenti convenzioni di segno, le espressioni di T e di N, quali risultanti delle forze reattive  $R^{(r,t)}$  e  $R^{(r,n)}$ , sono:

$$\begin{array}{l} T = W \cos \alpha - H \sin \alpha \\ N = -W \sin \alpha + H \cos \alpha \end{array} \quad (3.3)$$

Dal momento che T e N sono reazioni al giunto, se  $T > 0$ , tale valore positivo della reazione e la corrispondente limitazione di Coulomb si riferiscono a scorrimenti possibili verso il basso ( $\delta r^t < 0$ , in base al sistema di versori associati al giunto); mentre, se  $T < 0$ , tale valore negativo e la corrispondente limitazione si riferiscono a scorrimenti possibili verso l'alto  $\delta r^t > 0$ .

Allora, se  $\varphi$  rappresenta l'angolo di apertura del cono di Coulomb per cui:  $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ , e le disequazioni (3.2) sono espresse come funzione del peso

<sup>154</sup> Sinopoli A., Corradi M., Foce F. 1998, *ibidem*.

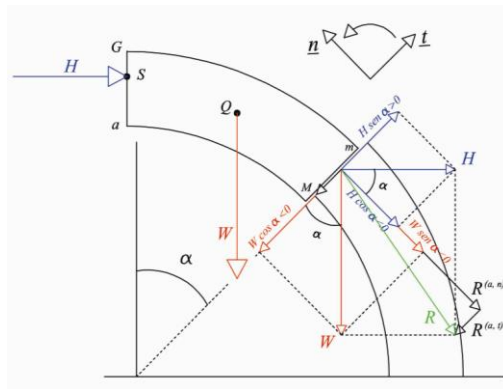
<sup>155</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, ibidem*, pag. 377: *Je suppose d'abord la portion GaMm solide, en sorte qu'elle ne puisse se diviser que suivant Mm, il faut donc, pour que cette portion de voûte soit en équilibre, que la force A soit telle qu'elle l'empêche de glisser suivant mM ; mais la force dépendante de A, décomposée suivant Mm, & dirigée suivant cette même ligne est A sin h. La force parallèle à mM, dépendante de  $\varphi$ ... $\varphi \cos h$ . La force perpendiculaire à mM, dépendante de A... $A \cos h$ . La force perpendiculaire à mM, dépendante de  $\varphi$ ... $\varphi \sin h$ . Ainsi, l'on aura, en ayant égard au frottement & à l'adhérence...pour exprimer l'effort que fait cette portion de voûte pour glisser selon mM ; & dans le cas que A sera seulement suffisant pour la soutenir, l'on aura A.*

W, della spinta H applicata in chiave e dell'angolo  $\alpha$ , si ottiene, per il caso (1a) della Fig. 3.2 e per  $\delta r^t < 0$ :

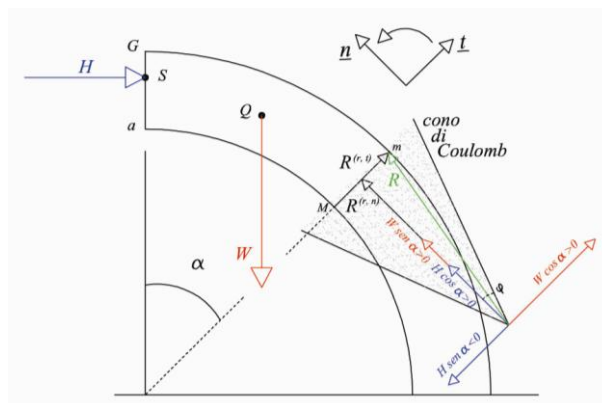
$$T = W \cos \alpha - H \sin \alpha \geq 0 \quad (3.4a)$$

di conseguenza, poiché  $T > 0$ , per la (3.1) dovrà essere:  $T \leq \mu N$ , che in funzione di H e di W fornisce:

$$H \geq \frac{W(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)}{\mu + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{W}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = H_{min}^s \quad (3.4b)$$



**Fig. 3.3a.** Caso (1a) della Fig. 3.2. Schema delle forze attive al giunto per spostamenti del tipo  $\delta r^t < 0$ , corrispondenti a scorrimenti verso il basso.

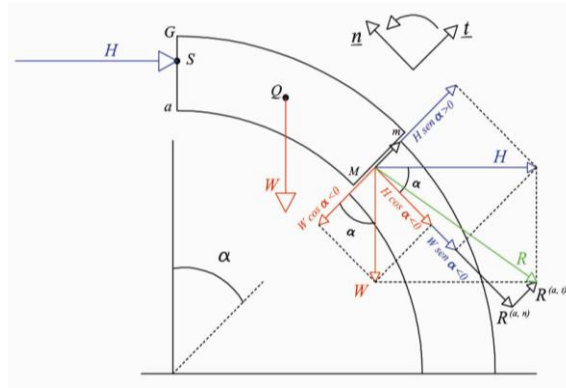


**Fig. 3.3b.** Caso (1a) della Fig. 3.2. Schema delle forze reattive al giunto per spostamenti del tipo  $\delta r^t < 0$ , corrispondenti a scorrimenti verso il basso.

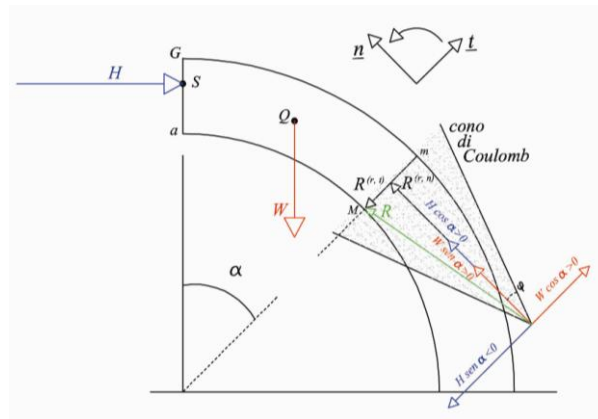
In Fig. 3.5a è rappresentato l'andamento di  $H_{min}^s$  come funzione dell'angolo  $\alpha$ .

Ora siccome per la sua costruzione, la volta può non soltanto scorrere lungo il giunto Mm, ma anche lungo ogni altro, ne consegue che per ottenere la completa sicurezza, H non deve mai essere minore della quantità (trovata) qualunque sia il valore di  $\alpha$ . Così, se si prende il valore  $\alpha$  che dà per H un massimo, allora la forza H, così

determinata, sarà sufficiente a sostenere tutta la volta. Indicherò con  $A_1$  questo massimo.<sup>156</sup>



**Fig. 3.4a.** Caso (1b) della Fig. 3.2. Schema delle forze attive al giunto per spostamenti del tipo  $\delta r^t > 0$ , corrispondenti a scorrimenti verso l'alto.



**Fig. 3.4b.** Caso (1b) della Fig. 3.2. Schema delle forze reattive al giunto per spostamenti del tipo  $\delta r^t > 0$ , corrispondenti a scorrimenti verso l'alto.

Poiché l'espressione a destra della (3.4b) indica al giunto  $\alpha$  il valore minimo di H, per l'equilibrio rispetto agli scorrimenti verso il basso di tutti i giunti dell'arco, H dovrà essere maggiore del massimo rispetto ad  $\alpha$  del valore minimo calcolato in  $\alpha$  e, cioè:

$$H \geq \max_{\alpha} H_{min}^r(\alpha) = A_1 \quad \text{maximum} \quad (3.4c)$$

Tale valore massimo è evidenziato in Fig. 3.5a con la linea di quota corrispondente.

Analogamente, per il caso (1b) della Fig. 3.2 e, cioè, per  $\delta r^t > 0$ :

$$T = W \cos \alpha - H \sin \alpha < 0 \quad (3.5a)$$

<sup>156</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, ibidem, pagg. 377-378: *Or, comme par la construction, la voûte peut non-seulement glisser sur le joint mM, mais même sur tout autre, il fut que pour que la voûte ne se rompe point, A ne doit jamais être moindre que la quantité ..., quelle que soit la valeur h. Ainsi, si l'on prend la valeur de h, telle qu'elle donne pour A un maximum, pour lors la constante A, ainsi déterminée, sera suffisante pour soutenir toute la voûte Je suppose que  $A_1$  exprime ce maximum.*

Di conseguenza, poiché  $T < 0$  dovrà essere:  $T \geq -\mu N$ , che fornisce:

$$\begin{cases} H > 0 & \text{per } \operatorname{tg}\alpha < \mu \\ H \leq \frac{W(1+\mu \operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha - \mu} = \frac{W}{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)} = H_{max}^s & \text{per } \operatorname{tg}\alpha \geq \mu \end{cases} \quad (3.5b)$$

In Fig. 3.5b è rappresentato l'andamento di  $H_{max}^s$  come funzione dell'angolo  $\alpha$ .

Come si può notare, per  $\operatorname{tg}\alpha < \mu$ , la prima delle disequazioni (3.5b) fornisce un valore minimo che non pone limitazioni ad  $H$  poiché, per definizione, essa è sempre positiva; la limitazione invece si pone per  $\operatorname{tg}\alpha \geq \mu$  che fornisce un valore massimo di  $H$  al giunto  $\alpha$ .

Allora,

.....è necessario che la forza  $H$  sia sempre più piccola di quest'ultima quantità...Occorre, quindi, cercare il minimo della (3.5b) rispetto ad  $\alpha$ . Questo minimo esprime la più grande forza applicabile in  $S$  senza rompere la volta lungo un giunto  $Mm$ ; indicherò con  $A^1$  questo minimo.<sup>157</sup>

E, poiché la prima delle (3.5b) non pone limitazioni e l'espressione a destra della seconda delle (3.5b) indica al giunto  $\alpha$  il valore massimo di  $H$  per  $\operatorname{tg}\alpha \geq \mu$ , per l'equilibrio rispetto agli scorrimenti verso l'alto di tutti i giunti dell'arco,  $H$  dovrà essere minore del minimo rispetto ad  $\alpha$  del valore massimo calcolato in  $\alpha$  e, cioè:

$$H \leq \min_{\alpha} H_{max}^s(\alpha) = A^1 \quad \text{minimum} \quad (3.5c)$$

Tale valore minimo è evidenziato in Fig. 3.5b.

Per Coulomb, l'equilibrio rispetto alla possibilità di scorrimento in qualunque giunto dell'arco, secondo gli schemi (1a,b) delle Figg. 3.3, 3.4 e nel rispetto della legge sull'attrito, richiede che la spinta  $H$  sia soggetta alla disuguaglianza:

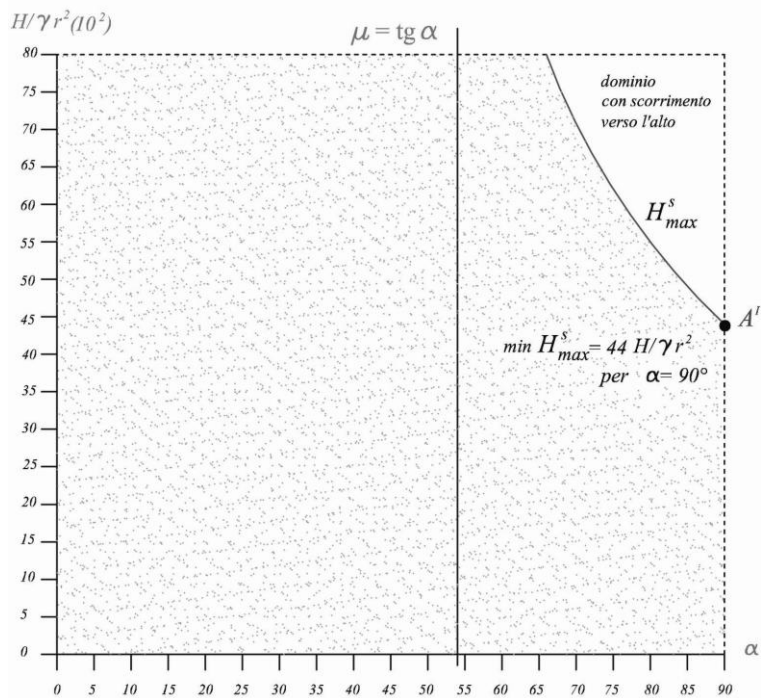
$$A_1 < H^s < A^1 \quad (3.6)$$

E' ovvio che se  $A^1$  è inferiore ad  $A_1$ , per l'arco non c'è possibilità di equilibrio.

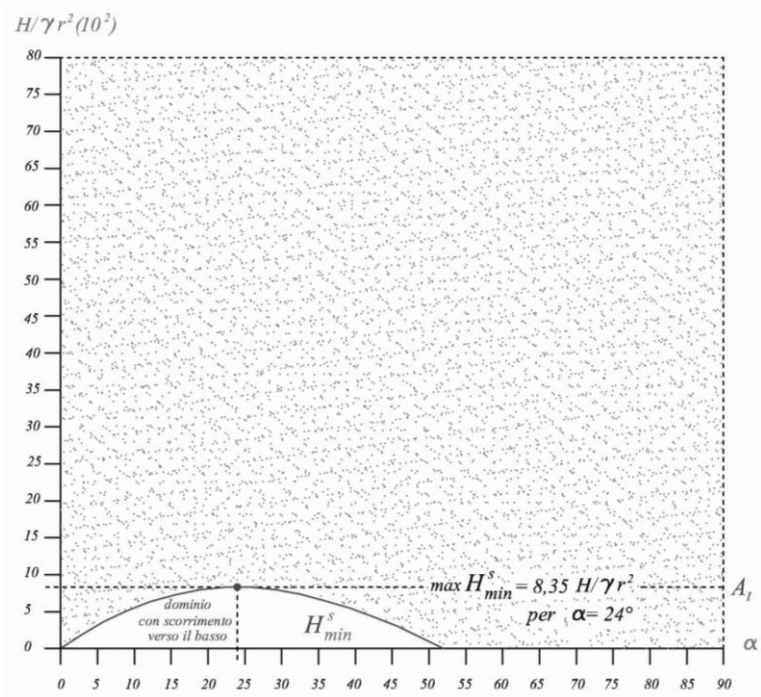
Le (3.4c), (3.5c) e (3.6), quando vale il segno di eguaglianza, forniscono i due valori limite di  $H$  per l'equilibrio in direzione tangente al giunto.

<sup>157</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, ibidem*, pag. 378: ...il faut que  $A$  soit toujours plus petit que cette dernière quantité...Ainsi il faut chercher le minimum de  $A$  qui exprimera la plus grande force que l'on puisse appliquer en  $S$ , sans rompre la voûte, suivant un joint  $Mm$ ; je suppose que  $A^1$  soit ce minimum.

Più precisamente, la (3.4c) si riferisce ai possibili scorrimenti relativi verso il basso del concio GaMm rispetto al concio inferiore; mentre la (3.5c) si riferisce ai possibili scorrimenti relativi verso l'alto del concio GaMm rispetto al concio inferiore.



**Fig. 3.5a.** Andamento di  $H_{min}^s$  come funzione dell'angolo  $\alpha$ .



**Fig. 3.5b.** Andamento di  $H_{max}^s$  come funzione dell'angolo  $\alpha$ .

Così, in stato di equilibrio - che è quello che noi cerchiamo di determinare - la volta, per intero o in parte, non deve scorrere lungo i suoi giunti in alcuna delle due possibili direzioni, ne segue che, il range delle forze che si possono applicare in S (in chiave), è compreso tra  $A_1$  e  $A^1$ , dove  $A_1$  esprime la più piccola forza che possa essere applicata in un qualunque punto S della chiave, e  $A^1$  la più grande forza che possa essere applicata nello stesso punto; da ciò si può concludere che se  $A_1$  è più grande di  $A^1$ , non ci potrà essere equilibrio, visto che la spinta in S (in chiave) non può essere né più grande di  $A^1$ , né più piccola di  $A_1$ , che noi supponiamo essere più grande di  $A^1$ .<sup>158</sup>

Le due situazioni limite di equilibrio rispetto agli scorrimenti relativi - corrispondenti alla direzione della risultante al giunto parallela ad una delle due falde del cono di Coulomb - sono dunque, per gli scorrimenti verso il basso:

$$H = \frac{W}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = H_{min}^s \quad \text{per cui } H \geq H_{min}^s \quad (3.7a)$$

e, per gli scorrimenti verso l'alto:

$$\begin{aligned} H = 0 & \quad \text{per cui } H > 0 & \quad \text{per } \operatorname{tg}\alpha < \mu \\ H = \frac{W}{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)} = H_{max}^s & \quad \text{per cui } H \leq H_{max}^s & \quad \text{per } \operatorname{tg}\alpha > \mu \end{aligned} \quad (3.7b)$$

In Fig. 3.5c sono rappresentate le aree sicure rispetto agli scorrimenti - come campite - e le corrispondenti frontiere; le frontiere individuano sia i giunti in cui la risultante reattiva si colloca sulla falda del cono di Coulomb sia il tipo di scorrimento possibile (verso il basso o verso l'alto).

Le frontiere rappresentano i valori limite esattamente corrispondenti alle due equazioni fornite da Coulomb. Esse si possono ottenere quando vale il segno di eguaglianza dalla disequazione:

$$\max_{\alpha} H_{min}^s(\alpha) \leq H^s \leq \min_{\alpha} H_{max}^s(\alpha) \quad (3.8)$$

---

<sup>158</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, ibidem, pag. 378: *Ainsi, comme dans le cas de repos, qui est celui que nous cherchons à fixer, la voûte, on tout ou on partie, ne doit point glisser sur ses joints dans aucun sens, il suit que les limites des forces que l'on peut appliquer on S, sont comprises entre  $A_1$  e  $A^1$ , où  $A_1$  exprime la moindre force qui puisse presser le point S, e  $A^1$  la plus grande force qui puisse presser ce même point; d'où l'on peut conclure que si  $A_1$  est plus grand que  $A^1$ , il ne peut y avoir d'équilibre, puisque la pression on s ne pouvant point être plus grande que  $A^1$ , ne peut point être non plus petite que  $A_1$ , que nous supposons plus grand que  $A^1$ .*

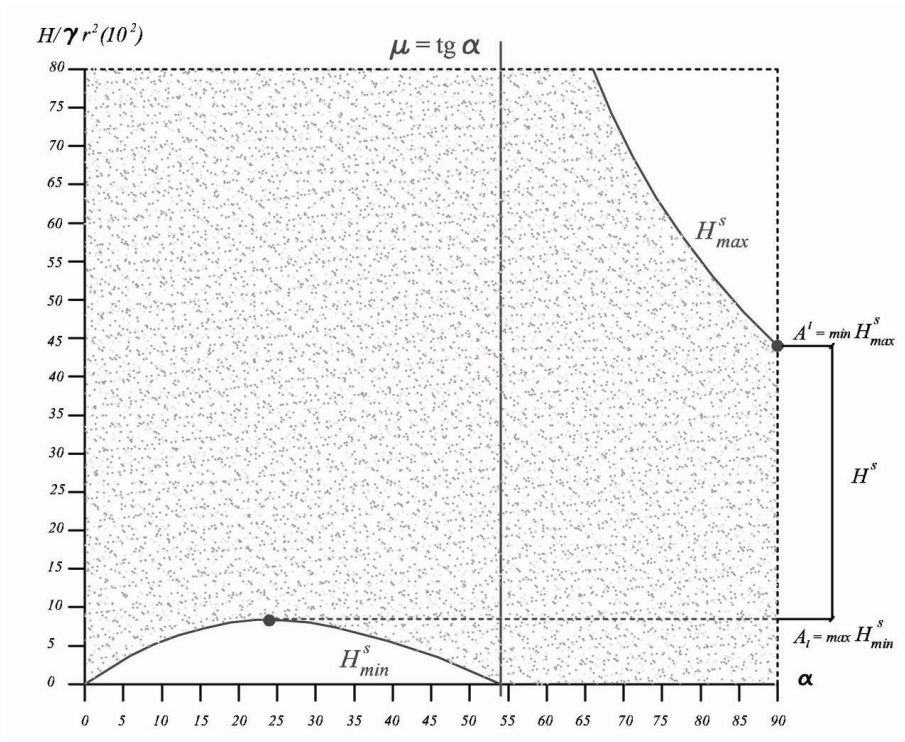


Fig. 3.5c. Dominio delle H ammissibili rispetto a scorrimenti fra conci contigui.

### III.3. EQUILIBRIO LIMITE RISPETTO ALLA ROTAZIONE

A questo punto restano da esaminare gli schemi 2a,b della Fig. 3.2, rappresentati in dettaglio nelle Figg. 3.6a,b.

Gli schemi si riferiscono a situazioni limite di equilibrio per il passaggio della risultante in punti interni al giunto; in tal senso, le rotazioni relative fra conci contigui sono disegnate soltanto per rappresentare la condizione di equilibrio rispetto a rotazioni antiorarie o orarie.

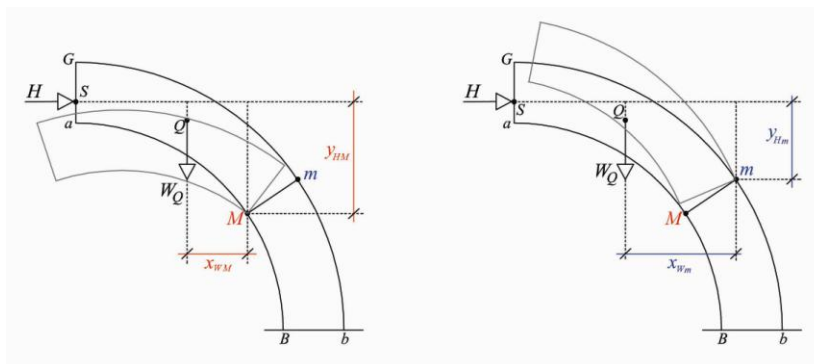


Fig. 3.6a. Schema (2a) della Fig. 3.2.

Fig. 3.6b. Schema (2b) della Fig. 3.2.

Per l'equilibrio alla rotazione, infatti, a causa dell'estensione del giunto, bisogna che il punto di applicazione della risultante del peso del concio  $W_Q$  e della spinta  $H$  sia interno al giunto  $Mm$ , quindi, occorre che:

$$|M(G)| \leq \frac{h}{2} N \quad (3.9)$$



La disequazione (3.9) è una relazione locale - al giunto - in cui il momento è calcolato rispetto al baricentro  $G$ , assunto come polo del giunto stesso.

Quindi, se la forza  $N$  è applicata in un punto interno al segmento  $\overline{MG}$  (Fig. 3.7a), la (3.9), poiché  $M(G) < 0$ , diventa:

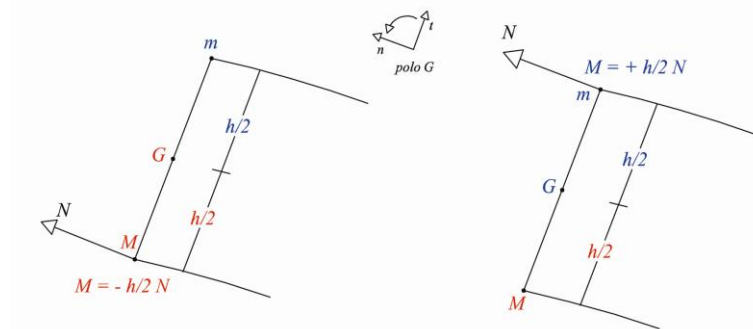
$$M(G) \geq -\frac{h}{2}N \quad \text{per } M(G) < 0 \quad (3.10a)$$

mentre, se la forza  $N$  è applicata in un punto interno al segmento  $\overline{Gm}$  (Fig. 3.7b), la (3.9), poiché  $M(G) \geq 0$ , diventa:

$$M(G) \leq \frac{h}{2}N \quad \text{per } M(G) \geq 0 \quad (3.10b)$$

da cui si ottiene:

$$-\frac{h}{2}N \leq M(G) \leq \frac{h}{2}N \quad (3.10c)$$



**Fig. 3.7a,b.**  $N$  applicata all'intradosso  $M$  e all'estradosso  $m$ .

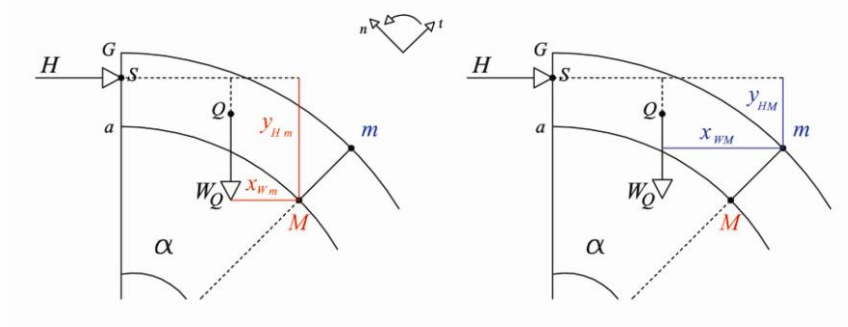
La disequazione appena ottenuta fornisce due valori limite per  $M$  in funzione di  $N$ , valori ottenuti quando il momento è calcolato rispetto al baricentro  $G$ .

### III.3.1. Considerazione sul punto di arrivo al giunto $\alpha$ della curva delle pressioni applicata in chiave nel generico punto $S$ . Adeguamento del formalismo per un confronto con la teoria di Coulomb

Tuttavia, al giunto le posizioni limite della curva delle pressioni - risultante al giunto generico del peso del concio corrispondente e della spinta  $H$  applicata in un qualunque punto della chiave - sono l'intradosso  $M$  e l'estradosso  $m$ , dal momento che la curva delle pressioni non può fuoriuscire dall'arco.

Allora, per l'equilibrio alla rotazione del concio che si estende dalla chiave al giunto considerato, possiamo sostituire le disequazioni (3.10), calcolate rispetto al baricentro, con corrispondenti disequazioni, in cui il

momento è calcolato rispetto a codesti due punti estremi, l'estradosso  $m$  e l'intradosso  $M$  del giunto.



**Fig. 3.8a,b.** Componenti delle forze rispetto all'intradosso  $M$  e all'estradosso  $m$ .

E poiché, se la curva delle pressioni passa per tali punti il momento è nullo, considerando come posizione limite il punto di arrivo della curva delle pressioni al giunto  $\alpha$  l'intradosso  $M$  (Fig. 3.8a) si dovrà imporre:

$$M(M) = -H_M \cdot y_{H,M} + W_Q \cdot x_{w,M} \leq 0 \quad (3.11a)$$

da cui si ottiene:

$$H_M \geq \frac{W_Q \cdot x_{w,M}}{y_{H,M}} \quad (3.11b)$$

Considerando, invece, come posizione limite il punto di arrivo della curva delle pressioni al giunto  $\alpha$  l'estradosso  $m$  (Fig. 3.9b) si dovrà imporre:

$$M(m) = -H_m \cdot y_{H,m} + W_Q \cdot x_{w,m} \geq 0 \quad (3.12a)$$

da cui si ottiene:

$$H_m \leq \frac{W_Q \cdot x_{w,m}}{y_{H,m}} \quad (3.12b)$$

I valori limite di  $H$  sono i termini a destra di (3.11b) e (3.12b) e, si ottengono da esse trattandole come equazioni di equilibrio alla rotazione rispetto all'intradosso e all'estradosso; ebbene tali equazioni sono esattamente coincidenti con le due equazioni fornite da Coulomb.

equilibrio alla rotazione rispetto a  $M$ : 
$$H_M^r(\alpha) = \frac{W_Q \cdot x_{w,M}}{y_{H,M}} \quad (3.13a)$$

e:

equilibrio alla rotazione rispetto a  $m$ : 
$$H_m^r(\alpha) = \frac{W_Q \cdot x_{w,m}}{y_{H,m}} \quad (3.13b)$$

in cui  $y_{H,M}$ ,  $y_{H,m}$  e  $x_{W,M}$ ,  $x_{W,m}$  sono i bracci della spinta e del peso rispetto all'intradosso M e all'estradosso m del giunto, rispettivamente.  $H_M^r(\alpha)$  e  $H_m^r(\alpha)$  rappresentano i valori limite di H, più precisamente il valore minimo ed il valore massimo della spinta ammissibile al giunto Mm, quando la spinta in chiave è applicata nel generico punto S.

Da ora in poi chiameremo  $H_M^r(\alpha) = H_{min}^r(\alpha)$  e  $H_m^r(\alpha) = H_{max}^r(\alpha)$ .

E mentre le disequazioni (3.11b) e (3.12b) forniscono il range di tutti i valori ammissibili di H, che corrispondono a curve delle pressioni passanti per punti non esterni al giunto, le equazioni di equilibrio alla rotazione (3.13a,b), invece, sono condizioni estreme e puntuali di equilibrio, esse richiedono che la curva delle pressioni passi per l'intradosso o per l'estradosso.

Coulomb, infatti, imponendo l'equilibrio alla rotazione, dovuto all'estensione del giunto, trova due posizioni limite per H. A tal proposito egli scrive:

Per soddisfare, ora, la seconda condizione di equilibrio è necessario che la risultante R di tutte le forze, che agiscono sulla porzione di volta GaMm (arco esaminato da Coulomb nella Fig. 14 (*Plan II*) del suo Mémoire - Fig. 3.9 -), passi al di sopra del punto M e al di sotto del punto m.

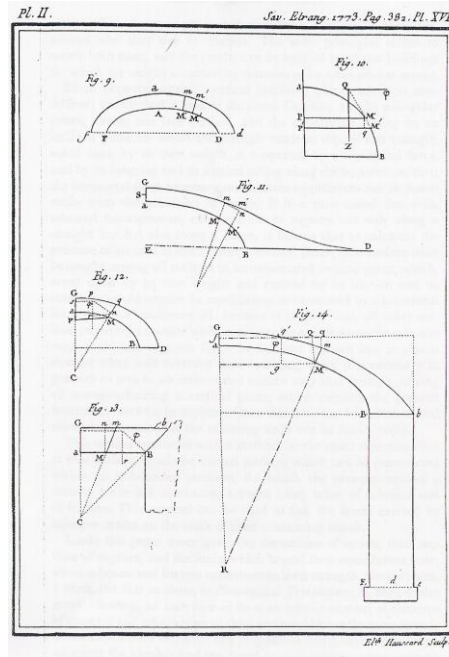
Bisogna allora, avendo chiamato B (la nostra spinta H) la forza applicata in S, che la quantità  $B \cdot MQ$  sia sempre uguale o più grande di  $\varphi \cdot RM$ ; e nel caso in cui la risultante passasse per il punto M, si avrà  $B = \varphi(gM / MQ)$ . Se la quantità B fosse più piccola di  $\varphi(gM / MQ)$ , allora la risultante R passerebbe al di sotto del punto M, e la volta si romperebbe. Così per avere la forza B, sufficiente per sostenere tutta la volta, occorre cercare il massimo di B dall'equazione precedente, e questo massimo rappresenterà la più piccola forza che possa essere applicata in S;  $B_1$  esprime questo maximum<sup>159</sup>.

E poiché, per soddisfare la seconda condizione bisogna, inoltre, che la risultante  $R^1$  passi al di sotto del punto m, ne segue che la quantità  $B \cdot mq$  deve essere più piccola o tutto al più uguale a  $\varphi \cdot R^1 m$ . Così, dall'equazione  $B = \varphi(gq / mq)$  si deve determinare la costante B, tale

---

<sup>159</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, ibidem*, pag. 378: *Pour satisfaire à présent à la deuxième condition d'équilibre, il faut que la résultante gv, de toutes les forces qui agissent sur la portion de voûte GaMm, passe au-dessus du point M, & au-dessous du point m. Il faut, par conséquent, en nommant B la force qui agit en S, que BMQ soit toujours égal ou plus grand que  $\varphi g M$ ; & dans le cas où la résultante passeroit par le point M, l'on auroit  $B = \varphi(gM / MQ)$ . Si la quantité B étoit supposée plus petite que  $\varphi(gM / MQ)$ , pour lors la résultante gv passeroit au dessous du point M, & la voûte se romproit. Ainsi, pour avoir la force B, suffisante pour soutenir toute la voûte, il faut chercher le maximum de B d'après l'équation précédente, & ce maximum exprimera la plus petite force que l'on puisse appliquer en S; que  $B_1$  exprime ce maximum.*

che essa rappresenti il minimo della quantità  $\varphi(gq/mq)$ ; e  $B^I$ , determinato con tale considerazione, fornirà per  $B \cdot mq$  una quantità uguale a  $\varphi \cdot gq$ , in un sol punto, e più piccola in tutti gli altri punti  $m$ , e come conseguenza  $B^I$  esprimerà la più grande forza (minimum) che possa essere applicata in  $S$ ; da ciò si può concludere che per soddisfare completamente la seconda condizione di equilibrio, la forza applicata in  $S$  non può assolutamente essere più piccola di  $B_1$ , né più grande di  $B^I$ .<sup>160</sup>



**Fig. 3.9.** *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, Plan. II.*

Per mettere a confronto le equazioni (3.13a,b) con le corrispondenti equazioni proposte da Coulomb, si noti che per l'equilibrio rispetto all'intradosso  $M$  che fornisce il **valore minimo** di  $H$  al generico giunto  $\alpha$ :

$$H_{min}^r(\alpha) = \varphi \cdot \frac{gM}{MQ} = W_Q \cdot \frac{X_{W,M}}{Y_{H,M}} \quad (3.14a)$$

<sup>160</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, ibidem*, pag. 378-379: *Comme il faut encore, pour satisfaire à la deuxième condition, que la résultante  $Lv$  passe au-dessous du point  $m$ , il suit que  $Bmq$  doit être plus petit, ou tout au plus égal à  $\varphi Lq$ . Ainsi, d'après l'équation  $B = \varphi(gq/mq)$ , il faut déterminer la constante  $B$ , telle qu'elle représente le minimum de  $\varphi gq/mq$ ; &  $B^I$ , déterminé d'après cette considération, donnera pour  $Bmq$  une quantité égale à  $\varphi q g$ , dans un point seulement, & plus petite dans tous les autres points  $m$ , & par conséquent  $B^I$  exprimera la plus grande force que l'on puisse supposer agir en  $S$ ; d'où l'on conclut que pour remplir la deuxième condition, la force appliquée en  $S$  ne peut point être plus petite que  $B_1$ , ni plus grande que  $B^I$ .*

e per l'equilibrio rispetto all'estradosso m che fornisce il **valore massimo** di H al generico giunto  $\alpha$  :

$$H_{max}^r(\alpha) = \varphi \cdot \frac{gq}{mq} = W_Q \cdot \frac{x_{w,m}}{y_{H,m}} \quad (3.14b)$$

per il significato dei simboli si fa riferimento alle Figg. 3.7a,b.

Allora per l'equilibrio dell'arco, al variare della posizione del giunto Mm e quindi dell'angolo  $\alpha$ , si dovrà cercare il **massimo dei valori minimi**. Coulomb indica tale valore massimo con  $B_1$  e precisa che tale valore massimo rappresenta di fatto il **valore minimo** che la spinta H applicata in chiave può assumere, per cui dalla (3.14a) si ottiene che:

$$H \geq \max_{\alpha} H_{min}^r(\alpha) = B_1 \quad \text{maximum} \quad (3.15a)$$

Riassumendo, l'ultima espressione afferma che il valore di H dovrà essere maggiore del massimo rispetto ad  $\alpha$  del valore minimo calcolato in M - intradosso dell'arco – per un valore assegnato di  $\alpha$ . Si noti che tale *maximum* rappresenta di fatto il **valore minimo** di H; il fatto di chiamarlo *maximum* si riferisce alla circostanza che esso rappresenta il massimo dei valori minimi.

Ed ancora, per analogia, per l'equilibrio dell'arco, al variare della posizione del giunto Mm e quindi dell'angolo  $\alpha$ , si dovrà cercare il **minimo dei valori massimi**.

Coulomb indica tale valore minimo con  $B^1$  e precisa che tale valore minimo rappresenta di fatto il **valore massimo** che la spinta H applicata in chiave può assumere, per cui dalla (3.14b) si ottiene che:

$$H \leq \min_{\alpha} H_{max}^r(\alpha) = B^1 \quad \text{minimum} \quad (3.15b)$$

Riassumendo, l'ultima espressione afferma che il valore di H dovrà essere minore del minimo rispetto ad  $\alpha$  del valore massimo calcolato in m - estradosso dell'arco – per un valore assegnato di  $\alpha$ . Si noti che tale *minimum* rappresenta di fatto il **valore massimo** di H; il fatto di chiamarlo *minimum* si riferisce alla circostanza che esso rappresenta il minimo dei valori massimi.

Il metodo appena enunciato vale qualsiasi sia il punto di applicazione in chiave. Per valutare le conseguenze del punto di applicazione facciamo l'ipotesi semplificatrice che il punto di applicazione in chiave sia stato fissato e sia S, allora, il range dei valori staticamente ammissibili per la spinta H (Fig. 3.10), applicata in chiave nel generico punto S, è limitato inferiormente dal *maximum*  $B_1$  e superiormente dal *minimum*  $B^1$  :

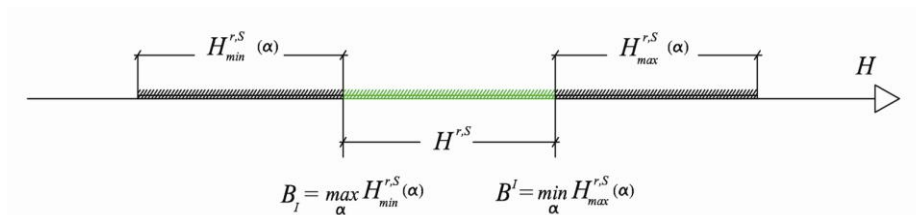
$$\max_{\alpha} H_{min}^{r,S}(\alpha) \leq H^{r,S} \leq \min_{\alpha} H_{max}^{r,S}(\alpha) \quad (3.16)$$

ossia:

$$B_1 \leq H^{r,S} \leq B^1 \quad (3.17)$$

nell'ipotesi ovvia enunciata da Coulomb e di cui parleremo in seguito che  $B_1$  sia minore  $B^1$ .

$$B_1 < B^1 \quad (3.18)$$



**Fig. 3.10.** Range dei valori staticamente ammissibili per la spinta  $H$  applicata in chiave nel generico punto  $S$ , limitato inferiormente dal *maximum*  $B_1$  e superiormente dal *minimum*  $B^1$ .

Il range (3.16) corrisponde, in relazione ai discorsi fatti nei paragrafi precedenti, alla famiglia delle  $\infty^1$  curve delle pressioni che possono essere tracciate, quando sia stato fissato il punto di applicazione  $S$  in chiave.

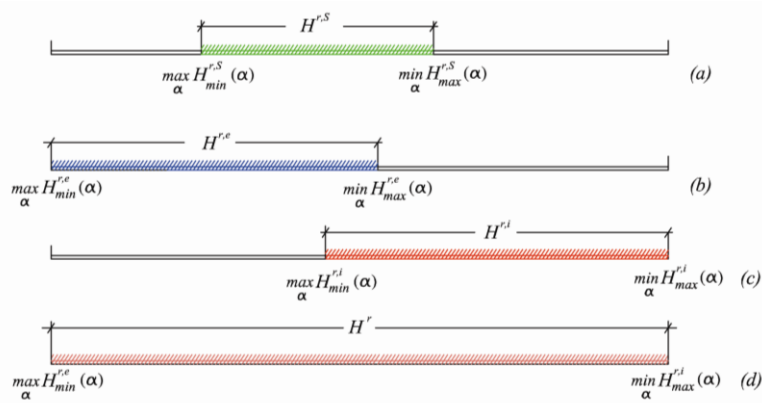
### III.3.2. Considerazioni sulla variazione del punto di applicazione in chiave della curva delle pressioni

Coulomb considera il punto di applicazione  $S$  in chiave come generico e, quindi, variabile fra l'estradosso e l'intradosso della chiave; al variare del punto di applicazione  $S$ , il range globale dei valori ammissibili di  $H$  per l'arco può essere ottenuto come range unione degli infiniti range del tipo (3.16) o (3.17) corrispondenti agli infiniti punti di applicazione in chiave.

Codesti range ammettono sovrapposizioni di valori di  $H$ , dal momento che il valore della spinta  $H$  varia, variando il punto di applicazione, fra l'estradosso e l'intradosso della chiave.

Si noti che, se il punto di applicazione  $S$  è più vicino all'estradosso della chiave il range corrispondente si sposta verso sinistra, (si veda *(a)* per confronto con *(b)* in Fig. 3.11) mentre se il punto di applicazione  $S$  è più vicino all'intradosso della chiave il range corrispondente si sposta verso destra (si veda *(a)* per confronto con *(c)* in Fig. 3.11).

Inoltre, se l'arco è abbastanza spesso, per i range del tipo (3.16) gli estremi sono  $H^{r,e}$  corrispondente al punto di applicazione della spinta all'estradosso della chiave Fig. 3.11 *(b)* e  $H^{r,i}$  corrispondente al punto di applicazione all'intradosso della chiave Fig. 3.11 *(c)*; il range totale è definito dall'estremo sinistro  $\max_{\alpha} H_{\min}^{r,e}(\alpha)$  e dall'estremo destro  $\min_{\alpha} H_{\max}^{r,i}(\alpha)$ , Fig. 3.11 *(d)*.



**Fig. 3.11.** (a) range corrispondente ad un punto di applicazione della spinta interno alla chiave  $H^{r,S}$ ; (b) range corrispondente al punto di applicazione della spinta all'estradosso della chiave  $H^{r,e}$ ; (c) range corrispondente al punto di applicazione della spinta all'intradosso della chiave  $H^{r,i}$ ; (d) range totale di estremi  $\max_{\alpha} H_{min}^{r,e}(\alpha)$  e  $\min_{\alpha} H_{max}^{r,i}(\alpha)$ .

Nelle Figg. 3.12a,b,c sono rappresentati i valori di  $H$  come funzione di  $\alpha$  e sono evidenziati i massimi ed i minimi delle spinte per un arco a pieno centro estradosso parallelamente, avendo ipotizzato un valore per il rapporto  $K$ , fra raggio di estradosso e raggio di intradosso, pari a  $K=1,32$  ed un angolo  $\varphi$  di attrito tale che  $\operatorname{tg}\varphi = \mu = 0,754$ , con  $\varphi = 37^\circ$ .

Nella Fig. 3.12a è rappresentato l'andamento di  $H_{min}^{r,e}$  e di  $H_{max}^{r,e}$  come funzione dell'angolo  $\alpha$ .  $H_{min}^{r,e}$  e  $H_{max}^{r,e}$  sono le frontiere del dominio -campito in blu - degli  $H^{r,e}$ . In figura, sono evidenziati, inoltre, i valori estremi delle due frontiere e, precisamente, il  $\max H_{min}^{r,e}$  ed il  $\min H_{max}^{r,e}$ .

Nella Fig. 3.12b è rappresentato l'andamento di  $H_{min}^{r,i}$  e di  $H_{max}^{r,i}$  come funzione dell'angolo  $\alpha$ .  $H_{min}^{r,i}$  e  $H_{max}^{r,i}$  sono le frontiere del dominio - campito in rosso - degli  $H^{r,i}$ . In figura, sono evidenziati, inoltre, i valori estremi delle due frontiere e, precisamente, il  $\max H_{min}^{r,i}$  ed il  $\min H_{max}^{r,i}$ .

Nella Fig. 3.12c sono rappresentate le aree - come campite - sicure rispetto alle rotazioni distinte intorno all'estradosso o all'intradosso, e le corrispondenti frontiere.

Le aree campite in blu individuano il range di  $H^{r,e}$  e le aree campite in rosso il range di  $H^{r,i}$ ; se i due range esistono entrambi, il range globale di  $H^r$ , che garantisce l'equilibrio rispetto alla rotazione, è definito da:

$$\max H_{min}^{r,e} \leq H^r \leq \min H_{max}^{r,i} \quad (3.19)$$

Quando il range di  $H^{r,i}$  si esaurisce, il range rotazionale globale sarà definito da:

$$\max H_{min}^{r,e} \leq H^r \leq \min H_{max}^{r,S} \quad (3.20)$$

dove S è un particolare punto interno alla chiave; esso rappresenta l'ultimo punto di applicazione più prossimo all'intradosso.

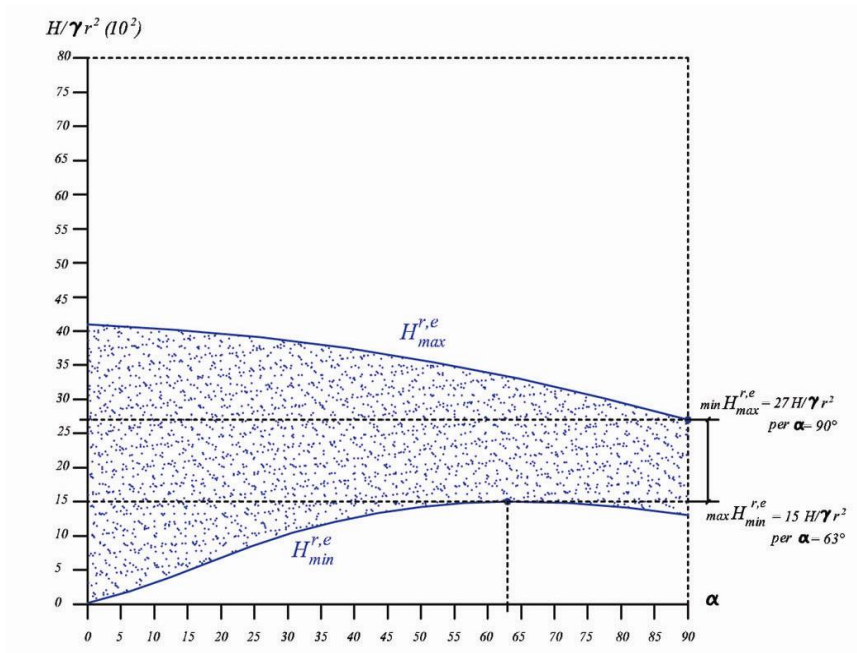


Fig. 3.12a. Dominio  $H^{r,e}$  i cui estremi sono  $max H_{min}^{r,e}$  ed il  $min H_{max}^{r,e}$ .

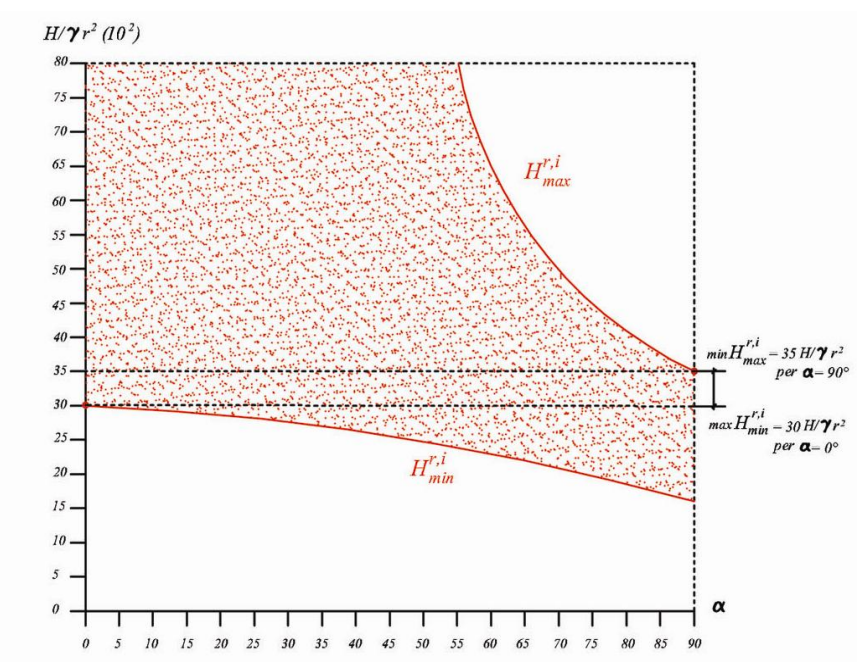
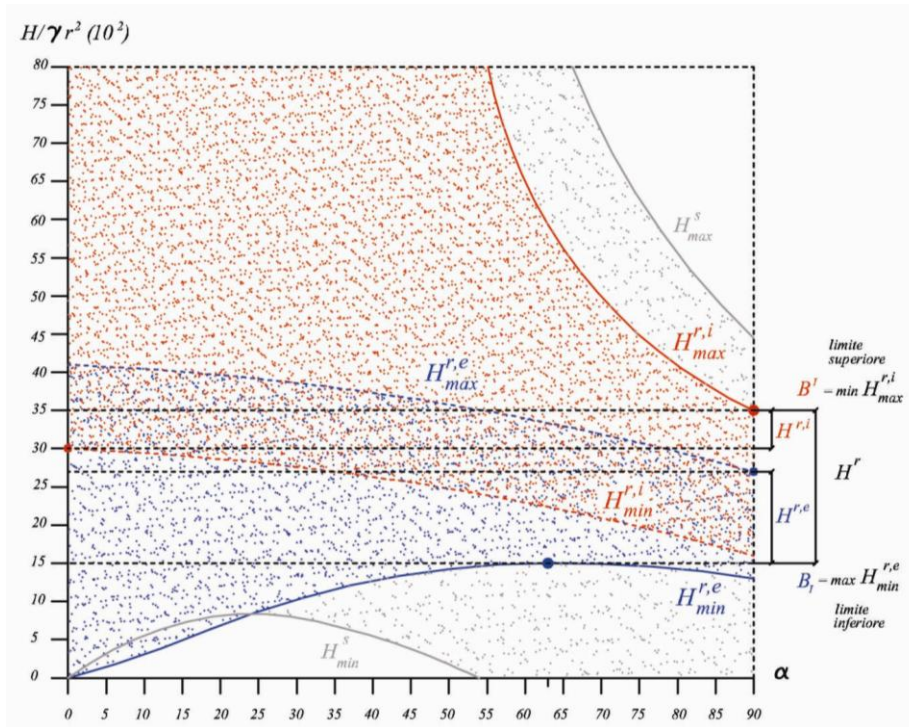


Fig. 3.12b. Dominio  $H^{r,i}$  i cui estremi sono  $max H_{min}^{r,i}$  ed il  $min H_{max}^{r,i}$ .

Dalla disequazione (3.20) si deduce che il limite superiore  $max H_{min}^{r,e}$  - in corrispondenza del punto in chiave all'estradosso - è sempre definito, mentre il limite inferiore non sarà più definito da  $min H_{max}^{r,i}$  - in corrispondenza del punto in chiave all'intradosso ma sarà definito dal  $min H_{max}^{r,S}$  in corrispondenza di un punto interno S della chiave.



Nella Fig. 3.12c sono indicate, inoltre le frontiere del range di  $H^S$ , le quali risultano esterne al range di  $H^r$ .



**Fig. 3.12c.** Gli estremi del dominio globale sono il limite superiore  $\max H_{\min}^{r,e}$  e il limite inferiore  $\min H_{\max}^{r,i}$ .<sup>161</sup>

In definitiva, per un arco abbastanza spesso, il range delle spinte staticamente ammissibili è limitato inferiormente da  $B_1 = \max_{\alpha} H_{\min}^{r,e}(\alpha)$ , con punto di applicazione della spinta in chiave all'estradosso, e superiormente da  $B^1 = \min_{\alpha} H_{\max}^{r,i}(\alpha)$ , con un punto di applicazione della spinta in chiave all'intradosso.

Al diminuire dello spessore dell'arco, il range dei punti di applicazione in chiave si riduce in relazione alla forma dell'arco, o a partire dall'estradosso, o a partire dall'intradosso, che è il caso dell'arco semicircolare estradossato parallelamente.

Per discutere l'equilibrio globale dell'arco sia rispetto all'equilibrio rotazionale sia rispetto agli scorrimenti dovremmo mettere a confronto i valori estremi di  $H^S$  di  $H^r$  corrispondenti.

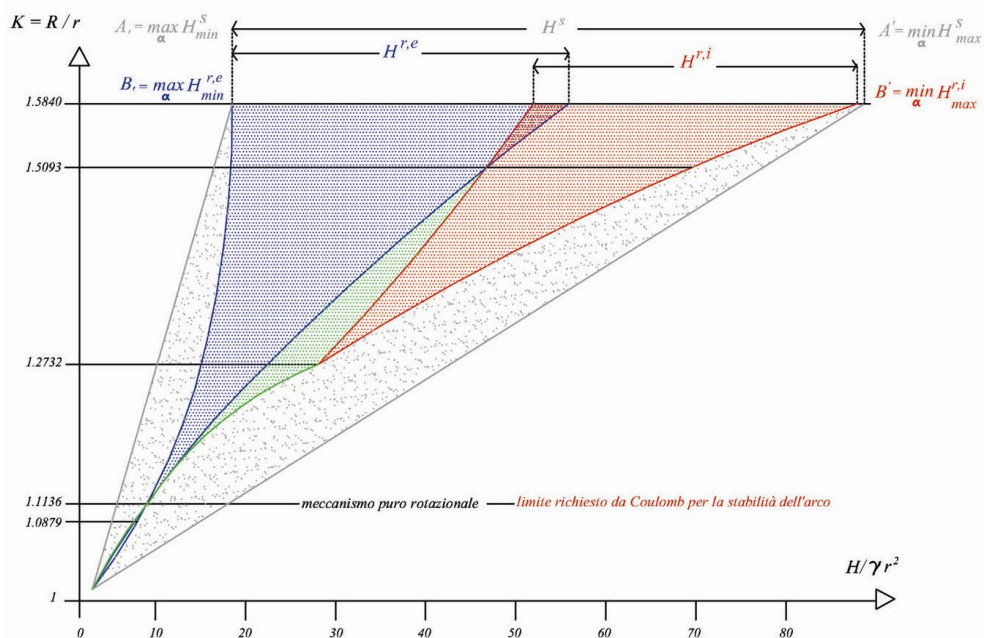
Nella Fig. 3.13 sono evidenziati il range degli  $H^S$  relativi agli scorrimenti ed il range degli  $H^r$  relativi alla rotazione per un arco estradossato parallelamente.

I range rotazionali sono rappresentati da:

- la regione campita in grigio corrisponde al range degli scorrimenti  $H^S$ . In questo caso, preso in esame, l'arco ha attrito sufficiente ed il suo coefficiente è pari a  $\mu = 0.754$ .

<sup>161</sup> Sinopoli A., Corradi M. e Foce F., 1997, Modern formulation for pre-elastic theories on masonry arches, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 123(3), 204-213.

- la regione campita in blu corrisponde al range di  $H^{r,e}$ . In esso la spinta  $H$  è applicata all'estradosso della chiave, oppure può essere applicata anche in un punto interno della chiave ma non all'intradosso;
- la regione campita in rosso corrisponde al range di  $H^{r,i}$ . In esso la spinta  $H$  è applicata all'intradosso della chiave, oppure può essere applicata anche in un punto interno della chiave ma non all'estradosso;
- la regione di sovrapposizione di  $H^{r,e}$  e di  $H^{r,i}$ . In essa la spinta  $H$  può essere applicata sia all'estradosso, sia all'intradosso ma anche in un punto interno;
- la regione che si ottiene sottraendo dal range globale di  $H^f$  il range di  $H^{r,e}$  e di  $H^{r,i}$ , campita in verde. La frontiera destra di tale range residuo, quando il dominio di  $H^{r,i}$  si esaurisce, corrisponde ad un punto di applicazione della spinta  $H$  interno alla chiave, compreso fra l'estradosso e l'intradosso, e che si avvicina sempre più all'estradosso al diminuire di  $H$ .



**Fig. 3.13.** Dominio degli  $H^S$  relativi agli scorrimenti e dominio degli  $H^f$  relativi alla rotazione per un arco estradossato parallelamente.<sup>162</sup>

A questo proposito, Coulomb dice:

Come conseguenza, per unire le due condizioni insieme - scorrimento e rotazione - se  $A_1$  o  $B_1$  fossero più grandi di  $A^1$  o  $B^1$  (se i range fossero vuoti), non potrebbe esserci equilibrio, e di conseguenza, la volta - di cui siano date le dimensioni - si romperà.<sup>163</sup>

<sup>162</sup> Sinopoli A., Corradi M., Foce F., 1997, *ibidem*, pag. 210.

<sup>163</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, *ibidem*, pag. 379: *Par conséquent, pour joindre les deux conditions ensemble, si  $A_1$  ou  $B_1$  étoient plus grands que  $A^1$  ou  $B^1$ , l'équilibre ne pourroit point avoir lieu, & la voûte, dont les dimensions seroient données, se romproit nécessairement.*

Per avere i veri limiti, sarà sufficiente prendere la quantità più grande tra  $A_1$  e  $B_1$ , e la quantità più piccola tra  $A^1$  e  $B^1$ , in modo tale che, se  $B_1$  è più grande di  $A_1$ , e  $B^1$  più piccolo di  $A^1$ , allora  $B_1$  e  $B^1$  saranno i veri limiti delle forze che potranno essere applicate in S senza rompere la volta.<sup>164</sup>

Egli, quindi, conclude che:

$$\text{se } B_1 > A_1 \quad \wedge \quad B^1 < A^1 \quad (3.21)$$

allora:

$$B_1 \leq H \leq B^1 \quad (3.17)$$

Giusto per comprendere perché Coulomb considera soltanto un caso ed una sola disequazione per H, si legga quanto egli afferma nel *Remarque I* del suo *Mémoire*:

L'attrito è spesso abbastanza grande nei materiali, usati per la costruzione degli archi, da evitare che i diversi conci scivolino l'uno sull'altro. In questo caso la prima condizione di equilibrio (quella riguardante lo scorrimento: schemi 1ab della Fig. 3.2) può essere ignorata, (perché il range rotazionale è interno a quello degli scorrimenti), e non è più necessario che la risultante delle forze, che agisce su una porzione qualsiasi dell'arco, sia perpendicolare ai giunti finali di tale porzione, ma soltanto che essa cada su quei giunti.<sup>165</sup>

Così, ignorando la coesione tra i giunti, cosa che si deve fare nelle volte di nuova costruzione, è sufficiente cercare il massimo di  $H^{r,m}(\alpha) = W_Q(x_{w,m}/y_{h,m}) = \varphi(gM/MQ)$  per determinare la forza  $B_1$ , ed il minimo di  $H^{r,m}(\alpha) = W_Q(x_{w,m}/y_{h,m}) = \varphi(g^1q/mq)$  per determinare  $B^1$ ; si dovrà, inoltre, supporre che la forza H agisca in G, alla sommità del giunto, per rendere la forza  $B_1$  più piccola possibile. Nel frattempo occorre notare che, quando si cerca di fissare lo stato di

---

<sup>164</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, ibidem*, pagg. 379-380: *Pour avoir actuellement les vraies limites, il suffit de prendre entre  $A_1$  e  $B_1$  la quantité la plus grande, & entre  $A^1$  ou  $B^1$  la quantité la plus petite, en sorte que si  $B_1$  étoit plus grand que  $A_1$ , &  $B^1$  plus petit que  $A^1$ ,  $B_1$  &  $B^1$  seroient les véritables limites des forces que l'on pourroit appliquer en S sans rompre la voûte.*

<sup>165</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, ibidem*, pag. 380: *REMARQUE I. Le frottement est souvent assez considérable dans les matériaux que l'on emploie à la construction des voûtes, pour que les differens voussoirs ne puissent point glisser l'un contre l'autre; en ce cas, l'on peut négliger la première condition d'équilibre; et il n'est plus nécessaire que la résultante des forces qui agit sur une portion quelconque de voûte soit perpendiculaire aux joints qui la terminent; mais seulement qu'elle tombe sur ces joints.*

equilibrio tramite questa seconda condizione, supponendo le forze passanti per i punti G e M, bisogna supporre che questi punti siano sufficientemente lontani dalle estremità dei giunti, affinché l'aderenza dei conci impedisca a queste forze di romperne gli angoli.<sup>166</sup>

Quindi, se la condizione di equilibrio rispetto agli scorrimenti non va considerata, perché il materiale lapideo usato per la costruzione degli archi è tale da impedire lo scorrimento fra i conci, l'unica condizione di equilibrio da analizzare è quella rispetto alla rotazione.

Riepilogando, in analogia alla terminologia di Coulomb, si può indicare, il *valore minimo* della spinta richiesta per l'equilibrio dell'arco con  $B_1$  :

$$B_1 = \max_{\alpha} H_{\min}^r(\alpha) \quad (3.22a)$$

con punto di applicazione della spinta in chiave all'estradosso; il fatto che tale valore minimo sia ottenuto in corrispondenza al punto di applicazione in chiave all'estradosso, come osservato giustamente da Coulomb nel *Remarque I* del problema XVIII, è vero non soltanto per l'arco semicircolare da noi indagato in Fig. 3.6, ma anche per quello esaminato da Coulomb nella Fig. 3.9. Sempre in analogia alla terminologia di Coulomb, si può indicare il *valore massimo* della spinta richiesta per l'equilibrio dell'arco con  $B^1$  :

$$B^1 = \min_{\alpha} H_{\max}^r(\alpha) \quad (3.22b)$$

con punto di applicazione della spinta in chiave in un punto non ben precisato, che dipende dalla forma e dallo spessore dell'arco.

Se l'arco è semicircolare ed è molto spesso, come quello da noi indagato, il punto di applicazione della spinta corrispondente alla (3.22b) è all'intradosso della chiave; al decrescere dello spessore dell'arco, il punto d'applicazione varia spostandosi dall'intradosso a punti sempre più interni del giunto in chiave (Fig. 3.13), fino a che in condizioni di collasso esso coinciderà con l'estradosso; noi abbiamo indicato tale punto di applicazione variabile con S.

---

<sup>166</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, ibidem*, pag. 380: *Ainsi, en négligeant la cohésion des joints, ce qui doit se faire dans les voûtes nouvellement construites ; il suffit de chercher le maximum de ..., pour déterminer la force  $B_1$ , et le minimum de..., pour déterminer la force  $B^1$  ; l'on doit en outre supposer que la force  $H$  agit en G, sommet du joint, pour rendre la force  $B_1$  aussi petite qu'elle puisse être. Il faut cependant remarquer que lorsqu'on cherche à fixer l'état d'équilibre par cette seconde condition, en supposant les forces passant par les points G & M, il faut supposer que ces points sont assez éloignés de l'extrémité des joints, pour que l'adhérence des voussoirs ne permette pas à ces forces d'en rompre les angles.*

Il *maximum*  $B_1$  ed il *minimum*  $B^I$ , come afferma chiaramente Coulomb, individuano il range dei valori della spinta staticamente ammissibile per l'equilibrio rotazionale dell'arco:

$$B_1 \leq H^r \leq B^I \quad (3.17)$$

se e solo se:

$$B_1 < B^I \quad (3.18)$$

Nel nostro formalismo tale range è definito da:

$$\max_{\alpha} H_{\min}^{r,S}(\alpha) \leq H^{r,S} \leq \min_{\alpha} H_{\max}^{r,S}(\alpha) \quad (3.16)$$

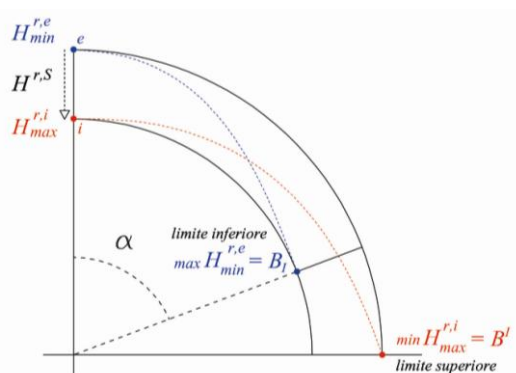
dove S agli apici indica il generico punto di applicazione in chiave della spinta H, variabile fra l'estradosso e l'intradosso, e *min* e *max* ai pedici si riferiscono rispettivamente ai punti M (intradosso) e m (estradosso) quali punti di arrivo al giunto  $\alpha$  (Fig. 3.14).

Ma, per l'arco analizzato da Coulomb e per l'arco circolare estradosso parallelamente, mentre il valore minimo – espressione a sinistra della (3.23) – ammette come punto di applicazione della spinta l'estradosso della chiave, il valore massimo – espressione a destra della (3.16) – ammette come punto di applicazione della spinta un punto variabile fra l'intradosso e l'estradosso in dipendenza dello spessore dell'arco.

Quando i valori estremi del range globale di  $H^r$ , si riducono ad un unico punto, quel punto rappresenta la frontiera ultima dell'equilibrio, che è divenuto per tale motivo instabile.

Quindi, facendo riferimento alle parole di Coulomb e alle Figg. 3.13 e 3.14, dove sono descritti i range di un arco estradosso parallelamente sufficientemente spesso, si può dedurre che il range rotazionale per esso è individuato dalla seguente disequazione:

$$\max H_{\min}^{r,e} \leq H^r \leq \min H_{\max}^{r,i} \quad (3.19)$$



**Fig. 3.14.** Il punto di applicazione S della spinta H in chiave varia fra l'estradosso m (e) e l'intradosso M (i).

Riepilogando e attenendoci alle parole di Coulomb, affinché un arco sia in equilibrio,  $H$  dovrà essere compreso fra i due valori distinti massimo e minimo, che potremo indicare in notazione abbreviata come  $H_{max}$  e  $H_{min}$ , per cui:

$$H_{min} \leq H \leq H_{max} \quad (3.23)$$

### III.3.3. *Ultime considerazioni di Coulomb*

Remarque II. Nella pratica, sarà sempre più semplice determinare i limiti della forza  $B$  a tentoni piuttosto che attraverso dei metodi precisi. Io suppongo, ad esempio, di prendere la porzione GaM della volta, tale che il giunto Mm formi un angolo di  $44^\circ$  con una linea orizzontale; si calcolerà la forza  $B_1$  in questa situazione; si cercherà in seguito questa stessa forza rispetto ad un secondo giunto, poco distante dal primo, avvicinandosi alla chiave; se questa seconda forza è più grande della prima è sicuro che l'angolo di rottura della volta è tra la chiave ed il primo giunto; così, risalendo, attraverso questa stessa operazione, verso, questa chiave, si determinerà facilmente la vera forza  $B_1$ .<sup>167</sup>

Questo calcolo non potrà mai essere troppo lungo, perché per la proprietà dei maximis e minimis, si avrà, verso un punto M, dove si trova il limite cercato  $B_1$ , una variazione troppo piccola su uno sviluppo abbastanza grande della curva; e così, per determinare questa forza  $B_1$ , sarà sufficiente avere pressappoco il punto di rottura M; con gli stessi metodi si determinerà la più grande forza  $B^1$ , che possa sostenere una volta senza rompersi.<sup>168</sup>

Coulomb, non disponendo di strumenti idonei per questo tipo di calcolo, trova i suoi *maximis & minimis* per tentativi e, molto probabilmente, lo fa

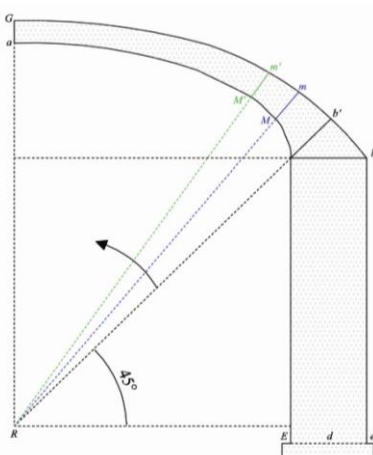
---

<sup>167</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, ibidem*, pagg. 380-81: *REMARQUE II. Dans la pratique, il sera toujours plus simple de déterminer le limite de la force B par tâtonnement, que par des moyens exacts. Je suppose, par exemple, que l'on prenne la portion GaM de la voûte. Telle que le joint Mm fasse un angle de 44 degrés avec une ligne horizontale ; l'on calculera la force  $B_1$  dans cette supposition ; l'on cherchera ensuite cette même force par rapport à un second joint, peu distant du premier, en s'approchant de la clef ; si cette deuxième force est plus grande que la première, l'on sera sûr que l'angle de rupture de la voûte est entre la clef & le premier joint ; ainsi, en remontant, par cette même opération, vers cette clef, l'on déterminera facilement la vraie force  $B_1$ .*

<sup>168</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, ibidem*, pag. 381: *Ce calcul ne sauroit jamais être bien long, parce que par la propriété de maximis & minimis, il y aura, vers un point M, où l'on trouve la limite cherchée  $B_1$ , très – peu de variations sur un assez grand développement de la courbe ; & qu'ainsi, pour déterminer cette force  $B_1$ , il ne sera nécessaire que d'avoir à peu – près le point de rupture M ; l'on déterminera par les mêmes moyens la plus grande force  $B^1$  que puisse soutenir une voûte sans se rompre.*

per un arco ribassato. Si presume, che egli faccia riferimento all'arco esaminato nella Fig. 14 del suo *Mémoire* (Fig. 3.10), dove l'ultimo giunto individuabile all'imposta ha un'apertura angolare<sup>169</sup> di  $\cong 44^\circ$  rispetto alla linea orizzontale e forma un angolo di  $\cong 66^\circ$  con il giunto in chiave.

Il metodo di Coulomb consiste nel cercare il *maximum*  $B_1$  ed il *minimum*  $B^1$  per l'intero arco. Come primo giunto egli considera l'ultimo giunto  $Bb'$  individuabile all'imposta (Fig. 3.15), per esso egli trova il  $B_1$  corrispondente e, di seguito, risalendo verso la chiave, individua un secondo giunto per il quale calcola un secondo  $B_1$ , e così via, fino a trovare  $B_1$  per l'intero arco quale massimo fra tutti i *maximum* dei vari giunti analizzati.



**Fig. 3.15.** Il metodo di Coulomb per la ricerca dei *maximum*  $B_1$  ed i *minimum*  $B^1$  per l'intero arco.

Lo stesso procedimento va eseguito per trovare il *minimum*  $B^1$  per l'intero arco che corrisponde al minimo fra tutti i *minimum* dei vari giunti analizzati. In questo procedimento, Coulomb, per un arco ribassato, suppone, quindi, che il *maximum*  $B_1$  si trovi in corrispondenza di un giunto che si avvicini all'imposta.

Di conseguenza, se le dimensioni della volta sono state date, come si è supposto in questa sede, così come l'altezza del piedritto BE, sul quale essa poggia, si determinerà facilmente quale deve essere lo spessore Bb di questo piedritto. Purché la risultante della forza  $B_1$ , agente in G, del peso totale della volta e del peso del suo piedritto passi fra E ed e, oppure passi per il punto e; questo soddisferà la seconda condizione di stabilità.<sup>170</sup>

<sup>169</sup> L'angolo viene definito dalla posizione dei giunti.

<sup>170</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, *ibidem*, pag. 381: *Par conséquent, si les dimensions de la voûte étoient données, comme nous les supposons ici, de même que l'hauteur du pied droit BE, sur lequel elle porte, l'on déterminera facilement quelle doit être l'épaisseur Bb de ce pied droit. Pour que la résultante de la force  $B_1$ , qui agit in G, & de la pesanteur totale de la voûte & de son pied droit passe entre E & e, ou passe par le point e ; ce qui satisfera à la deuxième condition de solidité.*

Sostanzialmente, affinché sia garantita la stabilità del portale, la risultante del peso e della spinta deve passare all'interno del piedritto, fra i punti  $E$  ed  $e$ , con posizione limite in  $e$ . In tal modo Coulomb vuole determinare lo spessore minimo del piedritto per il portale.

La destinazione di questo Mémoire, già troppo lunga, non mi permette di estendere questa teoria, né di applicarla a tutti i tipi di volte: così, io mi accontenterò di aver provato a dare dei metodi esatti, e tali che io li credo assolutamente necessari per constatare lo stato di stabilità. Confrontando i principi esposti con i differenti metodi di approssimazione usati nella pratica, ci si rende conto facilmente che i loro autori non hanno affatto distinto le due condizioni di equilibrio necessarie per lo stato di riposo. In quella, per esempio, che si attribuisce a M. de La Hire, riportata da M. Bélidor e utilizzata da quasi tutti gli Artisti, si divide la volta in tre parti e si calcola la pressione della parte superiore conformandosi alla prima condizione di equilibrio (scorrimento) e di seguito, attraverso la seconda condizione di equilibrio (rotazione), si determinano le dimensioni dei piedritti. Ora, per poco che vi si faccia attenzione, si vedrà che, se si divide la parte superiore verso la chiave e si suppone che questa volta si rompe in quattro parti, invece di rompersi in tre, la spinta delle parti superiori sarà spesso, nelle volte piatte, molto più grande di quella che si determina con il metodo di M. De la Hire e che le dimensioni dei piedritti, fissate da questo metodo, saranno spesso insufficienti.<sup>171</sup>

Le obiezioni che Coulomb muove al procedimento di M. de La Hire sono di duplice natura; la prima concerne l'ipotesi dei giunti lisci, privi di attrito; l'altra relativa al modo di rompersi di un portale con arco ribassato.

Il meccanismo di La Hire (Fig. 3.16), come dimostrato da recenti studi<sup>172</sup>, si può manifestare per portali con archi circolari ed attrito insufficiente, e non assente.

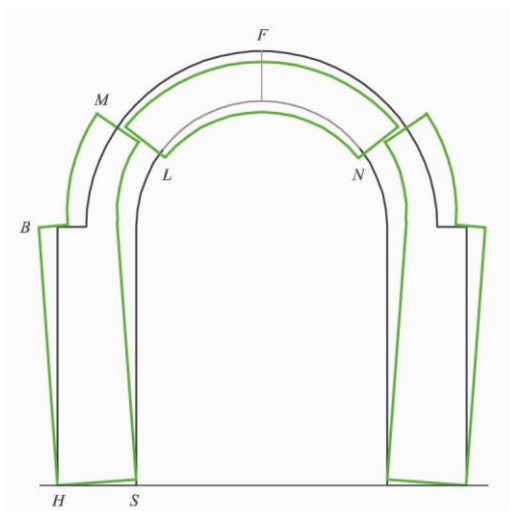
---

<sup>171</sup> Coulomb Charles Augustin, 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, *ibidem*, pagg. 381-382: *En comparant les principes qui précèdent avec les différentes méthodes d'approximations usitées dans la pratique, l'on s'apercevra facilement que leurs auteurs n'ont point assez distingué les deux conditions d'équilibre nécessaires pour l'état de repos. Dans celle, par exemple, que l'on attribue à M. de la Hire, rapportée par M. Bélidor, et pratiquée par presque tous les Artistes, l'on divise la voûte en trois parties, & l'on calcule la pression de la partie supérieure, en se conformant à la première condition d'équilibre, & l'on détermine ensuite les dimensions des pies droits, par la deuxième condition d'équilibre. Or, pour peu que l'on y fasse attention, l'on verra que si l'on divise la partie supérieure vers la clef, & que l'on suppose que cette voûte se rompe en quatre partie, au lieu de se rompre en trois, la force de pression des parties supérieures sera souvent, dans les voûtes plates, beaucoup plus grande que celle qui se détermine par la méthode de M. de la Hire, & que les dimensions des pieds droits, fixés par cette méthode, seront souvent insuffisantes.*

<sup>172</sup> Sinopoli A., Aita D., Foce F., 2007, *ibidem*.



La curva delle pressioni corrispondente a tale meccanismo è interna allo spessore dell'arco in chiave, essa tocca l'intradosso alle reni dove, dove per l'attrito insufficiente, si forma un pendolo semplice e l'estradosso del piedritto dove si forma una cerniera. Il meccanismo è misto ed il portale si rompe in 3 parti: i due piedritti ruotano e la parte superiore - cuneo - scorre lungo i giunti.

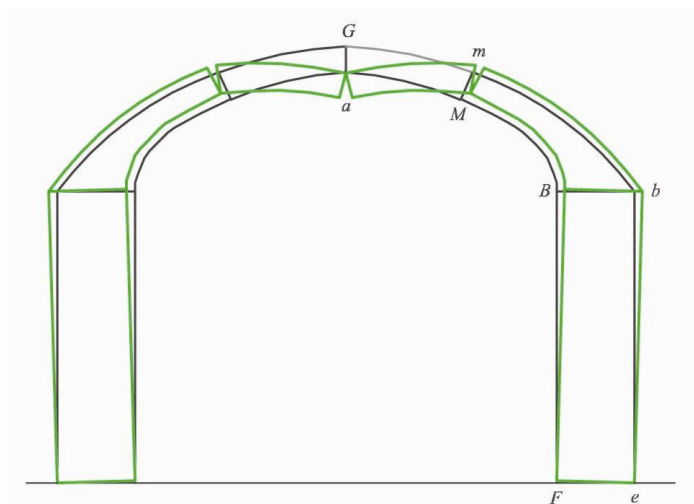


**Fig. 3.16.** Meccanismo di collasso di un portale con arco a tutto sesto.  
- Philippe De la Hire -

Coulomb, però, intuisce che questo meccanismo non può manifestarsi per gli archi ribassati (Fig. 3.17) perché per essi la spinta è talmente grande che la curva delle pressioni non riesce a passare nei punti previsti da La Hire.

Per gli archi ribassati, infatti, la curva delle pressioni, a causa della grande spinta, passa per l'estradosso in chiave, per l'intradosso alle reni in punti sufficientemente bassi, vicini all'imposta dell'arco, e per l'estradosso del piedritto. In ognuno di questi punti si forma una cerniera.

Il meccanismo è rotazionale ed il portale si rompe in 4 parti, in accordo con la teoria prevista da Coulomb.



**Fig. 3.17.** Meccanismo di collasso di un portale con arco ribassato.  
- Charles Augustin Coulomb -

### III.4. IL METODO DI COULOMB

Coulomb scrive le equazioni di equilibrio rispetto alle direzioni generalizzate di spostamento che sono quella dello scorrimento relativo e della rotazione relativa fra conci contigui, dal momento che sia il distacco sia la compenetrazione sono impediti. In tal senso, gli schemi proposti da Coulomb devono essere considerati come schemi di relativi a parametri di libertà (spostamenti relativi possibili) e non come anticipazioni di schemi di meccanismo di collasso. Il fatto che per ogni grado di libertà le equazioni di equilibrio siano due è connesso alla circostanza che, la struttura è iperstatica; per cui, nel caso dello scorrimento, l'ignoto valore di  $H$  costringe a considerare la possibilità di valori di  $T$  sia positivi sia negativi, mentre nel caso della rotazione per l'estensione finita del giunto le equazioni di equilibrio devono considerare la possibilità di due poli rispetto a cui calcolare il momento, uno all'estradosso e l'altro all'intradosso.

È nostra opinione, inoltre, che la sua teoria sia corretta non soltanto per il metodo adottato che è corretto per tutte le tipologie di archi – come avremo modo di dimostrare in seguito in relazione a teorie successive, ma soprattutto perché il meccanismo di collasso da lui proposto è unico e puramente rotazionale, dal momento che, per valori standard, sia dello spessore dell'arco sia del coefficiente d'attrito, il range di  $H^s$  contiene quello di  $H^f$  e, quindi, l'equilibrio rispetto a possibili scorrimenti è sempre garantito.

Il metodo è generale ed è corretto perché, ipotizzando la spinta  $H$  applicata in un punto generico delle chiave ed imponendo che la risultante passi per un punto compreso tra l'intradosso e l'estradosso al generico giunto  $\alpha$ , con  $\alpha$  variabile fra i suoi valori estremi (dalla chiave alle imposte), Coulomb è in grado dal punto di vista teorico di individuare il range globale dei valori ammissibili di  $H$ , ivi compresi i valori che corrispondono a tutti i possibili punti di applicazione della spinta  $H$  in chiave.

Va sottolineato, inoltre, l'attenzione posta da Coulomb nel voler specificare, nel Remarque I, il punto di applicazione della spinta minima  $H_{min}$  (all'estradosso della chiave), ma non il punto di applicazione della spinta massima  $H_{max}$  che, come abbiamo visto, è un punto variabile.

In tal senso, non è necessario che i valori estremi di  $H$  corrispondano uno ad un  $H^{r.e}$  e l'altro ad  $H^{r.i}$ ; al variare dello spessore dell'arco, l'importante è considerare il range globale di  $H$  all'interno del quale è garantito l'equilibrio e le corrispondenti frontiere (vedi Fig. 3.14), una dei valori minimi ed l'altra dei valori massimi.

Ciò che conta, quindi, non è concentrarsi sull'analisi dei singoli range, ma limitarsi all'analisi del range globale dei valori di  $H$  ammissibili per l'equilibrio dell'arco. Ciò è in accordo con la legge di normalità dei materiali standard della plasticità per i quali valgono l'upper and lower

bound theorems; essi ammettono un'unica condizione di collasso sia che vi si giunga dall'analisi di tutte le soluzioni di equilibrio instabile (upper bound theorem), sia che vi si giunga dall'analisi di tutte le soluzioni di equilibrio stabile (lower bound theorem).

Noi possiamo affermare che Coulomb usa il lower bound theorem; egli, infatti, parte dal basso e cerca l'ultima situazione di equilibrata e nella sua ricerca dei massimi e dei minimi egli non parla di giunto di rottura o di collasso della struttura. Coulomb fornisce un'unica disequazione per i valori di  $H$  dell'equilibrio rotazionale perché considera il dominio globale; la condizione di collasso è infatti unica perché, in presenza di attrito sufficiente, vale la legge di normalità dei materiali standard. Il fatto di aver qui individuato i due domini  $H^{r.e}$  e  $H^{r.i}$  dell' $H$  rotazionale ha una logica di carattere analitico e applicativo dal momento che al diminuire dello spessore in dipendenza della forma dell'arco o il range di  $H^{r.i}$  o il range di  $H^{r.e}$  scompare.

È chiaro che il collasso della struttura in muratura avverrà quando la curva delle pressioni non potrà più essere contenuta all'interno dell'opera lapidea. Prendendo dapprima un materiale (tipo suolo) avente attrito e coesione (resistenza a taglio), Coulomb determina il valore di  $H$  necessario a causare il crollo dell'arco per scorrimento lungo il giunto  $Mm$ . Il crollo dell'arco è così dipendente dalle proprietà del materiale. Tuttavia Coulomb nota immediatamente che "l'attrito per il materiale usato nella costruzione è spesso così grande che i conci non possono mai scivolare l'uno sull'altro".

Egli, allora, conclude che se si ha un cedimento nella sezione  $Mm$ , esso deve avvenire per rotazione di una porzione dell'arco intorno a  $M$  o a  $m$ .

Coulomb nota, inoltre, che la curva delle pressioni non può supporre passante per i punti  $G$  o  $M$  - dal momento che ciò potrebbe provocare tensioni infinite - ed il crollo deve avvenire quando la curva delle pressioni si avvicina sufficientemente all'estradosso o all'intradosso.<sup>173</sup>

Nel *Remarque I* Coulomb dice che nei materiali usati per la costruzione dell'arco spesso l'attrito è abbastanza grande da rendere impossibile lo scorrimento dei conci l'uno sull'altro. Allora accettato questo, il tipo di collasso proposto da Coulomb, che prevede la formazione di cerniere agli estremi liberi, sembra essere l'unico tipo di collasso possibile.

Assumendo, inoltre, (con Coulomb) che la coesione dei giunti possa essere trascurata, allora, la spinta orizzontale necessaria per la stabilità dell'arco risiede tra due limiti; nella Fig. 14 di Coulomb (Fig. 3.10), questi limiti corrispondono alla rotazione intorno al punto  $M$  all'intradosso o intorno al punto  $m$  all'estradosso ed i valori sono rispettivamente:  $\varphi \cdot gM/MQ$  e  $\varphi \cdot qg'/mq$ . Ora queste espressioni per il valore della spinta dell'arco contengono informazioni sulla densità del materiale e sulle dimensioni dell'arco, ma non contengono informazioni che corrispondono

---

<sup>173</sup> Heyman J., 1966, *ibidem*; pagg. 241-242.

alla resistenza del materiale; esse sono dunque delle espressioni puramente geometriche della stabilità dell'arco. È vero che il giunto reale di frattura del Mm deve essere determinato, ma anche questo è un problema da risolvere in termini geometrici (come Coulomb annota nel suo *Remarque II*, il trial and error è un metodo veloce e facile). Così l'ipotesi di collasso per formazione di cerniere ha condotto alla conclusione che la resistenza del materiale non è importante nell'analisi a collasso degli archi; non c'è ragione, ad esempio, di considerare lo schiacciamento della pietra.<sup>174</sup>

La curva delle pressioni può arrivare fino all'ultima posizione possibile, egli, infatti, considera un comportamento rigido-plastico e non uno elasto-plastico.<sup>175</sup>

In questo lavoro Coulomb si riferisce continuamente alle sue condizioni di equilibrio, la prima (per scorrimento) e la seconda (per rotazione). Se i conci non possono scivolare l'uno sull'altro, allora la prima condizione può essere ignorata e Coulomb deduce l'unica condizione necessaria a confermare la stabilità di un arco, precisando che la curva delle pressioni dovrebbe giacere ovunque all'interno dello spessore della muratura. Questa è la conclusione del lavoro di Coulomb sull'arco, conclusione straordinaria supportata con argomenti matematici.<sup>176</sup>

---

<sup>174</sup> Heyman J., 1966, *ibidem*, pagg. 162-163.

<sup>175</sup> Heyman J., 1966, *ibidem*, pag. 164.

<sup>176</sup> Heyman J., 1966, *ibidem*, pag. 181.

## IV. JOAQUIN MONASTERIO

### IV.1. INTRODUZIONE

Secondo Fernando Sáenz Ridruejo<sup>177</sup> il nome Monasterio, posto sul frontespizio del manoscritto, appartiene all'autore, l'Ingegnere Civile Joaquin Monasterio che fu uno dei primi laureati dell' "Antica" *Escuela de Caminos* fondata da Agustín de Betancourt nel 1802.

Le informazioni su questo autore sono poche. Rumeu<sup>178</sup> lo cita semplicemente e Sáenz<sup>179</sup> è l'unico a fornire notizie certe: Monasterio si laurea nel 1804, si propone come professore all'Accademia della Scienza nel 1809 e nel 1810 diventa *Ingeniero de 1ª Clase*. Dopo il 1810 non si hanno informazioni su di Lui. Secondo Sáenz, Monasterio scrive il suo Manoscritto *Nueva Teórica sobre el empuje de las bóvedas*<sup>180</sup> tra il 1805 ed il 1806, anno in cui la *Escuela de Caminos* restò chiusa.

Si noti che nel Manoscritto sono citati i lavori sulla teoria delle volte di Coulomb del 1773, di Bossut del 1778 e la prima edizione del terzo volume sulle volte di Rondelet del 1805, pertanto, si può, quasi certamente, affermare che la stesura del Manoscritto sia avvenuta tra il 1805 ed il 1810.

Il Manoscritto arrivò nelle mani di Eduardo Saavedra, uno dei più importanti Ingegneri spagnoli del diciannovesimo secolo, il quale in una nota scrive:

Este trabajo es de un profesor de la primitiva Escuela de Caminos llamado Monasterio, y me lo regaló mi maestro D. Francisco de Travesedo.

Saavedra stesso include il Manoscritto nella lista della Bibliografia Spagnola, che ha come soggetto le volte, che Egli scrive per il Dizionario di Clairac<sup>181</sup> e farà parte della sua Biblioteca privata fino a quando, in data sconosciuta, sarà donato alla Biblioteca dell'*Escuela de Caminos*.

Le 90 pagine numerate sono suddivise in un'Introduzione, in tre Capitoli dedicati all'analisi dei meccanismi di collasso degli archi e in un IV Capitolo dedicato alla ricerca del giusto spessore da dare ai piedritti degli archi per evitarne il collasso. Il manoscritto è corredato da due Tavole

---

<sup>177</sup> Sáenz Ridruejo F., 1990. *Ingenieros de Caminos del siglo XIX*. Madrid: Colegio Oficial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

<sup>178</sup> Rumeu de Armas A., 1980, *Ciencia y tecnología en la España Ilustrada: la Escuela de Caminos y Canales*. Madrid: Turner.

<sup>179</sup> Saenz Ridruejo F., 1998. *Private communication*.

<sup>180</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teórica sobre el empuje de las bóvedas*, Manoscritto non pubblicato, Biblioteca della Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos della Universidad Politécnica de Madrid. Ed. by S. Huerta and F. Foce. with english translation. Madrid, Instituto Juan de Herrera (in stampa).

<sup>181</sup> Saavedra E., 1877. Art. Bóveda. In: *Clairac y Saenz, Pelayo. 1877-1908. Diccionario General de Arquitectura e Ingeniería*. Madrid. 4 vols.

contenenti 25 Figure che descrivono i diversi meccanismi di collasso analizzati.

Nell'analisi di tutti i problemi che si prefigge di risolvere, Monasterio applica sempre la stessa metodologia, Egli ipotizza un meccanismo di collasso per la struttura in esame (volte o piedritti) e cerca la condizione limite tra equilibrio e collasso per ottenere i valori limite dei parametri di progettazione che egli intende determinare. Per raggiungere tale risultato egli adotta il metodo teorico dei *Maximis e Minimis* proposto da Coulomb.<sup>182</sup>

Le sue analisi riguardano i meccanismi di collasso per archi generici, non simmetrici e di spessore non uniforme, un argomento raramente indagato e probabilmente mai affrontato prima di Lui. Il suo scopo è quello di trovare espressioni generali per prevenire tutti i possibili meccanismi di collasso, applicabili ad ogni arco, di qualsiasi forma e spessore. Egli si preoccupa, inoltre, di ricercare la reale, effettiva frattura nei piedritti in muratura.

Così, allora, se la teoria delle volte ha come scopo quello di impedire che l'arco collassi e quello di evitare alterazioni che possano compromettere la sua stabilità, è chiaro che questa teoria non sarà svolta correttamente se per prima cosa non si scoprono i possibili movimenti delle diverse parti dell'arco. Successivamente, dopo aver acquisito tali informazioni, sarà possibile trovare le condizioni corrispondenti che impediscono uno per uno i possibili movimenti; si avrà che le applicazioni di questo metodo risulteranno utili alla pratica e saranno prive degli errori commessi finora.<sup>183</sup>

Monasterio deduce in primo luogo le condizioni generali di equilibrio da rispettare al fine di evitare che i modi di collasso da lui descritti si verifichino, poi specializza le condizioni generali al caso di archi simmetrici e le applica a volte e cupole con geometria semplice, in modo che egli possa ottenere risultati quantitativi confrontabili con quelli precedentemente ottenuti.

È bene precisare, però, che non tutto dell'analisi effettuata da Monasterio è corretto e che il suo processo deduttivo non è sempre chiaramente indicato. In ogni caso, il Manoscritto contiene materiale sufficiente per

---

<sup>182</sup> Albuérne A, Huerta S., 2010, Coulomb's theory of arches in Spain ca. 1800: the manuscript of Joaquín Monasterio. ARCH'10 – 6th International Conference on Arch Bridges, 11-13 Ottobre 2010, Fuzhou, Cina.

<sup>183</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teórica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 3-4: *Así, pues, si la teórica de Bóvedas ha de tener por objeto impedir que los arcos se vengán abajo, y que padezcan alteraciones susceptibles de perjudicar a su solidez, es claro que no las desempeñaremos debidamente, mientras no se averigüen primero todos los movimientos que pueden adquirir las diferentes partes en que se divide una bóveda, para hallar después con arreglo a este conocimiento las condiciones correspondientes a evitar cada uno de aquellos movimientos en particular: y sólo siguiendo el camino trazado por este raciocinio, conseguiremos que nuestras aplicaciones sean útiles a la práctica, y estén exentas de los errors cometidos hasta aquí.*

garantire una qualità teorica superiore rispetto ai lavori precedenti e successivi sullo stesso tema, persino rispetto a quei lavori definiti storicamente i migliori.<sup>184</sup>

#### IV.2. INTRODUZIONE DEL TRATTATO

È molto strano che la Teoria delle Volte, essendo una delle branche della Meccanica che meglio si presta all'analisi per conoscere le leggi dei principali elementi fisici che la interessano, sia stata trattata finora con inesattezza nonostante abbia avuto un'applicazione immediata nella pratica e la sua utilità sia la più conosciuta.<sup>185</sup>

E Monasterio continua:

Se si consultano le opere di autori che si occupano di questa materia per la prima volta, nonostante le loro conoscenze si limitino a dare soltanto regole pratiche sulla costruzione, troveremo un insieme confuso di principi di Geometria e Statica compresi ed applicati erroneamente; e, se si esaminano le opere di coloro il cui merito nell'analisi è ben noto per la saggezza con la quale hanno svolto temi molto importanti, vedremo unicamente calcoli fondati su false ipotesi o formule inutili per l'arbitrarietà e per le restrizioni che sono state ottenute al solo scopo di evitare alcuni movimenti e non per ciò che comunemente richiedono le volte. Questi ultimi autori, per non fermarsi a guardare il problema nella giusta prospettiva, seguendo la stessa procedura che si osserva nei problemi elementari della Meccanica, hanno creduto che per assicurarsi la stabilità di un arco bastasse risolvere due quesiti per impedire separatamente i movimenti di scorrimento e di rotazione; questo metodo, però, applicato alle volte risulta essere insufficiente sia per la teoria sia per le osservazioni.<sup>186</sup>

Si noti che Monasterio inizia il suo Trattato facendo osservazioni critiche su quanto era stato fatto fino ad allora sulla teoria generale dell'arco murario e di seguito descrive il metodo di indagine che gli servirà per stabilire la sua teoria.

---

<sup>184</sup> Huerta S, Foce F., 2003, Vault theory in Spain between XVIIIth and XIXth century: Monasterio's unpublished manuscript *Nueva teorica sobre el empuje de bóvedas*. . In S. Huerta (ed.), *Proceedings of the First International Congress on Construction History, Madrid, 20-24 January 2003*, p.1155-1166. Madrid: Instituto Juan de Herrera.

<sup>185</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*. Pag. 3: *Es bien extraño que la teórica de bóvedas, siendo uno de los ramos de mecánica que mejor se prestan al análisis por conocerse suficientemente las leyes de los principales elementos físicos que entran en su discusión, haya sido tratada hasta el presente con tan poca exactitud y extensión, no obstante de tener una aplicación muy inmediata a la práctica y ser su utilidad de las más conocidas.*

<sup>186</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 3.

Egli scrive:

L'arco è un insieme di elementi chiamati conci capaci, sia per forma sia per alloggiamento, di muoversi in modi differenti. Per ridurre allo stato di equilibrio un sistema di corpi legati tra loro e sollecitati da diverse forze è necessario considerare tante condizioni che soddisfino i tanti e diversi movimenti che potrebbero verificarsi. Così, allora, se la teoria delle volte ha come scopo quello di impedire che l'arco collassi, e quello di evitare alterazioni che possano compromettere la sua stabilità, è chiaro che questa teoria non sarà svolta correttamente se per prima cosa non si scoprono i possibili movimenti delle diverse parti dell'arco. In seguito, dopo aver acquisito tali informazioni, sarà possibile trovare le condizioni corrispondenti che impediscono uno per uno i possibili movimenti; si avrà che le applicazioni di questo metodo saranno utili alla pratica e saranno prive degli errori commessi finora.<sup>187</sup>

È vero che i movimenti di scorrimento e rotazione sono gli unici movimenti semplici conosciuti in Meccanica e che, basandosi su diversi principi, vanno discussi separatamente, ma non per questo sono le uniche due condizioni che devono essere soddisfatte per impedire il collasso delle volte.

Un arco qualsiasi può rompersi in uno, due, tre, o più pezzi ed, inoltre, ognuno di essi può muoversi ruotando intorno ad uno degli estremi del giunto di contatto oppure scorrendo su di esso.<sup>188</sup>

I conci, quindi, sono considerati come blocchi rigidi soggetti a vincoli unilaterali ed attrito e i loro movimenti possono essere di rotazione, assoluta o relativa, intorno agli angoli estremi del loro giunto di contatto e di scorrimento, assoluto o relativo, lungo il loro giunto di contatto.

È evidente che, in dipendenza delle diverse circostanze che portano ad un certo tipo di movimento, occorre modificare la forma delle condizioni che devono impedirlo in modo tale che l'esatta conoscenza di tutte le

---

<sup>187</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 3-4: *Sabemos que un arco es el agregado de varios cuerpos, a quienes se da el nombre de dovelas, capaces por su figura y colocación de moverse de diferentes maneras, y al mismo tiempo que para reducir al estado de reposo un sistema de cuerpos ligados entre sí y solicitados por varias fuerzas, es necesario tener tantas condiciones que satisfacer cuantos movimientos diferentes se pueden concebir en él: Así, pues, si la teórica de Bóvedas ha de tener por objeto impedir que los arcos se vengán abajo, y que padezcan alteraciones susceptibles de perjudicar a su solidez, es claro que no las desempeñaremos debidamente, mientras no se averigüen primero todos los movimientos que pueden adquirir las diferentes partes en que se divide una bóveda, para hallar después con arreglo a este conocimiento las condiciones correspondientes a evitar cada uno de aquellos movimientos en particular: y sólo siguiendo el camino trazado por este raciocinio, conseguiremos que nuestras aplicaciones sean útiles a la práctica, y estén exentas de los errores cometidos hasta aquí.*

<sup>188</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 4.



circostanze dipendano necessariamente dal numero di permutazioni che ammettono *due lettere* che rappresentano, una il movimento di scorrimento e l'altra il movimento di rotazione.<sup>189</sup>

Se con la lettera *t* si indica il movimento di scorrimento e con la lettera *r* quello di rotazione e se con esse si facessero tutte le possibili combinazioni, le diverse permutazioni farebbero conoscere i diversi tipi di movimento che potrebbero attivarsi nelle diverse parti di un arco, lasciando che il numero di "facce" di ogni permutazione espliciti il numero dei pezzi dell'arco che abbia la tendenza a muoversi e le lettere che la compongono mostrano, secondo il significato che gli sarà dato e l'ordine con cui sarà scritta, il tipo di movimento che si suppone faccia ogni concio dell'arco.<sup>190</sup>

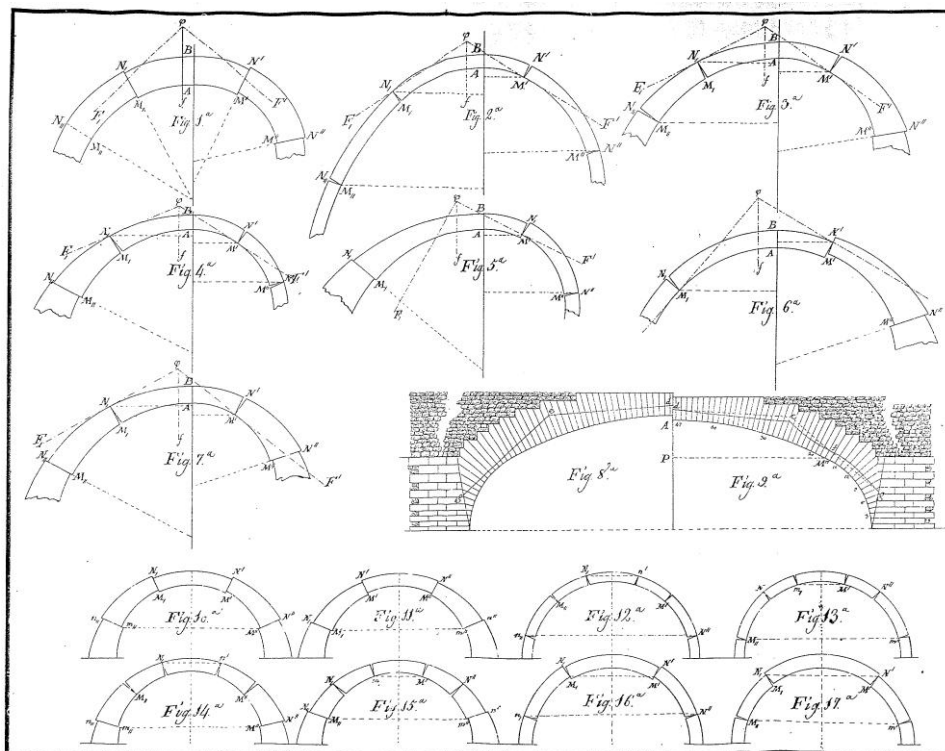


Fig. 4.1. Tavola I.<sup>191</sup>

Monasterio rappresenta i tipi di collasso di un arco non simmetrico mediante permutazioni delle lettere *t* e *r*, in cui il numero delle lettere indica il numero di conci che portano l'arco al collasso e l'ordine, da sinistra a destra, in cui le lettere sono scritte indica il tipo di movimento compiuto dai conci. Così convenuto, le permutazioni si presentano in quest'ordine:

$$t, r, tt, tr, rt, rr, ttr, trt, rtt, trr, rtr, rrt, rrr, ttt, ttr, ttrt, trtt, rttt, \text{etc.} \quad (4.1)$$

<sup>189</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 4.

<sup>190</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 4.

<sup>191</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*.

Si noti, che le prime due permutazioni e la sesta non possono essere tenute in conto perché visti i giunti su cui poggiano i conci, l'impenetrabilità degli stessi e la convessità dell'intradosso, un concio dell'arco non può scorrere separatamente come, allo stesso modo, due conci soltanto non possono ruotare, pertanto queste tre permutazioni devono essere scartate ed i meccanismi possibili diventano:

$$tt, tr, rt, ttr, trt, rtt, trr, rtr, rrt, rrr, ttt, ttr, ttrt, trtt, rttt, \text{ etc.} \quad (4.2)$$

Dal punto di vista matematico le permutazioni sono infinite ma dal punto di vista meccanico alcune di esse non sono cinematicamente ammissibili.

Si osservi ora, che tutte le permutazioni che considerano più di tre "facce", si possono decomporre, senza alterare l'ordine in cui sono scritte le lettere, in gruppi uguali a quello delle prime undici permutazioni. Non c'è dubbio sul fatto che, supposti evitati i movimenti espressi da queste undici permutazioni, essi devono essere ugualmente dedotti da tutte le altre. Per esempio, prendendo in esame la permutazione *trrtr*, essa è composta da *trr* e *rt*, due delle undici permutazioni per le quali si suppone non si verifichino i movimenti, ne consegue che i primi tre conci dell'arco *trr* si considerano uniti a formare un unico concio così come per gli ultimi due *rt*. Allora, il movimento dei cinque pezzi, espresso nella permutazione *trrtr*, è contenuto implicitamente in quelli che si riferiscono alle prime undici permutazioni:<sup>192</sup>

$$tt, tr, rt, ttr, trt, rtt, trr, rtr, rrt, rrr, ttt \quad (4.3)$$

A prima vista, facendo riflessioni analoghe a quelle fatte nell'esempio precedente, sembra che le permutazioni possano sempre essere ridotte però, è facile notare che questo modo di procedere, se applicato nella sua generalità, difetterebbe perché ci sono movimenti che non possono assolutamente verificarsi. A tal proposito, si noti che un arco si apre almeno in tre parti diverse.<sup>193</sup>

---

<sup>192</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 5: *Si observamos ahora que todas las permutaciones que constan de más de tres caras, se pueden descomponer, sin alterar el orden con que están escritas las letras, en grupos enteramente iguales a alguna de las once primeras permutaciones, no admite duda que suponiendo evitados los movimientos expresados por estas once, deben igualmente estar los que se deducen de todas las otras. Por ejemplo, la permutación trrtr se forma de las dos trr y tr, y como suponemos que no tienen lugar los movimientos expresados por estas dos últimas, quiere decir que los tres primeros trozos deben considerarse unidos y como formando uno solo, y de la misma suerte los otros dos últimos: luego el movimiento de cinco trozos, expresado por la permutación trrtr, esta implícitamente contenido en los que se refieren a las once primeras.*

<sup>193</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 6.

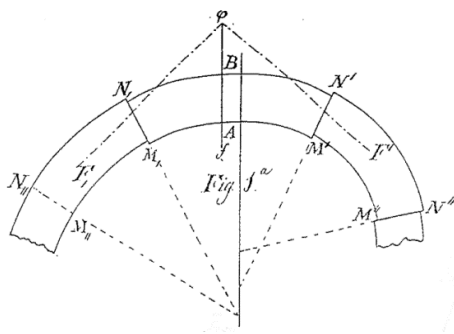
Ciò che si può fare è ridurre ancora al minor numero possibile le undici permutazioni che restano scartando le quattro  $ttr$ ,  $rtt$ ,  $rtr$  e  $ttt$ , perché, se si suppone che i primi due conci dell'arco compiano i movimenti espressi dalle prime due lettere di ognuna di queste permutazioni, si vedrà che esiste la possibilità del collasso dell'arco, senza che il terzo concio inizi a muoversi e per questo non è necessario introdurre l'altra condizione visto che il numero dei dati risulterebbe superiore a quello necessario per risolvere il problema.<sup>194</sup>

Ciò permette di escludere le quattro permutazioni  $ttr$ ,  $rtt$ ,  $rtr$  e  $ttt$  visto che i movimenti da loro espressi sono già contenuti nelle tre  $tt$ ,  $tr$  e  $rt$  tanto da permettere l'eliminazione della terza lettera.

Secondo Monasterio si può concludere dicendo che tutti i diversi movimenti con cui un arco può collassare sono contenuti nelle sette permutazioni seguenti:

$$tt, rrr, rrt, trr, tr, rt, trt \quad (4.4)$$

Il movimento espresso dalla prima  $tt$  permutazione è schematizzato nella Fig. 4.2 in cui i due conci  $M_I N^I$  e  $M^I N^{II}$  dell'arco scorrono lungo i loro giunti di contatto, il primo in direzione da  $N_I$  verso  $M_I$  e il secondo da  $M^{II}$  verso  $N^{II}$ .<sup>195</sup>



**Fig. 4.2.** Tavola I. Fig. 1<sup>a</sup>.

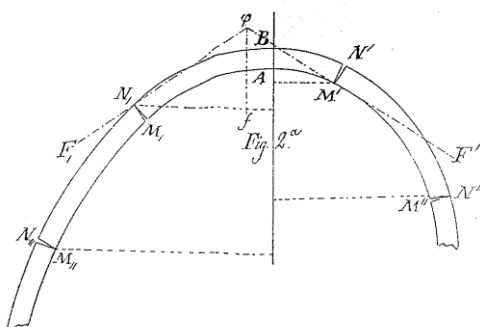
Il movimento espresso dalla permutazione  $rrr$  è schematizzato nella Fig. 4.3 in cui i tre conci  $M_{II} N_I$ ,  $N_I M^{II}$  e  $M^I N^{II}$  dell'arco si attivano contemporaneamente ruotando alternativamente intorno ai rispettivi spigoli estremi  $M_{II}$  all'intradosso,  $N_I$  all'estradosso,  $M^I$  all'intradosso e  $N^{II}$  all'estradosso.<sup>196</sup>

<sup>194</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 6.

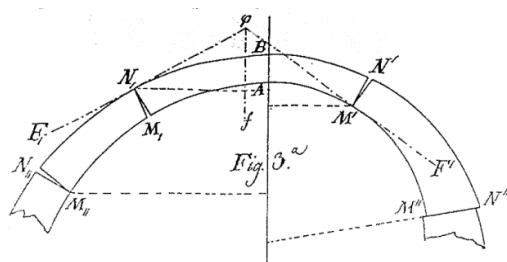
<sup>195</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 6.

<sup>196</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 6.

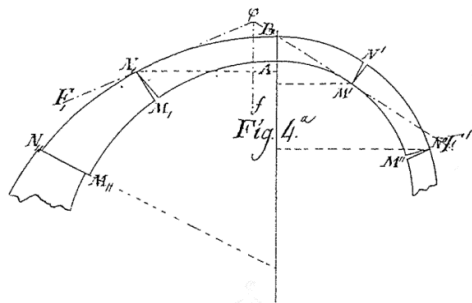
Nella Fig. 4.4 è schematizzato il movimento espresso dalla permutazione *rrt* e nella Fig. 4.5 il movimento espresso dalla permutazione *trr*.



**Fig. 4.3.** Tavola I. Fig. 2ª.



**Fig. 4.4.** Tavola I. Fig. 3ª.



**Fig. 4.5.** Tavola I. Fig. 4ª.

Si noti che il concio dell'arco  $M^I N^II$  in Fig. 4.4 ed il concio dell'arco  $M_{II} N_I$  in Fig 4.5 scorrono entrambi; il primo scorre avvicinandosi al centro dell'arco ed il secondo, in senso contrario, scorre allontanandosi dal centro dell'arco. Non ammettere questa differenza darebbe luogo ad un unico tipo di movimento al quale, per essere espresso, basterebbe una sola delle due permutazioni, *rrt* e *trr*.<sup>197</sup>

Nelle Figg. 4.6 e 4.7 sono descritti, rispettivamente, i movimenti espressi dalle permutazioni *tr* e *rt*. Anche in questo caso si può notare quanto evidenziato nelle Figg. 4.4 e 4.5 riguardo la direzione ed il verso dei concii

<sup>197</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 6.

che compiono movimento di scorrimento e, pertanto, per le stesse ragioni anche in questo caso, è necessario ammettere la differenza.<sup>198</sup>

Infine, il movimento espresso dalla permutazione *trt*, è descritto nella Fig. 4.8 in cui il primo concio dell'arco  $M_{II} N_I$  ed il terzo concio  $M_{II} N_I$ , e  $N_I M^I$  scorrono sui loro giunti di contatto in direzione opposta ed il secondo concio  $M^I M^{II}$  ruota intorno ai punti di contatto  $N_I$  e  $M^I$  comuni ai giunti di contatto di questo concio con gli altri due.<sup>199</sup>

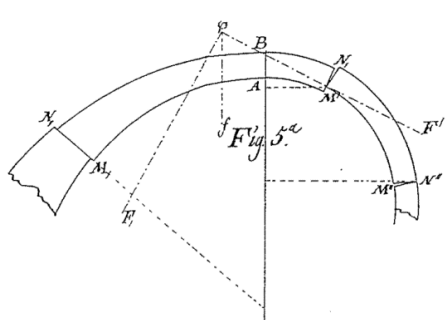


Fig. 4.6. Tavola I. Fig. 5ª.

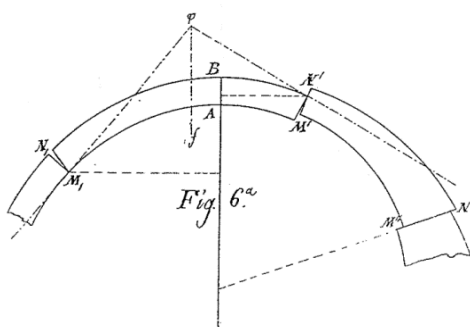


Fig. 4.7. Tavola I. Fig. 6ª.

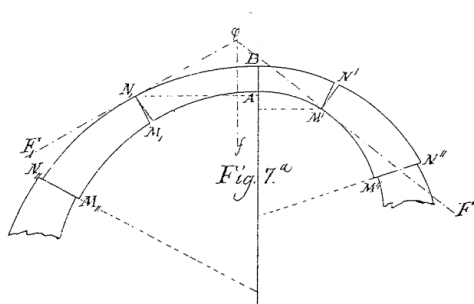


Fig. 4.8. Tavola I. Fig. 7ª.

Riassumendo, questi sono i sette tipi di movimento che è necessario impedire nelle volte, e per raggiungere tale obiettivo si deve ricercare e trovare lo stesso numero di condizioni; da qui in avanti i movimenti “puri” di scorrimento e rotazione saranno quelli rappresentati, rispettivamente, nelle Figg. 4.2 e 4.3 ed i movimenti “misti” di prima, seconda, terza, quarta e quinta specie, saranno quelli rappresentati, rispettivamente, nelle Figg. 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8.<sup>200</sup>

<sup>198</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 7.

<sup>199</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 6.

<sup>200</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 7: *Estas son en resumen las siete especies de movimientos que deben evitarse en las bóvedas, hallando un número igual de condiciones que se dirijan a conseguir dicho objeto; ... llamaremos desde aquí adelante movimientos “puros” de traslación y rotación a los expresados por las Figs. 1 y 2, y a los cinco restantes movimientos “mixtos” de primera, segunda, tercera, cuarta y quinta especies según el orden que guardan entre sí las Figs. 3, 4, 5, 6 y 7 que los representan.*

Questo Trattato sarà diviso in 4 capitoli: nel primo e nel secondo si troveranno e discuteranno rispettivamente le condizioni che impediscono i movimenti puri di scorrimento e di rotazione; nel terzo capitolo le condizioni corrispondenti ai cinque movimenti misti, e vista la complicazione delle sette condizioni generali quando gli archi non sono simmetrici, esse saranno ridotte ad altre più semplici ed ammissibili che favoriscano la solidità senza discostarsi troppo dalla precisione. Infine, nel quarto capitolo si applicherà la teoria esposta nei capitoli precedenti per cercare il giusto spessore da dare ai piedritti, supposti composti da diversi blocchi come nella realtà e non supposti come un solo blocco di pietra, come hanno finora tutti gli Autori. Questa differenza produce un'alterazione nei calcoli che non va sottovalutata.<sup>201</sup>

Lo scopo è quello di trovare la *robustez* delle volte che sia capace di farle resistere a tutti i tipi di *accidentes* a cui possono essere soggette nel tempo, ma, siccome è quasi impossibile trovarla, si dà loro la forma che rappresenta l'equilibrio perfetto in modo che la resistenza, che un qualsiasi concio della volta, oppone ai possibili movimenti a cui potrebbe essere sottoposto, sia sempre superiore alla forza o meglio alla potenza che lo spingerebbe a muoversi.

Allora, en este concepto, le sette formule, di cui sopra, non devono essere cercate in forma di equazioni bensì di condizioni separate da un segno di disequazione.<sup>202</sup>

In tal modo, determinando la forma dell'arco, scegliendo quella idonea alla funzione per cui esso deve essere costruito, l'arco potrà soddisfare le condizioni stabilite dalla teoria, aumentando o diminuendo alcune delle sue dimensioni affinché né l'intradosso né l'estradosso formino altre curve diverse da quella prevista, come invece sarebbe necessario fare per realizzarlo se ci si riducesse a trattare solo di equilibrio, perché in esso, al

---

<sup>201</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 7-8: *Así que dividiremos esta obra en cuatro capítulos: en el primero y segundo hallaremos y discutiremos respectivamente las condiciones con las que se evitan los movimientos puros de traslación y de rotación: en el tercero, las correspondientes a los cinco movimientos mixtos; y vista la complicación que conservan todas las siete condiciones generales cuando los arcos no son simétricos, las reduciremos a otras más sencillas, y de mas fácil discusión, valiéndonos para conseguir esto de una reflexión que haremos muy admisible, porque favorece la solidez sin desviarnos más que lo preciso de la exactitud. Últimamente, en el capítulo cuarto aplicaremos la doctrina expuesta en los anteriores a la investigación del grueso que deben tener los estribos, suponiéndolos compuestos de diferentes piezas que representan los sillares, tal cual se verifica en la práctica, y no formados de un solo trozo de piedra según lo han hecho hasta aquí todos los Autores: diferencia que produce una alteración notabilísima en los cálculos conforme veremos.*

<sup>202</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 8: *...y en este concepto las siete fórmulas arriba dichas no deben hallarse en forma de ecuaciones, sino de condiciones cuyos miembros se vean separados por uno de los signos conocidos de desigualdad.*

posto delle condizioni, avremmo solo equazioni che darebbero un valore fisso e determinato.<sup>203</sup>

Inoltre, gli archi possono essere divisi in tante parti diverse - i conci - in corrispondenza dei loro giunti di contatto. Per essere sicuri che le condizioni su citate si verificano lungo tutta l'estensione dell'arco ci si deve riferire alla posizione dei conci più *poderosa* per poterlo rovesciare; è chiaro che, se il movimento non si manifesta nei conci più disposti a muoversi, tantomeno si verificherà nei conci più *poderosi*. Da questo si deduce che la discussione delle formule deve essere finalizzata alla determinazione delle variabili in esse contenute, per mezzo della teoria dei *maximis* e *minimis*, e non basandosi su osservazioni pratiche.<sup>204</sup>

Coulomb avrebbe fatto meglio degli altri se avesse trattato i problemi con più generalità e se ne avesse risolti in numero maggiore. In tal caso non avrebbe confuso in una sola le due forze orizzontali, derivanti dal considerare un solo concio, ora come potenza ora come resistenza. Ipotesi che differenziano tali forze a seconda del tipo di movimento: movimento di rotazione o movimento di scorrimento quando si introduce l'attrito.<sup>205</sup>

Bossut<sup>206</sup> si è occupato principalmente dell'equilibrio allo scorrimento nelle volte e le sue formule sono mere speculazioni di calcolo. La sua risoluzione del problema per trovare lo spessore dei piedritti potrebbe essere utile nell'arte del costruire se egli avesse considerato il fatto che il concio superiore produce una spinta con movimento di rotazione e non di scorrimento visto che nella pratica non si verifica mai o rarissime volte.<sup>207</sup>

Le stesse cose dette per Bossut possono dirsi per le opere degli altri. Nell'analizzarle si notano i molti errori commessi nel modo di scomporre le forze e nell'ammettere alcune ipotesi di cui si parlerà alla fine di questo trattato, quando ci sarà una relazione con esse.

Questa premessa si conclude con due osservazioni, la prima riguarda la necessità di introdurre l'attrito, *el rozamiento*, e di conseguenza la coesione, *la coherencia del mortero*, dovuta alla malta posta fra i conci. In realtà la

---

<sup>203</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 8-9.

<sup>204</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 9.

<sup>205</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 9: *Veríamos que M. Coulomb la hubiera desempeñado mejor que ningún otro, si establecidos los problemas con mayor generalidad y resueltos en mayor número, no hubiera confundido en una sola las dos fuerzas horizontales dimanadas de considerar un trozo, ya como potencia, o ya como resistencia: suposiciones que hacen se diferencien entre sí aquellas fuerzas, constantemente en los movimientos de rotación, y en los de traslación cuando se introduce el rozamiento.*

<sup>206</sup> Bossut C., 1778, *Traité de Mécanique*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences année 1774, Paris.

<sup>207</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 9.

forza di coesione può essere trascurata perché risulta nulla o quasi quando gli archi sono di nuova costruzione e la malta è ancora fresca. I tempi a cui devono riferirsi le formule sono quelli in cui c'è più rischio di collasso per l'arco. Se si vuole dare solidità permanente all'arco e, quindi, far sì che tutte le sue parti restino in equilibrio, non si può non tener conto dell'effetto della forza passiva dell'attrito, che agisce come resistenza e impedisce il movimento che i pesi dei conci dell'arco cercano di attivare. La seconda osservazione riguarda *la materia* di cui è costituito l'arco; nella numerazione di tutti i movimenti che possono portare l'arco al collasso non si fa menzione di quello che proviene dal non tener conto della materia con cui l'arco è stato edificato, la consistenza sufficiente per resistere alle pressioni che i conci si scambiano reciprocamente.<sup>208</sup>

Monasterio specifica le ipotesi della sua analisi teorica, spiega il perché la coesione può essere trascurata, e perché sia necessario prendere in considerazione il ruolo dell'attrito.

A prima vista tale osservazione sembra priva di fondamento così come d'altra parte gli esperimenti fatti per conoscere e misurare la durezza della pietra danno dei risultati favorevoli alla pratica, ci si potrebbe, quindi, disinteressare al calcolo, se i conci, i piedritti ed altre parti dell'arco siano sufficientemente robusti per resistere, senza crollare, alle pressioni a cui essi sono sottoposti, sicuri che resisteranno, mentre le loro dimensioni, per piccole che possano sembrare, mantengono le proporzioni che esigono le condizioni di cui si è parlato precedentemente.<sup>209</sup>

Su quest'ultima osservazione si concentra un punto fondamentale dell'analisi limite moderna dell'arco; Monasterio afferma che è la stabilità globale, e non la resistenza locale, il tema principale delle strutture murarie.

#### **IV.3. IL METODO PROPOSTO DA MONASTERIO PER IMPEDIRE IL COLLASSO DI PURO SCORRIMENTO**

Nel primo capitolo del suo Trattato, Monasterio studia la prima permutazione *tt* corrispondente al collasso per puro scorrimento di un arco non simmetrico (Fig. 4.2).

---

<sup>208</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 10.

<sup>209</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 10-11: ... *a primera vista de fundamento, como por otra parte los experimentos hechos para conocer y medir la dureza de las piedras, dan unos resultados sumamente favorables a la práctica, podemos muy bien desentendernos de calcular si las dovelas, pilares y demás partes del arco tienen la suficiente robustez para aguantar sin desmoronarse las presiones que sufren, seguros de que la tendrán, mientras sus dimensiones, por pequeñas que parezcan con relación a este objeto, guarden las proporciones que exigen las demás consideraciones que llevamos mencionadas en los artículos anteriores.*



La procedura per stabilire la condizione di equilibrio si basa sul fatto che, al collasso, la direzione delle forze ai giunti di rottura è conosciuta (Fig. 4.9).

Le coordinate rispetto agli assi verticale ed orizzontale sono:

$$\begin{aligned} M_{II} &= (y_{II}, x_{II}); M_I = (y_I, x_I); N_I = (u_I, z_I); N_{II} = (u_{II}, z_{II}) \\ M^I &= (y^I, x^I); M^{II} = (y^{II}, x^{II}); N^I = (u^I, z^I); N^{II} = (u^{II}, z^{II}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

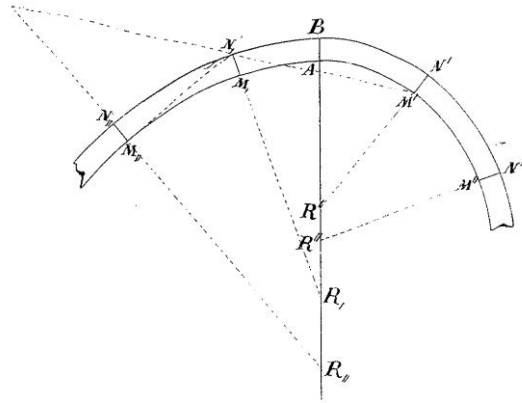


Fig. 4.9. Tavola II. Fig. 18<sup>a</sup>.

I pesi sono:

$$\begin{aligned} M_{II} &, \text{ peso del concio } AM_{II} N_{II} B \\ M_I &, \text{ peso del concio } AM_I N_I B \\ M^{II} &, \text{ peso del concio } AM^{II} N^{II} B \\ M^I &, \text{ peso del concio } AM^I N^I B \end{aligned} \quad (4.6)$$

Gli angoli sono:

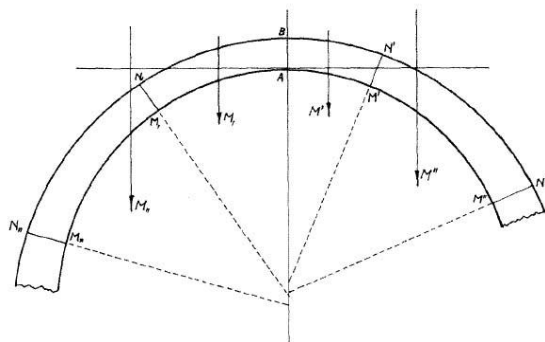
$$\begin{aligned} R_{II} &= \alpha_{II}, \text{ angolo fra l'asse verticale ed il giunto } M_{II} N_{II} \\ R_I &= \alpha_I, \text{ angolo fra l'asse verticale ed il giunto } M_I N_I \\ R^I &= \alpha^I, \text{ angolo fra l'asse verticale ed il giunto } M^I N^I \\ R^{II} &= \alpha^{II}, \text{ angolo fra l'asse verticale ed il giunto } M^{II} N^{II} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Lo spessore del concio in chiave è:

$$k = AB \quad (4.8)$$

e l'angolo di attrito è  $f$ .

A questo punto, Monasterio, considerando il movimento di puro scorrimento, decompone il concio in chiave in due conci ideali separati dalla linea verticale passante per il punto di massima altezza, cosicché il peso del concio in chiave può essere decomposto in due pesi, e cioè:  $M_I N^I = M^I + M_I$ .



**Fig. 4.10.** Schema generale che Monasterio adotta per un arco non simmetrico.

Nella condizione limite di equilibrio i due pesi determinano in corrispondenza dei giunti  $M^I N^I$  e  $M_I N_I$  due forze risultanti  $F^I$  e  $F_I$ , le quali formano con la verticale gli angoli  $\lambda^I$  e  $\lambda_I$ ; le forze  $F^I$  e  $F_I$  sono le risultanti di ciascuno dei due pesi dei conci ideali e della spinta  $H$ , scambiata in corrispondenza del giunto in chiave, spinta che a differenza di Coulomb Monasterio non considera in modo esplicito; il valore della spinta in chiave è di fatto tenuta in conto attraverso gli angoli  $\lambda^I$  e  $\lambda_I$  che le forze risultanti  $F^I$  e  $F_I$  formano con la verticale.

E poiché l'angolo che ciascuna delle due risultanti forma con la giacitura del giunto deve essere minore al complementare dell'angolo  $f$  che l'attrito forma con la normale al giunto perché ci sia scorrimento, per impedire lo scorrimento ai giunti  $M^I N^I$  e  $M_I N_I$  bisogna che:

$$\begin{aligned} \lambda_I &\geq 90^\circ - \alpha_I - f \\ \lambda^I &\geq 90^\circ - \alpha^I - f \end{aligned} \tag{4.9}$$

Si noti inoltre che gli angoli  $\lambda$  dipendono anche dal valore dei pesi  $M^I$  e  $M_I$  che a loro volta dipendono dalla scelta degli angoli  $\alpha$ ; anche adottando il metodo di Coulomb – cosa che Monasterio fa – ricercando i valori estremi degli angoli  $\lambda$  rispetto agli angoli  $\alpha$  e imponendo che il massimo dei minimi sia minore del minimo dei massimi, la disequazione così ottenuta sarebbe indeterminata perché dipenderebbe dal valore di  $H$  e, cioè, in definitiva dalle infinite curve delle pressioni staticamente ammissibili rispetto all'equilibrio rotazionale.

Monasterio conclude la sua analisi ai giunti imponendo la condizione di equilibrio rispetto allo scorrimento lungo il giunto  $M^II N^II$ , in cui la risultante dipende dal peso  $(M^II - M^I)$  e dalla forza  $F^I$ .

La condizione di equilibrio è data dalla seguente disequaglianza:

$$a^I M^{II} - b^I M^I - c^I M_I \geq 0 \quad (4.10)$$

in cui i coefficienti  $a^I$ ,  $b^I$  e  $c^I$  sono definiti dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} a^I &= \cos(\alpha^{II} - f) \operatorname{sen}(\alpha^I + f + \alpha_I + f) \\ b^I &= \cos(\alpha^I - f) \operatorname{sen}(\alpha^{II} + \alpha_I) = a^I + c^I \\ c^I &= \cos(\alpha_I + f) \operatorname{sen}(\alpha^{II} - f - \alpha^I - f) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Si noti che la dipendenza delle condizioni di equilibrio dagli angoli  $\lambda$  è scomparsa, dal momento che Monasterio decide di adottare per essi il valore corrispondente alle condizioni limite. Dopo alcune semplificazioni, Monasterio trasforma la (4.11) in:

$$\frac{M^{II} \cot(\alpha^{II} - f) - M^I \cot(\alpha^I + f)}{\operatorname{sen}(\alpha^I + f) / \operatorname{sen}(\alpha^{II} - f - \alpha^I - f)} + \frac{M^{II} \cot(\alpha^{II} - f) - M_I \cot(\alpha_I + f)}{\operatorname{sen}(\alpha_I + f) / \operatorname{sen}(\alpha^{II} + \alpha_I)} \geq 0 \quad (4.12)$$

ed osserva che il primo termine dipende dagli angoli  $\alpha^I$  e  $\alpha^{II}$  mentre il secondo dagli angoli  $\alpha_I$  e  $\alpha^{II}$ ; quindi se, ragionevolmente, si fissa  $\alpha^{II}$ , i due termini dipenderanno, rispettivamente, solo dagli angoli  $\alpha^I$  e  $\alpha_I$ .

In tal caso, i valori estremi corrispondenti potranno essere trovati rispetto ai diversi valori ad  $\alpha^I$  e  $\alpha_I$ , e se la loro somma sarà positiva, nella volta non si avrà scorrimento.

Per Monasterio la disequazione (4.12) rappresenta il punto da cui partire per poter studiare tutti i possibili casi. Primo fra tutti il caso in cui ci sia assenza di attrito ed occorre trovare l'equazione di equilibrio:

$$M = A \operatorname{tang} \alpha \quad (4.13)$$

Dove A è una costante e M è il peso del generico concio il cui giunto è individuato dall'angolo  $\alpha$ . Egli sostiene che quest'equazione, che con diversa formulazione si trova in tante altre opere che trattano l'equilibrio delle volte, era falsamente considerata come il fondamento di tutta la teoria.<sup>210</sup> Ad ogni modo, anche lui la utilizza nel caso di una volta con spessore  $k$  infinitesimo e, com'era prevedibile, trova l'equazione analitica della *catenaria plana o de cañon seguido*.

Monasterio utilizza la disequazione (4.12) per ricercare la condizione di equilibrio rispetto al collasso per puro scorrimento negli archi simmetrici in cui essa diventa:

$$M^{II} \cot(\alpha^{II} - f) - M^I \cot(\alpha^I + f) \geq 0 \quad (4.14)$$

<sup>210</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 22.

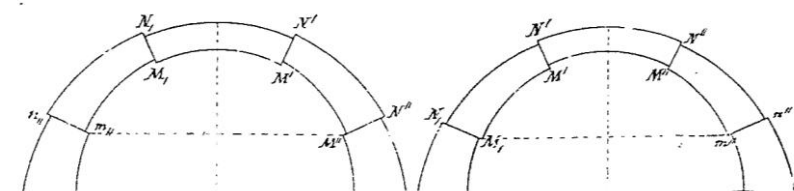
Essa sarà soddisfatta in tutti i giunti dell'arco se:

$$\min M^{\text{II}} \cot (\alpha^{\text{II}} - f) > \max M^{\text{I}} \cot (\alpha^{\text{I}} + f) \quad (4.15)$$

Questa condizione concorda perfettamente con la condizione di equilibrio trovata da Coulomb con il metodo dei *maximis et minimis*.

I due termini della (4.14) sono i valori della spinta orizzontale che soddisfano la condizione di equilibrio rispetto allo scorrimento verso l'esterno della volta lungo il giunto individuato dall'angolo  $\alpha^{\text{II}}$  e rispetto allo scorrimento verso l'interno della volta lungo il giunto individuato dall'angolo  $\alpha^{\text{I}}$ .

Monasterio, generalizzando il metodo di Coulomb, afferma che la disequazione (4.15) può essere utilizzata nello studio dei due modi di collasso opposti descritti nella Fig. 4.9 e chiaramente dipendenti dalla posizione dei giunti di rottura.



**Fig. 4.9.** Tavola I. Fig. 10<sup>a</sup> e Fig. 11<sup>a</sup>.

L'ulteriore utilizzo della disequazione (4.15) da parte di Monasterio, riguarda la determinazione del valore limite del coefficiente di attrito per cui si manifesta il collasso per puro scorrimento negli archi semicircolari con K costante<sup>211</sup>.

Egli trova che il collasso per scorrimento diventa possibile per valori del coefficiente d'attrito inferiori a:

$$\text{tang } f = 0,31 \quad (4.16)$$

e cioè quando il valore dell'angolo di attrito è:

$$f = 17^\circ \quad (4.17)$$

e gli angoli che individuano i giunti di rottura sono<sup>212</sup>:

$$\alpha^{\text{I}} = 29^\circ \text{ e } \alpha^{\text{II}} = 90^\circ \quad (4.18)$$

Tali valori coincidono perfettamente con quelli ottenibili utilizzando il metodo di Coulomb.

<sup>211</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 27.

<sup>212</sup> Sinopoli A., Corradi M., Foce F., 1997, *ibidem*, pp. 204-213.

#### IV.4. IL METODO PROPOSTO DA MONASTERIO PER IMPEDIRE IL COLLASSO RISPETTO ALLA ROTAZIONE

Nel secondo capitolo del suo Trattato, *De las condiciones que impiden los movimientos puros de rotación*, Monasterio studia la permutazione *rrr* corrispondente al collasso per rotazione di un arco non simmetrico (Fig. 4.3).

Egli osserva che al collasso possono essere indicate 4 condizioni:

1. la componente  $F^I$  del peso  $(M_I + M^I)$  deve passare per il punto d'intradosso  $M^I$ ;
2. la componente  $F_I$  del peso  $(M_I + M^I)$  deve passare per il punto d'estradosso  $N_I$ ;
3. il momento di  $F_I$ , rispetto al punto di intradosso  $M_{II}$ , deve essere più piccolo del momento del peso  $(M_{II} - M_I)$  rispetto allo stesso punto;
4. il momento di  $F^I$ , rispetto al punto di estradosso  $N^II$ , deve essere più grande del momento del peso  $(M^II - M^I)$  rispetto allo stesso punto.

Trattando analiticamente queste condizioni, Monasterio individua una disequazione quale condizione garante dell'equilibrio rispetto alla rotazione:

$$a^{II} M^{II} Z^{II} - b^{II} M^I X^I + c^{II} M_I Z_I - d^{II} M_{II} X_{II} \geq 0 \quad (4.19)$$

in cui i coefficienti  $a^{II}$ ,  $b^{II}$ ,  $c^{II}$  e  $d^{II}$  soddisfano opportune relazioni fra le coordinate dei centri di rotazione assoluta e relativa.

Egli specializza questa disequazione nelle volte con spessore  $K$  infinitesimo e trova lo stesso risultato trovato nel capitolo precedente: l'equazione analitica della *catenaria plana o de cañon seguido*.

Si occupa, poi, degli archi simmetrici e specializza la disequazione (4.19) per i due modi di collasso opposti descritti nella Fig. 4.10.

In particolare, egli analizza i casi in cui i giunti di rottura si aprono in chiave con cerniera in chiave all'estradosso o in chiave all'intradosso e trova le condizioni di stabilità nelle seguenti disequazioni:

$$\left\{ \left( M^{II} Z^{II} / z^{II} + k \right) - \left( M^I X^I / x^I + k \right) \right\} \geq 0 \quad (4.20)$$

e

$$\left\{ \left( M_I Z_I / z_I \right) - \left( M_{II} X_{II} / x_{II} \right) \right\} \geq 0 \quad (4.21)$$

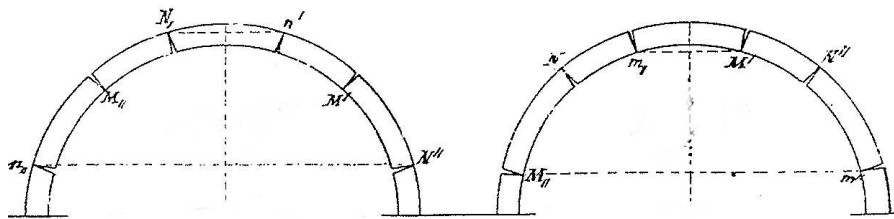


Fig. 4.10. Tavola I. Fig. 12<sup>a</sup> e Fig. 13<sup>a</sup>.

Queste disequaglianze, equivalenti alle condizioni di stabilità, scaturiscono dall'applicazione del metodo dei *maximis et minimis* di Coulomb. I due termini della disequazione (4.19) rappresentano i valori della spinta che soddisfano l'equilibrio rotazionale intorno alla cerniera di estradosso e di intradosso quando la spinta è applicata in chiave all'estradosso, ed i due termini della disequazione (4.20) rappresentano i valori della spinta che soddisfano l'equilibrio rotazionale intorno alla cerniera di intradosso e di estradosso quando la spinta è applicata in chiave all'intradosso.<sup>213</sup>

Oltre l'analisi teorica, Monasterio applica la disequaglianza (4.19) per la determinazione del minimo spessore di un arco semicircolare, un caso già studiato nel 1730 da Couplet ipotizzando a priori che i giunti di rottura fossero a 45° dalla chiave<sup>214</sup>. Couplet trovò uno spessore minimo pari a  $K = 0.1061 x$ , in cui  $x$  era il raggio di intradosso.

Invece, Monasterio, agendo per tentativi, trova che lo spessore minimo è compreso tra  $1/8 = 0.125$  e  $1/9 = 0.111$  del raggio di intradosso e la posizione del giunto di rottura alle reni si trova fra i 54° e 56° dalla chiave.

Questo risultato è quantitativamente corretto e concorda con i risultati trovati nel 1835 da Petit:  $K = 0.114 x$ . Nel 1907 Milankovitch<sup>215</sup> ottiene un valore più preciso per lo spessore pari a  $K = 0.1136 x$  e la posizione del giunto di rottura si trova a ~54° dalla chiave.

Monasterio generalizza il metodo dei massimi e dei minimi di Coulomb per ricercare i diversi modi di collasso degli archi non simmetrici ma la sua analisi non è dettagliata e spesso si fa fatica a seguire la linea di pensiero e le considerazioni che determinano alcune scelte. Il difetto maggiore della sua analisi consiste nella scelta di trattare il problema dell'individuazione dei meccanismi di collasso rispetto allo scorrimento come indipendenti da quello dell'individuazione delle condizioni di equilibrio rispetto alla rotazione. Un ulteriore difetto conseguenza del primo è l'implicita ipotesi che il meccanismo di collasso in presenza di scorrimento sia unico. Comunque tra i seguaci del metodo di Coulomb è l'unico ad averne compreso il metodo e ad aver cercato di generalizzarlo al caso più generale degli archi non simmetrici.

---

<sup>213</sup> Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas*, *ibidem*, pag. 42.

<sup>214</sup> Couplet P., 1730, *Seconde partie de l'examen de la poussée des voûtes*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences Paris, pagg. 117-141.

<sup>215</sup> Milankovitch M. 1907, Theorie der Druckkurven. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 55: 1-27.

## V. NICOLAS PERSY

### V.1. L'INTRODUZIONE DEL MEMOIRE

Seguendo la logica metodologica proposta da Coulomb, ma nel tentativo di generalizzare il suo metodo a tutte le tipologie di archi, si muove Nicolas Persy, docente del corso di Sciences mathématiques et physiques appliquées nella scuola militare di Metz dal 1802 al 1838.

Nel 1825 viene pubblicato il suo Mémoire *Cours sur la stabilité des constructions, à l'usage des élèves de l'école royale de l'Artillerie et du Génie*<sup>216</sup> che raccoglie tutte le lezioni del corso messe a disposizione da Persy ai suoi allievi (Fig.5.1).

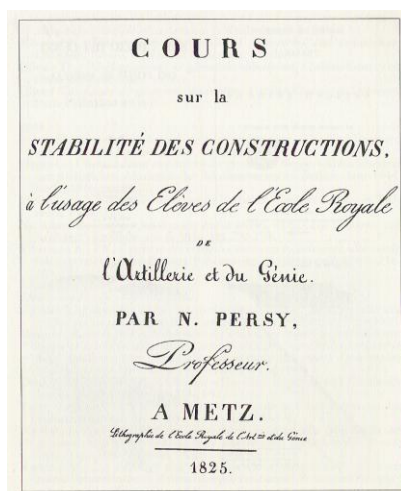


Fig. 5.1. Frontespizio del mémoire di Persy.

Nella parte preliminare del capitolo sulla *Stabilité des voûtes* del suo mémoire egli scrive:

5. Nel suo mémoire su qualche problema relativo all'architettura, Coulomb, essendosi proposto di valutare le supposizioni di La Hire<sup>217</sup>, ha cercato, tramite la considerazione dei maximum e dei minimum, i limiti delle spinte orizzontali applicate in un punto della chiave che, una semivolta, di forma e dimensioni date, può sopportare, senza rompersi, nell'ipotesi che i suoi conci siano trattenuti dalla coesione e dall'attrito. Questo abile ingegnere suppone la semivolta divisa in due parti (Fig. 5.2) da un giunto qualunque mn (il giunto Mm di Coulomb) di cui egli determina la posizione, tramite la condizione che la forza orizzontale X (la nostra spinta H) - applicata in un punto h (il punto S di Coulomb) della chiave e necessaria ad impedire alla parte superiore sia di scorrere verso il basso lungo questo giunto sia di ruotare intorno

<sup>216</sup> Persy Nicolas 1825, *Cours sur la stabilité des constructions, à l'usage des élèves de l'école royale de l'Artillerie et du Génie, Stabilité des voûtes*. Lithographie de l'Ecole Royale de l'Artillerie et du Génie, Metz; 2<sup>ème</sup> Edition Metz 1827; 4<sup>ème</sup> Edition Metz juillet 1834.

<sup>217</sup> La Hire P. De 1712, *Sur la construction des voûtes dans les édifices, ibidem*.

al suo intradosso - abbia il più grande valore possibile, condizione che gli fornisce due maximum, il più grande dei quali è il limite inferiore cercato.<sup>218</sup>

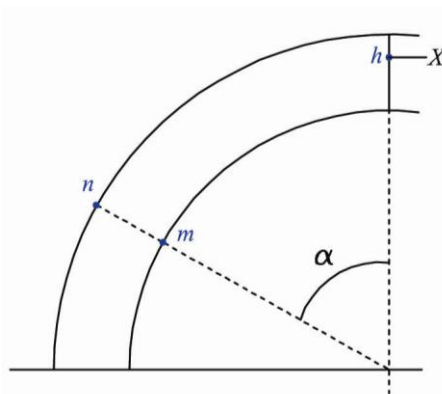


Fig. 5.2. Giunto qualunque mn.<sup>219</sup>

Persy suppone che Coulomb, individuati localmente al generico giunto  $\alpha$ , i valori minimi della spinta  $H_{max}^s(\alpha)$  e  $H_{max}^r(\alpha)$  capaci di garantire l'equilibrio – rispetto sia allo scorrimento verso il basso sia alla rotazione intorno all'intradosso – cerchi di tali minimi i due valori massimi, rispetto a tutto l'arco, per individuare il massimo assoluto fra i due ed associare a tale valore - che costituisce il limite inferiore dei valori della spinta H - un giunto luogo di rottura della semivolta. Il problema locale gli fornisce due valori minimi relativi di cui cerca il massimo assoluto affrontando il problema globale, al variare del giunto dalla chiave all'imposta. Tale massimo assoluto può essere sia di scorrimento sia di rotazione mentre per Coulomb, con il Remarque I, può essere solo di rotazione.

Il limite inferiore dei valori della spinta H, al di sopra del quale l'equilibrio è garantito, secondo Persy, sarebbe il massimo assoluto fra i due massimi, di  $H^s$  e di  $H^r$ , dei rispettivi valori minimi cioè:

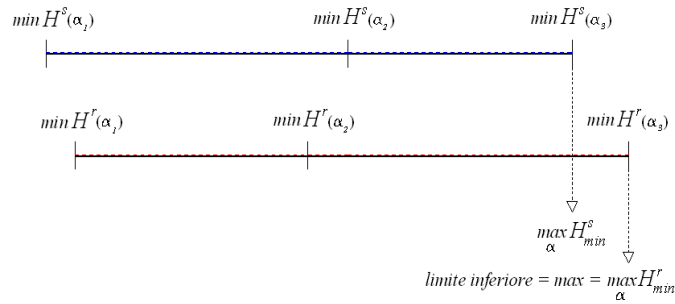
$$\text{limite inferiore } H = \max \left[ \max_{\alpha} H_{min}^s(\alpha), \max_{\alpha} H_{min}^r(\alpha) \right] \quad (5.1a)$$

Nella Fig. 5.3a a sinistra di ogni valore minimo non esiste equilibrio rispetto al punto considerato.

<sup>218</sup> Persy N. 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pagg. 98-99 : 5. Dans son mémoire sur quelques problèmes relatifs à l'architecture, Coulomb s'étant proposé d'apprécier les suppositions de La Hire, a cherché par la considération des maximum et minimum les limites des pressions horizontales que peut soutenir, à un point de la clef, sans se rompre, une demi-voûte dont la forme et les dimensions sont données et dont les voussoirs sont retenus par la cohésion et le frottement. Cet habile Ingénieur suppose la demi-voûte divisée en deux parties par un joint quelconque mn dont il détermine la position, par la condition que la force horizontale X, appliquée à un point h de la clef et nécessaire pour empêcher la partie supérieure soit de descendre le long de ce joint, soit de tourner autour de son intrados, ait la plus grande valeur possible, ce qui lui donne deux maximum dont le plus grand est la limite inférieure cherchée.

<sup>219</sup> Persy N. 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 99 : Figure 3.





**Fig. 5.3a.** Un esempio di ricerca del limite inferiore.

Analogamente e per simmetria, Persy introduce la ricerca del limite superiore:

Di seguito egli (Coulomb) cerca di determinare la posizione dell'ipotetico giunto mn, tramite la condizione che la forza X (H), applicata in un punto h della chiave e necessaria ad impedire alla parte superiore sia di scorrere verso l'alto lungo questo giunto sia di ruotare intorno al suo estradosso – abbia il più piccolo valore possibile; egli ottiene due minimum di cui il più piccolo è il limite superiore cercato.<sup>220</sup>

Persy suppone, allora, che Coulomb, individuati localmente al generico giunto  $\alpha$ , i valori massimi della spinta  $H_{max}^s(\alpha)$  e  $H_{max}^r(\alpha)$  capaci di garantire l'equilibrio – rispetto sia allo scorrimento verso l'alto sia alla rotazione intorno all'estradosso – cerchi di tali massimi i due valori minimi, rispetto a tutto l'arco, per individuare il minimo assoluto fra i due ed associare a tale valore - che costituisce il limite superiore dei valori della spinta - un giunto luogo di rottura della semivolta.

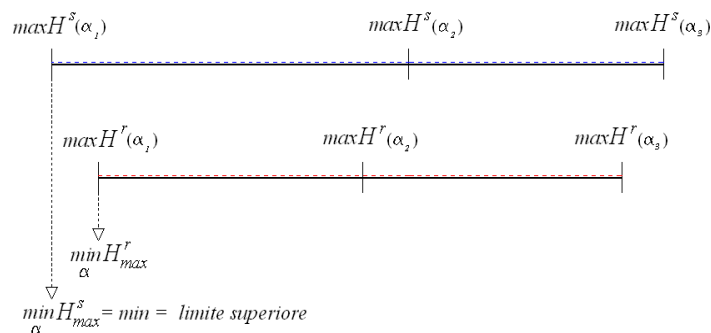
Quindi, il problema locale gli fornisce due massimi relativi di cui cerca, affrontando il problema globale, il minimo assoluto al variare del giunto dalla chiave all'imposta.

Il limite superiore dei valori della spinta al di sotto del quale l'equilibrio è garantito, secondo Persy, sarebbe il minimo assoluto fra i due minimi, di  $H^s$  e di  $H^r$ , dei rispettivi valori massimi cioè:

$$\text{limite superiore } H = \min \left[ \min_{\alpha} H_{max}^s(\alpha), \min_{\alpha} H_{max}^r(\alpha) \right] \quad (5.1b)$$

Nella Fig. 5.3b a destra di ogni valore massimo non esiste equilibrio rispetto al punto considerato.

<sup>220</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 99 . *Déterminant ensuite la position du joint hypothétique, par la condition que la force appliquée à la clef et capable soit de faire monter la partie supérieure., le long de ce joint, soit de la faire tourner autour de l'extrados, ait la moindre valeur possible, il obtient deux minimum dont le plus petit est la limite supérieure demandée.*



**Fig. 5.3b.** Un esempio di ricerca del limite superiore.

Riepilogando, i *maximum* ed i *minimum* di cui parla Persy, nell'introduzione della sua teoria, non sono i massimi ed i minimi di ogni singolo range, quello rispetto agli scorrimenti  $H^s$  e quello rispetto alle rotazioni  $H^r$ , come fa Coulomb, ma i massimi ed i minimi del range che si ottiene dall'intersezione dei due. E questo dal punto di vista teorico è inaccettabile. È vero che Coulomb dopo aver determinato  $H^s$  e  $H^r$ , propone l'intersezione, ma di fatto egli considera soltanto il caso in cui  $H^r$  è contenuto in  $H^s$  (Remarque I). Come dettato dalla teoria della plasticità questa è la condizione richiesta perché l'upper e il lower bound theorems ammettano un'unica condizione di collasso. Persy continua scrivendo:

Il primo limite (il limite inferiore: il massimo fra i due massimi dei valori minimi di  $H^s$  e di  $H^r$ ) costituisce, nello stesso tempo, sia la più grande spinta sia la spinta effettiva della volta, agente nel punto h, mentre, il giunto che reagisce a questa spinta è il giunto di rottura corrispondente ed è evidente che la volta, sostenuta nel punto h, non potrà rimanere in equilibrio se questo primo limite non risulterà più piccolo del secondo (il minimo fra i due minimi dei valori massimi di  $H^s$  e di  $H^r$ ).<sup>221</sup>

Da questa frase si evince che, Persy immagina una volta che lavora in condizioni di massima spinta, ma il primo limite che lui considera è di fatto un limite inferiore, cioè un valore minimo. Egli afferma, inoltre, che tale limite inferiore è, allo stesso tempo, la più grande spinta (che non è vero) e la spinta effettiva; ma, questo succede solo quando il range si riduce ad un unico punto, cioè in condizione di collasso. È vero, invece, che, affinché ci sia equilibrio il limite inferiore deve essere più piccolo del limite superiore.

Egli associa, inoltre, sia al limite inferiore sia al limite superiore di H un giunto di rottura e, quindi, un meccanismo di collasso. Al contrario, Coulomb non intende determinare la posizione del giunto cui è associato il

<sup>221</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 99 : *La première limite constitue en même temps la plus grande pression ou la pression effective de la voûte, contre le point h tandis que le joint qui répond à cette pression, est le joint de rupture relatif et il est évident que la voûte soutenue en h, ne pourra subsister si cette première limite ne se trouve pas moindre que la seconde.*

valore minimo o il valore massimo ammissibile per la spinta; ma, pensando all'equilibrio, egli intende individuare il range dei valori della spinta all'interno del quale l'equilibrio è garantito. Coulomb giunge ad individuare la condizione di collasso solo quando l'equilibrio non è più possibile, e questo avviene quando il range si riduce ad un unico punto. È opportuno precisare, inoltre, giusto per evidenziare le differenze nel metodo, che Coulomb determina, prima, il range rispetto agli scorrimenti, di seguito quello rispetto alle rotazioni e, una volta ottenuti i due range, richiede che quello delle rotazioni sia interno a quello degli scorrimenti. Il metodo di Persy invece è interessato al confronto degli estremi dei due differenti range e questo in generale è scorretto per la validità dei teoremi della plasticità.

Che Persy parlando del giunto candidato alla rottura prefiguri collassi possibili della struttura è confermato da ciò che scrive:

Questo metodo così ingegnoso non è solo indirizzato all'utilità pratica di bandire l'arbitrarietà della posizione del giunto di rottura e del modo di muoversi dei conci – a causa del valore della spinta – ma il suo intento è quello di ottenere una teoria esatta, che si accorda con i fenomeni reali e con la previsione degli stessi, tenendo conto di tutte le loro circostanze, purché si considerino le differenti posizioni che può assumere il punto di applicazione  $h$ , della spinta che si produce in chiave, in una volta intera, dovuta all'azione reciproca delle due metà, l'una sull'altra. Coulomb non ha sviluppato il suo metodo; egli si è limitato a qualche vaga indicazione che lascia il metodo imperfetto ed inoltre, a giudicare dal Remarque I del § XVI del suo mémoire, sembra che le prime prove sulla rottura delle volte – prove riportate nel taglio delle pietre di Frézier<sup>222</sup> – l'avrebbero indotto a desistere dalla generalità nella quale, all'inizio, era stato concepito questo metodo.<sup>223</sup>

---

<sup>222</sup> Frézier Amédée François 1737-1739, *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois pour la construction des voûtes...ou Traité de stéréotomie*, Strasbourg-Paris, seguito da *Eléments de stéréotomie à l'usage de l'architecture pour la coupe des pierres* 1760, Paris.

<sup>223</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 99 : *Cette méthode très ingénieuse et dirigée vers l'utilité pratique à l'avantage non seulement de bannir l'arbitraire tant de la position du joint de rupture, que du mode d'action des voussoirs, par conséquent de la valeur de la poussée ; mais encore de conduire à une théorie aussi exacte que lumineuse, qui s'accorde avec les phénomènes réels et même les fait prévoir avec toutes leurs circonstances, pourvu que l'on considère les différentes positions que peut naturellement avoir le point d'application  $h$  de la force ou pression qui se produit à la clef, dans une voûte complète, par l'action réciproque des deux moitiés l'une sur l'autre. Coulomb n'a pas développé sa méthode ; il s'est borné à quelques indications vagues qui la laissent imparfaite, et même à en juger par la remarque I du § XVI de son mémoire, il paraît que les premières épreuves sur la rupture des voûtes, épreuves rapportées dans la coupe des pierres de Frézier, l'auraient induit à se désister de la généralité dans laquelle il avait d'abord conçu cette méthode.*

Da queste considerazioni si evince che Persy considera il Remarque I limitativo, ed invece è proprio il Remarque I a rendere corretta la teoria di Coulomb.

6. Infine le osservazioni fatte sui grandi ponti costruiti verso la fine del secolo scorso, e le esperienze dirette sulla rottura delle volte, hanno constatato che, generalmente parlando, i conci di una volta non si comportano come dei cunei in cui le azioni reciproche si controbilanciano, ma che la volta si divide, effettivamente in più parti continue che, agiscono le une sulle altre tramite punti d'appoggio, come delle leve inflessibili e pesanti, assemblate con cerniere; fatto incontestabile, che è stato preso come base immediata di teorie che, i loro autori presentano come originali, la maggior parte senza citare Coulomb, il cui metodo rivela questo fatto fondamentale e a cui appartiene il principio essenziale, relativo alla determinazione del giunto di rottura.<sup>224</sup>

Persy parla contemporaneamente di condizioni di esercizio – in cui il fatto che nei conci le azioni reciproche si controbilanciano è vera – e di condizioni di collasso – in cui il discorso sulle leve è accettabile – egli continua affermando:

Queste teorie si fondano principalmente sulle esperienze del Signor Boistard<sup>225</sup>, in cui le volte avevano costantemente uno spessore di 1/24 dell'apertura che era di 8 (1/3): esse suppongono, come conseguenza, che dei due giunti, cioè, quello di rottura, ossia della pressione più grande<sup>226</sup> e quello intorno all'estradosso<sup>227</sup> intorno al quale questa forza tende a far ruotare la parte superiore, l'uno o l'altro si trova sempre posizionato alla base della volta, questo non è esatto; tanto che queste teorie possono dare per stabili delle volte soggette a rompersi e

---

<sup>224</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pagg. 99 - 100 ; 6. *Enfin les observations faites sur les grands ponts construits vers la fin du siècle dernier, et des expériences directes sur la rupture des voûtes, ont constaté que, généralement parlant, les voussoirs d'une voûte ne se comportent pas comme des coins dont les actions réciproques se contrebalaient ; mais que la voûte se partage effectivement en plusieurs parties continues qui agissent les unes sur les autres par des points d'appui, de la même manière que des leviers inflexibles et pesants, assemblés à charnières ; fait incontestable qui a été pris pour base immédiate de théories que leurs auteurs présentent comme originales, la plupart sans citer Coulomb dont la méthode révèle ce fait fondamental et à qui appartient le principe essentiel, relatif à la détermination du joint de rupture.*

<sup>225</sup> Boistard L. C., 1822, *Recueil d'expériences et d'observations faites sur différentes travaux, exécutés pour la construction du pont de Nemours, pour celle de l'arsenal et port militaire d'Anvers, et pour la reconstruction du port de Flessingue, dans lequel on a traité la théorie et l'équilibre des voûtes*, Merlin, Paris.

<sup>226</sup> Il *maximum* di Coulomb ossia il massimo dei minimi  $\max H_{\min}^r(\alpha)$ .

<sup>227</sup> Il *minimum* di Coulomb ossia il minimo dei massimi  $\min H_{\max}^r(\alpha)$ .

devono, almeno sotto questo punto di vista, essere guardate come difettose.<sup>228</sup>

L'approccio al problema sulla stabilità delle volte di La Hire, Frezier e Boistard, di cui parla Persy, può essere considerato un approccio cinematico; essi, infatti, si occupano di stereotomia e di mobilità, in modo da verificare se il taglio particolare delle pietre consente meccanismi. Persy considera sbagliate tutte queste teorie, in relazione alla posizione dei giunti di rottura, ma, avendo egli stesso una curiosità sostanzialmente cinematica, si fa condizionare da esse, come vedremo, e rispetto ad esse interpreta il metodo di Coulomb come difettoso perché non contempla tutti i meccanismi di collasso. Egli, quindi, considera il metodo dei massimi e dei minimi come uno strumento utile per individuare il meccanismo o i meccanismi di collasso e, quindi, per eliminare l'indeterminazione o come la chiama lui "l'arbitrarietà della posizione del giunto di rottura e del modo di muoversi dei conci".

Persy pensa alla rottura delle volte, alla posizione del giunto di rottura, alla posizione del punto di applicazione della spinta in chiave e scrive:

5. Si deve, quindi, ritornare al metodo di Coulomb, conservare la sua generalità primitiva (senza il Remarque I) e, soprattutto, considerare le diverse posizioni della forza applicata in chiave, al fine di non lasciarsi scappare alcun caso di rottura delle volte e di ottenere le condizioni esatte e complete della loro stabilità. Noi cercheremo di stabilire la teoria delle volte a priori, ovvero indipendentemente dall'esperienza, che non saprebbe abbracciare tutti i casi, e a partire da là, liberare, dal rimprovero d'incertezza e di empirismo, questa parte essenziale della scienza delle costruzioni. Per facilitare ancor di più, noi immagineremo, con Coulomb, un giunto verticale, passante per il vertice della volta e che la divide in due parti uguali. Questa ipotesi, che semplifica il problema, non nocerà in alcun modo all'esattezza.<sup>229</sup>

---

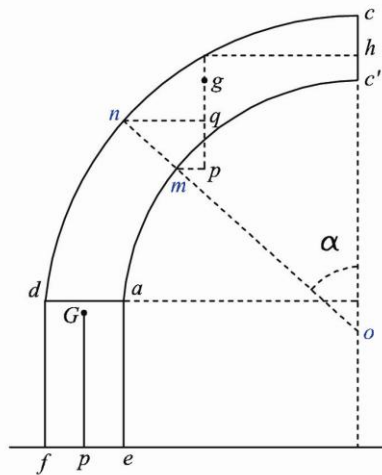
<sup>228</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 100 : *Ces théories se fondent principalement sur les expériences de M. Boistard, où les voûtes avaient constamment une épaisseur de 1/24 de l'ouverture qui était de 8 : elles supposent, en conséquence, que des deux joints, savoir, celui de rupture, c'est -à -dire, de la plus grande pression et celui autour de l'extrados duquel cette force tend à faire tourner la partie supérieure, l'un ou l'autre se trouve toujours placé à la base de la voûte, ce qui n'est pas exacte ; de sorte que ces théories peuvent donner pour stables des voûtes sujettes à se rompre et doivent, au moins sous ce rapport, être regardées comme défectueuses.*

<sup>229</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 100 :5. *Il faut donc en revenir à la méthode de Coulomb, mais lui conserver sa généralité primitive et sur-tout considérer les différentes positions de la force appliquée à la clef, afin de ne laisser échapper aucun cas de rupture des voûtes et d'obtenir les conditions exactes et complètes de leur stabilité. Nous tâcherons d'établir la théorie des voûtes à priori ou indépendamment de l'expérience qui ne saurait embrasser tous les cas, et par là d'affranchir du reproche d'incertitude et d'empirisme, cette partie essentielle de la science des constructions. Pour plus de facilité nous imaginerons avec Coulomb un joint vertical, passant par le sommet de la voûte et qui la divise en deux parties égales. Cette hypothèse qui simplifie la question ne nuira nullement à l'exactitude.*

## V.2. IL METODO PROPOSTO DA PERSY: GENERALIZZAZIONE DEL METODO DI COULOMB

L'introduzione del metodo proposto da Persy all'inizio è identico a quello di Coulomb:

8. Al fine di passare dal semplice al composto, noi, all'inizio, considereremo una semi-volta. (Fig. 5.4) Sia  $ac^1cd$  il profilo dritto di una semi-volta a botte; si supponga che le curve  $ac^1$ ,  $cd$  di intradosso e di estradosso siano date e che i giunti quali  $mn$  siano normali alla prima curva; si faccia astrazione della lunghezza della volta, ovvero, si guardi questa lunghezza come uguale all'unità lineare: si tratta di assegnare i limiti della forza che, applicata perpendicolarmente al giunto verticale  $cc^1$ , in un punto dato  $h$ , potrà mantenere la semi-volta in equilibrio, tenendo conto dell'attrito e della coesione dei giunti.<sup>230</sup>



**Fig. 5.4.** *Figure 4.* Ricerca dei limiti della forza che può essere applicata alla chiave di una semi-volta, senza che ci sia rottura.<sup>231</sup>

Osservando le due parti  $mncc^1$ ,  $mnda$ , separate dal giunto  $mn$ , ognuna come un solo corpo continuo e inamovibile sulla base  $ad$ . designiamo con  $s$  la larghezza del giunto  $mn$ , con  $\alpha$  l'angolo  $noc$  – che si forma con la verticale – con  $p$  il peso della parte superiore  $mncc^1$ , con  $\varphi$  l'angolo di attrito, con  $\gamma$  la coesione sull'unità di superficie e con  $X$  la forza orizzontale applicata in  $h$ . Due condizioni sono necessarie all'equilibrio assoluto del sistema; una, che non ci sia

<sup>230</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 101 : 8. *Afin d'aller du simple au composé, nous ne considérerons d'abord qu'une moitié de voûte. Soit donc  $ac^1cd$  le profil droit d'une demi – voûte en berceau ; on suppose que les courbes  $ac^1$ ,  $cd$  de douelle et d'extrados sont données et que les joints tels que  $mn$  sont normaux à la première courbe ; on fait abstraction de la longueur de la voûte, ou l'on regarde cette longueur comme égale à l'unité linéaire : il s'agit assigner les limites de la force qui appliquée perpendiculairement au joint vertical  $cc^1$ , en un point donné  $h$ , pourra maintenir la demi – voûte en repos, en égard au frottement et à la cohésion des joints.*

<sup>231</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 101 : *Recherche des limites de la force qui peut être appliquée à la clef d'une demi-voûte, sans qu'il y ait rupture.*

scorrimenti su alcun giunto né nel verso nm né nel verso mn; l'altra, che non ci sia rotazione, per alcun giunto, né intorno al punto m né intorno al punto n.<sup>232</sup>

Il metodo esposto è esattamente quello di Coulomb come dimostrano le equazioni che Persy fornisce:

9. 1°. Riguardo lo scorrimento è facile vedere che l'equazione di equilibrio sarà:

$$X \operatorname{sen} \alpha = p \cos \alpha \mp (p \operatorname{sen} \alpha + X \cos \alpha) \operatorname{tang} \varphi \mp \gamma s \quad (1)$$

i segni superiori o inferiori avranno luogo, secondo che il corpo mncc' è pronto a scorrere nel verso nm (verso il basso) o nel verso contrario mn (verso l'alto). Questa equazione, per il primo caso, darà:

$$X = \frac{p \cos(\alpha + \varphi) - \gamma s \cos \varphi}{\operatorname{sen}(\alpha + \varphi)} \quad (2)$$

e per il secondo caso:

$$X = \frac{p \cos(\alpha - \varphi) + \gamma s \cos \varphi}{\operatorname{sen}(\alpha - \varphi)} \quad (3)$$

espressioni nelle quali p e s sono delle funzioni date da  $\alpha$ .<sup>233</sup>

Ora, poiché, per la costruzione stessa; esiste realmente nella volta un seguito di giunti che la divide in conci e che la parte superiore corrispondente può indifferentemente scorrere su ciascuno di essi, ne segue che si otterranno per lo scorrimento, i limiti richiesti, determinando, nel primo caso, il giunto al quale risponde il più grande valore di X e nel secondo caso, il giunto che si rapporta al più piccolo valore di questa indeterminata; questi limiti non solo altra cosa che il maximum G ed il minimum g, che comprendono rispettivamente le espressioni (2) e (3), considerate come funzioni di  $\alpha$ , ed è chiaro che la volta non scorrerà su alcun giunto, né in un verso, né nell'altro, se si

<sup>232</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 101 : *Regardons les deux parties mncc', mnda séparées par le joint mn, chacune comme un seul corps continu et celle – ci comme inébranlable sur la base ad. Désignons par s la largeur du joint mn, par  $\alpha$  l'angle noc qu'il fait avec la verticale, par p le poids de la parties supérieure mncc', par  $\varphi$  l'angle du frottement, par  $\gamma$  la cohésion sur l'unité de surface et par X la force horizontale appliquée en h. Deux conditions sont nécessaires au repos absolu du système ; l'une qu'il n'y ait glissement sur aucun joint ni dans le sens nm ni dans le sens mn; l'autre qu'il n'y ait rotation, pour aucun joint, ni autour du point n.*

<sup>233</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pagg. 101-102 : 9. 1°. *Par rapporta u glissement il est facile de voir que l'équation d'équilibre sera,  $X \operatorname{sen} \alpha = p \cos \alpha \mp (p \operatorname{sen} \alpha + X \cos \alpha) \operatorname{tang} \varphi \mp \gamma s$ , (1), les signes supérieures ou inférieurs ayant lieu, selon que le corps mncc' est près de glisser dans le sens contraire mn. Cette équation donne, pour le première cas,  $X = [p \cos(\alpha + \varphi) - \gamma s \cos \varphi] / [\operatorname{sen}(\alpha + \varphi)]$ , (2), et pour le second,  $X = [p \cos(\alpha - \varphi) + \gamma s \cos \varphi] / [\operatorname{sen}(\alpha - \varphi)]$ , (3), expressions dans lesquelles p et s sont des fonctions données de  $\alpha$ .*

dà alla X un valore che non sia inferiore di G e che non superi, in assoluto, g.<sup>234</sup>

Il *maximum* G ed il *minimum* g di Persy corrispondono rispettivamente al *maximum* A<sub>1</sub> e al *minimum* A<sup>1</sup> di Coulomb. Persy afferma, giustamente che, affinché i conci non scorrano l'uno sull'altro è necessario che:

$$G < X < g \quad (5.2)$$

10. 2°. Quanto al movimento di rotazione del concio mncc<sup>1</sup> rispetto ai punti m o n, si designi con x la distanza orizzontale mp o nq dal baricentro g, e con y la distanza verticale pr o qr della direzione della forza X rispetto agli stessi punti; siccome il momento della coesione del giunto, rispetto a questi punti, è ugualmente  $1/2\gamma s^2$ , si trova senza difficoltà che l'equazione di equilibrio dà, rispetto al punto m:

$$X = F = \frac{px - \frac{1}{2}\gamma s^2}{y} \quad (4)$$

e rispetto al punto n:

$$X = f = \frac{px + \frac{1}{2}\gamma s^2}{y} \quad (5)$$

espressioni nelle quali le variabili p, x, y, e S sono funzioni dell'angolo  $\alpha$ . Siano F il maximum della prima espressione e f il minimum della seconda; è evidente che, in nessun punto, la volta ruoterà intorno all'uno o all'altro punto m, n, purché X non sia al di sotto di F né al di sopra di f.<sup>235</sup>

<sup>234</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pagg. 101-102 : Or, puisque par la construction même : il existe réellement dans la voûte une suite de joints qui la divisent en voussoirs et que la partie supérieure correspondante peut indifféremment glisser sur chacun d'eux, il s'en suit qu'on obtiendra pour le glissement, les limites demandées, en déterminant, dans le première cas, le joint auquel répond la plus grande valeur de X et dans le second cas, le joint qui se rapport à la plus petite valeur de cette indéterminée ; c'est-à-dire, que ces imites ne sont autre chose que le maximum G e le minimum g que comportent respectivement les expressions (2) et (3), envisagées comme des fonctions de  $\alpha$ , et il est clair que la voûte ne glissera sur aucun joint, ni dans un sens ni dans l'autre, si l'on donne à X une valeur qui ne soit pas moindre que G et ne surpasse point g.

<sup>235</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 102 : 10. 2°. Quant au mouvement de rotation, en désignant par x la distance horizontale mp ou nq du centre de gravité g, de mncc<sup>1</sup> au point m ou n, et par y la distance verticale pr ou qr de la direction de X aux mêmes points ; comme le moment de la cohésion du joint par rapport à ces points, est également  $1/2\gamma s^2$ , on trouve sans difficulté que l'équation d'équilibre donne relativement au point m,  $x = px - (1/2)\gamma s^2/y$ , (4), et relativement au point n,  $x = px + (1/2)\gamma s^2/y$ , (5), expressions dans lesquelles les variables p, x, y, et s sont des fonctions données de l'angle  $\alpha$ . Soient F le maximum de la seconde ; il est évident que, pour aucun joint, la voûte ne tournera autour de l'un ou l'autre point m, n, pourvu que X ne soit pas au-dessous de F ni au-dessus de f.



Il *maximum*  $F$  ed il *minimum*  $f$  di Persy corrispondono rispettivamente al *maximum*  $B_1$  e al *minimum*  $B^1$  di Coulomb.

Persy afferma, giustamente che, affinché i conci non ruotino è necessario che:

$$F < X < f \quad (5.3)$$

Si noti, che Persy ha ricercato i *maximum* ed i *minimum*, attraverso le stesse equazioni trovate da Coulomb, esse ci informano del fatto che la spinta in chiave, da lui considerata, è applicata in un unico punto della chiave.

A questo punto, trovati i 4 valori cercati, egli fa le sue considerazioni e scrive:

11. Ne segue:

1°. che la stabilità della volta sarà impossibile non soltanto se non si ha che:  $G < g$  e  $F < f$ , ma anche che  $G < f$  e  $F < g$ , affinché una stessa grandezza possa essere compresa allo stesso tempo fra  $G$  e  $g$  e fra  $F$  e  $f$ ; o, in una parola, la stabilità sarà impossibile, se il più grande  $L$ , dei due limiti relativi  $G, F$ , eccede il più piccolo  $l$  dei due  $g, f$ ;

2°. che, in caso contrario, i limiti assoluti della forza che si potrà applicare in  $h$ , senza rompere la volta, sono questo limite più grande ( $L$ ) e questo limite più piccolo ( $l$ ) soddisfacendo la condizione che il primo sia minore del secondo.<sup>236</sup>

Quindi, la stabilità di una volta, per Persy, è garantita se:

$$G < g \wedge F < f ; \text{ con } G < f \wedge F < g \quad (5.4)$$

il che implica, che i due range esistano ed ammettano un range comune, i cui estremi inferiore e superiore sono rappresentati, rispettivamente, da  $L$  e  $l$ .

Infatti, definendo con  $L$  il massimo tra i due maximum  $G$  e  $F$ , e con  $l$  il minimo tra i due minimum  $g$  e  $f$ , la stabilità, secondo Persy, si avrà solo se:

$$L < l \quad (5.5)$$

La (5.4) e la (5.5) sono state fissate da Persy, per dare più generalità al metodo di Coulomb ritenuto imperfetto.

---

<sup>236</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pagg. 102-103 : 11. Il suit de là 1°. Que la stabilité de la voûte sera impossible non seulement si l'on n'a pas  $G < g$  e  $F < f$  mais encore e  $G < f$  et  $F < g$ , afin qu'une même grandeur puisse être comprise en même temps entre  $G$ ,  $g$  et entre  $F$ ,  $f$ . 2°. Que, dans le cas contraire, les limites absolus de la force qu'on pourra appliquer en  $h$ , sans rompre la voûte, sont cette plus grande et cette plus petite limites satisfaisant à la condition que la première soit moindre que la seconde.

### V.2.1. Considerazioni teoriche sui meccanismi di collasso in caso di attrito finito

Per comprendere meglio le conseguenze delle (5.4) e (5.5) in questo paragrafo saranno analizzati tutti i casi in cui esse sono soddisfatte, seguendo il metodo proposto da Persy.

Inoltre, per ognuno di tali casi, sarà indagata dal punto di vista teorico la stabilità reale del sistema.

- In caso di attrito sufficientemente elevato, il dominio intersezione delle soluzioni staticamente ammissibili garanti sia dell'equilibrio rotazionale sia dell'equilibrio rispetto allo scorrimento è il dominio  $H^r$  dell'equilibrio rotazionale; in tal caso, valgono i teoremi limite della plasticità e la condizione limite di equilibrio identifica l'unico meccanismo di collasso.
- In presenza di attrito finito, invece, il dominio  $H^s$  garante dell'equilibrio rispetto allo scorrimento è interno al dominio delle rotazioni  $H^r$ ; nel dominio  $D$ , invece, complementare di  $H^s$  ad  $H^r$ , esistono soluzioni potenzialmente instabili.

Inoltre, fissati lo spessore dell'arco ed il coefficiente d'attrito, se il dominio degli scorrimenti  $H^s$  è interno al dominio delle rotazioni  $H^r$ , nulla si può dire sulla qualità dell'equilibrio senza indagare su cosa avviene all'interno del dominio  $D$  in termini di "upper bound".

Nel caso in cui internamente a  $D$  non esistano cinematismi possibili, cosicché il collasso può avvenire soltanto sulla frontiera di  $D$  coincidente con la frontiera di  $H^r$ , il problema evidenzia una forte contraddizione. Infatti, le soluzioni, che corrispondono a valori di  $H$  interni a  $D$  e che in ambito statico escono dal cono di Coulomb in alcuni giunti, potrebbero rispettare la legge dell'attrito solo in ambito dinamico, collocandosi sulla falda del cono grazie al bilanciamento delle forze di inerzia, in una condizione di collasso già avviato con accelerazione diversa da zero. L'impossibilità di meccanismi internamente a  $D$  rende la dinamica e, quindi, il collasso impossibili; la struttura non può muoversi pur non essendoci bilancio delle forze<sup>237</sup>.

Per l'arco simmetrico estradossato parallelamente, così come per molte altre tipologie di archi, in presenza di attrito finito, il dominio  $D$  per l'inammissibilità di meccanismi possibili diventa staticamente inammissibile perché condurrebbe alla violazione della legge di Coulomb. Le uniche soluzioni staticamente ammissibili sono quelle appartenenti al dominio  $H^s$  ed il collasso va cercato sull'intersezione fra le frontiere di  $H^s$  e  $H^r$ .

E' come se la forma dell'arco, la disposizione dei giunti e la corrispondente cinematica rendessero le strutture ad arco in qualche modo "esperte", consentendo loro di collocarsi in un regime statico sicuro

---

<sup>237</sup> Sinopoli, A., Aita, D., Foce, F., 2007, *ibidem*.

corrispondente ad un criterio di stabilità, cui generalmente la legge dell'attrito non corrisponde.

E' importante riaffermare che sono le caratteristiche cinematiche di tale particolare tipologia strutturale a far sì che il collasso non possa avvenire nel dominio compreso fra la frontiera di  $H^S$  e quella di  $H^r$ ; se anche un solo meccanismo fosse ivi ammissibile la struttura sarebbe sicuramente instabile.<sup>238</sup>

E, paradossalmente, sono proprio le caratteristiche cinematiche dell'arco a far sì che il metodo dei "massimi e minimi", proposto da Coulomb - con qualche riserva in caso di attrito finito - e riproposto da Persy nella sua generalità anche in presenza di attrito finito, conduca ad identificare le stesse condizioni di collasso ottenute nella corretta formulazione "upper bound". Da un punto di vista teorico, invece, il metodo dei "massimi e minimi", che è un metodo tipo "lower bound", non è corretto per indagare la stabilità dell'arco dal momento che l'attrito non corrisponde ad un criterio di stabilità e, in presenza di attrito finito, il dominio delle infinite soluzioni dell'arco è in parte stabile ed in parte "a priori" instabile.

Quindi, in termini generali ed in caso di attrito finito, la situazione di collasso di strutture rigido-plastiche non è a priori unica, poiché, anche se l'equilibrio rotazionale è garantito, ci sono molteplici giunti in cui gli scorrimenti sono "a priori" possibili; tale possibilità deve essere indagata con metodo "upper bound". Il problema dei meccanismi di collasso dell'arco in caso di attrito finito è oggetto di studi recenti.<sup>239</sup>

### ***V.2.2. Conseguenze del metodo generale dei massimi e minimi riproposto da Persy***

La nostra intenzione è quella di indagare le conseguenze del metodo dei massimi e dei minimi, trattato come criterio di stabilità, sia per l'equilibrio alla rotazione sia per l'equilibrio allo scorrimento, ricordando che con tale metodo nessuna indagine è condotta in relazione a ciò che avviene nel dominio complementare D.

Si analizzino ora per un arco lapideo tutte le possibili situazioni ottenibili in grande generalità dalla (5.5), in accordo al criterio proposto da Persy e riferendosi soltanto al dominio degli scorrimenti  $H^S$  delimitato dalle frontiere G e g, ed al dominio delle rotazioni  $H^r$  delimitato dalle frontiere F e f.

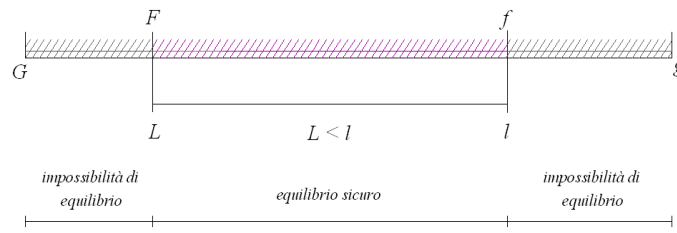
CASO 1 COMPORTAMENTO STANDARD. STABILITÀ CERTA

$$G < g \wedge G < f; \text{ con } F < g \wedge F < f; \Rightarrow H^r \subset H^S \quad (5.6)$$

<sup>238</sup> Sinopoli, A., Aita, D., Foce, F., 2007, *ibidem*.

<sup>239</sup> Sinopoli, A., Aita, D., Foce, F., 2007, *ibidem*.

Questo è il caso in cui si è in presenza di attrito sufficiente. Il range delle rotazioni  $H^r$  è contenuto nel range degli scorrimenti  $H^s$  (Fig. 5.5), situazione tipica dei materiali standard.



**Fig. 5.5.** CASO 1A. Stabilità certa.

Il range intersezione di  $H^s$  e  $H^r$ , limitato dai due estremi  $L = F$  e  $l = f$ , rispetta la (5.5), quindi, al suo interno l'equilibrio è garantito.

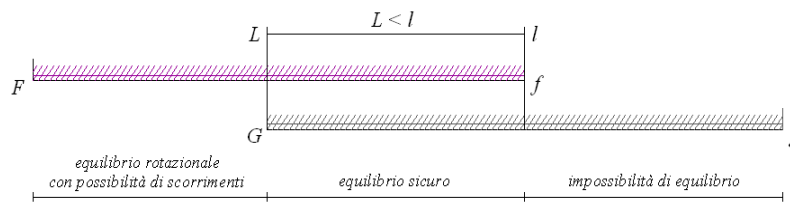
Quando le due frontiere rotazionali -  $F$  a sinistra e  $f$  a destra - si riducono ad un unico punto, esse danno origine ad un meccanismo di collasso rotazionale.

Questo è l'unico caso considerato da Coulomb.

**CASO 2A. COMPORTAMENTO NON-STANDARD. STABILITÀ INCERTA**

$$G < g \wedge G < f; \text{ con } F < f \wedge F < g \quad (5.7a)$$

Quando il range delle rotazioni  $H^r$  interseca il range degli scorrimenti  $H^s$ , avviene quanto mostrato in Fig. 5.6a. Il range intersezione di Persy, individuato dai due estremi  $L = G$  e  $l = f$  rispetta la (5.5) e, quindi, al suo interno l'equilibrio è garantito. Tuttavia, il dominio delle soluzioni staticamente ammissibili per l'equilibrio rotazionale è delimitato a sinistra dell'estremo  $F$  e a destra da  $f$ ; pertanto nel range fra  $F$  e  $L$  l'equilibrio non è garantito.



**Fig. 5.6a.** CASO 2A. Stabilità incerta.

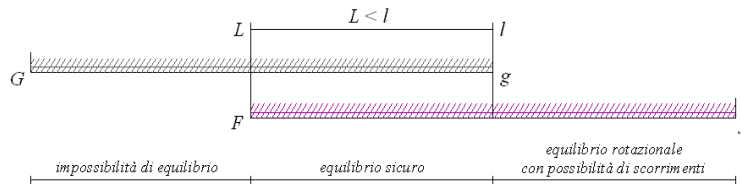
Quando le due frontiere rotazionali -  $G$  a sinistra e  $f$  a destra - si riducono ad un unico punto, esse danno origine ad un meccanismo di collasso misto che prevede lo scorrimento verso il basso a sinistra e la rotazione a destra.

Sembra trattarsi del meccanismo di La Hire che si manifesta per il portale ma non per l'arco.

**CASO 2B. COMPORTAMENTO NON-STANDARD. STABILITÀ INCERTA**

$$F < g \wedge F < f; \text{ con } G = g \wedge G < f \quad (5.7b)$$

Quando il range degli scorrimenti  $H^S$  interseca il range delle rotazioni  $H^r$  avviene quanto mostrato in Fig. 5.6b. Il range intersezione individuato dai due estremi  $L=F$  e  $l=f$ , rispetta la (5.5), quindi, al suo interno l'equilibrio è garantito; a sinistra dell'estremo  $L$  l'equilibrio è impossibile mentre a destra dell'estremo  $l$  l'equilibrio va verificato.



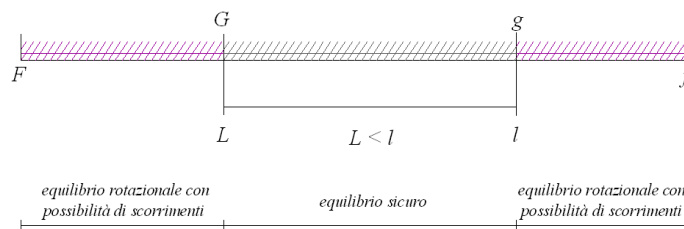
**Fig. 5.6b.** CASO 2B. Stabilità incerta.

Quando le due frontiere rotazionali -  $F$  a sinistra e  $g$  a destra - si riducono ad un unico punto, esse danno origine ad un meccanismo di collasso misto che prevede la rotazione a sinistra e lo scorrimento verso l'alto a destra.

### CASO 3. COMPORTAMENTO NON-STANDARD. STABILITÀ INCERTA

$$F < g \wedge F < f; \text{ con } G < g \wedge G < f; \text{ e con } H^S \subset H^r \quad (5.8)$$

Quando il coefficiente di attrito diminuisce il range degli scorrimenti  $H^S$  si riduce e le sue frontiere entrano all'interno del range delle rotazioni  $H^r$  che rimane invariato (Fig. 5.7a.).



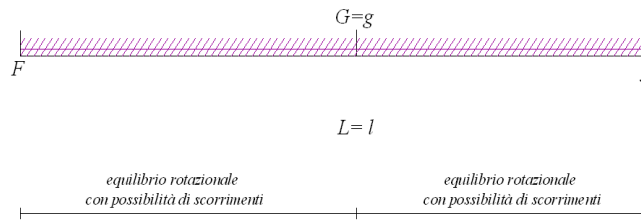
**Fig. 5.7a.** CASO 3. Stabilità incerta.

Il range intersezione, individuato dai due estremi  $L=G$  e  $l=g$ , rispetta la (5.5), quindi, per questo tipo di situazione, secondo Persy, l'equilibrio è garantito sia rispetto alla rotazione sia rispetto agli scorrimenti, fuori di esso, c'è equilibrio rotazionale ma può esserci scorrimento e, quindi, per quanto detto nella premessa di questo paragrafo, non possiamo dire se c'è o no equilibrio.

In questo caso il meccanismo di collasso è chiaramente di puro scorrimento.

Quando il coefficiente di attrito continua a diminuire si arriva al punto in cui le due frontiere estreme del range degli scorrimenti  $H^S$  coincidono -  $G=g$  - e si verifica quanto mostrato in Fig. 5.7b.; l'equilibrio è garantito

solo nei punti dell'unica frontiera di  $H^s$ , mentre in tutte le aree esterne ad essa l'equilibrio va verificato.



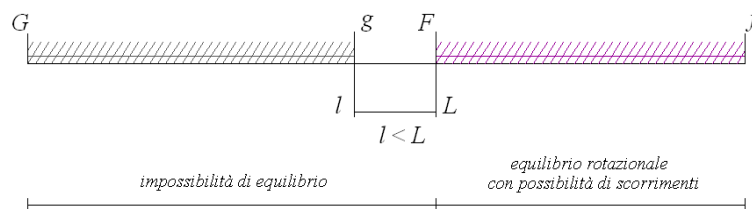
**Fig. 5.7b.** Equilibrio solo nei punti della frontiera del dominio  $H^s$ .

Fin qui sono state analizzate tutte le situazioni in cui c'è la formazione di un range intersezione.

Se volessimo considerare delle situazioni limite come, il CASO 4A ed il CASO 4B, mostrati nelle Figg. 5.8a,b, in cui i due range  $H^s$  e  $H^r$  sono disgiunti, troveremmo, che a causa dell'impossibilità del formarsi di un range intersezione, la (5.5) di Persy non si verifica e, pertanto l'equilibrio non è mai garantito. Ma, sempre per quanto detto in premessa l'equilibrio va verificato all'interno del range rotazionale.

CASO 4A

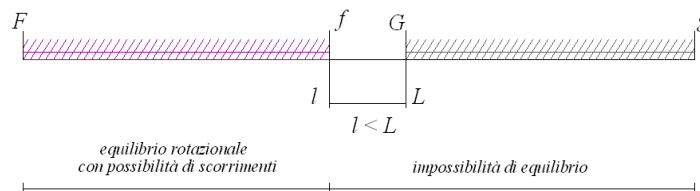
$$G < g \wedge G < f; \text{ con } F < f \wedge F > g \quad (5.9a)$$



**Fig. 5.8a.** CASO 4A.  $H^s$  e  $H^r$  domini disgiunti, equilibrio non garantito.

CASO 4B

$$F < f \wedge F > g; \text{ con } G < g \wedge G < f \quad (5.9b)$$



**Fig. 5.8b.** CASO 4B.  $H^s$  e  $H^r$  domini disgiunti, equilibrio non garantito.

**V.3. NOTA SUL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA SPINTA IN CHIAVE.  
LA RIDUZIONE AD UN UNICO PUNTO**

12. Quando, per favorire la stabilità, non si tiene conto della coesione, la quale è realmente nulla nelle volte di recente costruzione, le espressioni (2) e (3) si riducono a:

$$X = \frac{p}{\text{tang}(\alpha \pm \varphi)} \quad (a)$$

e le espressioni(4) e (5):

$$X = \frac{px}{y} \quad (b)$$

Noi designeremo, ancora, con G, g, F e f i limiti forniti dalle espressioni ridotte. Ci si ricorderà che i segni + e – dell’espressione (a) rispondono allo scorrimento rispettivamente nel verso nm e mn, e che le variabili x ed y, che entrano nell’espressione (b) si riferiscono al punto m per il limite F e al punto n per il limite f.<sup>240</sup>

13. Si noti, che né le due posizioni del giunto mn alle quali corrispondono il maximum G ed il minimum g della forza X, né i valori assoluti di questi limiti dipendono dalla posizione del punto di applicazione h sul giunto verticale cc'; ma è diverso per le due posizioni di questo giunto, relative ai limiti F e f: queste posizioni, i rispettivi valori dei limiti e la loro grandezza dipendono dalla posizione del punto h su cc'. Noi assegneremo più lontano la posizione del punto h, e sarà questo a definire completamente la variabile y, contenuta nella formula (b).<sup>241</sup>

<sup>240</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pagg. 102-103 : 11. Il suit de là 1°. Que la stabilité de la voûte sera impossible non seulement si l'on n'a pas  $G < g$  et  $F < f$  mais encore e  $G < f$  et  $F < g$ , afin qu'une même grandeur puisse être comprise en même temps entre G, g et entre F, f. 2°. Que, dans le cas contraire, les limites absolues de la force qu'on pourra appliquer en h, sans rompre la voûte, sont cette plus grande et cette plus petite limites satisfaisant à la condition que la première soit moindre que la seconde. 12. Lorsque pour favoriser la stabilité on néglige la cohésion, laquelle est réellement nulle dans les voûtes récemment construites, les expressions (2) et (3) se réduisent à  $X = p/\text{tang}(\alpha \pm \varphi)$ , (a), et les expressions (4) et (5) à  $X = px/y$ , (b). nous designerons encore par G, g, F, f les limites données par ces expressions réduites. On se souviendra que les signes + et – de l'expression (a) répondent au glissement dans les sens nm et mn respectivement, et que les variables x et y qui entrent dans l'expression (b) se rapportent au point m pour la limite F et au point n pour la limite f.

<sup>241</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 103 : Remarque sur la position de la force appliquée à la clef. 13. Il est à remarquer que ni le deux positions du joint mn auxquelles répondent le maximum G et le minimum g de la force X, ni les valeurs absolues de ces limites ne dépendent de la position du point d'application h sur le joint vertical cc' ; mais qu'il en est autrement des deux positions de ce joint, relatives aux limites F, f : ces positions, les valeurs respectives des limites et leur relation de grandeur dépendent de la position du point h sur cc'. Nous assignerons plus loin la position du point h, ce qui définira complètement la variable y, renfermée dans la formule (b).

Persy, in questo momento, si disinteressa dello scorrimento, dei suoi limiti  $G$  e  $g$  e delle posizioni che il giunto  $mn$  assume in corrispondenza di essi, perché li ritiene non dipendenti dalla posizione del punto di applicazione  $h$  della spinta  $X$  in chiave; cosa diversa per la rotazione per i suoi limiti  $F$  e  $f$  e per le posizioni che il giunto  $mn$  assume in corrispondenza di essi.

Per una volta intera, abbandonata a se stessa, non esistono, rispetto alla rotazione, che due modi possibili di rottura; condizioni della loro esistenza:

14. Per passare da queste considerazioni astratte allo stato reale delle cose, rappresentiamo una volta a botte completa,  $acb$ , di forma qualunque, divisa in chiave, da un giunto verticale  $cc'$ , in due parti uguali  $ca$ ,  $cb$  che si toccano in un sol punto  $h$  di questo giunto. I limiti della forza orizzontale  $X$  che si può applicare nel punto  $h$  senza rompere una delle due semivolte, presa isolatamente: cioè  $G$ ,  $g$  per lo scorrimento,  $F$ ,  $f$  per la rotazione, e le posizioni dei giunti  $m$ ,  $n$ ;  $M$ ,  $N$  corrispondenti a questi limiti, saranno dati dalle formule (a) e (b).

In primo luogo non teniamo conto dello scorrimento, al fine di considerare solo i limiti  $F$ ,  $f$  appartenenti alla rotazione ed i due giunti  $M$ ,  $N$  corrispondenti. Supponiamo, per un istante, che la volta sia incavata al di sopra e al di sotto del punto  $h$ , in modo da permettere la rotazione delle due parti superiori  $hmn$  o  $hm'n'$ , intorno a questo punto, in un senso o nell'altro, e immaginiamo che il sistema, all'inizio sostenuto, sia tutto ad un tratto abbandonato a se stesso. Si avranno due casi da analizzare, a seconda che  $F$  non ecceda o ecceda  $f$ .<sup>242</sup>

Persy, quindi, prende una volta intera  $acb$ , e la suppone divisa in due semivolte eguali  $ca$ , e  $cb$  dal giunto verticale in chiave  $cc'$  (Fig. 5.9a). Egli semplifica il problema considerando un unico punto di contatto  $h$  delle due semivolte in chiave e, visto che la spinta  $X$  potrà essere applicata solo in

---

<sup>242</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pagg. 103 - 104: *Pour une voûte complète, abandonnée à elle même, il n'existe, quant à la rotation, que deux modes possibles de ruptures; conditions de leur existences. 14. Pour passer de ces considérations abstraites à l'état réel des choses, représentons-nous une voûte en berceau, complète, acb, de forme quelconque, divisée au sommet, par le joint vertical cc', en deux parties égales ca, cb, qui ne se touchent que par un seul point h de ce joint. Les limites de la force horizontale X qu'on pourrait appliquer au point h, sans rompre l'une ou l'autre demi voûte, prise isolément; savoir, G, g pour le glissement, F, f pour la rotation, et les positions des joints m, n; M, N correspondant à ces limites, seront données par les formules (a) et (b). Faisons en premier lieu abstraction du glissement, afin de n'avoir à considérer que les limites F, f appartenant à la rotation et les deux joints M, N qui leur répondent. Supposons, pour un moment, que la voûte soit échancrée au-dessus et au-dessous du point h, de manière à permettre la rotation des deux parties supérieures hmn au hm'n', autour de ce joint, dans un sens ou dans l'autre, et imaginons que le système, d'abord soutenu, soit tout à coup abandonné à lui-même. Il se présente deux cas à discuter, selon que F n'excédera pas ou excédera f.*



questo punto, il dominio sarà uno solo, e per esso si avranno  $\infty^1$  soluzioni.

Di seguito, Persy, nel definire la sua teoria, non tiene conto dello scorrimento e dei suoi limiti perché essi non dipendono dal punto di applicazione  $h$ ; gli unici valori che egli considera sono i limiti  $F$  e  $f$  della rotazione ed i loro corrispondenti giunti  $M$  e  $N$ .

Egli suppone, inoltre, che il punto  $h$ , trovandosi al centro del giunto verticale in chiave  $cc'$ , diventi una cerniera, un perno intorno al quale la struttura può ruotare in un verso o nell'altro quando questa sia abbandonata a sé stessa. È chiaro, dunque, che Persy ha in mente due meccanismi di collasso.

Tuttavia, prima di arrivare al collasso della struttura, egli individua due situazioni che garantiscono il suo equilibrio:

Nel primo caso, ci sarà stabilità se  $F$  è inferiore a  $f$  e ci sarà semplice equilibrio se  $F$  è uguale a  $f$ ; giacché, dal momento in cui il sistema è abbandonato a se stesso, nel punto  $h$  si produce una pressione, dovuta alla mutua azione delle due semivolte l'una sull'altra, che aumenta per gradi, ma rapidamente, da zero fino al limite  $F$ , valore che tale pressione raggiunge necessariamente, poiché, per ipotesi, questo limite  $F$  non eccede il limite  $f$ .<sup>243</sup>

Codeste situazioni descritte nel **1° caso** sono:

**1.1 stabilità della struttura;** quando il limite inferiore è minore del limite superiore:

$$F < f \quad (5.10)$$

**1.2 semplice equilibrio;** quando il limite inferiore eguaglia il limite superiore:

$$F = f \quad (5.11)$$

Così:

1°. il maximum  $F$  - cioè la più piccola forza orizzontale che si possa applicare nel punto  $h$  per impedire alle parti superiori ai diversi giunti di ruotare intorno all'intradosso di questi giunti - costituisce la pressione che effettivamente si produce nel punto  $h$  dall'azione reciproca delle due semivolte, e il giunto  $M$  relativo a  $F$  è quello corrispondente alla più grande pressione o alla pressione effettiva

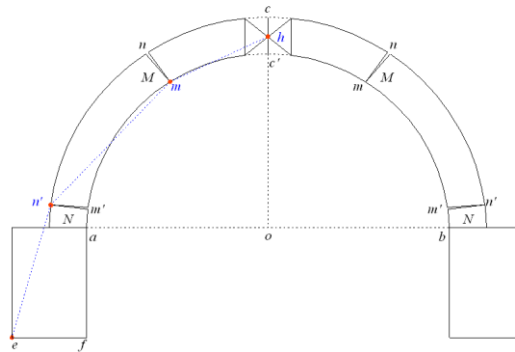
---

<sup>243</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 104: *Dans le première cas, il y aura stabilité si  $F$  est moindre que  $f$  et simple équilibre si  $F$  est égal à  $f$ ; car dès que le système est abandonné à lui même, il se produit au point  $h$ , par l'action mutuelle des deux demi - voûtes l'une sur l'autre, une pression qui augmente par degrés, mais rapidement, depuis zéro jusqu'à la limite  $F$  qu'elle atteint nécessairement, puisque, par hypothèse, cette limite  $F$  n'exède pas  $f$ .*

nello stesso punto  $h$ ; ci sarà, quindi, realmente stabilità, quando  $F$  sarà più piccolo di  $f$  e ci sarà semplice equilibrio quando  $F$  eguaglierà  $f$ .

2°. le parti  $hnm$ , superiori ai due giunti  $M$  sono trattenuti su questi giunti dalla stessa pressione  $F$  che queste parti esercitano reciprocamente l'una contro l'altra nel punto  $h$  (Fig. 5.9a);<sup>244</sup>

Si noti che per Persy la pressione in chiave  $F$  – valore massimo dei minimi richiesti e valore minimo della spinta in chiave – è la pressione effettiva della volta in  $h$ ; tale pressione effettiva determina risultante normale  $R^n$  massima al giunto  $M$ , dal momento che la risultante è tangente all'intradosso nel punto  $m$  e pertanto ortogonale al giunto stesso.



**Fig. 5.9a.** Figure 5. Rotazione; per una volta completa esistono solo due possibili modi rottura.<sup>245</sup>

3°. questa pressione tende a rovesciare non solo la parte  $h\ m'n'$  superiore al giunto  $N$ , da un movimento di rotazione intorno all'estradosso di questo giunto; ma anche tutta la semivolta  $hef$  da un movimento simile intorno allo spigolo e della sua base. Tutto questo si comprenderà facilmente se, al posto delle parti  $hmn$ ,  $mn'm'$ ,  $n'ef$ , si immaginino le leve  $hm$ ,  $mn'$ ,  $n'e$  e assemblate a cerniere e caricate dei pesi di queste parti (Figg. 5.9a, 5.9b).<sup>246</sup>

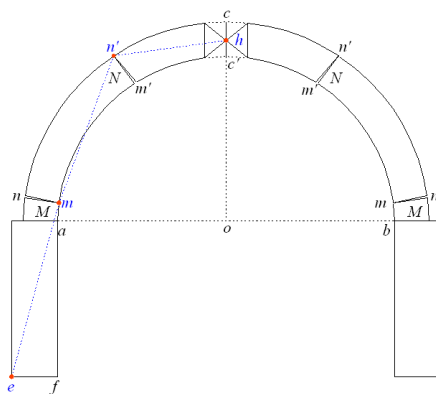
<sup>244</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 104 : Ainsi, 1° le maximum  $F$ , c'est à dire, la moindre force horizontale qu'il faille appliquer au point  $h$ , pour empêcher les parties supérieures aux différents joints de tourner autour des intrados de ce joints, constitue la pression qui se produit effectivement au point  $h$ , par l'action réciproque des deux demi – voûtes, et le joint  $M$  relatif a  $F$  est celui de la plus grande pression ou de la pression effective en ce même point  $h$ ; il y aura donc réellement stabilité, quand  $F$  sera moindre que  $f$  et seulement équilibre quand  $F$  égalera  $f$ . 2° les parties  $hnm$ , supérieures aux deux joints  $M$  sont retenues sur ces joints, par la pression même  $F$  qu'elles exercent réciproquement l'une contre l'autre au point  $h$  ;

<sup>245</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 103 : pour une voûte complète, abandonnée à elle même, il n'existe quant à la rotation, que deux modes possibles de rupture ; conditions de leur existence.

<sup>246</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 104 : 3° cette pression tend à renverser non seulement la partie  $hm'n'$  supérieure au joint  $N$ , par un mouvement de rotation autour de l'extrados de ce joint ; mais encore toute la demi – voûte  $hef$  par un semblable mouvement autour de l'arête extérieure  $e$  de sa base. Tout cela se comprendra facilement, si l'on imagine (fig. 5 – Fig. 5.27a) au lieu des parties  $hmn$ ,  $mn'm'$ ,  $n'ef$  les leviers  $hm$ ,  $mn'$ ,  $n'e$  assemblés à charnières et chargés des poids de ces parties.

Queste ultime parole ci permettono di osservare che Persy, pur non approvando l'approccio cinematico di cui scrive nella premessa al *mémoire* ed pur facendo riferimento ad un metodo sostanzialmente statico come quello di Coulomb, come i suoi predecessori "Geometri" divide la volta in più parti contigue, che agiscono le une sulle altre tramite punti di contatto (cerniere), corrispondenti ai *maximum* e *minimum*, che definiscono un sistema di leve assemblate.

Riguardo all'aspetto cinematico si noti nella Fig. 5.9a, tuttavia, che le cerniere nei punti  $n^1$  ed  $e$  dovrebbero individuare non bielle in successione  $mn^1$  e  $n^1e$ , ma piuttosto bielle alternative  $mn^1$  o  $me$ , dal momento che sia  $n^1$  sia  $e$  si trovano entrambe all'estradosso dell'arco.



**Fig. 5.9b.** *Figure 6.* Rotazione; per una volta completa esistono solo due possibili modi rottura.<sup>247</sup>

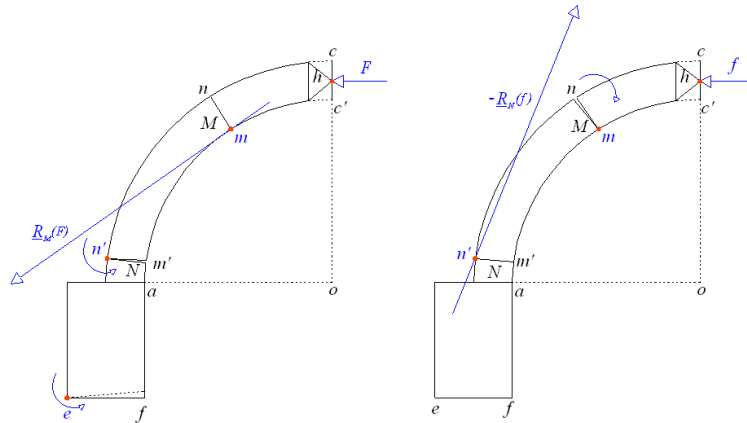
In relazione al problema della stabilità, per Persy la spinta  $F$  applicata in chiave nel punto  $h$  – *maximum* o limite inferiore – è la spinta effettiva della volta che determina nel punto  $m$  del giunto  $M$  la pressione massima e garantisce l'equilibrio rispetto alla rotazione intorno a qualunque punto dell'intradosso - dal momento che tale equilibrio è garantito intorno ad  $m$  -, ma rende potenzialmente instabile la volta rispetto alla rotazione intorno ai punti  $n^1$  ed  $e$  dell'estradosso.

Prolungando la retta d'azione della pressione massima  $R_{max}^n$  (Fig. 5.10a) in  $m$  - corrispondente a  $F$  - essa potrebbe rendere instabile la parte inferiore della volta, tanto da farla ruotare non solo in corrispondenza del punto  $n^1$  del giunto  $N$ , ma anche rispetto al punto di base e del piedritto; ma questo avverrebbe - solo e soltanto - se il momento indotto da  $F$  non fosse controbilanciato dal momento dovuto al peso, e conseguentemente se la risultante passasse esternamente al giunto  $N$  o al giunto di base del piedritto; ma questo Persy non lo dice (n.d.r.).

Egli continua considerando la pressione  $F$ , applicata in chiave, dapprima per  $F < f$ . In tal caso, poiché la pressione reale che agisce sulla volta è proprio il valore minimo  $F$ , che garantisce l'equilibrio della parte della volta al di sopra del giunto  $M$ , se  $F < f$ , l'arco è stabile anche se la parte inferiore

<sup>247</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 103.

ha la tendenza a ruotare intorno al punto  $n^1$  o al punto e, dal momento che per effetto della pressione massima il giunto M non può aprirsi in m. In tal caso, l'unica possibilità di rotazione sarebbe quella della semivolta intorno alle imposte, rotazione che è impossibile, dal momento che si avrebbe così la formazione di un arco con tre cerniere potenzialmente attive - una alla chiave e due all'estradosso delle imposte, e due cerniere bloccate all'intradosso delle reni (n.d.r.).



**Fig. 5.10a.**  $R_{max}^n$  dovuta a F.

**Fig. 5.10b.**  $R_{max}^n$  dovuta a f.

Persy considera quindi il caso in cui la spinta effettiva F che agisce alla chiave, sia eguale al *minimum* f associato all'estradosso  $n^1$  del giunto N ( $F=f$ ); simmetricamente al caso precedente, se la spinta è f, la parte inferiore è stabile mentre la parte superiore ha la tendenza a ruotare intorno all'intradosso m del giunto M. In tal caso si avrebbe la formazione di un arco con tre cerniere potenzialmente attive, una alla chiave e due all'intradosso delle reni, e due cerniere bloccate all'estradosso delle imposte (Fig. 5.10b) (n.d.r.).

Paradossalmente, in questa situazione, poiché  $F=f$ , esiste contemporaneamente sia equilibrio sia tendenza a perdere l'equilibrio per entrambe le parti dell'arco, superiore ed inferiore. Per Persy, l'arco risulta in condizioni di semplice equilibrio, per l'impossibilità di apertura dei giunti M e N; tuttavia, l'arco non è stabile, per la sovrapposizione dei due archi a tre cerniere, che lo trasformano in un meccanismo, (formazione di un arco a cinque cerniere bloccate e nel contempo potenzialmente attive; n.d.r., Fig. 5.10c).

Persy continua considerando il secondo caso ( $F > f$ ):

Nel secondo caso, la pressione che si produrrà nel punto h non potrà, evidentemente, che raggiungere il valore del limite f, questo valore garantisce l'equilibrio intorno al punto  $n'$  ma non intorno al punto m; e poiché questa pressione, virtualmente ha come limite F, che per

ipotesi supera  $f$ , quando il suo valore tende ad aumentare ne segue che la volta non potrà sostenersi da sola e si romperà.<sup>248</sup>

Nel secondo caso c'è impossibilità di equilibrio, esso, infatti, prevede il collasso della struttura ed è caratterizzato dalla seguente condizione:

$$F > f \quad (5.12)$$

Poiché la pressione effettiva della volta in  $h$  per Persy è quella minima, nel caso in cui  $F > f$ , la spinta effettiva è di necessità  $f$ ; allora, è garantito l'equilibrio nel punto  $n'$  ma non nel punto  $m$ .

Ma poiché la spinta effettiva della volta è quella minima, che produce la pressione massima in  $M$  (cioè  $F$ ), se  $F > f$ ,  $f$  ha la tendenza a crescere per raggiungere  $F$ ; in tali condizioni, secondo Persy, la volta non può che crollare. In accordo al suo ragionamento precedente, la parte superiore della volta dovrebbe essere instabile, e all'aumentare della spinta in chiave anche la parte inferiore diventerebbe instabile e l'arco, di conseguenza, crollerebbe; ma questa è una interpretazione (arco a cinque cerniere attive; n.d.r.; Fig. 5.10d).

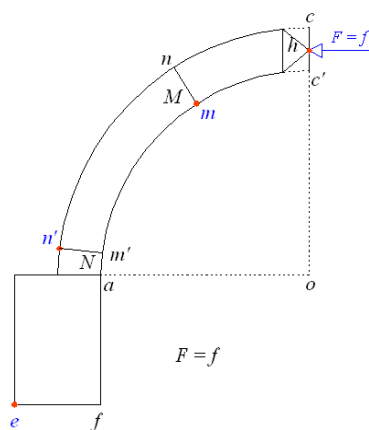


Fig. 5.10c.  $F = f$

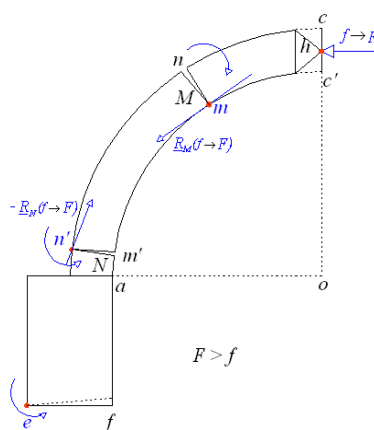


Fig. 5.10d.  $F > f$

In sintesi, come si può notare, Persy considera un'unica condizione di esercizio dell'arco e sembra non tener conto del fatto che l'arco sia una struttura iperstatica. L'unico valore per la spinta in chiave che egli considera è, infatti, quella minima che determina la pressione massima in  $M$ ; tale spinta in chiave dovrebbe essere  $F$ .

Questo è il motivo per cui per  $F < f$  l'arco è stabile, per  $F = f$  l'arco è in semplice equilibrio, mentre per  $F > f$  l'arco non potendo assumere il valore  $F$ , al disarmo, parte da  $f$  e tende a raggiungere  $F$  collassando.

<sup>248</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 104 : *Dans le second cas, la pression qui se produira au point h, ne pourra évidemment atteindre que la valeur de la limite f, laquelle valeur suffit à l'équilibre, autour du point n', mais non autour du point m ; et comme cette pression à l'accroître, puisqu'elle a virtuellement pour limite F qui, par hypothèse, surpasse f, il s'en suit que la voûte ne pourra se soutenir d'elle – même et se rompra.*

Il criterio di stabilità fornito da Persy, non ha niente in comune con il metodo statico dei massimi e minimi di Coulomb. La condizione di collasso perseguita con metodo statico fornisce, infatti, ed automaticamente il meccanismo di collasso rotazionale, quando il range dei valori ammissibili per l'equilibrio si riduce ad un unico punto; nessuna considerazione "a priori" è fatta sulla tipologia dei meccanismi.

Riassumendo e commentando le situazioni prospettate da Persy:

1. per  $F < f$ , la spinta effettiva in chiave è  $X = f$  corrispondente ad una condizione limite per la risultante nel punto  $m$  del giunto  $M$ ; questa condizione garantisce l'equilibrio rispetto alla rotazione intorno al punto  $m$  del giunto  $M$  perché la pressione  $F$  chiude il giunto  $M$ , e poiché  $F < f$ , la volta diventa un arco a tre cerniere attive  $n^1hn^1$  che per sua natura è una struttura isostatica e pertanto equilibrata;
2. per  $F = f$ , la spinta effettiva in chiave è  $X = f$  corrispondente ad una condizione limite per la risultante nel punto  $n^1$  del giunto  $N$ ; questa condizione garantisce l'equilibrio rispetto alla rotazione intorno al punto  $n$  del giunto  $N$  perché la pressione  $f$  chiude il giunto  $N$ , e poiché  $X = f$ , la volta diventa un arco a tre cerniere  $mhm$  che per sua natura è una struttura isostatica e pertanto equilibrata. Ma, in realtà, per  $F = f$  la pressione reale della volta è anche  $F$ , *maximum* associato all'intradosso  $m$  del giunto  $M$ ; in tale situazione, poiché al disarmo la spinta in chiave cresce da zero fino al suo valore effettivo  $F$ , la condizione  $F = f$  è l'ultima che consente all'arco di assumere l'unico valore ammissibile, garantendo il semplice equilibrio.
3. per  $F > f$ , la pressione della volta al disarmo cresce da zero fino al *minimum*  $f$ , che non è il valore reale per la spinta in chiave; per tale motivo,  $f$  tende a raggiungere il valore  $F$ , facendo crollare la volta.

Noi possiamo affermare, invece, con certezza, che per  $F > f$  l'arco è già crollato e che il collasso reale dell'arco si produrrà per  $F = f$ ; esso corrisponde, infatti, all'esaurimento di tutto il range rotazionale.

#### **V.4. NOTA SUL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA SPINTA IN CHIAVE.**

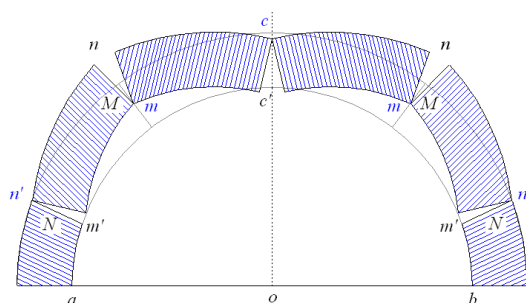
##### **I PUNTI DI APPLICAZIONE ALL'ESTRADOSSO E ALL'INTRADOSSO**

Individuato il perché del collasso delle strutture voltate, Persy si interessa ai *diversi modi* che esse hanno di rompersi, e scrive:

Quanto al modo di rottura, esso dipenderà dalle rispettive posizioni dei giunti  $M$ ,  $N$ , in cui il primo giunto  $M$  deve aprirsi all'estradosso per effetto della rotazione della parte superiore intorno al suo intradosso, mentre accadrà il contrario per il secondo giunto  $N$ ; a secondo che la disposizione di questi giunti sarà  $M/N$  (Fig. 5.9a) o  $N/M$  (Fig. 5.9.b) la rottura si opererà di modo che i due punti  $n^1$  restino fissi e i due  $m$  si allontanino l'uno dall'altro (Fig. 5.9a, Fig. 5.11a), o che i due punti  $m$  restino fissi e i due punti  $n^1$  si avvicinino

l'uno all'altro (Fig. 5.9b, Fig. 5.11b), il punto h si abbasserà o si alzerà lungo la verticale oc, da dove esso ne sarà uscito.

Si comprende, quindi, che quando il giunto verticale raggiunge tutta la sua estensione  $cc^1$  e in caso di rottura o in caso di semplice equilibrio, il punto h, cioè il punto d'inarcamento delle due semivolte, sarà suscettibile solo delle due situazioni estreme c e  $c^1$ , poiché, per tutte le situazioni intermedie, non ci sarà spazio libero al di sopra o al di sotto del punto di incurvamento, e che di conseguenza la rotazione intorno a questo punto sarà impossibile.<sup>249</sup>



**Fig. 5.11a.** *Figure 7.*<sup>250</sup> Meccanismo di collasso rotazionale verso il basso.

Secondo Persy, è chiaro che per la legge di impenetrabilità dei solidi la volta è libera di muoversi solo quando il punto h raggiunge i due punti estremi del giunto in chiave c e  $c^1$  dando origine a due meccanismi diversi; la struttura potrà ruotare verso il basso quando h coincide con l'estremo c, estradosso della chiave, e verso l'alto quando h coincide con l'estremo  $c^1$ , intradosso della chiave.

È d'altronde evidente che la posizione sia assoluta sia rispettiva dei giunti M, N e la grandezza dei limiti corrispondenti F, f variano con la situazione del punto h su  $cc^1$ ; conserviamo le annotazioni M, N, F, f, per la situazione c (Fig. 5.11a), e designiamo con  $M^1$ ,  $N^1$ ,  $F^1$ ,  $f^1$  i giunti ed i limiti relativi, per la situazione  $c^1$  (Fig. 5.11b); la conclusione sarà che esiste tra la situazione c o  $c^1$  del punto h e la rispettiva posizione dei due giunti M, N o  $M^1$ ,  $N^1$  che rispondono a

<sup>249</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pagg. 104 - 105 : *Quant au mode de rupture, il dépendra de la position respective des joints M, N, dont le premier M doit s'ouvrir à l'extrados par l'effet de la rotation de la partie supérieure autour de son intrados, tandis que c'est le contraire pour le second N; selon que la disposition de ces joints sera (M/n) ou (N/M) (fig. 6.7a, b) la rupture s'opérera de manière que les deux points n' (fig. 6.7a) demeurant fixes et les deux m s'écartant l'un sur l'autre, ou que les deux points m (fig. 6.7b) demeurant fixes et les deux n' se rapprochant l'un de l'autre, le point h s'abaissera ou s'élèvera le long de la verticale oc, d'où il ne saurait sortir. On conçoit donc que quand le joint vertical aura toute son étendue  $cc'$  et en cas de rupture ou de simple équilibre, le point h, c'est à dire le point d'arc-boutement des deux demi-voûtes, ne sera susceptible que des deux situations extrêmes c et  $c'$ , puisque, pour toute situation intermédiaire, il n'y aurait pas d'espace libre au-dessus ou au-dessous du point d'arc-boutement, et que par conséquent la rotation autour de ce point serait tout à fait impossible.*

<sup>250</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pagg. 105.

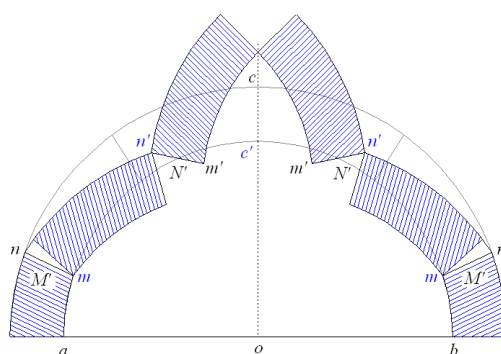
questa situazione, una certa subordinazione in conseguenza della quale gli stati di equilibrio e ugualmente i modi generali di rottura si riducono soltanto a due.<sup>251</sup>

La subordinazione, di cui parla Persy, va intesa come una stringente corrispondenza fra la posizione del punto di applicazione in chiave - estradosso  $c$  o intradosso  $c'$  - e le relative posizioni dei *maximum* e *minimum*:

$$c \rightarrow M/N \quad (5.13a)$$

oppure:

$$c' \rightarrow N'/M' \quad (5.13b)$$



**Fig. 5.11b.** *Figure 8.*<sup>252</sup> Meccanismo di collasso rotazionale verso l'alto.

Egli aggiunge, infatti:

Condizioni della loro esistenza.

15. Le condizioni di questi stati di equilibrio o di questi modi di rottura consistono nella situazione  $c$  del punto  $h$  (Fig. 5.11a) in cui i due giunti hanno disposizione  $(N/M)$  e nella situazione  $c'$  (Fig. 5.11b) in cui essi hanno la disposizione  $(N'/M')$ .<sup>253</sup>

In tal modo, Persy considera due possibili meccanismi di collasso per un arco, il meccanismo rotazionale verso il basso (Fig. 5.11a) con cerniera in chiave all'estradosso, ed il meccanismo rotazionale verso l'alto con cerniera in chiave all'intradosso (Fig. 5.11b). Nei fatti, fissata la geometria e la

<sup>251</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 105 : *Il est d'ailleurs évident que la position soit absolue soit respective des joints M, N et la grandeur des limites correspondantes F, f varient avec la situation du point h sur cc' ; conservons les notations M, N, F, f, pour la situation c, et désignons semblablement par M', N', F', f' les joints et les limites relatives, pour la situation c' ; la conclusion sera qu'il existe entre la situation c ou c' du point h et la position respective des deux joints M, N ou M', N' qui répondent à cette situation, une certaine subordination en conséquence de laquelle les états d'équilibre et pareillement les modes généraux de rupture se réduisent à deux seulement.*

<sup>252</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pagg. 105.

<sup>253</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes*, *ibidem*, pag. 105: *Conditions de leur existence. 15. Les conditions de ces états d'équilibre ou de ces modes de rupture consistent en ce que pour la situation c du point h (fig. 6.12a) les deux joints aient la disposition (M/N) et que pour la situation c' (fig. 6.12b) ils aient la disposition inverse (N'/M').*



tipologia delle forze agenti sull'arco, il meccanismo di collasso rotazionale è unico; inoltre, non è detto che in generale la posizione delle cerniere all'estradosso o all'intradosso coincida con quella chiave.

Di nuovo Persy fa precedere all'uso del metodo statico, che automaticamente fornisce il meccanismo di collasso, la scelta del meccanismo; non solo, ma per considerazioni che saranno più chiare in seguito, sembra che egli ammetta la possibilità di due meccanismi per lo stesso arco -connessi alle due possibili posizioni delle cerniere in chiave - piuttosto che verificare a posteriori l'unicità del meccanismo stesso e la corrispondente posizione delle cerniere.

#### V.5. LE CONSEGUENZE DEL METODO NEL CASO IN CUI NON SI VERIFICHI L'ALTERNANZA DELLE CERNIERE

Circa la possibilità di collasso secondo entrambi i meccanismi, Persy scrive:

Estensione di queste condizioni. 16. Tuttavia queste disposizioni (M/N) (Fig. 5.12a.) e (N'/M') (Fig. 5.13a.) non sono di una necessità assoluta, ciò vuol dire, che la disposizione opposta (N/M) (Fig. 5.12b.), per la situazione c, o (M'/N') (Fig. 5.13b.), per la situazione c', non esclude in assoluto la rottura della volta; giacché il giunto N, supposto al di sopra di M, o il giunto N', supposto al di sotto di M', potrà essere sostituito da un giunto analogo posizionato al di sotto di M (Fig. 5.12c.) o al di sopra di M' (Fig. 5.13c.), per esempio se F superasse ( $F < f$ ) e N si trovasse al di sopra di M, esisterebbe al di sotto, qualche giunto analogo a N, per il quale il valore di X, sebbene più grande di f, ma tuttavia ancora inferiore a F, è chiaro che la rottura, secondo il primo modo, non sarà meno possibile. Sarà quindi necessario, riguardo le disposizioni N/M, M'/N', considerare al posto dei minimum f e f' le più piccole forze necessarie a far ruotare intorno all'estradosso dei giunti inferiori a M e superiori a M' rispettivamente, forze che noi chiameremo con  $\bar{f}$  e  $\underline{f}'$ .<sup>254</sup>

---

<sup>254</sup> Persy N. 1834, *ibidem*, pagg. 105-106 : *Extensions de ces conditions. 16. Néanmoins ces dispositions (M/N) et (N'/M') ne sont pas d'une nécessité absolue, c'est à dire, que la disposition contraire (N/M), pour la situation c, ou (M'/N'), pour la situation c', ne répugne pas absolument à la rupture de la voûte ; car le joint N, supposé au-dessus de M, ou le joint N', supposé au-dessous de M', pourrait être suppléé par un joint analogue placé au-dessous de M ou-dessus de M', par exemple, si F surpassant f, et N se trouvant au-dessus de M, il existait au-dessous, quelque joint analogue à N, pour lequel la valeur de X, quoique plus grande que f, fut cependant encore moindre que F, il est claire que la rupture, selon le première mode, n'en serait pas moins possible. Il faudra donc, quant aux dispositions N/M, M'/N', considérer au lieu des minimum f, f' les moindres forces nécessaires pour faire tourner autour de l'extrados des joints inférieures à M et supérieures à M' respectivement, forces que nous désignerons par  $\bar{f}$  e  $\underline{f}'$ .*

Nell'ipotesi, che si verificano le situazioni descritte nelle Figg. 5.12b e 5.13b, non ci sarà più l'alternanza delle cerniere; in apparenza, la struttura sembra essere un arco a cinque cerniere, mentre, in realtà è un arco a tre cerniere. Ne consegue che i meccanismi non potranno più attivarsi perché risultano cinematicamente inammissibili.

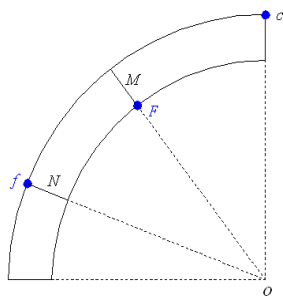


Fig. 5.12a. M/N.

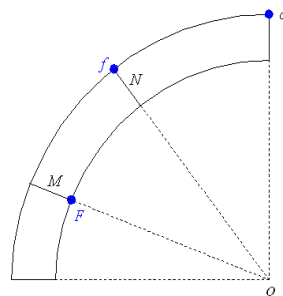


Fig. 5.12b. N/M.

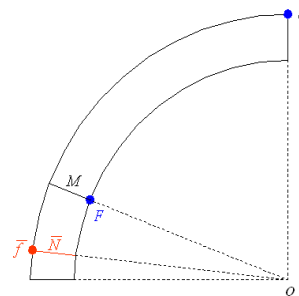


Fig. 5.12c. M/ $\bar{N}$ .

Secondo quanto dice Persy, se ciò dovesse avvenire, si renderebbe necessario ricercare dei giunti in posizioni opportune - il giunto  $\bar{N}$  (Fig. 5.12c), per la situazione  $c$ , al quale corrisponde il *minimum*  $\bar{f}$ , ed il giunto  $\underline{N}^1$  (Fig. 5.13c), per la situazione  $c^1$ , al quale corrisponde il *minimum*  $\underline{f}^1$  - in modo da ricadere nell'alternanza delle cerniere e nell'ammissibilità dei meccanismi.

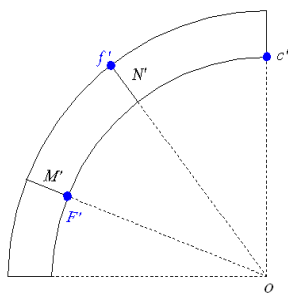


Fig. 5.13a.  $N^1/M^1$ .

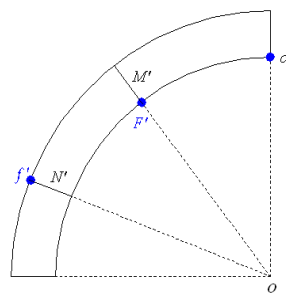


Fig. 5.13b.  $M^1/N^1$ .

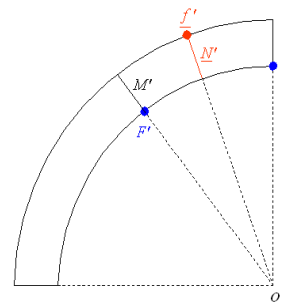


Fig. 5.13c.  $\underline{N}^1/M^1$ .

Persy, ritiene che:

- fissato il punto di applicazione in chiave ed il cinematismo ad esso associato;
- ed esauritosi il range dei valori della spinta corrispondente a quel punto di applicazione in chiave:

$$F < f \text{ oppure } F^1 < f^1 \quad (5.14)$$

ciascuna delle (5.14) debba necessariamente corrispondere ad una situazione di collasso. E' per questo motivo che egli decide di adottare un *minimum* relativo  $\bar{f}$  o  $\underline{f}^1$ , invece del *minimum* assoluto  $f$  oppure  $f^1$ , se in una qualunque delle due situazioni corrispondenti a (5.14), l'alternanza delle cerniere non dovesse corrispondere ad un meccanismo; in tal senso i *minimum*  $\bar{f}$ ,  $\underline{f}^1$  devono essere più piccoli dei *maximum*  $F$ ,  $F^1$ , perché devono condurre al collasso.

Si osservi inoltre con riferimento alle Figg. 5.12-5.13 che Persy è consapevole che il collasso richiede una successione di giunti individuati dai valori estremi con cerniere alternate all'estradosso e all'intradosso, corrispondente alla formazione di un meccanismo; i casi di Fig. 5.12b e Fig. 5.13b sono tipici dell'impossibilità di formazione di meccanismo. Tuttavia, la condizione  $F = \bar{f}$  o  $F' = \underline{f}'$ , non corrisponde necessariamente alla formazione di un meccanismo di collasso, ma semplicemente all'impossibilità di applicare la spinta in chiave in quel prescelto punto di applicazione. In tal caso, se si adotta lo spessore come parametro di stabilità, al decrescere dello spessore, la spinta in chiave potrà essere applicata o in punti interni che si estendono fino a raggiungere l'estremo opposto a quello in cui la spinta non può più essere applicata, oppure se anche all'altro estremo è impossibile applicare la spinta, il range dei punti di applicazione sarà tutto interno alla chiave; in quest'ultimo caso, il meccanismo di collasso corrisponderà ad un punto di applicazione interno alla chiave, e l'unica cerniera in chiave del meccanismo di collasso si suddividerà in due cerniere all'estradosso o all'intradosso simmetriche alla chiave.

Tali circostanze si manifestano non tanto per archi semicircolari estradossati parallelamente, ma per archi con distribuzioni di carichi particolari, quali gli archi con estradosso orizzontale (Fig. 5.14a) oppure *en chape* (Fig. 5.14b), e per giaciture delle imposte non coincidenti con l'orizzontale (archi rialzati), situazioni in cui la presenza di sovraccarichi alle reni e alla chiave, modifica notevolmente l'andamento delle curve delle pressioni.

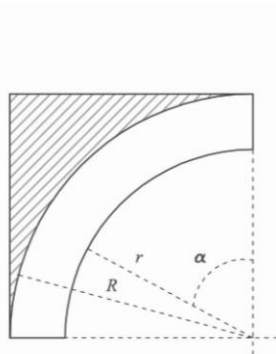


Fig. 5. 14a.

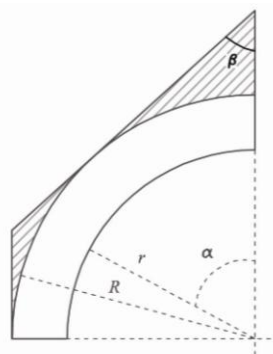


Fig. 5.14b.

Per un arco con estradosso ed imposte orizzontali, la condizione di collasso non viene raggiunta né per  $H$  applicata in chiave all'estradosso ( $F = \bar{f}$ ), né per  $H$  applicata in chiave all'intradosso ( $F' = \underline{f}'$ ), dal momento che entrambi i punti di applicazione non corrispondono a formazione di meccanismo.

L'analisi dei domini delle spinte rotazionali  $H^r$  degli archi con estradosso orizzontale (Fig.5.14a) ha rivelato infatti che il range di  $H^{r,e}$ , al diminuire dello spessore dell'arco, si esaurisce prima del range di  $H^{r,i}$ , non dando luogo – giustamente – a formazione di meccanismo; inoltre, quando

anche  $H^{r,i}$  si riduce ad un unico punto, tale condizione, di nuovo, non dà origine a formazione di meccanismo; è questo il caso di Fig. 5.13b che corrisponde alla disposizione dei giunti  $M^i / N^i$  prevista da Persy.

Nel grafico di Fig. 5.15 sono riportate le curve dei valori delle spinte  $H^r(\alpha)$  richiesti per l'equilibrio rispetto alle rotazioni, per un arco con estradosso ed imposta orizzontale, soggetto ad attrito sufficiente  $\mu = 0,364$  e caratterizzato da un rapporto  $K = 1.091366$  fra raggio di estradosso  $R$  e raggio di intradosso  $r$ ; in figura sono riportate anche le curve dei valori, richiesti per l'equilibrio rispetto agli scorrimenti, che qui non discutiamo.

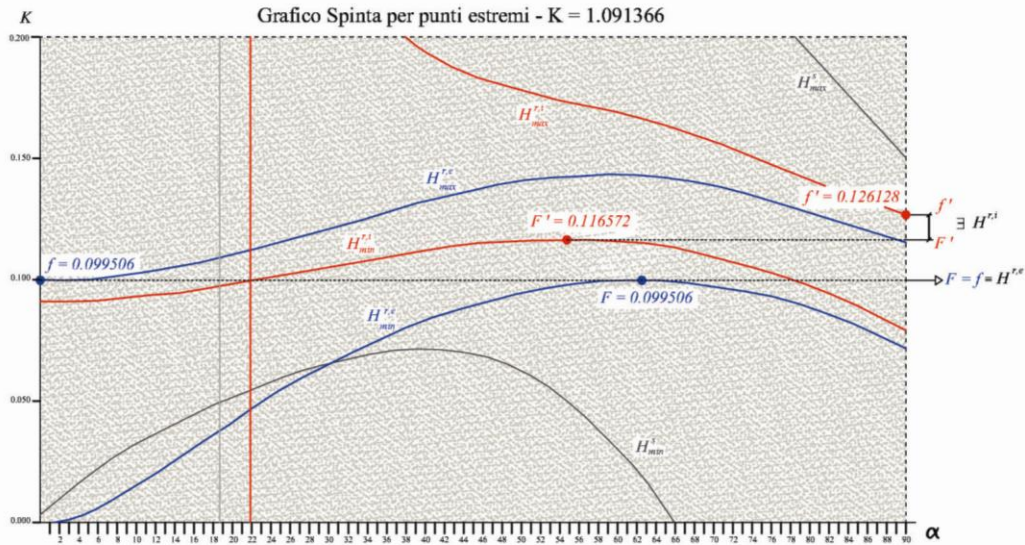


Fig. 5.15. Arco con estradosso ed imposta orizzontale.

Si noti che:

- il range di  $H^{r,e}$ , limitato inferiormente da  $\max H_{min}^{r,e}$  e superiormente da  $\min H_{max}^{r,e}$ , si è ridotto ad un unico punto ( $F = f = 0.099506$ );
- la disposizione delle cerniere per il range di  $H^{r,e}$  – cerniera doppia all'estradosso della chiave e cerniera all'intradosso delle reni - non può dare origine ad un meccanismo (Fig. 5.16a);
- il range di  $H^{r,i}$ , limitato inferiormente da  $\max H_{min}^{r,i}$  e superiormente da  $\min H_{max}^{r,i}$ , esiste ( $F^i < f^i$ ) ed è indicato in figura.

Diminuendo lo spessore dello stesso arco, si assuma un rapporto  $K = 1.05511$  e si osservino le curve dei valori  $H^r(\alpha)$ , richiesti per l'equilibrio rispetto alle rotazioni (Fig. 5.16a).

Si noti che:

- il range di  $H^{r,e}$ , limitato inferiormente da  $\max H_{min}^{r,e}$  e superiormente da  $\min H_{max}^{r,e}$ , non esiste più;
- il range di  $H^{r,i}$ , limitato inferiormente da  $\max H_{min}^{r,i}$  e superiormente da  $\min H_{max}^{r,i}$ , si è ridotto ad un unico punto ( $F^i = f^i = 0.091956$ );
- la disposizione delle cerniere per il range di  $H^{r,i}$  – all'intradosso della chiave e delle reni, e all'estradosso alle imposte - non può dare origine ad un meccanismo (Fig. 5.16b).



Secondo Persy che ha già ipotizzato i due meccanismi di collasso, per una situazione di questo tipo esistono certamente altri *minimum* - questa volta non assoluti, ma relativi - le cui posizioni consentono il meccanismo.

La ricerca di tali *minimum* relativi  $\bar{f}$  e  $\underline{f}'$ , maggiori dei *minimum* assoluti  $f$  e  $f'$ , richiede necessariamente che lo spessore dell'arco sia diminuito. Così operando, si arriva alla prima situazione di Fig. 5.12b prevista da Persy.

Nel grafico di Fig. 5.17a sono evidenziati i valori dei *maximum*  $F$ ,  $F'$  e dei *minimum*  $f$ ,  $f'$  per lo stesso arco e per  $K=1.044026$ ; in esso notiamo che il *minimum* relativo  $\bar{f}$  è maggiore del *minimum* assoluto  $f$ , e che sono soddisfatte le seguenti relazioni:

$$\bar{f} > f \quad \text{con} \quad \bar{f} \leq F \quad (5.15a)$$

considerate da Persy come necessarie per il collasso; si noti che  $\bar{f}$  corrisponde ad una cerniera all'estradosso del giunto  $N$  posizionato al di sotto del giunto  $M$  e che il suo valore è eguale a quello del *maximum*  $F$ :

$$\bar{f} = F = 0.078874 \quad (5.15b)$$

La nuova disposizione delle cerniere – estradosso a  $0^\circ$ , intradosso a  $68^\circ$ , estradosso a  $90^\circ$  - garantisce l'attivazione di un meccanismo di rotazione verso il basso (Fig. 5.17a).

Accettare il *minimum* relativo  $\bar{f}$  vuol dire scartare il *minimum* assoluto  $f$  e considerare come ancora esistente il range di  $H^{T^e}$  che di fatto si è già esaurito per un  $K$  superiore; inoltre, così operando, si consente alla curva delle pressioni di uscire dallo spessore dell'arco fra  $0^\circ$  e  $41^\circ$ .

Diminuendo ancora lo spessore dell'arco, ci si accorge che, per lo stesso arco, si può trovare anche la seconda situazione di Fig. 5.13b prevista da Persy. Nel grafico di Fig. 5.18a sono evidenziati i valori dei *maximum*  $F$ ,  $F'$  e dei *minimum*  $f$ ,  $f'$  per lo stesso arco e per un valore di  $K = 1.0377486$ ; in esso notiamo che il *minimum* relativo  $\underline{f}'$  è maggiore del *minimum* assoluto  $f'$ , e che sono soddisfatte le seguenti relazioni:

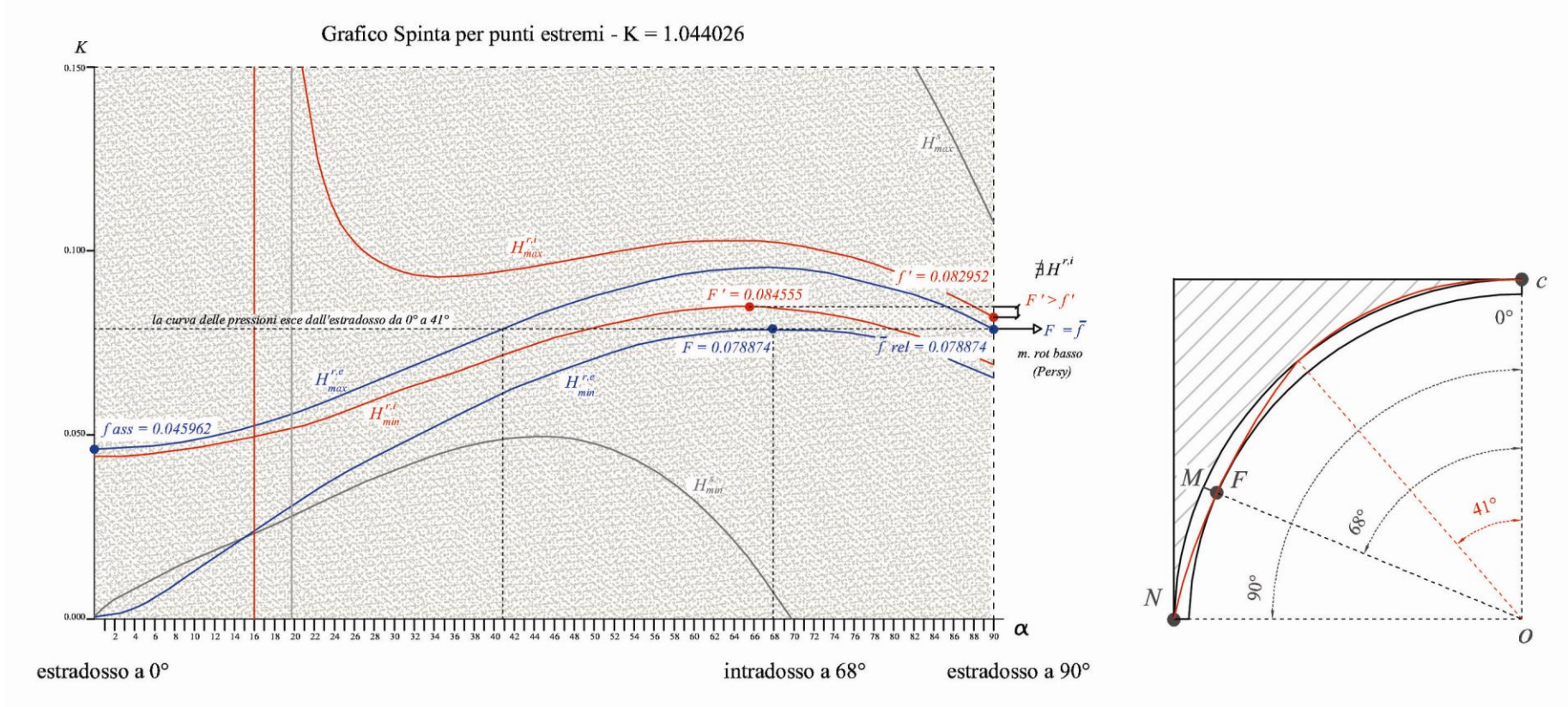
$$\underline{f}' > f' \quad \text{con} \quad \underline{f}' \leq F' \quad (5.16a)$$

considerate da Persy come necessarie per il collasso; si noti che  $\underline{f}'$  corrisponde ad una cerniera all'estradosso del giunto  $M'$  posizionato al di sopra del giunto  $N'$  e che il suo valore è eguale a quello del *maximum*  $F'$ :

$$\underline{f}' = F' = 0.080386 \quad (5.16b)$$

La nuova disposizione delle cerniere – intradosso a  $0^\circ$ , estradosso a  $32^\circ$ , intradosso a  $67^\circ$  - garantisce l'attivazione di un meccanismo di rotazione verso l'alto (Fig. 5.18b).





**Fig. 5.17a.** Arco con estradosso ed imposta orizzontale.

**Fig. 5.17b.** Arco con  $s = 0.044026r$ .

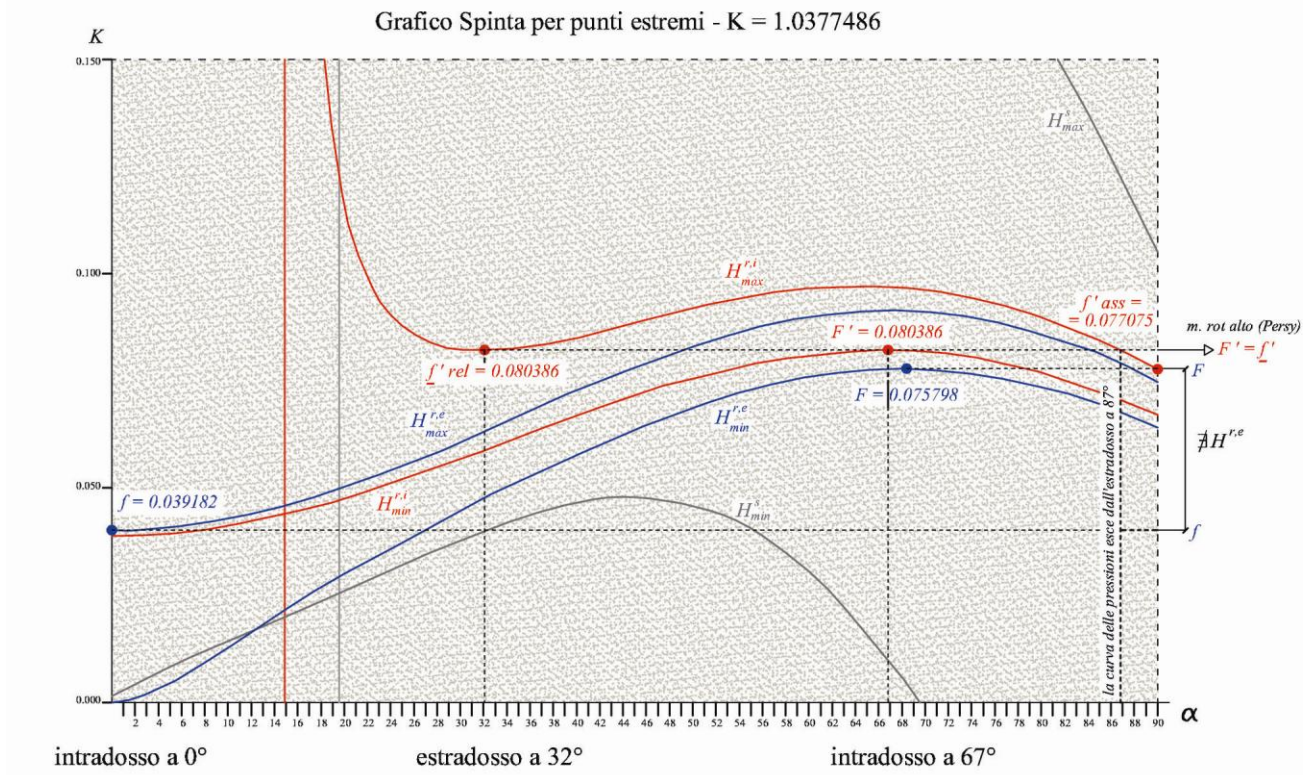


Fig. 5.18a. Arco con estradosso ed imposta orizzontale.

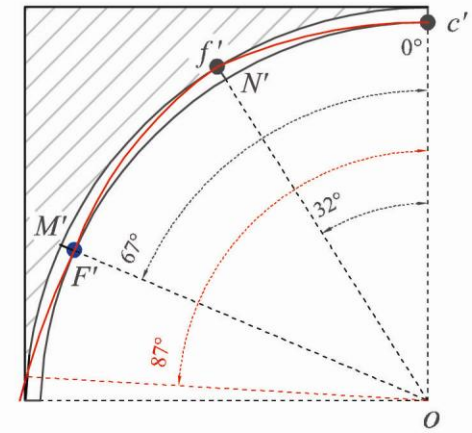


Fig. 5.18b. Arco con  $s = 0.0377486r$ .



Accettare il *minimum* relativo  $\underline{f}^1$  vuol dire scartare il *minimum* assoluto  $f^1$  e considerare come ancora esistente il range di  $H^{r,i}$  che di fatto si è già esaurito per un  $K$  superiore, inoltre, così operando, si consente alla curva delle pressioni di uscire dallo spessore dell'arco a  $87^\circ$ .

Può essere interessante osservare che secondo Persy, se l'arco avesse avuto imposte simmetricamente oblique corrispondenti ad  $\alpha = 87^\circ$ , per lo stesso valore di  $K$  il meccanismo di collasso sarebbe stato con rotazione verso l'alto. Si osservi che i *minimum* relativi  $\bar{f}$  e  $\underline{f}^1$ , individuati da Persy, e corrispondenti a cerniere all'estradosso dell'arco, identificano come i *minimum* assoluti  $f$  e  $f^1$  una condizione di frontiera; tuttavia, questi nuovi *minimum* relativi, corrispondenti alla formazione di meccanismo, violano la regola dei *maximis* e *minimis* e pertanto corrispondono a curve delle pressioni completamente esterne in una porzione dell'arco, circostanza che è inaccettabile. La condizione di collasso per il caso analizzato può essere individuata considerando punti di applicazione della spinta interni al giunto della chiave, proprio per l'estinzione di entrambi i range rotazionali  $H^{r,e}$  e  $H^{r,i}$ . Infatti, la condizione di collasso per comportamento *standard* è unica e corrisponde alla riduzione del range delle spinte ammissibili ad un unico punto.

Fissato lo spessore dell'arco, e quindi il valore di  $K$ , il range delle spinte staticamente ammissibili va individuato utilizzando il metodo dei *maximum* e *minimum* proposto da Coulomb, ma individuando nel contempo il range dei punti del giunto in chiave, in cui la spinta può essere applicata; tale range, in relazione alla tipologia di arco, allo spessore e ai sovraccarichi, può estendersi dall'estradosso all'intradosso, oppure dall'estradosso ad un punto interno, oppure dall'intradosso ad un punto interno, o infine ridursi ad un range di punti tutti interni al giunto della chiave. Quest'ultima situazione è quella corrispondente al caso analizzato sopra, in cui entrambi i range rotazionali  $H^{r,e}$  e  $H^{r,i}$  si sono esauriti senza dar luogo a formazione di meccanismo.

L'errore di Persy consiste nell'utilizzare il metodo proposto da Coulomb, non per individuare il range di spinte staticamente ammissibili (il cui esaurimento fornisce automaticamente il meccanismo di collasso), ma per individuare, secondo le intenzioni da egli stesso dichiarate, tutti i meccanismi di collasso e le circostanze in cui essi si manifestano, considerando a tal fine soltanto punti di applicazione in chiave all'estradosso e all'intradosso, che corrispondono agli unici due meccanismi rotazionali che egli considera possibili.

È questo il motivo per cui, quando uno dei due range si esaurisce senza dar luogo a meccanismo, egli si ostina a cercarlo violando il metodo dei massimi e minimi e consentendo alla curva delle pressioni di uscire dall'arco. Sembrerebbe inoltre che per Persy nello stesso arco potrebbero manifestarsi meccanismi di collasso rotazionale distinti. Questa

interpretazione ed il caso analizzato in dettaglio potrebbero giustificare il criterio di stabilità fornito da Persy, che richiede per la stabilità dell'arco l'esistenza di entrambi i range corrispondenti ai due punti di applicazione in chiave all'estradosso e all'intradosso.

### ***V.5.1. Il meccanismo reale di collasso di un arco con estradosso ed imposta orizzontale***

A questo punto è opportuno tener conto di quanto accade realmente per il domino delle rotazioni  $H^r$  nel momento in cui il range  $H^{r,i}$  si esaurisce.

In tale circostanza le curve delle pressioni estreme non danno origine ad un meccanismo; si rende, quindi, necessario cercare un punto di applicazione interno allo spessore dell'arco ( $R - r$ ), cui corrisponde un dominio che, esaurendosi, darà origine al meccanismo di collasso.

L'indagine del collasso reale di un arco con estradosso ed imposta orizzontale e con attrito sufficiente  $\mu = 0.364$  è stata riassunta nella Tabella 5.1. Ad ogni valore di  $K$  indagato, corrispondono i *maximum*  $F$ ,  $F^i$  ed i *minimum*  $f$  e  $f^i$  dei range rotazionali  $H^{r,e}$  e  $H^{r,i}$  per punti di applicazione all'estradosso e all'intradosso del giunto della chiave e/o i *maximum*  $F^{int}$  e  $F^{i,int}$  ed i *minimum*  $f^{int}$  e  $f^{i,int}$  dei range rotazionali  $H^{r,e,int}$  e  $H^{r,i,int}$  per punti di applicazione interni al giunto della chiave, con estremi prossimi all'estradosso e all'intradosso; le distanze dall'estradosso e dall'intradosso - in percento dello spessore - dei punti estremi del giunto ridotto in cui la spinta può essere applicata sono, rispettivamente,  $y_e$  e  $y_i$ .

Analizzando i valori della tabella, notiamo che fino al valore  $K = 1.09137$  la spinta  $H$  può essere applicata indifferentemente dall'estradosso all'intradosso del giunto della chiave dell'arco.

Questo valore di  $K$  rappresenta la frontiera ultima del range di  $H^{r,e}$ ; al di sotto di questo valore i punti di applicazione della spinta  $H$  sono o interni al giunto della chiave, con distanza del punto estremo dall'estradosso, pari a  $y_e$ , e distanza del punto estremo dall'intradosso, pari a  $y_i = 0$ .

Diminuendo lo spessore dell'arco si arriva ad un valore  $K = 1.05511$  che corrisponde alla frontiera ultima del range di  $H^{r,i}$ . Essa non dà origine a meccanismo; si rende quindi necessario, per il raggiungimento del collasso della struttura, diminuire ulteriormente lo spessore dell'arco e considerare punti di applicazione della spinta  $H$  questa volta tutti interni al giunto della chiave, con distanze dei punti estremi dall'estradosso e dall'intradosso pari a  $y_e$  e  $y_i$ .

Il collasso reale dell'arco sarà raggiunto per  $K = 1.04814$  e per un punto interno al giunto della chiave che dista dall'estradosso della quantità  $y_e = 0.48318$  e dall'intradosso della quantità  $y_i = 0.51682$ . In corrispondenza di questi valori i *maximum*  $F^{int}$  e  $F^{i,int}$  ed i *minimum*  $f^{int}$  e  $f^{i,int}$  coincideranno e daranno origine al meccanismo di rotazione verso il basso.

Tabella riassuntiva dei valori per la ricerca del collasso reale di un arco con estradosso ed imposta orizzontali

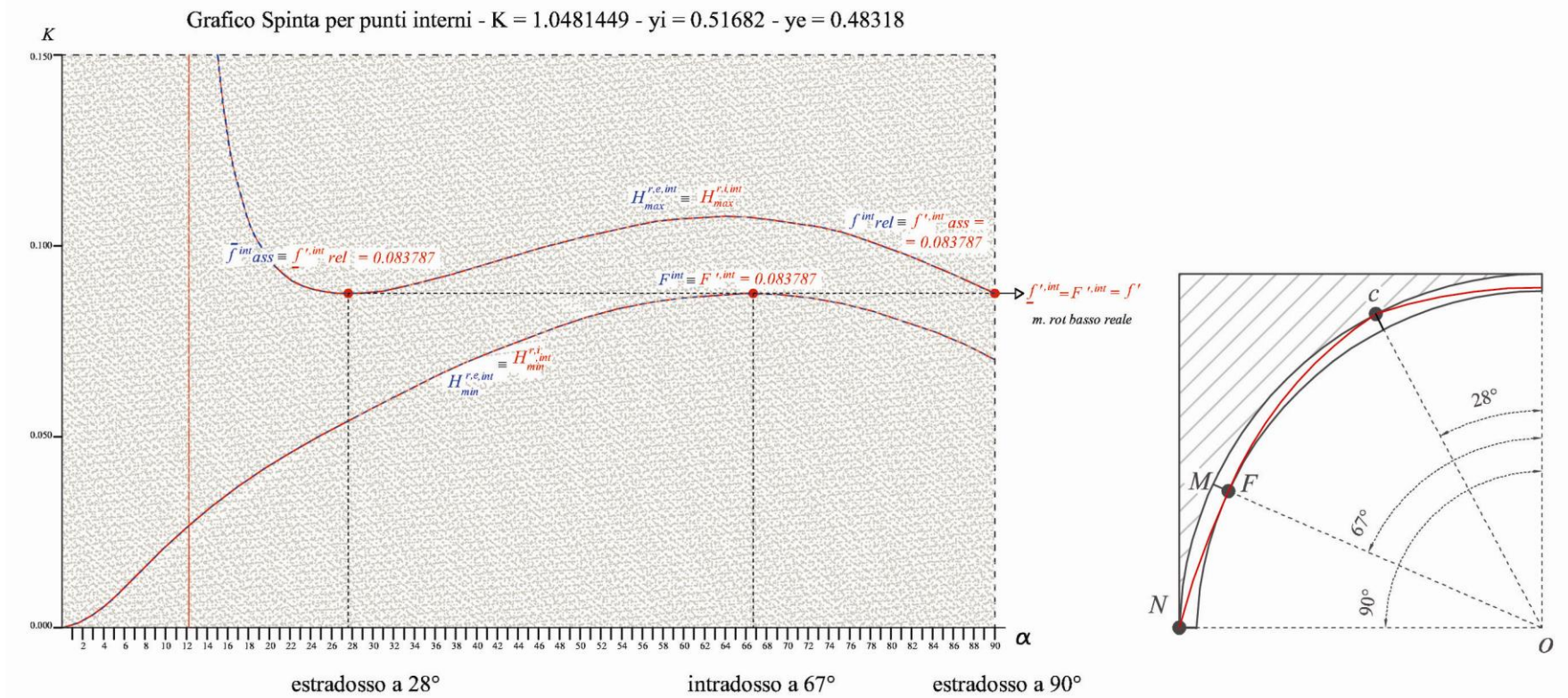
K	$\beta$	ye	yi	Hre	Hri	F	f	F'	f'	F int	f int	F' int	f' int	collasso
1,1100	90°	0	0	si	si	0,10639	0,12173	0,12955	0,14536	safe	safe	safe	safe	safe
1,1075	90°	0	0	si	si	0,10550	0,11871	0,12779	0,14271	safe	safe	safe	safe	safe
1,1050	90°	0	0	si	si	0,10461	0,11570	0,12604	0,14009	safe	safe	safe	safe	safe
1,1025	90°	0	0	si	si	0,10370	0,11271	0,12429	0,13748	safe	safe	safe	safe	safe
1,1000	90°	0	0	si	si	0,10278	0,10972	0,12255	0,13490	safe	safe	safe	safe	safe
1,0975	90°	0	0	si	si	0,10184	0,10675	0,12081	0,13233	safe	safe	safe	safe	safe
1,0950	90°	0	0	si	si	0,10090	0,10379	0,11908	0,12979	safe	safe	safe	safe	safe
1,0925	90°	0	0	si	si	0,09994	0,10084	0,11735	0,12727	safe	safe	safe	safe	safe
1,0914	90°	0	0	ult.	si	0,09951	0,09951	0,11657	0,12613	safe	safe	safe	safe	safe
1,0900	90°	0,00022	0	no	si	0,09898	0,09790	0,11563	0,12476	0,09898	0,09898	safe	safe	safe
1,0875	90°	0,00180	0	no	si	0,09800	0,09498	0,11391	0,12228	0,09802	0,09802	safe	safe	safe
1,0850	90°	0,00506	0	no	si	0,09700	0,09206	0,11220	0,11982	0,09706	0,09706	safe	safe	safe
1,0825	90°	0,00983	0	no	si	0,09599	0,08916	0,11048	0,11738	0,09611	0,09611	safe	safe	safe
1,0800	90°	0,01735	0	no	si	0,09497	0,08627	0,10878	0,11496	0,09517	0,09517	safe	safe	safe
1,0775	90°	0,02702	0	no	si	0,09394	0,08339	0,10707	0,11256	0,09423	0,09423	safe	safe	safe
1,0750	90°	0,03920	0	no	si	0,09289	0,08052	0,10537	0,11018	0,09330	0,09330	safe	safe	safe
1,0725	90°	0,05453	0	no	si	0,09183	0,07766	0,10368	0,10782	0,09237	0,09237	safe	safe	safe
1,0700	90°	0,07329	0	no	si	0,09076	0,07482	0,10198	0,10548	0,09146	0,09146	safe	safe	safe
1,0675	90°	0,09590	0	no	si	0,08968	0,07199	0,10029	0,10316	0,09055	0,09055	safe	safe	safe
1,0650	90°	0,12289	0	no	si	0,08859	0,06916	0,09860	0,10086	0,08965	0,08965	safe	safe	safe
1,0625	90°	0,15489	0	no	si	0,08748	0,06636	0,09692	0,09858	0,08875	0,08875	safe	safe	safe
1,0600	90°	0,19269	0	no	si	0,08635	0,06356	0,09524	0,09632	0,08787	0,08787	safe	safe	safe
1,0575	90°	0,23713	0	no	si	0,08521	0,06077	0,09355	0,09408	0,08699	0,08699	safe	safe	safe
1,0551	90°	0,28685	0	no	ult.	0,08411	0,05811	0,09196	0,09196	0,08616	0,08616	safe	safe	safe
1,0550	90°	0,28926	0	no	no	0,08407	0,05800	0,09188	0,09186	0,08612	0,08612	0,09188	0,09186	safe
1,0525	90°	0,35032	0,15830	no	no	0,08291	0,05524	0,09020	0,08966	0,08526	0,08526	0,08892	0,08892	safe
1,0500	90°	0,42185	0,34760	no	no	0,81736	0,05249	0,08854	0,08748	0,08441	0,08441	0,08598	0,08598	safe
1,0481	90°	0,48318	0,51682	no	no	0,08338	0,08338	0,08338	0,08338	0,08338	0,08338	0,08338	0,08338	rot basso reale

Tabella 5.1

**Tabella riassuntiva dei valori per la ricerca del collasso di un arco con estradosso ed imposta orizzontali secondo Persy**

K	$\beta$	Hre	Hri	F	f	F'	f'	min f rel	min f' rel	collasso
1,11000	90°	si	si	0,10639	0,12173	0,12955	0,14536	---	---	Safe
1,10750	90°	si	si	0,10550	0,11871	0,12779	0,14271	---	---	Safe
1,10500	90°	si	si	0,10461	0,11570	0,12604	0,14009	---	---	Safe
1,10250	90°	si	si	0,10370	0,11271	0,12429	0,13748	---	---	Safe
1,10000	90°	si	si	0,10278	0,10972	0,12255	0,13490	---	---	Safe
1,09750	90°	si	si	0,10184	0,10675	0,12081	0,13233	---	---	Safe
1,09500	90°	si	si	0,10090	0,10379	0,11908	0,12979	---	---	Safe
1,09250	90°	si	si	0,09994	0,10084	0,11735	0,12727	---	---	Safe
1,09137	90°	ult.	si	0,09951	0,09951	0,11657	0,12613	---	---	Safe
1,09000	90°	no	si	0,09898	0,09898	0,11563	0,12476	0,11446	---	Safe
1,08750	90°	no	si	0,09802	0,09802	0,11391	0,12228	0,11244	---	Safe
1,08500	90°	no	si	0,09706	0,09706	0,11220	0,11982	0,11043	---	Safe
1,08250	90°	no	si	0,09611	0,09611	0,11048	0,11738	0,10843	---	Safe
1,08000	90°	no	si	0,09517	0,09517	0,10878	0,11496	0,10644	---	Safe
1,07750	90°	no	si	0,09423	0,09423	0,10707	0,11256	0,10446	---	Safe
1,07500	90°	no	si	0,09330	0,09330	0,10537	0,11018	0,10249	---	Safe
1,07250	90°	no	si	0,09237	0,09237	0,10368	0,10782	0,10053	---	Safe
1,07000	90°	no	si	0,09146	0,09146	0,10198	0,10548	0,09858	---	Safe
1,06750	90°	no	si	0,09055	0,09055	0,10029	0,10316	0,09664	---	Safe
1,06500	90°	no	si	0,08965	0,08965	0,09860	0,10086	0,09470	---	Safe
1,06250	90°	no	si	0,08875	0,08875	0,09692	0,09858	0,09278	---	Safe
1,06000	90°	no	si	0,08787	0,08787	0,09524	0,09632	0,09087	---	Safe
1,05750	90°	no	si	0,08699	0,08699	0,09355	0,09408	0,08896	---	Safe
1,05511	90°	no	ult.	0,08411	0,05811	0,09196	0,09196	0,08715	---	Safe
1,05500	90°	no	no	0,08407	0,08407	0,09188	0,09188	0,08707	0,11407	Safe
1,05250	90°	no	no	0,08526	0,08526	0,08892	0,08892	0,08519	0,10937	Safe
1,05000	90°	no	no	0,08441	0,08441	0,08598	0,08598	0,08331	0,10460	Safe
1,04814	90°	no	no	0,08338	0,08338	0,08338	0,08338	0,08189	0,10093	rot basso reale
1,04750	90°	no	no	0,08055	0,08532	0,08687	0,08532	0,08145	0,09977	Safe
1,04500	90°	no	no	0,07935	0,00470	0,08520	0,08318	0,07959	0,09486	Safe
1,04403	90°	no	no	0,07887	0,04596	0,08456	0,08295	0,07887	0,09295	rot basso Persy
1,04250	90°	no	no	0,07813	0,04431	0,08354	0,08105	0,07775	0,08992	Safe
1,04000	90°	no	no	0,07691	0,04161	0,08188	0,07895	0,07592	0,08493	Safe
1,03775	90°	no	no	0,07580	0,03918	0,08039	0,07708	0,07427	0,08039	rot alto Persy

**Tabella 5.2**



**Fig. 5.19a.** Arco con estradosso ed imposta orizzontale.

**Fig. 5.19b.** Arco con  $s = 0.0481449r$  .

La Tabella 5.2 mostra, per confronto, i risultati dell'indagine a collasso eseguita per lo stesso arco con estradosso ed imposta orizzontale con il metodo proposto da Persy.

Come già osservato, egli non considera punti di applicazione interni al giunto della chiave, ma solo punti di applicazione estremi all'estradosso e all'intradosso del giunto.

Quando per  $K=1.05511$  - ultima frontiera del range di  $H^{r,i}$  - Persy si trova nella condizione di Fig. 5.13b di impossibilità di meccanismo, egli continua a diminuire lo spessore dell'arco ed inizia a considerare dei *minimum* relativi  $\bar{f}$  e  $\underline{f}$ , sulle frontiere estreme, che siano maggiori dei *minimum* assoluti  $f$  e  $f^t$  e che corrispondano a posizioni opportune.

In questo modo egli trova prima il meccanismo di collasso rotazionale verso il basso per  $K=1.04403$  e poi il meccanismo rotazionale verso l'alto per  $K=1.03775$ .

Riassumendo, Persy, mantenendosi sull'estradosso e sull'intradosso trova in successione i due meccanismi di collasso rotazionale per lo stesso arco, che corrispondono a valori di  $K$  inferiori a  $K=1.04814$  corrispondente al meccanismo reale di collasso rotazionale verso il basso.

Nel grafico di Fig. 5.19a sono riportate le curve dei valori dei range rotazionali  $H^{r,e,int}$  e di  $H^{r,i,int}$  corrispondenti al valore  $K=1.0481449$  e ad un punto interno al giunto della chiave che dista dall'intradosso della quantità percentuale  $y_i=0.51682$  e dall'estradosso  $y_e=0.48318$ ; si vede chiaramente che il meccanismo si attiva in corrispondenza di:

$$\underline{f}^{r,int} = F^{r,int} = f^{r,int} = 0.083787 \quad (5.17)$$

La disposizione delle cerniere - estradosso a  $28^\circ$ , intradosso a  $67^\circ$ , estradosso a  $90^\circ$  - corrisponde ad un meccanismo di rotazione verso il basso (Fig. 5.19b).

Si può affermare con certezza, quindi, che nella realtà per archi circolari con estradosso ed imposta orizzontale il meccanismo di rotazione verso l'alto non si verifica mai.

### ***V.5.2. Il collasso di un arco con estradosso en chape ed imposta orizzontale***

L'analisi dei domini delle spinte rotazionali  $H^r$  degli archi con estradosso *en chape* (Fig. 5.20a) ha rivelato che, al diminuire dello spessore dell'arco, il range di  $H^{r,e}$  si esaurisce prima del range di  $H^{r,i}$ , non dando luogo – giustamente – a formazione di meccanismo; inoltre, quando anche  $H^{r,i}$  si riduce ad un unico punto, tale condizione, di nuovo, non dà origine a formazione di meccanismo; è questo il caso di Fig. 5.13b che corrisponde alla disposizione dei giunti  $M^t/N^t$  prevista da Persy.

Si può dedurre, quindi, che gli archi con estradosso *en chape* (Fig. 5.20a) ed imposta orizzontale hanno un comportamento simile a quello degli archi



con estradosso orizzontale, ma solo, come avremo modo di vedere in seguito, fino ad un certo valore di  $\beta$ .

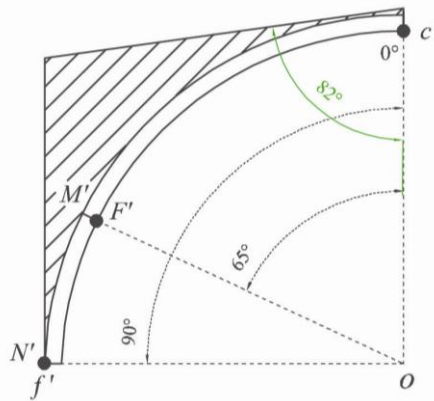


Fig. 5.20a. Arco con  $s = 0.04871r$ .

Nel grafico di Fig. 5.20b sono riportate le curve dei valori delle spinte  $H^r(\alpha)$  richiesti per l'equilibrio rispetto alle rotazioni, per un arco con estradosso *en chape* -  $\beta = 82^\circ$  - ed imposta orizzontale, soggetto ad attrito sufficiente  $\mu = 0.364$  e caratterizzato da un rapporto  $K = 1.059511$ ; in figura sono riportate anche le curve dei valori  $H^s(\alpha)$ , richiesti per l'equilibrio rispetto agli scorrimenti, che qui non discutiamo.

Si noti che, per questo valore di  $K$ , il range  $H^{r,e}$  si esaurisce - ( $F = f = 0.065686$ ) - mentre il range  $H^{r,i}$  esiste ancora; esso si esaurirà in corrispondenza di  $K = 1.04871$  - ( $F^i = f^i = 0.065012$ ) - come mostrato nel grafico di Fig. 5.20c, e la disposizione delle cerniere - intradosso in chiave, intradosso alle reni, estradosso alle imposte non può dar luogo a meccanismo.

È interessante notare che le frontiere  $f = H_{max}^{r,e}$  e  $F^i = H_{min}^{r,i}$ , oltre ad avere lo stesso andamento, sono tra loro molto vicine, ciò a testimonianza del fatto che il collasso è vicino.

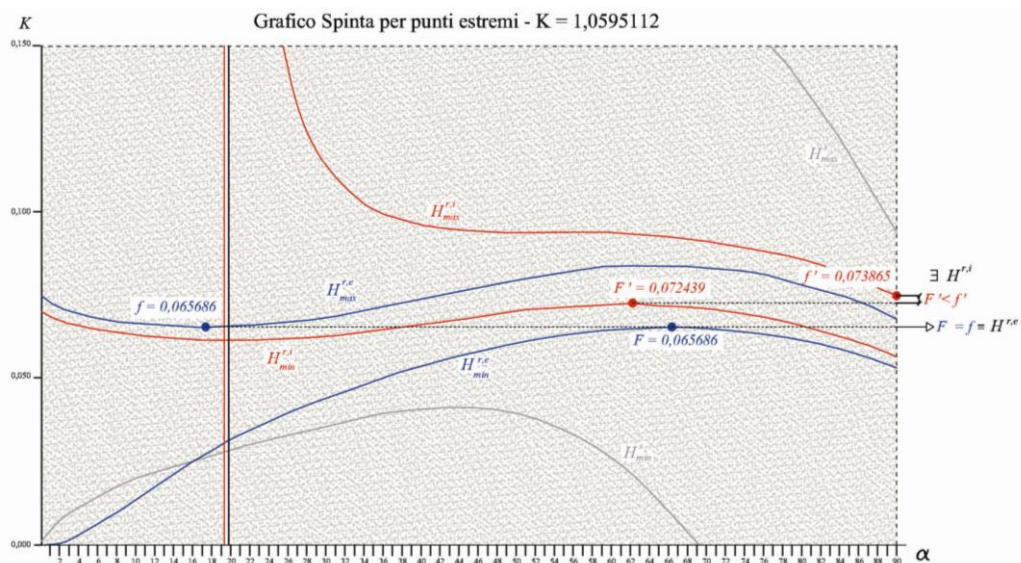
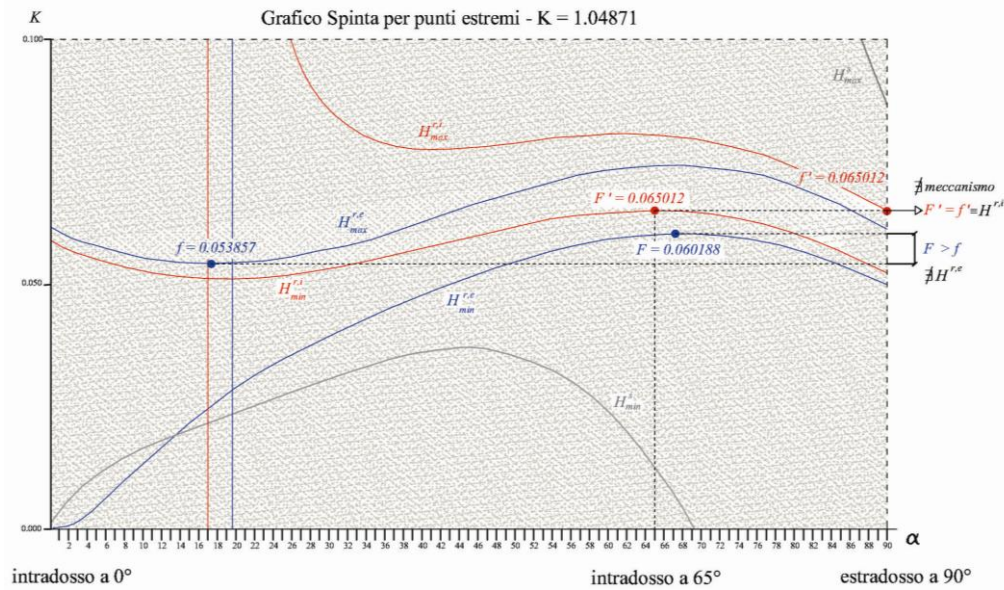


Fig. 5.20b. Arco con estradosso *en chape* -  $\beta = 82^\circ$  - ed imposta orizzontale.



**Fig. 5.20c.** Arco con estradosso *en chape* -  $\beta = 82^\circ$  - ed imposta orizzontale.

Secondo Persy, per una situazione di questo tipo, esistono certamente altri *minimum* - questa volta non assoluti, ma relativi - le cui posizioni consentono il meccanismo.

La ricerca di tali *minimum* relativi  $\bar{f}$  e  $\bar{f}'$ , maggiori dei *minimum* assoluti  $f$  e  $f'$ , richiede necessariamente che lo spessore dell'arco sia diminuito. Così operando, si arriva alla prima situazione di Fig. 5.12b prevista da Persy.

Nel grafico di Fig. 5.21b sono evidenziati i valori dei *maximum*  $F$  e  $F'$  e dei *minimum*  $f$ ,  $f'$  per lo stesso arco e per  $K = 1.038235$ ; in esso notiamo che il *minimum* relativo  $\bar{f}$  è maggiore del *minimum* assoluto  $f$ , e che sono soddisfatte le relazioni (5.15a) considerate da Persy come necessarie per il collasso; si noti che  $\bar{f}$  corrisponde ad una cerniera all'estradosso del giunto  $\bar{N}$  posizionato al di sotto del giunto  $M$  e che il suo valore è eguale a quello del *maximum*  $F$ :

$$\bar{f} = F = 0,054673 \quad (5.18)$$

La nuova disposizione delle cerniere - estradosso a  $0^\circ$ , intradosso a  $70^\circ$ , estradosso a  $90^\circ$  - garantisce l'attivazione di un meccanismo di rotazione verso il basso (Fig. 5.21a).

Accettare il *minimum* relativo  $\bar{f}$  vuol dire scartare il *minimum* assoluto  $f$  e considerare come ancora esistente il range di  $H^{r,e}$  che di fatto si è già esaurito per un  $K$  superiore; inoltre, così operando, si consente alla curva delle pressioni di uscire dallo spessore dell'arco fra  $0^\circ$  e  $45^\circ$ .

Diminuendo ancora lo spessore dell'arco, ci si accorge che, per lo stesso arco, si può trovare anche la seconda situazione di Fig. 5.13b prevista da Persy. Nel grafico di Fig. 5.22a sono evidenziati i valori dei *maximum*  $F$  e  $F'$  e dei *minimum*  $f$  e  $f'$  per lo stesso arco e per un valore di



$K = 1.0353907$ ; in esso notiamo che il *minimum* relativo  $\underline{f}^1$  è maggiore del *minimum* assoluto  $f^1$ , e che sono soddisfatte le relazioni (5.16a) considerate da Persy come necessarie per il collasso; si noti che  $\underline{f}^1$  corrisponde ad una cerniera all'estradosso del giunto  $\underline{M}^1$  posizionato al di sopra del giunto  $N^1$  e che il suo valore è eguale a quello del *maximum*  $F^1$ :

$$\underline{f}^1 = F^1 = 0.056053 \quad (5.19)$$

La nuova disposizione delle cerniere – intradosso a  $0^\circ$ , estradosso a  $35^\circ$ , intradosso a  $68^\circ$  - garantisce l'attivazione di un meccanismo di rotazione verso l'alto (Fig. 5.22b).

Accettare il *minimum* relativo  $\underline{f}^1$  vuol dire scartare il *minimum* assoluto  $f^1$  e considerare come ancora esistente il range di  $H^{r,i}$  che di fatto si è già esaurito per un  $K$  superiore, inoltre, così operando, si consente alla curva delle pressioni di uscire dallo spessore dell'arco a  $88^\circ$ .

Può essere interessante osservare che secondo Persy, se l'arco avesse avuto imposte simmetricamente oblique corrispondenti ad  $\alpha = 88^\circ$ , per lo stesso valore di  $K$ , il meccanismo di collasso sarebbe stato con rotazione verso l'alto.

### **V.5.3. Il meccanismo reale di collasso di un arco con estradosso en chape ed imposta orizzontale**

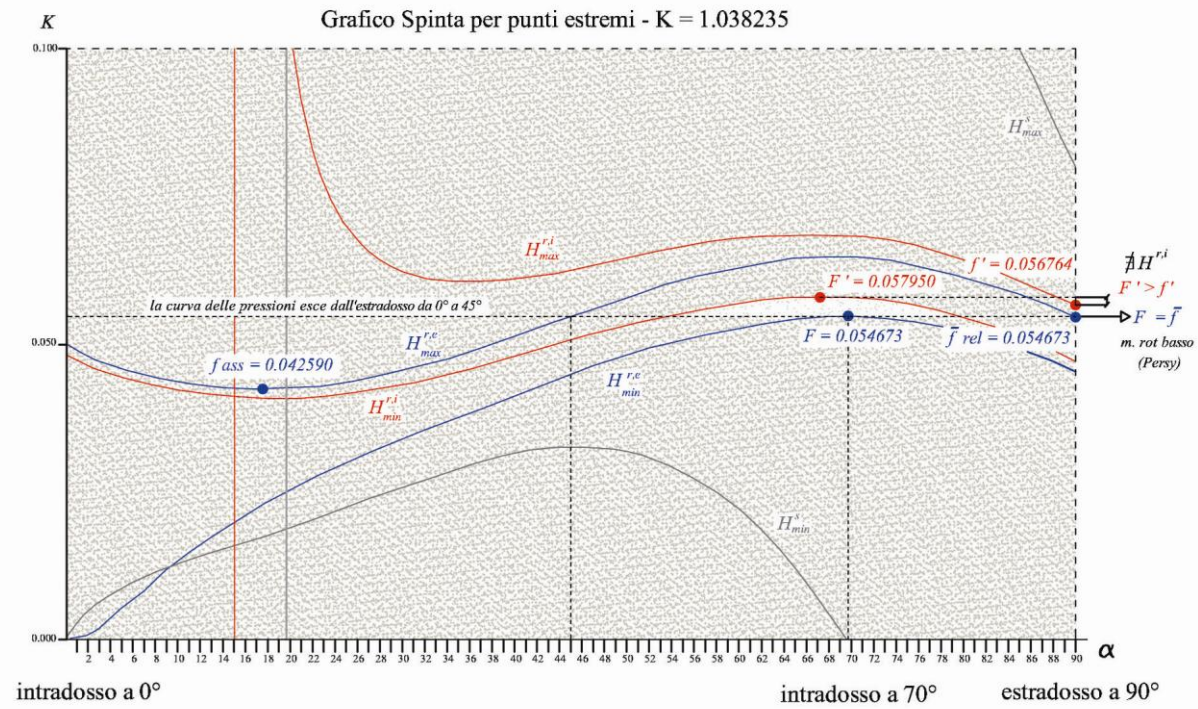
Seguendo la logica di Persy abbiamo trovato prima il meccanismo di collasso rotazionale verso il basso per  $K = 1.04403$  e poi il meccanismo rotazionale verso l'alto per  $K = 1.03775$ , ma corrispondenti entrambi a fuoriuscita della curva delle pressioni da una porzione dell'arco.

Ma vediamo cosa accade realmente per il domino delle rotazioni  $H^r$  nel momento in cui il range di  $H^{r,e}$  prima e  $H^{r,i}$  dopo si esauriscono. In entrambe le circostanze le curve delle pressioni estreme non danno origine a meccanismo; si rende, quindi, necessario entrare dall'estradosso prima e dall'intradosso dopo nello spessore del giunto in chiave e cercare un punto di applicazione interno ad un giunto ridotto della chiave che, esaurendosi, darà origine al meccanismo di collasso.

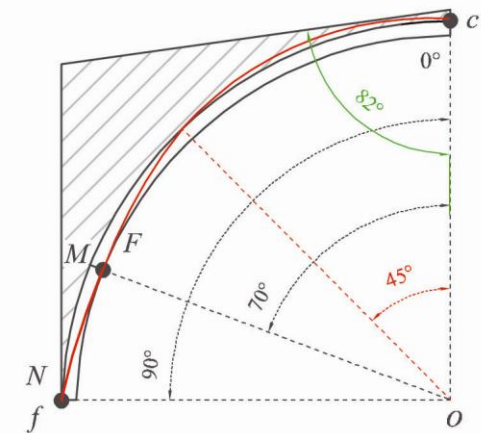
Nel grafico di Fig. 5.23a sono riportate le curve dei valori di  $H^{r,e,int}$  e di  $H^{r,i,int}$  corrispondenti al valore  $K = 1.0421491$  e ad un punto interno al giunto della chiave che dista in percento dello spessore dall'intradosso della quantità  $y_i = 0.50150$  e dall'estradosso  $y_e = 0.49850$ ; si vede chiaramente che il meccanismo si attiva in corrispondenza di:

$$\underline{f}^{r,int} = F^{r,int} = f^{r,int} = 0.058569 \quad (5.20)$$

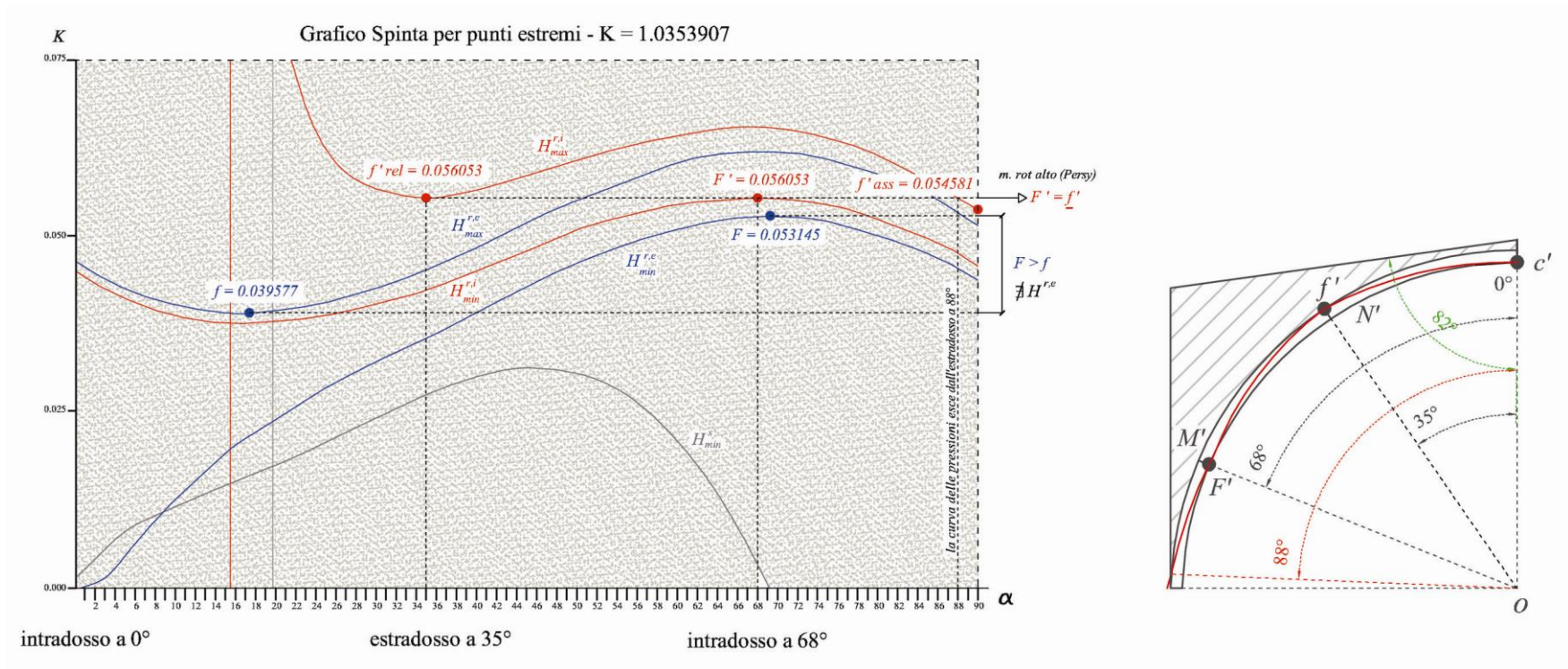
La disposizione delle cerniere - estradosso a  $31^\circ$ , intradosso a  $68^\circ$ , estradosso a  $90^\circ$  - corrisponde ad un meccanismo di rotazione verso il basso (Fig. 5.23b).



**Fig. 5.21a.** Arco con estradosso *en chape* -  $\beta = 82^\circ$  - ed imposta orizzontale.



**Fig. 5.21b.** arco con  $s = 0.038235r$ .



**Fig. 5.22a.** Arco con estradosso *en chape* -  $\beta = 82^\circ$  - ed imposta orizzontale.

**Fig. 5.22b.** Arco con  $s = 0.0353907r$  .



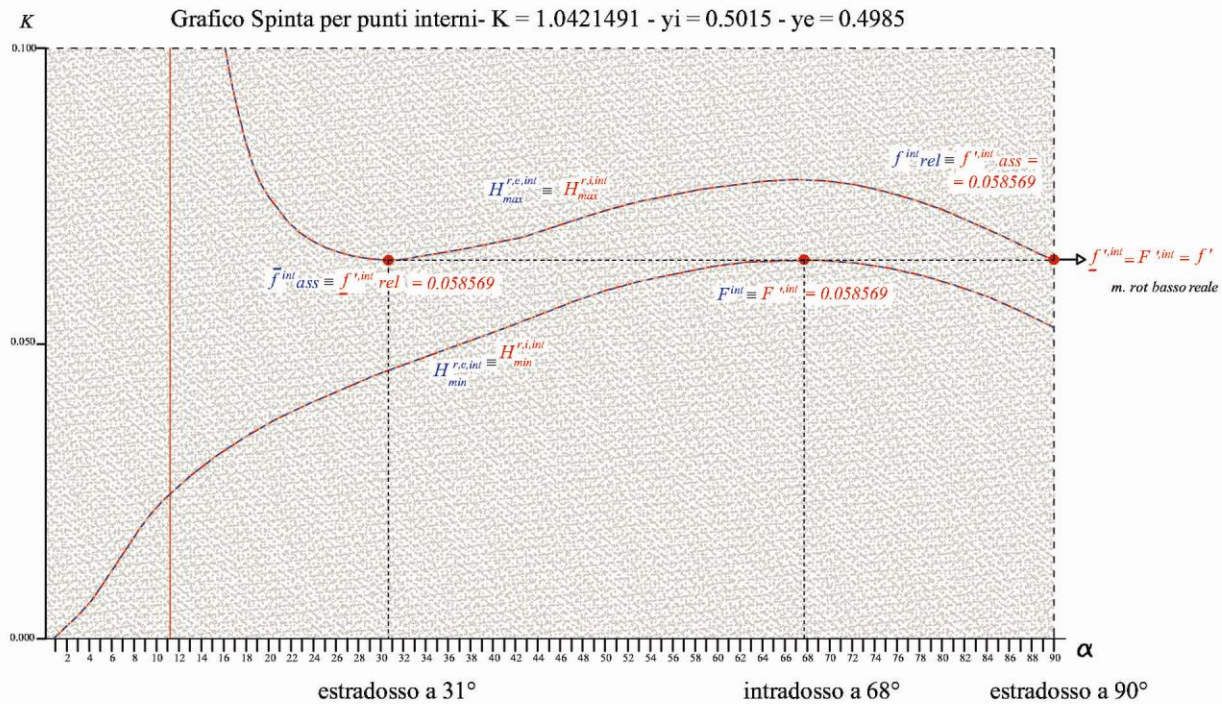


Fig. 5.23a. Arco con estradosso *en chape* -  $\beta = 82^\circ$  - ed imposta orizzontale.

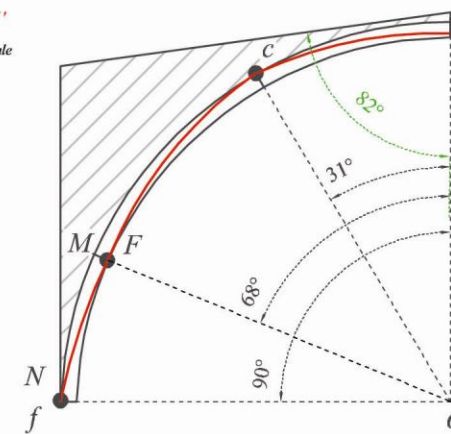


Fig. 5.23b. Arco con  $s = 0.0421491r$ .

Anche in questo caso Persy, mantenendosi sull'estradosso e sull'intradosso trova in successione per lo stesso arco due meccanismi di collasso rotazionale che corrispondono a valori di  $K$  inferiori a  $K=1.0421491$  corrispondente al meccanismo reale di collasso rotazionale verso il basso.

Continuando l'analisi degli archi con estradosso *en chape*, si è visto, che diminuendo il valore dell'angolo  $\beta$  di pendenza dell'estradosso rispetto alla verticale il dominio delle rotazioni  $H^r$  ha un diverso comportamento.

Per essi, come era prevedibile, è il range  $H^{r,i}$  ad esaurirsi prima del range  $H^{r,e}$  e, quando sarà quest'ultimo a ridursi ad un unico punto, esso darà origine ad un meccanismo di collasso di rotazione verso il basso.

Si consideri come esempio un arco con estradosso *en chape* con  $\beta = 70^\circ$  e soggetto ad attrito sufficiente  $\mu = 0,577$  (Fig. 5.24b); il grafico di Fig. 5.24a mostra l'esaurimento del range  $H^{r,i}$  per uno spessore critico  $K = 1.3237003$ :

$$F^i = f^i = 0.387113 \quad (5.21)$$

Per questo valore di  $K$  l'arco risulta stabile, perché  $H^{r,e}$  esiste ancora.

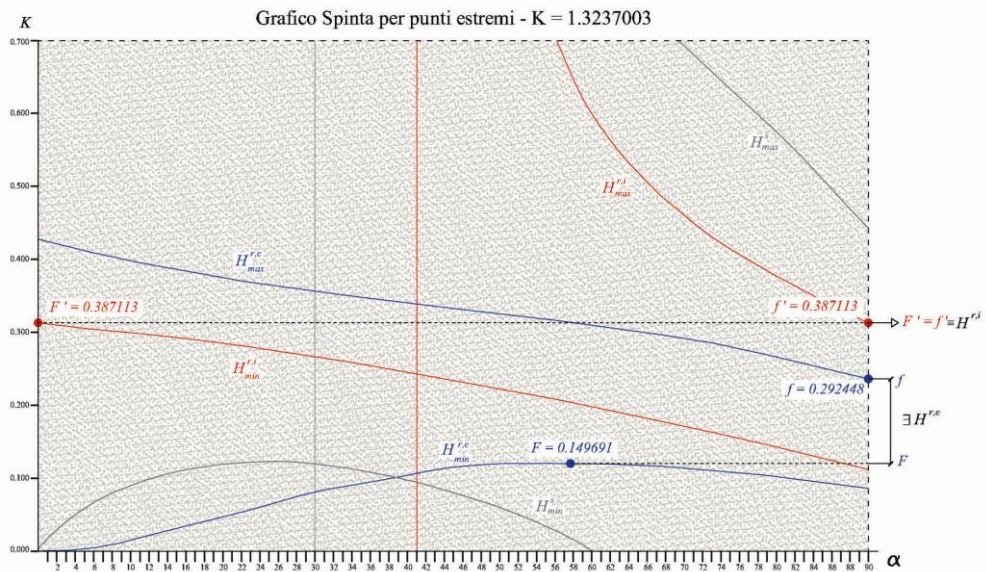


Fig. 5.24a. Arco con estradosso *en chape* -  $\beta = 70^\circ$  - ed imposta orizzontale.

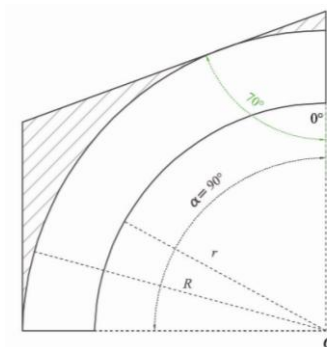
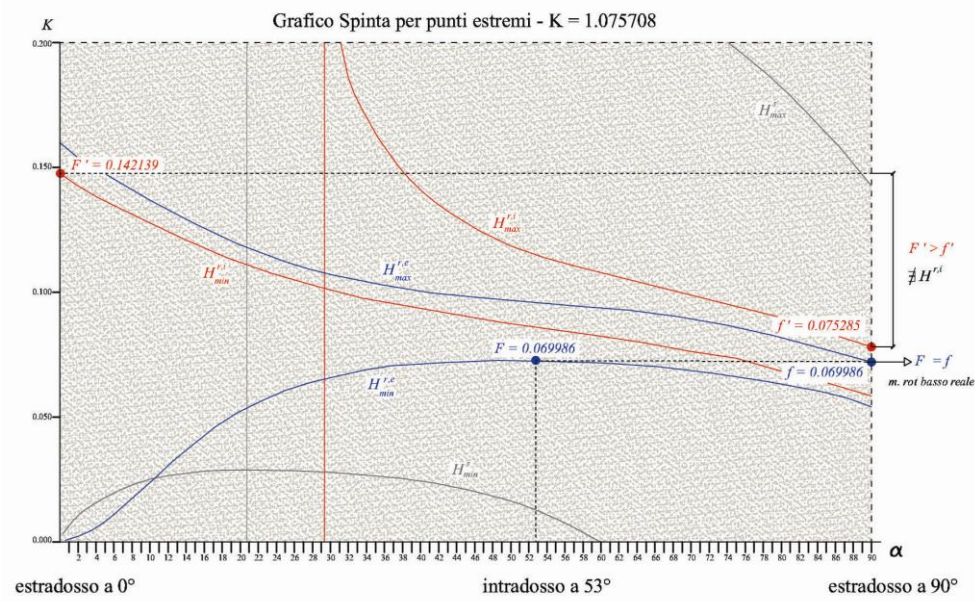


Fig. 5.24b. Arco con  $s = 0.3237003r$ .

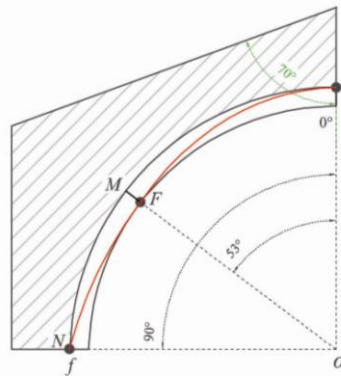
Diminuendo lo spessore dell'arco si trova che il range  $H^{r,e}$  si esaurisce per il valore  $K = 1.075708$ :

$$F = f = 0.065686 \quad (5.22)$$

La disposizione delle cerniere - estradosso a  $0^\circ$ , intradosso a  $53^\circ$ , estradosso a  $90^\circ$  - corrisponde ad un meccanismo di rotazione verso il basso (Fig. 5.25b), come mostrato nel grafico di Fig. 5.25a.



**Fig. 5.25a.** Arco con estradosso *en chape* -  $\beta = 70^\circ$  - ed imposta orizzontale.



**Fig. 5.25b.** Arco con  $s = 0.075708r$  .

Dal punto di vista cinematico, un meccanismo di collasso con cerniera all'estradosso in chiave implica la compenetrazione dei carichi portati, che non è accettabile.

A tal proposito occorre indagare sull'eventuale collaborazione fra carico portato e ghiera resistente dell'arco; il primo potrebbe, infatti, essere una parte solidale all'arco, formando un unico concio in chiave e definendo una nuova linea di estradosso dell'arco su cui considerare le cerniere.

L'indagine è stata fatta dal punto di vista teorico ammettendo che la struttura resistente sia soltanto l'arco e che il sovraccarico sia tale da consentire la formazione del meccanismo.

Dal punto di vista applicativo, invece, dovremmo accettare che l'estradosso *en chape* sia tipico dei ponti pedonali con una parte orizzontale in chiave ed una *en chape* corrispondente alla formazione di una linea di pendenza laterale.

Questo argomento esula, però, dalla trattazione della tesi.

Riepilogando, la situazione N/M prospettata da Persy (Fig. 5.12b.), per le tipologie di archi analizzati, non è stata mai trovata, mentre l'altra situazione M<sup>1</sup>/N<sup>1</sup> (Fig. 5.13b.) prospettata da Persy si verifica sempre per archi con estradosso orizzontale e per archi con estradosso *en chape* che abbiano un'inclinazione non troppo esasperata.

Quello che accade in questi casi è che i due range, H<sup>r,e</sup> prima e H<sup>r,i</sup> dopo, si esauriscono sempre senza dare origine ad un meccanismo di collasso. Ciò vuol dire, che il punto di applicazione in chiave, previsto da Persy all'intradosso o all'estradosso, a seconda che ci si trovi nel caso M<sup>1</sup>/N<sup>1</sup> o nel caso N/M, è un punto interno al giunto della chiave.

Saranno, quindi, i domini delle rotazioni del punto interno, H<sup>r,e,int</sup> e H<sup>r,i,int</sup>, a determinare il collasso della struttura che, come si è visto, avviene sempre per spessori molto piccoli e con meccanismo di rotazione verso il basso.

## V.6. I MECCANISMI DI COLLASSO CHE SI ATTIVANO QUANDO L'ATTRITO NON È PIÙ SUFFICIENTE AD IMPEDIRE LO SCORRIMENTO

Prendendo in considerazione lo scorrimento, si hanno tre nuovi modi di rottura:

17. Quando si terrà conto dello scorrimento dei conci gli uni sugli altri, si dovrà far partecipare le forze G e g relative a questa circostanza fisica, e confrontarle con le forze F, F<sup>1</sup> e f, f<sup>1</sup> rispettivamente. D'altronde, è chiaro che il considerare lo scorrimento comporta tre nuovi modi di rottura; 1° per scorrimento lungo il giunto n e contemporaneamente per rotazione intorno all'intradosso di M, ma non di M<sup>1</sup> perché il punto m si allontana per effetto di questo scorrimento; le due semivolte non possono inarcarsi che in c;<sup>255</sup>

---

<sup>255</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes, ibidem*, pag. 106 : *En ayant égard au glissement ; il y aurait lieu à trois nouveaux modes de rupture. 15. Lorsqu'on admettra le glissement des voussoirs les uns sur les autres, on devra faire entrer les forces G e g relatives à cette circonstance physique, en comparaison avec les forces F, F' et f, f' respectivement. D'ailleurs, il est clair que la considération du glissement introduit avec elle trois nouveaux modes de rupture ; 1° par glissement sur le joint n et simultanément par rotation autour de l'intrados de M, mais non de M' parce que le point m s'écartant par l'effet de ce glissement, les deux demi – voûtes ne peuvent s'arc-bouter qu'en c .*



Si tratta del meccanismo misto (Fig. 5.26a); esso si attiva quando, come vedremo nel paragrafo successivo, la frontiera del range degli scorrimenti  $H_{max}^s$  e la frontiera del range delle rotazioni  $H_{min}^{r,e}$  si intersecano.

2° per scorrimento simultaneo lungo i giunti m, n;<sup>256</sup>

Si tratta del meccanismo di puro scorrimento (Fig. 5.27.a); esso si attiva quando le due frontiere del range degli scorrimenti coincidono  $H_{max}^s \equiv H_{min}^s$  e intersecano la frontiera  $H_{min}^{r,e}$  del range delle rotazioni.

3° per scorrimento lungo il giunto m e contemporaneamente per rotazione intorno all'estradosso del giunto N o N' o di qualche giunto analogo, posizionato convenientemente.<sup>257</sup>

Si tratta del meccanismo misto previsto da Philippe De la Hire per il portale (Fig. 5.28a); esso si attiva quando le frontiere di  $H_{max}^s$  e di  $H^{r,s}$  (frontiera delle spinte H applicate in punti interni alla chiave) si riducono ad un unico punto.

Riguardo il secondo ed il terzo modo di rottura si legga la nota II dell'appendice del *Mémoire* di Persy:

Sul n° 17. È su questi due ultimi modi di rottura che De la Hire ha fondato la sua teoria sulle volte, ma prendendo arbitrariamente i giunti a cui ci si riferisce e considerando al posto della forza G le componenti che seguono la perpendicolare all'estremità interna del giunto m, tanto di questa forza che del peso del mezzo-angolo compreso fra il giunto m ed il giunto verticale cc'.<sup>258</sup>

I meccanismi di collasso delle Figg. 5.26a, 5.27a e 5.28a sono stati desunti dalle parole di Persy; egli, infatti, fornisce l'elenco dei modi di rottura dell'arco in presenza di attrito finito, ma non fornisce alcun disegno.

Per descrivere questi meccanismi abbiamo preso come riferimento lo stesso arco indagato e disegnato da Persy per lo studio dei meccanismi rotazionali; si tratta di un arco a tutto sesto, o come egli scrive: *le profil droit d'une voûte en berceau*. Di questi tre meccanismi, i primi due sono possibili, mentre il terzo è impossibile, a meno che Persy non abbia considerato come piedritti i due conci in prossimità delle imposte.

Nelle Figg. 5.26b, 5.27b e 5.28b sono descritte le diverse modalità di collasso che si verificano in corrispondenza di una diversa disposizione dei

---

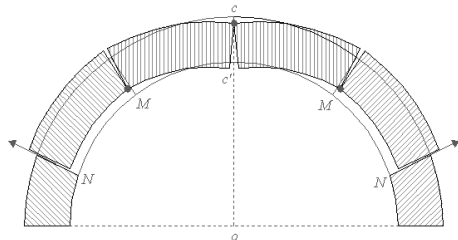
<sup>256</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes, ibidem*, pag. 106 : 2° par glissement simultané sur les joints m, n.

<sup>257</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes, ibidem*, pag. 106 : 3° par glissement sur le joint m et en même temps par rotation autour de l'extrados du joint N ou N' ou du moins de quelque joint analogue, placé convenablement.

<sup>258</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes, ibidem*, pag. 146-147: C'est sur ces deux derniers modes de rupture exclusivement que Lahire a fondé sa théorie des voûtes, mais en prenant arbitrairement les joints qui s'y rapportent et considérant au lieu de nla force G, les composants suivant la perpendiculaire à l'extrémité intérieure du joint m tant de cette force que du poids du demi-coin compris entre le joint m et le joint vertical cc'.

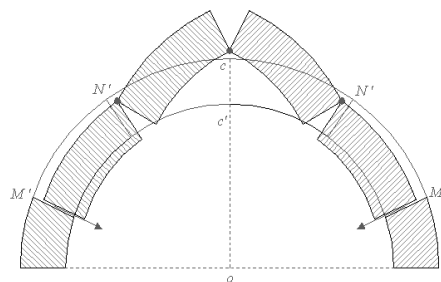


giunti,  $N^1/M^1$ , in analogia alla metodologia di Persy; si tratta di cinematismi che possono attivarsi solo in determinate circostanze come, ad esempio, in presenza di particolari riempimenti.



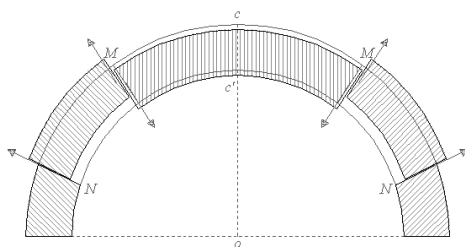
**Fig. 5.26a.**

Meccanismo misto  $M/N$ .



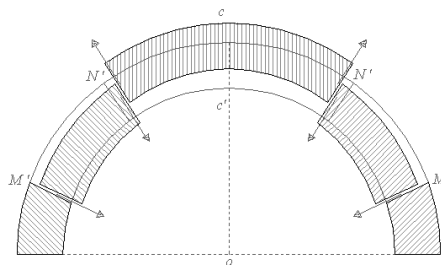
**Fig. 5.26b.**

Cinematismo possibile  $N^1/M^1$ .



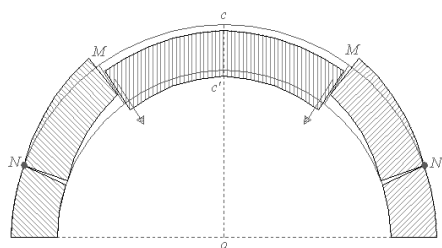
**Fig. 5.27a.**

Meccanismo puro scorrimento  $M/N$ .



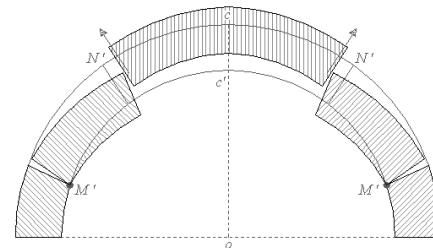
**Fig. 5.27b.**

Cinematismo possibile  $N^1/M^1$ .



**Fig. 5.28a.**

Meccanismo misto (La Hire)  $M/N$ .



**Fig. 5.28b.**

Cinematismo misto  $N^1/M^1$ .

## V.7. LE CONSEGUENZE DEL METODO DEI MASSIMI E MINIMI UTILIZZATO SIA PER L'EQUILIBRIO RISPETTO ALLE ROTAZIONI SIA PER L'EQUILIBRIO RISPETTO ALLO SCORRIMENTO

Abbiamo già considerato tutte le possibili situazioni che si possono verificare per un arco lapideo (par. V.2.1), tenendo presente che Persy considera solo la restrizione dei domini individuati dalla (5.5) e non guarda ciò che accade all'esterno di esso, e cioè nel dominio  $D$  complementare di  $H^s$  ad  $H^r$ . In questo paragrafo saranno analizzate le situazioni che si verificano per un arco lapideo circolare estradossato parallelamente di spessore costante soggetto al peso proprio ed in presenza di un valore

definito del coefficiente di attrito  $\mu$ , tenendo presente, che gli estremi  $F$ ,  $f$ ,  $F^r$  e  $f^r$  del dominio rotazionale e gli estremi  $G$  e  $g$  del dominio degli scorrimenti di Persy, corrispondono, rispettivamente ai nostri  $H_{min}^{r,e}$ ,  $H_{max}^{r,e}$ ,  $H_{min}^{r,i}$ ,  $H_{max}^{r,i}$ ,  $H_{min}^S$  e  $H_{max}^S$ .

Le situazioni analizzate da Coulomb, da Monasterio e da Persy sono state studiate con approccio contemporaneo per analizzare la validità delle loro teorie.<sup>259</sup>

Rispetto ad ogni possibilità di collasso, si analizzerà la stabilità del sistema, garantita dal range definito da Persy come:

$$L < 1 \quad (5.5)$$

ed il corrispondente meccanismo, quando tale range si riduce ad un unico punto:

$$L = 1 \quad (5.23)$$

Prima di iniziare l'analisi è bene precisare che l'estensione dei due range, degli scorrimenti  $H^S$  e delle rotazioni  $H^r$ , dipende da diversi fattori:

- la geometria dell'arco;
- lo spessore;
- i carichi addizionali;
- l'attrito.

#### ***V.7.1. Analisi delle diverse situazioni in cui si verifica il collasso per un arco circolare estradossato parallelamente***

##### **SITUAZIONE 1**

Si tratta del caso in cui il range degli scorrimenti  $H^S$  è esterno al range delle rotazioni  $H^r$ . In Fig. 5.29a è stata riportata la SITUAZIONE 1 (già analizzata per Coulomb nel paragrafo III.3.2. – Fig. 3.14).

Nel diagramma di Fig. 5.29a sono riportati i range delle spinte garanti dell'equilibrio rispetto alle rotazioni  $H^{r,e}$  e  $H^{r,i}$  ed agli scorrimenti  $H^S$ , per un arco circolare estradossato parallelamente in presenza di attrito sufficiente, il cui coefficiente è pari a  $\mu < 0.754$ ..

Secondo Persy, la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio dell'arco è l'esistenza di un range comune ad  $H^S$  e  $H^r$  (Fig. 5.5), quindi, secondo Persy, per  $K < 1.2732$  l'equilibrio è impossibile.

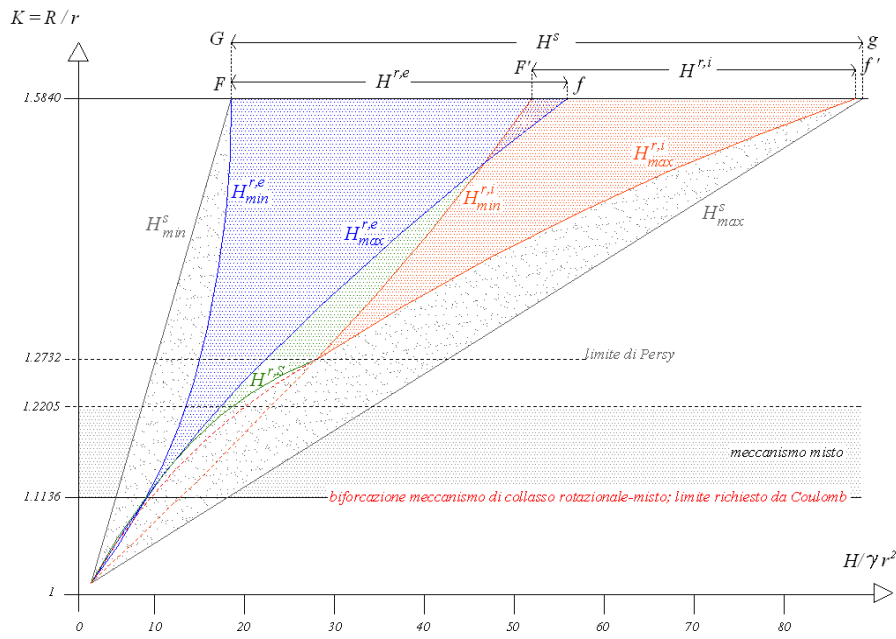
Questo non è vero. Infatti, come si può osservare, per  $K \geq 1.2732$  la spinta può essere applicata all'intradosso della chiave e l'esistenza del range  $H^{r,e}$  permette al suo punto di applicazione di muoversi dall'intradosso all'extradosso della chiave. Certamente per  $K < 1.2732$  non esistono valori ammissibili di  $H^{r,i}$  dal momento che i suoi valori massimi sono più piccoli dei suoi valori minimi; tuttavia, per valori di  $1.1136 < K < 1.2732$  esiste sia il range di  $H^{r,e}$  che fornisce infiniti valori ammissibili della spinta applicata

<sup>259</sup> Sinopoli A., Corradi M. e Foce F., 1997, *ibidem*.

all'estradosso della chiave, sia infiniti valori ammissibili della spinta applicata in un punto interno della chiave.

Per  $K_{crit} = 1.1136$  il range di  $H^{r,e}$  si è ridotto ad un unico punto che corrisponde ad un unico valore per la spinta applicata all'estradosso della chiave; l'equilibrio esiste ed è instabile. Il valore  $K_{crit} = 1.1136$  coincide con il limite formulato da Coulomb e definisce lo spessore critico dell'arco ( $s_{crit} = R_{crit} - r$ ) - pari a  $s_{crit} = 0.1136r$ .

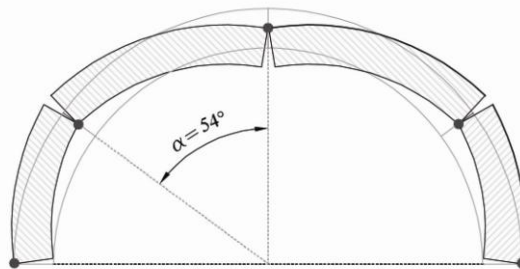
Per  $K_{crit} < 1.1136$  l'equilibrio è impossibile dal momento che non esiste alcun valore ammissibile sia di  $H^{r,i}$  sia di  $H^{r,e}$ .



**Fig. 5.29a.** SITUAZIONE 1: dominio  $H^s$  esterno ai domini  $H^{r,e}$  e  $H^{r,i}$ .

### MECCANISMO 1

In relazione alla SITUAZIONE 1, quando il dominio definito dalla (5.5) si esaurisce si verifica la (5.23); il range si riduce ad un unico punto ed il meccanismo di collasso corrispondente è di tipo rotazionale perché gli scorrimenti sono impossibili (Fig. 5.29b).



**Fig. 5.29b.** MECCANISMO 1: rotazionale.  
 $\mu = 0.754$ ,  $K_{crit} = 1.1136$ ,  $\alpha = 0^\circ, 54^\circ, 90^\circ$

Questo è l'unico caso considerato da Coulomb per il collasso degli archi. Il valore di  $K$  corrispondente è  $K_{crit}=1.1136$  ed il giunto di rottura ha un angolo di apertura alle reni pari a  $\alpha = 54^\circ$  dalla chiave.

È bene osservare che, a differenza di Coulomb, Persy sembra ritenere necessario il contemporaneo soddisfacimento dei due range rotazionali  $H^{r,i}$  e  $H^{r,e}$ . Il discorso da lui fatto sull'alternanza delle cerniere e la possibilità che l'arco collassi in corrispondenza di minimi relativi, piuttosto che assoluti, sembra giustificare il suo criterio di stabilità che eviterebbe la possibilità di attivazione di entrambi i meccanismi di collasso, come se l'arco in caso di comportamento standard non fosse caratterizzato da un unico meccanismo di collasso.

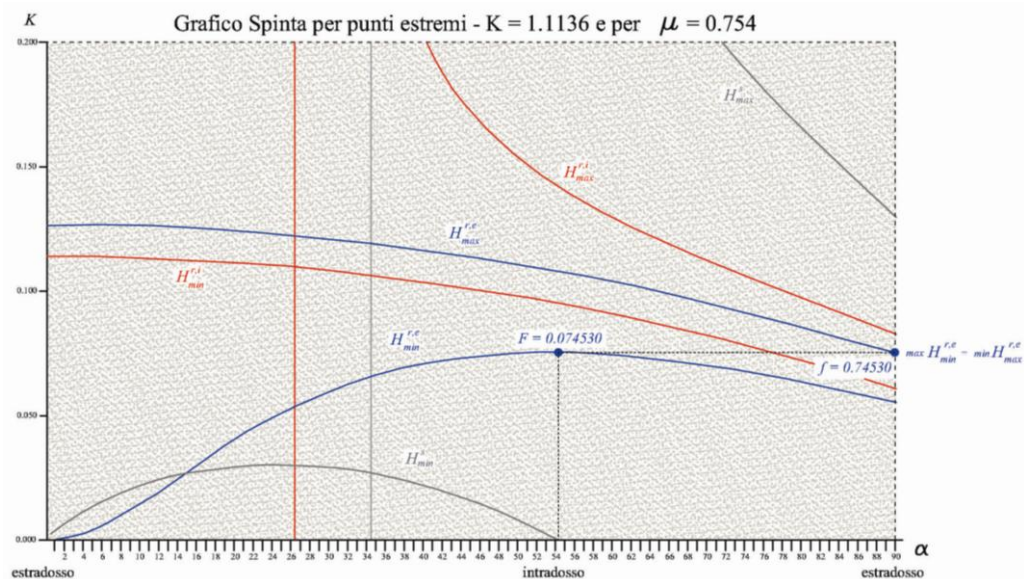


Fig. 5.29c. Individuazione dei giunti di apertura dell'arco.

## SITUAZIONE 2

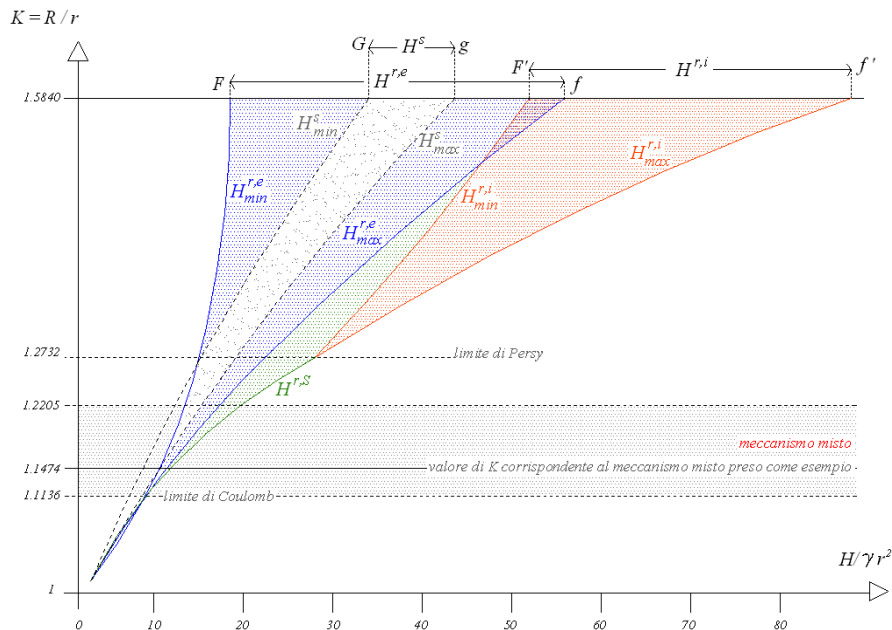
Quando l'attrito diminuisce e da sufficiente diventa finito, il range degli scorrimenti  $H^S$  invece che contenere - per  $K$  ragionevoli - il range delle rotazioni  $H^r$  - che rimane invariato al variare del coefficiente d'attrito - ammette con esso un'intersezione (Fig. 5.30a, vedi Fig. 5.7a).

Per Persy il dominio di sicuro equilibrio coincide con il range intersezione dei valori ammissibili di coincidente con  $H^S$ ; per valori esterni ad esso non esiste dominio ammissibile di  $H$ . Questo non è vero perché l'equilibrio deve essere indagato anche nel dominio  $D$  esterno del dominio  $H^S$ .

Si consideri il caso in cui un arco estradossato parallelamente abbia un coefficiente d'attrito pari a  $\mu=0.364$  ed un valore  $K=1.1474$  e si vada ad analizzarlo.

In questa situazione il tipo di collasso che si verifica è di tipo misto - scorrimento-rotazione - ed è identificato dall'intersezione delle due frontiere  $H_{min}^{r,e}$  e  $H_{max}^S$ ; per l'esempio qui analizzato, esso si verifica per un

valore di  $K_{crit} = 1.1474$  a cui corrispondente uno spessore critico dell'arco  $s_{crit} = 0.1474r$ .

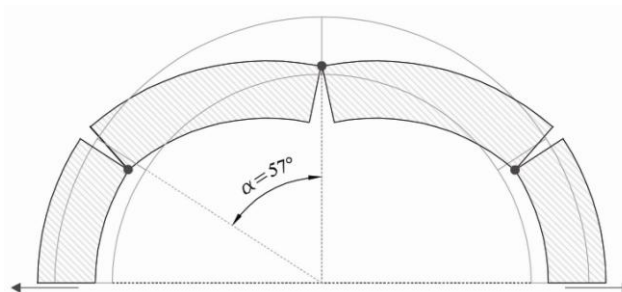


**Fig. 5.30a.** SITUAZIONE 2: dominio  $H^s$  interno ai domini  $H^{r,e}$  e  $H^{r,i}$ .

Come mostrato nel grafico di Fig. 5.30a il meccanismo misto si attiva per valori di  $1.1136 < K < 1.2205$  ed anche in questo caso, tali valori sono al sotto del limite considerato da Persy  $K = 1.2732$ .

#### MECCANISMO 2

Quando il dominio definito dalla (5.5) si esaurisce si verifica la (5.23), che in relazione alla SITUAZIONE 2 fornisce il meccanismo di collasso misto corrispondente: rotazione all'estradosso della chiave, rotazione all'intradosso delle reni e scorrimento alle imposte. Si tratta del meccanismo di collasso che si verifica, ad esempio, per un  $K_{crit} = 1.1474$  con giunto di rottura alle reni con un angolo di apertura dalla chiave pari a  $\alpha = 57^\circ$  (Fig. 5.30b).



**Fig. 5.30b.** MECCANISMO 2: misto.  
 $\mu = 0.364$ ,  $K_{crit} = 1.1474$ ,  $\alpha = 0^\circ, 57^\circ, 90^\circ$

Così per valori abbastanza piccoli del coefficiente di attrito - in questo caso  $\mu = 0.364$  - il collasso dell'arco può avvenire a causa dello scorrimento relativo di alcuni giunti di contatto.

Nella realtà, il meccanismo misto - scorrimento - rotazione - si verifica per valori del coefficiente di attrito pari a:

$$0.309 < \mu < 0.395 \quad (5.24)$$

corrispondenti ad angoli di attrito:

$$17^{\circ}2' < \varphi < 21^{\circ}56' \quad (5.25)$$

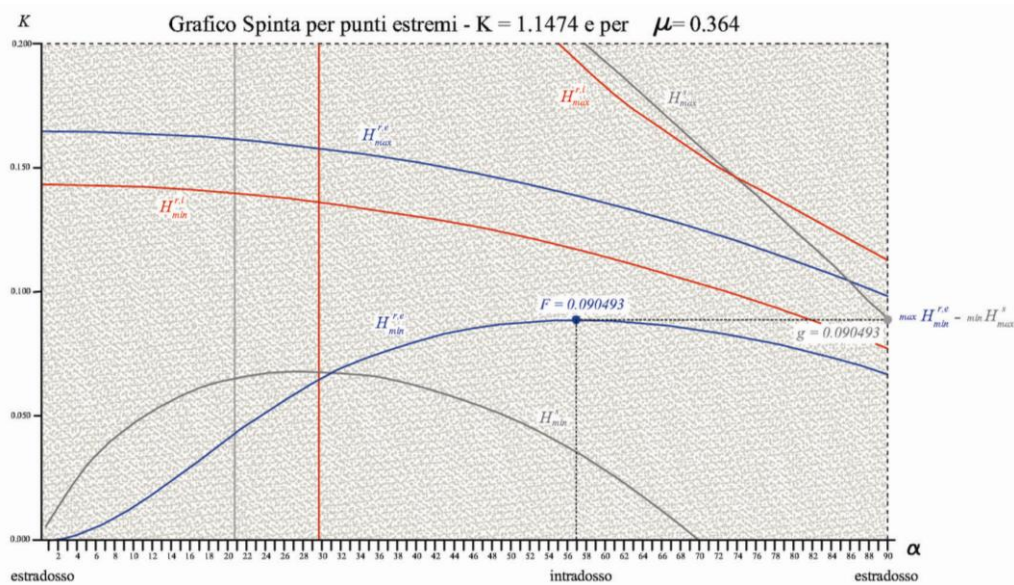


Fig. 5.30c. Individuazione dei giunti di rottura dell'arco.

I valori di  $\mu = 0.395$  e di  $K = 1.1136$  (Fig. 5.30a) corrispondono alla biforcazione tra il meccanismo puro rotazionale (Fig. 5.29b) ed il meccanismo di collasso misto - scorrimento - rotazione - (Fig. 5.30b), con giunti di scorrimento alle imposte e cerniere all'estradosso della chiave e all'intradosso delle reni, in giunti con angolo di apertura dalla chiave pari a  $\alpha = 54^{\circ}$ , mentre i valori di  $\mu = 0.309$  e di  $K = 1.2205$  corrispondono alla biforcazione tra il meccanismo misto ed il meccanismo di puro scorrimento (Fig. 5.31a). All'interno del range  $1.1136 < K < 1.2205$  i meccanismi di collasso sono solo di tipo misto.

### SITUAZIONE 3

Diminuendo il coefficiente di attrito da  $\mu = 0.395$  a  $\mu = 0.309$  il range di  $H^S$  si assottiglia sempre di più fino a che le sue frontiere coincidono  $H_{max}^S \equiv H_{min}^S$ , come mostrato in Fig. 5.31a (vedi anche Fig. 5.7b). Quando ciò accade il valore critico di  $K$  aumenta e tale valore corrisponde all'intersezione della frontiera del range delle rotazioni  $H_{min}^{r,e}$  con le frontiere sovrapposte del range degli scorrimenti  $H_{max}^S$  e  $H_{min}^S$  per  $K_{crit} = 1.2205$ .



Per Persy l'equilibrio è sicuro solo per i valori della spinta che si trovano sulle frontiere di  $H^S$  coincidenti.

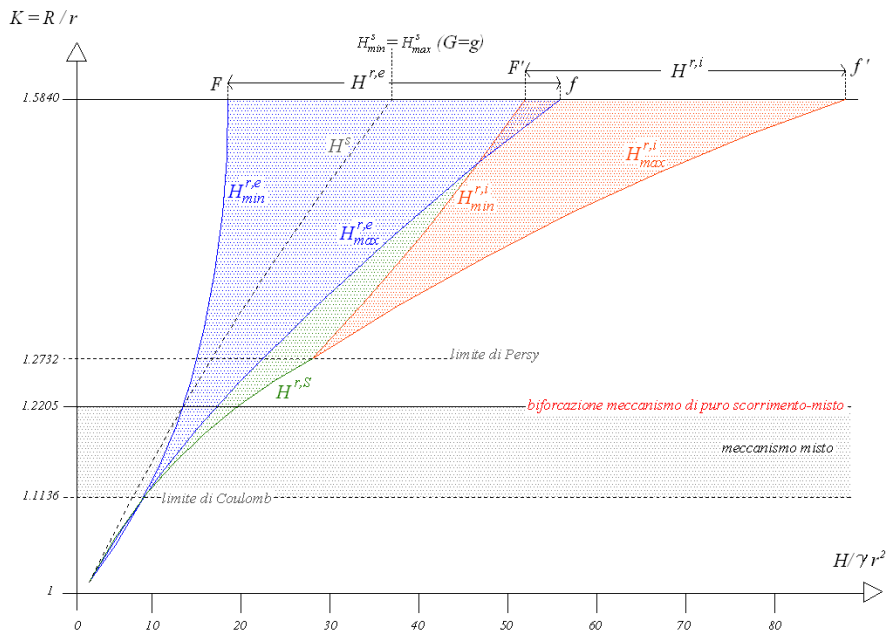
Si definisce come fattore geometrico di sicurezza per l'arco:

$$S = \frac{K}{K_{crit}} \quad (5.26)$$

Si noti che, in caso di attrito finito, la sicurezza dell'arco diminuisce con il diminuire del coefficiente di attrito quando i meccanismi di scorrimento sono possibili.

I valori  $\mu=0.309$  e per  $K_{crit}=1.2205$  corrispondono all'ultima configurazione di equilibrio possibile (Fig. 5.31b), per questi valori esiste un unico valore di  $H$  per l'equilibrio. Così, per valori di  $\mu=0.309$  e per valori di  $K < 1.2205$  l'equilibrio è impossibile dal momento che il range delle spinte  $H$  ammissibili è vuoto.

Il valore di  $K_{crit}=1.2205$  individua la biforcazione tra il meccanismo di puro scorrimento ed il meccanismo misto (Fig. 5.31a) e lo spessore critico dell'arco corrispondente è pari a  $s_{crit}=0.2205r$ .



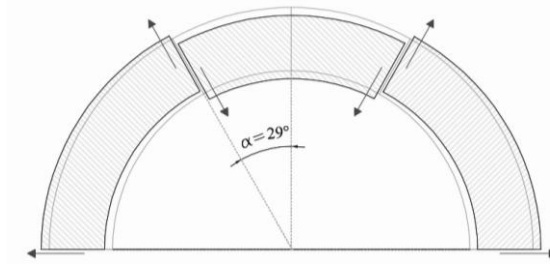
**Fig. 5.31a.** SITUAZIONE 3: le frontiere del dominio  $H^S$  sono sovrapposte.

### MECCANISMO 3

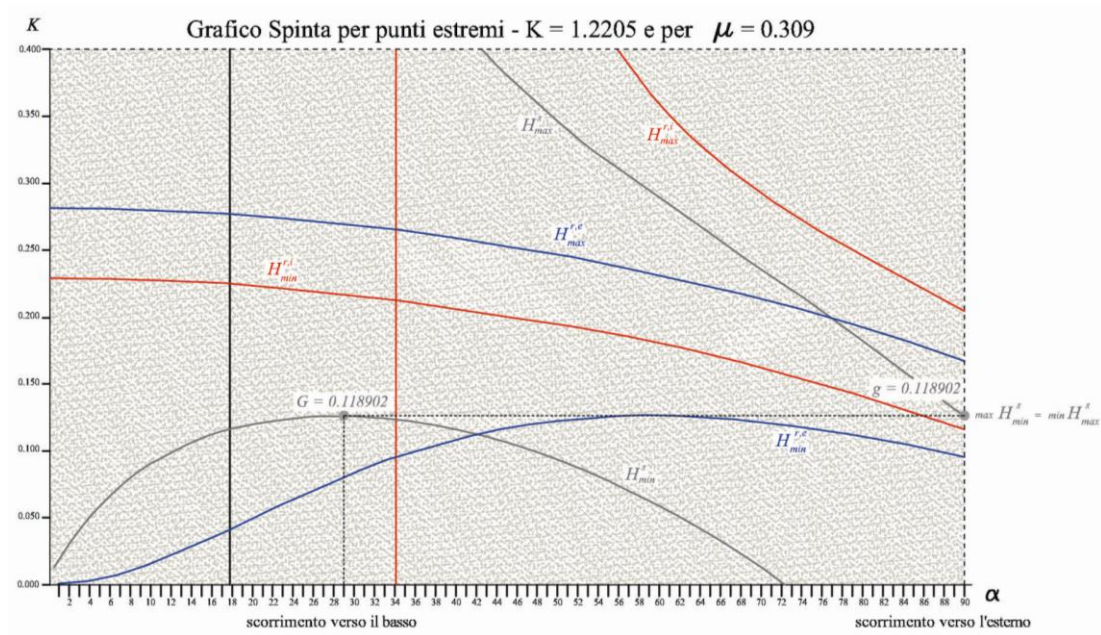
Quando il dominio definito dalla (5.5) si esaurisce si verifica la (5.23), in relazione al SITUAZIONE 3 il meccanismo di collasso corrispondente è di puro scorrimento (Fig. 5.31b).

Si tratta del meccanismo di collasso che si verifica per uno spessore critico pari a  $K_{crit}=1.2205$  con giunti di scorrimento alle imposte e alle reni con angolo di apertura dalla chiave pari a  $\alpha = 29^\circ$ .

Quindi, per  $\mu=0.309$  si attiva un nuovo tipo di collasso con 4 giunti di scorrimento.

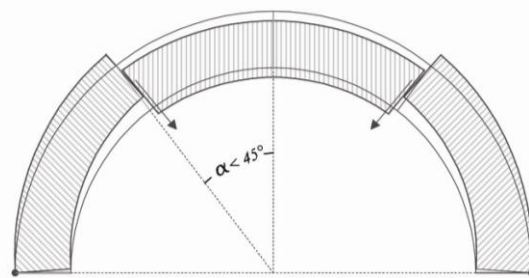


**Fig. 5.31b.** MECCANISMO 3: puro scorrimento.  
 $\mu < 0.309$  ,  $K_{crit} = 1.2205$  ,  $\alpha = 29^\circ, 90^\circ$



**Fig. 5.31c.** Individuazione dei giunti di rottura dell'arco.

Esiste un'altra situazione, corrispondente al meccanismo di collasso del portale di La Hire Fig. 5.32, che si verifica solo in determinate circostanze e soltanto per un sistema costituito da un arco con piedritti dove si suppone attrito infinito ai giunti di base del piedritto ed assenza di attrito ai giunti di rottura alle reni dell'arco.



**Fig. 5.32.** Meccanismo La Hire.



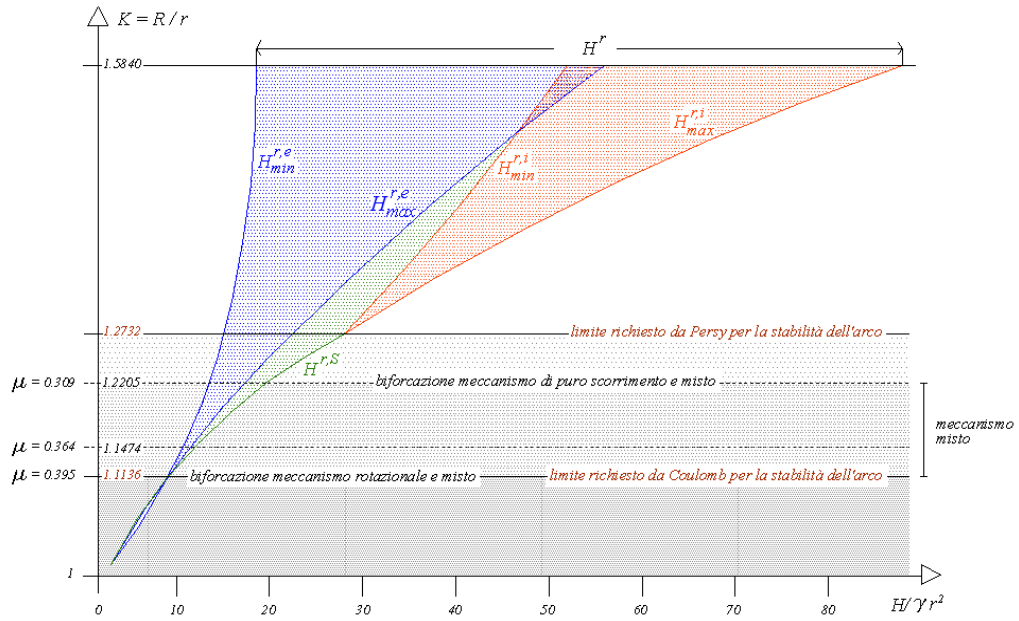
Accettando, per assurdo, che questa circostanza si verifichi anche per l'arco, in corrispondenza di un determinato valore del coefficiente di attrito  $\mu$  e di uno spessore critico  $K$ , il meccanismo di collasso che si attiverebbe è quello mostrato in Fig. 5.32, dove c'è formazione di cerniere all'estradosso delle imposte e di giunti di scorrimento alle reni, con angolo di apertura  $\alpha < 45^\circ$ .

Riepilogando, per le tre situazioni descritte - SITUAZIONE 1, SITUAZIONE 2, SITUAZIONE 3 - valgono la (5.4) e la (5.5) fissate da Persy; il risultato ottenuto è un range comune a  $H^s$  e  $H^r$  all'interno del quale l'equilibrio è garantito. Noi sappiamo, però, che per i materiali no-standard, come la pietra, in presenza di attrito finito, è il range rotazionale  $H^r$  "a dettar legge", quindi, se nel primo caso siamo nel giusto perché il range rotazionale è contenuto all'interno della falda del cono di Coulomb e l'equilibrio è garantito, nel secondo e nel terzo caso no, perché sia a destra sia a sinistra del loro range comune, l'equilibrio può esistere o non esistere.

Quindi, mentre Coulomb cerca i range di  $H^s$  e di  $H^r$  e si mette nelle condizioni per cui valgono i due teoremi della plasticità, ossia nell'unico caso in cui il range di  $H^s$  contiene quello di  $H^r$ , Persy, invece, per tutte le situazioni, si preoccupa di trovare un range intersezione all'interno del quale l'equilibrio sia garantito.

Nel grafico di Fig. 5.33 sono evidenziati il range delle rotazioni  $H^r$  ed i diversi meccanismi di collasso, che possono verificarsi in corrispondenza di un determinato valore del coefficiente di attrito  $\mu$  e di uno spessore critico  $K$ , per un arco circolare estradosato parallelamente; questo grafico riassuntivo oltre a mostrare i meccanismi di collasso per determinati valori del coefficiente di attrito, mostra le conseguenze dovute ai limiti forniti dai metodi di Coulomb e di Persy. Il limite inferiore, richiesto da Coulomb, corrisponde al valore  $K_{crit} = 1.1136$ , esso individua sia l'ultima configurazione equilibrata dell'arco sia la biforcazione fra il meccanismo di collasso rotazionale, unico meccanismo considerato da Coulomb, ed il meccanismo misto. Risulta evidente che per  $K_{crit} < 1.1136$  l'equilibrio della struttura è impossibile, mentre gli altri meccanismi di collasso, dipendenti da valori inferiori del coefficiente di attrito, corrispondono a valori di  $K_{crit} > 1.1136$ .

Il limite superiore, richiesto da Persy, invece, corrisponde al valore  $K_{crit} = 1.2732$ ; egli sostiene che al di sopra di questo limite l'equilibrio è garantito, mentre, al di sotto la struttura collassa. Per quanto visto fin qui, possiamo affermare con certezza, che al di sotto di  $K_{crit} = 1.2732$  c'è ancora equilibrio e, che tutti i meccanismi di collasso - puro scorrimento ( $K = 1.2205$ ), misto ( $1.1136 < K < 1.2205$ ) e rotazionale ( $K = 1.1136$ ) - iniziano ad attivarsi a partire dalla biforcazione - puro scorrimento-misto - in corrispondenza di un valore di  $K = 1.2205$  che dista dal limite di Persy  $K = 1.2732$  di 0.0527 valori di  $K$  in cui l'arco risulta stabile.



**Fig. 5.33.** Grafico riassuntivo delle condizioni in cui si verificano meccanismi di collasso per un arco estradossato parallelamente.

Collasso Rotazionale verso il basso	coeff. di attrito $\mu$	valori di $K$	condizioni di stabilità o di collasso
	$\mu > 0,395$ $\mu > 0,395$ $\mu = 0,395$	$K > 1,1136$ $K = 1,1136$ $K = 1,1136$	STABILITÀ COLLASSO ROTAZIONALE BIFORCAZIONE COLLASSO ROTAZIONALE-MISTO
Collasso Misto			
	$0,309 < \mu < 0,395$	$1,1136 < K < 1,2205$	COLLASSO MISTO
Collasso di Scorrimento puro			
	$\mu = 0,309$	$K = 1,2205$	BIFORCAZIONE COLLASSO MISTO-SCORRIMENTO PURO

**Fig. 5.34.** Tabella riassuntiva delle condizioni in cui si verificano meccanismi di collasso per un arco estradossato parallelamente.

A questo punto, c'è da chiedersi, come abbia fatto Persy ad individuare tutti i meccanismi di collasso, nonostante il limite da lui fornito corrisponda ad un valore K superiore ai diversi K di tutti i meccanismi. Probabilmente, nel porsi così in alto, egli intendeva mettere al sicuro l'arco da ogni possibilità di collasso.

### **V.7.2. Le ultime considerazioni di Persy sulla stabilità delle volte**

Circostanze che presentano la rottura delle volte e che l'esperienza ha fatto conoscere. 31. Dal 1773, sono state fatte molte osservazioni ed esperienze sulla rottura delle volte (Perronet, saggio sul centinamento e sul disarmo dei ponti; Gauthey, Trattato sulla costruzione dei ponti; Boistard, Saggi estratti dalla biblioteca dei Ponts et Chaussées; Rondelet, Arte del costruire); le esperienze del Signor Boistard, eseguite in grande, su delle volte a botte, delle principali forme usate nella pratica, ma sotto lo stesso spessore di 1/24 dell'apertura, sono, fra tutte, le più degne di nota; la rottura ci ha costantemente presentato le seguenti circostanze: la forza dell'attrito è tale che la volta si rompe per un movimento di rotazione intorno agli spigoli comuni alle parti che si separano e non per uno scorrimento sulle superfici di contatto di queste parti; quando la volta si trova in uno stato poco diverso da quello di equilibrio, essa si rompe in cinque punti e cioè: il giunto in chiave, due giunti posizionati da una parte e dall'altra della chiave, fra essa e le imposte, ed i giunti delle imposte, o delle basi dei piedritti, se questi esistono; infine, si osservi questa alternativa dove la parte superiore si abbassa e le parti inferiori si allontanano verso alto; allora il giunto in chiave e quelli alle imposte si aprono all'intradosso, mentre i giunti intermedi si aprono all'estradosso; dove la parte superiore si solleva e le parti inferiori si avvicinano; allora l'apertura dei giunti si attiva precisamente in senso inverso.<sup>260</sup>

---

<sup>260</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes, ibidem*, pagg. 111-112 : *Circonstances que présente la rupture des voûtes et que l'expérience a fait connaître. 31. Depuis 1773, il à été fait beaucoup d'observations et d'expériences sur la rupture des voûtes (Perronet, Mémoire sur le cintrement et le décintrement des ponts ; Gauthey, traité de la construction des ponts ; Boistard, Mémoire extraits de la bibliothèque des Ponts et Chaussées, Rondelet, Art de bâtir ) ; les expériences de M. Boistard, exécutées en grand, sur des voûtes en berceau, des principales formes usitées dans la pratique, mais sur la même épaisseur de 1/24 de l'ouverture sont les plus remarquable de toutes ; la rupture y a constamment présenté les circonstances suivantes : la force du frottement est telle que la voûte se rompt par un mouvement de rotation autour des arêtes communes aux parties qui se séparent et non par un glissement sur les surfaces par lesquelles ces parties se touchent ; lorsque la voûte se trouve dans un état très peu différent de celui d'équilibre, elle ne se brise généralement q'en cinq endroits, savoir : le joint de la clef, deux joints placés de part et d'autre de la clef, entre elle et le naissances, et les joints des naissances, ou des bases des pieds-droits, si ceux-ci existent ; enfin, on observe cette alternative, ou la partie supérieure s'abaisse et les parties inférieures s'écartent pour en haut ; alors le joint de la clef et ceux des naissances s'ouvrent à l'intrados, tandis que les joints intermédiaires s'ouvrent à l'extrados ; ou bien la partie supérieure se soulève et les parties inférieures se rapprochent ; pour lors l'ouverture des joints se fait précisément en sens inverse.*

32. Così i modi di rottura sono realmente quelli da noi stabiliti a priori, e nelle volte a botte della forma comunemente usata, l'attrito dei materiali con i quali esse sono state costruite, è effettivamente capace di opporsi allo scorrimento sui giunti. È vero che queste esperienze posizionano i giunti di rottura N o M<sup>1</sup> all'imposta, ma è opportuno osservare che esse considerano solo le volte il cui spessore è costante e uguale a 1/24 dell'apertura (K=1.0833).

33. I principi esposti precedentemente confermano la soluzione dei problemi relativi alla statica delle volte.<sup>261</sup>

Lo scopo fondamentale del lavoro di Persy è quello di individuare tutti i meccanismi di collasso dell'arco e di posizionare esattamente i giunti di rottura, cosa che secondo Persy è stata fatta in modo arbitrario dai "Geometri" che lo hanno preceduto. Il *Mémoire* di Coulomb diventa per Persy l'occasione per ampliare la teoria generale ivi proposta e per individuare tali modalità di collasso.

---

<sup>261</sup> Persy N., 1825, *Stabilité des voûtes, ibidem*,, pag. 112 : 32. *Ainsi les modes de rupture sont réellement tels que nous les avons établis à priori, et dans les voûtes en berceau des formes communément usitées, le frottement des matériaux dont elles sont construites, est effectivement capable de s'opposer au frottement des joints. C'est vrai que ces expériences placent le joint de rupture N ou M' à la naissance, mais il faut observer qu'elles ne concernaient que des voûtes dont l'épaisseur était constante et égale à 1/24 de l'ouverture. 33. Les principes exposés précédemment renferment la solution des questions relatives à la statique des voûtes.*

## CONCLUSIONI

I problemi della Meccanica sono stati per lungo tempo analizzati utilizzando riflessioni geometriche su problemi reali di natura sostanzialmente empirica.

Nelle regole costruttive del Rinascimento, infatti, la geometria assume un ruolo fondamentale nel dimensionamento strutturale dell'arco.

L'arco era di fatto pensato come un esempio di perfezione geometrica che includeva il suo stesso principio già perfetto.

Il giusto dimensionamento delle sue parti era quindi il risultato dell'esperienza acquisita dai costruttori e le relazioni che intercorrevano tra le parti spesso funzionavano tanto da fornire margini di stabilità (Alberti, Cinqüème, Gil de Hontañón, Derand).

Alcune di queste regole intendevano anche sintetizzare canoni di proporzionalità classiche e gotiche ed erano il risultato della lenta assimilazione di un nuovo modo di definire le norme estetiche (Gil de Hontañón, Palladio).

L'unico che si discostò dall'approccio puramente geometrico e che si interessò al comportamento statico degli archi fu Leonardo da Vinci.

Egli, partendo dalla definizione di arco di cui intuisce il paradosso delle due debolezze, che opportunamente disposte in modo da collaborare si trasformano in una resistenza, dà un'interpretazione in termini meccanici dei problemi di stabilità emergenti dalla pratica del costruire.

Dopo Leonardo si dovranno aspettare circa tre secoli, perché il tema degli archi possa essere affrontato con un approccio scientifico.

Il primo autore che ha tentato di dare spiegazioni meccaniche alle regole costruttive è stato Philippe de La Hire, il quale, nella sua memoria *Sur la construction des voûtes dans les édifices* del 1712, affronta il problema del dimensionamento dei piedritti di un arco adottando, seppur in modo incompleto, la prima analisi limite dell'arco in accordo ad un approccio upper bound.

Egli sostiene che tali problemi appartengono alla meccanica e che solo tramite essa è possibile risolverli (*Traité de Mécanique*, 1695), così, per dimensionare i piedritti ed analizzare la condizione limite dell'equilibrio del portale, egli fa riferimento ad un meccanismo che include due macchine semplici: il cuneo e la leva.

Questa analisi e la soluzione proposta sono un esempio del modo in cui, lungo il corso della storia, le questioni meccaniche si configurassero come la ricerca della particolare condizione di moto non attivato, che, in termini statici, separa l'equilibrio dal collasso.

La Hire, però, non tiene conto dell'attrito ai giunti delle reni dell'arco su cui scivola il cuneo e fornisce una proporzione corretta che egli però non giustifica, probabilmente perché la sua comprensione non è diretta.

Anche se il suo metodo forniva spessori dei piedritti tali da assicurare un eccesso di stabilità, esso servì comunque per la progettazione degli archi da ponte, che di conseguenza risultavano sovradimensionati.

È con La Hire, nel secolo dei lumi, che la geometria, diventa geometria degli spostamenti e nuova area di ricerca in meccanica, che condurrà ad assumere il T.L.V. come unico postulato fondamentale.

È in quest'ottica che Lorenzo Mascheroni analizza il collasso degli archi ed è solo leggendo le sue *Nuove Ricerche* che possono essere compresi e giustificati lo schema del portale ed il metodo per risolverlo di La Hire.

Colui che per primo indicò le reali condizioni dell'equilibrio e della stabilità degli archi simmetrici fu Charles Augustin Coulomb nella sua memoria *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture* del 1773.

Egli è apparso come colui che in poche pagine ha indicato il percorso per ottenere la soluzione del fondamentale problema dell'equilibrio degli archi segnando una svolta rispetto a tutti i precedenti tentativi; la sua memoria si pone in termini assai chiari e precisi ed è più comprensibile ora che allora, grazie al contributo di Heyman e agli sviluppi della teoria della plasticità: l'applicazione del calcolo dei massimi e dei minimi fornisce con pochi passaggi la soluzione di problemi sui quali si era polarizzata per più di un secolo l'attenzione degli studiosi.

Inoltre, e per la prima volta in modo inequivocabile, viene introdotto l'attrito come elemento determinante nell'equilibrio di archi e cupole.

Il capitolo 18 della memoria di Coulomb tratta, infatti, l'equilibrio delle volte rispetto all'attrito e alla coesione. Qui, non solo la risoluzione del problema ma, anche la sua formulazione sono una deviazione dal percorso di idee che, sino ad allora, aveva governato la scienza delle costruzioni in muratura.

C'è un radicale cambiamento nell'orientamento con un modello fisico più ricco e più realistico. Mentre gli autori precedenti avevano tentato di individuare la forma o le dimensioni ideali di una volta, di modo che le sollecitazioni fossero sostenibili per la struttura, Coulomb fa l'opposto: data una volta di forma e dimensioni definite, individua, se esistono, le condizioni per l'equilibrio.

Egli applica il calcolo non solo nel progetto ma anche nell'analisi.

Non tutte le sue idee sono completamente elaborate alcune ndubbiamente più di altre.

Il suo intento sembra quasi quello di dare ai suoi lettori un itinerario da seguire per ulteriori ricerche, piuttosto che quello di dare risultati immediati.

Il metodo di Coulomb anticipa di circa due secoli un criterio sostanzialmente statico, e cioè un approccio lower bound in accordo alla moderna terminologia della rigido-plasticità; il meccanismo di collasso

emerge automaticamente quando la condizione di collasso – unica per attrito sufficiente – viene raggiunta.

Nelle sue riflessioni finali, egli sottolinea che il collasso degli archi è generalmente di tipo rotazionale perché per tali strutture e per i materiali generalmente usati nella loro costruzione l'attrito è sufficiente ad impedire scorrimenti.

Coulomb fornisce un metodo scientificamente valido ma non fornisce esempi o applicazioni dei suoi principi a casi particolari; per questo motivo molti autori successivi hanno tentato di generalizzare il suo metodo.

Fra questi Monasterio e Persy.

Joaquin Monasterio, nel suo trattato inedito *Nueva Teorica sobre el empuje de las bóvedas* dei primi anni del XIX secolo, ha come obiettivo l'individuazione di tutti i possibili movimenti delle diverse parti dell'arco non simmetrico, così da poter trovare le condizioni di equilibrio corrispondenti e necessarie ad impedire il collasso.

Per farlo utilizza il metodo dei massimi e dei minimi di Coulomb.

La sua analisi però non è dettagliata e spesso si fa fatica a seguire la linea di pensiero e le considerazioni che determinano alcune scelte.

Il difetto principale della sua analisi consiste nella scelta di trattare il problema dell'individuazione dei meccanismi di collasso rispetto allo scorrimento come indipendente da quello dell'individuazione delle condizioni di equilibrio rispetto alla rotazione. I meccanismi sono proposti nella loro più vasta generalità, ma manca ogni considerazione di tipo cinematico per verificare la loro possibile compatibilità.

Un ulteriore difetto è l'implicita ipotesi che il meccanismo di collasso in presenza di scorrimento sia unico. Monasterio è, comunque, fra i seguaci di Coulomb, colui che ne ha compreso meglio il metodo ed ha cercato di generalizzarlo al caso più generale degli archi non-simmetrici.

Il suo metodo specializzato al caso degli archi simmetrici conduce peraltro agli stessi risultati ottenibili dalla teoria di Coulomb ed in particolare ottenuti dai seguaci di questa teoria, come Persy, Audoy e Petit.

Un altro seguace di Coulomb è Nicolas Persy che nel suo lavoro, *Cours sur la stabilité des constructions, à l'usage des élèves de l'école royale de l'Artillerie et du Génie, Stabilité des voûtes* del 1825, ha come obiettivo fondamentale l'individuazione dei meccanismi di collasso degli archi simmetrici, obiettivo perseguito mediante un assetto logico-dimostrativo basato sul metodo dei massimi e dei minimi.

Il criterio adottato è spurio nel senso che, prescelti i meccanismi, egli non ricerca la condizione di equilibrio instabile attraverso il T.L.V. ma utilizza il metodo di Coulomb forzandolo.

Per un arco prefissato, assunte le varie tipologie di meccanismo, mediante il metodo dei massimi ed i minimi, e con considerazioni non troppo chiare e farraginose, egli individua l'esatta posizione dei giunti di

rottura considerando tutti i meccanismi come possibili, anche quelli rotazionali, caso in cui il meccanismo di collasso è unico.

Non essendo interessato alle condizioni di equilibrio, ma piuttosto alla ricerca del collasso, nel caso del collasso rotazionale non consente al punto di applicazione della spinta  $H$  in chiave di variare la sua posizione tra l'estradosso e l'intradosso. In tal modo, il range di spinte ammissibili per l'equilibrio, il cui esaurimento individua in modo univoco il collasso, non è completamente individuato; come conseguenza, egli considera separatamente le condizioni che caratterizzano il collasso corrispondente a punti di applicazione all'estradosso o all'intradosso della chiave, e impone che il criterio di stabilità dell'arco riguardi le condizioni di entrambi i meccanismi.

Il lavoro di Persy è comunque uno dei pochi che, dopo Coulomb, affronta in modo sistematico il problema dell'analisi limite dell'arco simmetrico.

La lettura della sua opera non è sempre facile; il cosiddetto approccio spurio di cui si serve precede di molto la moderna visione chiarificatrice della teoria della plasticità.

Le sue dispense, riprodotte in quattro edizioni, conosciute all'epoca, non condussero mai ad una pubblicazione scientifica di collocazione più prestigiosa.

Sembra che il valore indotto dalle sue riflessioni fosse considerato all'epoca proprio per il tentativo di completezza metodologica in relazione alle problematiche poste dalle necessità costruttive.

Molti sono stati i seguaci della teoria di Coulomb anche se la sua Memoria segna la fine piuttosto che l'inizio di un nuovo indirizzo di ricerca nel campo delle murature.

Dopo Coulomb ci si avviava verso la definizione del tensore di stress della teoria dell'elasticità e verso le moderne trattazioni della resistenza dei materiali. Il nuovo modello sarà certamente più ricco, ma forse non il più adeguato per l'analisi delle strutture murarie.



## BIBLIOGRAFIA

A.A.V.V. 2001, *Costruzioni voltate in muratura*, a cura di Di Pasquale S., coordinatore scientifico del programma di ricerca Prin 1998-2000, MURST, Libreria Alfani, Firenze.

Alberti L. B., 1443-52, *De re aedificatoria* a cura di G. Orlandi, (1966), introduzione e note di Portoghesi P., Il Polifilo, Milano.

Albuerne A., Huerta S., 2010, *Coulomb's theory of arches in Spain ca. 1800: the manuscript of Joaquín Monasterio*; ARCH'10 – 6th International Conference on Arch Bridges, 11-13 Ottobre Fuzhou, China.

Audoy, 1820, *Mémoire sur la poussée des voûtes en berceau*, Mémorial de l'Officier du Génie, Paris, n. 4, p. 1-96.

Amontons G., 1699, *De la resistance causée dans les Machines, tant par les frottemens des parties qui les composent, que par la roideur des cordes qu'on y employe, et la maniere de calculer l'un et l'autre*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Troisième édition, Paris 1732, p. 206-222.

Baggio C., Trovalusci P., 1998, Limit analysis for no-tension and frictional three-dimensional discrete systems. *Mechanics of Structures and Machines*, 26, p. 287-304.

Baggio, C. and Trovalusci P., 2000, Collapse behaviour of three-dimensional brick-block systems using non-linear programming. *Structural Engineering and Mechanics*, 10(2), p. 181-195.

Becchi A., Foce F., 2002, *Degli archi e delle volte. Arte del costruire tra meccanica e stereotomia*, Marsilio, Venezia.

Belidor B. F. de, 1729, *La Science des Ingénieurs dans la conduite des travaux de Fortification et d'Architecture Civile*, Paris; trad. it. (1982), *La scienza degli ingegneri nella direzione delle opere di fortificazione e di architettura civile*, con note del Sig. Navier, a cura di Masieri, Mariani, Milano.

Benvenuto E., 1981, *La scienza delle costruzioni*, Sansoni, Firenze.

Benvenuto E., 1991, *An introduction to the History of Structural Mechanics Part II: Vaulted Structures and Elastic System*, Springer-Verlag, New York.

Blondel F., 1729 *Résolution de quatre principaux problèmes d'Architecture, Mémoire de l'Académie royale des Sciences. Depuis 1666 jusqu'à 1699*, V, Paris.

Boistard L. C., 1822, *Recueil d'expériences et d'observations faites sur différentes travaux, exécutés pour la construction du pont de Nemours, pour celle de l'arsenal et port militaire d'Anvers, et pour la reconstruction du port de Flessingue, dans lequel on a traité la théorie et l'équilibre des voûtes*, Merlin, Paris.

Borra G. B., 1748, *Trattato delle cognizioni delle resistenze*, Torino.

Bossut C., 1778, *Traité de Mécanique*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences année 1774, Paris.

Castellano A., 1988, *La costruzione moderna*, L'Arca, Milano.

Coulomb C. A., 1773, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, Mémoires de mathématiques des Sciences par divers savans, vol. 7, année 1773, p. 343-382, Paris, 1776.

Coulomb C.A., 1785, *Théories des Machines Simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*, Mémoire de Mathématique et de Physique de l'Académie Royale, X, Paris, vol. X, p. 161-342. Nuova edizione: Paris, Bachelier, 1821.

Couplet P., 1729, *De la poussée des voûtes*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Paris, 1731, p. 79-117.

Couplet P., 1730, *Seconde partie de l'examen de la poussée des voûtes*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris 1732, p. 117-141.

Delbecq J. M., 1982, Analyse de la stabilité des voûtes en maçonnerie par le calcul à la rupture, *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, 1(1), p. 91-121.

Derand F., 1743, *L'architecture des voûtes ou l'art des traits, et coupes des voûtes*, Paris.

Di Pasquale S., 1996, *L'arte del costruire, Tra conoscenza e scienza*, Marsilio, Venezia.

Drucker D. C., 1954, Coulomb friction, plasticity and limit loads, *Journal of Applied Mechanics*, 21(1), 71-74.

Foce F., Sinopoli A., 2001, Rilettura meccanica di regole costruttive per strutture ad arco fra il XVI e XVIII secolo, *AIMETA '01, XV Congresso Aimeta di Meccanica teorica e applicata*, 26-29 Settembre, Taormina.

Foce F., Sinopoli A., 2003, Sull'analisi limite dell'arco murario, errori e insegnamenti della storia della meccanica strutturale, *AIMETA '03, XVI Congresso Aimeta di Meccanica teorica e applicata*, 09-12 Settembre, Ferrara.

Frézier A. F., 1737-1739, *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois pour la construction des voûtes...ou Traité de stéréotomie*, Strasbourg-Paris. seguito da *Eléments de stéréotomie à l'usage de l'architecture pour la coupe des pierres*, Paris 1760.

Gauthey E. M., 1843, *Traité de la construction des ponts, public par M. Navier, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées (...)*, troisième édition, corrigée et augmentée, Leduc, Liegi.

Gautier H., 1765, *Traité des ponts, où il est parlé de ceux des romains, et de ceux des modernes (...), et une Dissertation sur les Culées, Piles, Voussoirs et Poussées des Ponts, et plusieurs Devis set Règlements faits à ce sujet*, quatrième édition, Duchesne libraire, Paris.

Gilbert M., Melbourne C., 1994, Rigid block analysis of masonry structures. *The Structural Engineer*, 72(21), p. 356-361.

Gilbert, M., Casapulla, C., Ahmed, H.M., 2006, Limit analysis of masonry block structures with non-associative frictional joints using linear programming. *Computer & Structures*, 84, p. 873-887.

Heyman J., 1966, The stone skeleton, *International Journal of Solids and Structures*, 2, 249-279.

Heyman J., 1969, The safety of masonry arches, *International Journal of Mechanical Sciences*, 11, 363-385.

Heyman J., 1972, *Coulomb's memoir on statics, an assai in the history of civil engineering*, Cambridge at the University press.

Huerta S., 2002, The medieval "scientia" of structures: The rules of Rodrigo Gil de Hontañón, *Atti del seminario internazionale. Omaggio a Edoardo Benvenuto*, Birkhäuser, Basilea.

Huerta S., Foce F., 2003, Vaults theory in Spain between XVIII and XIX century: Monasterio's unpublished manuscript, *Proceedings of the First International Congress on Construction History*, p. 1155-1166, 20-24 gennaio, Madrid.

Huerta S., 2005, The use of simple models in the teaching of the essentials of masonry arch behaviour, *Atti del seminario internazionale. Teoria e pratica del costruire: saperi, strumenti, modelli*, 27-29 ottobre, Ravenna.

Kooharian A., 1953, Limit Analysis of voussoir - segmental - and concrete arches, *Journal of the American Concrete Institute, ACI*, **89** (1), 317-328.

La Hire P. de, 1695, *Traité de Mécanique, où l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des Arts*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, vol. 9, Paris 1730, p. 1-333.

La Hire P. de, 1712, *Sur la construction des voûtes dans les édifices*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, p. 69-77, Paris.

La Hire P. de, 1730, *Recherche sur l'équilibre des voûtes*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences année 1695, Paris.

Lamé M.G., Clapeyron E., 1823, Mémoire sur la stabilité des voûtes. *Annales des Mines*. Vol. 8, p. 789-836.

Leonardo Da Vinci, 1491, *I codici di Madrid*, a cura di Reti L., Giunti Barbera, Firenze, 1974.

Leonardo Da Vinci, 1492 – 1516, *I Manoscritti di Francia*, Paris, Institut de France.

Leonardo da Vinci, 1493-1505, *Codice Forster II, Codici Forster*, London, Victoria and Albert Museum.

Livesley R. K., 1978, Limit analysis of structures formed from rigid blocks, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12, p. 1853-1871.

Marcolongo R., 1937, *Studi Vinciani*, **VII**, Napoli.

Mascheroni L., 1785, *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte*, Locatelli, Bergamo.

Milankovitch M. 1907, Theorie der Druckkurven. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 55: 1-27.

Milizia F., 1972, *Principi di Architettura civile*, rist. Mazzotta, Milano.

Monasterio J., 1805-1810, *Nueva Teórica sobre el empuje de las bóvedas*. Manoscritto non pubblicato, Biblioteca della Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos della Universidad Politécnica de Madrid. Ed. by S. Huerta and F. Foce. with english translation. Madrid, Instituto Juan de Herrera (in stampa).

Navier C., 1833, *Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'Application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des machines*. Première partie, contenant les leçons sur la résistance des matériaux, et sur l'établissement des constructions en terre, en maçonnerie et en charpente. Deuxième édition corrigée et augmentée. Chez Carilian-Goeury, Paris.

Palmer A. C., 1966, A limit theorem for materials with non-associated flow laws, *Journal de Mécanique*, 5(2), p. 217-222.

Persy N., 1825, *Cours sur la stabilité des constructions, à l'usage des élèves de l'École royale de l'Artillerie et du Génie*, Lithographie de l'École Royale de l'Artillerie et du Génie, Metz, 1827.

Petit, 1835, *Mémoire sur le calcul des voûtes circulaires*, Mémorial de l'Officier du Génie, Paris, n. 12, p. 73-150.

Poncelet, 1852, *Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voûtes*, Tome trente-cinquième, *Compte Rendu des Sciences de l'Académie des Sciences*, Paris.

Postir B., a.a., 1998-99, *La rilevanza della geometria nella definizione di regole e trattati per la stabilità di archi e volte: una rivisitazione in chiave cinematica da Leonardo a De La Hire*, Tesi di laurea, relatore A. Sinopoli, I.U.A.V., Venezia.

Radenkovic, D., 1968, Théorèmes limites pour un matériau de Coulomb à dilatation non standardisée, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, p. 4103-4104.

Rondelet J. B., 1802-17, *Traité théorique et pratique de l'art de bâtir*, Paris.

Sanabria S. L., 1982, The Mechanization of Design in the 16<sup>th</sup> Century. The structural Formulae of Rodrigo Gil de Hontañón, *Journal of the Society of Architectural Historians*, **XLI**.

Sinopoli A., Corradi M. e Foce F., 1997, A Modern formulation for pre-elastic theories on masonry arches, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, **123**(3), 204-213.

Sinopoli A., Corradi M. e Foce F., 1998, Lower and Upper Bound Theorems for Masonry Arches as Rigid Systems with Unilateral Constraints, *ARCHES BRIDGES: History, Analysis, Assessment, Maintenance and Repair*, A. Sinopoli (ed.), A.A. BALKEMA, Rotterdam, 99-108.

Sinopoli A., Foce F., 2001, Theoretical research on masonry and masonry arches in Italy, Modern formulation for pre-elastic theories on masonry arches, *ARCH '01, Troisième conférence internationale sur les ponts en arc*, 19-21 Settembre, Paris.

Sinopoli A., 2002, A Re-examination of some theories on vaulted structures: The role of geometry from Leonardo to de La Hire, *Towards a History of Construction*. Basel: Birkhäuser. 601-624.

Sinopoli A., 2003, The role of geometry in the theories on vaulted structures by Lorenzo Mascheroni, in S. Huerta (ed.), *Proceedings First International Congress on Construction History*, Instituto Juan de Herrera, 20-24 January, Madrid, **III**, 1865-1873.

Sinopoli A. et al., 2004, Theory and history of the thrust line for masonry arches, *a brief account ARCH '04, Arch Bridges IV, Advances in Assessment, Structural Design and Construction*. Roca P. and Molins C. CIMNE, Barcelona.

Sinopoli A., Aita D., Foce F., 2007, Further Remarks on the Collapse of Masonry Arches with Coulomb Friction, *ARCH '07 – 5th, International conference an Arch Bridges*, 12-14 September, Guimarães, Portugal.

Uccelli A., 1940, I libri di meccanica nella ricostruzione ordinata di Arturo Uccelli preceduti da un'introduzione critica e da un esame delle fonti, (Leonardo da Vinci), Hoepli, Milano.

Varignon P., 1687, *Nouvelle Mécanique ou statique* dont le projet fut donné en 1687, 2 tomes, opera postuma, Paris, 1725.

Viollet le Duc E., 1982, *Dictionnaire raisonné de l'Architecture française du XI au XVI siècle* ; trad. it. a cura di Crippa A. M., *L'Architettura ragionata*, Jaka Book, Milano.

Vittone B. A., 1760, *Istruzioni elementari per l'indirizzo dei giovani allo studio dell'Architettura*, Lugano.

