



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Dottorato di Ricerca in Statistica Metodologica
Tesi di Dottorato XXVI ciclo – anno 2014/2015
Dipartimento di Statistica

Polarizzazione e disuguaglianza.
Una proposta basata sugli indici
di Bonferroni e De Vergottini

Gaia Rocchetti

Sommario

Introduzione	4
Capitolo 1 – Le misure della polarizzazione : una rassegna.....	7
1.1 Gli indici di bipolarizzazione	9
1.2 Indici di polarizzazione nell’approccio “identificazione-alienazione”	15
Capitolo 2 – Indici di concentrazione come misure di disuguaglianza e <i>transfer sensitivity</i>	25
2.1 Curva di Lorenz, curva di Bonferroni e curva di De Vergottini	25
2.2 Gli indici nella formulazione continua.....	28
2.3 Gli indici nella formulazione discreta	31
2.4 Una formula generale per i tre indici e la <i>transfer sensitivity</i>	36
Capitolo 3 – La scomposizione degli indici di disuguaglianza per sottogruppi di popolazione.....	40
3.1 La scomposizione dell’indice di Gini secondo l’approccio grafico.....	41
3.2 La scomposizione dell’indice di Bonferroni	46
3.3 La scomposizione dell’indice di De Vergottini	53
3.4 Quadro di sintesi per la scomposizione degli indici.....	58
3.5 La scomposizione degli indici di Gini, Bonferroni e De Vergottini nei due sottogruppi non sovrappoventesi x^- e x^+	59
3.5.1 La scomposizione per l’indice di Gini.....	60
3.5.2 La scomposizione per l’indice di Bonferroni	62
3.5.3 La scomposizione per l’indice di De Vergottini.....	66
Capitolo 4 - Proposte per l’indice di polarizzazione.....	70
4.1 L’indice di bipolarizzazione di Wolfson.....	70
4.2 L’indice basato sull’indice di concentrazione di Bonferroni.....	74
4.3 L’indice basato sull’indice di concentrazione di De Vergottini.....	80
4.4 Quadro riassuntivo	88
Capitolo 5 – Simulazione.....	90
5.1 La distribuzione teorica e la simulazione dei trasferimenti	90
5.2 L’individuazione delle soglie s^* e k^*	93
5.3 Verifica della corretta determinazione delle soglie: il contenuto informativo degli indici P_B e P_V	98

5.4 Sensibilità dei trasferimenti degli indici di disuguaglianza e polarizzazione al variare dell'ammontare del reddito trasferito.....	100
5.5 Sensibilità ai trasferimenti degli indici e delle loro componenti.....	104
5.5.1 Lo scenario benchmark.....	107
5.5.2 Confronto tra diversi scenari	109
Capitolo 6 – L'applicazione ai dati EU-SILC	114
6.1 L'indagine EU-SILC	114
6.2 Gli stimatori	116
6.3 Risultati	119
Conclusioni	122
Bibliografia	126

Introduzione

Negli ultimi anni il concetto di polarizzazione dei redditi ha ricevuto una crescente attenzione da parte degli economisti che studiano la disuguaglianza.

Una definizione generale di polarizzazione è quella fornita da Chakravarty (2009) quale “appearance (or disappearance) of groups in a distribution”. Più in dettaglio, le definizioni date autonomamente da Wolfson (1994), da un lato, e da Esteban e Ray (1999) dall’altro, consentono di distinguere tra il concetto di polarizzazione tradizionalmente associato alla scomparsa della classe media (*disappearing middle class*, Blackburn e Bloom, 1985; Levy, 1987) - o *bipolarity* - e il più recente concetto di polarizzazione che considera la presenza di più poli nella distribuzione del reddito (Esteban e Ray, 1994; Duclos et al., 2004).

Tra le principali ragioni dell’interesse per la polarizzazione, in particolare per la polarizzazione della distribuzione dei redditi, vi è il legame tra la presenza di gruppi omogenei al loro interno, ad esempio rispetto al reddito medio, ma distanti tra loro, e tensioni sociali (Esteban e Ray, 1994). Un filone di ricerca, esplorato soprattutto a partire dagli anni ’90, spiega alcuni fenomeni macroeconomici alla luce della presenza di conflitti nella società attribuendo, ad esempio, alla presenza di conflitti il rallentamento della crescita economica (Alesina et al. , 1996; Alesina e Rodrick, 1994; Persson e Tabellini, 1994).

Numerose sono le questioni aperte in letteratura. Tra gli argomenti più dibattuti vi è il fatto che disuguaglianza e polarizzazione sono concetti diversi e, pertanto, si basano su assiomi diversi. In particolare, l’assioma su cui si basa la costruzione delle più importanti misure di disuguaglianza – l’assioma di Pigou-Dalton – è in contrasto con il concetto stesso di polarizzazione. Se a seguito di un trasferimento progressivo di reddito (da un individuo più “ricco” ad uno più “povero”) la disuguaglianza diminuisce, la polarizzazione aumenta.

Gli studiosi si chiedono, inoltre, se le misure di polarizzazione forniscano informazioni aggiuntive sulla distribuzione del reddito rispetto alle tradizionali misure di disuguaglianza. Questo tema è stato affrontato sin dai primi studi sulla

polarizzazione (Wolfson, 1994; Zhang e Kanbur, 2001; Duclos et al., 2004) con risultati spesso contrastanti. Wolfson (1994) applicando il suo indice su dati canadesi e Duclos et al. (2004) lavorando sui dati relativi a 21 paesi (dati LIS – *Lussemburgo Income Study*), verificano che i nuovi indici forniscono informazioni complementari ai tradizionali indici di disuguaglianza. Il lavoro di Zhang e Kanbur (2001) su dati cinesi, tuttavia, mostra che i principali indici di polarizzazione presenti in letteratura non forniscono informazioni sostanzialmente diverse da quelle fornite dall'indice di Gini e, pertanto, propongono un nuovo indice con un diverso contenuto informativo.

Il presente lavoro ha l'obiettivo di fornire un contributo in questa direzione, seguendo l'approccio delineato da Wolfson (1994) e da Foster e Wolfson (2010), basato su indici di bipolarizzazione costruiti a partire dall'indice di disuguaglianza di Gini. A partire dalla generalizzazione dell'indice di Wolfson proposta da Rodriguez e Salas (2003) si introdurranno due nuovi indici di polarizzazione, uno costruito a partire dall'indice di concentrazione di Bonferroni (1930) e l'altro dall'indice di De Vergottini (1950), verificandone le loro proprietà assiomatiche ed empiriche.

L'obiettivo è verificare se tali indici, basati su misure di disuguaglianza con diverse caratteristiche di *transfer sensitivity*, forniscono informazioni aggiuntive, o maggiormente dettagliate, rispetto alle tradizionali misure di disuguaglianza e polarizzazione.

Il lavoro è organizzato come segue. Nel Capitolo 1 si presenta una rassegna della letteratura teorica ed empirica sugli indici di polarizzazione con sintesi dei principali risultati pubblicati finora. Il Capitolo 2 fornisce una rassegna delle caratteristiche teoriche degli indici di disuguaglianza di Gini, Bonferroni e De Vergottini sulla base dei quali costruire gli indici di polarizzazione, soffermandosi sul diverso sistema di ponderazione dei redditi individuali, ovvero della curva di Lorenz (1905), che caratterizza gli indici di concentrazione presentati e che ne stabilisce diversi gradi di sensibilità rispetto a trasferimenti di reddito che avvengano sulle code della distribuzione, piuttosto che nella sua parte centrale (*transfer sensitivity*). La scomposizione degli indici di Gini, Bonferroni e De Vergottini nelle componenti della disuguaglianza *between groups* e *within groups* nel caso di due gruppi della popolazione di individui con reddito inferiore e superiore alla mediana è presentata

nel Capitolo 3. Nel Capitolo 4 si propongono i due nuovi indici e se ne analizzano le proprietà, con particolare enfasi sulle condizioni per le quali questi rispettano gli assiomi che caratterizzano l'indice di bipolarizzazione di Wolfson. Il Capitolo 5 studia, tramite l'ausilio di un insieme di simulazioni, l'effetto dei trasferimenti che determinano l'aumento di bipolarizzazione nella distribuzione dei redditi sugli indici proposti, comparativamente a quelli registrati sull'indice di Wolfson. Diversi trasferimenti di reddito, regressivi e progressivi, vengono introdotti in una distribuzione del reddito "fittizia" generata come mistura di due distribuzioni normali. Nel Capitolo 6, infine, si applicano gli indici proposti ai risultati dell'indagine Istat EU-SILC. Si stimano gli indici di Wolfson, e dei due indici proposti per gli anni dal 2007 (EU-SILC 2008) al 2011 (EU-SILC 2012) sui redditi familiari, applicando le formulazioni analitiche degli indici presentate nel Capitolo 4.

Capitolo 1 – Le misure della polarizzazione: una rassegna

Presenteremo di seguito una rassegna dei principali contributi sulla polarizzazione, distinguendo – come già nella rassegna piuttosto esaustiva fornita in Chakravarty (2009) e Esteban e Ray (2012) – tra approccio basato sulla presenza nella distribuzione del reddito di due poli (bipolarizzazione) e un approccio in cui si consideri la presenza di più poli nella distribuzione (approccio “identificazione-alienazione”).

Nell’analisi della distribuzione del reddito con il termine polarizzazione ci si riferisce, in termini generali, alla presenza di gruppi, o poli, all’interno della distribuzione. Tradizionalmente il concetto di polarizzazione è stato associato alla scomparsa della classe media o bipolarizzazione (Blackburn e Bloom, 1985; Levy, 1987), con riferimento ad una distribuzione del reddito nella quale le frequenze relative delle unità con livelli centrali di reddito sono più basse di quelle riferite ai valori estremi. In questo caso la polarizzazione viene misurata dalla dispersione della distribuzione da un valore centrale (media o mediana) verso gli estremi (Chakravarty, 2009).

I contributi più noti sugli indici di bipolarizzazione si originano da Foster e Wolfson (1992, 2010) e Wolfson (1994, 1997) e vengono successivamente estesi in Chakravarty e Majumder (2001), Rodriguez e Salas (2003), Rodriguez (2004), Wang e Tsui (2000).

Più recentemente il concetto di polarizzazione è stato esteso fino a considerare la presenza di più poli nella distribuzione del reddito. Nella definizione di Esteban e Ray (1994) e Duclos, Esteban e Ray (2004), la società è divisa in gruppi, definiti in base al reddito, all’interno dei quali ogni individuo prova un sentimento di identificazione con i membri del proprio gruppo e un sentimento di alienazione rispetto ai membri degli altri gruppi.

Le principali misure presenti in letteratura possono essere caratterizzate sulla base di “proprietà desiderabili”, ovvero da un insieme di assiomi, che ne descrivono il comportamento rispetto ai trasferimenti di reddito tra individui.

Prima di procedere nell'esposizione degli assiomi introduciamo alcune definizioni.

Sia data una distribuzione del reddito $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, dove $x_i > 0$ è il reddito dell' i -esimo individuo. I redditi sono ordinati in senso non decrescente: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Indichiamo con \mathbf{X}_n l'insieme di tutte le possibili distribuzioni del reddito per una popolazione di n individui. Sia $\mu(\mathbf{x})$ la media della distribuzione e $m(\mathbf{x})$ la sua mediana. Posto $\bar{n} = (n+1)/2$, si definiscono il vettore \mathbf{x}_- che include i redditi x_i tali che $i < \bar{n}$ e \mathbf{x}_+ il vettore che include i redditi x_i tali che $i > \bar{n}$. Si ha che in caso di n pari $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_-, \mathbf{x}_+)$, mentre per n dispari $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_-, m(\mathbf{x}), \mathbf{x}_+)$.

Def: Si definisce trasferimento di Pigou-Dalton (PD) un trasferimento progressivo tra un individuo con reddito superiore al reddito mediano $m(\mathbf{x})$, con reddito in \mathbf{x}_+ , in favore di un individuo con reddito in \mathbf{x}_- , ovvero reddito inferiore a $m(\mathbf{x})$. Il trasferimento è tale che non cambia il rango relativo dei due individui nella distribuzione (ordinata) del reddito. Un trasferimento PD implica una diminuzione della disuguaglianza.

Def: Si definisce trasferimento regressivo (TR) un trasferimento, che preservi il rango tra individui, da un individuo con reddito inferiore a $m(\mathbf{x})$, ovvero da \mathbf{x}_- , in favore di un individuo il cui reddito sia in \mathbf{x}_+ . Tale trasferimento ha come effetto un aumento della disuguaglianza.

Def: Un indice di polarizzazione $P^n(\mathbf{x})$ è una funzione continua $P^n: \mathbf{X}_n \rightarrow R_+$, essendo R_+ l'insieme dei numeri reali positivi.

Nella caratterizzazione assiomatica degli indici di polarizzazione, in linea con quanto presente in letteratura per gli indici di disuguaglianza, si ritiene desiderabile che la funzione P^n rispetti un determinato insieme di assiomi. Una rassegna esaustiva degli assiomi che caratterizzano gli indici di polarizzazione è presentata in Esteban e Ray (2012). Gli autori delineano i tratti comuni nella formulazione degli assiomi e ne tracciano le più importanti differenze. A partire dalla classificazione degli assiomi proposta dagli autori, distingueremo tra principi generali comuni a tutti gli indici,

assiomi che si applicano specificamente alle misure di bipolarizzazione (Wolfson, 1994; Foster e Wolfson, 2010; Wang e Tsui, 2000) e assiomi specifici dell'approccio basato su un numero arbitrario di gruppi (Esteban e Ray, 1994; Duclos, Esteban e Ray, 2004).

I seguenti principi generali sono rispettati da tutti gli indici, sebbene esposti con diverse formulazioni:

- 1) A differenza della disuguaglianza, la polarizzazione è un concetto riguardante i gruppi di percettori di reddito e non i singoli individui;
- 2) Data la presenza di gruppi nella distribuzione del reddito, la polarizzazione aumenta se si riduce la dispersione all'interno di uno o più gruppi (*within-group dispersion*);
- 3) La polarizzazione aumenta se cresce la distanza tra i gruppi (*between-group dispersion*).

Nei prossimi paragrafi esporremo gli assiomi che caratterizzano gli indici presentati.

1.1 Gli indici di bipolarizzazione

A partire dai primi anni '80, vi sono stati numerosi tentativi di misurare la bipolarizzazione dei redditi definendo un intervallo arbitrario attorno alla mediana, o alla media, della distribuzione del reddito e studiando la variazione delle quote di popolazione (Thurow, 1984; Blackburn e Bloom, 1985) o reddito (Levy, 1987; Beach, 1988) in questo intervallo. Foster e Wolfson (1992, 2010) e Wolfson (1994, 1997), nel criticare la capacità di tali metodi di misurare effettivamente lo svuotamento della classe media, propongono un nuovo indice, costruito formalizzando i cambiamenti della distribuzione del reddito che determinano un aumento della bipolarizzazione.

Gli assiomi che caratterizzano gli indici di bipolarizzazione sono i seguenti.

A1W. Increased Spread (IS)

Seguendo la notazione in Chakravarty e Mayumder (2001), date due distribuzioni del reddito y e x , con $m(y) = m(x)$, se $y_- \leq x_-$ e $y_+ \geq x_+$ allora $P^n(y) > P^n(x)$.

Secondo IS, quindi, la polarizzazione aumenta all'aumentare della distanza tra i due gruppi di percettori di reddito che si collocano al di sotto e al di sopra della mediana o, alternativamente, quando almeno un individuo con reddito inferiore alla mediana diventa più povero e almeno un individuo con reddito superiore al reddito mediano diventa più ricco (ovvero, quando si abbia un trasferimento regressivo che preservi il rango che avviene "attraverso" la mediana). Si osservi che i cambiamenti nella distribuzione del reddito descritti implicano un aumento della disuguaglianza e, pertanto, all'incremento della dispersione nella distribuzione corrispondono sia un aumento della disuguaglianza, sia della polarizzazione.

A2W. Increased Bipolarity (IB)

Date due distribuzioni del reddito x e y , con $m(y) = m(x)$. Indichiamo con PD il trasferimento di Pigou-Dalton. Se vale una delle seguenti relazioni:

1) $x_+ = y_+, y_- PDx_-$

2) $x_- = y_-, y_+ PDx_+$

3) $y_- PDx_-, y_+ PDx_+$

allora $P^n(y) > P^n(x)$.

La polarizzazione aumenta, quindi, all'aumentare della concentrazione del reddito sui segmenti della distribuzione al di sotto e al di sopra della mediana (*bunching* o *clustering*). Si noti che, dal momento che un trasferimento progressivo implica una diminuzione della disuguaglianza, l'assioma IB stabilisce che disuguaglianza e

polarizzazione sono due concetti diversi (Wolfson, 1994 e 1997; Foster e Wolfson, 1992; Chakravarty, Majumder e Roy, 2007).

Gli indici di bipolarizzazione verificano anche alcune condizioni desiderabili affinché gli indici siano trattabili matematicamente e/o utilizzabile in confronti tra aree o intertemporali.

A3W. Simmetria

Per ogni distribuzione x , $P^n(x) = P^n(Mx)$, dove Mx è una permutazione della distribuzione dei redditi x .

A4W. Principio di Popolazione

Per ogni distribuzione x , $P^n(x) = P^{nm}(y)$, dove $y = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ con ogni $x^i = x$.

A5W. Normalizzazione

In caso di equidistribuzione del reddito l'indice è pari a 0: $\forall c > 0, P^n(c, c, \dots, c) = 0$.

L'indice proposto in Foster e Wolfson (1992) e Wolfson (1994) è costruito a partire dalla "seconda curva di bipolarizzazione". La curva misura per ogni proporzione della popolazione $p_i = i/n$ – essendo i la posizione dell' i -esimo individuo nella distribuzione ordinata del reddito – la distanza tra la quota di reddito che appartiene a quella proporzione (normalizzata per la media) e la quota di reddito che p_i avrebbe se tutti gli individui detenessero il reddito mediano (Figura 1). Foster e Wolfson propongono una trasformazione della curva di polarizzazione moltiplicandolo per il rapporto tra la media e la mediana della distribuzione, $\mu(x) / m(x)$, e ruotando l'asse delle ascisse fino ad avere una inclinazione che corrisponde all'inclinazione della tangente della curva di Lorenz corrispondente al reddito mediano.

Figura 1

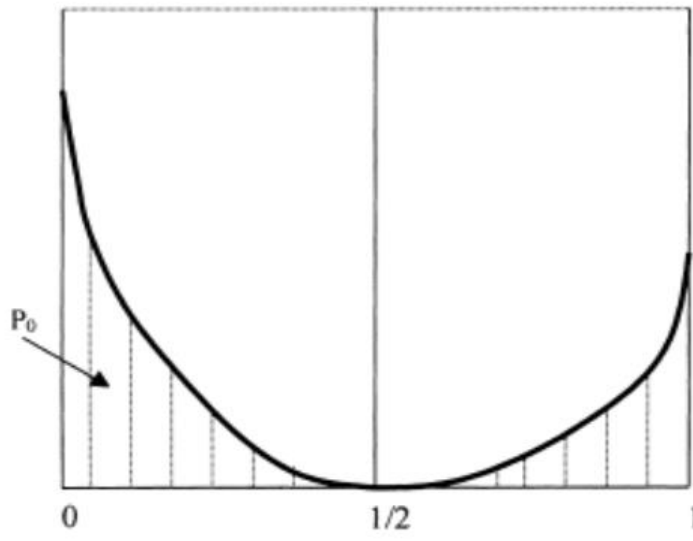


Fig. 1. Second Polarization Curve.

Figura 2

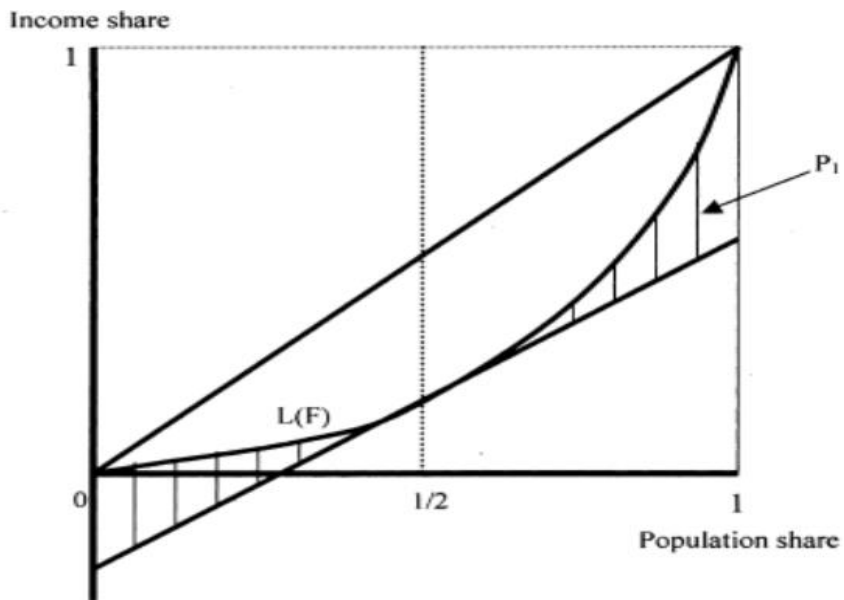


Fig. 2. Bi-Polarization Measure.

In analogia con quanto fatto per l'indice di Gini (1914) rispetto alla curva di Lorenz (Lorenz, 1905), l'indice di Wolfson si ottiene dal calcolo dell'area sottostante la curva di bipolarizzazione, ovvero dall'area compresa tra la curva di Lorenz trasformata e la tangente a questa in corrispondenza della mediana.

Si ha

$$P = \frac{\mu(x)}{m(x)} \left(T - \frac{I_G^n(x)}{2} \right)$$

dove $T = ((\mu(x_+) - \mu(x_-))/2\mu(x))$ e $I_G^n(x)$ l'indice relativo di Gini in una delle sue

formulazioni discrete $I_G^n(x) = 1 - \frac{2}{n(n+1)\mu(x)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x_j$.

L'indice P varia tra 0, in caso di equi-distribuzione del reddito, e 1/4 per una distribuzione perfettamente bimodale in cui metà della popolazione abbia reddito nullo e la restante metà reddito pari a 2μ . Per rendere il *range* di P paragonabile a quello dell'indice di Gini - che varia in $[0,1]$ se si esclude la presenza di redditi negativi - gli autori moltiplicano P per 4 ottenendo

$$P_W(x) = \frac{2\mu(x)(2T - I_G^n(x))}{m(x)}.$$

In Foster e Wolfson (1992, 2010) gli autori dimostrano che un'analogia formulazione dell'indice è data da

$$P_W(x) = \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left[G_{BET_means} - G_{WITH} \right]$$

essendo G_{BET_means} l'indice di Gini calcolato sostituendo nei due sottogruppi x_- e x_+ ad ogni osservazione la media di gruppo - rispettivamente $\mu(x_-)$ e $\mu(x_+)$ - e G_{WITH} è la componente *within groups* dell'indice di Gini, misurata come somma ponderata degli indici di Gini calcolati nel sottogruppi, con pesi pari al prodotto tra la quota di popolazione del sottogruppo sulla popolazione totale e la quota del reddito

appartenete al sottogruppo sul reddito totale: $G_{WITH} = \sum_{h=1}^K v_h w_h G^h$, con

$$v_h = \frac{n_h}{n} \text{ e } w_h = \frac{n_h \mu_h}{n \mu}.$$

Questa formulazione fornisce un supporto analitico all'affermazione che polarizzazione e disuguaglianza sono fenomeni diversi. Si osservi, infatti, che la disuguaglianza, quando viene misurata con l'indice di concentrazione di Gini, è data dalla somma delle due componenti *between* e *within groups*, mentre la polarizzazione è misurata dalla differenza tra componente *between* e componente *within*.

Numerosi, e di varia natura, sono stati i tentativi di generalizzare l'indice di Wolfson. Riporteremo qui solo quelli che attengono alle proposte di nuovi indici formulate oltre nel Capitolo 4.

Rodriguez (2004) presenta una formulazione dell'indice basata sulla media della distribuzione piuttosto che sulla mediana. Si ottiene

$$P_{\mu}^W(x) = 2[2(q_{\mu} - L(q_{\mu})) - G(x)]$$

essendo q_{μ} il percentile della popolazione corrispondente al reddito medio e $L(q_{\mu})$ il valore della curva di Lorenz al percentile q_{μ} . Anche l'indice proposto da Rodriguez può essere espresso come differenza tra la componente *between groups* e quella *within*, quando i due sottogruppi siano definiti in base alla media

$$P_{\mu}^W = 2[G_B^{\mu}(x) - G_W^{\mu}(x)].$$

A partire dalla precedente formulazione l'autore propone una generalizzazione dell'indice in cui i sottogruppi siano determinati rispetto ad un generico valore del reddito z :

$$P_z^W(x) = 2 \frac{\mu(x)}{z} [G_z^B(x) - G_z^W(x)] + \frac{2}{z} (1 - 2q_z)(\mu(x) - z)$$

dove q_z il percentile della popolazione corrispondente al reddito z .

Seguendo un approccio analogo, Rodriguez e Salas (2003) propongono un indice basato sull'indice di concentrazione definito *extended* Gini (Donaldson e Weymark, 1980). L'*extended* Gini si ottiene calcolando l'area sottesa il segmento di equidistribuzione e la curva di Lorenz ponderata per il peso $\nu(\nu-1)(1-q)^{\nu-2}$, essendo q il rango dei redditi individuali nella distribuzione del reddito ordinata.

Si ha pertanto

$$G(\nu) = \nu(\nu-1) \int_0^1 (1-q)^{\nu-2} [q - L(q)] dq.$$

da cui

$$P(\nu) = G^B(\nu) - G^W(\nu)$$

con

$$G^W(\nu) = \nu(\nu-1) \int_0^1 (1-q)^{\nu-2} [L_B(q) - L(q)] dq \quad e$$

$$G^B(\nu) = \nu(\nu-1) \int_0^1 (1-q)^{\nu-2} [q - L_B(q)] dq.$$

Gli autori dimostrano che l'indice è coerente con la seconda curva di polarizzazione, ovvero può essere considerato un indice di polarizzazione, soltanto per $\nu \in [2, 3]$. Per ν esterno all'intervallo, infatti, ad un trasferimento IS seguirebbe un aumento della componente *within* della disuguaglianza che potrebbe essere superiore all'aumento della componente *between*. Se $\nu = 2$, $P(\nu)$ è l'indice di bipolarizzazione di Wolfson.

1.2 Indici di polarizzazione nell'approccio "identificazione-alienazione"

Gli indici proposti da Esteban e Ray (1994) si basano su un modello comportamentale definito di "identificazione-alienazione". Data l'esistenza di gruppi nella distribuzione, definiti ad esempio in base al reddito, gli individui provano un

sentimento di identificazione con quelli che appartengono allo stesso gruppo (e quindi hanno redditi simili) e un sentimento di antagonismo, o alienazione, verso individui di gruppi diversi. La misura della polarizzazione si ottiene come somma dei comporsi dei due sentimenti, essendo il sentimento di alienazione mediato o amplificato da quello di identificazione. Anche adottando questo modello, come già nell'approccio di Wolfson, si individuano due elementi distinti: l'uno, l'alienazione, fa aumentare sia la disuguaglianza che la polarizzazione; l'altro, l'identificazione, fa diminuire la disuguaglianza, ma aumentare la polarizzazione.

Nel dettaglio, sia y il logaritmo naturale del reddito e considerata una popolazione di n elementi $(\pi, y) = (\pi_1, \dots, \pi_n; y_1, \dots, y_n)$ dove π_i è la quota di individui che ha reddito y_i , $i=1, \dots, n$, una formulazione generale per l'indice di polarizzazione è data da

$$P(\pi, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_i \pi_j T(I(\pi_i), a(\delta(y_i, y_j))) \quad (1.1)$$

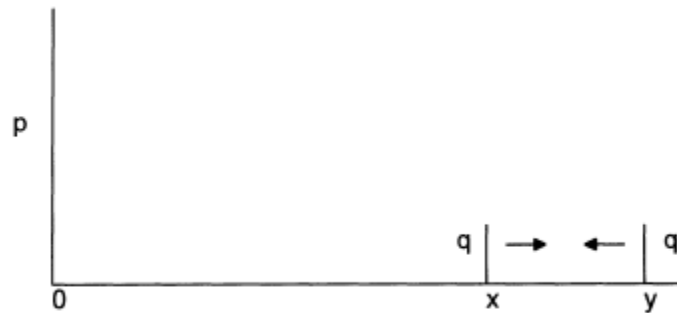
dove la funzione di identificazione $I(p)$, indicando con p una misura degli individui che sono nella stessa classe di chi detiene reddito y , è continua e crescente in p ; $a(\delta(y, y'))$, la funzione di alienazione, è una funzione continua e non decrescente delle distanze δ tra i redditi individuali y e y' , con $a(0) = 0$ e, infine, $T(I, a)$ è la funzione di "effettivo antagonismo" che rappresenta la possibilità che il senso di identificazione di un individuo nel suo gruppo di reddito influenzi il sentimento di alienazione. La funzione T è strettamente crescente in a , se $(I, a) \gg 0$, con $T(I, 0) = 0$.

Gli autori impongono alla famiglia di indici descritti dalla (1.1) il rispetto di una condizione di omoteticità sulla popolazione, assumendo che l'ordinamento di due distribuzioni del reddito dato da P si mantiene se cambia la dimensione della popolazione, e i tre assiomi che seguono.

Consideriamo una distribuzione in cui vi siano i tre livelli di reddito $0, x$ e y con $0 > x > y$.

A1ER. Sia p la quota di individui con reddito 0 e q le quote di individui con reddito x o y , $p > q$.

Fissati $p > 0$ e $q > 0$ esistono $\varepsilon > 0$ e $\mu > 0$ (che possibilmente dipendano da p e x) tali che, se $\delta(x, y) < \varepsilon$ e $q < \mu p$, unire le due masse di dimensione q al loro punto medio $(x + y) / 2$ fa aumentare la polarizzazione¹.

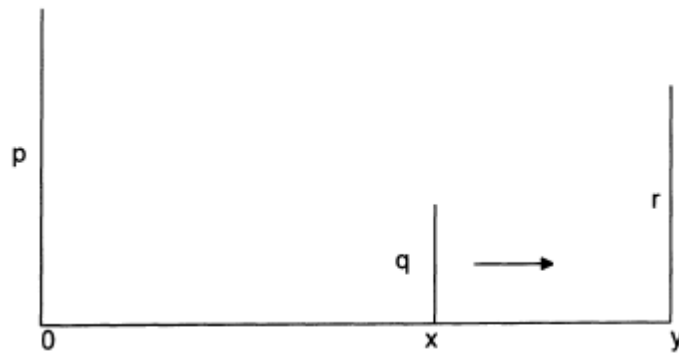


In altri termini, la polarizzazione aumenta in seguito ad una minore dispersione del reddito all'interno del gruppo e ad una maggiore omogeneità nella dimensione dei gruppi (Chakravarty, 2009).

A2ER. Sia p la quota di individui con reddito 0, q la quota di individui con reddito x e r la quota di individui con reddito y con $(p, q, r) \gg 0$ e $p > r$. Sia inoltre $x > |y - x|$.

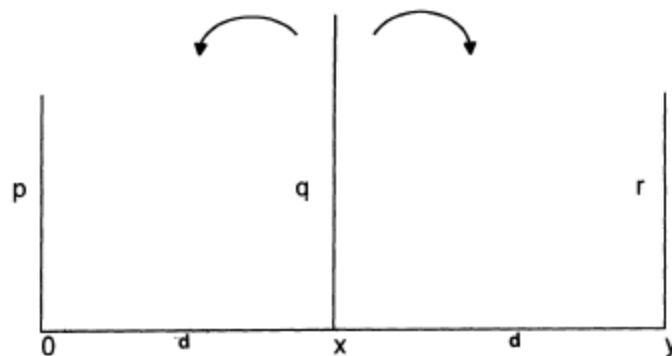
Esiste $\varepsilon > 0$ tale che se la popolazione di massa q si sposta, a destra, verso quella di massa r di un ammontare non superiore a ε la polarizzazione aumenta.

¹ Vale a dire, dati due gruppi di individui della stessa dimensione, tra loro "vicini" rispetto al reddito che possiedono, la loro unione in un unico gruppo aumenta il senso di identificazione, lasciando inalterato il sentimento di alienazione verso il terzo gruppo (non varia la distanza media da questo). Pertanto la polarizzazione aumenta.



In questo assioma si considerano le tre quote di individui, o masse, p , q e r . Se la massa q , che è più vicina alla r di quanto non lo sia a p , si muove ancora di un piccolo ammontare verso r , si mantengono i tre poli nella distribuzione, ma aumenta l'eterogeneità tra i gruppi: pertanto la polarizzazione aumenta.

A3ER. Sia $(p, q) \gg 0$ e $x = y - x = d$. Ogni nuova distribuzione che si formi sottraendo quote di popolazione alla massa centrale q attribuendole ad una delle masse p e r , distanti ognuna d unità di reddito da q , ha un livello di polarizzazione più elevato della distribuzione originale.



Questo assioma, analogo all'assioma IS definito per l'indice di Wolfson, stabilisce che la scomparsa della classe media, a favore dei "poveri" o "ricchi", fa aumentare la polarizzazione.

Si dimostra che imponendo a P il rispetto degli assiomi e della condizione di omoteticità l'indice

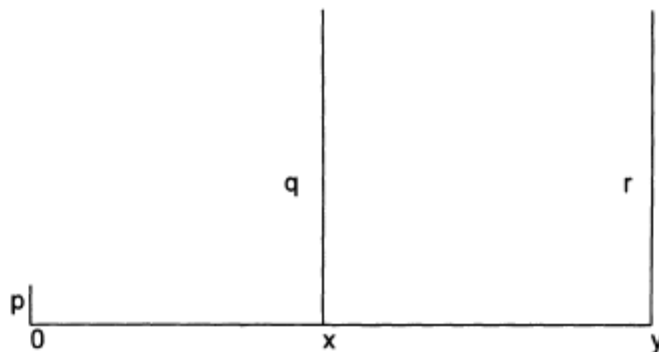
$$P^*(\pi, y) = K \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_i \pi_j (\pi_i^\alpha |y_i - y_j|) \quad (1.2)$$

è di polarizzazione per $K > 0$ e $\alpha \in (0, 1.6]$. Data la distribuzione del reddito in classi y_1, \dots, y_n e la popolazione totale $\sum_{i=1}^n \pi_i$, la famiglia di indici P^* assume il suo valore massimo quando metà della popolazione possiede il reddito minimo y_1 e l'altra metà il reddito più elevato y_n .

La (1.2) mostra che in P^* la funzione di identificazione è pari a p^α e ha un effetto positivo sulla funzione di alienazione. Gli autori danno un'interessante interpretazione del parametro α quale indice di "sensibilità alla polarizzazione". Si osserva che se α fosse 0, allora P^* sarebbe l'indice di Gini. Ne segue che tanto più α è elevato, tanto più la funzione di identificazione gioca un ruolo importante e più grande è la divergenza tra disuguaglianza e polarizzazione.

Si osservi, inoltre, che così come osservato per l'indice di Rodriguez e Salas (2003) per il parametro ν , anche l'indice P^* è di polarizzazione, ovvero coerente con gli assiomi scelti, solo per determinati valori di α . Tale parametro è sottoposto a vincoli ancora più stringenti quando si consideri un ulteriore assioma:

A4ER (non significatività delle piccole masse). Siano $(p, q, r, \Delta) \gg 0$ e $q > r$. Esiste $\mu > 0$ tale che, se $p \leq \mu r$ e $q - r < \mu$, trasferire un piccolo ammontare della quota p (di redditi pari a 0) alla quota r non fa diminuire la polarizzazione.



In altri termini, la migrazione di una massa di popolazione piccola a reddito basso verso redditi più elevati non fa diminuire la polarizzazione (Chakravarty, 2009). Sotto l'Assioma 4 si dimostra che P^* è di polarizzazione per $\alpha \in [1, 1.6]$. Si impone in questo modo un grado minimo di “sensibilità alla polarizzazione” per gli indici della famiglia (1.1)².

Duclos et al. (2004) applicano il modello “identificazione-alienazione” a distribuzioni del reddito definite su supporto continuo, proponendo una formulazione continua dell'indice P^* . Sia f la funzione di densità del reddito, l'indice di polarizzazione proposto dagli autori e proporzionale a

$$P_\alpha(f) = \iint f(x)^{1+\alpha} f(y) |x - y| dy dx \quad (1.3)$$

con $\alpha \in [0.25, 1]$. In questa formulazione la funzione di alienazione è data dalla distanza in valore assoluto tra i redditi, mentre la funzione di identificazione è data da $f(y)^\alpha$. Anche in questo caso per $\alpha = 0$, $P_\alpha(f)$ è l'indice di Gini e, pertanto, α mantiene il suo significato di parametro di sensibilità alla polarizzazione. La famiglia (1.3) verifica un insieme di assiomi in parte diverso da quelli enunciati in Esteban e Ray (1994). Da un lato questo deriva dal fatto che il supporto del reddito è continuo e si descrivono i trasferimenti di reddito sulle densità $f(y)$ e non sulle masse, o quote, di popolazione. Dall'altro, tuttavia, l'assiomatizzazione di Duclos et al. (2004) modifica parzialmente i concetti espressi dal lavoro precedente, introducendo un riferimento esplicito all'assioma di *Increased Bipolarity* (IB) che caratterizza l'approccio di Wolfson.

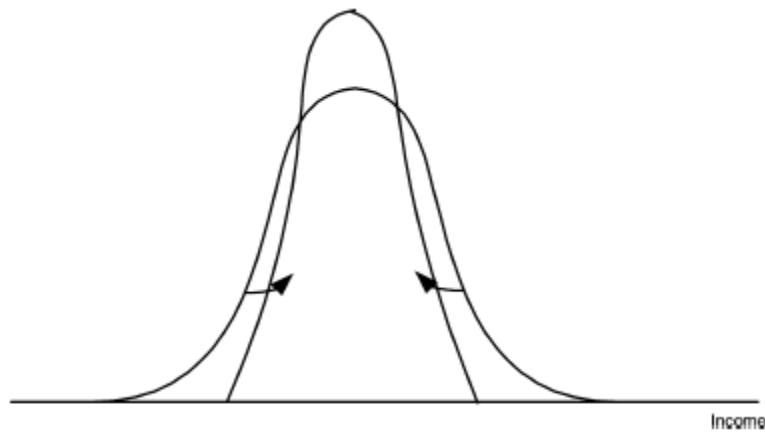
² L'assioma, inoltre, stabilisce una importante differenza tra l'indice di Esteban e Ray e quello di Wolfson. In quest'ultimo, infatti, in accordo con l'assioma IS, ogni trasferimento regressivo ha come effetto un aumento della polarizzazione. Per l'indice P^* , invece, l'effetto dipende dal peso relativo delle masse tra cui avvengono i trasferimenti. Nel dettaglio, nel caso in cui ci siano tre gruppi approssimativamente dello stesso peso, il trasferimento di reddito dai più poveri verso i più ricchi ha due effetti che potrebbero annullarsi a vicenda: da un lato i due gruppi relativi ai redditi medi e ai ricchi divengono più definiti generando un incremento dei conflitti (ovvero nella logica di Esteban e Ray, un aumento di polarizzazione); dall'altro lato, la riduzione del peso del gruppo dei più poveri allenta le tensioni sociali causate dal gruppo. Nel caso in cui la massa dei poveri sia molto piccola e di scarsa influenza sulla determinazione di tensioni sociali, invece, la sua ulteriore riduzione determina il rafforzamento del gruppo dei più ricchi a discapito dei redditi medi con un conseguente aumento dei conflitti.

Nel dettaglio gli assiomi sono definiti a partire da funzioni di densità simmetriche, unimodali e su supporto compatto, o “densità base”, associate a *kernel* o *root*, che sono densità con media 1, supporto $[0,2]$ e popolazione di dimensione 1. Sulle densità base si definisce una trasformazione della $f(y)$ di media μ che implichi una riduzione della dispersione della densità e preservi la media globale (λ - *squeeze*):

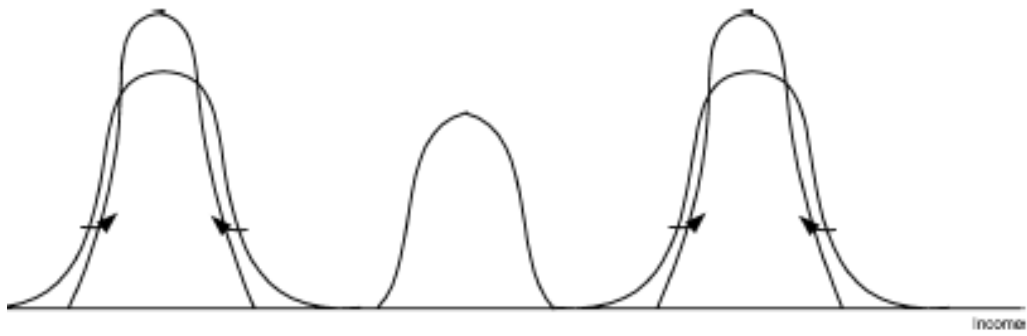
$$f^\lambda(y) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{x - [1 - \lambda]\mu}{\lambda}\right)$$

Si ha:

AIDER. Se una distribuzione è composta da una singola densità base, una riduzione della dispersione non comporta un aumento della polarizzazione.

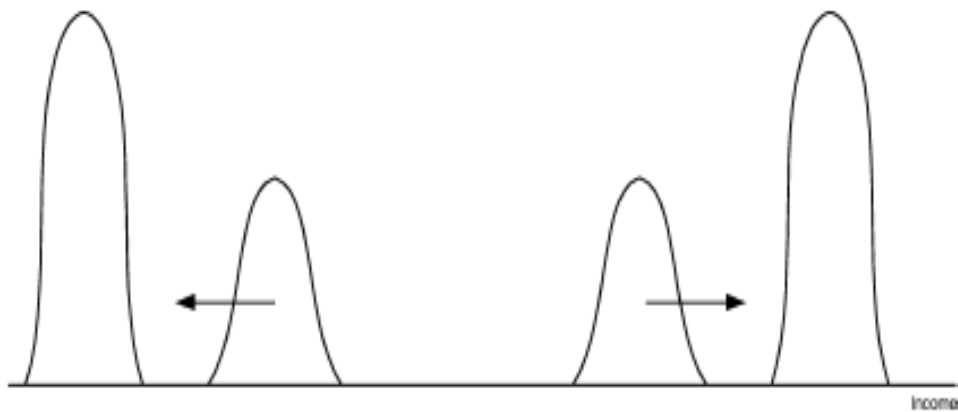


A2DER. Considerando una distribuzione simmetrica composta da tre densità base con lo stesso *kernel*, su supporti disgiunti, un aumento della concentrazione che riguardi in modo simmetrico le due distribuzioni più esterne può aumentare la polarizzazione.



Questo assioma è molto simile nella filosofia all'assioma IB alla base degli indici di bipolarizzazione descritti nel paragrafo precedente. Tuttavia, in questo caso, non c'è un esplicito riferimento al fatto che nella distribuzione si accentui la bimodalità, riferendosi l'assioma al caso generico in cui vi siano due poli nella distribuzione all'interno dei quali aumenta la concentrazione (Esteban e Ray, 2012).

A3DER. Si consideri una distribuzione composta da quattro densità base con lo stesso *kernel* e supporti disgiunti. Uno spostamento delle due distribuzioni centrali verso quelle esterne, pur mantenendo i supporti disgiunti, fa aumentare la polarizzazione.



L'Assioma 3 riprende l' *Increasing Spread* degli indici di bipolarizzazione. E' però più generale riferendosi a generici trasferimenti; per contro, IS fa riferimento a trasferimenti di reddito che avvengano tra individui sui lati opposti rispetto alla mediana.

Vi è un ultimo assioma che stabilisce il principio di invarianza rispetto alla popolazione.

A4DER. Se $P(F) \geq P(G)$ e $p > 0$, allora $P(pF) \geq P(pG)$ dove con pF e pG si intendono le distribuzioni in cui si sia considerato ogni reddito y per p volte.

In un lavoro successivo Esteban, Gradin e Ray (2007), estendono l'indice presentato in Esteban e Ray (1994), applicando il modello "identificazione-alienazione" anche ai casi in cui i gruppi osservabili nella distribuzione del reddito non corrispondano con quelli definibili "socialmente" sulla base del sentimento di identificazione. Data una distribuzione del reddito F , gli autori rappresentano l'identificazione dell'individuo x considerando un sistema di pesi $w(d)$ con $d \in [0, D]$, $D > 0$, decrescente e tale che $w(D) = 0$.

Si ha $I(x, F) = \int_{\{y: |y-x| \leq D\}} w(|y-x|) dF(y)$, mentre la funzione di alienazione è pari a

$$r(x, y) = \max \{ |x - y| - D, 0 \} .$$

Ne segue che l'indice generalizzato è pari a

$$P(\alpha, F) = \iint \left[\int_{\{y: |y-x| \leq D\}} w(|y-x|) dF(y) \right]^\alpha \max \{ |x - y| - D, 0 \} dF(x) dF(y).$$

Nel caso in cui $D=0$ e $\alpha=0$, l'indice coincide con l'indice di concentrazione di Gini. Di conseguenza, ancora una volta, osserviamo che è la presenza del fenomeno di identificazione a rendere le misure di polarizzazione diverse da quelle di disuguaglianza. All'aumentare di α , come già in Esteban e Ray (1994), aumenta la sensibilità dell'indice alla polarizzazione³. La caratterizzazione dell'indice $P(\alpha, F)$ non avviene per via assiomatica, ma tramite una procedura che tiene conto dell'errore di approssimazione che si commette imponendo alla distribuzione del reddito i gruppi definiti sulla base del principio di identificazione, piuttosto che

³ Si osservi che nel caso delle misure di bipolarizzazione, questo ruolo era affidato alla componente *within group* della disuguaglianza.

gruppi formati rispetto a determinati valori di reddito (ad esempio i percentili), o classi di reddito (come nel caso di dati campionari diffusi per classi di reddito o densità stimate per classi di reddito).

La distribuzione del reddito $f(y)$ viene approssimata da una rappresentazione $\rho = (y_0, \dots, y_n; \pi_1, \dots, \pi_n; \mu_1, \dots, \mu_n)$ in cui $y_0 < \dots < y_n$, π_i e μ_i sono, rispettivamente, le quote di popolazione e il reddito medio di coloro che posseggono reddito non inferiore a y_{i-1} e non superiore a y_i , $i = 1, \dots, n$. Si ha

$$P(f; \alpha, \beta) = ER(\alpha, \rho) - \beta \varepsilon(f, \rho)$$

dove $ER(\alpha, \rho)$ è l'indice di Esteban e Ray (1994) calcolato sulla rappresentazione ρ della distribuzione e $\varepsilon(f, \rho)$ misura l'errore che si commette misurando la distribuzione f con ρ . Nel definire ρ , si stabilisce a priori il numero di gruppi da considerare nella distribuzione, ad esempio i poveri, la classe media e i ricchi. La loro posizione nella distribuzione è invece determinata endogeneamente scegliendo ρ che minimizzi l'errore $\varepsilon(f, \rho)$. Si ottiene

$$P(f; \alpha, \beta) = ER(\alpha, \rho^*) - \beta [G(f) - G(\rho^*)]$$

essendo G l'indice di concentrazione di Gini. Questa estensione rende gli indici basati sul modello "identificazione-alienazione" più vicini alla filosofia sottostante la costruzione degli indici di bipolarizzazione. Gli autori dimostrano, infatti, che se si considerano due soli gruppi, distinti rispetto alla mediana, e ponendo $\alpha = \beta = 1$, si ottiene come caso particolare l'indice di Wolfson.

Capitolo 2 – Indici di concentrazione come misure di disuguaglianza e *transfer sensitivity*

2.1 Curva di Lorenz, curva di Bonferroni e curva di De Vergottini

Si data una distribuzione del reddito x , realizzazione della variabile aleatoria X definita sul supporto $[x_1, x_n]$ con $x_1 > 0$. Sia $F(x)$ la funzione di ripartizione e

$$\mu(x) = \int_{x_1}^x t dF(t) = E(x) \text{ il reddito medio.}$$

La curva di Lorenz (Lorenz, 1905), nella sua formulazione continua, si definisce

$$L(p) = \frac{1}{\mu(x)} \int_{x_1}^x t dF(t), \text{ dove } p = F(x) \text{ con } p \in (0,1].$$

Per la curva di Lorenz valgono le seguenti proprietà:

- i. $L(0) = 0$
- ii. $L(1) = 1$
- iii. $L(p)$ non decrescente in p , $p \in (0,1)$
- iv. $L(p) \leq p$, per ogni $p \in (0,1)$
- v. In caso di equidistribuzione del reddito $L(p) = p$, $p \in (0,1)$
- vi. In caso di massima concentrazione $L(p) = 0$, $p \in (0,1)$
- vii. La funzione è convessa qualunque sia la distribuzione della v.a. X .

Se X ha supporto discreto, data una distribuzione $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, dove $x_i > 0$ è il reddito dell' i -esimo individuo, con $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, definiamo la funzione di ripartizione empirica $F(x_i) = P(X \leq x_i) = \frac{i}{n}$.

Posto $x_i \left(\frac{i}{n} \right) = F^{-1}(x_i)$, si ha la rappresentazione discreta della curva di Lorenz

$L(F(x))$ – o “diagramma di concentrazione” (Bonferroni, 1930) – come la spezzata

che unisce i punti $\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n\mu} \sum_{j=1}^i x_j; i=1,2,\dots,n\right)$. La curva assume valore $\frac{x_1}{n\mu(x)}$ per $i=1$ e valore 1 per $i=n$. Considerato, quindi, il reddito dell'individuo i -simo, x_i , la curva Lorenz rappresenta l'ammontare del reddito degli individui che hanno reddito inferiore o uguale a x_i , rapportato all'ammontare complessivo del reddito.

La curva di Bonferroni, nella sua formulazione continua, si ottiene rapportando le medie parziali $m(x) = \frac{1}{F(x)} \int_{x_1}^x t dF(t)$ alla media generale $\mu(x)$. Dalle definizioni di

$m(x)$ e della curva di Lorenz $L(p)$, posto $F(x) = p$, segue che $m(x) = \frac{\mu(x)L(F(x))}{F(x)}$

e, di conseguenza, $B(p) = \frac{L(p)}{p}$ per $p \in (0,1]$ e $B(0) = x_1/\mu(x)$.

Per la curva $B(p)$ valgono le seguenti proprietà:

- i. $B(0) = x_1/\mu(x)$
- ii. $B(1) = 1$
- iii. $B(p)$ non decrescente in p , $p \in (0,1)$
- iv. $B(p) = 1$, $p \in (0,1)$, in caso di equidistribuzione
- v. $B(p) = 0$, $p \in (0,1)$, in caso di massima concentrazione.

Al contrario della curva di Lorenz, la curva di Bonferroni non assume sempre la stessa forma, dipendendo questa dalla distribuzione della v.a. X ⁴. Aaberge (2007) dimostra, in particolare, che se la $F(x)$ è convessa (concava), $B(p)$ è concava (convessa).

Data la distribuzione del reddito $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, la curva di Bonferroni, $B(F(x))$, nella sua formulazione discreta è definita da $\{i/n, \mu_i(x)/\mu(x); i=1,2,\dots,n\}$ dove

$\mu_i(x) = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i x_j$ rappresenta il reddito medio dei primi i individui nella distribuzione

⁴ Per la forma della curva relativamente a diverse distribuzioni della v.a. X si vedano Giorgi (1998), Giorgi e Mondani (1994, 1995), Giorgi e Nadarajah (2010), Pundir et al. (2005), Tarsitano (1990).

del reddito. Considerato, quindi, il reddito dell'individuo i -esimo x_i , la curva di Bonferroni rappresenta il reddito medio degli individui che hanno reddito inferiore o uguale a x_i , rapportato al reddito medio. $B(F(x))$ è una funzione a gradini che assume valore x_i/n per $i=1$ e valore 1 per $i=n$.

La curva di De Vergottini (De Vergottini, 1950), nella sua formulazione continua, si ottiene rapportando le medie parziali calcolate sugli individui che posseggono

almeno il reddito x , $M(x) = \frac{1}{1-F(x)} \int_x^{x_n} t dF(t)$, alla media generale $\mu(x)$. Dalle

definizioni di $M(x)$ e della curva di Lorenz $L(p)$ segue che

$M(x) = \frac{\mu(x)(1-F(x))}{1-F(x)}$ e, di conseguenza, $V(p) = \frac{1-L(p)}{1-p}$ con $p \in [0,1)$ e

$V(1) = x_n/\mu(x)$.

Per la curva $V(p)$ valgono le seguenti proprietà

- i. $V(0) = 1$
- ii. $V(1) = x_n/\mu(x)$
- iii. $V(p)$ non decrescente in p , $p \in (0,1)$
- iv. $V(p) = 1$, $p \in (0,1)$, in caso di equidistribuzione
- v. $V(p) = 0$, $p \in (0,1)$, in caso di massima concentrazione.

Come la curva di Bonferroni, $V(p)$, non assume sempre la stessa forma in quanto questa dipende dalla distribuzione della v.a. X (Aaberge, 2007; Barcena e Imedio, 2008).

Nel caso discreto $V(F(x))$ si definisce come la funzione a gradini che associa alla percentuale di popolazione fino all' i -esimo individuo con il rapporto tra il reddito medio detenuto dagli individui che hanno reddito superiore ad x_i e la media generale del reddito.

Esistono due diverse formulazioni della media dei redditi superiori ad i e, di conseguenza, due definizioni della curva $V(F(x))$. Nella formulazione di De

Vergottini (1950), ripresa da Giaccardi (1950), si ha che $M_i'(x) = \frac{1}{i} \sum_{j=n-i+1}^n x_j$. In una

più recente formulazione, presentata in Barcena e Imedio (2008), si ha invece

$M_i(x) = \frac{1}{n-i+1} \sum_{j=i}^n x_j$. E' facile verificare che $M_i'(x) = M_{n-i+1}(x)$. Si ha quindi

$V(F(x)) = \{i/n, M_i(x)/\mu(x); i=1,2,\dots,n\}$. La curva è decrescente rispetto al rango se si considera la media $M_i'(x)$, crescente se si considera $M_i(x)$.

Se consideriamo la media $M_i(x)$, la funzione $V(F(x))$ assume valore 1 per $i=1$ e $x_n/\mu(x)$ per $i=n$.

2.2 Gli indici nella formulazione continua

Gli indici di concentrazione di Gini, Bonferroni e De Vergottini possono essere espressi in funzione della curva di Lorenz (si vedano, ad esempio, Amato, 1987; Tarsitano, 1990; Barcena e Imedio, 2008). In particolare, esprimeremo i tre indici come somme ponderate delle ordinate della curva di Lorenz allo scopo di delineare possibili differenze nel comportamento degli indici di concentrazione, e di quelli di polarizzazione costruiti a partire da questi, legate al diverso sistema di pesi (si veda oltre nel par. 2.4).

Sia data una distribuzione $x = (x_1, x_1, \dots, x_n)$, dove $x_i > 0$ è il reddito dell' i -esimo individuo, con $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Esprimiamo gli indici di Gini, Bonferroni e De Vergottini a partire dalla rappresentazione continua della curva di Lorenz e delle sue trasformazioni.

L'indice di Gini, nella sua formulazione continua, è pari a due volte l'area sottesa il segmento di equidistribuzione e la curva di Lorenz

$$G(x) = 2 \int_0^1 [p - L(p)] dp = 1 - 2 \int_0^1 L(p) dp.$$

Se consideriamo, infatti, il procedimento analitico proposto da Gini (1914), $G(x)$ si può esprimere come media ponderata delle differenze relative tra la curva di equidistribuzione p e la curva di Lorenz $L(p)$, $\frac{p - L(p)}{p}$, con pesi p e si ha

$$G(x) = \frac{\int_0^1 \left[\frac{p - L(p)}{p} \right] \cdot p \, dp}{\int_0^1 p \, dp} = \frac{\int_0^1 [p - L(p)] dp}{1/2}$$

essendo $1/2$ l'area di massima concentrazione (Amato, 1987).

L'indice varia tra 0 – valore che raggiunge in caso di equidistribuzione del reddito tra percettori – e 1 in caso che un solo individuo percepisca l'intero ammontare di reddito.

L'indice di Bonferroni corrisponde all'area compresa tra la linea di equidistribuzione e l'area sottesa alla curva $B(p) = L(p)/p$. Pertanto è pari a

$$B(x) = 1 - \int_0^1 \frac{L(p)}{p} dp = \int_0^1 \left[\frac{p - L(p)}{p} \right] dp.$$

Come l'indice di Gini, anche l'indice di Bonferroni varia tra 0 – valore che raggiunge in caso di equidistribuzione del reddito tra percettori – e 1 in caso che un solo individuo percepisca l'intero ammontare di reddito.

L'indice di De Vergottini (1950) corrisponde all'area compresa tra la curva $V(p) = (1 - L(p))/(1 - p)$ e la linea di equidistribuzione. Osserviamo che, in questo caso, $M_i \geq \mu$ per $i = 1, \dots, n$ e, pertanto, la linea di equidistribuzione giace al di sotto della curva $V(p)$.

Si ha

$$V(x) = \int_0^1 \frac{1-L(p)}{1-p} dp - 1 = \int_0^1 \frac{[p-L(p)]}{1-p} dp.$$

L'indice vale 0 nel caso di equi-distribuzione del reddito tra percettori; il suo massimo, invece, non è definito. Infatti, in caso di massima concentrazione del reddito si ha $V(p) = 1/(1-p)$, $p \in (0,1)$, per cui l'integrale che definisce V è indeterminato. Sappiamo, tuttavia, che V è limitato superiormente da $\frac{x_n}{\mu(x)} - 1$, pertanto il suo valore massimo dipende dal reddito detenuto dall'individuo più ricco (Barcena e Imedio, 2008).

OSS: Dalla definizioni $m(x) = \frac{1}{F(x)} \int_{x_1}^x t dF(t)$ e $M(x) = \frac{1}{1-F(x)} \int_x^{x_n} t dF(t)$ segue che

$$G(x) = 2 \int_{x_1}^{x_n} \frac{m(x) - \mu(x)}{\mu(x)} \cdot F(x) dF(x) = \frac{2}{\mu(x)} \int_{x_1}^{x_n} [m(x) - \mu(x)] \cdot F(x) dF(x)$$

$$B(x) = \int_{x_1}^{x_n} \frac{m(x) - \mu(x)}{\mu(x)} dF(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int_{x_1}^{x_n} [m(x) - \mu(x)] dF(x)$$

e

$$V(x) = \int_{x_1}^{x_n} \frac{M(x) - \mu(x)}{\mu(x)} dF(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int_{x_1}^{x_n} [M(x) - \mu(x)] dF(x).$$

Pertanto, essendo le aree calcolate divise per il valore del reddito medio nella distribuzione, i tre indici sono numeri puri (vale a dire indici relativi) e indipendenti dalla scala.

Gli indici presentati soddisfano quindi sia le condizioni di Dalton-Bonferroni⁵, sia la condizione di invarianza di scala⁶ (Barcena e Imedio, 2008).

⁵ Le tre proprietà che definiscono un indice di concentrazione, o condizioni di Dalton-Bonferroni (Bonferroni, 1930) sono: a) sensibilità ai trasferimenti, secondo la quale la concentrazione aumenta in seguito ad un

2.3 Gli indici nella formulazione discreta

Proporremo nel seguito indici costruiti a partire dalla rappresentazione discreta delle curve come somma di n termini, discostandoci dalle rappresentazioni discrete degli indici comunemente presenti in letteratura, in cui la sommatoria è su $n-1$ termini. La scelta di considerare una somma su n termini segue dalla possibilità che si debbano analizzare, anche per gli indici di polarizzazione che verranno proposti in seguito, gli effetti di trasferimenti di reddito che coinvolgano l'individuo con il reddito più elevato (ovvero l'individuo di rango n)⁷.

Calcoliamo l'indice relativo di Gini come differenza tra l'area sottostante la diagonale del quadrato unitario, che rappresenta il caso di equidistribuzione del carattere, e l'area sottostante la spezzata di concentrazione

$\left(\frac{i}{n}, \frac{1}{n\mu} \sum_{j=1}^i x_j; i=1,2,\dots,n \right)$, rapportata all'area di massima concentrazione.

Seguendo una notazione diffusa in letteratura poniamo $p_i = \frac{i}{n}$, per $i=1,\dots,n$, e

$$q_i = \frac{1}{n\mu(x)} \sum_{j=1}^i x_j, \text{ per } i=1,\dots,n.$$

trasferimento di reddito da un individuo più ricco ad uno più povero (principio di Pigou-Dalton); b) l'indice deve assumere un valore minimo, generalmente 0, in caso di concentrazione minima e un valore massimo, posto convenzionalmente a 1, in caso di concentrazione massima; c) l'indice deve essere un numero puro, ovvero un indice relativo, in quanto "il giudizio sulla concentrazione non deve dipendere dall'unità di misura delle x_i " (Bonferroni, 1930).

⁶ Sia $I(x)$ un indice di disuguaglianza. Data la distribuzione x e preso $a>0$ per la condizione di invarianza di scala si ha $I(x) = I(ax)$.

⁷ La scelta è legata anche a necessità di tipo "tecnico" quali l'individuazione di sottogruppi dei "poveri", ovvero gli individui che hanno al più il reddito mediano, e dei "ricchi", gli individui con almeno il reddito mediano, di uguale numerosità ($n/2$). Si noti, inoltre, che avremmo potuto ricondurre gli indici alla loro formulazione "corretta" dividendoli per il loro massimo. Tuttavia, in questo modo avremmo rischiato di appesantire la notazione.

Abbiamo l'indice assoluto

$$\begin{aligned} G_A(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (q_i + q_{i+1}) \cdot (p_{i+1} - p_i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} (q_i + q_{i+1}) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} q_i + 1 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n} \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} q_i \end{aligned}$$

e, dividendo per l'area di massima concentrazione $\frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n} \right)$ ⁸ si ha

$$G(x) = 1 - \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} q_i = 1 - \frac{2}{n(n-1)\mu(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i x_j \quad (2.1)$$

Per riportare la formula ad una sommatoria di n termini osserviamo che si perviene alla stessa formulazione in (2.1) tramite l'approccio analitico proposto da Gini (1914). Seguendo tale approccio si osserva che, lungo il segmento di equidistribuzione, il $p\%$ della popolazione possiede esattamente il $p\%$ del reddito, vale a dire $p_i = q_i$, per $i = 1, \dots, n$. Nel caso in cui il reddito sia concentrato, invece, $p_i \geq q_i$. L'indice si costruisce, quindi, come media ponderata con pesi p_i delle differenze normalizzate $(p_i - q_i) / p_i$.

Si ha infatti

⁸ Si ha, infatti, nel caso di massima concentrazione del reddito

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} (p_n - p_{n-1}) \cdot (q_n + q_{n+1}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n} \right)$$

$$\begin{aligned}
G(x) &= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{p_i - q_i}{p_i} \right) \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n}} = \\
&= 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{\frac{n-1}{2}} = 1 - \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} q_i = 1 - \frac{2}{n(n-1)\mu(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i x_j.
\end{aligned}$$

Ripercorrendo i passaggi sommando su n termini (ignorando quindi che $p_n - q_n = 1 - 1 = 0$) si trova agevolmente che

$$I_G(x) = 1 - \frac{2}{n(n+1)\mu(x)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x_j.$$

$I_G(x)$ varia tra 0 – valore che raggiunge in caso di equi-distribuzione del reddito tra percettori – e $\frac{n-1}{n+1}$ in caso che un solo individuo percepisca l'intero ammontare di reddito. Tra i due indici vale la relazione $I_G(x) = \frac{n-1}{n+1} G(x)$ ⁹.

L'indice di Bonferroni si ottiene sommando gli n rettangoli di base $1/n$ e altezza pari a $1 - \frac{\mu_i(x)}{\mu(x)}$, per $i = 1, \dots, n$. Questo equivale a sottrarre all'area sottostante il segmento di equidistribuzione, di ordinata 1 per ogni valore dell'ascissa, la somma dei rettangoli di base $1/n$ e altezza $\frac{\mu_i(x)}{\mu(x)}$, per $i = 1, \dots, n$.

Otteniamo

⁹ Si ha, infatti:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n+1}{n-1} \right) I_G(x) &= \frac{n+1}{n-1} - \frac{2}{n(n-1)\mu(x)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x_j = \frac{n+1}{n-1} - \left[\frac{2}{n(n-1)\mu(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i x_j + \frac{2}{n(n-1)\mu(x)} \sum_{j=1}^n x_j \right] = \\
&= \frac{n+1}{n-1} - \left[\frac{2}{n(n-1)\mu(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i x_j + \frac{2}{n(n-1)\mu(x)} n\mu(x) \right] = \frac{n+1}{n-1} - \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n(n-1)\mu(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i x_j = 1 - \frac{2}{n(n-1)\mu(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i x_j = G(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_B(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mu(x) - \mu_i(x)}{\mu(x)} \right) = \\
&= 1 - \frac{1}{n\mu(x)} \sum_{i=1}^n \mu_i(x) = 1 - \frac{1}{n\mu(x)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i x_j.
\end{aligned}$$

L'indice varia tra 0 – valore che raggiunge in caso di equi-distribuzione del reddito tra percettori – e $\frac{n-1}{n}$ in caso che un solo individuo percepisca l'intero ammontare di reddito.

$I_B(x)$ non è, quindi, un indice relativo corretto, quale quello proposto originariamente da Bonferroni (1930) che, nella sua formulazione discreta, è pari a

$$\begin{aligned}
B(x) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\mu(x) - \mu_i(x)}{\mu(x)} \right) = \\
&= 1 - \frac{1}{(n-1)\mu(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i(x) = 1 - \frac{1}{(n-1)\mu(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i x_j.
\end{aligned}$$

Tra i due indici vi è la relazione $I_B(x) = \frac{n-1}{n} B(x)$ ¹⁰. Nel seguito, allo scopo di semplificare calcoli e notazione, utilizzeremo la formulazione $I_B(x)$, già proposta in Nygard e Sandstrom (1981) e ripresa da Barcena e Silber (2013).

Analogamente a quanto osservato per la formulazione continua dell'indice, questo è relativo, invariante rispetto alla scala e sensibile ai trasferimenti (principio di Pigou-Dalton).

Essendo basato sulla differenza tra la media della distribuzione e le medie parziali sui diversi segmenti della distribuzione del reddito $B(x)$, e quindi $I_B(x)$, soddisfa un criterio redistributivo più forte della condizione di Pigou-Dalton: la riduzione

¹⁰ Si ha, infatti:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n}{n-1} \right) I_B(x) &= \frac{n}{n-1} - \frac{1}{(n-1)\mu(x)} \sum_{i=1}^n \mu_i(x) = \frac{n}{n-1} - \frac{1}{(n-1)\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i(x) + \mu(x) \right] = \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)\mu(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i(x) = \\
&= 1 - \frac{1}{(n-1)\mu(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i(x) = B(x).
\end{aligned}$$

dell'indice che segue ad un trasferimento progressivo di reddito – dal più ricco al più povero – è tanto più elevata quanto più i redditi degli individui coinvolti nel trasferimento sono inferiori al reddito medio. Formalmente si parla di *positional transfer sensitivity* (Meheran, 1976; Zoli, 1999).

L'indice di De Vergottini, nella sua formulazione discreta, si ottiene sommando gli n rettangoli di base $1/n$ e altezza pari a $\frac{M_i(x)}{\mu(x)} - 1$, per $i = 1, \dots, n$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} I_V(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_i(x) - \mu(x)}{\mu(x)} \right) = \\ &= \frac{1}{n\mu(x)} \sum_{i=1}^n M_i(x) - 1 \end{aligned}$$

con $M_i = \frac{1}{(n-i+1)} \sum_{j=i}^n x_j$.

L'indice varia tra 0 – valore che raggiunge in caso di equi-distribuzione del reddito tra percettori – e $\sum_{s=2}^n \frac{1}{s}$ in caso che un solo individuo percepisca l'intero ammontare di reddito.

Anche in questo caso l'indice non è relativo e differisce dalla formulazione originale proposta in De Vergottini (1950) che, nella sua formulazione discreta, è pari a

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{M'_i - \mu(x)}{\mu(x)} \right)}{\left(1 + n \sum_{s=2}^{n-1} \frac{1}{s} \right)}$$

con $M'_i = \frac{1}{i} \sum_{j=n-i+1}^n x_j$.

OSS: Dal momento che $M'_i = M_{n-i+1}$ si ha $\frac{1}{n\mu(x)} \sum_{i=1}^n M'_i - 1 = \frac{1}{n\mu(x)} \sum_{i=1}^n M_i - 1$. Per cui l'indice $I_v(x)$ può essere calcolato utilizzando entrambe le definizioni di media degli i individui più ricchi.

Anche l'indice di De Vergottini è relativo, invariante rispetto alla scala e sensibile ai trasferimenti (principio di Pigou-Dalton). Al pari dell'indice di Bonferroni, possiede la proprietà prima definita *positional transfer sensitivity* (Meheran, 1976; Zoli, 1999) ma, in questo caso, la riduzione dell'indice che segue ad un trasferimento progressivo di reddito – dal più ricco al più povero – è tanto più forte quanto più i redditi degli individui coinvolti nel trasferimento sono più elevati del reddito medio. Discuteremo meglio nel prossimo paragrafo le ragioni di tale sensibilità e delle differenze in merito tra i tre indici.

2.4 Una formula generale per i tre indici e la *transfer sensitivity*

Gli indici di Gini, Bonferroni e De Vergottini appartengono alla classe delle misure lineari definita da Meheran (1976), potendo essere espressi come

$$I_{\theta(p)} = \int_0^1 \theta(p) \cdot (p - L(p)) dp.$$

In particolare, si ha:

- $\theta(p) = 2$ per l'indice di Gini
- $\theta(p) = 1/p$ per l'indice di Bonferroni e, infine,
- $\theta(p) = 1/(1-p)$ per l'indice di De Vergottini.

Da questa formulazione appare evidente che i tre indici mostrano una diversa sensibilità ai trasferimenti di reddito – vale a dire alla variazione delle differenze $(p - L(p))$ – nei diversi segmenti della distribuzione.

Per l'indice di Gini il peso della variazione di $(p - L(p))$ che segue ad un trasferimento di reddito è costante, indipendentemente dalla posizione nella distribuzione del reddito degli individui tra cui avviene il trasferimento. Per l'indice di Bonferroni, invece, le differenze $(p - L(p))$ sono moltiplicate per una funzione convessa e decrescente in p . Ne segue che i trasferimenti che avvengono nella parte bassa della distribuzione – il rango p è basso – hanno un maggior impatto sulla variazione dell'indice. Detto in altri termini, l'indice di disuguaglianza di Bonferroni è più sensibile di quello di Gini ai trasferimenti di reddito che coinvolgono i “poveri”. In modo speculare, nell'indice di De Vergottini le differenze $(p - L(p))$ sono moltiplicate per una funzione convessa e crescente in p . Ne segue che l'indice di De Vergottini è più sensibile di quello di Gini ai trasferimenti di reddito che coinvolgono i “ricchi”.

La diversa sensibilità degli indici è ancora più evidente se si considera la loro formulazione campionaria. In questo contesto numerosi sono stati i contributi nel tempo della scuola italiana, volti soprattutto a trovare una formulazione analitica generale per gli indici di concentrazione (si vedano, tra gli altri, Amato, 1987; Buscemi, 1980; Giaccardi, 1950).

Secondo la formulazione presentata in Tarsitano (1990), l'indice di Bonferroni può essere espresso come combinazione lineare delle unità con pesi decrescenti al crescere del rango.

Abbiamo

$$I_B(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mu(x) - \mu_i(x)}{\mu(x)} \right) = 1 - \frac{1}{n\mu(x)} \sum_{i=1}^n \mu_i(x) = 1 - \frac{1}{n\mu(x)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i x_j = \frac{1}{n\mu(x)} \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

con

$$w_i = 1 - \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}, \quad w_{i+1} = w_i + \frac{1}{i}, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 0.$$

La stessa formulazione è ripresa in Barcena e Imedio (2008) che la applicano agli indici di Gini e di De Vergottini ottenendo per l'indice di Gini

$$I_G(x) = \frac{1}{n\mu(x)} \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i$$

con

$$\gamma_i = \frac{2i-1}{n-1}, \quad \gamma_{i+1} = \gamma_i + \frac{2}{n}, \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i = 0$$

e per quello di De Vergottini

$$I_V(x) = \frac{1}{n\mu(x)} \sum_{i=1}^n \xi_i x_i$$

con

$$\xi_i = \sum_{j=1}^i \frac{1}{(n-j+1)-1}, \quad \xi_{i+1} = \xi_i + \frac{1}{n-i}, \quad \sum_{i=1}^n \xi_i = 0.$$

Nei tre sistemi di ponderazione, il peso corrispondente al reddito di ogni individuo dipende dalla posizione degli individui nella distribuzione del reddito, con peso crescente all'aumentare del rango dell'individuo nella distribuzione (i/n). Abbiamo, quindi, le tre sequenze di pesi γ_i, w_i e ξ_i , $i=1, \dots, n$ crescenti ma a tasso diverso: nel Gini la sequenza dei pesi cresce a tasso costante $2/n$, nel Bonferroni e nel De Vergottini a tasso decrescente (i/n e $i/(n-i)$ rispettivamente). Si ha, inoltre, che mentre i pesi dell'indice di Gini sono simmetrici in valore assoluto rispetto alla mediana, quelli degli indici Bonferroni e De Vergottini sono tra loro simmetrici, essendo il peso che $I_B(x)$ associa al reddito minimo pari al peso che $I_V(x)$ associa al reddito massimo.

Per l'indice di Gini si ha, quindi, un sistema di pesi tale che la variazione della disuguaglianza registrata a seguito di un trasferimento di reddito, dipende soltanto dalla distanza tra le unità che si scambiano il reddito, qualunque sia la loro posizione nella distribuzione. Per gli indici di Bonferroni e di De Vergottini, invece, l'effetto di un trasferimento dipende anche dalla posizione degli individui, risultando il Bonferroni più sensibile ai trasferimenti che avvengono nella parte bassa della

distribuzione del reddito e il De Vergottini più sensibile alle variazioni che avvengono tra i più ricchi.

Ritroveremo queste proprietà negli indici di polarizzazione presentati nel Capitolo 4.

Capitolo 3 – La scomposizione degli indici di disuguaglianza per sottogruppi di popolazione

La studio della scomponibilità degli indici di disuguaglianza è un tema largamente trattato in letteratura. Il dibattito si è sviluppato principalmente sulla possibilità di scomposizione degli indici in gruppi disgiunti della popolazione¹¹ - quali età, sesso, area geografica di appartenenza, livello di istruzione – con l’obiettivo di esaminare il contributo alla disuguaglianza complessiva della disuguaglianza all’interno di ogni gruppo (disuguaglianza *within groups*) e di quella tra i gruppi (*between groups*), dovuta alle differenze del livello medio del reddito tra i gruppi. In particolare, numerosi contributi hanno analizzato il ruolo degli indici “additivamente” scomponibili come somma della componente *within* e della componente *between*, individuando quali indici additivamente decomponibili il coefficiente di Theil (Bourguignon, 1979) e, più in generale, gli indici appartenenti alla famiglia dell’entropia generalizzata (Shorrocks, 1980).

A questo proposito, l’indice di Gini è stato sottoposto a numerose critiche per la presenza di un termine di *overlapping* tra gruppi. Tale termine, tuttavia, è ritenuto una fonte supplementare di informazione piuttosto che un limite dell’indice (Mehran, 1975; Pyatt, 1976; Silber, 1989; Lambert e Aronsons, 1993; Nygard e Sandstrom, 1981) in quanto può fornire utili informazioni sul grado di sovrapposizione dei diversi gruppi della popolazione¹².

La scomposizione dell’indice di Gini ha assunto recentemente un ruolo nuovo nell’analisi della distribuzione del reddito. La scomposizione dell’indice per sottogruppi è stata, infatti, utilizzata nella caratterizzazione degli indici di bipolarizzazione del reddito basati sull’indice di disuguaglianza di Gini (Wolfson, 1994, 1997; Foster e Wolfson, 1992, 2010). In particolare, l’indice di Wolfson (1994), nonché una delle sue estensioni basate sull’indice extended Gini (Rodriguez e Salas, 2003), sono stati interpretati come differenza tra la componente *between*

¹¹ Numerosi sono, tuttavia, anche gli studi relativi alla scomposizione degli indici per classi di reddito e fonti di reddito. Si vedano ad esempio, per la scomposizione dell’indice di Gini, i contributi di Rao (1969) e Lerman e Yitzhaki (1984).

¹² Si vedano i contributi di Giorgi (2011) e Silber (1999) per una rassegna critica sull’argomento.

dell'indice e quella *within* calcolate su i due sottogruppi disgiunti della popolazione, separati dal reddito mediano.

In questo contesto, posto che diversi indici di disuguaglianza danno enfasi differente a cambiamenti su diversi segmenti della distribuzione e, di conseguenza, danno peso diverso alle componenti *between* e *within* (Shorrocks, 1980), utilizzare un particolare indice di disuguaglianza per misurare la polarizzazione permette di caratterizzare gli indici di polarizzazione rispetto alla loro sensibilità ai trasferimenti.

In questo capitolo applicheremo la tecnica di scomposizione dell'indice di Gini in sottogruppi disgiunti della popolazione proposta da Lambert e Aronson (1993) all'indice di concentrazione di Bonferroni e a quello di de Vergottini. Le formule ottenute verranno poi applicate ai due sottogruppi non sovrappontesi degli individui con reddito non superiore alla mediana ($x-$) e di coloro che possiedono redditi superiori alla mediana ($x+$). A partire da queste formule, proporremo i due nuovi indici di polarizzazione.

3.1 La scomposizione dell'indice di Gini secondo l'approccio grafico

Ripercorriamo in primo luogo la scomposizione proposta da Lambert e Aronson (1993) per l'indice di Gini per poi applicarla agli indici Di Bonferroni e De Vergottini.

Consideriamo una popolazione Ω di numerosità n , suddivisa in K sottogruppi Ω_h di numerosità n_h , $h = 1, 2, \dots, K$. Sia data la distribuzione del reddito $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, dove $x_i > 0$ è il reddito dell' i -esimo individuo, con $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Sia $\mu(x)$ la media della distribuzione nella popolazione nel suo complesso e $\mu_h(x)$ il reddito medio nel sottogruppo h .

Si consideri inizialmente uno stato ipotetico di perfetta uguaglianza in cui il reddito complessivo $n\mu(x)$ sia distribuito equamente tra gli individui: ognuno possiede quindi il reddito medio. In questo caso si ha $L(p) = p$, ovvero una situazione in cui la p -esima percentuale degli individui con reddito inferiore ad un dato x possiede esattamente il $p\%$ del reddito totale.

- 1) In una prima fase introduciamo la disuguaglianza *between groups*, dividendo le osservazioni nei sottogruppi Ω_h e attribuendo ad ogni osservazione la media $\mu_h(x)$ del sottogruppo a cui appartiene. Indicheremo con $L_B(q)$ la curva di Lorenz relativa a questa distribuzione. L'argomento q della curva è il rango degli individui nella distribuzione del reddito, definito rispetto ad un particolare ordinamento: prima le osservazioni vengono ordinate secondo la loro media di gruppo e successivamente, in ogni gruppo, le osservazioni vengono ordinate in ordine non crescente rispetto al loro reddito (ordinamento "lessicografico"). Le ordinate della curva al percentile q corrispondono, quindi, al rapporto tra le cumulate delle medie di gruppo fino a q e la media $\mu(x)$ della distribuzione.
- 2) Si introduce la componente *within* della disuguaglianza assegnando ad ogni osservazione il suo reddito, pur mantenendo il particolare ordinamento imposto al punto 1. Si ottiene la curva di concentrazione $C_{Lorenz}(q)$, ovvero la curva di Lorenz calcolata sulle osservazioni ordinate rispetto all'ordinamento "lessicografico". Le ordinate di questa curva al percentile q corrispondono al rapporto tra la quota di reddito detenuta dalle prime nq osservazioni e il reddito totale.
- 3) Il passo finale consiste nell'ordinare le osservazioni come nella distribuzione originale, isolando quindi l'effetto dell'*overlapping* tra gruppi. Si ottiene la curva $L(q)$, le cui ordinate per ogni q sono pari al rapporto tra l'ammontare del reddito fino a q e il reddito complessivo.

La scomposizione si ottiene, pertanto, sottraendo progressivamente all'area di perfetta uguaglianza, ovvero l'area sottesa a $L(q) = q$, per ogni q , le aree ottenute progressivamente.

Ricordando che $I_G = 2 \int_0^1 [q - L(q)] dq$ si hanno le seguenti aree:

$$A_B = 2 \int_0^1 [q - L_B(q)] dq$$

$$A_W = 2 \int_0^1 [L_B(q) - C_{Lorenz}(q)] dq$$

$$A_O = 2 \int_0^1 [C_{Lorenz}(q) - L(q)] dq$$

con $I_G = A_B + A_W + A_O$.

Gli autori dimostrano che la scomposizione per aree è equivalente a

$$I_G = G_{BET_means} + G_{WITH} + OV \quad (3.1)$$

dove la componente *within* si ottiene come somma degli indici di Gini calcolati in ciascun sottogruppo, ponderati per un coefficiente che include le quote di reddito e quelle della popolazione del sottogruppo, $G_{WITH} = \sum_{h=1}^K v_h w_h G^h$, con

$v_h = \frac{n_h}{n}$ e $w_h = \frac{n_h \mu_h}{n \mu}$; G_{BET_means} è il valore dell'indice di Gini calcolato nell'ipotesi

in cui ogni individuo possenga il reddito medio del sottogruppo a cui appartiene e, infine, OV misura il grado di sovrapposizione tra le distribuzioni del reddito nei sottogruppi.

In altri termini si dimostra che

$$A_B = G_{BET_means}, \quad A_W = G_{WITH}, \quad A_O = OV$$

e che ognuna delle sotto-aree di A_W relativa al sottogruppo h , corrisponde al termine $v_h w_h G^h$.

Dimostriamo la (3.1). Per costruzione $G_B = G_{BET_means}$. Per calcolare l'area A_W si consideri il sottogruppo h in cui sia definita la curva di Lorenz $L_h(p_h)$ in cui p_h è il rango delle unità nel gruppo h , ovvero $p_h = j/n_h$ per l'unità j -esima. L'unità di rango p_h nel sottogruppo h -simo ha rango q nella distribuzione originale essendo

$$q = \frac{\sum_{i \leq h-1} n_i + p_h n_h}{n}.$$

La curva di concentrazione $C_{Lorenz}(q)$ è definita come il rapporto tra l'ammontare di reddito che detengono le prime nq unità e il reddito complessivo. Si ha quindi

$$C_{Lorenz}(q) = \left[\frac{\sum_{i \leq h-1} n_i \mu_i + n_h \mu_h L_h(p_h)}{n \mu} \right]$$

in cui $L_h(p_h)$ rappresenta la curva di Lorenz al percentile p_h , ovvero la quota di reddito del gruppo h che posseggono gli individui con reddito inferiore o uguale al reddito dell'individuo di rango p_h .

La curva $L_B(p_h)$ è invece definita dal rapporto tra l'ammontare di reddito delle prime nq unità nel caso in cui ogni unità posseda il reddito medio del sottogruppo e il reddito totale:

$$L_B(q) = \left[\frac{\sum_{i \leq h-1} n_i \mu_i + n_h \mu_h p_h}{n \mu} \right]$$

Moltiplicando entrambe le curve per nq e sottraendole tra loro otteniamo

$$n\mu [L_B(q) - C_{Lorenz}(q)] = n_h \mu_h (p_h - L_h(p_h))$$

Dall'espressione di q ricaviamo $dq = (n_h / n) dp_h$ per cui moltiplicando entrambi i membri per dq abbiamo

$$n\mu [L_B(q) - C(q)] dq = \frac{n_h^2 \mu_h}{n} (p_h - L_h(p_h)) dp_h$$

ovvero

$$[L_B(q) - C(q)] dq = \frac{n_h^2 \mu_h}{n^2 \mu} (p_h - L_h(p_h)) dp_h.$$

Da questa espressione, ricordando che $A_W = 2 \int_0^1 [L_B(q) - C(q)] dq$ e che integrare per q che varia tra 0 e 1 equivale ad integrare tra 0 e 1 nei sottogruppi rispetto a p_h , facendo scorrere l'indice di gruppo h otteniamo l'area totale

$$\begin{aligned} A_W &= 2 \int_0^1 [L_B(q) - C(q)] dq = \sum_h \frac{n_h^2 \mu_h}{n^2 \mu} 2 \int_0^1 (p_h - L_h(p_h)) dp_h \text{ e posto } v_h = \frac{n_h}{n} \text{ e } w_h = \frac{n_h \mu_h}{n \mu} \\ &= \sum_h v_h w_h 2 \int_0^1 (p_h - L_h(p_h)) dp_h = \sum_h v_h w_h I_G^h = G_{WTH}. \end{aligned}$$

In alternativa, come presentato in Lambert e Aronsons, abbiamo

$$\begin{aligned} n\mu A_W &= \sum_h (n_h^2 \mu_h / n) 2 \int_0^1 (p_h - L_h(p_h)) dp_h \text{ e posto } v_h = \frac{n_h}{n} \text{ e } w_h = \frac{n_h \mu_h}{n \mu} \\ &= \sum_h v_h w_h n\mu 2 \int_0^1 (p_h - L_h(p_h)) dp_h \end{aligned}$$

da cui dividendo entrambi i membri per $n\mu$ si ha

$$A_W = \sum_h v_h w_h 2 \int_0^1 (p_h - L_h(p_h)) dp_h = \sum_h v_h w_h I_G^h = G_{WTH}.$$

3.2 La scomposizione dell'indice di Bonferroni

Veniamo ora alla scomposizione dell'indice di Bonferroni¹³

$$I_B = 1 - \int_0^1 \frac{L(p)}{p} dp = \int_0^1 \frac{[p - L(p)]}{p} dp \quad (3.2)$$

Supponiamo di avere k gruppi, potenzialmente sovrappoventesi. Si consideri inizialmente una situazione di equidistribuzione del reddito tra gli n individui, in cui ogni individuo detiene il reddito medio μ . In questo caso si ha $L(p) = p$ e, di conseguenza, $B(p) = \frac{L(p)}{p} = 1$.

PROP. 1 Per l'indice di Bonferroni (3.2), definite le tre aree

$$A_B = \int_0^1 [1 - B_B(q)] dq$$

$$A_W = \int_0^1 [B_B(q) - C_{Bonf}(q)] dq$$

$$A_O = \int_0^1 [C(q) - B(q)] dq$$

si ha

$$I_B = A_B + A_W + A_O$$

con

$$A_B = B_{BET_means}, \quad A_W = B_{WITH} + B_{residualA_W}, \quad A_O = OV$$

¹³ La scomposizione qui presentata è stata precedentemente proposta da Barcena e Silber (2013). Gli autori, tuttavia, utilizzano una diversa definizione della curva di Bonferroni e, pertanto, la loro scomposizione differisce in parte dalla nostra.

dove B_{BET_means} è il valore dell'indice di Bonferroni calcolato nell'ipotesi in cui ogni individuo possenga il reddito medio del sottogruppo a cui appartiene, la componente *within* $B_{WITH} = \sum_{h=1}^K v_h w_h I_B^h$ si ottiene come somma degli indici di Bonferroni calcolati in ciascun sottogruppo, ponderati per un coefficiente che include le quote di reddito e quelle della popolazione del sottogruppo e $B_{residualA_w}$ tiene conto del ruolo del rango delle osservazioni nel calcolo dell'indice di Bonferroni. OV, infine, misura il grado di sovrapposizione tra le distribuzioni del reddito nei sottogruppi.

Dim) Introduciamo le diverse fonti di disuguaglianza in passi successivi e otteniamo la scomposizione dell'indice sottraendo progressivamente le aree ottenute nelle diverse fasi.

- 1) In una prima fase introduciamo la disuguaglianza *between groups*, dividendo le osservazioni nei sottogruppi e attribuendo ad ogni osservazione la media del sottogruppo a cui appartiene. Indicheremo con $B_B(q)$ la curva di Bonferroni relativa a questa distribuzione. L'argomento q della curva è il rango degli individui nella distribuzione del reddito definita rispetto ad un ordinamento "lessicografico": prima le osservazioni vengono ordinate secondo la loro media di gruppo e successivamente, in ogni gruppo, le osservazioni vengono ordinate in ordine non crescente rispetto al loro reddito. Le ordinate della curva al percentile q corrispondono, quindi, al rapporto tra le cumulate delle medie di gruppo fino a q e la media μ della distribuzione.

L'area A_B si ottiene sottraendo l'area sottostante la curva $B_B(q)$ all'area di equidistribuzione, ovvero l'area sottesa la curva $B(q) = 1$ ¹⁴, per ogni q

$$A_B = \int_0^1 [1 - B_B(q)] dq.$$

- 2) Si introduce, quindi, la componente *within* della disuguaglianza assegnando ad ogni osservazione il suo reddito, pur mantenendo il particolare ordinamento imposto al punto 1. Si ottiene la curva di concentrazione

¹⁴ In caso di equidistribuzione $L(p) = p$ da cui, essendo $B(p) = L(p) / p$, $B(p) = 1$.

$C_{Bonf}(q)$, ovvero la curva di Bonferroni calcolata sulle osservazioni ordinate rispetto all'ordinamento "lessicografico". Le ordinate di questa curva, al percentile q , corrispondono al rapporto tra la media delle prime nq osservazioni e la media della distribuzione.

L'area A_W si ottiene sottraendo l'area sottostante la curva $C_{Bonf}(q)$ all'area di equidistribuzione, ovvero l'area sottesa a $B_B(q)$, per ogni q

$$A_W = \int_0^1 [B_B(q) - C_{Bonf}(q)] dq.$$

3) Il passo finale consiste nell'ordinare le osservazioni come nella distribuzione originale, isolando quindi l'effetto dell'*overlapping* tra gruppi. Si ottiene la curva di Bonferroni $B(q)$ le cui ordinate per ogni q sono pari al rapporto tra la media parziale fino a q e la media della distribuzione.

L'area A_O si ottiene, infine, come differenza tra le curve $C_{Bonf}(q)$ e la curva di Bonferroni $B(q)$

$$A_O = \int_0^1 [C(q) - B(q)] dq.$$

Dimostriamo che $I_B = A_B + A_W + A_O$ con $A_B = B_{BET_means}$, $A_W = B_{WITH} + B_{residualA_W}$, $A_O = OV$. Per costruzione $A_B = B_{BET_means}$. Calcoliamo l'area A_W isolandone i due termini B_{WITH} e $B_{residualA_W}$.

Consideriamo il sottogruppo h in cui sia definita la curva di Bonferroni $B_h(p_h) = \frac{L_h(p_h)}{p_h}$, essendo p_h il rango delle unità nel gruppo h che, per l'unità j -esima, è pari a $p_h = j/n_h$. L'unità di rango p_h nel sottogruppo h -simo ha rango q nella distribuzione originale essendo

$$q = \frac{\sum_{i \leq h-1} n_i + p_h n_h}{n}.$$

La curva di concentrazione $C_{Bonf}(q)$ è definita come il rapporto tra la media delle prime nq unità e la media complessiva.

Ne segue che

$$C_{Bonf}(q) = \left[\frac{1}{\mu} \frac{\sum_{i \leq nq} n_i \mu_i + n_h \mu_h L_h(p_h)}{nq} \right]$$

in cui $L_h(p_h)$ rappresenta la curva di Lorenz al percentile p_h , ovvero la quota di reddito del gruppo h detenuta dagli individui con reddito inferiore o uguale al reddito dell'individuo di rango p_h .

La curva $B_B(q)$ è invece definita dal rapporto tra la media delle prime nq unità, nel caso in cui ogni unità possenga il reddito medio del sottogruppo, e la media generale

$$B_B(q) = \left[\frac{1}{\mu} \frac{\sum_{i \leq nq} n_i \mu_i + n_h \mu_h p_h}{nq} \right]$$

Moltiplicando entrambe le curve per $n\mu$ e sottraendole la seconda dalla prima otteniamo

$$n\mu[B_B(q) - C(q)] = n_h \mu_h \frac{(p_h - L_h(p_h))}{q}.$$

Dall'espressione di q ricaviamo $dq = (n_h/n) dp_h$ da cui, moltiplicando per dq entrambi i membri, segue

$$n\mu[B_B(q) - C(q)]dq = \frac{n_h^2 \mu_h}{n} \frac{(p_h - L_h(p_h))}{q} dp_h.$$

A questo punto, integrando tra 0 e 1, rispetto a p_h , nei sottogruppi e facendo scorrere l'indice di gruppo h – il che equivale ad integrare per q che varia tra 0 e 1 – otteniamo

$$\begin{aligned} n\mu A_W &= \sum_h (n_h^2 \mu_h / n) \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{q} dp_h = \sum_h (n_h^2 \mu_h / n) \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{q} \frac{p_h}{p_h} dp_h = \\ &= \sum_h (n_h^2 \mu_h / n) \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{p_h} \frac{p_h}{q} dp_h \pm \sum_h (n_h^2 \mu_h / n) \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{p_h} dp_h. \end{aligned}$$

Posto $v_h = \frac{n_h}{n}$ e $w_h = \frac{n_h \mu_h}{n\mu}$ si ha

$$A_W = \sum_h v_h w_h n\mu \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{p_h} dp_h + \sum_h v_h w_h n\mu \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{p_h} \left(\frac{p_h}{q} - 1\right) dp_h$$

da cui dividendo entrambi i membri per $n\mu$

$$\begin{aligned} A_W &= \sum_h v_h w_h \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{p_h} dp_h + \sum_h v_h w_h \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{p_h} \left(\frac{p_h}{q} - 1\right) dp_h = \\ &= B_{WITH} + B_{residualA_W}. \end{aligned}$$

Riportando l'espressione per A_W nel discreto abbiamo

$$A_W = \sum_{p=1}^K v_p w_p I_B^p + \sum_{p=1}^K v_p w_p I_{Breranking}^p$$

Entrambe le componenti della A_W sono, quindi, ottenute come somma degli indici di Bonferroni calcolati in ciascun sottogruppo, ponderati per un coefficiente che include le quote di reddito e quelle della popolazione del sottogruppo. Gli indici *reranking* però, a differenza degli I_B^p sono calcolati “riscalando” la curva di Bonferroni e l'area che definisce l'indice in modo da tener conto che, suddividendo la popolazione in sottogruppi, le unità hanno un rango diverso da quello che avevano nella distribuzione originale.

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
 I_{Breranking}^P &= \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{p_h} \left(\frac{p_h}{q} - 1 \right) dp_h = \int_0^1 \left[1 - \frac{L_h(p_h)}{p_h} \right] \left(\frac{p_h}{q} - 1 \right) dp_h = \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{p_h}{q} - 1 \right) dp_h - \int_0^1 \frac{L_h(p_h)}{p_h} \left(\frac{p_h}{q} - 1 \right) dp_h = \\
 &= \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \left(\frac{p_h}{q} - 1 \right) - \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \left(\frac{p_h}{q} - 1 \right) \frac{\mu_{[i]}}{\mu_h} \quad \text{con} \quad \frac{p_h}{q} = \frac{i/n_h}{\left(\sum_{j \leq h-1} n_j + i \right) / n}.
 \end{aligned}$$

La presenza del residuo dipende dalla proprietà di *positional transfer sensitivity* di cui notoriamente gode l'indice di Bonferroni (Aaberge, 2000), ovvero dal fatto che l'indice non è invariante rispetto alle replicazioni (Giorgi, 1998; Chakravarty, 2005; Barcena e Imedio, 2008).

La componente residuale $B_{residualA_w}$ rappresenta, quindi, l'effetto del rango delle osservazioni sul calcolo dell'indice di Bonferroni. Ricordiamo che l'indice può essere espresso come combinazione lineare delle unità con pesi decrescenti al crescere del rango¹⁵ (Tarsitano, 1990).

$$I_B = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i} \quad \text{con} \quad w_i = 1 - \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}; \quad w_{i+1} = w_i + \frac{1}{i}; \quad \sum_{i=1}^n w_i$$

Tali pesi dipendono dalla posizione delle unità nella distribuzione del reddito, posizione che come vedremo meglio oltre, diventano "relative" se si considera il calcolo dell'indice nei sottogruppi.

Per analizzare il ruolo del residuo è utile confrontare la scomposizione dell'indice di Bonferroni con quella dell'indice di Gini (Lambert e Aronson, 1993; Silber, 1989)).

¹⁵ A questo proposito, si vedano le relazioni tra sistemi di ponderazione negli indici di Gini, Bonferroni e De Vergottini, basati sul rango delle unità, e presentati nel Capitolo 2.

Per l'indice del Gini vale

$$I_G = G_{BET_means} + \sum_h v_h w_h G_h + OV$$

In questo caso la somma ponderata degli indici calcolati nei sottogruppi restituisce l'area A_w . Infatti, la ponderazione tiene conto del fatto che nel calcolare i sotto-indici cambiano i pesi relativi delle osservazioni che, piuttosto che essere divise per $n\mu$, vengono rapportate a $n_h\mu_h$. Nel caso dell'indice di Bonferroni, tuttavia, oltre a tener conto delle diverse numerosità e delle medie nei sottogruppi si deve tener conto anche del fatto che variano i ranghi. Pertanto l'area A_w si ottiene come somma della componente *within* e di un residuo che corregge il peso degli individui modificato nella suddivisione in sottogruppi.

3.3 La scomposizione dell'indice di De Vergottini

Consideriamo l'indice di De Vergottini

$$V(x) = \int_0^1 \frac{1-L(p)}{1-p} dp - 1 = \int_0^1 \frac{[p-L(p)]}{1-p} dp \quad (3.3)$$

PROP. 2 Per l'indice di De Vergottini (3.3), definite le tre aree

$$A_B = \int_0^1 [V_B(q) - 1] dq$$

$$A_W = \int_0^1 [C_{DeVe}(q) - V_B(q)] dq$$

$$A_O = \int_0^1 [B(q) - C_{DeVe}(q)] dq$$

si ha

$$I_V = A_B + A_W + A_O$$

con

$$A_B = V_{BET_means}, \quad A_W = V_{WITH} + V_{residualA_W}, \quad A_O = OV$$

dove V_{BET_means} è il valore dell'indice di De Vergottini calcolato nell'ipotesi in cui ogni individuo possenga il reddito medio del sottogruppo a cui appartiene, la

componente within $V_{WITH} = \sum_{h=1}^K v_h w_h I_V^h$ si ottiene come somma degli indici di De

Vergottini calcolati in ciascun sottogruppo, ponderati per un coefficiente che include le quote di reddito e quelle della popolazione del sottogruppo e $V_{residualA_W}$ tiene conto del ruolo del rango delle osservazioni nel calcolo dell'indice di De Vergottini. *OV*, infine, misura il grado di sovrapposizione tra le distribuzioni del reddito nei sottogruppi.

Dim) Ricordiamo, prima di procedere con la scomposizione, che in questo caso $M_i \geq \mu$ per $i=1, \dots, n$. Pertanto la linea di equi-distribuzione giace al di sotto delle curve $V(p)$, $V_B(p)$ e $C_{DeVe}(q)$.

Analogamente a quanto fatto per l'indice di Bonferroni dimostriamo che

$$I_V = V_{WITH} + V_{BET_means} + V_{residualA_W} + OV.$$

Per costruzione $A_B = V_{BET_means}$. Calcoliamo l'area A_W isolandone i due termini V_{WITH} e $V_{residualA_W}$.

Consideriamo il sottogruppo h in cui sia definita la curva di De Vergottini

$$V_h(p_h) = \frac{1 - L_h(p_h)}{1 - p_h} \quad \text{dove } p_h \text{ è il rango delle unità nel gruppo } h \text{ che, per l'unità } j\text{-esima, è } p_h = j / n_h.$$

L'unità di rango p_h nel sottogruppo h -simo ha rango q nella distribuzione originale, essendo

$$q = \frac{\sum_{i \leq h-1} n_i + p_h n_h}{n}.$$

La curva di concentrazione $C_{DeVe}(q)$ è definita come il rapporto tra la media delle ultime $n(1-q)$ unità, ovvero delle unità che posseggono più del reddito posseduto dall'unità di rango 1, e la media complessiva.

Ne segue che

$$C_{DeVe}(q) = \left[\frac{1}{\mu} \frac{\sum_{i > h} n_i \mu_i + n_h \mu_h (1 - L_h(p_h))}{n(1-q)} \right].$$

Si osservi che dal momento che $L_h(p_h)$ rappresenta la curva di Lorenz al percentile p_h , ovvero la quota di reddito del gruppo h che posseggono gli individui con reddito

inferiore o uguale al reddito dell'individuo di rango p_h , $1 - L_h(p_h)$ rappresenta la quota di individui che posseggono un reddito superiore all'individuo di rango p_h .

La curva $V_B(q)$ è, invece, definita dal rapporto tra la media delle ultime $n(1 - q)$ unità nel caso in cui ogni unità possenga il reddito medio del sottogruppo e la media della distribuzione

$$V_B(q) = \left[\frac{1}{\mu} \frac{\sum_{i>h} n_i \mu_i + n_h \mu_h (1 - p_h)}{n(1 - q)} \right].$$

Moltiplicando entrambe le curve per $n\mu$ e sottraendole tra loro otteniamo

$$n\mu [C(q) - V_B(q)] = n_h \mu_h \frac{(p_h - L_h(p_h))}{1 - q}.$$

Dall'espressione di q ricaviamo $dq = (n_h / n) dp_h$. Se moltiplichiamo entrambi e membri per dq abbiamo

$$n\mu [C(q) - V_B(q)] dq = \frac{n_h^2 \mu_h}{n} \frac{(p_h - L_h(p_h))}{1 - q} dp_h.$$

Ora integrando, rispetto a p_h , nei sottogruppi tra 0 e 1 e facendo scorrere l'indice di gruppo h - il che equivale ad integrare per q che varia tra 0 e 1 - otteniamo

$$\begin{aligned} n\mu A_w &= \sum_h (n_h^2 \mu_h / n) \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{1 - q} dp_h = \sum_h (n_h^2 \mu_h / n) \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h)) (1 - p_h)}{(1 - q) (1 - p_h)} dp_h = \\ &= \sum_h (n_h^2 \mu_h / n) \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h)) (1 - p_h)}{(1 - p_h) (1 - q)} dp_h \pm \sum_h (n_h^2 \mu_h / n) \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{(1 - p_h)} dp_h. \end{aligned}$$

Posto $v_h = \frac{n_h}{n}$ e $w_h = \frac{n_h \mu_h}{n \mu}$ si ha

$$A_W = \sum_h v_h w_h n \mu \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{(1 - p_h)} dp_h + \sum_h v_h w_h n \mu \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{(1 - p_h)} \left(\frac{1 - p_h}{1 - q} - 1 \right) dp_h$$

da cui, dividendo entrambi i membri per $n \mu$,

$$\begin{aligned} A_W &= \sum_h v_h w_h \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{(1 - p_h)} dp_h + \sum_h v_h w_h \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{(1 - p_h)} \left(\frac{1 - p_h}{1 - q} - 1 \right) dp_h = \\ &= V_{WITH} + V_{residualA_W}. \end{aligned}$$

Riportando l'espressione per A_W nel discreto abbiamo

$$A_W = \sum_{p=1}^K v_p w_p I_V^p + \sum_{p=1}^K v_p w_p I_V^p{}_{Vreranking}.$$

Entrambe le componenti della A_W sono quindi ottenute come somma degli indici I_V calcolati in ciascun sottogruppo, ponderati per un coefficiente che include le quote di reddito e quelle della popolazione del sottogruppo. Analogamente a quanto osservato per l'indice di Bonferroni, gli indici *reranking* sono calcolati “riscaldando” la curva $V(p)$, e l'area che definisce l'indice, in modo da tener conto, che nella suddivisione della popolazione in sottogruppi, le unità hanno un rango diverso da quello che avevano nella distribuzione originale.

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
I_{Vreranking}^p &= \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h))}{(1 - p_h)} \left(\frac{1 - p_h}{1 - q} - 1 \right) dp_h = \\
&= \int_0^1 \frac{(p_h - L_h(p_h) \pm 1)}{(1 - p_h)} \left(\frac{1 - p_h}{1 - q} - 1 \right) dp_h = \int_0^1 \left[\frac{(1 - L_h(p_h))}{(1 - p_h)} - 1 \right] \left(\frac{1 - p_h}{1 - q} - 1 \right) dp_h = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(1 - L_h(p_h))}{(1 - p_h)} \left(\frac{1 - p_h}{1 - q} - 1 \right) \right) dp_h - \int_0^1 \left(\frac{1 - p_h}{1 - q} - 1 \right) dp_h = \\
&= \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \left(\frac{1 - p_h}{1 - q} - 1 \right) \frac{M_i}{\mu_h} - \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \left(\frac{1 - p_h}{1 - q} - 1 \right) \text{ con } \frac{1 - p_h}{1 - q} = \frac{1 - i/n_h}{1 - \frac{\left(\sum_{j \leq h-1} n_j + i \right)}{n}}.
\end{aligned}$$

Anche in questo caso il residuo rappresenta l'effetto del rango delle osservazioni sul calcolo dell'indice di De Vergottini. Nel confronto con la scomposizione dell'indice di Gini valgono le stesse considerazioni fatte sopra per l'indice di Bonferroni: anche in questo caso, nel ponderare gli indici calcolati nei sottogruppi si deve tener conto sia della variazione dei pesi relativi delle osservazioni le quali, piuttosto che essere divise per $n\mu$, vengono rapportate a $n_h\mu_h$, sia del fatto che variano i ranghi. Pertanto, l'area A_w si ottiene come somma della componente *within* e di un residuo che corregge il peso che è stato modificato nella suddivisione in sottogruppi.

3.4 Quadro di sintesi per la scomposizione degli indici

Nei prospetti che seguono presentiamo un quadro riassuntivo delle componenti ottenute per i tre indici applicando il metodo della scomposizione per aree.

	Between means	Within	Residuo (Overlapping)
Gini	$2 \int_0^1 [q - L_B(q)] dq$	$2 \int_0^1 [L_B(q) - C_{Lorenz}(q)] dq$	$2 \int_0^1 [C_{Lorenz}(q) - L(q)] dq$
Bonferroni	$\int_0^1 [1 - B_B(q)] dq = \int_0^1 \left[1 - \frac{L_B(q)}{q} \right] dq$ $= \int_0^1 \left[\frac{1}{q} (q - L_B(q)) \right] dq$	$\int_0^1 [B_B(q) - C_{Bonf}(q)] dq =$ $= \int_0^1 \left[\frac{L_B(q)}{q} - \frac{C_{Lorenz}(q)}{q} \right] dq =$ $= \int_0^1 \left[\frac{1}{q} (L_B(q) - C_{Lorenz}(q)) \right] dq$	$\int_0^1 [C_{Bonf}(q) - B(q)] dq =$ $= \int_0^1 \left[\frac{C_{Lorenz}(q)}{q} - \frac{L(q)}{q} \right] dq =$ $= \int_0^1 \left[\frac{1}{q} (C_{Lorenz}(q) - L(q)) \right] dq$
De Vergottini	$\int_0^1 [V_B(q) - 1] dq =$ $= \int_0^1 \left[\frac{1 - L_B(q)}{1 - q} - 1 \right] dq =$ $= \int_0^1 \left[\frac{1}{1 - q} (q - L_B(q)) \right] dq$	$\int_0^1 [C_{DeVe}(q) - V_B(q)] dq =$ $= \int_0^1 \left[\frac{1 - C_{Lorenz}(q)}{1 - q} - \frac{1 - L_B(q)}{1 - q} \right] dq =$ $= \int_0^1 \left[\frac{1}{1 - q} (L_B(q) - C_{Lorenz}(q)) \right] dq$	$\int_0^1 [V(q) - C_{DeVe}(q)] dq =$ $= \int_0^1 \left[\frac{1 - L(q)}{1 - q} - \frac{1 - C_{DeVe}(q)}{1 - q} \right] dq =$ $= \int_0^1 \left[\frac{1}{1 - q} (C_{DeVe}(q) - L(q)) \right] dq$

Nel caso in cui i gruppi non si sovrappongono si ha $C_{Lorenz}(q) = L(q)$, $C_{Bonf}(q) = B(q)$ e $C_{DeVe}(q) = V(q)$. Pertanto l'*overlapping* è nullo e la componente *within* va ricalcolata di conseguenza.

	Between means (A_B)	Within (A_w)
Gini	$2 \int_0^1 [q - L_B(q)] dq$	$2 \int_0^1 [L_B(q) - L(q)] dq$
Bonferroni	$\int_0^1 [1 - B_B(q)] dq = \int_0^1 \left[1 - \frac{L_B(q)}{q} \right] dq =$ $= \int_0^1 \left[\frac{1}{q} (q - L_B(q)) \right] dq$	$\int_0^1 [B_B(q) - B(q)] dq = \int_0^1 \left[\frac{L_B(q)}{q} - \frac{L(q)}{q} \right] dq =$ $= \int_0^1 \left[\frac{1}{q} (L_B(q) - L(q)) \right] dq$
De Vergottini	$\int_0^1 [V_B(q) - 1] dq = \int_0^1 \left[\frac{1 - L_B(q)}{1 - q} - 1 \right] dq =$ $= \int_0^1 \left[\frac{1}{1 - q} (q - L_B(q)) \right] dq$	$\int_0^1 [V(q) - V_B(q)] dq = \int_0^1 \left[\frac{1 - L(q)}{1 - q} - \frac{1 - L_B(q)}{1 - q} \right] dq =$ $= \int_0^1 \left[\frac{1}{1 - q} (L_B(q) - L(q)) \right] dq$

3.5 La scomposizione degli indici di Gini, Bonferroni e De Vergottini nei due sottogruppi non sovrappontesi x^- e x^+

Applichiamo la formule ottenute per la scomposizione ad un caso particolare utile nella costruzione dell'indice di polarizzazione. Consideriamo i due gruppi x^- e x^+ entrambi di numerosità $n/2$: il primo gruppo è costituito dagli individui che hanno reddito inferiore a $m(x)$ e il secondo gruppo da quelli che hanno reddito superiore a $m(x)$.

In questo caso si osservi che i due gruppi non solo non si sovrappongono, ma rimangono ordinati come nella distribuzione originale. Ne segue che applicando le fasi descritte precedentemente per scomporre l'indice, la reintroduzione della disuguaglianza *within* riproduce l'ordinamento originale delle osservazioni e di conseguenza, per l'indice di Gini si ha $C_{Lorenz}(q) = L(q)$, per quello di Bonferroni $C_{Bonf}(q) = L(q)$ e $C_{DeVe}(q) = L(q)$ per quello di De Vergottini.

3.5.1 La scomposizione per l'indice di Gini

Per l'indice di Gini, essendo $C_{Lorenz}(q) = L(q)$ si ha $A_o = 0$ e

$$A_w = \int_0^1 [L_B(q) - L(q)] dq.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} G &= G_{BET_means} + G_{WITH} = A_B + A_w = \\ &= 2 \int_0^1 (q - L_B(q)) dq + \int_0^1 (L_B(q) - L(q)) dq, \quad q \in (0,1) \end{aligned}$$

da cui, riportando la formula in termini discreti

$$G = G_{BET_means} + G_{WITH} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - L_B \left(\frac{i}{n} \right) \right) + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(L_B \left(\frac{i}{n} \right) - L \left(\frac{i}{n} \right) \right).$$

Calcoliamo nel dettaglio le componenti.

Il termine G_{BET_means} si calcola sostituendo ai redditi dei singoli il reddito medio del sottogruppo. Riprendendo le formule generali esposte nel paragrafo precedente scriviamo la componente *within* in termini discreti

$$G_{BET_means} = 1 - \frac{2}{n(n+1)\mu(x)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \mu_j(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{\mu_i(x) - \mu_j(x)}{n\mu(x)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \in \Omega_i}^i \frac{\mu_i(x) - \mu_j(x)}{n\mu(x)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \notin \Omega_i}^i \frac{\mu_i(x) - \mu_j(x)}{n\mu(x)}$$

dove con $j \in \Omega_i$ si intendono le unità j che appartengono allo stesso gruppo cui appartiene l'unità i e con $j \notin \Omega_i$ le unità j che non appartengono allo stesso gruppo cui

appartiene l'unità i (per le quali la differenza tra le medie è nulla) e $\mu_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k x_s$.

Nel nostro caso considerando i due sottogruppi non sovrappontesi x^- e x^+ , con media rispettivamente pari a $\mu(x^-)$ e $\mu(x^+)$ si ha che se $j \in \Omega_i$, allora $\mu_j(x) = \mu_i(x)$ da cui

$$G_{BET_means} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq \Omega_i}^i \frac{\mu_i(x) - \mu_j(x)}{n\mu(x)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1, j \neq \Omega_i}^i \frac{\mu_i(x) - \mu_j(x)}{n\mu(x)} + \frac{1}{2} \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sum_{j=1, j \neq \Omega_i}^i \frac{\mu_i(x) - \mu_j(x)}{n\mu(x)}.$$

Inoltre, per n pari, se $1 \leq i \leq n/2$, i e j appartengono allo stesso gruppo e $\mu_j(x) = \mu_i(x)$. Per $i > n/2$, invece, i e j appartengono a gruppi diversi solo per $j \leq n/2$.

Si ha quindi

$$G_{BET_means} = \frac{1}{2} \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sum_{j=1, j \neq \Omega_i}^i \frac{\mu_i(x) - \mu_j(x)}{n\mu(x)} = \frac{1}{2n\mu(x)} \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sum_{j=1, j \neq \Omega_i}^i (\mu_i(x) - \mu_j(x)) \quad \text{con}$$

$$\mu_i(x) = \mu(x^+) \quad \text{per } i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n; \quad \mu_j(x) = \mu(x^-) \quad \text{per } j = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad \text{e}$$

$$\mu_j(x) = \mu(x^+) \quad \text{per } j = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$$

Segue che per n pari

$$\begin{aligned} G_{BET_means} &= \frac{1}{2n\mu(x)} \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sum_{j=1, j \leq n/2}^i [\mu(x^+) - \mu(x^-)] = \frac{1}{2n\mu(x)} \frac{n}{2} (\mu(x^+) - \mu(x^-)) \\ &= \frac{1}{4\mu(x)} (\mu(x^+) - \mu(x^-)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Calcoliamo esplicitamente la componente *within*, considerando le due classi di reddito x^- e x^+ .

Si trova facilmente che per n pari

$$\begin{aligned}
G_{WITH} &= \frac{(n/2)^2}{n} \frac{\mu(x^-)}{n\mu(x)} I_G^{n/2}(x^-) + \frac{(n/2)^2}{n} \frac{\mu(x^+)}{n\mu(x)} I_G^{n/2}(x^+) = \frac{1}{4} \frac{\mu(x^-)}{\mu(x)} I_G^{n/2}(x^-) + \frac{1}{4} \frac{\mu(x^+)}{\mu(x)} I_G^{n/2}(x^+) = \\
&= \frac{1}{4} \frac{\mu(x^-)}{\mu(x)} \left[1 - \frac{2}{n/2(n/2+1)\mu(x^-)} \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j \right] + \frac{1}{4} \frac{\mu(x^+)}{\mu(x)} \left[1 - \frac{2}{n/2(n/2+1)\mu(x^+)} \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j \right] = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mu(x^-)}{\mu(x)} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n/2(n/2+1)\mu(x^-)} \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j \right] + \frac{1}{2} \frac{\mu(x^+)}{\mu(x)} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n/2(n/2+1)\mu(x^+)} \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j \right] = \\
&= \frac{1}{2\mu(x)} \left[\frac{1}{2} \mu(x^-) - \frac{1}{n/2(n/2+1)} \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j \right] + \frac{1}{2\mu(x)} \left[\frac{1}{2} \mu(x^+) - \frac{1}{n/2(n/2+1)} \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j \right].
\end{aligned} \tag{3.5}$$

3.5.2 La scomposizione per l'indice di Bonferroni

Per l'indice di Bonferroni, ricordando che $C_{Bonf}(q) = B(q)$, si ha $A_0 = 0$ e

$$A_W = \int_0^1 [B_B(q) - B(q)] dq.$$

Abbiamo quindi

$$B = B_{BET_means} + B_{WITH} = A_B + A_W = \int_0^1 \frac{1}{q} (q - L_B(q)) dq + \int_0^1 \frac{1}{q} (L_B(q) - L(q)) dq, \quad q \in (0,1)$$

da cui, riportando la formula in termini discreti

$$B = B_{BET_means} + B_{WITH} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i/n)} \left(\frac{i}{n} - L_B \left(\frac{i}{n} \right) \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(i/n)} \left(L_B \left(\frac{i}{n} \right) - L \left(\frac{i}{n} \right) \right).$$

Nel dettaglio, il termine B_{BET_means} si calcola sostituendo ai redditi dei singoli il reddito medio del sottogruppo.

$$B_{BET_means} = 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{\mu_j(x)}{in\mu(x)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{\mu_i(x) - \mu_j(x)}{in\mu(x)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \in \Omega_i}^i \frac{\mu_i(x) - \mu_j(x)}{in\mu(x)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \notin \Omega_i}^i \frac{\mu_i(x) - \mu_j(x)}{in\mu(x)}$$

dove con $j \in \Omega_i$ si intendono le unità j che appartengono allo stesso gruppo cui appartiene l'unità i , con $j \notin \Omega_i$ le unità j che non appartengono allo stesso gruppo cui appartiene l'unità i e $\mu_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k x_s$.

Nel nostro caso considerando i due sottogruppi non sovrappontesi x^- e x^+ , con media rispettivamente pari a $\mu(x^-)$ e $\mu(x^+)$ si ha che se $j \in \Omega_i$ allora $\mu_j(x) = \mu_i(x)$ da cui

$$B_{BET_means} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \notin \Omega_i}^i \frac{\mu_i(x) - \mu_j(x)}{in\mu(x)} = \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1, j \notin \Omega_i}^i \frac{\mu_i(x) - \mu_j(x)}{in\mu(x)} + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sum_{j=1, j \notin \Omega_i}^i \frac{\mu_i(x) - \mu_j(x)}{in\mu(x)}.$$

Inoltre, per n pari, se $1 \leq i \leq n/2$, i e j appartengono allo stesso gruppo e $\mu_j(x) = \mu_i(x)$. Per $i > n/2$, invece, i e j appartengono a gruppi diversi solo per $j \leq n/2$.

Si ha quindi

$$B_{BET_means} = \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sum_{j=1, j \notin \Omega_i}^i \frac{\mu_i(x) - \mu_j(x)}{in\mu(x)} = \frac{1}{n\mu(x)} \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \frac{1}{i} \sum_{j=1, j \notin \Omega_i}^i (\mu_i(x) - \mu_j(x)) \quad \text{con}$$

$$\mu_i(x) = \mu(x^+) \quad \text{per } i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n; \quad \mu_j(x) = \mu(x^-) \quad \text{per } j = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad \text{e}$$

$$\mu_j(x) = \mu(x^+) \quad \text{per } j = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$$

Segue che per n pari

$$\begin{aligned} B_{BET_means} &= \frac{1}{n\mu(x)} \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \frac{1}{i} \sum_{j=1, j \leq n/2}^i [\mu(x^+) - \mu(x^-)] = \frac{1}{n\mu(x)} \frac{n}{2} (\mu(x^+) - \mu(x^-)) \left(\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \frac{1}{i} \right) = \\ &= \frac{1}{n\mu(x)} \frac{n}{2} (\mu(x^+) - \mu(x^-)) \left(\sum_{j=1}^{n/2} \frac{1}{n/2+j} \right) = \frac{1}{2\mu(x)} (\mu(x^+) - \mu(x^-)) \left(\sum_{j=1}^{n/2} \frac{1}{n/2+j} \right) \quad (3.6) \end{aligned}$$

Ricordiamo che per l'indice di Bonferroni, a differenza di quanto accade per l'indice di Gini, il termine *within* è comprensivo di un residuo. Riprendendo l'espressione per l'area A_w trovata precedentemente, calcoliamo la componente *within*, considerando le due classi di reddito x^- e x^+ . Si ha per n pari¹⁶:

$$\begin{aligned}
B_{\text{within}} &= \frac{(n/2)^2}{n} \frac{\mu(x^-)}{n\mu(x)} I_B^{n/2}(x^-) + \frac{(n/2)^2}{n} \frac{\mu(x^+)}{n\mu(x)} I_B^{n/2}(x^+) = \\
&= \frac{1}{4} \frac{\mu(x^-)}{\mu(x)} I_B^{n/2}(x^-) + \frac{1}{4} \frac{\mu(x^+)}{\mu(x)} I_B^{n/2}(x^+) = \frac{1}{4} \frac{\mu(x^-)}{\mu(x)} \left[1 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{\mu_i(x^-)}{\mu(x^-)} \right] + \frac{1}{4} \frac{\mu(x^+)}{\mu(x)} \left[1 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{\mu_i(x^+)}{\mu(x^+)} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mu(x^-)}{\mu(x)} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{\mu_i(x^-)}{\mu(x^-)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\mu(x^+)}{\mu(x)} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{\mu_i(x^+)}{\mu(x^+)} \right] = \\
&= \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{n}{2} \mu(x^-) - \sum_{i=1}^{n/2} \mu_i(x^-) \right] + \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{n}{2} \mu(x^+) - \sum_{i=1}^{n/2} \mu_i(x^+) \right].
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Per il residuo, invece, essendo $\mu(x^-) \leq \mu(x^+)$ e i sottogruppi disgiunti, l'ordinamento "lessicografico" coincide con quello originale e, di conseguenza, l'*overlapping* è nulla e la curva di concentrazione $C_{\text{Bonf}}(q)$ coincide con la curva di Bonferroni $B(q)$.

Il residuo è pari a

$$\begin{aligned}
B_{\text{residualAW}} &= \sum_{h=1}^2 v_h w_h I^h_{\text{Breranking}} = \sum_{h=1}^2 v_h w_h \left[\frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \left(\frac{p_h}{q} - 1 \right) - \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \left(\frac{p_h}{q} - 1 \right) \frac{\mu_{[i]}}{\mu_h} \right] \\
\text{con } \frac{p_h}{q} &= \frac{i/n_h}{\left(\sum_{j \leq h-1} n_j + i \right) / n}
\end{aligned}$$

¹⁶ Per n dispari abbiamo

$$\begin{aligned}
B_{\text{within}} &= \frac{(n-1/2)^2}{n^2} \frac{\mu(x^-)}{\mu(x)} I_B^{(n-1)/2}(x^-) + \frac{(n-1/2)^2}{n^2} \frac{\mu(x^+)}{\mu(x)} I_B^{(n-1)/2}(x^+) = \\
&= \frac{(n-1)^2}{2n} \frac{\mu(x^-)}{\mu(x)} I_B^{(n-1)/2}(x^-) + \frac{(n-1)^2}{2n} \frac{\mu(x^+)}{\mu(x)} I_B^{(n-1)/2}(x^+)
\end{aligned}$$

$$\text{con } I_B^{(n-1)/2}(x^-) = 1 - \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \sum_{j=1}^i \frac{x_j}{i\mu(x^-)} \quad \text{e} \quad I_B^{(n-1)/2}(x^+) = 1 - \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \sum_{j=1}^i \frac{x_j}{i\mu(x^+)}.$$

Si noti che per n sufficientemente grande $((n-1)/2n)^2 \rightarrow 1/4$ e quindi le due espressioni coincidono.

Al di sotto della mediana il rango dell'unità i nel gruppo h è pari a $p_h = \frac{i}{n/2}$ mentre $q = i/n$, quindi le osservazioni mantengono il peso che avevano nella distribuzione originale. Al di sopra della mediana, invece, $q = \frac{1}{2} + \frac{i}{n}$ e il peso è pari a $\frac{i-n/2}{i+n/2}$. In $x+$ abbiamo, quindi, una successione crescente di pesi che varia in $(-1,0]$. L'effetto del *reranking*, ovvero la correzione apportata dal residuo, è tanto più forte quanto più l'osservazione è vicina alla mediana.

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
B_{\text{residualAW}} &= \frac{(n/2)^2}{n^2} \frac{\mu(x-)}{\mu(x)} \left[1 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{\mu_i(x-)}{\mu(x-)} \right] + \frac{(n/2)^2}{n^2} \frac{\mu(x+)}{\mu(x)} \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) \frac{\mu_i(x+)}{\mu(x+)} \right] = \\
&= \frac{1}{4} \frac{\mu(x-)}{\mu(x)} \left[1 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{\mu_i(x-)}{\mu(x-)} \right] + \frac{1}{4} \frac{\mu(x+)}{\mu(x)} \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) \frac{\mu_i(x+)}{\mu(x+)} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mu(x-)}{\mu(x)} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{\mu_i(x-)}{\mu(x-)} \right] + \frac{1}{2} \frac{\mu(x+)}{\mu(x)} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) \frac{\mu_i(x+)}{\mu(x+)} \right] = \\
&= \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{n}{2} \mu(x-) - \sum_{i=1}^{n/2} \mu_i(x-) \right] + \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\mu(x+) \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) - \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) \mu_i(x+) \right].
\end{aligned} \tag{3.8}$$

OSS. Si noti che

$$I_{\text{Breranking}}^{n/2}(x+) = \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) - \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) \frac{\mu_i(x+)}{\mu(x+)} \right] = \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) \left(1 - \frac{\mu_i(x+)}{\mu(x+)} \right) \right]$$

non è un indice di disuguaglianza.

E' facile verificare, infatti, che essendo $\mu_i(x+) < \mu(x+)$ e $\left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) < 0$,

$I_{\text{Breranking}}^{n/2}(x+) < 0$. Inoltre, considerando l'effetto di un trasferimento dall'unità di rango s all'unità di rango k , con $s > k$ si ha

$$\Delta I_{Breranking}^{n/2}(x+) = \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) \left(\frac{\mu_i^{t_0}(x+)}{\mu(x+)} - \frac{\mu_i^{t_1}(x+)}{\mu(x+)} \right) \right] = \frac{2}{n\mu(x+)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) (\mu_i^{t_0}(x+) - \mu_i^{t_1}(x+)) \right] =$$

$$= \frac{2}{n\mu(x+)} \left[-\alpha \cdot \sum_{i=k}^{s-1} \frac{1}{i} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) \right] > 0$$

essendo $\sum_{i=k}^{s-1} \frac{1}{i} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) < 0$.

3.5.3 La scomposizione per l'indice di De Vergottini

Per l'indice di De Vergottini si ha, analogamente a quanto osservato per l'indice di Gini e quello di Bonferroni, $C_{DeVe}(q) = V(q)$ e, di conseguenza, $A_0 = 0$ e

$$A_W = \int_0^1 [V(q) - V_B(q)] dq.$$

Abbiamo quindi

$$V = V_{BET_means} + V_{WITH} = A_B + A_W =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-q} (q - L_B(q)) dq + \int_0^1 \frac{1}{1-q} (L_B(q) - L(q)) dq, \quad q \in (0,1)$$

da cui, riportando la formula in termini discreti

$$V = V_{BET_means} + V_{WITH} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n}{(n-i)} \left(\frac{i}{n} - L_B \left(\frac{i}{n} \right) \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{n}{(n-i)} \left(L_B \left(\frac{i}{n} \right) - L \left(\frac{i}{n} \right) \right).$$

Il termine V_{BET_means} si ottiene sostituendo ai redditi dei singoli il reddito medio del sottogruppo.

Si ha

$$V_{BET_means} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{\mu_j(x)}{n(n-i+1)\mu(x)} - 1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{\mu_j(x) - \mu_i(x)}{n(n-i+1)\mu(x)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i, j \in \Omega_i} \frac{\mu_j(x) - \mu_i(x)}{n(n-i+1)\mu(x)} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i, j \notin \Omega_i} \frac{\mu_j(x) - \mu_i(x)}{n(n-i+1)\mu(x)}$$

dove con $j \notin \Omega_i$ si intendono le unità j che non appartengono allo stesso gruppo cui

appartiene l'unità i (altrimenti la differenza tra le medie sarebbe nulla) e

$$\mu_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^k x_s.$$

Se consideriamo i due sottogruppi non sovrappontesi x^- e x^+ , con media rispettivamente pari a $\mu(x^-)$ e $\mu(x^+)$ si ha che se $j \in \Omega_i$ allora $\mu_j(x) = \mu_i(x)$ da cui

$$V_{BET_means} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i, j \notin \Omega_i}^n \frac{\mu_j(x) - \mu_i(x)}{n(n-i+1)\mu(x)} = \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=i, j \notin \Omega_i}^n \frac{\mu_j(x) - \mu_i(x)}{n(n-i+1)\mu(x)} + \sum_{i=n/2+1}^n \sum_{j=i, j \notin \Omega_i}^n \frac{\mu_j(x) - \mu_i(x)}{n(n-i+1)\mu(x)}$$

Inoltre, per n pari, se $1 \leq i \leq n/2$, i e j appartengono a gruppi diversi per $j \geq n/2$. Per $i > n/2$, invece, i e j appartengono allo stesso gruppo e $\mu_j(x) = \mu_i(x)$.

Si ha quindi

$$V_{BET_means} = \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=i, j \notin \Omega_i}^n \frac{\mu_j(x) - \mu_i(x)}{n(n-i+1)\mu(x)} = \frac{1}{n\mu(x)} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{(n-i+1)} \sum_{j=i, j \notin \Omega_i}^n (\mu_j(x) - \mu_i(x))$$

con

$$\mu_i(x) = \mu(x^-) \quad \text{per } i = 1, \dots, \frac{n}{2}; \quad \mu_j(x) = \mu(x^-) \quad \text{per } j = 1, \dots, \frac{n}{2} \quad \text{e}$$

$$\mu_j(x) = \mu(x^+) \quad \text{per } j = \frac{n}{2} + 1, \dots, n.$$

Segue che per n pari

$$\begin{aligned} V_{BET_means} &= \frac{1}{n\mu(x)} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{(n-i+1)} \sum_{j=i, j \geq n/2}^n [\mu(x^+) - \mu(x^-)] = \frac{1}{n\mu(x)} \frac{n}{2} (\mu(x^+) - \mu(x^-)) \left(\sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{n-i+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2\mu(x)} (\mu(x^+) - \mu(x^-)) \left(\sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{n-i+1} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ricordiamo che per anche per l'indice di De Vergottini, il termine *within* è comprensivo di un residuo. Riprendendo l'espressione per l'area A_w trovata precedentemente, calcoliamo la componente *within*, considerando le due classi di reddito x^- e x^+ .

Si ha per n pari:

$$\begin{aligned}
V_{WHH} &= \frac{(n/2)^2}{n} \frac{\mu(x-)}{n\mu(x)} I_V^{n/2}(x-) + \frac{(n/2)^2}{n} \frac{\mu(x+)}{n\mu(x)} I_V^{n/2}(x+) = \\
&= \frac{1}{4} \frac{\mu(x-)}{\mu(x)} I_V^{n/2}(x-) + \frac{1}{4} \frac{\mu(x+)}{\mu(x)} I_V^{n/2}(x+) = \frac{1}{4} \frac{\mu(x-)}{\mu(x)} \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{M_i(x-)}{\mu(x-)} - 1 \right] + \frac{1}{4} \frac{\mu(x+)}{\mu(x)} \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{M_i(x+)}{\mu(x+)} - 1 \right] = \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mu(x-)}{\mu(x)} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{M_i(x-)}{\mu(x-)} - \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\mu(x+)}{\mu(x)} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{M_i(x+)}{\mu(x+)} - \frac{1}{2} \right] = \\
&= \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} M_i(x-) - \frac{n}{2} \mu(x-) \right] + \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} M_i(x+) - \frac{n}{2} \mu(x+) \right].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Per quanto riguarda il residuo, invece, essendo $\mu(x-) \leq \mu(x+)$ e i sottogruppi disgiunti, l'ordinamento "lessicografico" coincide con quello originale e, di conseguenza, l'*overlapping* è nulla e la curva di concentrazione $C_{DeVe}(q)$ coincide con la curva $V(q)$.

Il residuo è pari a

$$\begin{aligned}
V_{residualAW} &= \sum_{h=1}^2 v_h w_h I^{h}_{Vreranking} = \sum_{h=1}^2 v_h w_h \left[\frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \left(\frac{1-p_h}{1-q} - 1 \right) \frac{M_i}{\mu_h} - \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} \left(\frac{1-p_h}{1-q} - 1 \right) \right] \\
\text{con } \frac{1-p_h}{1-q} &= \frac{1-i/n_h}{1 - \frac{\left(\sum_{j \leq h-1} n_j + i \right)}{n}}
\end{aligned}$$

Al di sotto della mediana il rango dell'unità i nel gruppo h è pari a $p_h = \frac{i}{n/2}$ mentre

$q = i/n$ e il peso è pari a $\frac{i}{i-n}$. Al di sopra della mediana, invece, $q = \frac{1}{2} + \frac{i}{n}$ e le

osservazioni mantengono il peso che avevano nella distribuzione originale.

In $x-$ abbiamo, quindi, una successione decrescente di pesi negativi che converge a -1 quando $i = n/2$. Come per l'indice di Bonferroni, quindi, la correzione apportata dal residuo, è tanto più forte quanto più l'osservazione è vicina alla mediana.

Abbiamo

$$\begin{aligned}
V_{residualAW} &= \frac{(n/2)^2}{n^2} \frac{\mu(x-)}{\mu(x)} \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \binom{i}{i-n} \frac{M_i(x-)}{\mu(x-)} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \binom{i}{i-n} \right] + \frac{(n/2)^2}{n^2} \frac{\mu(x+)}{\mu(x)} \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{M_i(x+)}{\mu(x+)} - 1 \right] = \\
&= \frac{1}{4} \frac{\mu(x-)}{\mu(x)} \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \binom{i}{i-n} \frac{M_i(x-)}{\mu(x-)} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \binom{i}{i-n} \right] + \frac{1}{4} \frac{\mu(x+)}{\mu(x)} \left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \frac{M_i(x+)}{\mu(x+)} - 1 \right] = \\
&= \frac{1}{2\mu(x)} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \binom{i}{i-n} M_i(x-) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2} \binom{i}{i-n} \mu(x-) \right] + \frac{1}{2\mu(x)} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n/2} M_i(x+) - \frac{\mu(x+)}{2} \right] = \\
&= \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} \binom{i}{i-n} M_i(x-) - \sum_{i=1}^{n/2} \binom{i}{i-n} \mu(x-) \right] + \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} M_i(x+) - \frac{n}{2} \mu(x+) \right].
\end{aligned} \tag{3.11}$$

OSS. Si noti che

$$I_{Vreranking}^{n/2}(x-) = \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^{n/2} \binom{i}{i-n} \frac{M_i(x-)}{\mu(x-)} - \sum_{i=1}^{n/2} \binom{i}{i-n} \right] = \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^{n/2} \binom{i}{i-n} \left(\frac{M_i(x-)}{\mu(x-)} - 1 \right) \right]$$

non è un indice di disuguaglianza.

Infatti, $I_{Vreranking}^{n/2}(x-)$ è negativo essendo $M_i(x-) > \mu(x-)$ e $\binom{i}{i-n} < 0$. Inoltre, se consideriamo l'effetto di un trasferimento progressivo pari ad α dall'unità di rango s all'unità di rango k , con $s > k$ abbiamo

$$\Delta I_{Vreranking}^{n/2}(x-) = \frac{2}{n\mu(x-)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} \binom{i}{i-n} (M_i^{t_1}(x-) - M_i^{t_0}(x-)) \right] = \frac{2}{n\mu(x-)} \left[-\alpha \sum_{j=k+1}^{s-1} \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) \binom{j}{j-n} \right] > 0$$

essendo

$$\sum_{j=k+1}^{s-1} \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) \binom{j}{j-n} < 0.$$

Capitolo 4 - Proposte per l'indice di polarizzazione

Seguendo l'approccio descritto in Wolfson (1994, 1997) e Foster e Wolfson (1992, 2010) e generalizzato in Rodriguez e Salas (2003), proporremo un indice di polarizzazione basato sull'indice di concentrazione di Bonferroni (1930) e un indice basato sull'indice di concentrazione di De Vergottini (1950).

Come illustrato nel Capitolo 2, sia l'indice di Wolfson, sia quello di Rodriguez e Salas, misurano la polarizzazione come differenza tra componente della disuguaglianza *between* e componente *within*. Applicheremo, quindi, le scomposizioni degli indici di Gini, Bonferroni e De Vergottini, presentate nel capitolo precedente, al caso in cui si considerino i due sottogruppi non sovrappontisi degli individui che posseggono redditi inferiori al reddito mediano (x^-) e di quelli che posseggono almeno il reddito mediano (x^+).

Analizzeremo, in questo quadro, l'indice di Wolfson, che indicheremo con P_G , e di due nuovi indici proposti P_B e P_V , per verificare sotto quali condizioni questi sono coerenti con gli assiomi IB e IS e sono, pertanto, indici di polarizzazione.

4.1 L'indice di bipolarizzazione di Wolfson

Come osservato in Foster e Wofson (1992, 2010) e in Rodriguez e Salas (2003), l'indice di Wolfson può essere espresso come

$$\begin{aligned} P_G &= 2 \frac{\mu(x)}{m(x)} \left[G_{BET_means} - G_{WITH} \right] = 2 \frac{\mu(x)}{m(x)} (A_B - A_W) = \\ &= 2 \frac{\mu(x)}{m(x)} \left[2 \int_0^1 (q - L_B(q)) dq - 2 \int_0^1 (L_B(q) - L(q)) dq \right], \quad q \in (0,1) \end{aligned}$$

Sappiamo che, per costruzione, l'indice è coerente con la “seconda curva di polarizzazione”, ovvero misura un aumento di polarizzazione in seguito a trasferimenti progressivi all'interno del gruppi x^- e x^+ (*Increased Bipolarity* -

IB) e trasferimenti regressivi tra $x-$ e $x+$ (Increased Spread - IS). Dimostriamolo analiticamente, in questa sede, per confrontabilità con gli indici che proporremo in seguito.

PROP. 3 Considerata una popolazione di n individui con distribuzione del reddito $x = (x_1, \dots, x_n)$. P_G è sempre coerente con la “seconda curva di polarizzazione”.

Dim) Dimostriamo che l’indice aumenta in seguito ad un trasferimento IB. Indichiamo con t_1 il periodo successivo al trasferimento di reddito oggetto di analisi e con t_0 la situazione originaria e studiamo il segno di

$$\Delta P_G = P_G^{t_1} - P_G^{t_0} = \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left[\Delta G_{BET_means} - \Delta G_{WITH} \right]$$

con

$$\Delta G_{BET_means} = 2 \int_0^1 (q - L_B^1(q)) dq - 2 \int_0^1 (q - L_B^0(q)) dq = 2 \int_0^1 (L_B^0(q) - L_B^1(q)) dq$$

e

$$\begin{aligned} \Delta G_{WITH} &= 2 \int_0^1 (L_B^1(q) - L^1(q)) dq - 2 \int_0^1 (L_B^0(q) - L^0(q)) dq = \\ &= 2 \int_0^1 (L_B^1(q) - L_B^0(q)) dq - 2 \int_0^1 (L^1(q) - L^0(q)) dq = \\ &= -\Delta G_{BET_means} - 2 \int_0^1 (L^1(q) - L^0(q)) dq. \end{aligned}$$

da cui segue

$$\Delta P_G = \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left[2\Delta G_{BET_means} + 2 \int_0^1 (L^1(q) - L^0(q)) dq \right].$$

Sotto IB, un trasferimento progressivo di importo α su un solo lato della mediana (oppure su entrambi i segmenti, ma senza attraversare la mediana) ha come effetto $\Delta G_{BET_means} = 0$. I trasferimenti che non attraversano la mediana, infatti, sono tali da

mantenere invariati sia i redditi medi su ciascun segmento, sia la media generale $\mu(x)$. Segue, quindi, $L_B^t(q) = L_B^{t_0}(q), \quad \forall q \in [0,1]$.

Si ha, inoltre, $\Delta G_{WITH} \leq 0$. Infatti, essendo

$$\Delta G_{WITH} = -\Delta G_{BET_means} - 2 \int_0^1 (L^t(q) - L^{t_0}(q)) dq$$

un trasferimento progressivo sul segmento $x -$ della distribuzione del reddito ha come effetto una riduzione della disuguaglianza e, di conseguenza,

$\int_0^{1/2} (L^t(q) - L^{t_0}(q)) dq > 0$. Analogamente, un trasferimento progressivo su $x +$ è tale

che $\int_{1/2}^1 (L^t(q) - L^{t_0}(q)) dq > 0$.

Ne segue che, sotto IB, $\Delta P_G > 0$.

Valutiamo ora l'effetto di un Increasing Spread (IS), considerando un trasferimento regressivo di reddito pari ad α dall'individuo di rango s all'individuo di rango k ($s < k$). Utilizzeremo a questo scopo le formule della scomposizione applicate ai due sottogruppi $x -$ e $x +$ (si veda par. 3.5) per rendere esplicito il ruolo della posizione degli individui tra cui avviene il trasferimento sull'effetto dello stesso sull'indice di polarizzazione.

Osserviamo che a fronte del trasferimento il reddito medio al di sotto della mediana diminuisce di $\alpha/(n/2)$, mentre il reddito medio al di sopra della mediana aumenta di $\alpha/(n/2)$ ¹⁷.

¹⁷ Si osservi che sebbene la media dei redditi inferiori alla mediana diminuisca e quella al di sopra della mediana aumenti, su entrambi i segmenti della distribuzione la disuguaglianza aumenta e, pertanto, $L_B^t < L_B^{t_0}$.

Ne segue che

$$\begin{aligned}
\Delta G_{BET_means} &= G_{BET_means}^{t_1} - G_{BET_means}^{t_0} = \frac{1}{4\mu(x)} \left[\mu^{t_1}(x+) - \mu^{t_1}(x-) \right] - \frac{1}{4\mu(x)} \left[\mu^{t_0}(x+) - \mu^{t_0}(x-) \right] = \\
&= \frac{1}{4\mu(x)} \left[\left(\mu^{t_1}(x+) - \mu^{t_0}(x+) \right) - \left(\mu^{t_1}(x-) - \mu^{t_0}(x-) \right) \right] = \\
&= \frac{1}{4\mu(x)} \left[\frac{\alpha}{n/2} + \frac{\alpha}{n/2} \right] = \frac{\alpha}{n\mu(x)} \geq 0, \quad \forall s, k
\end{aligned}$$

Calcoliamo l'effetto sulla componente *within* considerando la sua formulazione in termini di media ponderata degli indici di Gini calcolati nei sottogruppi, la (3.5) che riportiamo per comodità di esposizione:

$$G_{WITH} = \frac{1}{4\mu(x)} \left[\mu(x-) - \frac{2}{n/2(n/2+1)} \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j \right] + \frac{1}{4\mu(x)} \left[\mu(x+) - \frac{2}{n/2(n/2+1)} \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j \right].$$

A seguito di un trasferimento di reddito pari ad α dall'individuo di rango s , con reddito inferiore a quello mediano, all'individuo di rango k di reddito superiore alla mediana (per cui $s < k$) si ha

$$\begin{aligned}
\Delta G_{WITH} &= \frac{1}{4\mu(x)} \left[\mu^{t_1}(x-) - \frac{2}{n/2(n/2+1)} \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j^{t_1} \right] + \frac{1}{4\mu(x)} \left[\mu^{t_1}(x+) - \frac{2}{n/2(n/2+1)} \sum_{i=n/2+1}^n \sum_{j=1}^i x_j^{t_1} \right] - \\
&- \frac{1}{4\mu(x)} \left[\mu^{t_0}(x-) - \frac{2}{n/2(n/2+1)} \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j^{t_0} \right] + \frac{1}{4\mu(x)} \left[\mu^{t_0}(x+) - \frac{2}{n/2(n/2+1)} \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j^{t_0} \right] = \\
&= \frac{1}{4\mu(x)} \left[\left(\mu^{t_1}(x-) - \mu^{t_0}(x-) \right) - \frac{2}{n/2(n/2+1)} \left(\sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j^{t_1} - \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j^{t_0} \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{4\mu(x)} \left[\left(\mu^{t_1}(x+) - \mu^{t_0}(x+) \right) - \frac{2}{n/2(n/2+1)} \left(\sum_{i=n/2+1}^n \sum_{j=1}^i x_j^{t_1} - \sum_{i=n/2+1}^n \sum_{j=1}^i x_j^{t_0} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{4\mu(x)} \left[\left(-\frac{\alpha}{n/2} \right) - \frac{2}{n/2(n/2+1)} \sum_{j=s}^{n/2} (-\alpha) \right] + \\
&+ \frac{1}{4\mu(x)} \left[\left(\frac{\alpha}{n/2} \right) - \frac{2}{n/2(n/2+1)} \sum_{j=k}^{n/2} \alpha \right] = \\
&= \frac{1}{4\mu(x)} \left[\left(-\frac{\alpha}{n/2} \right) - \frac{2(-\alpha)}{n/2(n/2+1)} \left(\frac{n}{2} - s + 1 \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{4\mu(x)} \left[\left(\frac{\alpha}{n/2} \right) - \frac{2\alpha}{n/2(n/2+1)} \left(\frac{n}{2} - k + 1 \right) \right] = \frac{1}{4\mu(x)} \cdot \frac{2\alpha(k-s)}{n/2(n/2+1)} = \frac{\alpha}{n\mu(x)} \cdot \left(\frac{k-s}{n+2} \right) \leq 0, \quad \text{per } s \geq k.
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}\Delta P_G &= \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left[\Delta G_{BET_means} - \Delta G_{WITH} \right] = \\ &= \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left[\frac{\alpha}{n\mu(x)} - \frac{\alpha}{n\mu(x)} \cdot \frac{(k-s)}{(n+2)} \right] = \frac{2\mu(x)}{m(x)} \cdot \frac{\alpha}{n\mu(x)} \left[1 - \frac{(k-s)}{(n+2)} \right] = \\ &= \frac{2\alpha}{nm(x)} \left[\frac{(n-k)+s+2}{(n+2)} \right] \geq 0 \quad \forall s, k.\end{aligned}$$

L'indice è quindi sempre coerente con gli assiomi IB e IS.

4.2 L'indice basato sull'indice di concentrazione di Bonferroni

Nel caso dell'indice costruito a partire da I_B , si dovrà considerare che la parte di disuguaglianza misurata dall'indice *within groups* contiene un residuo che rappresenta il ruolo del rango delle osservazioni nel calcolo dell'indice di Bonferroni.

$$\begin{aligned}P_B &= \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left[B_{BET_means} - (B_{WITH} + B_{residualA_w}) \right] = \frac{2\mu(x)}{m(x)} [A_B - A_W] = \\ &= \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{q} \right) (q - L_B(q)) dq - \int_0^1 \left(\frac{1}{q} \right) (L_B(q) - L(q)) dq \right], \quad q \in (0,1)\end{aligned}$$

PROP. 4 Considerata una popolazione di n individui con distribuzione del reddito $x = (x_1, \dots, x_n)$. Sia s la posizione dell'individuo che cede reddito in x^- , $s \in [1, n/2]$, e k la posizione dell'individuo che riceve il trasferimento in x^+ , $k \in [1, n/2]$. Sotto la condizione restrittiva $s \geq k$, l'indice P_B è coerente con la "seconda curva di polarizzazione" se $s \geq \min(k, n/6)$.

Dim) Verifichiamo se la polarizzazione aumenta in seguito al trasferimento IB .

A tal fine studiamo

$$\Delta P_B = P_B^{t_1} - P_B^{t_0} = \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left[\Delta B_{BET_means} - \Delta (B_{WITH} + B_{residualA_w}) \right]$$

con

$$\Delta B_{BET_means} = \int_0^1 \frac{1}{q} (q - L_B^{t_1}(q)) dq - \int_0^1 \frac{1}{q} (q - L_B^{t_0}(q)) dq = \int_0^1 \frac{1}{q} (L_B^{t_0}(q) - L_B^{t_1}(q)) dq$$

intendendo con t_1 il periodo successivo al trasferimento di reddito oggetto di analisi e con t_0 la situazione originaria, e

$$\begin{aligned} \Delta(B_{WITH} + B_{residualA_w}) &= \int_0^1 \frac{1}{q} (L_B^{t_1}(q) - L^1(q)) dq - \int_0^1 \frac{1}{q} (L_B^{t_0}(q) - L^{t_0}(q)) dq = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{q} (L_B^{t_1}(q) - L_B^{t_0}(q)) dq - \int_0^1 \frac{1}{q} (L^{t_1}(q) - L^{t_0}(q)) dq = \\ &= -\Delta B_{BET_means} - \int_0^1 \frac{1}{q} (L^1(q) - L^{t_0}(q)) dq. \end{aligned}$$

da cui segue

$$\Delta P_B = \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left[2\Delta B_{BET_means} + \int_0^1 \frac{1}{q} (L^1(q) - L^{t_0}(q)) dq \right].$$

Sotto IB, un trasferimento progressivo di importo α su un solo lato della mediana (oppure su entrambi i segmenti, ma senza attraversare la mediana) ha come effetto $\Delta B_{BET_means} = 0$. I trasferimenti che non attraversano la mediana, infatti, sono tali da mantenere invariati sia i redditi medi su ciascun segmento, sia la media generale $\mu(x)$. Pertanto $L_B^{t_1}(q) = L_B^{t_0}(q)$, $\forall q \in [0,1]$.

Per quanto riguarda la componente della disuguaglianza *within groups* comprensiva del residuo, i trasferimenti progressivi di reddito su un solo lato della mediana hanno come effetto $\Delta(B_{WITH} + B_{residualA_w}) \leq 0$.

Infatti, ricordando che $\Delta(B_{WITH} + B_{residualA_w}) = -\Delta B_{BET_means} - \int_0^1 \frac{1}{q} (L^1(q) - L^{t_0}(q)) dq$, un trasferimento progressivo sul segmento $x -$ della distribuzione del reddito ha come effetto una riduzione della disuguaglianza e, di conseguenza,

$\int_0^{1/2} \frac{1}{q} (L^t(q) - L^0(q)) dq > 0$. Analogamente, un trasferimento progressivo su $x +$ è tale

che $\int_{1/2}^1 \frac{1}{q} (L^t(q) - L^0(q)) dq > 0$.

Sotto IB, di conseguenza, $\Delta P_B > 0$.

Calcoliamo l'effetto di un trasferimento IS considerando un trasferimento regressivo di reddito pari ad α dall'individuo di rango s nel sottogruppo della popolazione $x -$, all'individuo di rango k nel sottogruppo $x +$.

Per ogni coppia (s, k) con $s, k \in [1, n/2]$, a fronte del trasferimento il reddito medio al di sotto della mediana diminuisce di $\alpha/(n/2)$, mentre il reddito medio al di sopra della mediana aumenta di $\alpha/(n/2)$ ¹⁸.

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \Delta B_{BET_means} &= B_{BET_means}^{t_1} - B_{BET_means}^{t_0} = \\ &= \frac{1}{2\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) (\mu^{t_1}(x+) - \mu^{t_1}(x-)) - \frac{1}{2\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) (\mu^{t_0}(x+) - \mu^{t_0}(x-)) = \\ &= \frac{1}{2\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) (\mu^{t_1}(x+) - \mu^{t_1}(x-) - \mu^{t_0}(x+) + \mu^{t_0}(x-)) = \\ &= \frac{1}{2\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) [(\mu^{t_1}(x+) - \mu^{t_0}(x+)) - (\mu^{t_1}(x-) - \mu^{t_0}(x-))] = \frac{1}{2\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \left(\frac{\alpha}{n/2} + \frac{\alpha}{n/2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \frac{2\alpha}{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) = \frac{2\alpha}{n\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) > 0, \quad \forall s, k \in [1, n/2]. \end{aligned}$$

¹⁸ Si veda a questo proposito la nota 17.

Per la componente *within groups* si ha

$$\Delta B_{WTH} = \frac{1}{2\mu(x)} \frac{\alpha}{n} \left[\sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} - \sum_{j=k}^{n/2} \frac{1}{j} \right] \leq 0, \quad \text{per } s \geq k \quad (4.1)$$

dove s è la posizione dell'individuo s -simo sul segmento della distribuzione x^- e k la posizione dell'individuo k -simo sul segmento x^+ .

Infatti

$$\begin{aligned} \Delta B_{WTH} &= B_{WTH}^h - B_{WTH}^0 = \\ &= \left[\frac{1}{4} \frac{\mu^h(x^-)}{\mu(x)} I_{B, \mu^h}^{n/2}(x^-) - \frac{1}{4} \frac{\mu^0(x^-)}{\mu(x)} I_{B, \mu^0}^{n/2}(x^-) \right] + \left[\frac{1}{4} \frac{\mu^h(x^+)}{\mu(x)} I_{B, \mu^h}^{n/2}(x^+) - \frac{1}{4} \frac{\mu^0(x^+)}{\mu(x)} I_{B, \mu^0}^{n/2}(x^+) \right] = \\ &= \frac{1}{4\mu(x)} \left[\mu^h(x^-) \left(1 - \frac{1}{n/2\mu^h(x^-)} \sum_{j=1}^{n/2} \mu_j^h(x^-) \right) - \mu^0(x^-) \left(1 - \frac{1}{n/2\mu^0(x^-)} \sum_{j=1}^{n/2} \mu_j^0(x^-) \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{4\mu(x)} \left[\mu^h(x^+) \left(1 - \frac{1}{n/2\mu^h(x^+)} \sum_{j=1}^{n/2} \mu_j^h(x^+) \right) - \mu^0(x^+) \left(1 - \frac{1}{n/2\mu^0(x^+)} \sum_{j=1}^{n/2} \mu_j^0(x^+) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{n}{2} (\mu^h(x^-) - \mu^0(x^-)) - \sum_{j=1}^{n/2} (\mu_j^h(x^-) - \mu_j^0(x^-)) \right] + \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{n}{2} (\mu^h(x^+) - \mu^0(x^+)) - \sum_{j=1}^{n/2} (\mu_j^h(x^+) - \mu_j^0(x^+)) \right] = \\ &= \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{n}{2} \left(-\frac{\alpha}{n/2} \right) + \alpha \sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} \right] + \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{n}{2} \left(\frac{\alpha}{n/2} \right) - \alpha \sum_{j=k}^{n/2} \frac{1}{j} \right] = \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} - \sum_{j=k}^{n/2} \frac{1}{j} \right]. \end{aligned}$$

La (4.1) mostra che il segno di ΔB_{WTH} dipende dalle posizioni relative dei percettori di reddito. In particolare, la variazione della componente *within* è non positiva, ovvero ha l'effetto desiderato sull'indice di polarizzazione, solo nel caso in cui $s \geq k$, con $s \geq 1$ e $k \leq n/2$.

OSS. Si noti che, come dimostrato nel precedente paragrafo, la variazione della componente *within* dipende da s e k anche nel caso dell'indice di Gini. L'indice di Wolfson, tuttavia, è per costruzione coerente con la seconda curva di polarizzazione (Wolfson 1994, 1997; Foster e Wolfson, 1992, 2010). Pertanto, necessariamente, la componente *between* compensa quella *within* per ogni coppia s, k .

Verifichiamo se ciò vale anche per l'indice P_B , individuando la condizione su s e k per la quale ΔB_{BET_means} è maggiore di $\Delta B_{WITH} + \Delta B_{residualAw}$ ¹⁹.

Ricordiamo che per la (3.8)

$$B_{residualAw} = \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{n}{2} \mu(x^-) - \sum_{i=1}^{n/2} \mu_i(x^-) \right] + \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\mu(x^+) \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) - \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) \mu_i(x^+) \right]$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \Delta B_{residualAw} &= (B_{residualAw}^h - B_{residualAw}^0) = \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{n}{2} \mu^h(x^-) - \sum_{i=1}^{n/2} \mu_i^h(x^-) - \frac{n}{2} \mu^0(x^-) + \sum_{i=1}^{n/2} \mu_i^0(x^-) \right] + \\ &+ \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\mu^h(x^+) \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) - \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) \mu_i^h(x^+) - \mu^0(x^+) \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) + \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) \mu_i^0(x^+) \right] = \\ &= \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{n}{2} (\mu^h(x^-) - \mu^0(x^-)) - \sum_{i=1}^{n/2} (\mu_i^h(x^-) - \mu_i^0(x^-)) \right] + \\ &+ \frac{1}{2n\mu(x)} \left[(\mu^h(x^+) - \mu^0(x^+)) \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) - \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) (\mu_i^h(x^+) - \mu_i^0(x^+)) \right] = \\ &= \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{n}{2} \left(\frac{-\alpha}{n/2} \right) + \alpha \sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} \right] + \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{\alpha}{n/2} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{j-n/2}{j+n/2} \right) - \alpha \sum_{j=k}^{n/2} \frac{1}{j} \left(\frac{j-n/2}{j+n/2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{\alpha}{n/2} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{j-n/2}{j+n/2} - 1 \right) + \alpha \sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} - \alpha \sum_{j=k}^{n/2} \frac{1}{j} \left(\frac{j-n/2}{j+n/2} \right) \right] = \\ &= \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} - \sum_{j=k}^{n/2} \frac{1}{j} \left(\frac{j-n/2}{j+n/2} \right) + \frac{1}{n/2} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{j-n/2}{j+n/2} \right) - 1 \right] = \\ &= \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} + \sum_{j=k}^{n/2} \frac{1}{j} \left(\frac{n/2-j}{n/2+j} \right) - 2 \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \right] \end{aligned}$$

ed essendo $B_{WITH} + B_{residualAw}$ si ha

¹⁹ La variazione del residuo potrebbe introdurre una "correzione". Ricordiamo, infatti, che nel residuo i pesi per cui vengono moltiplicate le osservazioni sopra la mediana sono negativi e crescenti e, di conseguenza, la correzione apportata dal residuo è tanto più forte quanto più l'osservazione è vicina alla mediana.

$$\begin{aligned}
\Delta B_{WITH} + \Delta B_{residualAw} &= \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} - \sum_{j=k}^{n/2} \frac{1}{j} \right] + \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} + \sum_{j=k}^{n/2} \frac{1}{j} \left(\frac{n/2-j}{n/2+j} \right) - 2 \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \right] = \\
&= \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[2 \sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} - \sum_{j=k}^{n/2} \frac{1}{j} \left(1 - \left(\frac{n/2-j}{n/2+j} \right) \right) - 2 \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \right] = \\
&= \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[2 \sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} - 2 \sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) - 2 \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \right] = \\
&= \frac{\alpha}{n\mu(x)} \left[\sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} - \sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) - \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \right].
\end{aligned}$$

Di conseguenza abbiamo

$$\begin{aligned}
\Delta P_B &= \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left[\Delta B_{BET_means} - (\Delta B_{WITH} + \Delta B_{residualAw}) \right] = \\
&= \frac{2\mu(x)}{m(x)} \frac{2\alpha}{n\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) - \frac{2\mu(x)}{m(x)} \frac{\alpha}{n\mu(x)} \left[\sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) - \sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \right] = \\
&= \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{3}{n/2+j} \right) \right] + \frac{2\alpha}{nm(x)} \left[\sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) - \sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} \right] = \\
&= \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{3}{n/2+j} \right) - \sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} + \sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \right].
\end{aligned}$$

Osserviamo che la variazione si compone della differenza tra due termini additivi sempre positivi – il termine costante e la sommatoria che dipende da k – e la sommatoria che dipende da s . Quest'ultima sommatoria assume valori decrescenti al crescere di s . Esisterà, quindi, un valore di s tale che

$$\sum_{j=s^*}^{n/2} \frac{1}{j} > \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{3}{n/2+j} \right) + \sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \text{ e } \Delta P_B < 0$$

L'individuazione analitica di tale soglia si presenta piuttosto complicata, trattandosi della soluzione dell'equazione alle differenze $\Delta P_B[s, k, n] > 0$, al variare di (s, k, n) .

Restringendosi, tuttavia, al caso in cui $s \geq k$ possiamo ottenere una condizione sufficiente su s affinché $\Delta P_B > 0$ sotto IS.

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
\Delta P_B &= \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{3}{n/2+j} \right) - \sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} + \sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \right] \geq \\
&\geq \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{3}{n/2+j} \right) - \sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} + \sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \right] = \\
&= \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{4}{n/2+j} \right) - \sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} \right] = \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=k}^{s-1} \left(\frac{4}{n/2+j} \right) + \sum_{j=s}^{n/2} \left(\frac{4}{n/2+j} \right) - \sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} \right] = \\
&= \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=k}^{s-1} \left(\frac{4}{n/2+j} \right) + \sum_{j=s}^{n/2} \left(\frac{4}{n/2+j} - \frac{1}{j} \right) \right] = \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=k}^{s-1} \left(\frac{4}{n/2+j} \right) + \sum_{j=s}^{n/2} \left(\frac{3j-n/2}{j(n/2+j)} \right) \right]
\end{aligned}$$

Questa quantità è non negativa per $j \in [s, n/2]$ tale che $3j - n/2 \geq 0$. Ovvero per $3s - n/2 \geq 0$ da cui $s \geq \min(k, n/6)$.

4.3 L'indice basato sull'indice di concentrazione di De Vergottini

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente per l'indice di Bonferroni, sostituiamo l'indice di De Vergottini all'indice di Gini nella formulazione dell'indice di polarizzazione presentato in Rodriguez e Salas (2003) e studiamone le proprietà.

Abbiamo

$$\begin{aligned}
P_V &= \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left[V_{BET_means} - (V_{WITH} + V_{residualA_w}) \right] = \frac{2\mu(x)}{m(x)} [A_B - A_W] = \\
&= \frac{2\mu(x)}{m(x)} \int_0^1 \left(\frac{1}{1-q} \right) (q - L_B(q)) dq - \frac{2\mu(x)}{m(x)} \int_0^1 \left(\frac{1}{1-q} \right) (L_B(q) - L(q)) dq, \quad q \in (0,1)
\end{aligned}$$

dove la parte di disuguaglianza misurata dall'indice *within groups* contiene un residuo che rappresenta il ruolo del rango delle osservazioni nel calcolo di I_V .

PROP. 5 Considerata una popolazione di n individui con distribuzione del reddito $x = (x_1, \dots, x_n)$. Sia s la posizione dell'individuo che cede reddito in x^- , $s \in [1, n/2]$, e k la posizione dell'individuo che riceve il trasferimento in x^+ , $k \in [1, n/2]$. Sotto la condizione restrittiva $s \geq k$, l'indice P_V è coerente con la "seconda curva di polarizzazione" se $k \leq \min\left(s, \frac{n}{3} + 1\right)$.

Dim) Verifichiamo se P_V aumenta in seguito sia al trasferimento IB.

Studiamo

$$\Delta P_V = P_V^{t_1} - P_V^{t_0} = \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left[\Delta V_{BET_means} - \Delta(V_{WITH} + V_{residualA_w}) \right].$$

Si ha

$$\Delta V_{BET_means} = \int_0^1 \frac{1}{1-q} (q - L_B^1(q)) dq - \int_0^1 \frac{1}{1-q} (q - L_B^0(q)) dq = \int_0^1 \frac{1}{1-q} (L_B^0(q) - L_B^1(q)) dq$$

intendendo con t_1 il periodo successivo al trasferimento di reddito oggetto di analisi e con t_0 la situazione originaria, e

$$\begin{aligned} \Delta(V_{WITH} + V_{residualA_w}) &= \int_0^1 \frac{1}{1-q} (L_B^1(q) - L^1(q)) dq - \int_0^1 \frac{1}{1-q} (L_B^0(q) - L^0(q)) dq = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-q} (L_B^1(q) - L_B^0(q)) dq - \int_0^1 \frac{1}{1-q} (L^1(q) - L^0(q)) dq = \\ &= \Delta V_{BET_means} - \int_0^1 \frac{1}{1-q} (L^1(q) - L^0(q)) dq. \end{aligned}$$

da cui segue

$$\Delta P_V = \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left[2\Delta V_{BET_means} + \int_0^1 \frac{1}{1-q} (L^1(q) - L^0(q)) dq \right].$$

Consideriamo un trasferimento progressivo di reddito pari ad α che non attraversi la mediana (in uno soltanto dei sottogruppi x^- e x^+ , oppure su entrambi ma senza attraversare la mediana) dall'individuo di rango k all'individuo di rango s ($s < k$).

Analogamente a quanto dimostrato per l'indice P_B si osserva che il trasferimento IB ha come effetto $\Delta V_{BET_means} = 0$, mentre $\Delta(V_{WITH} + V_{residualA_w}) \leq 0$. Sotto IB di conseguenza $\Delta P_V > 0$.

Per analizzare l'effetto di un IS, si consideri un trasferimento regressivo di reddito pari ad α dall'individuo di rango s all'individuo di rango k ($s < k$).

A fronte del trasferimento il reddito medio al di sotto della mediana diminuisce di $\alpha/(n/2)$, mentre il reddito medio al di sopra della mediana aumenta di $\alpha/(n/2)$ ²⁰.

Ne segue:

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{BET_means} &= V_{BET_means}^{t_1} - V_{BET_means}^{t_0} = \\
 &= \frac{1}{2\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j+1} \right) (\mu^{t_1}(x+) - \mu^{t_1}(x-)) - \frac{1}{2\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j+1} \right) (\mu^{t_0}(x+) - \mu^{t_0}(x-)) = \\
 &= \frac{1}{2\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j+1} \right) (\mu^{t_1}(x+) - \mu^{t_1}(x-) - \mu^{t_0}(x+) + \mu^{t_0}(x-)) = \\
 &= \frac{1}{2\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j+1} \right) [(\mu^{t_1}(x+) - \mu^{t_0}(x+)) - (\mu^{t_1}(x-) - \mu^{t_0}(x-))] = \\
 &= \frac{1}{2\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j+1} \right) \left(\frac{\alpha}{n/2} + \frac{\alpha}{n/2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \frac{2\alpha}{n/2} \left(\frac{1}{n-j+1} \right) = \frac{2\alpha}{n\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j+1} \right) > 0.
 \end{aligned}$$

OSS. Osserviamo che, per n fissato, $\Delta B_{BET_means} = \Delta V_{BET_means}$ essendo $\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{2}{n+2j} \right) =$

$\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j+1} \right)$. Inoltre, dal momento che le due sommatorie sono inferiori ad $1/2$,

$$\Delta B_{BET_means} < \Delta G_{BET_means} \text{ e } \Delta V_{BET_means} < \Delta G_{BET_means}.$$

²⁰ A questo proposito si veda la nota 17.

La variazione del termine *within* è pari a

$$\begin{aligned}
\Delta V_{WITH} &= V_{WITH}^{\mu^h} - V_{WITH}^{\mu^l} = \left[\frac{1}{4} \frac{\mu^h(x-)}{\mu(x)} I_{V, \mu^h}^{n/2}(x-) - \frac{1}{4} \frac{\mu^l(x-)}{\mu(x)} I_{V, \mu^l}^{n/2}(x-) \right] + \left[\frac{1}{4} \frac{\mu^h(x+)}{\mu(x)} I_{V, \mu^h}^{n/2}(x+) - \frac{1}{4} \frac{\mu^l(x+)}{\mu(x)} I_{V, \mu^l}^{n/2}(x+) \right] = \\
&= \frac{1}{4\mu(x)} \left[\mu^h(x-) \left(\frac{1}{n/2} \sum_{j=1}^{n/2} M_j^{\mu^h}(x-) - 1 \right) - \mu^l(x-) \left(\frac{1}{n/2} \sum_{j=1}^{n/2} M_j^{\mu^l}(x-) - 1 \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{4\mu(x)} \left[\mu^h(x+) \left(\frac{1}{n/2} \sum_{j=1}^{n/2} M_j^{\mu^h}(x+) - 1 \right) - \mu^l(x+) \left(\frac{1}{n/2} \sum_{j=1}^{n/2} M_j^{\mu^l}(x+) - 1 \right) \right] = \\
&= \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=1}^{n/2} (M_j^{\mu^h}(x-) - M_j^{\mu^l}(x-)) - \frac{n}{2} (\mu^h(x-) - \mu^l(x-)) \right] + \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=1}^{n/2} (M_j^{\mu^h}(x+) - M_j^{\mu^l}(x+)) - \frac{n}{2} (\mu^h(x+) - \mu^l(x+)) \right] = \\
&= \frac{1}{2n\mu(x)} \left[-\alpha \sum_{j=1}^s \left(\frac{1}{n/2 - j + 1} \right) - \frac{n}{2} \left(-\frac{\alpha}{n/2} \right) \right] + \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\alpha \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2 - j + 1} \right) - \frac{n}{2} \left(\frac{\alpha}{n/2} \right) \right] = \\
&= \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2 - j + 1} \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{1}{n/2 - j + 1} \right) \right].
\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\Delta V_{WITH} = \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2 - j + 1} \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{1}{n/2 - j + 1} \right) \right] \leq 0, \quad \text{per } s \geq k \quad (4.2)$$

dove s è la posizione dell'individuo s -simo sul segmento della distribuzione $x-$ e k la posizione dell'individuo k -simo sul segmento $x+$.

La (4.2) mostra che, come già osservato per gli indici di polarizzazione basati sugli indici di concentrazione di Gini e Bonferroni, il segno di ΔV_{WITH} dipende dalle posizioni relative dei percettori di reddito. In particolare, la variazione della componente *within* è non positiva, ovvero ha l'effetto desiderato sull'indice di polarizzazione, solo nel caso in cui $s \geq k$, con $s \geq 1$ e $k \leq n/2$.

Analogamente a quanto fatto per l'indice basato sull'indice di concentrazione del Bonferroni, studiamo la condizione su s e k per la quale la variazione ΔV_{BET_means} è maggiore di $\Delta V_{WITH} + \Delta V_{residualAw}$.

Ricordiamo che

$$V_{residualAw} = \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i}{i-n} \right) M_i(x-) - \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i}{i-n} \right) \mu(x-) \right] + \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} M_i(x+) - \frac{n}{2} \mu(x+) \right]$$

da cui

$$\begin{aligned} \Delta V_{residualAw} &= V_{residualAw}^{t_1} - V_{residualAw}^{t_0} = \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i}{i-n} \right) M_i^{t_1}(x-) - \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i}{i-n} \right) \mu^{t_1}(x-) \right] + \\ &+ \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} M_i^{t_1}(x+) - \frac{n}{2} \mu^{t_1}(x+) \right] - \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i}{i-n} \right) M_i^{t_0}(x-) - \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i}{i-n} \right) \mu^{t_0}(x-) \right] + \\ &+ \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} M_i^{t_0}(x+) - \frac{n}{2} \mu^{t_0}(x+) \right] = \\ &= \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i}{i-n} \right) (M_i^{t_1}(x-) - M_i^{t_0}(x-)) - \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i}{i-n} \right) (\mu^{t_1}(x-) - \mu^{t_0}(x-)) \right] + \\ &= \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} (M_i^{t_1}(x+) - M_i^{t_0}(x+)) - \sum_{i=1}^{n/2} (\mu^{t_1}(x+) - \mu^{t_0}(x+)) \right] = \\ &= \frac{1}{2n\mu(x)} \left[-\alpha \sum_{j=1}^s \left(\frac{j}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \frac{\alpha}{n/2} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{j}{j-n} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\alpha \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) - \alpha \right] = \\ &= \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[-\sum_{j=1}^s \left(\frac{j}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \frac{1}{n/2} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{j}{j-n} \right) - 1 \right] = \\ &= \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=1}^s \left(\frac{j}{n-j} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) - 2 \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j} \right) \right]. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
\Delta V_{WITH} + \Delta V_{residualAw} &= \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[2 \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \sum_{j=1}^s \left(\frac{j}{n-j} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) - 2 \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j} \right) \right] = \\
&= \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[2 \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \sum_{j=1}^s \left(\frac{j}{n-j} - 1 \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) - 2 \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j} \right) \right] = \\
&= \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{2}{n/2-j+1} \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{2j-n}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) - 2 \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j} \right) \right] = \\
&= \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{2}{n/2-j+1} \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{2j-n}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + 2 \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{j-n} \right) \right]
\end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned}
\Delta V_{BET_means} - (\Delta V_{WITH} + \Delta V_{residualAw}) &= \\
&= \frac{2\alpha}{n\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j+1} \right) - \frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{2}{j-n} \right) + \sum_{j=1}^k \left(\frac{2}{n/2-j+1} \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{2j-n}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) \right] = \\
&= \frac{2\alpha}{2n\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{2}{n-j+1} \right) - \frac{2\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{j-n} \right) + \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{j-n/2}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) \right] = \\
&= \frac{\alpha}{n\mu(x)} \left[\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{2}{n-j+1} \right) - \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{j-n} \right) - \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \sum_{j=1}^s \left(\frac{j-n/2}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) \right]
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\Delta P_V &= \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left[\Delta V_{BET_means} - (\Delta V_{WITH} + \Delta V_{residualAw}) \right] = \\
&= \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{2}{n-j+1} + \frac{1}{n-j} \right) - \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \sum_{j=1}^s \left(\frac{j-n/2}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) \right].
\end{aligned}$$

Procedendo analogamente a quanto fatto per ΔP_B , osserviamo che la variazione ΔP_V si compone della differenza tra la somma del termine costante e della sommatoria che dipende da s e la sommatoria in k . Quest'ultima assume valori decrescenti al crescere di k ed esisterà, pertanto, un valore di k tale che

$$\sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) > \sum_{j=1}^s \left(\frac{j-n/2}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{2}{n-j+1} + \frac{1}{n-j} \right) \text{ e } \Delta P_V > 0.$$

Anche in questo caso l'individuazione analitica della soglia, soluzione dell'equazione alle differenze $\Delta P_V[s,k,n] > 0$ e al variare di (s,k,n) , è piuttosto complicata. Restringendosi, tuttavia, al caso in cui $s \geq k$ possiamo ottenere una condizione sufficiente su k affinché $\Delta P_V > 0$ sotto IS.

Si ha

$$\begin{aligned} \Delta P_V &= \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{2}{n-j+1} + \frac{1}{n-j} \right) - \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \sum_{j=1}^s \left(\frac{j-n/2}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) \right] \geq \\ &\geq \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{2}{n-j+1} + \frac{1}{n-j} \right) - \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \sum_{j=1}^k \left(\frac{j-n/2}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) \right] \end{aligned}$$

essendo $k \leq s \leq n/2$. Inoltre,

$$\frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{2}{n-j+1} + \frac{1}{n-j} + \frac{1}{(j-n)(n/2-j+1)} - \frac{1}{n/2-j+1} \right) \right] \geq$$

ed essendo

$$\frac{1}{(j-n)(n/2-j+1)} = \frac{1}{(n-j)(j-n/2-1)} > \frac{1}{(n-j)}$$

$$\geq \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{2}{(n-j+1)} + \frac{1}{(n-j)} - \frac{1}{(n/2-j+1)} + \frac{1}{(n-j)} \right) \right] \geq$$

$$\geq \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{2}{(n-j+1)} + \frac{2}{(n-j)} - \frac{1}{(n/2-j+1)} \right) \right] \geq$$

$$\geq \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{2}{(n-j+1)} + \frac{2}{(n-j+1)} - \frac{1}{(n/2-j+1)} \right) \right] = \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{4}{(n-j+1)} - \frac{1}{(n/2-j+1)} \right) \right].$$

La somma tra parentesi è sicuramente positiva per j tale che

$$\frac{4}{(n-j+1)} - \frac{1}{(n/2-j+1)} > 0, \text{ ovvero per } j \leq \frac{n}{3} + 1 .$$

Essendo $j=1, \dots, k$ la condizione sufficiente affinché $\Delta P_v \geq 0$ è $k \leq \min\left(s, \frac{n}{3} + 1\right)$.

4.4 Quadro riassuntivo

Nella Tabella 1 presentiamo un quadro riassuntivo della variazione, in seguito ad **IS**, dei tre indici di polarizzazione esposti e delle componenti.

Tabella 1

Wolfson	
ΔG_{BET_means}	$\frac{\alpha}{n\mu(x)}$
ΔG_{WITH}	$\frac{\alpha}{n\mu(x)} \cdot \left(\frac{k-s}{n+2} \right)$
ΔP_G	$\frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\frac{(n-k) + s + 2}{(n+2)} \right]$
PolBonf	
ΔB_{BET_means}	$\frac{2\alpha}{n\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) = \frac{2\alpha}{n\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{2}{n+2j} \right)$
ΔB_{WITH}	$\frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} - \sum_{j=k}^{n/2} \frac{1}{j} \right]$
$\Delta B_{ResidualAw}$	$\frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} - \sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{1}{j} \cdot \frac{n/2-j}{n/2+j} \right) - 2 \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \right]$
$\Delta B_{WITH} + \Delta B_{ResidualAw}$	$\frac{\alpha}{n\mu(x)} \left[\sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} - \sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) - \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \right]$
ΔP_B	$\frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{3}{n/2+j} \right) - \sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} + \sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \right]$
PolDeVe	
ΔV_{BET_means}	$\frac{2\alpha}{n\mu(x)} \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j+1} \right)$
ΔV_{WITH}	$\frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) - \sum_{j=1}^s \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) \right]$
$\Delta V_{ResidualAw}$	$\frac{\alpha}{2n\mu(x)} \left[\sum_{j=1}^s \left(\frac{j}{n-j} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) - 2 \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j} \right) \right]$
$\Delta V_{WITH} + \Delta V_{ResidualAw}$	$\frac{\alpha}{n\mu(x)} \left[- \sum_{j=1}^s \left(\frac{j-n/2}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) - \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j} \right) \right]$
ΔP_V	$\frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{2}{n-j+1} + \frac{1}{n-j} \right) - \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \sum_{j=1}^s \left(\frac{j-n/2}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) \right]$

Nel confrontare le formule per la variazione della componente *within* osserviamo

che, per n fissato, $\Delta B_{BET_means} = \Delta V_{BET_means}$ essendo $\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{2}{n+2j} \right) = \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j+1} \right)$.

Inoltre, dal momento che le due sommatorie sono inferiori ad 1/2,

$$\Delta B_{BET_means} < \Delta G_{BET_means} \text{ e } \Delta V_{BET_means} < \Delta G_{BET_means} .$$

Osserviamo, inoltre, che i segni le variazioni degli indici non dipendono dalla distribuzione scelta se non attraverso media e mediana . Pertanto, le diverse sensibilità degli indici ai trasferimenti IS e IB, che studieremo oltre nel Capitolo 5, sono invarianti rispetto alla distribuzione.

Capitolo 5 – Simulazione

In questo capitolo sono esposti i risultati di una serie di esercizi di simulazione volti sia ad individuare, indipendentemente dalla condizione restrittiva $s \geq k$, le soglie empiriche s^* e k^* tali che gli indici P_B e P_V possano essere considerati indici di polarizzazione, sia a valutare la sensibilità degli indici P_B e P_V rispetto a trasferimenti regressivi attraverso la mediana (IS) e di Pigou-Dalton sopra o sotto la mediana (IB).

Considereremo una distribuzione x generata come mistura di due distribuzioni normali, rappresentante una generica distribuzione del reddito. Perturberemo, quindi, la distribuzione simulando un trasferimento IS e determinando i valori di soglia empirici s^* e k^* . Introduciamo poi, per stadi successivi, una crescente bipolarizzazione dei redditi e studieremo la sensibilità degli indici ai trasferimenti, al variare dell'ammontare del reddito trasferito, applicando l'analisi a diversi scenari in cui il trasferimento avvenga tra “poveri”, “classe medio-bassa”, “classe medio-alta” e “ricchi”.

5.1 La distribuzione teorica e la simulazione dei trasferimenti

Per analizzare la sensibilità degli indici ai trasferimenti IS e IB generiamo una distribuzione del reddito “fittizia”, estraendo un campione di n osservazioni da una mistura di distribuzioni normali. Si assume, per semplicità, che la popolazione di n elementi sia composta da due sotto-popolazioni di numerosità $n/2$: la distribuzione del reddito della prima sotto-popolazione è una realizzazione della variabile aleatoria $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, mentre la seconda è una realizzazione di $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.

Abbiamo, quindi, per la distribuzione del reddito x^0

$$f(x^0) = 0.5f_N(x_1, \mu_1, \sigma_1) + 0.5f_N(x_2, \mu_2, \sigma_2)$$

$$\text{dove } f_N(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}.$$

Dal punto di vista pratico ciò equivale ad estrarre due sotto-campioni di redditi di numerosità $n/2$, $n=1000$, dalle due distribuzioni normali precedentemente definite, dove si è posto $(\mu_1, \sigma_1) = (375, 100)$ e $(\mu_2, \sigma_2) = (625, 100)$.

Si ottiene la distribuzione del reddito di 1000 elementi con densità

$$f(x^0) = 0.5f_N(x_1, 375, 100) + 0.5f_N(x_2, 625, 100) \quad (5.1)$$

le cui caratteristiche sono illustrate nella Figura 1 e nella Tabella 2. La distribuzione generata varia tra un minimo di 108 unità di reddito ad un massimo di 857. Il reddito medio è pari a 491, quello mediano a 483; il reddito medio degli individui più poveri (in x^-) è pari a 354, mentre quello degli individui più ricchi (in x^+) è 629.

Figura 1 – Funzione di densità e funzione di ripartizione della distribuzione simulata

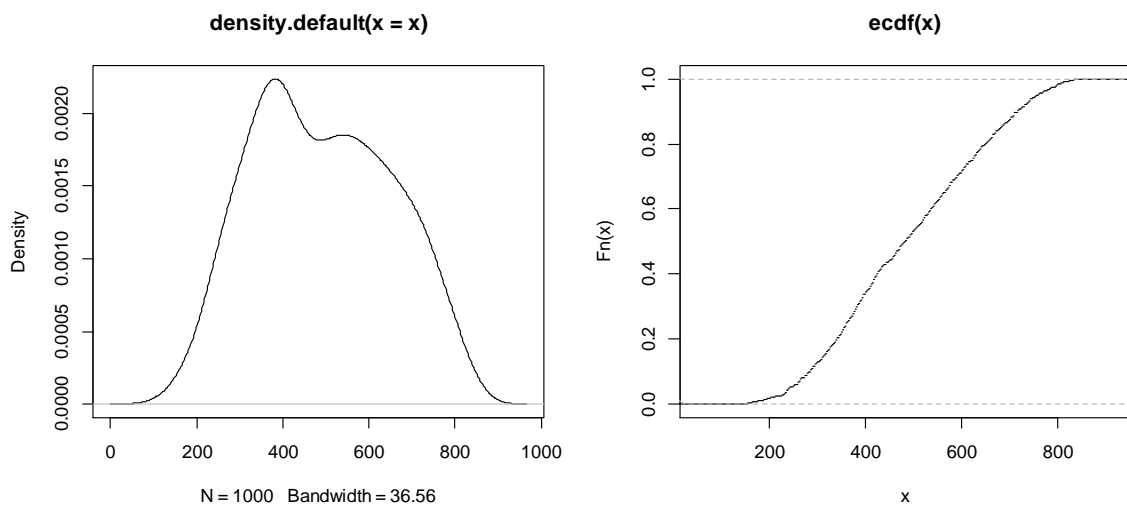


Tabella 2 – Statistiche descrittive della distribuzione estratta dalla mistura di normali

x_l	$m(x)$	$\mu(x)$	x_n	$\mu(x^-)$	$\mu(x^+)$
108	483	491	857	354	629

Si osservi che la distribuzione simulata non ha lo scopo di riprodurre le caratteristiche di una distribuzione del reddito effettivamente osservata, quanto piuttosto di fornire una distribuzione di partenza, opportunamente scelta con redditi concentrati nella parte centrale della distribuzione del reddito, sulla quale introdurre successivamente gradi crescenti di bipolarizzazione.

La simulazione di un trasferimento IS (Figura 3), ovvero un trasferimento regressivo di reddito attraverso la mediana (i.e. un individuo tra i “più poveri” cede reddito ad un individuo tra i “più ricchi”), si ottiene estraendo casualmente la posizione s dell'individuo che ha reddito inferiore a quello mediano e dell'individuo k che ha un reddito superiore alla mediana. Si trasferiscono poi $\alpha > 0$ unità di reddito da s a k , scegliendo α in modo tale che tra i due individui non vi siano inversioni di rango nella distribuzione.

Un trasferimento IB (Figura 4), ovvero un trasferimento progressivo (o di Pigou-Dalton) tra individui i cui redditi si collochino sullo stesso segmento della distribuzione rispetto alla mediana, si ottiene estraendo casualmente la posizione s dell'individuo che ha reddito inferiore e dell'individuo k che ha un reddito superiore. Si trasferiscono poi $\alpha > 0$ unità di reddito da k a s . Distinguiamo tra trasferimento IB sotto la mediana, che prevede l'estrazione delle due posizioni tra le prime $n/2$ osservazioni (s_2, k_2) , e trasferimento IB sopra la mediana per il quale le posizioni (s_3, k_3) sono estratte casualmente dal supporto $[n/2 + 1, n]$.

Figura 3 – Il trasferimento IS

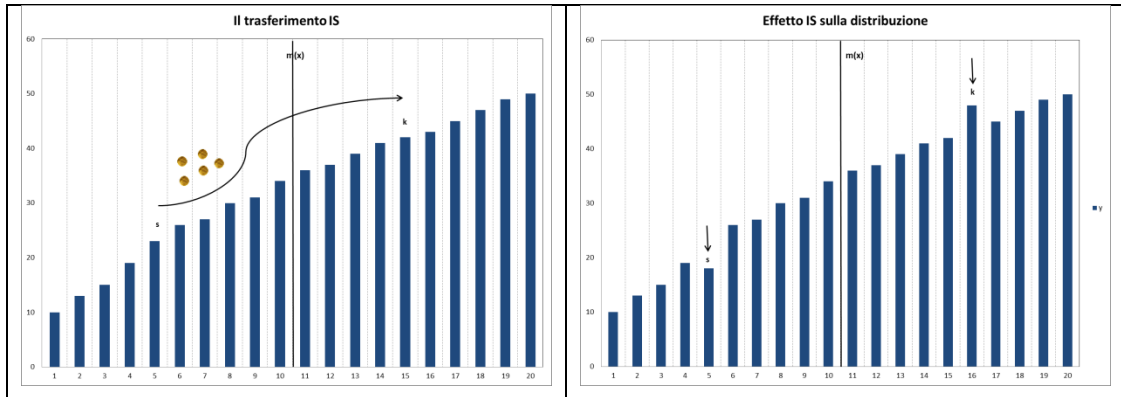
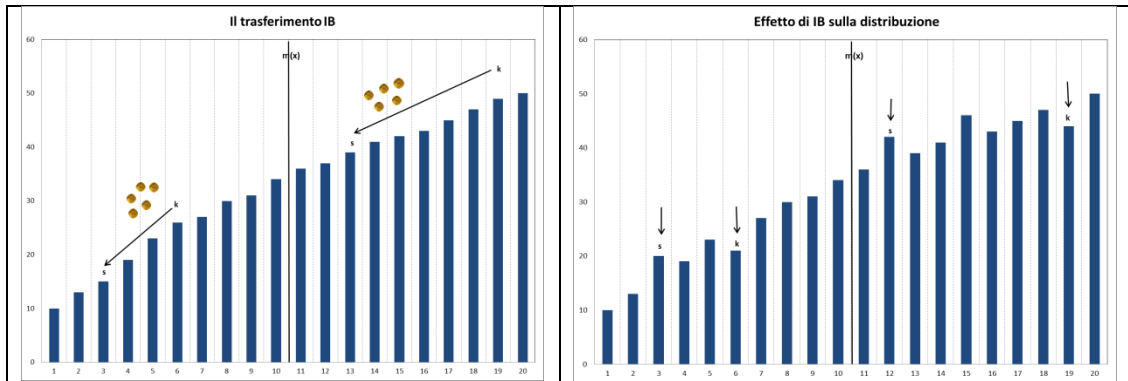


Figura 4 – Il trasferimento IB



5.2 L'individuazione delle soglie s^* e k^*

Come visto in precedenza nel Capitolo 4, vi sono delle condizioni analitiche sulle posizioni degli individui tra i quali si trasferisce il reddito (s, k) che garantiscano che gli indici costruiti siano indici di bipolarizzazione. In particolare, abbiamo dimostrato che affinché l'indice P_b sia di polarizzazione la posizione dell'individuo che cede reddito nel trasferimento IS deve essere $s \geq \min\{k, n/6\}$. Analogamente, abbiamo verificato che per l'indice di De Vergottini la posizione k dell'individuo che riceve il trasferimento deve essere $k \leq \min(s, n/3 + 1)$.

Come già osservato, tali condizioni determinate nel caso restrittivo $s \geq k$ sono sufficienti affinché gli indici siano di polarizzazione, ma non necessarie. Rinunciando a porre condizioni su s e k , tuttavia, l'individuazione analitica delle

soglie si presenta piuttosto complicata, trattandosi della soluzioni delle equazioni alle differenze $\Delta P_B[s,k,n] > 0$ e $\Delta P_V[s,k,n] > 0$, al variare di (s,k,n) . Indicheremo tali valori di soglia analitici con $s_{k,n}$ e $k_{s,n}$. Possiamo ragionevolmente supporre che il valore di soglia $s_{k,n}$ sarà un valore che dipende da k e n e che varia tra 1 e $n/6$. Allo stesso modo, $k_{s,n}$ sarà un valore tra $n/2$ e $n/3+1$, dipendendo da n, s e k .

Procederemo, quindi, all'individuazione di una soglia empirica per l'indice di polarizzazione basato sul Bonferroni, che denoteremo con s^* , simulando un trasferimento regressivo da s a k attraverso la mediana, considerando sequenzialmente valori di s decrescenti da $n/6$ fino a 1, con k fissato, e calcolando le variazioni dell'indice di polarizzazione che seguono al trasferimento. Per k fissato, s^* sarà il più piccolo valore di s tale che la variazione dell'indice sotto IS è positiva: $\Delta P_B[s,k,n] < 0$, per $s \leq s^*$ e $\Delta P_B[s,k,n] > 0$, per $s > s^*$.

Analogamente per la soglia empirica k^* che rende coerente l'indice di De Vergottini rispetto al trasferimento IS, si simulerà un trasferimento da s a k , con $k \in (n/3+1, n)$, facendo crescere k da $n/3+1$ a n per s fissato, individuando k^* tale che $\Delta P_V[s,k,n] < 0$ per $k \geq k^*$ e $\Delta P_V[s,k,n] > 0$ altrimenti.

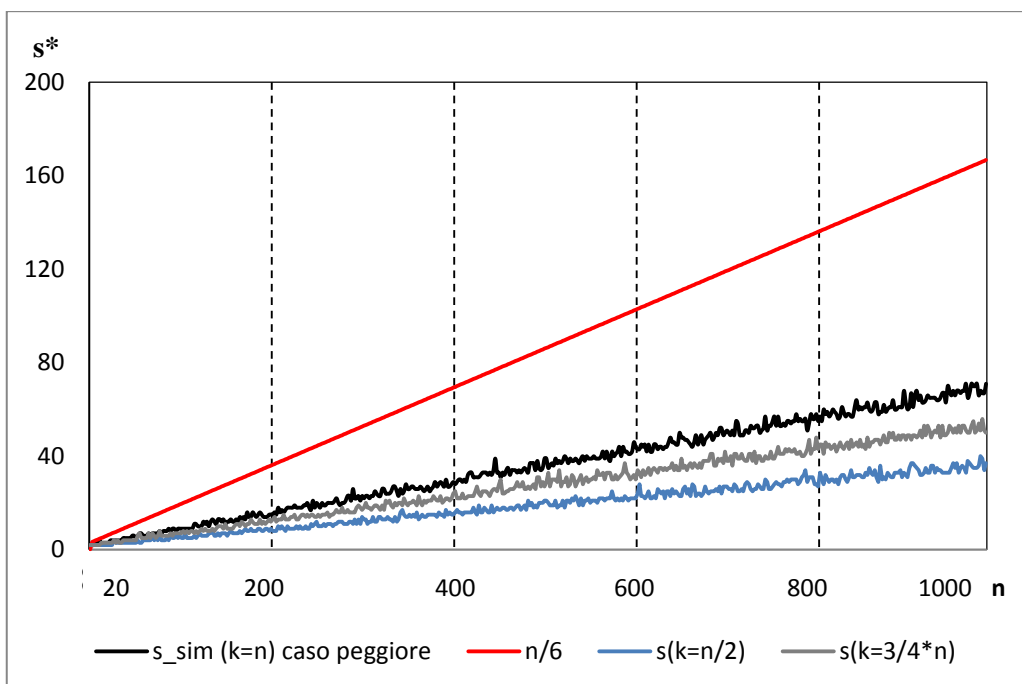
Prima di procedere osserviamo che, a differenza di quanto esposto nei Capitoli 3 e 4, nei quali si considerano i due sottogruppi distinti x^- e x^+ facendo variare sia s che k in $[1, n/2]$, nell'analisi dei risultati delle simulazioni le posizioni degli individui nella distribuzione del reddito variano da 1 a n . Ne segue che s varia in $[1, n/2]$, mentre k varia in $[n/2+1, n]$.

Nelle figure che seguono sono riportate le soglie s^* e k^* al variare della numerosità n (in ascissa). Al variare di $n=2, \dots, 1000$ il valore di soglia s^* è stato ottenuto simulando un trasferimento IS in cui s assuma valori da 1 a $n/6$, con k posto inizialmente a $n/2+1$, poi a $(3/4)n$ e, infine, a n . Per ogni valore di k , si è calcolata la ΔP_B al variare di s fino a determinare s^* , ovvero il più piccolo s che rende l'indice P_B coerente con l'assioma IS. Analogamente per determinare il valore di k^* , è stato simulato un trasferimento IS, fissando $s=1$, poi $s=n/4$ e infine $s=n/2$,

facendo variare k tra $(5/6)n+1$ ²¹ e n fino a determinare, per ogni s fissato, il più piccolo valore di k che rende l'indice P_V coerente con l'assioma IS.

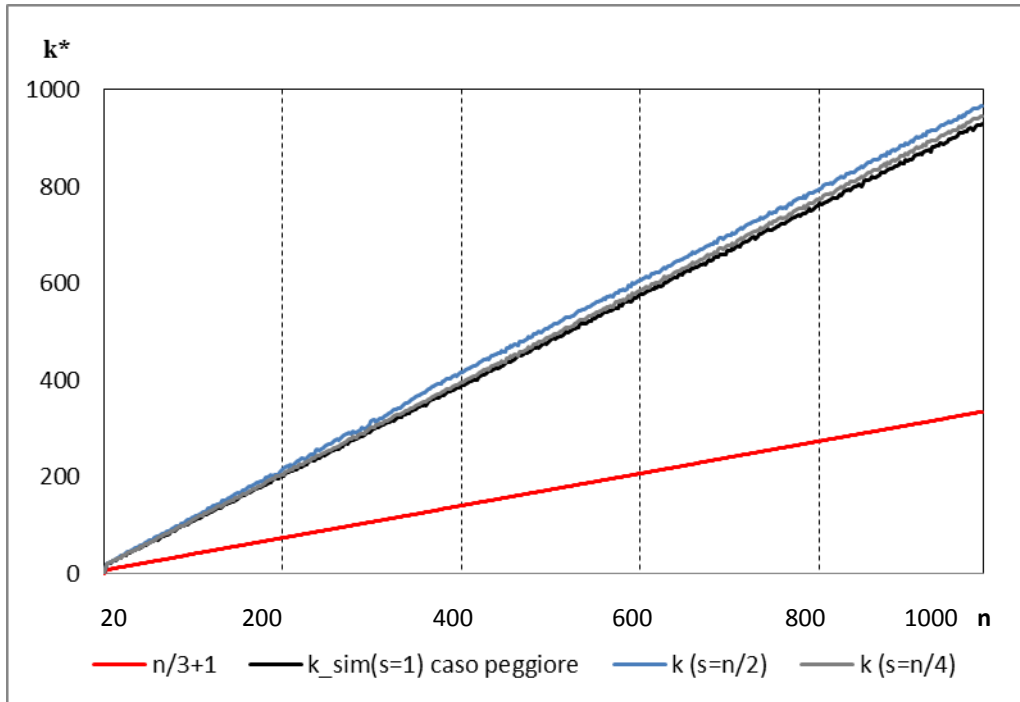
Le Figure 5 e 6 mostrano i valori di soglia s^* e k^* al variare di n . In entrambi i grafici le soglie empiriche sono poste a confronto con la soglia analitica determinata nel Capitolo 4 sotto la condizione restrittiva $s \geq k$ (linea rossa).

Figura 5 – Valori di s^* al variare di n tali che per $s > s^*$ P_B è coerente con IS



²¹ Il valore si ottiene sommando $n/2$ alla soglia analitica $n/3 + 1$.

Figura 6 - Valori di k^* al variare di n tali che per $k < k^*$ P_V è coerente con IS



La Figura 5 mostra che per ogni valore di k fissato vi è una relazione lineare tra la numerosità n e il valore della soglia. Si osserva, inoltre, che le soglie ottenute per via computazionale sono, come previsto, inferiori alla condizione sufficiente trovata nel Capitolo 4. In particolare, i valori di soglia sono i più bassi nel caso limite in cui chi riceve il trasferimento regressivo sia il più ricco. Ricordiamo, infatti, che la variazione di P_B sotto IS è data da

$$\Delta P_B = \frac{2\alpha}{n \cdot m(x)} \left[\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{3}{n/2+j} \right) - \sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} + \sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \right].$$

Quando $k=n/2$, n se si considera l'esercizio di simulazione, la sommatoria che dipende da k fornisce il minore contributo (positivo) possibile alla variazione dell'indice. Osserviamo una situazione analoga nella Figura 6, con riferimento alle soglie di k al variare di n per diversi scenari su s . Anche in questo caso i risultati presentati nella Tabella 3 mostrano che la soglia k , fissato s , è una funzione lineare di n . Le soglie calcolate con la simulazione sono al di sopra della condizione sufficiente trovata nel Capitolo 4. Inoltre, i valori più elevati si hanno nel caso limite $s = n/2$,

ovvero quando chi cede il reddito nel trasferimento regressivo è il più povero. In questo caso, infatti, per la variazione di P_V sotto IS si ha

$$\Delta P_V = \left[\sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{2}{n-j+1} + \frac{1}{n-j} \right) - \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \sum_{j=1}^s \left(\frac{j-n/2}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) \right].$$

Ne segue che se $s=1$, la sommatoria che dipende da s dà il minore contributo (positivo) possibile alla variazione dell'indice.

Per dare supporto all'analisi grafica, è stato effettuato un semplice esercizio di stima di un modello di regressione lineare in cui il valore di soglia è espresso in funzione della numerosità n . I risultati della stima, presentati in Tabella 3, confermano quanto già osservato nei grafici: la relazione tra la soglia s e n , fissato k , è lineare crescendo s di una proporzione costante β_1 al variare di n . Il coefficiente è massimo nel "caso peggiore" ($k=n$) e minimo per $k=n/2$. Allo stesso modo, la relazione tra la soglia k e n , fissato s , è lineare crescendo s di una proporzione costante β_1 al variare di n . Il coefficiente è più basso nel "caso peggiore" ($s=1$) e massimo per $s=n/2$.

Tabella 3 – Stima $s = f(n, k = \bar{k}), k = f(n, s = \bar{s})$ al variare di $n=1, \dots, 1000$.

	β	R^2
$s_{k=n/2+1} = \beta_1 n$	0.0368284	0.9963
$s_{k=n}^* = \beta_1 n$	0.0696680	0.9986
$s_{k=3n/4}^* = \beta_1 n$	0.0535261	0.9978
$k_{s=1}^* = \beta_1 n$	0.4315562	1.0000
$k_{s=n/2}^* = \beta_1 n$	0.4884321	0.9995
$k_{s=n/4}^* = \beta_1 n$	0.4474486	1.0000

5.3 Verifica della corretta determinazione delle soglie: il contenuto informativo degli indici P_B e P_V

In questo paragrafo si analizza l'effetto sui tre indici di polarizzazione – Wolfson, P_B e P_V – di un trasferimento IS dall'individuo di posizione s sotto la mediana all'individuo di posizione k sopra la mediana, allo scopo di verificare la corretta determinazione delle soglie empiriche s^* e k^* . Allo stesso tempo, vengono analizzati gli effetti del trasferimento sugli indici di disuguaglianza di Gini, Bonferroni e De Vergottini.

I valori di s e k , sono estratti casualmente considerando tre diversi scenari:

- Scenario 1 (“benchmark”): si estraggono $s > s^*$ e $k < k^*$ considerando le sole posizioni per le quali gli indici P_B e P_V sono coerenti con IS;
- Scenario 2: P_B non è coerente ($s < s^*$, $k = 3n/4$);
- Scenario 3: P_V non è coerente ($k > k^*$, $s = n/4$).

Per ogni estrazione si calcola la variazione degli indici in seguito al trasferimento IS rispetto alla distribuzione teorica x^0 generata come mistura di due normali di numerosità $n=1000$ (si veda par. 5.2, eq. (5.1)). In questo caso le soglie empiriche sono $s^*=50$ e $k^*=946$. Per rendere l'analisi robusta, ovvero affinché la variazione registrata non dipenda dalla semplice estrazioni di due sole posizioni s e k , si effettuano 10,000 estrazioni indipendenti delle posizioni s e k degli individui tra cui avvengono i trasferimenti e si calcolano variazioni degli indici per ogni estrazione. Vengono quindi presentate le variazioni percentuali medie degli indici e i rispettivi “intervalli di confidenza”.

La Tabella 4 mostra l'effetto di IS sugli indici di disuguaglianza di Gini, Bonferroni e De Vergottini. In tutti gli scenari si registra un aumento della disuguaglianza in seguito al trasferimento regressivo. Si ricordi, a questo proposito, che il trasferimento IS ha effetti dello stesso segno sia sulla disuguaglianza, sia sulla polarizzazione. Analizzando in dettaglio gli scenari si osserva che, in linea con le proprietà note degli indici di disuguaglianza confrontati, l'indice di Bonferroni è più sensibile dell'indice di Gini e di quello di De Vergottini quando l'individuo che cede il reddito è scelto tra

gli s^* % più poveri della distribuzione (Scenario 2). In questo caso si osservi anche che l'indice di De Vergottini è quello che si mostra meno sensibile. Analogamente, essendo l'indice di De Vergottini più sensibile ai trasferimenti che avvengono tra i "ricchi", questo si mostra più sensibile degli altri due ai trasferimenti IS in cui chi riceve il reddito è tra il k^* % più ricco della distribuzione (Scenario 3).

Tabella 4 - Variazione percentuale degli indici di DISUGUAGLIANZA in seguito ad un trasferimento IS , $n=1000$, $\alpha=10$ (medie su 10,000 repliche e varianza)

$n=1000$ ($\alpha=10$) $s^*=50, k^*=946$	Media su 10,000 repliche			Varianza su 10,000 repliche		
	Gini	Bonf	DeVe	Gini	Bonf	DeVe
Sc1) $s > s^*, k < k^*$	0.99%	0.78%	0.79%	0.00%	0.00%	0.00%
Sc2) $s < s^*, k = 3n/4$	1.57%	2.57%	0.98%	0.00%	0.00%	0.00%
Sc3) $k > k^*, s = n/4$	1.56%	0.95%	2.56%	0.00%	0.00%	0.00%

Tabella 5 - Variazione percentuale degli indici di POLARIZZAZIONE in seguito ad un trasferimento IS , $n=1000$, $\alpha=10$ (medie su 10,000 repliche e varianza)

$n=1000$ ($\alpha=10$)	Media su 10,000 repliche			Varianza su 10,000 repliche		
	Wolfson	PB	PV	Wolfson	PB	PV
Sc1) $s > s^*, k < k^*$	2.44%	3.76%	3.51%	0.01%	0.02%	0.02%
Sc2) $s < s^*, k = 3n/4$	1.20%	-2.40%	2.92%	0.00%	0.05%	0.00%
Sc3) $k > k^*, s = n/4$	1.22%	3.19%	-2.00%	0.00%	0.00%	0.04%

La Tabella 5 mostra l'effetto di IS sugli indici di polarizzazione di Wolfson, P_B e P_V . Nell'analizzare gli Scenari 2 e 3 si trova conferma sia dell'esistenza di soglie che rendono gli indici P_B e P_V coerenti con l'assioma IS, e pertanto indici di polarizzazione, sia della corretta determinazione delle soglie empiriche s^* e k^* . Osserviamo, infatti, che quando l'individuo che cede il reddito è scelto tra gli s^* % più poveri della distribuzione (Scenario 2), l'indice P_B registra una diminuzione della polarizzazione non essendo, per costruzione, coerente con l'assioma IS. Lo stesso accade per la variazione dell'indice P_V nello Scenario 3, ovvero quando chi riceve il reddito è tra il k^* % più ricco della distribuzione.

La Tabella 5 mostra, inoltre, che nello scenario benchmark i movimenti dei tre indici sono dello stesso segno. Nel confrontare il diverso comportamento degli indici di polarizzazione rispetto a IS si può, quindi, ipotizzare che la mancata coerenza di P_B e P_V quando i trasferimenti riguardino individui con redditi inferiori al percentile s^* o superiori al percentile k^* – pur costituendo un loro limite da superare – abbia un contenuto informativo. Se, ad esempio, confrontando due distribuzioni di reddito relativi a anni diversi, o diversi paesi, si dovesse osservare che l'indice di polarizzazione basato sul Bonferroni non è coerente con il risultato fornito dagli altri due indici, si potrebbe ipotizzare che vi sia stato, in media, un trasferimento di reddito ai danni degli individui più poveri. Allo stesso modo, una variazione dell'indice basato sul De Vergottini non coerente con quanto osservato per gli altri due, potrebbe indicare un incremento della quota di reddito posseduta dagli individui più ricchi. Tale ipotesi, puramente speculativa, dovrebbe essere supportata da una analisi più accurata sulle distribuzioni dei redditi confrontate.

Concentriamoci, infine, sui risultati dello scenario “benchmark” (Scenario 1). Possiamo osservare che gli indici P_B e P_V , nonostante la limitazione del supporto tra cui sono scelti gli individui tra cui avviene il trasferimento IS, sono più sensibili dell'indice di Wolfson. Analizzeremo con maggiore dettaglio questa proprietà degli indici nel paragrafo che segue.

5.4 Sensibilità dei trasferimenti degli indici di disuguaglianza e polarizzazione al variare dell'ammontare del reddito trasferito

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che, scelte le posizioni $s > s^*$ e $k < k^*$ degli individui che cedono e ricevono unità di reddito (scenario “benchmark”), la sensibilità degli indici P_B e P_V a IS è superiore a quella dell'indice di Wolfson, essendo P_B il più sensibile al trasferimento regressivo.

In questo paragrafo ci concentreremo sui trasferimenti tra individui di posizione s e k nello scenario “benchmark” – in cui, si ricorda, P_B e P_V sono coerenti con IS e possono essere considerati indici di polarizzazione – per valutare l'effetto dei

trasferimenti IS e di Pigou- Dalton (IB sopra e sotto la mediana) sia sugli indici di disuguaglianza che di bipolarizzazione.

La Tabella 6 presenta un confronto tra le diverse sensibilità degli indici di disuguaglianza rispetto ai trasferimenti, al variare di α . Per il trasferimento IS si osserva che, in media, che l'indice di Gini registra una più ampia variazione rispetto agli indici di Bonferroni e De Vergottini. Tale differenza aumenta all'aumentare del reddito trasferito²².

I trasferimenti IB sotto e sopra la mediana determinano, in linea con la definizione degli stessi, una diminuzione della disuguaglianza. Date le caratteristiche di sensibilità ai trasferimenti degli indici di Bonferroni e De Vergottini, si osserva che l'indice di Bonferroni il quale – ricordiamo – dà peso ai redditi degli individui in misura inversamente proporzionale al loro rango nella distribuzione (i.e. i poveri hanno più peso) è il più sensibile ai trasferimenti IB sotto la mediana. Per contro, l'indice di De Vergottini, dando più peso alle variazioni di reddito tra i più ricchi della distribuzione, è il più sensibile ai trasferimenti IB sopra la mediana. Per entrambi i trasferimenti la variazione dell'indice di Gini è intermedia rispetto alle variazioni degli altri due indici. Anche per i trasferimenti IB la differenza tra le variazioni degli indici aumenta con α . L'analisi dell'effetto complessivo dei trasferimenti IS e IB mostra, infine, una maggiore sensibilità dell'indice di Gini rispetto agli altri due indici per tutti i valori di α . Ne segue che, nel caso dell'impatto dei trasferimenti sulla disuguaglianza, l'effetto di IS prevale su quelli dei trasferimenti IB.

²² Si osservi che questa caratteristica della variazione degli indici, resa evidente dalla simulazione, si presenta anche nel caso in cui le posizioni siano scelte senza imporre vincoli sulla variazione di s e k . La differenza tra le variazioni degli indici è, tuttavia, meno accentuata.

Tabella 6 – Effetto dei trasferimenti IS e IB sugli indici di disuguaglianza al variare dell'ammontare di reddito trasferito α

EFFETTO IS - Media su 10,000 replichezioni				Varianza su 10,000 replichezioni		
$n=1000$	Gini	Bonf	DeVe	Gini	Bonf	DeVe
$s^*=50, k^*=946$						
$\alpha=10$	0.99%	0.78%	0.79%	0.00%	0.00%	0.00%
$\alpha=20$	2.05%	1.64%	1.66%	0.01%	0.01%	0.01%
$\alpha=30$	3.19%	2.57%	2.61%	0.01%	0.02%	0.02%
$\alpha=40$	4.40%	3.58%	3.64%	0.02%	0.04%	0.04%
$\alpha=50$	5.68%	4.68%	4.76%	0.03%	0.06%	0.06%
EFFETTO IB sotto $m(x)$ - Media su 10,000 replichezioni				Varianza su 10,000 replichezioni		
$n=1000$	Gini	Bonf	DeVe	Gini	Bonf	DeVe
$s^*=50, k^*=946$						
$\alpha=10$	-0.32%	-0.61%	-0.14%	0.00%	0.00%	0.00%
$\alpha=20$	-0.49%	-0.68%	-0.22%	0.00%	0.00%	0.00%
$\alpha=30$	-0.62%	-0.86%	-0.28%	0.00%	0.01%	0.00%
$\alpha=40$	-0.68%	-0.94%	-0.30%	0.01%	0.02%	0.00%
$\alpha=50$	-0.67%	-0.92%	-0.30%	0.01%	0.03%	0.00%
EFFETTO IB sopra $m(x)$ - Media su 10,000 replichezioni				Varianza su 10,000 replichezioni		
$n=1000$	Gini	Bonf	DeVe	Gini	Bonf	DeVe
$s^*=50, k^*=946$						
$\alpha=10$	-0.32%	-0.14%	-0.62%	0.00%	0.00%	0.00%
$\alpha=20$	-0.47%	-0.21%	-0.65%	0.00%	0.00%	0.00%
$\alpha=30$	-0.58%	-0.26%	-0.81%	0.00%	0.00%	0.01%
$\alpha=40$	-0.61%	-0.27%	-0.85%	0.01%	0.00%	0.02%
$\alpha=50$	-0.56%	-0.24%	-0.78%	0.01%	0.00%	0.03%
EFFETTO IS+IB - Media su 10,000 replichezioni				Varianza su 10,000 replichezioni		
$n=1000$	Gini	Bonf	DeVe	Gini	Bonf	DeVe
$s^*=50, k^*=946$						
$\alpha=10$	0.35%	0.02%	0.03%	0.00%	0.01%	0.01%
$\alpha=20$	1.08%	0.74%	0.77%	0.01%	0.01%	0.01%
$\alpha=30$	1.97%	1.44%	1.51%	0.02%	0.03%	0.03%
$\alpha=40$	3.08%	2.36%	2.47%	0.04%	0.05%	0.05%
$\alpha=50$	4.42%	3.49%	3.66%	0.06%	0.09%	0.09%

Le variazioni percentuali degli indici contenute in Tabella 7 permettono di valutare la sensibilità ai trasferimenti degli indici di polarizzazione di Wolfson, P_B e P_V al variare di α . Osserviamo, in primo luogo, che in linea con quanto presente in letteratura, per i tre indici ad un trasferimento regressivo IS corrispondono un aumento sia della disuguaglianza, sia della polarizzazione. Trasferimenti progressivi

che comportino invece un aumento della concentrazione su uno, o entrambi, segmenti della distribuzione del reddito sopra e sotto la mediana, hanno come effetto una diminuzione della disuguaglianza e un aumento della polarizzazione.

Per ogni valore di α , la variazione degli indici P_B e P_V rispetto al trasferimento IS è sempre superiore a quella dell'indice di Wolfson, essendo l'indice basato sul Bonferroni quello più reattivo al trasferimento regressivo. La differenza tra le variazioni degli indici è, inoltre, tanto più elevata, tanto più è grande α . Gli indici P_B e P_V , quindi, oltre a mostrare una maggiore sensibilità del Wolfson ai trasferimenti IS, variano con maggiore intensità tanto più è elevata la quota di reddito che viene trasferito dal centro della distribuzione (la classe media) verso gli estremi. Per quanto riguarda i trasferimenti di Pigou-Dalton, l'effetto dei trasferimenti registrato sugli indici di polarizzazione è analogo a quanto osservato per gli indici di disuguaglianza sui quali questi sono costruiti: P_B presenta la maggiore sensibilità ai trasferimenti IB sotto la mediana, mentre l'indice P_V è il più sensibile ai trasferimenti IB sopra la mediana. Considerando infine l'effetto complessivo, osserviamo che gli indici P_B e P_V sono più sensibili ai trasferimenti che "bipolarizzano" la distribuzione del reddito, mostrando P_B la reattività maggiore. Tale caratteristica diviene più evidente all'aumentare del reddito trasferito α . Ne segue che, stando ai risultati della simulazione, gli indici P_B e P_V non soltanto segnalano con più intensità il fenomeno di "svuotamento della classe media", ma che la loro sensibilità rispetto all'indice di Wolfson è tanto più accentuata quanto più è marcato il cambiamento nella distribuzione del reddito.

Tabella 7 - Effetto dei trasferimenti IS e IB sugli indici di polarizzazione al variare dell'ammontare di reddito trasferito α

EFFETTO IS - Media su 10,000 repliche				Varianza su 10,000 repliche		
<i>n</i> =1000						
<i>s</i> *=50, <i>k</i> *=946	Wolfson	PB	PV	Wolfson	PB	PV
$\alpha=10$	2.44%	3.76%	3.51%	0.01%	0.02%	0.02%
$\alpha=20$	4.73%	7.26%	6.78%	0.03%	0.09%	0.08%
$\alpha=30$	6.87%	10.50%	9.80%	0.06%	0.22%	0.18%
$\alpha=40$	8.84%	13.48%	12.55%	0.10%	0.42%	0.34%
$\alpha=50$	10.68%	16.17%	15.03%	0.16%	0.69%	0.56%
EFFETTO IB sotto <i>m</i> (x) - Media su 10,000 repliche				Varianza su 10,000 repliche		
<i>n</i> =1000						
<i>s</i> *=50, <i>k</i> *=946	Wolfson	PB	PV	Wolfson	PB	PV
$\alpha=10$	0.69%	2.12%	0.44%	0.00%	0.05%	0.00%
$\alpha=20$	1.01%	2.29%	0.65%	0.02%	0.07%	0.01%
$\alpha=30$	1.16%	2.81%	0.71%	0.06%	0.16%	0.04%
$\alpha=40$	1.16%	3.00%	0.68%	0.10%	0.27%	0.07%
$\alpha=50$	0.98%	2.84%	0.54%	0.15%	0.41%	0.10%
EFFETTO IB sopra <i>m</i> (x) - Media su 10,000 repliche				Varianza su 10,000 repliche		
<i>n</i> =1000						
<i>s</i> *=50, <i>k</i> *=946	Wolfson	PB	PV	Wolfson	PB	PV
$\alpha=10$	0.70%	0.48%	1.95%	0.01%	0.01%	0.05%
$\alpha=20$	1.13%	0.84%	2.15%	0.03%	0.03%	0.06%
$\alpha=30$	1.64%	1.30%	2.92%	0.08%	0.09%	0.15%
$\alpha=40$	2.11%	1.80%	3.49%	0.17%	0.20%	0.30%
$\alpha=50$	2.54%	2.34%	3.90%	0.29%	0.36%	0.50%
EFFETTO IS+IB - Media su 10,000 repliche				Varianza su 10,000 repliche		
<i>n</i> =1000						
<i>s</i> *=50, <i>k</i> *=946	Wolfson	PB	PV	Wolfson	PB	PV
$\alpha=10$	3.82%	6.34%	5.89%	0.02%	0.08%	0.07%
$\alpha=20$	6.85%	10.36%	9.55%	0.08%	0.19%	0.15%
$\alpha=30$	9.64%	14.56%	13.38%	0.20%	0.47%	0.37%
$\alpha=40$	12.08%	18.21%	16.67%	0.37%	0.89%	0.69%
$\alpha=50$	14.16%	21.28%	19.40%	0.60%	1.47%	1.15%

5.5 Sensibilità ai trasferimenti degli indici e delle loro componenti

In questo paragrafo analizziamo, con maggiore dettaglio, l'effetto dei trasferimenti sulle diverse componenti degli indici di polarizzazione (la componente *between*, la *within groups* e il residuo) per meglio caratterizzare le potenzialità degli indici P_B e P_V rispetto all'indice di Wolfson.

Vogliamo verificare se la maggiore sensibilità degli indici proposti rispetto a Wolfson, si mantiene anche considerando diverse regioni della distribuzione del reddito in cui avvengono i trasferimenti. Nel farlo, considereremo una popolazione di 1000 individui e confronteremo lo scenario prima definito "benchmark" (cfr. par.

5.4) con altri definiti restringendo il supporto da cui si estraggono le posizioni s e k , nella distribuzione del reddito, degli individui tra cui simulare i trasferimenti.

Nello scenario “benchmark”, s varia in $(s^*, n/2)$ e k in $(n/2+1, k^*)$, essendo per $n=1000$, $s^*=50$ e $k^*=946$. Per definire gli altri scenari si divide il supporto su cui varia s sotto la mediana - $(50, 500)$ - e quello su cui varia k sopra la mediana - $(501, 946)$ - in più regioni considerando i seguenti scenari:

- Scenario 1: s in $(50, 250)$, k in $(501, 750)$
- Scenario 2: s in $(50, 250)$, k in $(750, 946)$
- Scenario 3: s in $(250, 500)$, k in $(501, 750)$
- Scenario 4: s in $(250, 500)$, k in $(750, 946)$.

Prima di procedere al commento dei risultati della simulazione, descriviamo più in dettaglio le opzioni presentate. I supporti di s sotto la mediana e k sopra la mediana sono divisi in due “zone”: per il supporto della posizione s dell’individuo oggetto dei trasferimenti di reddito sotto la mediana si definiscono un segmento dei “poveri” e uno degli individui di reddito medio (che definiamo per semplicità di esposizione “classe medio-bassa”); analogamente per la scelta di k si divide il supporto tra individui appartenenti alla “classe medio-alta” e individui “ricchi”.

Per il trasferimento IS possiamo così ridefinire gli scenari

- Scenario 1: trasferimento di reddito dai “poveri” alla “classe medio-alta”
- Scenario 2: trasferimento di reddito dai “poveri” ai “ricchi”
- Scenario 3: trasferimento di reddito dalla “classe medio-bassa” alla “classe medio-alta”
- Scenario 4: trasferimento di reddito dalla “classe medio-bassa” ai ricchi.

Per i trasferimenti IB abbiamo

- Scenario 1: diminuzione della disuguaglianza tra i “poveri” e tra gli appartenenti alla “classe medio-alta”
- Scenario 2: diminuzione della disuguaglianza tra i “poveri” e i “ricchi”

- Scenario 3: diminuzione della disuguaglianza nella “classe medio-bassa” e nella “classe medio-alta”
- Scenario 4: diminuzione della disuguaglianza nella “classe medio-bassa” e tra i “ricchi”.

Appare evidente dalla descrizione quindi che abbiamo uno scenario “estremo”, lo Scenario 2, uno di trasferimenti all’interno della classe media (Scenario 3), mentre gli altri due sono misti.

5.5.1 Lo scenario “benchmark”

In primo luogo, analizziamo in dettaglio lo scenario “benchmark”. Analogamente all’analisi presentata nel paragrafo precedente, i risultati sono ottenuti effettuando 10,000 estrazioni indipendenti delle posizioni s e k degli individui tra cui avvengono i trasferimenti e calcolando, per ogni estrazione, le variazioni rispetto alla distribuzione teorica x^0 generata come mistura di due normali di numerosità $n=1000$ (si veda par. 5.2). Presentiamo le variazioni percentuali medie degli indici, e i rispettivi “intervalli di confidenza”, a seguito di un trasferimento regressivo IS, uno progressivo IB sotto la mediana, un trasferimento IB sopra la mediana e l’effetto dei tre trasferimenti nel loro complesso.

Tabella 8 – Variazione percentuale degli indici rispetto alla distribuzione teorica iniziale $s>s^*$ e $k<k^*$ ($n=1000$, $\alpha=10$, $s^*=50$, $k^*=946$; valori medi su 10,000 replicazioni, varianza tra parentesi)

BENCHMARK	Effetto su Disuguaglianza (A)	Effetto su componente between means (B)	Effetto su componente within (comprensiva di residuo) (C)	Effetto su Polarizzazione (D)
GINI-Wolfon				
IS	0.99% (0.00)	1.45% (0.00)	-0.27% (0.02)	2.44% (0.01)
IB sotto mediana	-0.32% (0.00)	0.00% (0.00)	-1.19% (0.01)	0.69% (0.00)
IB sopra mediana	-0.32% (0.00)	0.00% (0.00)	-1.19% (0.01)	0.70% (0.01)
IS+IB	0.35% (0.00)	1.45%(0.00)	-2.65%(0.03)	3.82%(0.02)
Bonferroni - P_B				
IS	0.78% (0.00)	1.45% (0.00)	-0.44% (0.01)	3.76% (0.01)
IB sotto mediana	-0.61% (0.00)	0.00% (0.00)	-1.73% (0.01)	2.12% (0.05)
IB sopra mediana	-0.14% (0.00)	0.00% (0.00)	-0.39% (0.01)	0.48% (0.01)
IS+IB	0.03%(0.01)	1.45%(0.00)	-3.56%(0.04)	6.34%(0.08)
De Vergottini - P_V				
IS	0.78% (0.00)	1.45% (0.00)	-0.50% (0.01)	3.51% (0.01)
IB sotto mediana	-0.14% (0.00)	0.00% (0.00)	-0.41% (0.00)	0.44% (0.00)
IB sopra mediana	-0.62% (0.00)	0.00% (0.00)	-1.74% (0.04)	1.95% (0.05)
IS+IB	0.02%(0.01)	1.45%(0.00)	-3.76%(0.05)	5.89%(0.06)

La Tabella 8 mostra le variazioni medie, e le rispettive variabilità, degli indici di polarizzazione, degli indici di disuguaglianza su cui sono costruiti e delle loro componenti nell'ipotesi in cui i valori di soglia siano tali che $s > s^*$ e $k < k^*$. Come già illustrato nel paragrafo precedente, l'indice di Gini è il più sensibile tra gli indici di disuguaglianza rispetto a IS e al trasferimento complessivo IS e IB, mentre i trasferimenti progressivi IB sotto e sopra la mediana sono registrati con maggiore intensità dagli indici di Bonferroni (IB sotto la mediana) e De Vergottini (IB sopra la mediana). L'analisi della variazione delle componenti *between* e *within* della disuguaglianza mostra che tale diversa sensibilità degli indici dipende, principalmente, dalle variazioni della componente *within* che, si ricorda, nel caso degli indici di Bonferroni e De Vergottini comprende un residuo che tiene conto del sistema di ponderazione dei redditi. La variazione della componente *between* è, infatti, nulla nel caso dei trasferimenti IB e dello stesso ammontare nei tre indici per i trasferimenti IS (1.45%). Si osserva, in particolare, che per l'indice di Gini, i trasferimenti IB hanno lo stesso effetto sulla componente *within* sia che si verifichino sotto la mediana, sia tra gli individui al di sopra della mediana (-1.19%). L'effetto di IB sulla riduzione della disuguaglianza *within* è, invece, più forte sotto la mediana per l'indice di Bonferroni e sopra la mediana per l'indice di De Vergottini. Inoltre, data la struttura di ponderazione dei redditi per i due indici (si veda il Capitolo 3) l'effetto di IB sotto la mediana sulla componente *within* dell'indice di Bonferroni (-1.73%) è approssimativamente della stessa entità dell'effetto IB sopra la mediana per l'indice di De Vergottini (-1.74%). Specularmente, l'effetto di IB sopra la mediana per l'indice di Bonferroni (-0.39%) è in media della stessa entità dell'effetto di IB sotto la mediana per l'indice di De Vergottini (-0.41%).

Queste proprietà manifestano il loro effetto sui corrispettivi indici di polarizzazione. Abbiamo, infatti, come già mostrato nel paragrafo precedente, e qui nella colonna D, che essendo l'entità della variazione degli indici dettata dalla diversa reattività ai trasferimenti delle componenti *within* (comprensiva del residuo per gli indici P_B e P_V), P_B e P_V sono più sensibili dell'indice di Wolfson sia ai trasferimenti IS, sia al trasferimento complessivo IS e IB. La variazione della componente *between* della

disuguaglianza, è infatti, come già osservato nel Capitolo 4, par. 4.4, è molto simile per i tre indici, mentre la variazione della componente *within* rispetto ai trasferimenti considerati è sempre più elevata, in valore assoluto, per P_B e P_V rispetto all'indice di Wolfson²³.

5.5.2 Confronto tra diversi scenari

In questo paragrafo, presentiamo l'effetto dei trasferimenti negli scenari precedentemente descritti.

La simulazione mostra che, in tutti gli scenari presentati, l'indice P_B registra una maggiore variazione della polarizzazione rispetto all'introduzione congiunta dei trasferimenti IS e IB (Tabella 9). La variazione di P_B è massima nello scenario "benchmark" ed è, invece, di dimensione più ridotta quando si considerino trasferimenti IS e IB che prevedano trasferimento di reddito dai "poveri" o diminuzione della disuguaglianza tra i "poveri" (Scenari 1 e 2).

Tabella 9 – Effetto dei trasferimenti sugli indici di polarizzazione nei diversi scenari (media su 10,000 repliche)

	IS			IB sotto la mediana		
	Wolf	PolBo	PolDeVe	Wolf	PolBo	PolDeVe
<i>s</i> >50, <i>k</i> <946 ("benchmark")	2.44%	3.76%	3.51%	0.69%	2.12%	0.44%
Sc1 <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (501,750)	2.31%	2.74%	4.07%	0.24%	0.91%	0.14%
Sc2 <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (750,947)	1.32%	2.06%	1.95%	0.24%	0.91%	0.14%
Sc3 <i>s</i> in (250, 500) <i>k</i> in (501, 750)	3.33%	5.12%	4.73%	0.29%	0.40%	0.21%
Sc4 <i>s</i> in (250, 500) <i>k</i> in (750, 946)	2.34%	4.43%	2.62%	0.29%	0.40%	0.21%

	IB sopra la mediana			IS+IB		
	Wolf	PolBo	PolDeVe	Wolf	PolBo	PolDeVe
<i>s</i> >50, <i>k</i> <946 ("benchmark")	0.70%	0.48%	1.95%	3.82%	6.34%	5.89%
Sc1 <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (501,750)	0.37%	0.32%	0.45%	2.90%	3.95%	4.62%
Sc2 <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (750,947)	0.22%	0.13%	0.76%	1.77%	3.08%	2.83%
Sc3 <i>s</i> in (250, 500) <i>k</i> in (501, 750)	0.37%	0.32%	0.45%	3.96%	5.81%	5.36%
Sc4 <i>s</i> in (250, 500) <i>k</i> in (750, 946)	0.22%	0.13%	0.76%	2.83%	4.93%	3.57%

²³ Nel leggere per riga i dati delle tabelle si deve considerare che l'effetto complessivo letto in colonna D non è la somma degli effetti parziali sulle componenti. Il tasso contenuto in ogni cella è, infatti, la media su 10,000 repliche del tasso di variazione ottenuto in ogni replicazione. Nell'interpretare tale variazione media, si deve tener conto della presenza di tassi "lontani dalla media" in un numero limitato di repliche. Questa informazione è contenuta nel valore della varianza dei singoli tassi riportata tra parentesi.

Come emerge dai risultati presentati nelle tabelle 10-12, il risultato osservato deriva dall'effetto di composizione dei due trasferimenti, in particolare sulla componente *within groups* (comprensiva del residuo) della disuguaglianza²⁴. Se da un lato, infatti, per l'indice P_B l'effetto di IB sulla componente *within* di tutti gli scenari è di minore entità se si riduce il supporto su cui variano s e k (Tabella 11), dall'altro negli Scenari 1 e 2, IS ha come effetto una variazione positiva del termine *within* (rispettivamente 0.38% nello scenario 1 e 0.96% nello Scenario 2) che non si registra negli altri scenari.

Più in dettaglio, ricordando per comodità di esposizione che l'effetto di IS sulla componente *within* comprensiva del residuo è dato da

$$\Delta B_{WITH} + \Delta B_{ResidualAw} = \left(\frac{\alpha}{n\mu(x)} \left[\sum_{j=s}^{n/2} \frac{1}{j} - \sum_{j=k}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) - \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n/2+j} \right) \right] \right), \quad \text{quando } s$$

varia in (50, 250) il suo valore in ogni simulazione è potenzialmente inferiore a quello assunto nello scenario "benchmark". Pertanto, la sommatoria, di segno positivo, che dipende da s - e descrive l'apporto dei ranghi degli individui sotto la mediana alla variazione - supera quella negativa, dipendente da k , che rappresenta il peso dei ranghi degli individui che hanno reddito superiore a quello mediano.

In modo speculare osserviamo che la variazione di P_V , sempre più ampia rispetto all'indice di Wolfson, è massima nello scenario "benchmark" ed è, invece, di dimensione più ridotta quando si considerino trasferimenti IS e IB che prevedano trasferimento di reddito ai "ricchi" o diminuzione della disuguaglianza tra i "ricchi" (Scenari 2 e 4). Anche in questo caso, il risultato deriva dall'effetto di composizione dei due trasferimenti sulla componente *within groups* (comprensiva del residuo). Si ha, infatti, che l'effetto IS determina una variazione positiva del termine *within* che non si registra, invece, negli altri scenari (Tabella 12). Essendo, infatti,

$$\Delta V_{WITH} + \Delta V_{ResidualAw} = \frac{\alpha}{n\mu(x)} \left[-\sum_{j=1}^s \left(\frac{j-n/2}{j-n} \right) \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) + \sum_{j=1}^k \left(\frac{1}{n/2-j+1} \right) - \sum_{j=1}^{n/2} \left(\frac{1}{n-j} \right) \right]$$

quando k varia in (750, 946) la sommatoria, di segno positivo, che dipende da k - e

²⁴ Si ricorda che l'effetto dei trasferimenti sulla componente *between* non dipende da s e k nel caso di trasferimento IS ed è nullo nel caso di trasferimenti IB (cfr. Capitolo 4)

che descrive l'apporto dei ranghi degli individui sopra la mediana alla variazione – supera quella negativa che dipende da s .

Osserviamo, per concludere, che questo non è un elemento distintivo dei due indici

P_B e P_V . Per l'indice di Wolfson vale, infatti, $\Delta G_{WITH} = \frac{\alpha}{n\mu(x)} \cdot \left(\frac{k-s}{n+2} \right)$. Ne segue

che l'effetto dei trasferimenti sulla componente *within* dell'indice di Gini, e quindi sull'indice di Wolfson, si riduce restringendo il supporto su cui variano s e k .

Tabella 10 - Effetto dei trasferimenti sulla variazione dell'indice di Gini e di Wolfson e loro componenti nei diversi scenari (media su 10,000 replicazioni)

IB + IS	Gini_n	BetGini	WithGini	Wolf
$s > 50, k < 946$ (“benchmark”)	0.35%	1.45%	-2.65%	3.82%
Sc1) s in (50,250) k in (501,750)	0.80%	1.45%	-0.97%	2.90%
Sc2) s in (50,250) k in (750,946)	1.29%	1.44%	0.87%	1.77%
Sc3) s in (250,500) k in (501,750)	0.30%	1.45%	-2.83%	3.96%
Sc4) s in (250, 500) k in (750,946)	0.79%	1.44%	-0.99%	2.83%
IS	Gini_n	BetGini	WithGini	Wolf
$s > 50, k < 946$ (“benchmark”)	0.99%	1.45%	-0.27%	2.44%
Sc1) s in (50,250) k in (501,750)	1.05%	1.45%	-0.06%	2.31%
Sc2) s in (50,250) k in (750,946)	1.52%	1.45%	1.69%	1.32%
Sc3) s in (250,500) k in (501,750)	0.57%	1.45%	-1.82%	3.33%
Sc4) s in (250, 500) k in (750,946)	1.04%	1.45%	-0.08%	2.34%
IB sotto mediana	Gini_n	BetGini	WithGini	Wolf
$s > 50, k < 946$ (“benchmark”)	-0.32%	0.00%	-1.19%	0.69%
Sc1) s in (50,250) k in (501,750)	-0.11%	0.00%	-0.41%	0.24%
Sc2) s in (50,250) k in (750,946)	-0.11%	0.00%	-0.41%	0.24%
Sc3) s in (250,500) k in (501,750)	-0.14%	0.00%	-0.52%	0.29%
Sc4) s in (250, 500) k in (750,946)	-0.14%	0.00%	-0.52%	0.29%
IB sopra mediana	Gini_n	BetGini	WithGini	Wolf
$s > 50, k < 946$ (benchmark)	-0.32%	0.00%	-1.19%	0.70%
Sc1) s in (50,250) k in (501,750)	-0.13%	0.00%	-0.50%	0.37%
Sc2) s in (50,250) k in (750,946)	-0.11%	0.00%	-0.39%	0.22%
Sc3) s in (250,500) k in (501,750)	-0.13%	0.00%	-0.50%	0.37%
Sc4) s in (250, 500) k in (750,946)	-0.11%	0.00%	-0.39%	0.22%

Tabella 11 - Effetto dei trasferimenti sulla variazione dell'indice di Bonferroni e su P_B e loro componenti nei diversi scenari (media su 10,000 replicazioni)

IS+IB	Bonf	BetBo	WithBo	PolBo
<i>s</i> >50, <i>k</i> <946 (“benchmark”)	0.03%	1.45%	-3.56%	6.34%
Sc1) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (501,750)	0.74%	1.45%	-0.56%	3.95%
Sc2) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (750,946)	0.97%	1.44%	0.10%	3.08%
Sc3) <i>s</i> in (250,500) <i>k</i> in (501,750)	0.19%	1.45%	-2.08%	5.81%
Sc4) <i>s</i> in (250, 500) <i>k</i> in (750,946)	0.43%	1.44%	-1.42%	4.93%
IS	Bonf	BetBo	WithBo	PolBo
<i>s</i> >50, <i>k</i> <946 (“benchmark”)	0.78%	1.45%	-0.44%	3.76%
Sc1) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (501,750)	1.07%	1.45%	0.38%	2.74%
Sc2) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (750,946)	1.28%	1.45%	0.96%	2.06%
Sc3) <i>s</i> in (250,500) <i>k</i> in (501,750)	0.38%	1.45%	-1.56%	5.12%
Sc4) <i>s</i> in (250, 500) <i>k</i> in (750,946)	0.59%	1.45%	-0.98%	4.43%
IB -	Bonf	BetBo	WithBo	PolBo
<i>s</i> >50, <i>k</i> <946 (“benchmark”)	-0.61%	0.00%	-1.73%	2.12%
Sc1) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (501,750)	-0.26%	0.00%	-0.74%	0.91%
Sc2) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (750,946)	-0.26%	0.00%	-0.74%	0.91%
Sc3) <i>s</i> in (250,500) <i>k</i> in (501,750)	-0.12%	0.00%	-0.34%	0.40%
Sc4) <i>s</i> in (250, 500) <i>k</i> in (750,946)	-0.12%	0.00%	-0.34%	0.40%
IB+	Bonf	BetBo	WithBo	PolBo
<i>s</i> >50, <i>k</i> <946 (“benchmark”)	-0.14%	0.00%	-0.39%	0.48%
Sc1) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (501,750)	-0.07%	0.00%	-0.20%	0.32%
Sc2) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (750,946)	-0.04%	0.00%	-0.11%	0.13%
Sc3) <i>s</i> in (250,500) <i>k</i> in (501,750)	-0.07%	0.00%	-0.20%	0.32%
Sc4) <i>s</i> in (250, 500) <i>k</i> in (750,946)	-0.04%	0.00%	-0.11%	0.13%

Tabella 12 - Effetto dei trasferimenti sulla variazione dell'indice di De Vergottini e su P_V e loro componenti nei diversi scenari (media su 10,000 replicazioni)

IS+IB	DeVe	BetDeVe	WithDeVe	PolDeVe
<i>s</i> >50, <i>k</i> <946 (“benchmark”)	0.02%	1.45%	-3.76%	5.89%
Sc1) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (501,750)	0.44%	1.45%	-1.51%	4.62%
Sc2) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (750,946)	0.99%	1.44%	0.12%	2.83%
Sc3) <i>s</i> in (250,500) <i>k</i> in (501,750)	0.20%	1.45%	-2.22%	5.36%
Sc4) <i>s</i> in (250, 500) <i>k</i> in (750,946)	0.75%	1.44%	-0.58%	3.57%
IS	DeVe	BetDeVe	WithDeVe	PolDeVe
<i>s</i> >50, <i>k</i> <946 (“benchmark”)	0.79%	1.45%	-0.50%	3.51%
Sc1) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (501,750)	0.60%	1.45%	-1.05%	4.07%
Sc2) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (750,946)	1.29%	1.45%	0.98%	1.95%
Sc3) <i>s</i> in (250,500) <i>k</i> in (501,750)	0.39%	1.45%	-1.67%	4.73%
Sc4) <i>s</i> in (250, 500) <i>k</i> in (750,946)	1.08%	1.45%	0.36%	2.62%
IB-	DeVe	BetDeVe	WithDeVe	PolDeVe
<i>s</i> >50, <i>k</i> <946 (“benchmark”)	-0.14%	0.00%	-0.41%	0.44%
Sc1) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (501,750)	-0.04%	0.00%	-0.12%	0.14%
Sc2) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (750,946)	-0.04%	0.00%	-0.12%	0.14%
Sc3) <i>s</i> in (250,500) <i>k</i> in (501,750)	-0.07%	0.00%	-0.21%	0.21%
Sc4) <i>s</i> in (250, 500) <i>k</i> in (750,946)	-0.07%	0.00%	-0.21%	0.21%
IB+	DeVe	BetDeVe	WithDeVe	PolDeVe
<i>s</i> >50, <i>k</i> <946 (“benchmark”)	-0.62%	0.00%	-1.74%	1.95%
Sc1) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (501,750)	-0.12%	0.00%	-0.35%	0.45%
Sc2) <i>s</i> in (50,250) <i>k</i> in (750,946)	-0.25%	0.00%	-0.72%	0.76%
Sc3) <i>s</i> in (250,500) <i>k</i> in (501,750)	-0.12%	0.00%	-0.35%	0.45%
Sc4) <i>s</i> in (250, 500) <i>k</i> in (750,946)	-0.25%	0.00%	-0.72%	0.76%

Capitolo 6 – L'applicazione ai dati EU-SILC

In questo capitolo utilizzeremo gli indici proposti per stimare i livelli di polarizzazione dei redditi in Italia dal 2007 al 2011. Si applicheranno stimatori degli indici Wolfson, P_B e P_V alla distribuzione dei redditi familiari disponibili negli anni dal 2007 (Indagine EU-SILC 2008) al 2011 (Indagine EU-SILC 2012).

6.1 L'indagine EU-SILC

L'indagine europea sui redditi e le condizioni di vita della famiglia (EU-SILC) è una delle principali fonti di dati per i rapporti periodici dell'Unione Europea sulla situazione sociale e sulla diffusione della povertà nei paesi europei. L'ISTAT partecipa al progetto europeo conducendo ogni anno, a partire dal 2004, l'indagine sul reddito e le condizioni di vita delle famiglie²⁵.

L'indagine è condotta su un campione di circa 26,000 famiglie, distribuite in 800 comuni italiani di diversa ampiezza demografica. L'unità di rilevazione è la famiglia di fatto, definita come l'insieme di persone legate da vincoli di matrimonio, parentela, affinità, adozione, tutela o da vincoli affettivi, coabitanti ed aventi dimora nello stesso comune (anche se non residenti secondo l'anagrafe nello stesso domicilio). Il disegno d'indagine garantisce la rappresentatività per l'intera popolazione residente in Italia. Il disegno include sia una componente panel, sia una longitudinale non necessariamente collegabili tra loro. Il campione relativo a ogni occasione d'indagine è costituito da quattro gruppi rotazionali, ognuno di dimensione pari a un quarto della numerosità campionaria complessiva. Ogni gruppo rimane nel campione per quattro anni consecutivi e ogni anno il campione si rinnova con l'entrata di un nuovo gruppo. In questo modo si riduce l'attrito tipico delle indagini panel e si introducono ogni anno nuove famiglie, consentendo l'arricchimento informativo dei dati trasversali rispetto a quello che si avrebbe con un'indagine panel classica. Il disegno campionario si basa su quattro campioni longitudinali indipendenti; ognuno di essi è a due stadi: le unità di primo stadio sono i comuni,

²⁵ Per una descrizione dettagliata dell'Indagine si veda Ceccarelli et al. (2008).

quelle di secondo stadio le famiglie. Le unità di primo stadio sono stratificate, a livello regionale, sulla base della dimensione demografica dei comuni²⁶. In ogni strato si estraggono prima i comuni e da questi le famiglie. Il campione trasversale si ottiene dalla somma delle quattro componenti panel.

L'indagine fornisce un'ampia gamma di informazioni sul reddito sia a livello familiare, sia rispetto agli individui che compongono il nucleo familiare, a livello nazionale e per ripartizione geografica. Per i nostri scopi utilizzeremo le distribuzioni del reddito disponibile familiare a livello nazionale²⁷ relativi alla sola componente trasversale del campione. Per il periodo considerato si escludono dalla distribuzione i redditi negativi, ottenendo le numerosità campionarie rappresentate in Tabella 13.

Tabella 13

Anno di rilevazione	Numerosità campionaria
2007	20,768
2008	20,363
2009	19,005
2010	19,234
2011	19,411

²⁶ All'interno di ciascuna regione vi sono tre tipologie di strato: strati autorappresentativi in cui è presente un solo comune che entra in tutte le componenti longitudinali; strati non autorappresentativi del "primo tipo" in cui sono presenti pochi comuni di grandi dimensioni, dai quali vengono estratti due comuni ognuno dei quali è presente in due dei quattro campioni longitudinali; strati non rappresentativi del "secondo tipo", in cui sono presenti comuni di dimensione inferiore da cui sono estratti quattro comuni, ognuno presente in uno solo dei campioni longitudinali. Si ha un totale di 288 strati.

²⁷ Il reddito familiare disponibile corrisponde alla somma delle componenti del reddito personale di tutti i componenti della famiglia più le componenti del reddito a livello familiare, al netto delle imposte sul reddito alla fonte e dei contributi sociali, o di entrambi. Per una definizione dettagliata si veda la definizione della variabile HY020 nel REGOLAMENTO (CE) N. 1980/2003 DELLA COMMISSIONE del 21 ottobre 2003.

6.2 Gli stimatori

Per la stima della disuguaglianza e della polarizzazione useremo dei semplici stimatori ponderati, costruiti a partire dalla formulazione discreta degli indici presentata nel par. 2.3.

Nel dettaglio

$$\hat{G}(x) = 1 - \frac{2}{n(n-1)\mu(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i w_j x_j \quad (6.1)$$

$$\hat{B}(x) = 1 - \frac{1}{(n-1)\mu(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i w_j x_j \quad (6.2)$$

$$\hat{V}(x) = \frac{1}{\left(1 + n \sum_{s=2}^{n-1} \frac{1}{s}\right) \mu(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \sum_{j=n-i+1}^n w_j x_j - 1 \quad (6.3)$$

con somme di $n-1$ termini, affinché gli indici siano corretti, e w_j sono i coefficienti di riporto all'universo relativi alla componente trasversale. Tali pesi, calcolati e distribuiti dall'ISTAT contestualmente al rilascio dei dati sul reddito²⁸, si ottengono a partire dall'inverso della probabilità di selezione della famiglia nel campione, corretta per la presenza di mancate risposte totali. I coefficienti di riporto all'universo si ottengono da queste ricorrendo agli stimatori di ponderazione vincolata, ovvero determinando il fattore correttivo che rende il totale campionario della variabile di interesse il più vicino possibile a totali noti nella popolazione²⁹.

A partire da questi si stimano gli indici di polarizzazione corrispondenti:

²⁸ Variabile DB090.

²⁹ Si veda Ceccarelli et al. (2008), pp. 32- 42.

$$\begin{aligned}
\hat{P}_G &= 2 \frac{\mu(x)}{m(x)} [G_{BET_means} - G_{WITH}] = \\
&= 2 \frac{\mu(x)}{m(x)} \left(\begin{aligned} &\frac{1}{4\mu(x)} (\mu(x+) - \mu(x-)) - \\ &-\frac{1}{2\mu(x)} \left(\frac{1}{2} \mu(x-) - \frac{1}{n/2(n/2+1)} \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j(-) \right) - \\ &-\frac{1}{2\mu(x)} \left(\frac{1}{2} \mu(x+) - \frac{1}{n/2(n/2+1)} \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^i x_j(+) \right) \end{aligned} \right) \quad (6.4)
\end{aligned}$$

(6.5)

$$\begin{aligned}
\hat{P}_B &= \frac{2\mu(x)}{m(x)} [B_{BET_means} - (B_{WITH} + B_{residualA_w})] = \\
&= \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left(\begin{aligned} &\frac{1}{n\mu(x)} \frac{n}{2} (\mu(x+) - \mu(x-)) \left(\sum_{j=1}^{n/2} \frac{1}{n/2+j} \right) = \frac{1}{2\mu(x)} (\mu(x+) - \mu(x-)) \left(\sum_{j=1}^{n/2} \frac{1}{n/2+j} \right) - \\ &-\frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{n}{2} \mu(x-) - \sum_{i=1}^{n/2} \mu_i(x-) \right] - \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{n}{2} \mu(x+) - \sum_{i=1}^{n/2} \mu_i(x+) \right] - \\ &-\frac{1}{2n\mu(x)} \left[\frac{n}{2} \mu(x-) - \sum_{i=1}^{n/2} \mu_i(x-) \right] - \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\mu(x+) \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) - \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i-n/2}{i+n/2} \right) \mu_i(x+) \right] \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

(6.6)

$$\begin{aligned}
\hat{P}_V &= \frac{2\mu(x)}{m(x)} [V_{BET_means} - (V_{WITH} + V_{residualA_w})] = \\
&= \frac{2\mu(x)}{m(x)} \left(\begin{aligned} &\frac{1}{2\mu(x)} (\mu(x+) - \mu(x-)) \left(\sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{n-i+1} \right) - \\ &-\frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} M_i(x-) - \frac{n}{2} \mu(x-) \right] - \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} M_i(x+) - \frac{n}{2} \mu(x+) \right] - \\ &-\frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i}{i-n} \right) M_i(x-) - \sum_{i=1}^{n/2} \left(\frac{i}{i-n} \right) \mu(x-) \right] - \frac{1}{2n\mu(x)} \left[\sum_{i=1}^{n/2} M_i(x+) - \frac{n}{2} \mu(x+) \right] \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

Per la stima dell'errore assoluto di campionamento e la costruzione degli intervalli di confidenza abbiamo applicato la tecnica di ricampionamento *bootstrap*. Gli stimatori (6.1) - (6.6) hanno una formulazione complessa e, pertanto, non può essere applicata la metodologia standard per il calcolo della varianza campionaria.

Nel dettaglio, supponiamo di aver estratto un campione x di numerosità n da una popolazione X con funzione di ripartizione F non nota e di voler stimare la varianza campionaria dello stimatore $\hat{\theta}(x)$ del parametro $\theta(X)$ della suddetta popolazione. La trattazione analitica standard prevede la formulazione di ipotesi sulla distribuzione F (tipicamente si formula un'ipotesi di normalità per X) e di ricavare dalla formula dello stimatore, sotto l'ipotesi di campionamento semplice, la formula analitica per la varianza campionaria dello stimatore stesso. Nel caso in cui la formulazione di $\hat{\theta}(x)$ sia complessa, come nel nostro caso, non è detto che sia possibile calcolare una formula per la varianza. Si potrebbe, in tal caso, procedere empiricamente. Potendo ottenere altri campioni di numerosità n dalla stessa popolazione e calcolare su ognuno lo stimatore $\hat{\theta}(x)$, la varianza delle statistiche ottenute rappresenterebbe uno stimatore della varianza campionaria. Si avrebbe l'errore assoluto

$$\sigma(\hat{\theta}(x)) = \sqrt{\text{Var}_F(\hat{\theta}(x))} .$$

Il *bootstrap* non parametrico consiste nel considerare il campione x una stima della popolazione X , ovvero della funzione di ripartizione F , ed estrarre da esso, con ripetizione, un determinato numero di campioni x_b^* , $b = 1, \dots, B$, della stessa numerosità³⁰. Si calcola quindi su ognuno di essi $\hat{\theta}(x_b^*)$, ottenendo la stima della varianza campionaria come varianza delle stime ottenute:

³⁰ Questo equivale ad estrarre le unità dal campione x con probabilità $1/n$, riproducendo quindi le probabilità di selezione delle unità nella popolazione originale. Si osservi a questo proposito che stiamo operando come se il disegno campionario dell'indagine EUSILC fosse un disegno semplice essendo, invece, un disegno stratificato a due stadi. Tuttavia, l'ISTAT ottemperando a quanto previsto dal Regolamento Comunitario (regulation (EC) n° 1177/2003) in materia di anonimizzazione (SILC DISCLOSURE CONTROL RULES - YEARS 2004....2012 - CROSS-SECTIONAL DATA) non ha reso disponibile la variabile di strato (DB050), impedendo di fatto l'esatta applicazione della tecnica a livello di strato.

$$\text{Var}_B(\hat{\theta}(x)) = \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B (\hat{\theta}(x_b^*) - \theta^*)^2$$

con

$$\theta^* = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\theta}(x_b^*).$$

Si può, quindi, calcolare il *bias* $\theta^* - \hat{\theta}(x)$ e costruire gli intervalli di confidenza, per un livello di confidenza pari a $(1 - \alpha)$, come

$$\theta^* \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma(\hat{\theta}(x))$$

essendo $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ il percentile $1 - \alpha/2$ della distribuzione normale standardizzata.

6.3 Risultati

La Tabella 14 mostra i risultati del ricampionamento *bootstrap* per gli stimatori (6.1) – (6.6).

Si osserva che, in tutti gli anni considerati, gli stimatori proposti presentano una trascurabile distorsione. Tale distorsione, inoltre, non è sistematica presentandosi negativa nella stima relativa ad alcuni anni e positiva in altri. La stima dell'errore assoluto e degli intervalli di confidenza depongono per una buona precisione delle stime proposte. Osserviamo, tuttavia, che l'errore assoluto $\sigma(\hat{\theta}(x))$, è più elevato per gli stimatori \hat{P}_B e \hat{P}_V che per \hat{P}_G .

Tabella 14 – Stime *bootstrap* degli indici di disuguaglianza e polarizzazione (1000 replicazioni) e intervalli di confidenza per le stime degli indici di disuguaglianza e polarizzazione ($\alpha=0.95$)

	$\hat{\theta}(x)$	θ^*	$\theta^* - \hat{\theta}(x)$	$\sigma(\hat{\theta}(x))$	$\theta^* - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(\hat{\theta}(x))$	$\theta^* + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(\hat{\theta}(x))$
Wolfson07	0.3300	0.3299	-0.000117	0.002558	0.325	0.335
Wolfson08	0.3320	0.3317	-0.000220	0.002686	0.327	0.337
Wolfson09	0.3245	0.3244	-0.000140	0.00267	0.320	0.330
Wolfson10	0.3269	0.3270	0.000029	0.002785	0.321	0.333
Wolfson11	0.3294	0.3292	-0.000185	0.002842	0.324	0.335
PolBonf07	0.4847	0.4845	-0.000168	0.005256	0.474	0.496
PolBonf08	0.4942	0.4940	-0.000202	0.005694	0.483	0.506
PolBonf09	0.4765	0.4767	0.0001746	0.005857	0.465	0.487
PolBonf10	0.4887	0.4884	-0.000326	0.007269	0.475	0.503
PolBonf11	0.4927	0.4931	0.0004162	0.007073	0.478	0.505
PolDeVe07	0.7240	0.7238	-0.000191	0.005453	0.713	0.735
PolDeVe08	0.7334	0.7333	-0.000108	0.005904	0.722	0.745
PolDeVe09	0.7139	0.7137	-0.000177	0.005554	0.703	0.725
PolDeVe10	0.7222	0.7224	0.0002136	0.005666	0.711	0.733
PolDeVe11	0.7300	0.7300	-7.26E-06	0.006162	0.718	0.742

La Tabella 15 mostra le variazioni percentuali su base annua degli indici di polarizzazione, stimati con le (6.4) - (6.6), sulla base delle stime dei valori assoluti degli indici riportati nella colonna $\hat{\theta}(x)$ della Tabella 14.

Se P^t è l'indice di polarizzazione al tempo t , il tasso di variazione annuo è

$$\Delta P^{t-1/t} = \frac{P^t - P^{t-1}}{P^{t-1}} \cdot 100.$$

Sulla base delle stime prodotte si osserva una crescente polarizzazione dei redditi tra il 2007 e il 2011, con l'unica eccezione delle stime relative al 2009.

Negli anni considerati la variazione degli indici confrontati fornisce risultati dello stesso segno. Come osservato nelle simulazioni presentate nel Capitolo 5, le variazioni sono più elevate per gli indici P_B e P_V . Con maggiore dettaglio, osserviamo che tra il 2007 e il 2008 e tra il 2010 e il 2009 l'aumento della polarizzazione è stato registrato con maggiore intensità dall'indice P_B , che è aumentato rispettivamente del 2% e 2.6% nei due anni considerati, rispetto allo 0.6% e 0.7% dell'indice di Wolfson

e a 1.1% e 1.3% di P_V . Le differenze nella variazione degli indici registrate tra il 2008 e il 2009, quando la polarizzazione sarebbe diminuita, sono altrettanto marcate: si ha -2.2% per l'indice di Wolfson, -3.6% per P_B e -2.7% per P_V .

Tabella 15 - Tasso di variazione annuale degli indici di polarizzazione (stima su dati EU-SILC 2008-2012 (redditi familiari disponibili per gli anni 2007-2011))

	Wolfson	P_B	P_V
$\Delta P^{2008/2007}$	0.6%	2.0%	1.3%
$\Delta P^{2009/2008}$	-2.2%	-3.6%	-2.7%
$\Delta P^{2010/2009}$	0.7%	2.6%	1.2%
$\Delta P^{2011/2010}$	0.8%	0.8%	1.1%

Conclusioni

Il lavoro presentato fornisce un contributo, teorico ed empirico, allo studio della bipolarizzazione dei redditi (o *svuotamento della classe media*). Seguendo l'approccio proposto da Wolfson (1994) e Foster e Wolfson (1992, 2010), abbiamo proposto due nuovi indici di polarizzazione, uno – P_B – basato sull'indice di Bonferroni (1930) e l'altro – P_V – sull'indice di De Vergottini (1950), con l'obiettivo di verificare se gli indici proposti, basati su misure di disuguaglianza con diverse caratteristiche di *transfer sensitivity* rispetto all'indice di Gini (1914) su cui quello di Wolfson è costruito, mostrano una diversa sensibilità, rispetto a quest'ultimo, ai trasferimenti che accentuano la bipolarizzazione nella distribuzione dei redditi.

Presentiamo qui alcune considerazioni e, contestualmente, delle proposte per la ricerca futura.

Osserviamo, in primo luogo, che lo studio delle proprietà analitiche degli indici di polarizzazione proposti (Capitolo 4), mostra che questi sono coerenti con uno degli assiomi che caratterizzano gli indici di bipolarizzazione – *Increasing Spread (IS)* – soltanto se i trasferimenti regressivi non avvengono a danno degli individui molto poveri, per l'indice basato sul Bonferroni, e a favore degli individui molto ricchi, per l'indice costruito sull'indice di concentrazione di De Vergottini. Questa caratteristica, che potrebbe presentare un contenuto informativo qualora si confrontassero gli indici di Wolfson con P_B e P_V e uno tra questi desse indicazioni in contrasto con gli altri due, è pur sempre un limite degli indici che si tenterà di superare nei lavori futuri.

A questo proposito si osservi che la presenza di vincoli sulla coerenza degli indici di polarizzazione con un insieme di assiomi fondamentali – spesso espressi in termini di valori assunti dai parametri nelle formulazioni analitiche degli indici – non è una novità, o caratteristica specifica, degli indici qui presentati. Gli indici proposti da Esteban e Ray (1994) e Duclos et al. (2004), ad esempio, sono di polarizzazione, sulla base degli assiomi che li caratterizzano, soltanto per un insieme ristretto di valori assunti dal parametro di “sensibilità alla polarizzazione” α . L'indice di

Wolfson, per contro, essendo costruito sulla base della seconda curva di bipolarizzazione che rappresenta, per costruzione, i cambiamenti nella distribuzione che determinano un aumento della polarizzazione, è sempre coerente con gli assiomi. Non è più così quando si consideri la generalizzazione proposta da Rodriguez e Salas (2003). In questo caso le due componenti *between* e *within* dell'indice di bipolarizzazione sono moltiplicate per il sistema di pesi $w = \nu(\nu - 1)(1 - q)^{\nu - 2}$ che dipende dal rango q (Yithzaki, 1983). L'indice $P(\nu)$ è coerente con il trasferimento che genera *Increasing Spread* soltanto per $\nu \in [2, 3]$. Per ν esterno all'intervallo, infatti, al trasferimento attraverso la mediana, progressivo nel loro caso, seguirebbe una diminuzione della componente *within* della disuguaglianza che potrebbe essere, in valore assoluto, superiore a quella della componente *between*. Scegliere ν all'interno delle soglie determinate dagli autori equivale, in realtà, a evitare che un sottoinsieme di coppie di individui tra cui avvengono i trasferimenti, la variazione della componente *within* superi quella della *between*. L'analisi si basa, infatti, dalla dimostrazione che in caso in cui il trasferimento progressivo attraverso la mediana avvenga dal più ricco al più povero (rispettivamente gli individui di rango n e 1), la variazione della componente *within* sia superiore a quella della componente *between*, determinando un aumento della polarizzazione piuttosto che una sua diminuzione. Le variazioni di entrambe le componenti, inoltre, sono moltiplicate per la funzione di peso w . I valori di soglia vengono, quindi, determinati considerando la funzione $w = \nu(\nu - 1)(1 - q)^{\nu - 2}$ e determinando i valori di ν per le quali è lineare, ovvero per i quali garantisce che la variazione della componente *within* nel caso considerato non sia superiore a quella della componente *between*.

Questa trattazione ha, quindi, diversi aspetti in comune con la nostra. Si potrebbero considerare, in un lavoro futuro, indici di polarizzazione nei quali la differenza tra la componente *between* degli indici di concentrazione sui quali sono costruiti quelli di polarizzazione, e quella *within* sia moltiplicata per la funzione di peso $1/q^\alpha$ per P_B , o $1/(1 - q)^\alpha$ per P_V , e calcolare i valori di α per i quali la funzione di peso è lineare (e l'indice è di polarizzazione), per poi verificare se esiste una relazione tra questo valore e le soglie analitiche determinate in questo lavoro.

A proposito di tali soglie, individuate nei par. 4.2 e 4.3, sotto la condizione restrittiva che chi cede reddito sia più vicino alla mediana di chi riceve ($s \geq k$), ci si propone una loro determinazione analitica sulla base di condizioni più generali, procedendo alla soluzione delle equazioni alle differenze $\Delta P_B[s,k,n] > 0$ e $\Delta P_V[s,k,n] > 0$, al variare di (s,k,n) .

I risultati dell'esercizio di simulazione presentati nel Capitolo 5 sono alla base di un secondo gruppo di considerazioni. La filosofia di costruzione degli indici di polarizzazione proposti segue quanto affermato in Shorrocks (1980): scegliere indici con diversa sensibilità ai trasferimenti, equivale a dare un peso diverso alle componenti *between* e *within groups*. Per questo nella costruzione di indici di bipolarizzazione come differenza tra componente *between* e *within*, la sensibilità ai trasferimenti degli indici di disuguaglianza ha effetto sulla sensibilità degli indici di polarizzazione. Questo è proprio quanto emerge dall'esercizio di simulazione presentato nel Capitolo 5. La maggiore sensibilità della componente *within groups*, sia per i trasferimenti di Pigou – Dalton su un solo lato della mediana (IB), sia per i trasferimenti regressivi attraverso la mediana (IS), degli indici di disuguaglianza di Bonferroni e De Vergottini rispetto all'indice di Gini, si trasferisce sugli indici di polarizzazione proposti, rendendoli più sensibili dell'indice di Wolfson ai trasferimenti che rendono bipolarizzata la distribuzione del reddito.

Osserviamo, a questo proposito, che in entrambi gli approcci allo studio della polarizzazione presentati (i. e. indici di polarizzazione basati su indici di disuguaglianza e indici nell'approccio "identificazione-alienazione"), la componente *within* è quella che rende il concetto di polarizzazione diverso da quello di disuguaglianza. L'analisi mostra che indici di disuguaglianza sensibili ai trasferimenti sulle code, come lo è del resto l'indice di Rodriguez e Salas (2003) rispetto alla sola coda inferiore³¹, sono più sensibili del Wolfson ai trasferimenti IS e IB proprio in virtù della maggiore variazione della componente *within*. Scegliere, quindi, indici di concentrazione con sensibilità ai trasferimenti significa, nei termini proposti da Esteban e Ray (1994, 2007) costruire indici con una più elevata "sensibilità alla polarizzazione".

³¹ Per $\nu > 2$ l'*extended Gini* è più sensibile ai trasferimenti sulla parte bassa della distribuzione (Yitzhaki, 1983, p. 621)

Data l'importanza di queste proprietà degli indici P_B e P_V – emerse grazie all'esercizio simulativo – nel caratterizzare gli indici rispetto a quello di Wolfson, ci si propone nello sviluppo del lavoro di dimostrarle in termini analitici, confrontando tra loro le variazioni delle componenti *between* e *within* dei tre indici di polarizzazione a seguito dei trasferimenti che rendono la distribuzione del reddito più polarizzata.

Infine, un ultimo commento relativo alle stime *bootstrap* presentate nel Capitolo 6. Nell'applicare l'algoritmo di ricampionamento, l'estrazione delle unità campionarie è stata effettuata come se il disegno campionario dell'indagine EUSILC fosse un disegno semplice essendo, invece, un disegno stratificato a due stadi. Tuttavia, l'ISTAT ottemperando a quanto previsto dal Regolamento Comunitario (regulation (EC) n° 1177/2003) in materia di anonimizzazione (SILC DISCLOSURE CONTROL RULES - YEARS 2004....2012 - CROSS-SECTIONAL DATA), non ha reso disponibile la variabile di strato (DB050), impedendo di fatto l'esatta applicazione della tecnica a livello di strato. L'ISTAT si è, tuttavia, reso disponibile nel futuro per l'attuazione di un progetto congiunto, che permetta di lavorare nelle sedi dell'Istituto direttamente sulla base dati originali, applicando su di esse gli algoritmi di ricampionamento, in questo modo ovviando alla necessità dell'estrazione, e diffusione, della variabile DB050.

Bibliografia

Aaberge R. (2000), "Characterization of Lorenz curves and income distributions", *Social Choice and Welfare*, Vol. 17, pp. 639-653.

Aaberge R. (2007), "Gini's nuclear family", *Journal of Economic Inequality*, Vol. 5, pp. 305-322.

Alesina A. e D. Rodrik (1994), "Distributive Politics and Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 109, pp. 465-490.

Alesina A., Ozler S., Roubini N. e P. Swagel (1996), "Political Instability and Economic Growth", *Journal of Economic Growth*, Vol. 1, pp. 189-211.

Amato V. (1987), "Contributo della Scuola Statistica Italiana alla costruzione di classi di indici di concentrazione", in Zenga M. (a cura di) *La distribuzione personale del reddito: problemi di formazione, di ripartizione e di misurazione*, Vita e Pensiero, Milano, pp. 3-25.

Barcena E. e L.J. Imedio (2008), "The Bonferroni, Gini and De Vergottini indices. Inequality, welfare and deprivation in the European Union in 2000", *Research on Economic Inequality*, Vol. 16, pp. 231-257.

Barcena E. e J. Silber (2013), "On the generalization and decomposition of the Bonferroni index", *Social Choice and Welfare*, Vol. 41, pp. 763-787.

Beach C. M. (1988), "The 'Vanishing Middle Class'?: Evidence and Explanations", *Queen Papers in Industrial Relations*, Industrial Relations Centre, Queen's University at Kingston.

Blackburn M. e D.E. Bloom (1985), "What is Happening to the Middle Class?", *American Demographics*, January, pp.18-25.

Bonferroni C.E. (1930), *Elementi di statistica generale*, Seber, Firenze.

- Bourguignon F. (1979), “Decomposable inequality measures”, *Econometrica*, Vol. 47, pp. 901-920.
- Buscemi S. (1980), “ A proposito di un’espressione generale degli indici di concentrazione”, *Metron*, Vol. 38, pp. 177-186.
- Ceccarelli C., Di Marco M. e Rinaldelli C. (2008), “L’indagine europea sui redditi e le condizioni di vita delle famiglie (Eu-Silc)”, *Metodi e Norme*, No. 37, ISTAT.
- Chakravarty S.R. (2005), “The Bonferroni indices of Inequality”, *In: International conference in memory of Gini C. and Lorenz M.O., Università degli Studi di Siena*.
- Chakravarty S.R. (2009), *Inequality, Polarization and Poverty: Advances in Distributional Analysis*, Springer: New York.
- Chakravarty S.R e A. Majumder (2001), “Inequality, polarization and welfare: theory and applications”, *Australian Economics Papers*, No. 40.
- Chakravarty S.R, Majumder A. e R. Roy (2007), “A treatment of absolute indices of polarization”, *Japanese Economic Review*, No. 58.
- De Vergottini M. (1950), “Sugli Indici di Concentrazione”, *Statistica*, Anno X, No. 4, pp. 445-454.
- Donaldson D. e J. A. Weymark (1980), “A single-parameter generalization of the Gini indices of inequality”, *Journal of Economic Theory*, Vol. 6, pp. 180-187.
- Duclos J., Esteban J. e D. Ray (2004), “Polarization: concepts, measurements, estimation”, *Econometrica*, Vol. 72, No. 6, pp. 1737-1772.
- Esteban J. e D. Ray (1994), “On the measurement of polarization”, *Econometrica*, Vol. 62, No. 4, pp. 819-851.
- Esteban J., Gradin C. e D. Ray (2007), “An Extension of a Measure of Polarization, with an application to the income distribution of five OECD countries”, *Journal of Economic Inequality*, Vol. 5, pp. 1-19.

- Esteban J. e D. Ray (2012), “Comparing Polarization Measures”, *The Oxford Handbook of the Economics of Peace and Conflict*, Michelle R. Garfinkel and Stergios Skaperdas (eds.).
- Foster J.E. e M.C. Wolfson (1992), “Polarization and the decline of the Middle Class: Canada and the US”, *OPHI Working Paper*, No. 31, University of Oxford.
- Foster J.E. e M.C. Wolfson (2010), “Polarization and the decline of the Middle Class: Canada and the US”, *Journal of Economic Inequality*, Vol. 8, pp. 247-273.
- Giaccardi A. (1950), “Indici di concentrazione”, *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*, Anno IX (nuova serie), pp. 282-290.
- Gini C. (1914), “Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri”, *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*.
- Giorgi G. M. (1998), “Concentration index, Bonferroni”, in Kotz, S. Read CB, Banks DS (eds), *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol.2, Wiley, NY, pp. 141-146.
- Giorgi G. M. (2011), “The Gini inequality index decomposition – An evolutionary study”, in Deutsch J e J. Silber (eds.) *The measure of individual well-being and group inequalities: essay in memory of Z.M. Berrebi*, London, Routledge, pp. 185-218.
- Giorgi G. M. e R. Mondani (1994), “The exact sampling distribution of the Bonferroni concentration index”, *Metron*, Vol. 52 (1-2), pp. 5-41.
- Giorgi G. M. e R. Mondani (1995), “Sampling distribution of the Bonferroni inequality index from exponential population”, *Sankhya*, series B, Vol. 57, pp. 10-18.
- Giorgi G. M. e S. Nadarajah (2010), “Bonferroni and Gini Indices for Various Parametric Families of Distributions”, *Metron*, Vol. 68, No. 1, pp. 3-25.
- Lambert P. J. e R. J. Aronson (1993), “Inequality Decomposition Analysis and the Gini Coefficient Revisited”, *The Economic Journal*, Vol. 103.

Lerman R. I. e S. Yitzhaki (1985), "Income Inequality Effects by Income Sources: A New Approach and Applications to the United States", *Review of Economics and Statistics*, Vol. 67, pp. 151-156.

Levy F. (1987), "Changes in the Distribution of American Family Incomes, 1947 to 1984", *Science*, Vol. 236, pp. 923-927.

Lorenz M. O. (1905), "Methods of measuring the concentration of wealth", *Quarterly Publications of the American Statistical Association*, Vol. 9, pp. 209-219.

Mehran F. (1975), "A statistical Analysis of Income Inequality Based on a Decomposition of the Gini Index", *Bulletin of the International Statistical Institute, Contributed Paper*, 40th Session, Warsaw, pp. 145-150.

Mehran F. (1976), "Linear Measures of Income Inequality", *Econometrica*, Vol. 44, pp. 805-809.

Nygard F. e A. Sandström (1981), *Measuring Income Inequality*, Acta Universitatis Stockholmiensis, Almqvist & Wiksell International Stockholm.

Persson T. e G. Tabellini (1994), "Is Inequality Harmful for Growth?", *The American Economic Review*, Vol. 84 (3), pp. 600-621.

Pundir S., Arora S. e K. Jain (2005), "Bonferroni Curve and the related statistical inference", *Statistics and Probability Letters*, Vol. 75, pp. 140-150.

Pyatt G. (1976), "The interpretation and disaggregation of Gini coefficients", *Economic Journal*, Vol. 86, pp. 243-255.

Rao V. (1969), "Two Decompositions of Concentration ratio", *J. Royal Statistical Society*, Vol. 132A, pp. 418-425.

Rodríguez J. G. e R. Salas, (2003), "Extended bi-polarization and inequality measures", *Research on Economic Inequality*, Vol. 9, pp. 69 – 83.

- Rodriguez J. G. (2004), "Measuring polarization, inequality, welfare and poverty", *centra: Fundacion Centro de Estudio Andaluces, Documento de Trabajo, Serie Economia*, E2004/75.
- Shorrocks A. S. (1980), "The Class of Additively Decomposable Inequality Measures", *Econometrica*, Vol. 48, No.3, pp. 613-625.
- Silber J. (1989), "Factor components, population subgroups and the computation of the Gini index of inequality", *Review of Economics and Statistics*, Vol. 71, pp. 107-115.
- Tarsitano (1990), "The Bonferroni Index of Income Inequality", in *C. Dagum and M. Zenga (eds.), Income and wealth distribution, inequality and poverty*, Berlin: Springer-Verlag, pp. 228-242.
- Thurow L. (1984), "The Disappearance of the Middle Class", *New York Times*, February 5, Section 3, p. 2.
- Wolfson M. C. (1994), "When Inequality Diverge", *The American Economic Review*, Vol. 84, No.2, Papers and Proceedings of the Hundred and Sixth Annual Meeting of the American Economic Association, pp. 353-358.
- Wolfson M. C. (1997), "Divergent Inequalities: Theory and Empirical Results", *Review of Income and Wealth*, Series 43, No. 4, pp. 401-421.
- Yitzhaki S. (1983), "On an extension of the Gini inequality index", *International Economic Review*, 24 (3), pp. 617-628.
- Zhang X. e R. Kanbur (2001), "What differences do polarization measures make? An application to China", *Journal of Development Studies*, No. 37.
- Zoli C. (1999), "Intersecting generalized Lorenz curves and the Gini index", *Social Choice and Welfare*, Vol. 16 (2), pp. 183-196.