

# **Il Premium Risk nei Modelli di Pricing**

**Facoltà di Ingegneria dell'Informazione, Informatica e Statistica**  
**Dipartimento di Scienze Statistiche**

Dottorato di Ricerca in Scienze Attuariali – XXVI Ciclo

**Vittorio Magatti**  
**1065999**

Tutor  
Prof. Nino Savelli

Coordinatore del Dottorato  
Prof. Francesco Cetta

A/A2014/2015

*A Sara,  
la sposa mia*



## **Indice**

### *Introduzione*

## **Sezione I – Il rischio di Tariffazione secondo la Direttiva Solvency II**

### **Capitolo 1 – La Direttiva Solvency II**

- 1.1 La Direttiva Solvency II in sintesi
- 1.2 La Formula Standard (SF)
  - 1.2.1 La Formula Standard per il “Non – Life Underwriting Risk“
  - 1.2.2 La Formula Standard per il “Premium Risk”
- 1.3 I Parametri Specifici di Impresa per il “Premium Risk”
- 1.4 Modelli Interni Completi (IRM) e parziali (PIRM)
- 1.5 Attuariato e Risk Management: “Pricing” e “Premium Risk”

### **Capitolo 2 – Il perimetro di applicazione**

- 2.1 Un modello generale per “rischi assicurabili”
- 2.2 Il ramo di Responsabilità Civile Autoveicoli terrestri
  - 2.2.1 Lo schema generale di tariffazione del ramo RCA
  - 2.2.2 Il sistema di indennizzo diretto in Italia (CARD)
  - 2.2.3 Modifiche allo schema di tariffazione dopo l’indennizzo diretto

## **Sezione II – Un Modello Interno Parziale per il rischio di Tariffazione**

### **Capitolo 3 – Un nuovo approccio metodologico**

- 3.1 Il Danno Aggregato a costo ultimo in orizzonte temporale annuale
- 3.2 Da un modello di Pricing al Premium Risk
  - 3.2.1 I Modelli Lineari Generalizzati (GLM)
  - 3.2.2 Il Modello Additivo Generalizzato ed il Modello Misto Lineare Generalizzato (GLMM)
- 3.3 La definizione di una soglia: i sinistri punta
- 3.4 La stima del DaU in orizzonte annuale per il calcolo del SCR
- 3.5 Novità, limiti e aree di sviluppo dei PIRM

### **Capitolo 4 – Un caso di studio**

- 4.1 Descrizione del caso di studio
- 4.2 La soglia selezionata
- 4.3 La scelta tra i modelli
  - 4.3.1 I modelli di frequenza e costo medio
  - 4.3.2 Il modello di costo per i sinistri punta
- 4.4 La distribuzione stimata del DaU in orizzonte annuale
- 4.5 Il calcolo del requisito di capitale per il Premium Risk

### *Conclusioni*

### **Appendice**

- A. Analisi univariata e misure di associazione dei fattori di rischio
- B. I modelli statistici
  - i. Prospetto riepilogativo dei fattori di rischio
  - ii. Validazione dei Modelli

### *Bibliografia*



## Introduzione

Nell'ambito di un tema classico per le scienze attuariali, quale quello di prezzare un rischio, s'innesta l'indagine, sempre più attuale, della quantificazione dell'errore eventuale dovuto alle scelte di un valutatore e sulla stima in termini economici di tale errore.

La Direttiva 2009/138/CE, c.d. Direttiva *Solvency II* (di seguito "Direttiva", "Solvency II"), infatti, amplia e modifica il metodo di calcolo del requisito di capitale di solvibilità (c.d. "*Margine di Solvibilità*") per le imprese di assicurazione (di seguito "IA" o "Compagnie") operanti all'interno del territorio dell'Unione Europea e ridisegna il quadro normativo posto a presidio della stabilità delle imprese stesse.

Tale Direttiva introduce l'obbligo per ogni impresa di assicurazione, dopo aver considerato l'insieme dei rischi a cui è esposta e tenendo conto dei rischi specifici sottoscritti, di determinare un requisito di capitale specifico per il rischio di tariffazione (c.d. "Premium Risk") derivante dai contratti da sottoscrivere (inclusi i rinnovi) nell'anno successivo e dai rischi ancora in vigore sui contratti esistenti.

Questo elaborato si propone di determinare il *Premium Risk* mediante i modelli e le ipotesi sottostanti al processo di tariffazione svolto da un'impresa di assicurazione, e di mostrare, conseguentemente, in che modo sia possibile definire un *Modello Interno Parziale* (di seguito "PIRM") a partire dalle metodologie scelte dall'Attuariato di tariffa (di seguito "Attuariato") di una Compagnia e, più in generale, dalle diverse funzioni aziendali che operano all'interno di tale complesso processo di calcolo del premio.

Limitata ai rami assicurativi e ai prodotti per i quali sia possibile raccogliere, calcolare e stimare le probabili perdite future secondo metodologie statistiche di regressione, l'indagine che segue è strutturata in due sezioni, ciascuna delle quali si articola in due capitoli.

Nella prima sezione viene presentata la Direttiva Solvency II e si definisce in modo dettagliato il perimetro di applicazione dell'elaborato.

Il primo capitolo, in particolare, fatta una descrizione sintetica della Direttiva, illustra alcune modalità di calcolo del requisito di capitale per il Premium Risk permesse dalla Direttiva stessa: "*Standard Formula*" (di seguito "SF") e "*Undertaking Specific Parameter*" (di seguito "USP" o "Parametri Specifici di Impresa").

Il secondo capitolo, invece, dopo aver presentato il ramo di Responsabilità civile autoveicoli terrestri (di seguito "RCA" o "R.C.Auto") come il perimetro primario dell'elaborato, illustra le attuali metodologie di calcolo del premio, anche alla luce dell'indennizzo diretto introdotto dal D.P.R. 28 giugno 2006, n. 254.

La seconda sezione descrive il Modello Interno Parziale.

Il terzo capitolo illustra i fondamenti teorici, le ipotesi ed i modelli di regressione che vengono proposti. Ci si riferisce al Modello Lineare Generalizzato (di seguito "GLM"), al Modello Additivo Generalizzato (di seguito "GAM") e al Modello Misto Lineare Generalizzato (di seguito "GLMM").

L'ultimo capitolo è dedicato al confronto dei risultati del requisito di capitale calcolato seguendo la SF, la SF e gli USP e di quelli ottenuti dai tre PIRM proposti su un portafoglio ipotetico di assicurati RCA di una media Compagnia italiana negli anni 2009 – 2011.

L'elaborato termina con la doverosa conclusione e con un'Appendice contenente alcune risultanze ottenute durante l'applicazione dei tre Modelli Interni Parziali sopra descritti.

#### **DISCLAIMER**

I software adoperati per le analisi esposte di seguito sono SAS (modulo statistico) ed Emblem XE. Ambedue sono licenziati grazie a Towers Watson Italia s.r.l., che mi ha permesso di poter elaborare i dati con il laptop per uso lavorativo. Resta inteso che tutte le considerazioni contenute in questa Tesi di Ricerca sono esclusivamente sotto la mia personale responsabilità.



## **Sezione I**

### **Il rischio di Tariffazione secondo la Direttiva Solvency II**



## Capitolo 1

# La Direttiva Solvency II

### 1.1 Uno sguardo di sintesi

#### 1.1.a Obiettivi, date e modifiche alla normativa.

Il 17 dicembre 2009, la Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea ha pubblicato il testo della Direttiva n. 138, in materia di accesso ed esercizio delle attività di assicurazione e di riassicurazione.

La Direttiva ha inteso non soltanto modificare ed uniformare i criteri quantitativi per il calcolo del margine di solvibilità, ma anche rivedere il complesso di regole poste a tutela della stabilità delle imprese, nonché migliorare la gestione del rischio, la tutela e la trasparenza di tutti gli operatori legati l'industria assicurativa europea (di seguito "Stakeholder").

Il 19 gennaio 2011 la Commissione Europea (di seguito "Commissione") ha adottato una proposta di modifica chiamata "*Omnibus II*" per tener conto della nuova architettura di vigilanza delle assicurazioni contenuta nel trattato di Lisbona (2009) e dell'istituzione dell'Autorità europea di vigilanza (di seguito "EIOPA") secondo il Reg. 1094/2010. Omnibus II è confluita nella Direttiva del 16 aprile 2014 n. 51.

Omnibus II ha, inoltre, rinviato il termine di recepimento al 31 marzo 2015 ed il termine di applicazione della direttiva 2009/138/CE al 1 gennaio 2016, spostando così il termine di abrogazione dell'attuale criterio di calcolo del requisito di capitale (di seguito "Margine di Solvibilità" o "Solvency I").

Una delle novità rilevanti apportate dalla Omnibus II concerne il processo di applicazione delle Direttiva Solvency II ed, in particolare, le cosiddette "*Level 2 Implementing Measure*", ora distinte tra "*Delegated Acts*" (di seguito "DA") e "*Implementing Acts*" (di seguito "ImpA") e "*Binding Technical Standard*" (di seguito "BtS").

Essendo queste misure intermedie tra secondo e terzo livello, riguardano aspetti esclusivamente tecnici e, a loro volta, si suddividono in "*Regulatory Technical Standards*" (di seguito "RTS") e "*Implementing Technical Standards*" (di seguito "ITS").

Nei paragrafi seguenti verrà descritta la Solvibilità relatività alla singole Compagnie, tralasciando la solvibilità dei Gruppi Assicurativi.

### 1.1.b Struttura.

Il sistema della Direttiva Solvency II sarà articolato in una struttura a tre pilastri.

1. Il “*Pilastro I*” descrive i requisiti quantitativi tra i quali ricordiamo la valutazione delle attività, la valutazione delle passività, gli elementi costitutivi ed il requisito di capitale;
2. Il “*Pilastro II*” definisce i requisiti di governance, di risk management e di controllo interno delle Compagnie; contiene indicazioni in merito ai poteri ed alle procedure di vigilanza e permette di considerare la possibilità per le imprese di calcolare il requisito di capitale basandosi parzialmente o totalmente su un risultato di un Modello Interno;
3. Il “*Pilastro III*” delinea i requisiti di informativa e trasparenza nei confronti della vigilanza e del mercato.

In via generale, la Direttiva richiede alle Compagnie di rivedere tutta la loro gestione secondo un approccio “*Total Balance Sheet*”. Non è quindi solo la solvibilità di secondo livello ad essere riformata, bensì anche la valutazione delle attività e passività (c.d. *solvibilità di primo livello*) secondo il principio del “*fair value*” (anche detta “*valutazione market consistent*”). Il concetto di fair value, stando ai principi contabili internazionali IAS/IFRS, può essere qualificato come «*il corrispettivo al quale un'attività può essere scambiata, o una passività estinta, tra parti consapevoli e disponibili, in una transazione tra terzi indipendenti*»

Le passività tecniche, per le quali, a differenza degli attivi, non esiste un mercato regolamentato nel quale tali strumenti finanziari possono essere scambiati, devono essere calcolate senza tenere conto di alcun aggiustamento dovuto al merito di credito proprio dell'impresa. A tal fine, l'EIOPA, la Commissione, vigilerà che le Compagnie adoperino le metodologie e le ipotesi coerenti con quanto prescritto dalla Commissione stessa.

La valutazione economica, pertanto, potrà essere illustrata nel modo seguente:

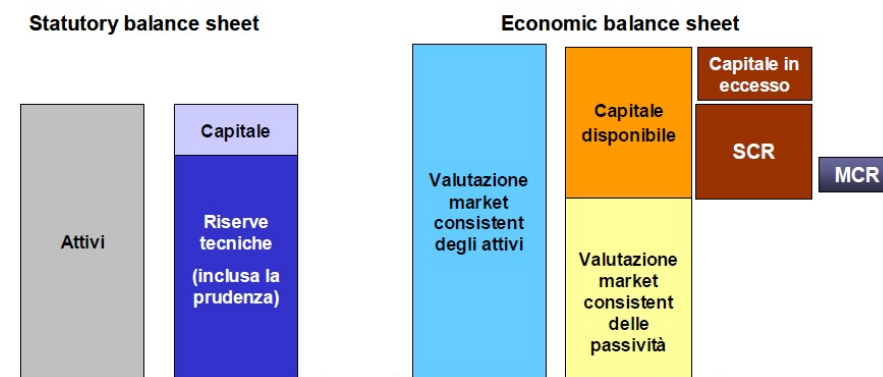


Figura 1 - Valutazione economica: Statutory versus Economic Balance Sheet da [2]

### 1.1.c Requisiti di capitale.

La Direttiva Solvency II richiederà alle Compagnie operanti nel territorio europeo di introdurre un requisito di capitale, di seguito “*Solvency Capital Requirement*” (o “SCR”) *orientato al rischio*, basato su un calcolo prospettico e non inferiore ad un requisito patrimoniale minimo chiamato “*Minimum Capital Requirement*” (o “MCR”).

Per la determinazione di un requisito che onori la solvibilità di secondo livello, il legislatore richiederà alle Compagnie di determinare un capitale economico volto a garantire che le imprese siano ancora in grado - con una probabilità del 99,5%, ossia con una probabilità che equivale a quella di incorrere in perdite attese ogni 200 anni - di onorare i loro obblighi nei confronti dei contraenti e dei beneficiari nei 12 mesi successivi.

La definizione permette di evidenziare tre grandezze:

- Misura di Rischio;
- Livello di Confidenza;
- Orizzonte Temporale;

La Direttiva Solvency II, inoltre, consente alle Compagnie di calcolare il requisito scegliendo tra cinque possibili metodi che sono proporzionali alla natura, alle dimensioni ed alla complessità dei rischi che le Compagnie stesse dovranno misurare:

- Modello Interno Completo (IRM);
- Formula Standard e Modello Interno Parziale (PIRM);
- Formula Standard con Parametri Specifici dell'Impresa (USP);
- Formula Standard (SF);
- Semplificazioni;

Poiché le Compagnie dovranno giustificare il metodo scelto all'Autorità di Vigilanza, esse dovranno effettuare una scelta su ognuna delle tre grandezze sopra definite per ogni rischio quantificabile contenuto all'interno del Pilastro I.

L'Articolo 101 della Direttiva individua specificamente i rischi quantificabili:

- Il rischio di sottoscrizione per l'assicurazione non vita;
- Il rischio di sottoscrizione per l'assicurazione vita;
- Il rischio di sottoscrizione per l'assicurazione malattia;
- Il rischio di mercato;
- Il rischio di credito;

- Il rischio operativo (include i rischi giuridici, ma non quelli derivanti da decisioni strategiche e/o i rischi di reputazione che, invece, sono valutati nel Pilastro II).

Resta fermo che l'uso dei Modelli Interni (completi o parziali) e dei parametri specifici dovrà, poi, essere approvato dall'Autorità di Vigilanza.

Tale processo di approvazione, iniziato già da tempo in Italia ed in gran parte dei Paesi che rientrano nel perimetro di applicazione della Solvency II, è ancora in fase di sviluppo e di definizione (v.[26]), seppure, per i Modelli Interni, appare già evidente che le Compagnie dovranno dimostrare il rispetto dei seguenti requisiti:

- Prova dell'utilizzo (cd. Use test);
- Standard di qualità statistica;
- Calibrazione;
- Convalida;
- Documentazione;

Dopo aver descritto i *principi* perseguibili (o "che devono essere perseguiti") per determinare i requisiti di capitale, alla luce della Direttiva Solvency II, ci si appresta a mostrare come questi dovranno e/o potranno essere effettivamente calcolati per ognuno dei cinque approcci sopra delineati.

## 1.2 La Formula Standard (SF)

### 1.2.a SCR e MCR.

Analogamente al Margine di Solvibilità attualmente richiesto dalla normativa vigente, anche la Direttiva Solvency II prevede una Formula Standard per la determinazione dei requisiti di capitale.

La misura di rischio scelta per la determinazione del SCR secondo la SF è il *Value at Risk* (di seguito "VaR") calibrato ad un livello di confidenza pari al 99.5% in orizzonte temporale annuale. Tale requisito dovrà tenere conto di ogni tecnica di mitigazione del rischio (ad es. riassicurazione, securitisation, ecc.) e, a seconda della natura dei rischi già sintetizzati nel §1.1.c, sarà determinato secondo un approccio basato su fattori moltiplicativi (c.d. *factor based approach*) o secondo un approccio per scenario (c.d. *scenario testing*).

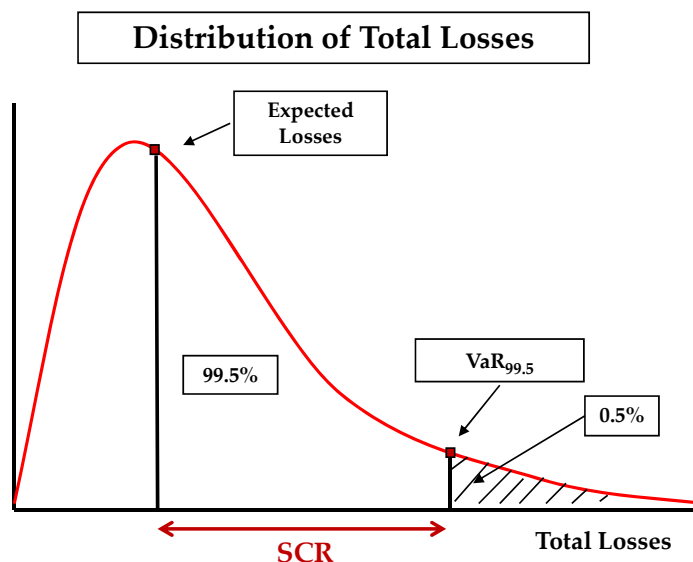
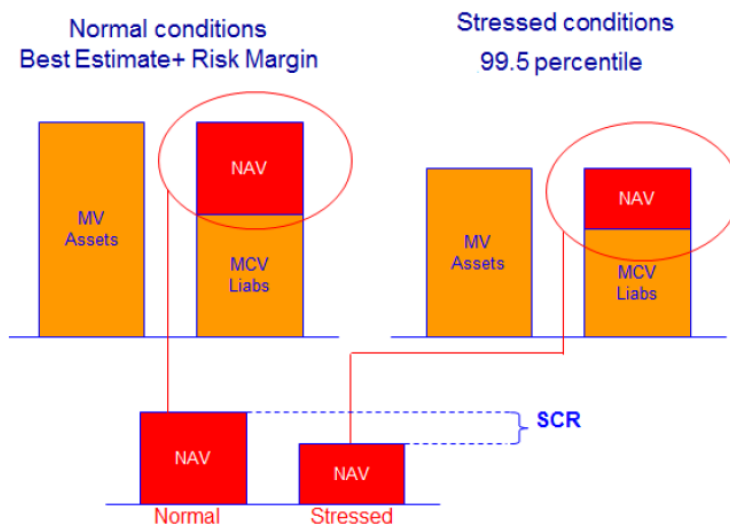


Figura 2 – SCR, da [47]

Premesso che il *Premium Risk*, oggetto di ricerca di tale elaborato e sotto-rischio del modulo *Non-life underwriting risk*, è basato su una SF di tipo *factor based*:

$$(1) \quad SCR = f(H_1, H_2, \dots, H_n)$$

il secondo approccio indicato definisce il SCR come la differenza tra il *Net Asset Value* (di seguito “NAV”) in condizioni normali e stressate (cioè calcolate al 99.5mo percentile), dove il NAV è definito come la differenza tra attivi e passivi a fair value.



**Figura 3** – Calcolo SCR con Scenario Testing, da [2]

Nella sua completezza, il set di formule standard proposte è contenuto all'interno delle [3]

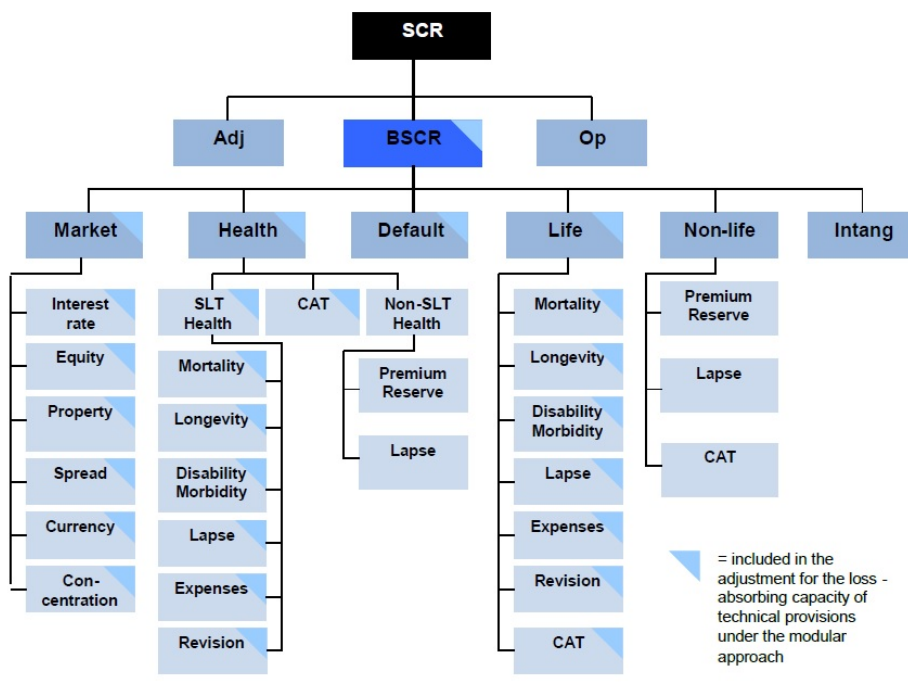


Figura 4 – Struttura Generale del SCR secondo la SF, da [3]

Il SCR, pertanto, sarà pari a

$$(2) \quad SCR = BSCR + Adj + SCR_{Op}$$

Calcolato il requisito di capitale per i rischi operativi (“Op”) e gli aggiustamenti per la capacità di assorbimento delle perdite delle riserve tecniche e delle imposte differite (“Adj”), il *Basic Solvency Capital Requirement* (di seguito “BSCR”) è determinato aggregando i requisiti di capitale di ognuna delle sei categorie di rischio elencate nella Figura 3:

$$(3) \quad BSCR = \sqrt{\sum_{ij} Corr_{ij} \times SCR_i \times SCR_j} + SCR_{INTANGIBLE}$$

Se da un lato tra gli Adj, il Op ed il BSCR il legislatore ha previsto ipotesi di indipendenza nella SF, dall'altro occorre rilevare come una delle maggiori novità apportate dalla Direttiva è la definizione di una matrice di correlazione lineare ( $Corr_{ij}$ ) per la loro aggregazione, ad eccezione del SCR per i rischi connessi agli attivi immateriali ( $SCR_{INTANGIBLE}$ ):

i \ j	Market	Default	Life	Health	Non-life
Market	1				
Default	0.25	1			
Life	0.25	0.25	1		
Health	0.25	0.25	0.25	1	
Non-life	0.25	0.5	0	0	1

**Figura 5** – Matrice di correlazione del SCR secondo la SF, da [3]

Conclude il processo del calcolo del SCR, anche detto *modulare*, la formula di aggregazione prevista dalla SF per i sotto-rischi (o sotto-moduli) elencati nella Figura 4 che, anche in tal caso, sono spesso correlati tra loro.

Il secondo requisito di capitale è il *Minimum Capital Requirement*. Qualora il capitale disponibile (c.d. *available capital*) dalle Compagnie risulterà inferiore al SCR calcolato con la SF (o con altro approccio), l'Autorità di Vigilanza richiederà a tali Compagnie di porre in essere azioni per riportare tale capitale al livello desiderato. Se, invece, tale capitale fosse al di sotto del MCR, le passività e/o gli oneri verso gli stakeholders saranno trasferiti verso un altro assicuratore, sarà revocata l'autorizzazione all'esercizio ed il business in-force verrà liquidato a terze parti.

Il calcolo del MCR secondo la SF indicato all'interno delle [30] combina una formula lineare con un *floor* del 25%, un *cap* pari al 45% e a dei *floor* assoluti ("AMCR") espressi in euro in funzione della natura dei rischi sottoscrivibili dalle Compagnie:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} MCR = \max[MCR_{combined}, AMCR] \\ MCR_{combined} = \min[\max(0.25 \cdot SCR, MCR_{linear}), 0.45 \cdot SCR] \end{array} \right\}$$



### 1.2.1 La Formula Standard per il “Non – Life Underwriting Risk“

Il Non – Life Underwriting Risk (di seguito “NLUw”), parte del BSCR definito nel paragrafo precedente, assume particolare rilevanza rispetto all’elaborato poiché è il modulo che contiene anche il *Premium Risk*.

Nelle specifiche tecniche più recenti (v. [30]) ed ai sensi di quanto descritto all’interno del quinto studio di impatto quantitativo (di seguito “QIS5”) presentato al mercato europeo nel 2011 e del più recente [17], il NLUw è il *rischio proveniente dalle obbligazioni derivanti dalla sottoscrizione di ogni tipologia di rischio dei rami Danni*. Tale modulo, inoltre, comprende i rischi derivanti dai processi in atto per la gestione di tale business e dall’incertezza che nasce dal potenziale diritto di esercizio delle opzioni dei contraenti, quali, ad esempio, il rinnovo o l’abbandono del contratto.

Questo rischio si articola in tre sotto moduli:

- **$NL_{pr}$** : Non – Life premium and reserve risk;
- **$NL_{lapse}$** : Non – Life lapse risk;
- **$NL_{CAT}$** : Non – Life catastrophe risk.

Rimandando al prossimo paragrafo per la valutazione del  $NL_{pr}$ , occorre chiarire, che il  $NL_{lapse}$  è il requisito di capitale utile a far fronte all’errata valutazione a priori delle opzioni implicite dei contratti, tra le quali si menzionano, a titolo esemplificativo, l’abbandono prima della scadenza del contratto e il rinnovo a condizione analoghe a quelle precedenti.

Il rischio in parola, che viene calcolato secondo un approccio per scenario, è escluso dal perimetro di tale tesi di ricerca.

Il  $NL_{CAT}$ , invece, valuta il capitale economico da accantonare per far fronte agli eventi a bassa frequenza e ad alto costo medio, derivanti da eventi naturali, da riassicurazione non proporzionale del property, da eventi indotti dall’uomo, nonché per le altre eventuali garanzie catastrofali descritte in polizza.

Definita la seguente matrice di correlazione ( $CorrNL$ )

$CorrNL$	$NL_{pr}$	$NL_{lapse}$	$NL_{CAT}$
$NL_{pr}$	1		
$NL_{lapse}$	0	1	
$NL_{CAT}$	0.25	0	1

**Figura 6** – Matrice di correlazione del NLUw secondo la SF, da [30]

Il requisito di capitale per tale modulo secondo la SF dovrà essere calcolato nel seguente modo:

$$(5) \quad \text{SCR}_{\text{NL}} = \sqrt{\sum_{ij} \text{Corr}NL_{r,c} \times NL_r \times NL_c}$$

### 1.2.2 La Formula Standard per il “Premium Risk”

Dal quinto studio di impatto quantitativo, all’interno di questo sotto-modulo, l’EIOPA ha espresso la volontà di unire all’interno di un’unica formula il calcolo del requisito di capitale del *Premium Risk* e del *Reserve Risk*.

$$(6) \quad \text{NL}_{\text{pr}} = 3 \cdot \sigma \cdot V$$

La formula (6) indicata all’interno del [22], mostra delle modifiche sostanziali rispetto a quanto indicato nel QIS5. La costante numerica pari a tre, infatti, sostituisce il  $\rho(\sigma)$  che esprimeva una trasformazione stimata considerando il 99.5-mo quantile di una LogNormale (a 2 parametri) e una misura di rischio di tipo VaR.

Seppur spesso la suddetta trasformazione assumeva un valore circa pari al triplo della deviazione standard combinata per il Premium e per il Reserve Risk (ossia il  $\sigma$ , anche detta “volatility”), in questo modo anche le Compagnie per le quali ciò non era verificato dovranno utilizzare tale parametro e, più in generale, questa scelta penalizza l’attenzione all’asimmetria delle distribuzione di probabilità sottostante a tale rischio. Una possibile interpretazione di questa rettifica è da imputarsi al principio di “prudenza” con cui la SF è calibrata su un mercato tanto eterogeneo e diversificato come quello delle Compagnie cui tale Direttiva si applica.

La grandezza  $V$ , invece, rappresenta la misura di volume combinata del Premium e Reserve Risk, eventualmente corretta per l’effetto di diversificazione (geografico) dei rischi sottoscritti.

Sia la deviazione standard che il volume saranno dapprima calcolati all’interno di segmenti/Line of Business (“LoB”) tra Premium e Reserve Risk e successivamente aggregati.

La misura di volume è calcolata come indicato nella formula (7)

$$(7) \quad \begin{cases} V = \sum_s V_s \\ V_s = (V_{\text{prem},s} + V_{\text{res},s}) + (0.75 + 0.25 \cdot \text{DIV}_s) \end{cases}$$

Dove  $DIV_s$  è l'indice di Herfindal di diversificazione geografica calcolato come da *Annex III* (v. [30]) e le altre due grandezze rispettivamente la misura di volume del *Premium Risk* ( $V_{prem,s}$ ) e del *Reserve Risk* ( $V_{res,s}$ ) di ogni segmento.

In particolare, per il *Reserve Risk*, tale misura di volume dovrà essere pari alla best estimate delle riserve sinistri di ogni segmento  $PCO_s$  e, pertanto, potrà essere inferiore all'ammontare recuperabile dai contratti di riassicurazione e da alcuni veicoli per uso speciale.

Il volume del *Premium Risk* e, conseguentemente, dei premi di ogni segmento, sarà calcolato come la somma del valore attuale dei premi netti che la Compagnia si attende di incassare per tale LoB oltre l'anno successivo da contratti esistenti ( $FP_{(existing,s)}$ ), dal valore attuale dei premi netti che saranno sottoscritti nei futuri 12 mesi, al netto anche dei premi incassati nei 12 mesi successivi alla data di valutazione ( $FP_{(future,s)}$ ), e dal massimo tra i premi di competenza netti stimati per l'anno successivo all'istante di valutazione ( $P_s$ ) ed i premi emessi netti dell'anno terminato al momento della valutazione ( $P_{(last,s)}$ ):

$$(8) \quad V_{(prem,s)} = \max(P_s; P_{(last,s)}) + FP_{(existing,s)} + FP_{(future,s)}$$

Nel caso della deviazione standard, la seguente formula di aggregazione tra i segmenti/LoB tiene conto anche delle correlazioni lineari indicate nella matrice *CorrS* riportata di seguito (v. Figura 7):

$$(9) \quad \sigma_{(prem,s)} = \frac{1}{V} \cdot \sqrt{\sum_{s,t} CorrS_{s,t} \cdot \sigma_s \cdot V_s \cdot \sigma_t \cdot V_t}$$

<i>CorrS</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1: Motor vehicle liability	1											
2: Other motor	0.5	1										
3: MAT	0.5	0.25	1									
4: Fire	0.25	0.25	0.25	1								
5: 3rd party liability	0.5	0.25	0.25	0.25	1							
6: Credit	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	1						
7: Legal exp.	0.5	0.5	0.25	0.25	0.5	0.5	1					
8: Assistance	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	1				
9: Miscellaneous.	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1			
10: Np reins. (casualty)	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	1		
11: Np reins. (MAT)	0.25	0.25	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	1	
12: Np reins. (property)	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25	0.25	1

**Figura 7** – Matrice di correlazione della deviazione standard del  $NL_{pr}$  secondo la SF, da [22]

La volatilità calcolata a livello di segmento/LoB, assumendo un coefficiente di correlazione  $\alpha$  pari al 50% tra Premium e Reserve Risk, è descritta di seguito la formula del parametro  $\sigma_s$ :

$$(10) \sigma_s = \frac{\sqrt{(\sigma_{(prem,s)} \cdot V_{(prem,s)})^2 + \sigma_{(prem,s)} \cdot V_{(prem,s)} \sigma_{(res,s)} \cdot V_{(res,s)} + (\sigma_{(res,s)} \cdot V_{(res,s)})^2}}{V_{(prem,s)} + V_{(res,s)}}$$

Per poter calcolare il requisito di capitale oggetto di questo paragrafo, resta da definire la deviazione standard per il Premium ed il Reserve Risk, sempre diversificata per LoB.

Nel caso in cui una generica Compagnia avesse deciso di calcolare questo requisito di capitale seguendo esclusivamente la SF, il suddetto parametro di volatilità dovrà essere selezionato dalla tabella indicate di seguito:

<b>Segment</b>	$\sigma_{(prem,s)}$ <i>Gross Reins.</i>	$\sigma_{(res,s)}$ <i>Net Reins.</i>
1. MTPL and proportional reinsurance	10%	9%
2. Other Motor insurance and proportional reinsurance	8%	8%
3. MAT and proportional reinsurance	15%	11%
4. Fire insurance and proportional reinsurance	8%	10%
5. TPL and proportional reinsurance	14%	11%
6. Credit insurance and proportional reinsurance	12%	19%
7. Legal expenses ins. and proportional reins.	7%	12%
8. Assistance insurance and proportional reins.	9%	20%
9. Miscellaneous ins. and proportional reins.	13%	20%
10. NP reins (cas)	17%	20%
11. NP reins (MAT)	17%	20%
12. NP reins (prop)	17%	20%

**Figura 8** – Volatility per Premium e Reserve Risk per LoB, da ANNEX II [30]



Questo approccio, definito *market wide approach*, è calcolato direttamente da EIOPA in seguito ad una calibrazione eseguita su tutto il mercato assicurativo che rientra nel perimetro della Direttiva (v. [50]) e, pertanto, è un *input* per la Compagnia che potrebbe risultare non orientato al rischio sottoscritto dell'impresa stessa.

Per il solo *Premium risk* e per tutto il business assicurativo e riassicurativo diverso da quello non proporzionale, l'Autorità europea di vigilanza ha previsto un fattore di aggiustamento per la *risk mitigation* dovuta a riassicurazione di tipo non proporzionale eventualmente sottoscritta. Tale fattore, indicato con  $NP_{LOB}$ , può assumere valore unitario nel caso in cui non sia necessario oppure può essere calcolato come indicato all'interno dell'*Annex N* del QIS5.

### 1.3 I Parametri Specifici dell'impresa per il "Premium Risk"

Da quanto esposto sinora, emerge che il limite più rilevante della SF è che questa non consente di ottenere un requisito di capitale *orientato al rischio proprio* della singola Compagnia, poiché resta calibrata sul mercato europeo dell'industria assicurativa. Osservando le diverse statistiche nazionali, invero, tale mercato risulta essere particolarmente eterogeneo per prodotti, tipologia di business, rischi assicurabili in modo volontario o obbligatorio, rapporti con il sistema di welfare nazionale e, non per ultimo, indicatori tecnici.

Considerando ciò, gli artt. 104 comma 7 e 110 della Direttiva, difatti, permettono alle Compagnie di sostituire alcuni dei parametri ottenuti per mezzo della SF con i *Parametri Specifici*. In particolare l'art. 110 menziona in modo esplicito lo scenario in cui sia l'Authority a richiedere alla Compagnia di utilizzare gli USP: "(...) Dove è inappropriato il calcolo del requisito di capitale mediante la SF, poiché il profilo di rischio della Compagnia si discosta significativamente dalle ipotesi sottostanti il calcolo della SF". Tali parametri dovranno essere approvati dalla Authority locale in accordo con quanto sintetizzato al §1.3.c.

Per i rischi Non-Life, in particolare, tali USP possono essere determinati sia per la volatilità del *Premium Risk* ( $\sigma_{(prem,s)}$ ) sia per il *Reserve Risk* ( $\sigma_{(res,s)}$ ).

L'elaborato, intendendosi concentrare solo sul rischio di interesse, descriverà di seguito i metodi previsti per il solo *Premium Risk*. Occorre premettere che attualmente non esiste ancora una documentazione ufficiale di secondo livello in merito ai metodi da utilizzare e/o relativa al processo di approvazione da parte dell'Autorità nazionale di Vigilanza (IVASS).

Per tale ragione, seppur sarà riportato il metodo proposto in bozza nell'*Annex USP* del [30] che evidenzia una netta modifica da parte di EIOPA alle metodologie previste per il calcolo degli USP, si è scelto di usare nell'elaborato i metodi descritti nell'*Annex O* del QIS5 al fine di ottenere una stima di requisito di capitale confrontabile con la SF ed il PIRM, di cui alla Sezione II.

**1.3.a Dati.** L'articolo 219 del [30] è dedicato alla definizione dei requisiti di qualità dei dati utilizzati per il calcolo degli USP. Più in generale, l'EIOPA ha mostrato, sin dall'introduzione di tale approccio, una grande attenzione ai dati, poiché sono gli input di un requisito di capitale calcolato proprio per tener conto del rischio della Compagnia.

I dati usati per il calcolo degli USP dovranno essere *completi, accurati e appropriati*. Per verificare queste caratteristiche, l'EIOPA chiede alle Compagnie di predisporre un documento che dovrà contenere:

- I dati stessi e la verifica della loro bontà;
- La scelta delle ipotesi scelte dalla Compagnia per produrli, nonché ogni eventuale aggiustamento (date, spese, ecc.);

- La descrizione delle metodologie con le quali si sono determinati i suddetti aggiustamenti;
- La validazione dei dati.

Le Compagnie, infine, potranno anche utilizzare dati esterni. In tal caso, in aggiunta a quanto già descritto sopra, le imprese di assicurazione dovranno:

- Garantire la trasparenza e la verificabilità del processo di estrazione dei dati;
- Assicurare la comparabilità dei dati che derivano da fonti differenti;
- Mostrare come i dati esterni siano coerenti con i propri profili di rischio / tipo di business;
- Verificare che la distribuzione di probabilità calcolata con i propri dati e con quelli esterni siano simili.

**1.3.b Approccio e Metodologie standard.** In accordo con il [5] e le [14], i parametri specifici di impresa dovranno essere calcolati con frequenza annuale dalle Compagnie autorizzate all'utilizzo. Prima di enumerare le metodologie standard, si precisa che l'approccio scelto dal regolatore nell'utilizzo di tali parametri si fonda sulla credibilità:

$$(11) \quad \sigma_{(prem,s)} = c \cdot \sigma_{(U,prem,s)} + (1 - c) \cdot \sigma_{(M,prem,s)}$$

Dove  $c$  è il fattore di credibilità,  $\sigma_{(U,prem,s)}$  è la volatility calcolata con i dati della Compagnia secondo uno dei metodi standard riportati di seguito e  $\sigma_{(M,prem,s)}$  è la volatility determinata secondo l'approccio market wide indicato nella SF (v. §1.2.2).

Il fattore di credibilità  $c$ , inoltre, non è costante, ma si modifica in funzione del segmento/LoB e della lunghezza delle serie storiche in possesso delle Compagnie ("NLoB"):

- Per i rami RCA, RCG, Credito e Cauzione:

$N_{lob}$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\geq 15$
$C$	34%	43%	51%	59%	67%	74%	81%	87%	92%	96%	100%

- Per gli altri rami:

$N_{lob}$	5	6	7	8	9	$\geq 10$
$C$	34%	51%	67%	81%	92%	100%

**Figura 9 – Fattore di Credibilità, da [14]**

Come anticipato al paragrafo precedente, le metodologie standard descritte di seguito e confrontate numericamente con il PIRM proposto nella Sezione II, riguarderanno anche quanto pubblicato è calcolato dalle Compagnie interessate nel QIS5 (v. [14] e *Annex O*).

I dati utilizzati dovranno essere al netto della Riassicurazione, aggiustati per l'inflazione e per i sinistri catastrofali già considerati nel CAT Risk e al netto delle spese non allocate (c.d. ULAE).

Nel "Metodo 1" le ipotesi sono:

- Le perdite attese sono proporzionali ai premi;
- Le compagnie hanno diversi Loss Ratios per generazione, ma sono proporzionali;
- La varianza delle perdite è proporzionale ai premi di competenza;
- Il criterio di adattamento (o *fitting*) è quello dei minimi quadrati.

Definita, allora, la distribuzione delle perdite:

$$(12) \quad U_{Y,s} \approx V_{Y,s} \mu_s + \sqrt{V_{Y,s}} \beta_s \varepsilon_{Y,s}$$

Dove U è il costo ultimo di generazione Y,  $\mu$  è il Loss Ratio, V la misura dei premi,  $\beta$  il parametro da stimare in quanto fonte di variabilità del fenomeno ed  $\varepsilon$  una variabile aleatoria (di seguito "v.a.") di media zero e varianza unitaria, si dimostra che minimizzando lo stimatore  $\hat{\beta}$ , con  $\beta^2$  il coefficiente di proporzionalità tra varianza e media del costo aggregato, il  $\sigma_{(U, prem, s)}$  sarà pari a

$$(13) \quad \sigma_{(U, prem, s)} = \frac{\hat{\beta}_s}{\sqrt{V_s}}$$

Il "Metodo 2", fermo quanto descritto sopra, differisce da primo metodo per un'ipotesi aggiuntiva:

- La distribuzione delle perdite è LogNormale (a due parametri)

La formula di calcolo del parametro resterà quindi analoga alla (13), ma tale ipotesi probabilistica non consentirà di determinare il parametro usando un metodo analitico come quello dei minimi quadrati. Il criterio di fitting selezionato è quello di massima-verosimiglianza.

Il "Metodo 3", invece, differisce notevolmente dai primi due. Esso deriva dall'approccio proposto dallo Swiss Solvency Test (di seguito "SST" o "White book") e, basandosi su un approccio separato tra frequenza e costo medio, tra i tre metodi è quello che si avvicina maggiormente all'attuale tecnica di pricing dei rischi che sarà descritta nel Capitolo 2.

Definendo il Danno Aggregato (di seguito "DA") come la sommatoria dei costi per sinistro

$$(14) \quad X = \sum_{i=1}^N Y_i$$



Dove  $N$  è la v.a. numero del sinistro ed  $Y$  quella del costo, tale metodo si basa sull'ipotesi che la variabilità di tali v.a. dipenda da un'altra v.a.  $\Theta = [\Theta_1, \Theta_2]$  che rappresenta rispettivamente l'incertezza del numero  $\Theta_1$  e del costo dei sinistri  $\Theta_2$ .

Ipotizzando, inoltre, indipendenza tra  $N$  ed  $Y$ , il parametro sarà pari a

$$(15) \quad \sigma_{(U, prem, s)} = \frac{1}{\sqrt{V_{(prem, s)}}} \cdot \sqrt{Var(X)}$$

L'Annex USP, infine, del [30] ha pubblicato una bozza di metodologia standard proposta per il *Premium Risk*.

La prima grande differenza visibile concerne la riduzione da tre metodi ad un unico metodo standard per il *Premium Risk*. Osservando, poi, le ipotesi

- Il Danno Aggregato per segmento/LoB e per generazione è direttamente proporzionale ai premi di competenza della generazione;
- La varianza del Danno Aggregato per segmento/LoB e per generazione è quadratica rispetto ai premi di competenza della generazione;
- Il Danno Aggregato è distribuito secondo una distribuzione LogNormale;
- Il criterio di fitting è quello della massima-verosimiglianza.

Sembra che l'EIOPA stia pensando di mantenere l'ipotesi probabilistica ed il fitting del "Metodo 2" e si stia abbandonato l'approccio separato tra frequenza e costo medio del "Metodo 3".

### 1.3.c Approvazione.

Gli ultimi aggiornamenti normativi che riguardano il Pilastro I e, quindi, anche il processo sottostante l'uso degli USP sono contenuti nel [25]. Non si rintracciano, tuttavia, dei riferimenti espliciti al processo di approvazione. Per tale ragione è stato preso come riferimento l'ultimo Consultation Paper dedicato a tale argomento: il [5].

Prima di intraprendere un processo di approvazione, la Compagnia dovrà dimostrare l'inappropriatezza della SF (v. art. 110 Direttiva) e, come indicato al §1.3.a, le Compagnie dovranno documentare i dati di input, il metodo standardizzato e/o la combinazione di metodi standard adoperati per determinare gli USP ed una giustificazione dell'appropriatezza e consistenza di tale scelta.

Una volta approvato l'utilizzo degli USP ove previsto, le Compagnie non potranno scegliere di cambiare approccio nel calcolo del SCR ("cherry-picking"). Unica eccezione possibile è il passaggio alla SF, ma soltanto dopo aver avuto nuovamente approvazione formale dall'Autorità di Vigilanza locale.

## 1.4 I Modelli Interni completi (IRM) e parziali (PIRM)

Il Glossario Solvency II (v. [3]) definisce il modello interno come *“un sistema di Risk Management sviluppato da un assicuratore per analizzare la propria esposizione al rischio, per quantificare i rischi e determinare un capitale economico volto a garantirsi nei confronti di tali rischi sottoscritti”*.

L'articolo 112 della Direttiva dispone che *“(...) gli Stati membri garantiscono che le imprese di assicurazione e di riassicurazione possano calcolare il requisito patrimoniale di solvibilità utilizzando un modello interno completo o parziale approvato dalle autorità di vigilanza”*.

In particolare, il secondo comma determina il perimetro di applicazione:

- *Uno o più moduli di rischio, o sotto moduli, del requisito patrimoniale di solvibilità di base di cui agli articoli 104 e 105;*
- *Il requisito patrimoniale per il rischio operativo di cui all'articolo 107;*
- *L'aggiustamento di cui all'articolo 108.*

*In aggiunta, modelli parziali possono essere applicati a tutta l'attività dell'impresa di assicurazione o di riassicurazione o solo ad uno o più settori di attività rilevanti.*

L'articolo 116, poi, rintraccia negli organi amministrativi, direttivi o di vigilanza i soggetti responsabili della richiesta di approvazione e della funzionalità del modello interno totale o parziale su base continuativa.

In modo analogo all'adozione degli USP, l'art. 117 impedisce alle Compagnie di tornare a calcolare parzialmente o totalmente il requisito di capitale dopo aver ricevuto l'approvazione del modello da parte della Vigilanza (“cherry-picking”) e l'art. 119 attribuisce alla Vigilanza il potere di chiedere alle Compagnie di calcolare un IRM o PIRM, in presenza di *“(...) scostamenti significativi dalle ipotesi sottese al calcolo della formula standard”*.

Questa novella proietta l'elaborato verso il suo obiettivo, che, si ribadisce, è quello di mostrare un modello interno parziale per il *Premium Risk*.

La Direttiva agli articoli 120-125 definisce, inoltre, le attività che dovranno essere dimostrate all'Autorità di Vigilanza per adoperare il modello interno. Tali attività sono poi state descritte ed ampliate da EIOPA nei [25] e [26]:

- *Prova dell'utilizzo*: il modello interno deve essere utilizzato nel sistema di governance, in particolare:
  - a) nei processi decisionali e di gestione del rischio;
  - b) nei processi di valutazione e di allocazione del capitale;
- *Standard di qualità statistica*: standard da rispettare nel calcolo della distribuzione di probabilità;

- *Standard di calibrazione*: il modello interno deve essere calibrato in modo coerente con il livello di solvibilità garantito dalla formula standard;
- *Assegnazione di utili e perdite*: le imprese di assicurazione e di riassicurazione esaminano almeno una volta all'anno le cause e le fonti degli utili e delle perdite per ciascuno dei principali settori di attività;
- *Standard di convalida (validazione)*: le imprese di assicurazione e di riassicurazione prevedono un ciclo regolare di convalida del loro modello interno, che include il monitoraggio del suo buon funzionamento, il riesame della continua adeguatezza delle sue specifiche e il raffronto delle sue risultanze con i dati tratti dall'esperienza;
- *Standard in materia di documentazione*: le imprese di assicurazione e di riassicurazione documentano la struttura e i dettagli operativi del loro modello interno.

## 1.5 Attuariato e Risk Management: “Pricing” e “Premium Risk”

Uno degli scopi di un modello interno è quello di integrare in modo completo o parziale i processi aziendali volti ad assumere e gestire i rischi sottoscritti con il capital management di una Compagnia.

Il Risk Management, pertanto, oltre ad essere parte integrante della Governance (v. [24]) di una Compagnia, assume, grazie alla Direttiva, una rilevanza maggiore all'interno delle imprese di assicurazione.

Definita come “funzione” poiché deve essere in grado di svolgere azioni concrete all'interno della Compagnia, oltre al dovere essere in grado di creare un sistema di Risk Management completo ed effettivamente integrato all'interno di questa, il comma 2 dell'art. 44 della Direttiva prescrive che *“Il sistema di gestione dei rischi copre i rischi da includere nel calcolo del requisito patrimoniale di solvibilità di cui all'articolo 101, paragrafo 4, nonché i rischi che sono completamente o parzialmente esclusi da detto calcolo.”*

Ancora più rilevante rispetto all'obiettivo di questo primo capitolo è il comma 5: *“Per le imprese di assicurazione e di riassicurazione che utilizzano un modello interno parziale o completo approvato conformemente agli articoli 112 e 113, la funzione di gestione dei rischi assolve ai seguenti compiti aggiuntivi:*

- **Costruire e applicare** il modello interno;
- **Testare e convalidare** il modello interno;
- **Documentare** il modello interno ed eventuali modifiche successive ad esso apportate;
- **Analizzare il funzionamento** del modello interno e produrre relazioni sintetiche in materia;
- **Informare** l'organo amministrativo, direttivo o di vigilanza in merito ai risultati del funzionamento del modello interno, proponendo i settori passibili di miglioramenti e aggiornando tale organo in merito agli sforzi fatti per migliorare le carenze individuate in precedenza.

Concentrando l'attenzione al *Premium Risk*, definito come *il rischio che i premi relativi ai nuovi contratti più la riserva premi iniziale siano insufficienti a coprire il costo dei sinistri e le spese generate dei contratti*, il PIRM proposto più avanti, ha come punto di forza quello di agevolare il rapporto tra la funzione di Risk Management e l'Attuariato.

Vedremo, infatti, quanto la soluzione proposta semplifichi il rapporto ed instauri un collaborazione tra queste funzioni specialmente per quanto concerne le fasi di *costruzione, applicazione e documentazione* del modello interno parziale.



## Capitolo 2

### Il Perimetro di applicazione

#### 2.1 Un modello generale per rischi assicurabili

In questo primo paragrafo del secondo capitolo sarà illustrato il perimetro di applicazione del modello interno parziale proposto in tesi.

Da un punto di vista giuridico, il Codice Civile (“c.c.”), il Codice delle Assicurazioni Private (D.lgs. 209/2005 o “CDA”) e la legge n. 244/2007 descrivono al loro interno una lista di rischi non assicurabili (*inassicurabilità giuridica*):

- Rischi derivanti dal dolo dell’assicurato (art. 1900 del c.c.);
- Il rischio di pagamento per il riscatto in caso di sequestro di persona (art. 12 del CDA);
- Il rischio di pagamento per sanzioni amministrative (art. 12 del CDA);
- Il rischio che un pubblico ufficiale arrechi danni alla pubblica amministrazione nell’adempimento dei propri compiti istituzionali, se il contratto è stipulato da un ente pubblico che ne sopporti il premio (art. 3 co. 59 l. n. 244/2007)

Ad esclusione di tali rischi che, pertanto, produrranno la nullità di un contratto di assicurazione per contrarietà alla legge, le Compagnie possono stabilire i rischi assicurati e quelli esclusi all’interno di ogni contratto di assicurazione.

Dopo aver accennato brevemente alla normativa dello Stato Italiano, è necessario restringere maggiormente il campo di applicabilità del modello interno parziale.

Il paragrafo 1.5 evidenzia che uno dei punti di forza del PIRM è quello di permettere al Risk Management di determinare il requisito di capitale per il *Premium Risk* analizzando i modelli e le ipotesi determinate dall’Attuariato.

I modelli impiegati usualmente dall’Attuariato, tuttavia, derivando dalla letteratura statistica, trovano applicazione nell’analisi di quei rischi per i quali è possibile avere un numero *sufficiente* di rilevazioni e di unità statistiche.

Ciò pertanto riduce il perimetro di applicabilità del modello interno parziale a tutti e soli i prodotti per rischi singoli trasferiti prevalentemente da persone fisiche. Sono da escludersi, quindi, tutti i prodotti per i quali il prezzo sia determinato in modo puntuale, con una quotazione *ad hoc* del rischio. In termini di garanzie e/o rami assicurativi, invece, non si osservano evidenti limitazioni a priori.



## 2.2 Il ramo di Responsabilità Civile Autoveicoli terrestri

Procedendo nell'analisi di dettaglio rispetto a quanto indicato nel paragrafo precedente, si precisa che la garanzia scelta per mostrare i risultati e l'applicabilità del PIRM è la Responsabilità civile Autoveicoli terrestri.

Tra le ragioni prevalenti di tale scelta si evidenziano l'obbligatorietà di questa assicurazione, l'ampio volume dei premi sottoscritti dalle Compagnie sul territorio nazionale, l'attenzione internazionale per tale copertura di Responsabilità Civile, sia in termini di risultati tecnici che di ricerca attuariale, e l'esperienza tecnico-attuariale maturata nel corso di quasi cinquanta anni di attività in Italia.

Dalla definizione del *Premium Risk* e dalle conclusioni del §1.5, si evidenzia come uno dei primi elementi sui quali si fonda il PIRM proposto in tale elaborato concerne la conoscenza delle tecniche, delle ipotesi, dei vincoli e/o di ogni altro elemento determinato o adoperato dall'Attuariato per prezzare i rischi.

Nei prossimi paragrafi saranno descritti i fondamenti della tecnica danni sul tema della tariffazione e lo schema generale di tariffazione per il ramo RCA, anche in seguito all'introduzione dell'indennizzo diretto, uno dei cambiamenti strutturali più rilevanti degli ultimi anni.

### 2.2.a Date e modifiche alla normativa.

Con la legge 24 dicembre 1969 n. 990, la copertura per la Responsabilità Civile per la circolazione di autoveicoli terrestri diviene obbligatoria per i proprietari di tali veicoli.

Sino al 1994, anno in cui sono state liberalizzate le tariffe RCA a seguito alla Terza Direttiva Danni, la tariffa veniva determinata da una Commissione Interministeriale dei prezzi istituita presso il Ministero dell'Industria (oggi Ministero dello Sviluppo Economico), conosciuta anche come "Commissione Filippi" (di seguito CF), dal nome del suo responsabile. Tale commissione, aggregando i dati provenienti da 99 Compagnie autorizzate all'esercizio nel territorio italiano, determinava una tariffa applicata a circa il 98% dei rischi sottoscritti dalle Compagnie stesse.

Per definire la struttura tariffaria e la personalizzazione dei rischi, la Commissione in accordo con il Conto Consortile, creò sei diversi settori, ancora ad oggi rispettati completamente o parzialmente dalle Compagnie operanti in questo business:

1. Autovetture ad Uso Privato;
2. Taxi;
3. Autobus;
4. Autocarri;
5. Ciclomotori e Motocicli;
6. Veicoli per uso speciali.

Per i primi due settori, la CF ideò e propose fino al 1991, data dell'ultima tariffa amministrata presentata alle Compagnie, una struttura tariffaria di tipo Bonus-Malus (di seguito "BM") senza franchigia.

La liberalizzazione della struttura e della forma tariffaria del 1994 ha di fatto istituito una nuova professionalità ed esperienza tecnico/attuariale all'interno delle Compagnie che ha portato ad una crescente complessità delle tariffe in termini di:

1. Aumento delle variabili di personalizzazione del rischio a priori;
2. Rivisitazione delle strutture tariffarie;
3. Calcolo della sufficienza e tenuta della tariffa (c.d. "Fabbisogno Tariffario");
4. Analisi di impatto e, in taluni casi, alla realizzazione di modelli del comportamento degli assicurati e di utilizzo di un algoritmo per ottimizzare tale tariffa rispetto a vincoli di volume e/o profittabilità.

La necessità di prestare una maggiore attenzione alla tecnica sottostante alla determinazione del premio e alla corretta determinazione delle stime delle riserve tecniche che le Compagnie intendono iscrivere a bilancio ha condotto il legislatore, dapprima con la l. 273/2002 e successivamente con il Decreto n. 67 del 17 marzo 2004 a chiedere alle imprese di assicurazione che esercitano nel ramo RCA di nominare un Attuario Incaricato (di seguito "AIRCA").

L'incarico di tale Attuario (interno o esterno alla Compagnia stessa) consisterà nella verifica preventiva delle basi tecniche, delle metodologie statistiche, delle ipotesi tecniche e finanziarie utilizzate ai fini della determinazione del fabbisogno tariffario e/o degli ulteriori elementi considerati, nonché della preventiva valutazione dei premi di tariffa in funzione dei parametri di riferimento adottati.

Un altro anno rilevante nella storia più recente di questo primo cinquantennio di garanzia RCA è il 2006. Con il D.P.R. 28 giugno 2006, n. 254, le imprese operanti nel business del ramo RCA ebbero facoltà di scegliere di rimborsare alcune tipologie di sinistro direttamente ai propri assicurati non colpevoli.



Tale sistema, noto come *indennizzo diretto* o come “*Convenzione Assicuratori sul Risarcimento Diretto*” (di seguito CARD), avendo rivoluzionato i processi, i sistemi liquidativi e gestionali delle Compagnie, ha comportato variazioni sostanziali anche per gli aspetti più tecnici del calcolo del premio e delle passività tecniche di questo ramo assicurativo.

Il quadro si completa con le leggi n. 248/2006 e n. 20/2007, note anche come legge Bersani-Visco e legge Bersani (o Bersani-bis), che hanno garantito ai familiari conviventi di acquisire la stessa classe di merito di un veicolo di proprietà dell'acquirente (o di un componente del nucleo familiare) già assicurato, alterando così di fatto il principio di mutualità, che è alla base degli istituti di assicurazione.

## 2.2.1 Lo schema generale di tariffazione del ramo RCA

### 2.2.1.a Una definizione economica di Premio di Tariffa

Per la gran parte dei settori industriali che offrono beni o servizi, l'operazione di definizione del prezzo risulta essere concettualmente semplice. Il prezzo, difatti, dovrebbe essere in grado di far fronte ai costi necessari per la produzione di tali beni, incorporando anche un margine di profitto utile alla remunerazione di ogni stakeholder:

$$(16) \quad \text{Prezzo} = \text{Costi} + \text{Profitto}$$

Al netto delle tasse, che inoltre non rientrano nel perimetro di indagine di tale elaborato, una delle peculiarità dell'industria assicurativa è l'*inversione del ciclo produttivo*: al momento della vendita di una copertura assicurativa, dato che la prestazione del contratto assicurativo è per sua natura *futura ed aleatoria*, la Compagnia non conosce i costi.

Utilizzando un lessico assicurativo, il prezzo indicato in formula (16) corrisponde al cosiddetto *Premio di Tariffa*.

Di seguito saranno descritte le componenti di costo e di profitto coerenti con il perimetro di tale tesi, ossia rilevanti per il calcolo del premio di un prodotto RCA.

### 2.2.1.b I costi del business assicurativo

I costi di una Compagnia di assicurazione possono essere divisi in deterministici ed aleatori.

Nel processo di sottoscrizione di un rischio che coincide con la vendita di una polizza assicurativa, la Compagnia affronterà infatti dei costi amministrativi e/o gestionali e dei costi derivanti dall'eventuale prestazione assicurativa.

Nel primo caso, ossia per quelli deterministici e determinabili a priori, rientrano usualmente (“*Spese&Comm*”):

- Commissioni per le reti di vendita;
- Altri costi di acquisizione;
- Spese Generali;
- Altri.

Le commissioni e gli altri costi di acquisizione sono tutte le remunerazioni delle reti distributive. Calcolati sui volumi di business e, molto spesso, come percentuali sui premi lordi contabilizzati sono concordati a priori con le reti stesse. Le spese generali riguardano genericamente tutte le spese necessarie ad un’impresa per operare: costi fissi, costi variabili, ecc.

In una copertura contro il rischio di perdita del patrimonio come la RCA, salvo clausole di risarcimento in forma specifica che non sono particolarmente richieste dal mercato, la prestazione aleatoria consiste in un risarcimento ad un terzo (“sinistrato”) che subisce un danno dovuto dalla circolazione del veicolo a motore di un assicurato (“sinistro”). Tale componente di costo è quantitativamente preponderante rispetto a quella deterministica descritta precedentemente.

In un normale processo di liquidazione, ogni sinistro lecito, dopo essere avvenuto e poi denunciato dall’assicurato, sarà pagato al sinistrato. L’*aleatorietà* di questa componente di costo subito dalla Compagnia, quindi, è triplice:

- Il verificarsi dell’evento;
- Il momento in cui un sinistro sarà effettivamente denunciato;
- Il momento in cui un sinistro sarà effettivamente pagato.

Generalmente al momento delle denuncia, un sinistro viene assegnato ad un liquidatore. Tale sinistro potrà essere pagato o posto a riserva, a seconda di molteplici considerazioni, quali la mancanza di documenti, accertamenti vari, il coinvolgimento un numero elevato di controparti, la pendenza di una causa, ecc.

In generale quindi, le perdite derivanti dai sinistri denunciati, possono essere sintetizzate nella seguente formula:

$$(17) \quad \text{Perdite\_Den} = \text{Pagato} + \text{Riserva Liquidatori}$$

A causa della seconda fonte di incertezza e, quindi, dalla possibilità di un sinistrato di denunciare un sinistro in una data diversa da quando questo sia avvenuto, il legislatore (v. art. 30 del [32]) chiede alle Compagnie di accantonare un'ulteriore passività chiamata *Riserva per Sinistri avvenuti ma non ancora denunciati* (di seguito "*Ris\_IBNR*"):

*“La riserva per sinistri avvenuti ma non ancora denunciati comprende l'ammontare complessivo delle somme che, da una stima prudente, risultino necessarie per far fronte al pagamento dei sinistri avvenuti nell'esercizio stesso o in quelli precedenti, ma non ancora denunciati alla data delle valutazioni nonché alle relative spese di liquidazione.*

L'ultima fonte di incertezza richiede all'assicuratore di valutare se il ritardo con cui andrà a liquidare un sinistro comporti un aumento o una diminuzione delle riserve appostate dal liquidatore.

Nell'ammontare del posto a riserva dovranno essere valutate altresì sia delle ragioni esogene (quali l'inflazione, il ciclo economico o le modifiche alle tabelle dei tribunali che stabiliscono gli indennizzi dei sinistrati), sia delle ragioni endogene (quali l'inflazione dei beni colpiti dalla garanzia RCA, le modifiche alla rete liquidativa di una Compagnia o quelle proprie della complessità stessa di un sinistro). Tale principio, chiamato del *costo ultimo*, è determinato nella così detta *Riserva per Sinistri avvenuti ma non ancora sufficientemente denunciati* (di seguito "*Ris\_IBNeR*").

Anche la *Ris\_IBNR* dovrà essere stimata tenendo conto del costo ultimo dei sinistri non ancora denunciati come descritto nel co. 2 dell'art 31 [32].

Come conseguenza di quanto sopra descritto, il costo ultimo delle prestazioni aleatorie dovrà essere stimato sulla base di dati storici e prospettici affidabili:

$$(18) \quad CU\_Stimato = Perdite\_Den + Ris\_IBNR + Ris\_IBNeR$$

Solitamente il soggetto incaricato alla determinazione della suddetta stima è l'Attuariato di Bilancio.

Ultima componente di costo da valutare riguarda le spese di liquidazione (di seguito "*LAE*"), ossia le spese da sostenere per coprire i costi derivanti dal processo liquidativo di un sinistro. Tali spese possono essere suddivise in:

- ALAE: Spese di liquidazione direttamente allocabili al sinistro;
- ULAE: Spese di liquidazione non allocabili direttamente al sinistro.

Nel primo caso rientrano tutte le spese sostenute per l'indagine l'accertamento, la valutazione e la liquidazione dei sinistri quali le parcelle di professionisti, nonché specifici compensi ad agenti o spese e rimborsi spese per la liquidazione dei sinistri in coassicurazione altrui delega.

Le ULAE, invece, riguardano tutti i costi relativi alla rete liquidativa, quali i costi del personale dipendente, di sede o esterno, che svolge le funzioni di indagine, accertamento, valutazione e liquidazione dei sinistri ed i costi e gli ammortamenti relativi all'acquisto di beni e prestazioni di servizi relativi al funzionamento di unità in cui opera il personale sopraindicato.

Le LAE, oltre ad essere statisticamente note ad una certa data in modo simile alle *Spese&Comm*, sono intrinsecamente legate ai sinistri e dovranno pertanto essere valutate anche a costo ultimo.

### 2.2.1.c Il Profitto atteso

Come descritto nel paragrafo precedente, una Compagnia di assicurazione non conosce con esattezza algebrica il costo ultimo dei sinistri. Una volta stimato il costo ultimo e determinate le spese e commissioni (*Spese&Comm*), la Compagnia potrebbe proporre agli assicurati di pagare un premio utile a far fronte esclusivamente ai suddetti costi.

La teoria del rischio, tuttavia, evidenzia che in tali condizioni non è sempre garantita la stabilità economica di una Compagnia che assume in modo professionale dei rischi di terzi.

L'utile atteso, pertanto, non svolge solo il ruolo comune a tutti i settori industriali di remunerazione del rischio sopportato dall'imprenditore e da ogni shareholder della Compagnia, ma anche quello di far fronte al rischio che il *premio non sia in grado di fronteggiare tutti i costi e le spese*.

Quest'ultima affermazione assume un significato rilevante per la tesi. Riprendendo la definizione del *Premium Risk* (v. §1.5), il calcolo dell'utile atteso risulta essere il modo *a priori* con il quale l'Attuariato vuole immunizzarsi dalla probabilità di incorrere in un errore di tariffazione.

In particolare il profitto atteso ("*Utile*") è costituito da

- Margine tecnico di sicurezza;
- Caricamento del Costo del Capitale;
- Coefficiente correttivo dovuto al rendimento finanziario delle riserve tecniche.

Se l'Attuariato di Bilancio si occupa di solito delle stime del costo ultimo dei sinistri, la Finanza spesso è il soggetto che coopera con l'Attuariato al fine di calcolare tale utile. Nel dettaglio dell'elenco descritto sopra, la Finanza determina spesso gli ultimi due punti.

Questi consentono all'assicuratore di inserire nel premio anche una parte di proventi del conto non tecnico. Se, difatti, il caricamento del costo del capitale aumenta il premio da far pagare agli assicurati, il coefficiente correttivo dovuto al rendimento finanziario delle riserve tecniche lo riduce.

In conclusione, il Margine tecnico di sicurezza (anche detto "Caricamento di sicurezza") è un ulteriore margine implicito richiesto all'assicurato per far fronte all'alea dei rischi sottoscritti.

#### 2.2.1.d Definizione assicurativa del Premio di Tariffa

Riprendendo la definizione economica di Premio di Tariffa del §2.2.1.a (v. formula (16)), note le componenti del costo e l'utile atteso, tale premio può essere espresso dalla seguente formula:

$$(19) \quad \text{Prezzo} = \text{Premio\_Tar} = \text{CU\_Stimato} + \text{LAE} + \text{Spese\&Comm} + \text{Utile}$$

La formula indicata è allo stesso tempo la definizione del premio di una copertura assicurativa ed il vincolo da rispettare. In altri termini, l'Attuario, cooperando con altri soggetti di una Compagnia, ha l'onere di dovere quantificare un prezzo tale per cui sia rispettata la suddetta equazione.

Il premio, quindi, dovrà garantire in media all'assicuratore di essere in grado di far fronte ai suoi oneri e di poter avere un ritorno economico dovuto dal rischio sostenuto dagli shareholders.

Per tale ragione il Premio dovrà essere:

- Coerente con l'evoluzione futura dei rischi/costi;
- Bilanciato a livello collettivo ed individuale.

Ambedue i concetti sono già parzialmente contenuti all'interno del CU\_Stimato al lordo delle LAE.

Per esprimere meglio il primo concetto è utile menzionare che la costruzione di un premio di tariffa da parte di una Compagnia ha una *durata di validità*. Secondo quanto accade nel mercato italiano, all'interno di questo arco temporale, ogni nuovo contratto o rinnovo di polizza sarà gestito con questa tariffa. Ipotizzando che il *premio sia analogo nell'importo per ogni assicurato*, l'equazione (19) dovrà essere rispettata per tutti i sinistri ed i costi che saranno prodotti dai contratti acquisiti all'interno di tale periodo di validità.

A parità di prodotto assicurativo ed, in questo caso, di copertura RCA, i rischi ceduti da un assicurato possono essere diversi. Per tale ragione appare forte e, per certi versi, irrealistico l'ipotesi di avere un premio di tariffa costante per ogni assicurato.

Anche in questo caso, pertanto, la formula che assicura l'equilibrio tecnico dovrebbe essere rispettata: vincoli legislativi, commerciali e di marketing in alcuni casi non consentono di rispettare tale equilibrio individuale.

Le Compagnie, avendo comunque l'obbligo di verificare la tenuta del premio di tariffa a livello globale (fabbisogno tariffario), creano usualmente dei sistemi di verifica e controllo dei profitti / perdite derivanti dal segno della disuguaglianza calcolata a livello individuale (detta anche "Analisi di Impatto").

### 2.2.1.e La Riassicurazione

I principi contabili italiani, ispirati prevalentemente al concetto di *prudenza*, prescrivono una valutazione dei costi derivanti dai sinistri al lordo dell'effetto di *mitigazione del rischio* dovuto alla sottoscrizione di contratti/trattati di riassicurazione.

Per tale ragione, coerente con il perimetro di applicazione di tale elaborato, nella formula (19) non si è fatta esplicita menzione delle riassicurazione.

Spesso le Compagnie che esercitano il ramo RCA, inoltre, acquistano trattati di natura non proporzionale utili a far fronte ad eventuali perdite della gestione assicurativa: *stop loss*.

Il prezzo del contratto/trattato, pertanto, influisce in modo deterministico sulla riduzione dei premi effettivamente guadagnati dalle Compagnie, ma si necessita della stessa stima con la quale sono calcolati i costi futuri dovuti ai sinistri per potere determinare un coefficiente di risparmio dovuto alla riassicurazione.

In conclusione, nei mercati per i quali questa componente assume una rilevanza maggiore, la (19) può essere riscritta come segue:

$$(20) \quad \text{Premio\_Tar} = (\text{CU\_Stimato\_NettoRiass} + \text{LAE} + \text{Spese\&Comm} + \text{Utile}) + \\ - \text{Premio\_Ceduto}, \text{ dove il } \text{CU\_Stimato\_NettoRiass} < \text{CU\_Stimato}$$

### 2.2.1.f Definizione del Premio Equo

Il premio equo è definito come quell'importo  $P$  tale per cui il contratto di assicurazione tra le controparti diviene equo. Definito come la speranza matematica della prestazione aleatoria  $X$  di una generica Compagnia

$$(21) \quad P = E(X)$$

Se si conoscesse la distribuzione di probabilità (di seguito "d.d.p.") della variabile  $X$ , la (21) si potrebbe riscrivere nel modo seguente:

$$(22) \quad P = E(X) = \int_0^{+\infty} x dF_X(x)$$

Dove  $F_X(x)$  è la funzione di ripartizione della d.d.p. nota.

Esistono altri funzionali in letteratura del premio netto tra cui il criterio delle varianze, dello scarto *quadratico medio* e dell'*utilità attesa*, ma tenendo conto dell'esperienza di tariffazione nei diversi mercati europei, la tesi mostrerà dei risultati coerenti con quello del *valore atteso* o *della speranza matematica*:

$$(23) \quad P = (1 + \alpha)E(X) = (1 + \alpha) \int_0^{+\infty} x dF_X(x), \text{ con } \alpha > 0$$

Al fine di poter delineare nei dettagli il processo tecnico-attuariale di tariffazione, superando la logica deduttiva che consente di assumere la d.d.p. della v.a.  $X$ , un primo passo da compiere è quello di definire la teoria sottostante la prestazione aleatoria:

$$(24) \quad X = \sum_{i=0}^N Y_i$$

La v.a. da determinare al fine di poter calcolare il premio equo, che spesso prendo il nome di *Danno Aggregato a costo ultimo* (di seguito “DaU”), è pari alla somma dei risarcimenti aleatori  $Y$  relativi ad ognuno dei sinistri che dovrà essere pagato dall’assicuratore (cfr. formula (14)).

$N$  quindi rappresenta un’ulteriore forma di incertezza, ossia la v.a. del numero dei sinistri che potenzialmente avverranno e saranno denunciati dagli assicurati all’interno del *periodo di validità* della tariffa.

Le due grandezze appena definite sono anche chiamate *basi tecniche*.

In modo coerente con quanto indicato nella formula (18) relativa ai costi aleatori sostenuti dall’industria assicurativa, il DaU è esattamente pari al CU\_Stimato

$$(25) \quad X = \text{CU\_Stimato} = \text{Perdite\_Den} + \text{Ris\_IBNR} + \text{Ris\_IBNeR}$$

In ipotesi di *indipendenza ed identica distribuzione* (di seguito “i.i.d.”) dei risarcimenti aleatori  $Y$  e del numero dei sinistri  $N$ , nonché tra numeri e risarcimenti, si dimostra (v.[57]) che il valore atteso della v.a. del DaU, ossia il Premio Equo, è pari a

$$(26) \quad P = E(X) = E(N) \cdot E(Y)$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto anche seguendo l’*approccio statistico* di calcolo del premio equo.

Preso un portafoglio assicurativo di un prodotto RCA contenente un numero di esposti (anche detti “veicoli anno”) al rischio pari a *veic*, ossia al numero di giorni in cui ogni rischio è stato assicurato all’interno di un anno di bilancio, il *premio equo individuale* ante personalizzazione può essere scritto come

$$(27) \quad P = \frac{X}{\text{veic}} = \frac{\sum_{i=0}^N Y_i}{\text{veic}}$$

Tale rapporto, anche noto come *quota danni* (o “burning cost”), diviso e moltiplicato per il numero **n** dei sinistri avvenuti e denunciati, mostra le basi tecniche di tariffazione, cioè la frequenza (**f**) ed il costo medio (**C**) dei sinistri, indicate in termini di valore atteso nella formula (26):

$$(28) \quad P = \frac{n}{veic} \cdot \frac{\sum_{i=0}^N Y_i}{n} = f \cdot \bar{C}$$

### 2.2.1.g Il processo di costruzione di una Tariffa

Come descritto nei paragrafi precedenti, l’obiettivo finale dell’Attuariato è quello di determinare il Premio di Tariffa. Per perseguire tale obiettivo espresso dalla formula (19), la tecnica attuariale con la quale è calcolato segue usualmente i seguenti passi operativi:

- Creazione e Validazione del Database Tariffario;
- Analisi di personalizzazione tramite un Modello di Rischio;
- Calcolo del Premio Equo;
- Determinazione del Premio medio di Tariffa tecnico;
- Costruzione dei Modelli Commerciali;
- Definizione della Tariffa;
- Simulazione della tariffa sul portafoglio assicurabile;
- Verifica del Fabbisogno Tariffario.



### 2.2.1.h Creazione e Validazione del Database Tariffario

La creazione e la validazione delle base dati utili alla determinazione del premio fondano tutto il processo di tariffazione.

In sintesi, una base dati tariffaria nasce dalla combinazione di altre due base dati:

- Polizze;
- Sinistri.

Sistemi gestionali diversi utilizzati da soggetti aziendali diversi, permettono ad una Compagnia di poter gestire separatamente la parte commerciale da quella dei costi per sinistro.

Posto che i sinistri sono prodotti dagli assicurati, tecniche IT consentono di determinare un'unica tabella nella quale ad ogni polizza sono *aggregate le informazioni dei sinistri eventualmente accaduti e denunciati*.

Generalmente, seguendo il principio di prudenza sottostante il nostro ordinamento, i sinistri saranno:

- Basati sulla visione più aggiornata del loro stato e degli importi pagati/riservati;
- Al lordo della riassicurazione;
- Al lordo dei recuperi (ad es. franchigia, scoperto, ecc.);
- Al netto dei massimali;
- In delega propria per contratti in coassicurazione;
- Al lordo delle LAE.

Per dare maggiore peso statistico alle serie storiche dei sinistri e delle polizze, l'Attuariato richiede una Database Tariffario relativo almeno alle ultime due generazioni dei sinistri e non superiore alle ultime cinque. Ciò, pertanto, consente alle Compagnie di poter scegliere tra due possibili viste dello stato dei sinistri:

- Alla fine dell'ultima generazione (*scelta prevalente del mercato italiano*);
- Alla fine di ciascuna generazione.

Poiché dal §2.2.1.d è stato introdotto il concetto di premio differenziato per ogni rischio, le polizze dovranno anche contenere il numero maggiore di informazioni utili a tale personalizzazione. Queste informazioni possono essere divise in tre gruppi:

- Variabili esplicative (non Geografiche);
- Variabili esplicative Geografiche;
- Dati esterni (ad es. Variabili Geo-Demografiche, dati sulla storia assicurativa, ecc.)

Per la validazione del Database creato, ci sono diverse statistiche aziendali e di bilancio che possono essere adoperate:

- Moduli di Vigilanza;
- Reporting interno;
- Scarichi mensili dei flussi derivanti dai Software Gestionali;
- Altri.

Occorre infine ricordare la selezione di una soglia per i sinistri punta (o large). Dopo aver riconciliato i dati come indicato, l'Attuariato sceglie una soglia al fine di ottenere una personalizzazione del premio che tenga conto dei soli sinistri inferiori a tali limite.

Detta soglia può essere individuata con vari metodi, quali:

- Disuguaglianza di Čebyšëv;
- Metodo del Quantile;
- Teoria degli Eventi Estremi;
- Altri.

Una volta determinata la soglia, i sinistri con importo particolarmente elevato vengono ridotti fino all'importo della stessa.

Dall'esperienza maturata nel mercato italiano, i sinistri che eccedono tale soglia sono meno dell'1% sul totale dei numeri, ma pesano circa il 25%-30% del totale costo.

Per tale ragione, la personalizzazione che verrà descritta nei paragrafi seguenti, ne terrà conto parzialmente (ossia fino alla soglia) ed il delta del costo tagliato sarà poi trasformato in un coefficiente correttivo per tenerne conto in modo solidaristico su tutti i futuri assicurati.

Tale modo di operare, in accordo con l'equazione (19) dell'equilibrio tecnico, è tipico della gran parte delle Compagnie operanti nel mercato italiano.

Per completezza di informazioni, si precisa che esistono altre metodologie che tengono a preservare maggiormente la mutualità degli assicurati, le quali tuttavia non rientrano nel perimetro di questo elaborato:

- Modelli di propensity o propensione al sinistro punta;
- Modelli di severity dei sinistri oltre la soglia o dell'eccesso.

### 2.2.1.i Analisi di personalizzazione tramite un Modello di Rischio

Per semplicità di esposizione, si ipotizzi che la tariffa abbia una validità annuale coincidente con quella del bilancio, genericamente espressa tra il  $1/1/t$  ed il  $31/12/t$ , e che la Compagnia eserciti il ramo RCA da almeno quindici anni.

Per determinare il Premio Equo, quindi il DaU, sarà anzitutto necessario analizzare le serie storiche del numero e del costo dei sinistri. Dall'equazione (25), infatti, la prima cosa che l'Attuario dovrà determinare sono le *Perdite\_Den*:

- Selezionando gli ultimi tre anni noti (t-1, t-2 e t-3);
- Scegliendo la vista dei sinistri alla fine dell'ultima generazione nota (t-1) (*scelta prevalente del mercato italiano*).

Costruita e validata la base dati tariffaria come indicato in sintesi al §2.2.1.h, saranno calcolate le basi tecniche di frequenza e costo medio di generazione t-1. Una volta moltiplicate, come descritto dalla formula (28), si otterrà un premio equo del *costo storico denunciato*.

L'obiettivo di un *Modello di Rischio* è di indentificare quali siano le variabili tra non Geografiche, Geografiche ed (eventualmente) esterne che *personalizzano il rischio a priori* e di ottenere una stima delle v.a. **N** e **Y** coerente a livello individuale (polizza per polizza) e pressoché analoga a livello collettivo.

I modelli di rischio possono essere divisi in due grandi categorie:

- Parametrici;
- Non Parametrici.

Nel primo caso, il valutatore dovrà selezionare una distribuzione di probabilità della *variabile risposta*.

Per la v.a. del numero dei sinistri **N** le d.d.p. consigliate in letteratura sono

- Distribuzione di Poisson classica o Sovra dispersa (di seguito "ODP");
- Distribuzione Binomiale Negativa.

Mentre per la v.a del costo dei sinistri **Y**

- Distribuzione Gamma;
- Distribuzione Log-Normale;
- Distribuzione Beta;
- Distribuzione Pareto o Pareto Generalizzata.

I modelli non parametrici, invece, non richiedendo alcun tipo di ipotesi probabilistica, bensì adottano procedure statistiche di perequazione, al fine di determinare una stima dei momenti e/o dell'intera forma della distribuzione della v.a. **X**.

Una seconda distinzione metodologica sottostante la scelta di un modello riguarda il tipo di analisi:

- Univariata;
- Multivariata.

Il limite dell'analisi univariata del rischio concerne l'impossibilità di riuscire a selezionare le variabili significative tenendo conto delle *correlazioni*, dove per correlazione si intende una misura di dipendenza delle unità statistiche del Database Tariffario tra le variabili esplicative.

Questa limitazione, tuttavia, è bilanciata dalla semplicità di questo approccio e dal fatto di essere consigliabile per Compagnie che hanno un numero di esposti al rischio (veic) inferiore a 100.000.

Anche ricorrere ad un modello multivariato presenta un limite: alcune combinazioni tra le modalità delle variabili esplicative potrebbero essere vuote o talmente poco popolate da creare rumore statistico (o *alea*) in tutto il modello e/o a compromettere la ricerca della componente sistematica del rischio oggetto di analisi.

Per far fronte a tale ultima limitazione, i modelli tecnici multivariati scelti dalla gran parte delle Compagnie a livello globale, rientrano nella famiglia dei *modelli di regressione*. Tra questi si segnala il Modello Lineare Generalizzato ("GLM"), che sarà oggetto di descrizione dettagliata nella Sezione II di questo elaborato.

Occorre concludere che, anche se il Modello di Rischio studia le serie storiche del numero e del costo dei sinistri, ogni scelta effettuata dal valutatore nella selezione e nell'eventuale semplificazione delle variabili significative dovrà essere volta ad individuare il *trend futuro* delle basi tecniche stesse.

### 2.2.1.I Calcolo del Premio Equo

Dopo aver determinato un premio equo del *costo storico denunciato*, ottenuto come il prodotto tra la frequenza ed il costo medio dei sinistri di generazione t-1, per calcolare il Premio Equo dovranno essere definite:

- La riserva IBNR;
- La riserva IBNeR.

L'Attuariato di Bilancio, dopo aver calcolato tali passività, coopera con l'Attuariato di Tariffa al fine di ottenere dei coefficienti (moltiplicativi o additivi) da applicare alle suddette basi tecniche.

Diversamente da quanto determinato per il Bilancio, i due attuariati dovranno determinare tali coefficienti correttivi in coerenza con il periodo di validità della tariffa.

Il Premio di Tariffa, infatti, dovrà garantire l'equazione (19) per tutti e soli i nuovi contratti o i rinnovi all'interno di questo arco temporale. Tale concetto prende il nome di *costo ultimo di generazione tariffaria*.

In modo del tutto illustrativo e non esaustivo, sono elencati di seguito degli esempi di coefficienti adoperabili a tal fine:

#### **Frequenza:**

- Correzione per numero sinistri IBNR;
- Correzione per numero sinistri riaperti;
- Correzione per numero sinistri annullati;
- Correzione per variazioni al ciclo di mercato;

#### **Costo Medio:**

- Correzione per costo medio dei sinistri IBNR;
- Correzione per costo medio in eccesso da sinistri punta;
- Correzione per costo ultimo dei sinistri;
- Spese di Resistenza;
- Correzione per variazioni al ciclo di mercato.

### 2.2.1.m Determinazione del Premio medio di Tariffa tecnico

Il Premio di Tariffa, già definito nel §2.2.1.d, è quell'ammontare che dovrà garantire in media all'assicuratore di essere in grado di far fronte ai suoi oneri e di poter avere un ritorno economico dovuto dal rischio sostenuto dagli shareholders (v. §2.2.1.d).

Il termine *Premio medio di Tariffa tecnico*, riportato in intestazione del paragrafo, è solo un sinonimo del Premio di Tariffa, sebbene spesso sia maggiormente utilizzato nella prassi assicurativa.

Dalle formule (19) e (25), ipotizzando inoltre che i sinistri siano osservati e portati a costo ultimo di generazione tariffaria come indicato nel paragrafo precedente, si deduce che il prezzo di una copertura assicurativa diviene pari a

$$(28) \quad \text{Prezzo} = \text{Premio\_Tar} = X + \text{Spese\&Comm} + \text{Utile}$$

Dove  $X$  è la v.a. del DaU, il cui valore atteso è pari al Premio Equo.

Calcolate quindi le Spese e Commissioni (v. §2.2.1.b) dal servizio di Controllo di Gestione, e l'Utile (v. §2.2.1.c), l'Attuariato applicherà nuovamente il criterio della generazione tariffaria al fine di ottenere e/o stimare tali grandezze all'interno del periodo di validità della tariffa.

Ultima componente di spesa da descrivere per il business RCA scelto in tesi è il Fondo di Garanzia per le Vittime della Strada (di seguito FGVS). Tale fondo, istituito nel 1969 e gestito dalla Consap S.p.A., nasce dall'esigenza del legislatore di tutelare anche le vittime di sinistro RCA nel caso in cui

- La controparte sia priva di assicurazione;
- La controparte sia in possesso di copertura con impresa in liquidazione coatta amministrativa;
- Il risarcimento dei danni è causato da veicoli posti in circolazione contro la volontà del proprietario (furto);
- Il risarcimento dei danni è causato da veicoli spediti nel territorio della Repubblica Italiana da un altro Stato del cosiddetto Spazio Economico Europeo (cioè dai paesi della Unione Europea, con l'aggiunta di Islanda, Norvegia e Liechtenstein) avvenuti nel periodo intercorrente dalla data di accettazione della consegna del veicolo e lo scadere del termine di 30 giorni;
- Il risarcimento dei danni è causato da veicoli esteri con targa non corrispondente o non più corrispondente allo stesso veicolo.

Le entrate del fondo saranno pari ad una parte dei premi incassati dalle Compagnie. Per tale ragione, l'Attuariato determinerà un altro coefficiente correttivo per tenere conto del futuro esborso certo da parte della Compagnia ad ogni rinnovo e/o nuovo contratto acquisito.

Il correttivo per FGVS è mediamente pari al 2.4% del Premio Equo.

### 2.2.1.n Costruzione dei Modelli Commerciali

I Modelli di Rischio costruiti dall'Attuariato consentono di replicare la frequenza, il costo medio e, di conseguenza, il costo denunciato storico alla base del calcolo del Premio Equo e di Tariffa.

Di solito, però, un valutatore impegnato nella selezione e semplificazione delle variabili esplicative delle basi tecniche compirà delle scelte finalizzate a descrivere il rischio in modo tecnico, ossia, non facilmente giustificabili in una logica più estesa di marketing.

Un prodotto assicurativo, infatti, è comunque un bene economico venduto all'interno di un mercato.

In sintesi i Modelli di Rischio:

- Possono variare anche in modo significativo tra due edizioni tariffarie;
- Contengono variabili significative, ma non commercializzabili
  - Per *vincoli di legge*: frequenza di pagamento (o frazionamento), flag dell'attestato Bersani, ecc.
  - Per *vincoli commerciali/marketing*: massimale, classi bonus-malus (di seguito BM), ecc.
  - Per *vincoli informatici* (di seguito "IT"): modificare la struttura informatica di un motore tariffario che recepisce la tariffa può essere molto dispendioso in termini di tempo e/o economici. Un esempio classico riguarda la modifica del raggruppamento dei comuni e/o CAP della variabile esplicativa Geografica.

Nasce così l'esigenza di creare dei *Modelli Commerciali* che, a partire da quelli tecnici, saranno modificati per tenere conto dei vincoli di ogni Compagnia.

In modo del tutto analogo a quanto già definito al §2.2.1.i, anche i Modelli Commerciali possono essere parametrici, non parametrici, univariati o multivariati.

Il limite statistico della costruzione di questi modelli è che, una volta recepite le modifiche, il modello spiegherà in modo certamente peggiore del Modello di Rischio le basi tecniche.

Non è semplice stabilire a priori il segno di tale variazione, ma ciò andrà a compromettere parzialmente i principi di visione futura e di bilancio tra premio individuale e premio collettivo indicati al §2.2.1.d contenuti nel Premio Equo.

### 2.2.1.o Definizione della Tariffa

La Definizione della Tariffa è il momento del processo di tariffazione in cui si decide l'effettiva struttura di una tariffa.

Tale struttura si compone di due componenti:

- Premio di Riferimento (P\_rif);
- Coefficienti di personalizzazione (Coeff).

Il *Premio di riferimento* è il premio che l'assicuratore dovrebbe chiedere ad ogni assicurato al fine di poter essere in grado di far fronte ai costi ed a ricavarne un profitto atteso. Da questa definizione appare evidente l'equivalenza con il Premio medio di Tariffa tecnico. In generale, tuttavia, questa equivalenza è rispettata solo per la prima tariffa di una Compagnia (v. §2.2.1q).

Assumendo per semplicità che il Premio di Riferimento resti costante tra la due edizioni tariffarie successive, per *Coefficienti di personalizzazione* si intendono i coefficienti (moltiplicativi, additivi o misti in funzione della struttura tariffaria selezionata dall'Attuariato) da applicare al Premio di Riferimento per personalizzare a priori il rischio.

Anche per i coefficienti sembra esserci una perfetta analogia con le determinazioni del Modello Commerciale, ma, anche in questo caso, i Coefficienti di personalizzazione possono non coincidere perfettamente. Uno degli esempi tipici riguarda l'influenza dei servizi commerciali/marketing o delle reti distributive sui coefficienti delle aree nelle quali operano.

Il processo decisionale per la definizione di una tariffa, quindi, coinvolge un gran numero di attori tra i quali si possono elencare in modo illustrativo:

- Attuariato di Tariffa;
- Attuariato di Bilancio;
- Controllo di Gestione;
- Finanza;
- Capo Ramo RCA;
- Commerciale/Marketing/Vendite;
- Attuario Incaricato
- Altri.

In seguito ad un'Analisi di Impatto che prevede il confronto tra Modello di Rischio, che esprime il rischio tecnico-attuariale della generazione tariffaria, Modello Commerciale, con il quale la Compagnia accoglie i vincoli indicati nel §2.2.1.n, e Coefficienti di personalizzazione della precedente struttura, l'Attuariato coinvolge tutti gli attori di questo processo per definire una nuova proposta di *Coefficienti di Personalizzazione*.



Si definisce allora il *Premio medio di Tariffa effettivo*, la seguente combinazione lineare calcolata sulla generazione tariffaria costituita da  $j$  ( $j=1, \dots, U$ ) unità statistiche:

$$(29) \quad \text{Prezzo} = \text{Premio\_Tar\_effett} = \sum_{j=1}^U (P\_rif \cdot Coeff)$$

In conclusione, tanto più il Premio di Riferimento sarà diverso dal Premio Medio di Tariffa ed i Coefficienti di Personalizzazione dai coefficienti del Modello di Rischio, tanto maggiore sarà la differenza a livello individuale e collettivo tra il Premio medio di Tariffa ed il Premio medio di Tariffa effettivo.

### 2.2.1.p Simulazione della tariffa sul portafoglio assicurabile

Come indicato in formula (30), per determinare il Premio medio di Tariffa Effettivo, dovranno essere definite le  $j$  unità statistiche di un Database Tariffario nell'anno  $t$  per poi applicare la nuova proposta tariffaria ed infine calcolare il Premio\_Tar\_effettivo. La *Simulazione della tariffa* persegue proprio tale obiettivo.

La prima considerazione da fare concerne i futuri assicurati e, quindi, il perimetro della simulazione. Come discusso in precedenza, al momento della determinazione di una nuova tariffa, la conoscenza dei rischi in portafoglio riguarda i soli anni precedenti all'anno  $t$ .

Il perimetro della simulazione, inoltre, potrà essere a:

- Portafoglio Chiuso;
- Portafoglio Aperto.

Nel primo caso, si ipotizza un *turnover* perfetto di polizze in entrata ed in uscita nell'anno  $t$ , che non incide sulla numerosità, ma al più nella tipologia di assicurati che potrebbero richiedere un quotazione per cedere il proprio rischio.

In una valutazione a *Portafoglio Aperto*, invece, l'Attuariato dovrà essere in grado di valutare le entrate e le uscite di portafoglio nel periodo di validità della tariffa. In particolare, l'Attuariato dovrà essere in grado di stimare i futuri assicurati tra

- Rinnovi;
- Nuova produzione (o nuovi affari).

Per l'ipotesi di durata annuale della nuova tariffa, noti gli assicurati dell'anno precedente ( $t-1$ ), le entrate, dovute ai rinnovi di polizze già sottoscritte, potranno essere selezionate in funzione della loro data di scadenza del contratto. Si definiscono quindi i *rinnovi* come quel sottoinsieme di polizze che avranno data di scadenza contenuta all'interno della data di validità della tariffa.

Un'ulteriore miglioria tecnica, che consente di valutare anche le uscite per rinnovi, riguarda il calcolo dei *rinnovi potenziali*, ossia, di tutti quei rinnovi che in media non abbandoneranno la

Compagnia. Con il D.l. 179/2013 che ha introdotto l'abolizione della clausola di tacito rinnovo per il ramo di RCA, non esiste alcuna garanzia a priori di rinnovo automatico della polizza.

Sarà necessario, quindi, calcolare una stima della *probabilità di rinnovo* del contratto. Essendo un'analisi del comportamento degli assicurati, l'Attuariato dovrà costruire delle basi dati ad hoc per tenere conto di variabili esplicative aggiuntive rispetto a quelle utilizzate nei modelli di costo (v. §2.2.1.i).

E' ragionevole pensare che il *Modello di tasso di rinnovo* (anche detto *Modello di Retention*) sarà influenzato:

- Dalla variazione di premio tra i due rinnovi;
- Dalla variazione di premio tra il premio proposto ed il premio di mercato;
- Dalla presenza di sconti in polizza;
- Da un indicatore di bontà commerciale del cliente (ad es. polizza singola / multi polizza);
- Altri.

Anche per la stima della nuova produzione esistono diversi approcci perseguibili, tra i quali i più frequenti sono:

- Analisi della nuova produzione del anno precedente (t-1);
- Analisi dei preventivi dell'anno passato convertiti effettivamente in polizza;
- Altri.

A differenza dei rinnovi, capire quali saranno i clienti (e quindi le possibili entrate nel periodo di validità della tariffa) è più complesso se non si conoscono le statistiche dei preventivi di polizza che sono stati confermati nel periodo precedente.

Ciò che invece è di facile costruzione in una base dati è un variabile indicatrice, utilizzato per indicare quali siano le polizze entrate nel portafoglio nel periodo precedente. Grazie a questa informazione è possibile seguire il primo approccio indicato sopra. Il forte limite di questo criterio riguarda, però, la difficoltà di valutare il tipo di rischio futuro: non è detto che i nuovi affari del passato siano del tutto coincidenti con quelli che entreranno in futuro.

Il secondo approccio presentato, invece, si basa su un altro modello comportamentale chiamato *Modello di Conversione* (o *Modello di Conversion*).

Anche in questo caso, l'Attuariato dovrà creare una nuova base dati con delle variabili esplicative simili a quelle già illustrate sopra per il Modello di Retention, ma, nello specifico, i record di questa base dati saranno i preventivi di polizze salvati usualmente nel software gestionale della Compagnia.

Definito quindi il perimetro del portafoglio da simulare, prima di applicare la nuova proposta tariffaria e determinare un Premio medio di Tariffa effettivo, si dovrà tenere conto di alcuni altri aspetti tecnico/commerciali:

- Ageing o scivolamento delle variabili esplicative;
- Scontistica commerciale (ad es. Convenzioni, Campagne di vendita, ecc.);
- Scontistica Tecnica:
  - Regole di scontistica per i rinnovi;
  - Presenza di device satellitare;
  - Altri;
- Sconto per Flessibilità in autonomia agenziale:
  - Analisi prospettica della flessibilità;
  - Meccanismi di recupero della flessibilità;
- Altri.

Tra questi elementi, l'*Ageing* o scivolamento delle variabili esplicative, verrà appositamente trattato in conclusione di questo paragrafo, data l'importanza che riveste nella creazione del Database Tariffario e per tutto il processo di tariffazione.

Alcune variabili di personalizzazione del rischio, infatti, dipendono dal tempo (ad es. età, età del veicolo, anzianità del rapporto assicurativo, ecc.) e pertanto le polizze del perimetro di simulazione dovranno essere aggiornate nella base dati in modo da poter calcolare un Premio medio effettivo coerente con il loro naturale scivolamento.

In Italia desta particolare attenzione lo scivolamento della classe Bonus-Malus. Questa variabile, che dà anche il nome ad una struttura tariffaria, non dipende solo dal tempo, ma anche dalla storia assicurativa del cliente.

Alla fine della durata della copertura assicurativa RCA, il calcolo del premio di tariffa effettivo della singola polizza dipenderà dall'*ageing* delle variabili esplicative (*personalizzazione a priori*), ma anche dall'evento "sinistro causato" dall'assicurato che determinerà un'ulteriore modifica del premio (*personalizzazione a posteriori*).

Qualora tale evento si verificherà, il premio andrà ad aumentare (*malus*), diversamente diminuirà (*bonus*). Tale aumento o diminuzione può variare in funzione della classe di partenza dell'assicurato (*regola di ingresso* nei casi di nuovo affare) e della regola di scivolamento tra le classi, chiamata *regole di evoluzione*.

Nella simulazione, la prassi italiana vede impegnato l'Attuario nel dover esplicitare in modo esplicito il solo *Coefficiente dell'effetto di scivolamento per BM*.

### 2.2.1.q Verifica del Fabbisogno Tariffario

Il [32] definisce il *Fabbisogno tariffario* come la “*la stima del costo complessivo dei rischi che si ritiene di assumere nel periodo di validità della tariffa,*” (v.§2.2.1.m) ed il *Premio Medio di Tariffa tecnico* come “*il fabbisogno tariffario diviso il numero dei rischi che si ritiene di assumere nel periodo di validità della tariffa*” (v. formula (29)).

Con tale regolamento, l'IVASS obbliga le Compagnie che esercitano il ramo RCA di documentare le ipotesi, le metodologie ed il calcolo del Fabbisogno.

L'obbligatorietà della documentazione del Fabbisogno è tipica del mercato italiano, sebbene la sostanza di questo concetto è comune ad ogni prassi tecnica di tariffazione.

L'Attuario Incaricato, inoltre, per adempiere alla sua funzione di tutela descritta al §2.2.a, dovrà certificare ogni edizione tariffaria, documentando il suo giudizio con una “*RELAZIONE TECNICA SULLA TARIFFA DEI RAMI R.C. AUTOVEICOLI TERRESTRI E R.C. VEICOLI MARITTIMI, LACUSTRI E FLUVIALI*” (di seguito Rt).

L'allegato 2 dello stesso regolamento descrive un modello standard di Rt per l'AIRCA. Il Fabbisogno, il Premio Medio di Tariffa tecnico ed anche il Premio medio effettivo di Tariffa (chiamato nel regolamento “*Premio di Tariffa*”) calcolati dalla Compagnia, dovranno essere descritti in questa relazione.

L'AIRCA potrà in questo modo comprendere e verificare il processo tecnico seguito dalla compagnia per poi compiere delle analisi indipendenti utili alla verifica di quanto calcolato.

L'IVASS non fornisce, però, un modello univoco per documentare e/o costruire il fabbisogno. L'esperienza passata di una tariffa amministrata è stata certamente il punto di partenza delle Compagnie italiane, le quali, dopo poco più di un ventennio dalla liberalizzazione del mercato RCA, hanno definito degli schemi di Fabbisogno propri e specifici per le loro esigenze.

Per completare il processo di costruzione di una Tariffa e concludere il paragrafo 2.2.1, uno *schema tipico di fabbisogno tariffario* contiene tutte le grandezze indicate nei paragrafi 2.2.1.g-2.2.1.p.

In particolare, il *fabbisogno è calcolato usualmente come la variazione percentuale del Premio medio di Tariffa tecnico rispetto al Premio medio Effettivo di Tariffa*:

$$(31) \quad Fabb = \frac{\text{Premio\_Tar}}{\text{Premio\_Tar\_effet}} - 1$$

Tale rapporto potrà essere

- *Inferiore a zero*: avanzo tecnico o extra-profitto;
- *Pari a zero*: equivalenza perfetta;
- *Maggiore di zero*: disavanzo tecnico o perdita.

L'obiettivo di una Compagnia, infatti, è di definire una tariffa tale da conseguire una parità tra i due premi medi.

Le Compagnie, pertanto, prima di ultimare la nuova struttura tariffaria, in funzione del risultato della disuguaglianza (31), modificano il Premio di Riferimento o i Coefficienti di personalizzazione per evitare avanzi e disavanzi non giustificabili.

L'AIRCA, infine, dopo aver descritto le differenze significative tra i coefficienti di personalizzazione risultanti dalle analisi tecniche e quelli realmente applicati in tariffa (almeno nel passaggio da Modello di Rischio a Coefficienti di personalizzazione) ed aver compiuto la sua valutazione indipendente può rilasciare due giudizi:

- *Positivo:* "Attesto che la tariffa....., settore di tariffazione ....., formula tariffaria....., è definita in conformità alle norme di legge e regolamentari vigenti e che i premi di tariffa che l'impresa intende praticare nel territorio della Repubblica sono coerenti con le basi tecniche adottate, il fabbisogno tariffario e con tutti gli altri elementi presi a riferimento nella costruzione della tariffa stessa."
- *Negativo:* "Attesto che la tariffa ....., settore di tariffazione ....., formula tariffaria....., che l'impresa intende praticare nel territorio della Repubblica non è definita in conformità alle norme di legge e/o regolamentari vigenti."

## 2.2.2 Il sistema di indennizzo diretto in Italia (CARD)

Il Sistema di Indennizzo Diretto introdotto con D.P.R. 28 giugno 2006, n. 254 ha rivoluzionato la gestione dei sinistri per le Compagnie che esercitano il ramo RCA in Italia.

Il decreto, entrato in vigore nel Febbraio del 2007, è attuato mediante un documento a firma dell'ANIA (di seguito "documento attuativo"), Associazione Nazionale fra le Imprese di Assicuratrici, [1] aggiornato su base annuale al fine di recepire migliorie gestionali e/o modificare i parametri di risarcimento in base alle statistiche annuali dei sinistri RCA.

E' comunemente conosciuto con l'acronimo CARD, ossia la "Convenzione tra Assicuratori per il Risarcimento Diretto".

Il perimetro di questa convenzione è descritto all'art.2 co.1 del suddetto documento attuativo, *"l'adesione alla CARD implica l'automatica partecipazione anche alle Convenzioni CID e CTT. L'adesione è obbligatoria per tutte le imprese con sede legale in Italia. Per le imprese che operano in regime di libertà di stabilimento o di prestazione di servizi, l'adesione al sistema di risarcimento diretto comporta anche l'adesione alla presente Convenzione. La domanda di adesione va inviata ad ANIA."*

La convenzione CARD (v. art.1 co. 1 di [1]) è composta di tre parti:

- Normativa generale;
- Convenzione Indennizzo Diretto (di seguito "CID");
- Convenzione Terzi Trasportati (di seguito "CTT").

CID e CTT sono due acronimi noti anche prima della CARD. Le maggiori differenze con i precedenti accordi tra convenzioni sono:

- La CID non era obbligatoria;
- I ciclomotori rientrano nella CTT;
- **Forfait**.

Per "Forfait" si definisce un rimborso standard calcolato osservando e proiettando le serie storiche dei sinistri in Convenzione registrati dalla CONSAP da un Comitato congiunto di rappresentanti dell'industria assicurativa, Vigilanza e Legislatore: "Comitato Ministeriale per la regolazione dei rapporti contabili tra imprese" (di seguito "Comitato"). Questi importi, definiti nei paragrafi seguenti, sono aggiornati annualmente.

Nei prossimi paragrafi sarà descritto il funzionamento della CARD e le rettifiche maggiori a cui si assistito dal 2007 al 2014.

### 2.2.2.a Il sistema CARD

La ratio dell'introduzione di una Convenzione che regola l'indennizzo diretto nasce dalla volontà del legislatore di costituire uno strumento per migliorare la qualità del servizio assicurativo, per ridurre i tempi di trattazione e liquidazione del sinistro e, soprattutto, per incidere sui costi dei risarcimenti, contribuendo al contenimento dei livelli tariffari dell'assicurazione RCA.

Parlare del sistema CARD, vuol dire anzitutto dividere i sinistri RCA in

- CARD: sinistri che rientrano in Convenzione;
- NoCard: non rientranti in Convenzione.

In particolare, un sinistro rientra in convenzione qualora siano rispettati i requisiti previsti dal legislatore per l'applicazione della procedura di risarcimento diretto (v. art.):

- Collisione tra due veicoli identificati ed assicurati;
- Sinistro verificatosi in Italia, San Marino e Città del Vaticano;
- Danneggiato leso a bordo del veicolo;
- Status del danneggiato leso (conducente o trasportato);
- Cose danneggiate di proprietà del conducente o dell'assicurato;
- Danni compresi nel massimale di legge;
- Terzietà tra danneggiato e responsabile;
- Assenza di responsabilità di terzi.

In termini di tipologia di danno, bisognerà distinguere tra:

- Danno al veicolo (di seguito "PD"): nessun limite di risarcibilità;
- Danno alla persona (di seguito "BI"): limite fissato al 9% di Invalidità Personale (di seguito "IP").

Il legislatore istituisce tale Convenzione tenendo conto che solo alcuni sinistri, di norma i più frequenti, saranno gestiti direttamente dalla Compagnia.

La copertura RCA, tuttavia, essendo una copertura contro i danni al patrimonio (v. §2.2.1.b), nasce per garantire il risarcimento che il proprio assicurato deve pagare ad un *terzo* dovuto alla circolazione di un veicolo a motore. Quanto appena descritto, in una logica gestionale del sinistro da parte della Compagnia è il *risarcimento indiretto*: un sinistro NoCard è gestito ancora secondo questa logica.

La convenzione CARD non altera tale rapporto, ma richiede in un primo momento ad una Compagnia di risarcire il proprio assicurato che ha *subito* un danno.

Per compensare tale inversione di gestione del risarcimento, la Compagnia gestionaria riceverà una contropartita economica (ossia il Forfait) che *in media* andrà a compensare il risarcimento sostenuto.

Non c'è difatti alcuna garanzia che il costo risarcito in modo diretto ad un assicurato sia effettivamente compensato da un forfait. Da questa potenziale disuguaglianza, rilevata nel mercato dopo i primi tre esercizi di CARD, è nata l'esigenza tecnica del Comitato di valutare dei forfait differenziati che saranno descritti nel paragrafo seguente.

### 2.2.2.b Le tipologie di sinistro dopo la CARD

Come conseguenza di quanto già descritto nei paragrafi precedenti, il recepimento dell'indennizzo diretto ha prodotto forti modifiche gestionali a tutte le compagnie aderenti.

Dalla visione unitaria del sinistro e del costo ad esso associato, la CARD ha introdotto:

- Gestioni di sinistro e Partite di danno;
- Determinazione del forfait diversificato per CID e CTT.

Per "Gestioni di sinistro" (di seguito "Gestioni") si intendono quattro diverse tipologie di costo che possono essere gestite da una Compagnia che esercita il ramo RCA:

- **NoCard**: sinistro causato dal proprio assicurato, fuori dal perimetro della convenzione indicato al paragrafo precedente;
- **CARD**:
  - **Card**: risarcimento (diretto) pagato all'assicurato di una Compagnia che ha subito un sinistro;
  - **Forfait Gestionaria** (di seguito anche "FG"): rimborso standard ricevuto dalla Compagnia di controparte per compensare un sinistro Card;
  - **Forfait Debitrice** (di seguito anche "FD"): forfait simmetrico al precedente, ossia rimborso di una "Compagnia A" alla Controparte per aver gestito un sinistro la cui colpa è del proprio assicurato.

Nella dinamica di un sinistro, infatti, è possibile identificare un numero maggiore di controparti. Ognuna di queste controparti a cui dovrà essere risarcito il danno sono definite appunto "partite di danno" e saranno singolarmente contabilizzate in una delle suddette Gestioni.

La CARD, inoltre, prevede la possibilità di risarcire i sinistri che rientrano in convenzione seguendo due diverse (sotto)convenzioni: CID e CTT (v. cap. 2.2). Le uniche modifiche allo schema dei sinistri elencato sopra riguardano i forfait.

Il Comitato infatti andrà ad aggiornare annualmente il valore ed i metodi di calcolo di tali forfait tra CID e CTT: FG\_CID, FG\_CTT, FD\_CID e FD\_CTT.



### 2.2.2.c La determinazione dei forfait dal 2007 al 2014

Prima di elencare le evoluzioni dei metodi di calcolo dei forfait, è necessario premettere che le Compagnie dovranno rispettare il principio della competenza. Ciò significa che i forfait dei sinistri tardivi dovranno essere determinati con le regole che erano in vigore nel loro anno di avvenimento (indipendente dall'anno di denuncia).

Il primo anno di Convenzione, il Comitato ha istituito un *forfait CID unico*, ossia non differenziato tra danni al veicolo o alla persona, ma solo in cluster di tre aree geografiche.

Le aree geografiche individuate dal Comitato sono definite secondo un criterio di *cluster analysis* (a priori) delle 110 province italiane:

- Cluster 1: costo medio più alto del 10% del costo medio osservato su base nazionale;
- Cluster 2: costo medio compreso tra il  $\pm 10\%$  del costo medio osservato su base nazionale;
- Cluster 3: costo medio più basso del -10% del costo medio osservato su base nazionale.

Il *forfait CID* di competenza **2007** è pari a:

- Cluster 1: 2,300€;
- Cluster 2: 2,000€;
- Cluster 3: 1,800€.

Di seguito le regole di calcolo del *forfait CTT* di competenza **2007**:

- Franchigia assoluta di 500€;
- Per danni di importo maggiore a 500€ ed inferiore a 5,000€, il forfait al netto della franchigia ammonta a 2,750€;
- Per sinistri di importo maggiore a 5,000€, il forfait di base resta analogo al caso precedente, seppur il forfait sia aumentato della differenza tra l'importo risarcito ( $Y$ ) e 5,000€ e ridotto poi di una franchigia percentuale pari al 10% di  $Y$ . E' fissato inoltre un limite massimo della franchigia percentuale, pari a 20,000€.

$$(32) \quad Forf\_CTT = \begin{cases} Y \leq 500 \Rightarrow Forf = 0; \\ Y > 500 \Rightarrow Forf = 3250 + \max(0; Y - 5000) + \\ - \max(500; \min(10\% \cdot Y; 20000)) \end{cases}$$

Al fine di ridurre i casi in cui una Compagnia possa trarre profitti/perdite dal pagamento dei sinistri, il Comitato dal 2008 inizia a differenziare il forfait tra PD e BI.

In particolare, questo riguarda i sinistri FG\_CID che, per i danni alla persona (BI), saranno calcolati come in formula (32).

Nel caso di danno al veicolo (PD), invece, il *forfait CID* di competenza **2008** è pari a:

- Cluster 1: 1,670€;
- Cluster 2: 1,373€;
- Cluster 3: 1,175€.

Il caso misto, ossia, in seguito a danni PD e di lieve BI, il Comitato prevede il pagamento del solo forfait unico per danno al veicolo (PD).

Il *forfait CTT* di competenza **2008**, invece, mantiene il metodo di calcolo, ma il rimborso al netto della franchigia è aumentato di 50€ passando da 2750€ a 2800€.

Per l'esercizio 2009, il Comitato non presenta alcuna modifica nella forma dei forfait tra CID e CTT. Alcune province sono spostate da un cluster ad un altro in funzione delle variazioni di costo medio.

Il *forfait CID* di competenza **2009** è pari a:

- Cluster 1: 1,658€;
- Cluster 2: 1,419€;
- Cluster 3: 1,162€.

Tuttavia, per la prima volta il Comitato decide di inserire all'interno della CARD anche i sinistri che ne soddisfano i requisiti, ma che sono causati/subiti da due assicurati della stessa Compagnia: i *Card Naturali* (di seguito "CN"). Dato che la Compagnia Gestionaria e quella Debitrice coincidono, non avrebbe senso contabile dover pagare/ricevere un forfait.

Anche la CONSAP non tiene conto nelle proprie statistiche di tali sinistri, ma tale modifica ha un valore statistico-attuariale rilevante. Lasciare che i sinistri CN fossero contabilizzati insieme ai sinistri NoCARD alterava di fatto le statistiche dei sinistri che non rientrano in Convenzione, riducendone il costo medio ed incrementandone la frequenza.

La generazione 2010 introduce una nuova variabile di differenziazione dei forfait CID e CTT, la *tipologia dei veicoli*:

- Ciclomotori e Motocicli;
- Altro;

Il Comitato ha abbandonato pertanto la prima ipotesi di calcolo distinto tra PD e BI.

Negli aggiornamenti per le generazioni 2010-2015, inoltre, il Comitato non ha proposto alcuna modifica di forma o di sostanza alla differenziazione indicata per il 2010.

I forfait CID e CTT di competenza 2010-2015 sono schematizzati nelle tabelle riportate di seguito:

	<b>Cluster 1</b>		<b>Cluster 2</b>		<b>Cluster 3</b>	
	<b>2 ruote</b>	<b>Altro</b>	<b>2 ruote</b>	<b>Altro</b>	<b>2 ruote</b>	<b>Altro</b>
2010	4,077 €	2,152 €	3,789 €	1,871 €	3,410 €	1,589 €
2011	4,040 €	2,183 €	3,741 €	1,883 €	3,367 €	1,627 €
2012	4,115 €	2,187 €	3,800 €	1,900 €	3,430 €	1,659 €
2013	4,079 €	2,239 €	3,740 €	1,930 €	3,455 €	1,683 €
2014	3,964 €	2,171 €	3,500 €	1,850 €	3,191 €	1,593 €
2015	3,558 €	2,135 €	3,150 €	1,820 €	2,896 €	1,568 €

**Figura 10 – Forfait CID anni di avvenimento dei sinistri CARD 2010 e 2013**

	<b>2 ruote</b>	<b>Altro</b>
2010	3,511 €	2,650 €
2011	3,459 €	2,643 €
2012	3,230 €	2,620 €
2013	3,200 €	2,490 €
2014	3,150 €	2,020 €

**Figura 11 – Forfait CTT anni di avvenimento dei sinistri CARD 2010 e 2014**

Per la gestione CARD-CTT, il Provvedimento IVASS prevede per la generazione 2015 l'utilizzo di un rimborso definito dal Comitato come "a piè di lista" e senza più una franchigia assoluta, anche in seguito dell'introduzione delle nuove disposizioni in materie di microinvalidità introdotte dalla legge 27/2012.

### 2.2.3 Modifiche allo schema di tariffazione dopo l'indennizzo diretto

In questo ultimo paragrafo della prima sezione di questo elaborato saranno analizzate le modifiche allo schema tecnico di tariffazione post introduzione della CARD.

La tecnica attuariale con la quale è calcolato il Premio di Tariffa segue usualmente i seguenti passi operativi (v. §2.2.1.g):

- Creazione e Validazione del Database Tariffario;
- Analisi di personalizzazione tramite un Modello di Rischio;
- Calcolo del Premio Equo;
- Determinazione del Premio medio di Tariffa tecnico;
- Costruzione dei Modelli Commerciali;
- Definizione della Tariffa;
- Simulazione della tariffa sul portafoglio assicurabile;
- Verifica del Fabbisogno Tariffario.

A partire da quanto già dettagliatamente descritto nei paragrafi 2.2.1.g - 2.2.1.p, nei prossimi sotto paragrafi saranno evidenziate le eventuali modifiche tecniche apportate dalle Compagnie al processo di tariffazione dopo l'introduzione dell'indennizzo diretto.

Le diverse tipologie di costi gestiti dalle Compagnie (c.d. Gestioni) ed il passaggio ad una visione del sinistro per partita di danno (v. §2.2.2.b.) producono un forte aumento della complessità di tale processo di determinazione del Premio.

Riprendendo la formula (19), i *costi* e le *spese* sono di fatto le componenti che risentono maggiormente della CARD. L'Attuariato necessita del costo storico dei sinistri, dei fattori di aggiustamento a costo ultimo e delle spese e commissioni nel periodo di validità della tariffa per determinare il Premio:

- CU\_Stimato;
- LAE;
- Spese&Comm.

*Di seguito si assumerà che una Compagnia decida di utilizzare le informazioni derivanti dalla CARD per tariffare i propri assicurati.*

A più di sette anni dall'introduzione dell'indennizzo diretto, tale ipotesi sembra essere rappresentativa della gran parte delle medie-grandi Compagnie di assicurazione del mercato italiano.

### 2.2.3.c Creazione e Validazione del Database Tariffario

Il Database Tariffario è stato definito al §2.2.1.h come una base dati in cui “*ad ogni polizza sono aggregate le informazioni dei sinistri eventualmente accaduti e denunciati*”.

In seguito all'introduzione della CARD, quindi, una Compagnia dovrà costruire una base dati in grado di associare i costi e le numerosità dei sinistri diversificati per Gestioni.

Esistono almeno due diverse tipologie di creazione di questo Database Tariffario:

- Per Partita di Danno;
- Per Sinistro/Contatore CARD.

Il primo caso, più complesso e *best practise* nel mercato italiano, prevede la possibilità di identificare, per ogni polizza, le partite di danno denunciate ed i relativi costi. Il vantaggio di tale approccio riguarda la possibilità di compiere le analisi tariffarie al livello massimo di granularità dei dati. Molto spesso, tuttavia, le procedure di validazione del Database Tariffario stesso sono particolarmente onerose.

Usualmente le componenti che creano maggior difficoltà nella riconciliazione con i dati di bilancio di una Compagnia sono le Partite di Danno, le quali sono contabilizzate seguendo un vasto numero di regole indicate nel [34].

La difficoltà nasce per le generazioni precedenti, quando invece spesso la vista dei sinistri nel Database Tariffario è alla generazione corrente.

La seconda opzione, però, perdendo le informazioni del numero esatto delle Partite di Danno, consente di superare tale difficoltà. La Compagnia, infatti, potrà verificare la quadratura delle Partite alla chiusura di ogni esercizio e poi andare a sintetizzare per ogni rischio assunto la presenza di *almeno una* delle Partite di Danno con un contatore per Gestione.

### 2.2.3.d Analisi di personalizzazione tramite un Modello di Rischio

Fermo l'obiettivo dei *Modelli di Rischio* - ossia quello di indentificare quali sono le variabili tra non Geografiche, Geografiche ed (eventualmente) esterne che *personalizzano il rischio a priori* e di ottenere una stima delle v.a. **N** e **Y** - la CARD ne altera l'architettura.

Osservando le diverse Gestioni della CARD e, nel dettaglio, le tipologie di risarcimento cui le Compagnie sono esposte (v. §2.2.2.b), la prima conseguenza logica che deriva dall'introduzione della CARD è la numerosità dei modelli.

Mentre negli anni precedenti (di seguito “Ante Card”) era sufficiente analizzare i trend delle basi tecniche e del premio calcolato tramite il prodotto di tali grandezze (o la convoluzione nel caso di un modello multivariato come il GLM), dal 2007 le Compagnie hanno iniziato a creare diversi modelli di frequenza e di costo medio.

Seppur non ci siano molte fonti in letteratura su tale tematica (v. [8], [9], [88]), il mercato assicurativo italiano ha definito diverse architetture di Modelli di Rischio.

Lo schema che ricorre maggiormente in questo mercato ipotizza che i sinistri CTT, tipicamente solo il 10% del totale dei sinistri in convenzione, non siano sufficientemente numerosi per poter analizzare dei trend robusti di tale fonte di costo e, pertanto, sono assimilati ai CID.

Seguendo questa ipotesi, l'unico elemento di diversificazione è la Gestione del sinistro.

L'Attuariato avrà quindi l'onere di modellizzare:

- La frequenza ed il costo medio NoCard;
- La frequenza ed il costo medio Card;
- La frequenza Card ed il forfait medio Gestionario;
- La frequenza FD ed il forfait medio Debitore;
- Il premio equo del *costo storico denunciato*.

Nel complesso, quindi, il numero dei modelli di rischio secondo questo approccio conta tre modelli di frequenza, quattro modelli di costo medio ed un modello di premio.

Il forfait medio Gestionario, essendo un guadagno per la Compagnia, è riportato nei software gestionali dei sinistri e in contabilità con segno negativo. I modelli parametrici e le ipotesi relative all'errore di distribuzione sono spesso definite su un supporto definito positivo. Ciò comporta la necessità di cambiare il segno contabile di tali sinistri per analizzarne il trend e poi ritornare al negativo quando si dovrà studiare il modello di premio equo.

In conclusione, si ritiene necessario dare nuovamente rilievo del fatto che l'architettura proposta sopra potrebbe essere ulteriormente particolareggiata in funzione dei volumi dei dati che le Compagnie hanno a disposizione:

- Sinistri sotto la soglia (di seguito "Attritional") e sopra la soglia (di seguito "Large" o "Punta");
- CID/CTT;
- Danni a cose (PD) e danni a persone (BI);
- Altro.

Tale paragrafo, quindi, ha lo scopo esclusivo di indicare le soluzioni che ricorrono maggiormente all'interno della prassi tecnica italiana, senza avere la pretesa di essere esaustivo.

### **2.2.3.e Calcolo del Premio Equo e del Premio medio di Tariffa tecnico**

Rispetto a quanto già descritto nei paragrafi 2.2.1.l e 2.2.1.m., si intende ora focalizzare l'attenzione sulla possibilità dell'Attuariato di Bilancio di determinare dei fattori correttivi per adeguare il costo storico denunciato diversificati per tenere conto della CARD.

Sebbene anche in questo caso non esista alcun esempio effettivamente rappresentativo delle diverse realtà assicurative operanti nel mercato italiano, è, tuttavia, possibile pensare ad una differenziazione di tali aggiustamenti per:

- Gestione CARD;
- Sinistri sotto la soglia (di seguito "Attritional") e sopra la soglia (di seguito "Large" o "Punta");
- CID/CTT;
- Danni a cose (PD) e danni a persone (BI);
- Altri.

### **2.2.3.f Costruzione dei Modelli Commerciali**

Differentemente da quanto mostrato nel paragrafo 2.2.3d relativo ai Modelli di Rischio, i Modelli Commerciali non risentono usualmente in modo diretto dell'introduzione della CARD.

L'Attuariato, infatti, definisce spesso un unico Modello Commerciale di premio a partire dal Modello di premio equo del *costo storico denunciato*.

Alla base di questa scelta metodologica si assume che i trend di frequenza e di costo medio debbano rappresentare nel modo più realistico possibile il costo storico ed il *trend futuro* delle basi tecniche stesse.

Qualora l'Attuariato decidesse di voler approfondire in modo dettagliato le differenze tra i Modelli di Rischio ed i Modelli Commerciali anche questi ultimi dovranno essere determinati con lo stesso livello di granularità dei primi.

### **2.2.3.g Passi operativi residuali**

Non si rileva nessuna modifica sostanziale per gli ultimi tre passi operativi indicati al §2.2.1.g, ossia "Definizione della Tariffa", "Simulazione della tariffa sul portafoglio assicurabile" e "Verifica del Fabbisogno Tariffario".

## **Sezione II**

### **Un Modello Interno Parziale per il rischio di Tariffazione**



## Capitolo 3

### Un nuovo approccio metodologico

Dopo aver indicato il perimetro di applicazione di questa tesi di ricerca (v. paragrafi 2.1 – 2.2) ed aver descritto lo schema di tariffazione seguito prima e dopo introduzione della CARD per il ramo RCA (v. paragrafi 2.2.1 e seguenti), il terzo capitolo ha l'obiettivo di descrivere l'approccio metodologico dell'oggetto di questa tesi di ricerca ossia del *Modello Interno Parziale per il Premium Risk*.

Prima di addentrarci negli aspetti tecnici, si osserva come il titolo di questo elaborato ("*Il Premium Risk nei Modelli di Pricing*") consente di identificare i principi posti alla base del PIRM:

- Piena integrazione delle diverse funzioni aziendali;
- Valorizzazione delle metodologie già in uso

Riprendendo infatti il §1.5 e ricordando che la Direttiva dispone di integrare nei processi aziendali l'utilizzo di un PIRM (o di IRM), il Modello Interno Parziale proposto in tesi si fonda su una cooperazione tra Risk Management, Attuariato ed altre funzioni aziendali.

Da questa cooperazione nasce la proposta di un PIRM che utilizzi *analoga metodologia* scelta dall'Attuariato per determinare il *Premio Medio di Tariffa tecnico* (v.§2.2.1.m). La ragione prevalente di tale scelta sta nella definizione stessa del *Premium Risk* che impone ad una Compagnia di valutare il rischio che potrebbe derivare da un errore dell'Attuariato nel processo di tariffazione.

Per *analoga metodologia* dobbiamo intendere una rivisitazione dello schema indicato al §2.2.1.g (v. anche il §2.2.3), che è l'*elemento innovativo introdotto da questa tesi* e che consisterà in

- Una rivisitazione della v.a. Danno Aggregato (di seguito *DaU\_1yr*);
- Un'analisi del Danno Aggregato mediante i Modelli di Rischio;
- Un confronto tra diversi Modelli di Rischio.

La Direttiva Solvency II richiederà alla Compagnie di valutare il Danno Aggregato secondo criteri diversi da quelli indicati nel processo di tariffazione.

Poiché i Modelli di Rischio, come descritto al §2.2.1.i, sono in grado di replicare il Danno Aggregato osservato (cfr. *Perdite\_Den*), l'idea sottostante il PIRM proposto in tesi è quella di utilizzarli per ottenere la *distribuzione di probabilità* del *DaU\_1yr*.

Per completezza si precisa che, tale distribuzione sarà determinata utilizzando e confrontando tre modelli statistici: il *Modello Lineare Generalizzato* (GLM), il *Modello Additivo Generalizzato* (GAM) ed il *Modello Misto Lineare Generalizzato* (GLMM).

### 3.1 Il Danno Aggregato a costo ultimo in orizzonte temporale annuale

Il Danno Aggregato, definito come la somma dei risarcimenti che dovranno essere pagati dall'assicuratore in seguito ai sinistri denunciati dagli assicurati (cfr. formule (14) e (22)), è la variabile aleatoria che permette di collegare le diverse funzioni aziendali che cooperano nella definizione e nella gestione il business di una Compagnia autorizzata all'esercizio dei rami Danni.

Ogni settore aziendale di una Compagnia (la quale in modo professionale acquista rischi da terzi e che ha l'obiettivo di essere profittevole) dovrà cooperare al fine di stimare o almeno di contenere il Danno Aggregato.

In particolare, il collegamento che interessa questa sezione e la tesi di ricerca riguarda il *Premium Risk* (definito secondo la Direttiva Solvency II) e la *tariffazione* del ramo RCA.

La Direttiva (v. §1.2.1) definisce il *Premium Risk* (di seguito anche "*Rischio di Tariffazione*") come il rischio derivante dai contratti da sottoscrivere (inclusi i rinnovi) nell'anno successivo e dai rischi ancora in vigore sui contratti esistenti, ossia il *rischio che i premi relativi ai nuovi contratti più la riserva premi iniziale siano insufficienti a coprire il costo dei sinistri e le spese generate dei contratti*.

Il costo dei sinistri (*CU\_Stimato*), ossia il Danno Aggregato (v. formula (18)), e le spese generate dai contratti (*Spese&Comm*) nel periodo di validità della tariffa sono le due componenti di *Costo* che dovranno essere valutate dall'Attuariato (di Tariffa) al fine di determinare il Premio.

Posto che le spese generate dai contratti (*Spese&Comm*) non sono usualmente presunte aleatorie, ipotesi seguita anche in questo elaborato (v. § 2.2.1.b), l'errore nella stima del Danno Aggregato o, più in generale, l'errore dell'Attuariato in uno qualunque dei passi operativi indicati al §2.2.1.g comporterà un errore nella tariffazione che, secondo la Direttiva Solvency II, dovrà essere *valutato* e poi accantonato come *SCR*.

Le differenze sostanziali nella stima del Danno Aggregato tra l'operazione di calcolo e di definizione di una tariffa e la determinazione del SCR riguardano:

- L'orizzonte temporale;
- I momenti o la conoscenza della distribuzione.

Come specificato nel §2.2.1.f, il premio dovrà far fronte ai costi derivanti dai contratti sottoscritti all'interno del periodo di *validità del tariffa*. La Direttiva, invece, prescrive di calcolare il SCR in un *orizzonte temporale annuale* (v. §1.1.c).

Per passare dal Danno Aggregato a costo ultimo nel periodo di validità della tariffa ad un *Danno Aggregato a costo ultimo in orizzonte temporale annuale*, il Risk Management, ossia la funzione aziendale indicata dall'EIOPA per determinare il SCR, chiederà all'Attuariato di

Tariffa ed a quello di Bilancio di cooperare al fine di ottenere dei coefficienti correttivi (v. §2.2.1.l) per adeguare il Danno Aggregato nell'orizzonte annuale indicato dalla Direttiva.

Si riporta di seguito un'illustrazione relativa alla proiezione a costo ultimo in orizzonte temporale annuale del DaU per la determinazione del Reserve Risk, definito dalla Direttiva all'interno del *Non – Life premium and reserve risk* (v. §1.2.1):

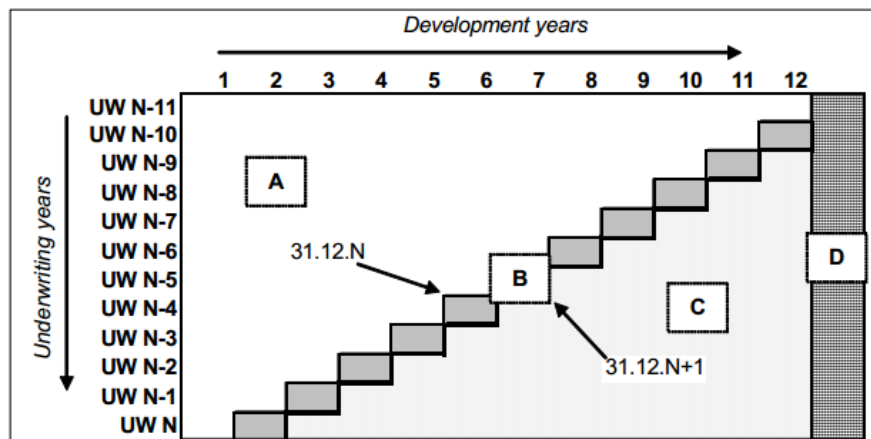


Figura 12 – Reserve Risk in orizzonte temporale annuale

Dalla Figura 12 si evince come, selezionando il metodo di proiezione del triangolo dei pagamenti o del denunciato storico (A), la proiezione per determinare il costo ultimo dei sinistri può essere calcolata su diversi orizzonti temporali:

- *Ad un anno*: la diagonale (B) è la prima diagonale da determinare in ordine temporale a partire dal triangolo di partenza (A)
- *Alla data stimata dell'ultimo pagamento di un sinistro*: (C) e (D) sono rispettivamente il triangolo inferiore dei futuri pagamenti ed il costo ultimo (comprensivo dell'eventuale stima della coda) di tutti i sinistri che dovranno essere liquidati da una generica Compagnia con i dati noti al 31.12.N

Il requisito temporale della Direttiva segue l'approccio "*one-year*", ossia considera il costo alla fine dell'esercizio di bilancio seguente alla data di valutazione.

Ritornando all'oggetto della tesi, anche il SCR del *Premium risk* dovrà essere valutato in orizzonte temporale annuale. Ciò implica la necessita da parte del Risk Management impegnato in questo esercizio di PIRM di determinare il *Danno Aggregato in orizzonte temporale annuale* (di seguito *DaU\_1yr*) a partire dal *Danno Aggregato a costo ultimo* nel periodo di validità della tariffa.

La metodologia suggerita da questa tesi per calcolare il *DaU\_1yr* è quella di utilizzare

- I coefficienti correttivi del fabbisogno (v. §2.2.1.1);
- I coefficienti di sviluppo del modello di Reserving della Compagnia;

*Direttamente nel Database Tariffario*, input dei Modelli di Rischio indicati nell'introduzione di questo capitolo.

A partire da quanto inserito nello Schema di Fabbisogno, i *coefficienti correttivi* dovranno essere riproporzionati per passare dal periodo di *validità della tariffa* all'orizzonte annuale indicato pocanzi.

L'Attuariato di Bilancio potrà fornire al Risk Management i *coefficienti di sviluppo* alla base delle *Technical Provisions* (di seguito "TP"). Questa funzione aziendale potrà pertanto allocare il costo ultimo dei sinistri per ogni generazione contenuta nel Database Tariffario.

In particolare, l'ipotesi adottata in questa tesi prevede la selezione del Chain-Ladder sul pagato come unico metodo selezionato per determinare le TP dall'Attuariato di Bilancio.

L'incertezza dei parametri descritti sopra è un limite di tale approccio. Tuttavia si rileva come l'effetto di tali parametri sui Modelli che saranno descritti nel seguito di questo capitolo andrà ad alterare esclusivamente il valore medio ottenuto (anche noto come *mean* o *intercetta del modello*) e non la forma della *distribuzione* stimata.

### 3.2 Da un modello di Pricing al Premium Risk

Altro elemento innovativo richiesto dalla Direttiva concerne la volontà di calcolare un SCR calibrato su un percentile di una distribuzione di probabilità. Per il *Premium Risk*, la v.a. di interesse è proprio il  $DaU_{1yr}$ .

Se la stima del momento primo rispetto all'origine (media) ed il momento secondo rispetto alla media (varianza) sono usualmente determinati con metodologie stocastiche, la forma della distribuzione del *Danno Aggregato in orizzonte temporale annuale* è particolarmente complessa da determinare.

I Modelli di Rischio, descritti di seguito ed utilizzati in tesi, possono individuare un'approssimazione sufficientemente attendibile della distribuzione del  $DaU_{1yr}$ .

Proprio quest'ultima affermazione vuole essere l'*elemento di innovazione* prospettato da questa tesi di ricerca.

Nei prossimi tre paragrafi saranno illustrati gli aspetti metodologici dei tre Modelli di Rischio selezionati:

- Il *Modello Lineare Generalizzato* (GLM);
- Il *Modello Additivo Generalizzato* (GAM);
- Il *Modello Misto Lineare Generalizzato* (GLMM).

I Modelli Lineari Generalizzati sono riconosciuti come un benchmark nel settore assicurativo per le tematiche di Tariffazione.

Tra gli elementi di novità che questa tesi si propone, c'è la dimostrazione dei *vantaggi* e degli *svantaggi* che, nella determinazione del *valore atteso* e della *stima della distribuzione di probabilità* della v.a.  $DaU_{1yr}$  utile al calcolo di un SCR per il *Premium risk*, derivano dall'utilizzo dei GAM e GLMM, due modelli appartenenti alla famiglia dei modelli di regressione.

Nei prossimi paragrafi, infine, saranno elencati e descritti alcuni elementi tecnici che concorreranno alla stima del SCR:

- La Riassicurazione;
- L'utile o Profitto Atteso;
- La scontistica commerciale.

### 3.2.a La Riassicurazione

La Direttiva Solvency II prescrive alle Compagnie di assicurazioni di calcolare un SCR che tenga conto delle *tecniche di mitigazione del rischio* (v. §1.2.a) “(...) *che trasferiscono efficacemente il rischio al di fuori di assicurazione o di riassicurazione*” (v. art. 94 [30]).

Una delle semplificazioni del caso di studio proposto nel quarto capitolo è che il  $DaU_{1yr}$ , costruito a livello individuale a partire da un Database Tariffario (v. §3.1), non tiene conto della politica di riassicurazione della Compagnia.

Tuttavia, si ritiene opportuno valutare l’impatto teorico che una strategia riassicurativa avrebbe nel mitigare il  $DaU_{1yr}$  e, più in generale, il *capital ratio* di una Compagnia.

Riprendendo un lavoro di Savelli [79], è anzitutto definito il *capital ratio netto riassicurazione* come il rapporto tra il *rischio di riservazione stocastico* alla fine dell’anno  $t$  ( $U_t$ ), determinato secondo il modello di teoria del rischio classico (v. [42]), ed il premio osservato in  $t$  ( $B_t$ ), ambedue calcolati al netto della riassicurazione.

L’obiettivo dell’articolo è quello di mostrare diversi strumenti quantitativi per valutare i vantaggi e gli svantaggi della strategia di riassicurazione selezionata dalla Compagnia sul *capital ratio netto* e, di conseguenza, sul  $DaU_{1yr}$ .

Diversamente da quanto mostrato nel §3.1, però, il  $DaU_{1yr}$  cui fa riferimento tale articolo è quantificato per valutare il *Reserve Risk*. Si ritiene, tuttavia, che i risultati indicati possano essere estesi anche al perimetro di questa tesi, ferme restando le dovute limitazioni del caso.

Definiti secondo lo schema classico di teoria del rischio (v. §5 [79]), i *capital ratios netti* sono calcolati e confrontati nei due seguenti trattati classici:

- Trattato Quota Share (“QS”):
- Trattato di Excess of Loss (“XoL”).

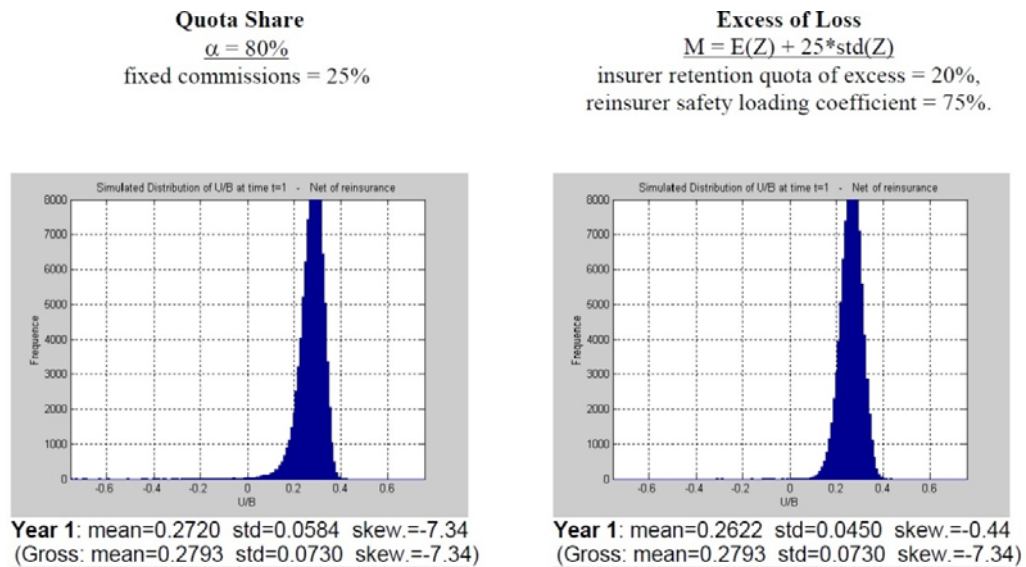
In particolare, il trattato QS selezionato dall’autore ha una quota fissa pari all’ 80% ed una commissione costante pari al 25% dei premi ceduti.

Per il trattato XoL, la portata  $M$  è fissata come da formula (33)

$$(33) \quad M = E(X_t) + 25\% \cdot \sigma(X_t)$$

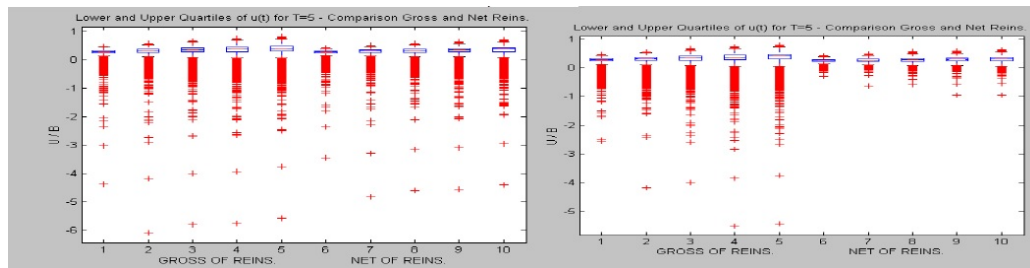
Con caricamento di sicurezza sul premio equo pari al 75% ed un partecipazione da parte dell’assicuratore nell’eccesso per un 20% del danno.

La distribuzione simulata del *capital ratio netto* in orizzonte temporale annuale, ottenuta con approccio Monte Carlo (100,000 simulazioni) per un assicuratore “Medio” (rif. “Table 1” [79]) mostra come le statistiche standard (ossia la media, la deviazione standard e l’indice di asimmetria) del trattato XoL siano ridotte rispetto all’applicazione di un tratto QS.



**Figura 13 – Capital Ratio netto in orizzonte temporale annuale [79]**

Osservando, inoltre, il Box-Whisker delle due distribuzioni, il trattato QS è maggiormente esposto su valori *anomali*:



**Figura 14 – Box-Whisker in T=5 della distribuzione simulato del Capital Ratio netto [79]**

Si conclude osservando come, ambedue le tecniche di mitigazione del rischio producono un risparmio in termini di  $DaU_{1yr}$ , ma il trattato XoL mostra dei risultati migliori, specialmente nella riduzione del valore dei percentili più elevati della distribuzione.

### 3.2.b L'utile o profitto atteso

Come descritto nel §2.2.1.c, l'utile atteso è determinato da diverse funzioni aziendali allo scopo di remunerare il rischio sopportato dall'imprenditore e di far fronte all'eventualità in cui il premio non sia in grado di fronteggiare i costi e le spese stimati.

Il calcolo dell'utile atteso è, pertanto, un meccanismo ideato *a priori* per immunizzarsi dalla probabilità di incorrere in un errore di tariffazione e/o del calcolo del *DaU\_1yr*.

Il PIRM presentato in questa tesi tiene in considerazione tale componente che è determinata come la produttrice dei seguenti coefficienti

- Margine tecnico di sicurezza;
- Caricamento del Costo del Capitale;
- Coefficiente correttivo dovuto al rendimento finanziario delle riserve tecniche.

Si rileva come, per costruzione, tale coefficiente non potrà essere *negativo* e/o, più in generale, l'impatto potrà al massimo essere *neutro*.

In conclusione, l'utile, in modo coerente con quanto mostrato nel Capitolo 2, produrrà una variazione nella distribuzione stimata *DaU\_1yr*, ma esclusivamente a livello di *valore atteso* di tale v.a., senza alterare la forma della distribuzione stessa (o *shape*).

### 3.2.c La scontistica commerciale

Anche la scontistica commerciale è stata valutata nella stima della *DaU\_1yr*.

Diversamente dagli altri caricamenti e/o coefficiente correttivi, nel processo di tariffazione, la scontistica non agisce solo nella determinazione del *Premio medio di Tariffa tecnico* (v. §2.2.1.m), ma viene usualmente valutata anche al momento della "*Simulazione della tariffa sul portafoglio assicurabile*" (v. §2.2.1.p).

Mantenendo questa doppia impostazione anche nel PIRM presentato, il Risk Management determinerà:

- Un *caricamento per scontistica* (*C\_Sco*) da applicare al *Premio medio di Tariffa tecnico* in orizzonte annuale;
- Un'analisi individuale a livello di polizza sulla scontistica già allocata in portafoglio che riduce il volume dei Premi di Competenza.

Mentre il primo caricamento accrescerà il valore atteso del *DaU\_1yr*, l'effetto della scontistica applicata ridurrà la *profittevolezza tecnica* del portafoglio, ossia il rapporto tra il *DaU\_1yr* ed i premi di competenza.

Nei PIRM presentati nei prossimi paragrafi, il *C\_Sco* sarà tale da *compensare* la riduzione di premio osservata a livello individuale.



Tale semplificazione nasce dalla mancata conoscenza delle politiche di scontistica di un database creato in modo fittizio e non dovrebbe comunque essere particolarmente lontano da una normale prassi di valutazione degli sconti nella determinazione del SCR per il *Premium Risk*.

- o - O - o - O - o -

In sintesi, nei paragrafi precedenti si sono dimostrati:

- Le caratteristiche delle v.a. da studiare per determinare un SCR del *Premium Risk* (v. §3.1);
- Il nuovo approccio metodologico e gli aspetti innovativi del PIRM oggetto di tesi.

Nei prossimi paragrafi si procederà quindi a delineare gli aspetti teorici dei Modelli di Rischio ed i passi operativi ideati per poterli utilizzare anche come PIRM per il *Premium Risk*.

## 3.2.1 I Modelli Lineari Generalizzati (GLM)

### 3.2.1.a Dal modello di regressione al GLM

I Modelli Lineari Generalizzati sono modelli di regressione che generalizzano i modelli lineari.

I modelli lineari, noti anche come *modelli di regressione lineari normali*, sono rappresentati nella seguente equazione (v.[57])

$$(34) \quad y_i = x_i' \beta + \varepsilon_i, \varepsilon_i \approx \text{Norm}(0, \sigma)$$

Dove

- $y_i$  sono le *variabili risposta* per ogni  $i$ -ma osservazione (o unità statistica);
- $x_i$  sono le colonne delle covariate, note anche come *variabili esplicative*;
- $\beta$  è il vettore dei *regressori* (di seguito anche “*coefficienti*” o “*relativities*”) sconosciuti prima dell'utilizzo del modello;
- $\varepsilon_i$  sono le v.a. i.i.d. secondo un Normale con media zero e varianza costante

I coefficienti ( $\beta$ ) e le v.a.  $\varepsilon_i$  sono i due elementi che contraddistinguono i modelli di regressione.

I primi, stimati con il *metodo dei minimi quadrati*, consentono di determinare la componente sistematica del fenomeno oggetto di indagine ( $y_i$ ). Le variabili aleatorie  $\varepsilon_i$ , invece, descrivono la *componente aleatoria o alea*.

Definito con  $\mu_i$  il *valore atteso* (o *speranza matematica*) della variabile risposta  $y_i$ , per il modello lineare normale vale la seguente uguaglianza

$$(35) \quad E(Y) = \mu_i = x_i' \beta = \eta_i$$

$\eta_i$  è chiamato *previsore lineare* e, in seguito alla linearità di questo modello, la funzione che lega il previsore con il valore atteso della variabile risposta  $y_i$  è proprio la funzione *identità*.

In molte indagini statistiche, una o più delle precedenti ipotesi del modello di regressione lineare sarebbero troppo restrittive. In particolare, proporre la *regressione lineare* come Modello di Rischio e come PIRM per il *Premium Risk* sarebbe da escludere per le seguenti considerazioni:

- *Distribuzione Normale*: potrebbe non essere ragionevole presumere che i dati siano distribuiti normalmente. Ad esempio, la distribuzione Normale (che è continua), da un lato, non è adeguata per modellare conteggi, dall'altro, essendo la stessa simmetrica e definita su tutto l'insieme dei numeri Reali, non potrebbe descrivere le variabili risposta con distribuzione asimmetrica o su supporti diversi da quello Reale;
- *Funzione di collegamento* (di seguito “*Funzione Link*”): spesso non è accettabile l'ipotesi che il collegamento tra la speranza matematica delle variabile risposta  $y_i$  e le

determinazioni delle variabili esplicative  $x_i$  sia esattamente lineare. Ad esempio, per creare una struttura tariffaria moltiplicativa sarebbe necessaria introdurre una funzione di collegamento di tipo *logaritmico*;

- *Funzione di varianza*: non è sempre realistico supporre che la varianza dei dati sia costante per tutte le osservazioni. Ad esempio, usualmente si osserva che la varianza aumenta con la media dei dati.

### 3.2.1.b Un modello predittivo

Introdotti per la prima volta nel 1972 da Nelder e Wedderburn (v. [72]), i GLM sono stati successivamente estesi e sviluppati (v. [52] e [69]).

Preso a riferimento un insieme di  $n$  unità statistiche, si dispone di una matrice di osservazioni  $\{(y_i, x_i), i=1\dots n\}$ . Per ognuna delle unità statistiche, quindi, saranno consultabili sia il valore di una grandezza di interesse per l'analisi (variabile risposta) che una serie di determinazioni delle variabili esplicative.

Il GLM consentirà al valutatore di *replicare in media* il vettore osservato del fenomeno oggetto di indagine  $\{y_i, i=1\dots n\}$  per mezzo di una o più determinazioni delle variabili esplicative  $\{x_i, i=1\dots n\}$ . Per ognuna di queste determinazioni (o modalità) delle variabili, il GLM produce dei coefficienti ( $\beta$ ) grazie ai quali sarà possibile perseguire il suddetto risultato.

Ciò permette di classificare il GLM tra i *Modello predittivi*. I regressori  $\beta$ , infatti, non solo descrivono la *serie storica* delle  $\{y_i, i=1\dots n\}$ , ma, nell'ipotesi che i valori futuri ed aleatori della variabile risposta  $\{y_i^*, i=1\dots n\}$  non si modifichino in modo sistematico (a meno dell'alea già descritta dalle v.a.  $\varepsilon_i$ ), essi descrivono anche il valore atteso delle future osservazioni della variabile risposta.

Il concetto indicato nel precedente capoverso, trova un immediato riscontro non solo con l'obiettivo di questa tesi di determinare la distribuzione del *DaU\_1yr*, ma anche con i "passi operativi" del processo di Tariffazione indicati al §2.2.1.g:

- *Modelli di Rischio* (v. §2.2.1.i): "(...) descrivono la *serie storica* delle  $\{y_i, i=1\dots n\}$ ";
- Calcolo del Premio Equo (v. 2.2.1.l): "(...) i valori futuri ed aleatori della variabile risposta  $\{y_i^*, i=1\dots n\}$ " sono calcolati utilizzando diverse tipologie di coefficienti correttivi.

Il risultato finale di tale modello sarà proporzionale al numero dei parametri, quindi, delle modalità delle variabili esplicative inserite nel modello stesso. Tuttavia, un numero eccessivo di parametri espone ad un rischio crescente di *errore di parametro*, ossia il rischio di fare uso di parametri inappropriati nel modello, che influenzino la correttezza e l'affidabilità degli output.

### 3.2.1.c Formalizzazione delle ipotesi

I tre limiti di un modello di *regressione lineare normale* indicati nel §3.2.1.a coincidono del tutto con le ipotesi di un Modello Lineare Generalizzato.

In sintesi un GLM è definito dalla seguenti ipotesi (v. anche [58]):

- *Ipotesi probabilistiche*: le variabili risposta  $\{Y_i, i=1\dots n\}$  sono stocasticamente indipendenti, con distribuzione appartenenti alla *famiglia esponenziale lineare*;
- *Ipotesi strutturali*: esiste un legame tra il valore atteso delle variabili risposta  $\mu_i$  ed il vettore  $\{x_i, i=1\dots n\}$  delle determinazioni delle variabili esplicative.

Quindi i GLM generalizzano i modelli lineari normali in due direzioni. Da un lato, essi consentono ad un valutatore di assegnare una distribuzione di probabilità appartenente alla *famiglia esponenziale lineare*, dall'altro permettono di inserire delle *funzioni di collegamento* tra il valore atteso del fenomeno da studiare ed i regressori ottenuti con il modello.

Si procede illustrando dettagliatamente le seguenti ipotesi.



### 3.2.1.d Distribuzione degli Errori

Nei GLM la distribuzione di probabilità degli errori, anche nota come *distribuzione della variabile risposta*, può appartenere ad una qualunque delle d.d.p. della *famiglia esponenziale lineare*:

- Normale;
- Gaussiana Inversa;
- Gamma;
- Binomiale Negativa e Geometrica;
- Poisson;
- Binomiale;
- Multinomiale.

La funzione di densità di tale famiglia di distribuzioni è indicata di seguito:

$$(36) \quad f(y, \theta, \phi, \omega) = \exp\left\{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi/\omega)} + c(y, \phi/\omega)\right\}$$

Dove al variare di  $a$ ,  $b$  e  $c$ , si determinano le diverse funzioni di densità delle suddette d.d.p. note in letteratura.

I parametri  $\theta$ ,  $\phi$  noti rispettivamente come il parametro *canonico* e di *dispersione*, sono spesso calcolati secondariamente. Le suddette distribuzioni sono infatti usualmente parametrizzate rispetto alle seguenti grandezze:

- Il valore atteso della variabile risposta ( $\mu$ ), ottenuto per mezzo dei regressori  $\beta$ ;
- Il parametro di dispersione ( $\phi/\omega$ ), dove  $\omega$  è una variabile che esprime il peso delle unità statistiche analizzate, definita nel dominio  $(0, +\infty)$

In [72] si dimostra, tuttavia, che il *valore atteso* della variabile risposta è pari alla derivata prima della funzione  $b(\theta)$ , quindi, che tale grandezza dipende dal parametro canonico  $\theta$ :

$$(37) \quad E(Y) = \mu = b'(\theta)$$

E che la *varianza* di  $Y$  è espressa in funzione del valore atteso

$$(38) \quad \text{Var}(Y) = \frac{V(\mu)\phi}{\omega}$$

Pertanto, specificando una struttura per la speranza matematica si avranno delle implicazioni anche sulla struttura della varianza.

Dal *parametro di dispersione*, input della *funzione di varianza* (v. formula (38)), è calcolato anche il *parametro di scala* ( $\phi$ ). Quest'ultimo, collega la varianza dei valori stimati  $y^*$  con la funzione di varianza ed è determinato spesso con maggiore facilità dall'*algoritmo di fitting* del modello.

Per determinare i parametri di distribuzioni diverse dalla Normale, infatti, un sistema analitico (come quello dei *minimi quadrati* utilizzati per la regressione lineare) sarebbe troppo complesso da risolvere o poco performante in termini di tempi di elaborazione, anche dei calcolatori più evoluti.

Il GLM quindi necessita di un algoritmo iterativo (numerico) (spesso quello di Newton-Rapson<sup>1</sup>) che ha l'obiettivo di *massimizzare la funzione di (log-)verosimiglianza*, variabile che dipende dalla selezione di una distribuzione da parte di un valutatore (per i dettagli tecnici di tale algoritmo, si faccia riferimento a [75]).

La funzione di *(log-)verosimiglianza*, descritta in letteratura, è definita sulle  $i$  unità statistiche come segue:

$$(39) \quad L(y, \mu, \phi) = \sum_i l_i = \sum_i \log(f(y_i, \mu_i, \phi))$$

Dove  $l_i$  è il contributo della singola unità statistica nel perimetro di indagine.

Poiché il parametro di dispersione ( $\phi$ ) è *invariante* per ogni  $i$ , altra ipotesi minore del GLM che produce varianza o coefficiente di variazione costante per le variabili risposta  $\{Y_i, i=1\dots n\}$  a parità di peso  $\omega$ , la funzione  $l_i$  e, di conseguenza, la *(log-)verosimiglianza* canonica riportata in letteratura non può essere utilizzata direttamente nella procedura di fitting del GLM.

Per tale ragione, saranno indicate di seguito con  $ll_i$ , le funzioni di *(log-)verosimiglianza* individuale non-canoniche per ogni d.d.p. di riferimento.

---

<sup>1</sup> Esistono anche altre tecniche numeriche per ottenere una soluzione al sistema matematico studiato dal GLM e sostanzialmente dipende dal tipo di Software statistico utilizzato.



Ristringendo il perimetro alle d.d.p. selezionate nel Capitolo 4 per determinare il SCR per il *Premium Risk*, sono riportate di seguito le formalizzazioni dei parametri e della grandezze descritte sopra:

- *Poisson (classica)*:

$$(40) \left\{ \begin{array}{l} f(y) = \frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!} \\ \phi = \varphi = 1 \\ l_i = \frac{\omega_i}{\phi} [y_i \log(\mu_i) - \mu_i] \\ ll_i = \varpi_i [y_i \log(\mu_i) - \mu_i - \log(y_i!)] \end{array} \right. \quad \text{per } y = 0, 1, 2, \dots, n$$

- *Gamma*:

$$(41) \left\{ \begin{array}{l} f(y) = \frac{1}{\Gamma(\nu)y} \left( \frac{y\nu}{\mu} \right)^\nu \exp\left\{ -\frac{y\nu}{\mu} \right\} \\ \phi = \nu^{-1} \\ \varphi = \nu \\ \text{Var}(Y) = \frac{\mu^2}{\nu} \\ ll_i = l_i = \frac{\omega_i}{\phi} \log\left( \frac{\omega_i y_i}{\phi \mu_i} \right) - \frac{\omega_i y_i}{\phi \mu_i} - \log(y_i) - \log\left( \Gamma\left( \frac{\omega_i}{\phi} \right) \right) \end{array} \right. \quad \text{per } 0 < y < \infty$$

### 3.2.1.e La funzione di collegamento

Per rispondere all'ipotesi strutturale descritta al §3.2.1.c, la funzione di collegamento o funzione link consente di generalizzare la formula (35) come segue

$$(42) \quad E(Y_i) = \mu_i = g^{-1}(x_i' \beta) = g^{-1}(\eta_i)$$

dove  $\eta_i$  è il *previsore lineare* relativo all' $i$ -ma osservazione.

La funzione di collegamento  $g$  reale di variabile reale ed invertibile, quindi, può essere scritta anche nella seguente forma

$$(43) \quad g(\mu_i) = \eta_i = x_i' \beta$$

Come per il paragrafo precedente, saranno elencate di seguito le funzioni di collegamento selezionabili per le due d.d.p. selezionate nel PIRM presentato nell'ultimo capitolo:

- *Poisson*:
  - Identità:  $g(\mu) = \mu$ ;
  - **Logaritmica (canonica)**:  $g(\mu) = \log(\mu)$ ;
  - Esponenziale:  $g(\mu) = (\mu + \alpha)^\lambda$ .
- *Gamma*:
  - Identità:  $g(\mu) = \mu$ ;
  - **Logaritmica**:  $g(\mu) = \log(\mu)$ ;
  - Reciproca (canonica):  $g(\mu) = -\frac{1}{\mu}$

In grassetto è evidenziata la funzione link adottata usualmente per fini tariffari e selezionata in questa tesi anche per la determinazione del SCR per il *Premium Risk*.

Per le proprietà della funzione logaritmo, la struttura dei coefficienti (o regressori) che saranno creati dal GLM in output sarà *moltiplicativa*.



### 3.2.1.f GLM con quasi-verosimiglianza

Una delle modifiche ai GLM di maggiore interesse per l'obiettivo di questa tesi riguarda la classe dei *modelli con quasi-verosimiglianza* (v. [68] e [69]).

Sono dei modelli *semiparametrici* per i quali il valutatore dovrà specificare solamente le strutture dei primi due momenti delle distribuzioni delle variabili risposta: il valore atteso e la funzione di varianza.

Questa estensione, pertanto, amplia il numero delle distribuzioni di probabilità per le quali un GLM possa ottenere dei risultati, consentendo ad un valutatore di svincolarsi dall'ipotesi che le variabili risposta siano distribuite secondo una qualunque delle d.d.p. appartenenti alla famiglia esponenziale lineare (v. formula (36)).

In modo analogo al §3.2.1.c, sono descritte di seguito le ipotesi di questa classe di GLM:

- *Ipotesi probabilistiche*: le variabili risposta  $\{Y_i, i=1\dots n\}$ , sono stocasticamente indipendenti e posto  $E(Y_i) = \mu_i$ , si ha che la  $Var(Y_i) = \phi / \omega_i V(\mu_i)$ , dove  $V$  è una funzione dipendente dal valore atteso delle variabili risposta  $\phi > 0$  un parametro di dispersione e  $\omega_i > 0$  è un variabile peso assegnata;
- *Ipotesi strutturali*: esiste un legame tra il valore atteso delle variabili risposta  $\mu_i$  ed il vettore  $\{x_i, i=1\dots n\}$  delle determinazioni delle variabili esplicative.

Ulteriore elemento di novità riguarda l'algoritmo di fitting che, in questo caso, ha l'obiettivo di massimizzare la funzione di *(log-)quasi-verosimiglianza*:

$$(44) \quad Q(y, \mu, \phi) = \sum_{i=1}^n \omega_i \int_{y_i}^{\mu_i} \frac{y_i - s}{\phi V(s)} ds$$

L'interesse tecnico verso questa categoria di Modelli Lineari Generalizzati nasce dalla necessità di studiare una v.a. che risente di alcuni valori anomali che non possono essere descritti con una d.d.p. appartenente alla famiglia esponenziale lineare.

Il *DaU\_1yr* mediamente dal 92-mo al 100-mo percentile della sua distribuzione empirica assume dei valori così elevati, noti anche come *coda* della distribuzione empirica, da dover essere studiati con *distribuzioni a code pesanti*.

Tra le distribuzioni classiche che consentono al valutatore di identificare il trend sistematico e di replicare la variabile risposta anche in presenza di valori extra-norma si ricordano:

- La distribuzione Log-Normale;
- La distribuzione di Pareto.

Sebbene il §3.3 conterrà tutti i dettagli tecnici ed operativi adottati per il PIRM, in questo paragrafo saranno delineati gli aspetti teorici di fitting di un GLM per ambedue le d.d.p. a code pesanti.

Nel caso di una ipotesi probabilistica *Log-Normale*( $\alpha, \gamma$ ) con  $\alpha$  Reale e  $\gamma > 0$

$$(45) \quad f(y, \alpha, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma y} \exp\left(-\frac{1}{2\gamma^2}(\log y - \alpha)\right)$$

se una variabile  $Y$  è distribuita secondo una Normale( $\alpha, \gamma^2$ ), il  $\log(Y)$  ha distribuzione Log-Normale( $\alpha, \gamma^2$ ).

Un metodo semplice ed usuale per poter utilizzare questa d.d.p. è quindi quella di modificare i valori osservati della variabile aleatoria  $\{y_i, i=1\dots n\}$  mediante una trasformata logaritmica  $\{\log(y_i), i=1\dots n\}$  e poi selezionare la Normale come ipotesi probabilistica di un GLM.

Per completezza espositiva, dalla funzione generatrice dei momenti, sono illustrati di seguito il valore atteso e la funzione di varianza della v.a.  $Y$  distribuita secondo Log-Normale( $\alpha, \gamma$ )

$$(46) \quad \begin{cases} E(Y) = \exp\left[\alpha + \frac{1}{2}\gamma^2\right] \\ Var(Y) = \exp\left[2\alpha + \gamma^2(e^{\gamma^2} - 1)\right] \end{cases}$$

Un altro esempio classico riguarda la distribuzione di *Pareto*( $\lambda, \alpha$ ) con i parametri definiti positivi.

$$(47) \quad f(y, \lambda, \alpha) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda + y)^{\alpha+1}}, y > 0$$

Questa d.d.p. è spesso usata nel settore tecnico-attuariale per la valutazione probabilistica del costo dei sinistri sulla coda destra, quindi, in linea con la premessa relativa al *DaU\_1yr*.

Con  $\alpha > 2$

$$(48) \quad \begin{cases} E(Y) = \frac{\lambda}{\alpha - 1} \\ Var(Y) = \frac{\alpha}{\alpha - 2} \left(\frac{\lambda}{\alpha - 1}\right)^2 \end{cases}$$

Posto  $E(Y) = \mu$  e  $\phi = \alpha/\alpha - 2$ , il legame tra il valore atteso e la varianza della distribuzione è

$$(51) \quad g(E(y | \gamma)) = x' \beta + z' \gamma$$

E' interessante notare che il legame indicato in formula (49) è *analogo a quello di una distribuzione Gamma*, fatta eccezione per il vincolo per il parametro di dispersione.

Come dimostrabile anche nel caso della distribuzione Log-Normale( $\alpha, \gamma$ ) (v.[57]), poiché la funzione di varianza è la stessa di quella che avrebbe un GLM in ipotesi di d.d.p. Gamma, *un Modello con quasi-verosimiglianza per la stima delle distribuzioni di Pareto equivale a specificare un modello Gamma.*

### 3.2.1.g Il Modello di Tweedie

Un'altra classe di modelli di interesse per le elaborazioni richieste da questo elaborato è quella del *Modello di Tweedie* (v.[73]).

Spesso nelle applicazioni attuariali è preferibile lavorare con d.d.p. *invarianti* rispetto alle trasformazioni di scala.

Sia  $c$  una funzione definita positiva e  $Y$  una v.a. distribuita secondo una qualunque delle d.d.p. appartenenti ad una famiglia di distribuzioni. La famiglia allora sarà invariante rispetto alle trasformazioni di scala se e solo se  $cY$  sarà distribuita secondo una d.d.p. della stessa famiglia di  $Y$ .

Questa proprietà è particolarmente utile quando l'obiettivo di un valutatore è quello di studiare v.a. misurate in moneta, tra cui anche il  $DaU_{1yr}$ .

Si può dimostrare che alcune delle distribuzioni appartenenti alla *famiglia esponenziale lineare* sono un caso particolare di tale modello che si fonda sulla definizione della seguente funzione di varianza:

$$(49) \quad Var(Y) = \mu^p$$

Il parametro  $p$  svolge un ruolo critico all'interno di questa classe di modelli.

Al variare di questo parametro, infatti, il valutatore selezionerà una delle distribuzioni indicate nella seguente tabella (Figura 15).

	Type	Name	Key ratio
$p < 0$	Continuous	–	–
$p = 0$	Continuous	Normal	–
$0 < p < 1$	Non-existing	–	–
$p = 1$	Discrete	Poisson	Claim frequency
$1 < p < 2$	Mixed, non-negative	Compound Poisson	Pure premium
$p = 2$	Continuous, positive	Gamma	Claim severity
$2 < p < 3$	Continuous, positive	–	Claim severity
$p = 3$	Continuous, positive	Inverse normal	Claim severity
$p > 3$	Continuous, positive	–	Claim severity

**Figura 15 – Modelli di Tweedie [73]**

L'impostazione indicata in Figura 15 segue un principio *deduttivo*, ossia il parametro  $p$  è ipotizzato noto a priori.

Una delle maggiori novità relative questa classe di modelli è introdotta da [62] nel 1994. Nel loro "*Fitting Tweedie's Compound Poisson Model to Insurance Claim Data*", gli autori consentono di poter determinare il valore di  $p$  con un processo iterativo (in gergo informatico "macro") a partire dai dati osservati della variabile risposta  $\{y_i, i=1 \dots n\}$ .

Tale procedura consente pertanto al valutatore *di analizzare i dati e verificare se l'ipotesi probabilistica scelta dal valutatore è coerente con i dati analizzati*.

Osservando le *grandezze tecniche* ("Key ratio") suggerite in tabella, sono stati riportati solo alcuni esempi classici di variabili risposta che possono essere studiate con un Modello di Tweedie in un perimetro coerente con gli obiettivi di questa tesi.

Generalmente, un modello Tweedie con  $p > 2$  è consigliabile per la studio delle variabile continue come il *DaU\_1yr*.

In particolare, la classe dei modelli di maggiore interesse in questa tesi è quella con  $1 < p < 2$ , ossia quella relativa al *Processo di Poisson-composto*:

$$(52) \quad X(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} Y_i$$

che è il processo stocastico che comprende l'impostazione classica di un processo di tariffazione (v. §2.2.1.f) e/o di determinazione del *DaU\_1yr* (v.[57]).

In conclusione, utilizzando un Modello di Tweedie con il valore  $p$  nell'intervallo aperto (1,2), un valutatore potrebbe stimare le v.a. di interesse di questa tesi senza studiare separatamente le basi tecniche di un problema di tariffazione: il numero dei sinistri  $N$  e la somma dei risarcimenti aleatori  $Y$  relativi ad ognuno dei sinistri che dovrà essere pagato dall'assicuratore (v. §2.2.1.f).

### 3.2.1.h Bontà di Adattamento e selezione dei trend

Dopo aver scelto il GLM come Modello di Rischio e descritto in sintesi le tecniche di *stima dei parametri* del modello, il valutatore dovrà essere in grado di valutare il *potere predittivo del modello*.

Chiamato più comunemente *bontà di adattamento*, il potere predittivo di un modello è studiato insieme alla selezione delle variabili esplicative.

Il *processo di modellizzazione* della variabile risposta Y, infatti, consiste

- Nella selezione delle variabili esplicative nel modello (X);
- Nella verifica della bontà di adattamento del modello ai dati osservati.

La selezione delle variabili esplicative (X) può avvenire:

- Una alla volta (*forward*);
- Tutte insieme (*backward*);
- Mistura dei due precedenti (*stepwise*).

Dopo aver inserito una o più variabili nel GLM, l'analisi della bontà di adattamento consentirà al valutatore di scegliere se mantenere o modificare l'attuale struttura delle variabili esplicative.

Tuttavia, è utile evidenziare che le analisi di bontà di adattamento sono usualmente una delle fasi di maggior rilievo di quella che viene definita *analisi dei trend*.

Come definito nei §2.2.1.i, il valutatore, oltre a selezionare le variabili esplicative, dovrà anche essere in grado di capire se il trend è:

- *Significativo* in termini di span tra il valore minimo e massimo prodotto dal GLM;
- *Consistente* nel tempo o secondo una variabile casuale;
- *Statisticamente significativo* che equivale al concetto di *bontà di adattamento*;
- *Logico*, ossia coerente con le aspettative del valutatore
- *Affidabile* o accettabile rispetto al peso delle unità statistiche per le modalità della variabile esplicativa oggetto di verifica.
- *Atteso* in termini di rappresentatività della futura evoluzione della variabile risposta.

Entrando nel merito della bontà di adattamento per l'interesse statistico-metodologico di tale fase è necessaria ricordare quanto premesso al §3.2.1.b. Ogni variabile esplicativa inserita nel GLM introduce un numero di parametri del modello pari al numero delle sue modalità.

Tanto maggiori saranno le modalità di una variabile, tanto migliore sarà il potere predittivo del modello, a patto che tali modalità siano affidabili. Diversamente, il GLM potrebbe incorrere in problemi di convergenza dell'algoritmo di fitting.

In generale, sia  $n$  il numero delle unità statistiche da analizzare, il numero massimo (teorico) dei parametri contenuti in un GLM potrà essere minore o al più uguale ad  $n$ .

Nell'ipotesi che il GLM con  $n$  parametri (di seguito "*modello completo*") produca dei risultati e che il *modello corrente* sia il modello selezionato da un valutatore al termine del *processo di modellizzazione* indicato in precedenza, una delle prime analisi di bontà di adattamento consiste nella comparazione di questi due GLM.

Ciò detto, è utile sottolineare che il *modello completo* non ha alcun interesse applicativo poiché non offre alcuna informazione sulla bontà delle variabili esplicative inserite nel modello stesso.

Generalmente sono due le statistiche che sono riconosciute in modo universale per verificare la bontà di adattamento di un *modello corrente*:

- Devianza scalata;
- Statistica del Chi-Quadrato di Pearson.

Sia  $l(y, \mu)$  la funzione di log-verosimiglianza (v. §3.2.1.d), sono definite di seguito la *Devianza* (*Dev*) e la sua versione scalata (*D\_Scal*) rispetto al *parametro di scala*  $\phi$ .

$$(53) \quad \begin{cases} Dev(y, \mu) = 2(l(y, y) - l(y, \mu)) \\ D\_Scal(y, \mu) = \frac{Dev(y, \mu)}{\phi} \end{cases}$$

In ambedue i casi, poiché la devianza *esprime la distanza tra i valori osservati e quelli stimati dal GLM*, il *modello corrente* è tanto migliore quanto più la devianza (o la devianza scalata) tenderà al valore minimo ottenuto dal calcolo di questa statistica con il *modello completo*.

In generale, il valore minimo della devianza per  $n \rightarrow +\infty$  è pari a 0 ("zero").

La *statistica del Chi-Quadrato di Pearson*, invece, segue la seguente formula:

$$(54) \quad X^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i (y_i - \mu_i)^2}{V(\mu_i)}$$

In modo del tutto analogo alla Devianza, anche in questo caso esiste la versione scalata della statistica del Chi-Quadrato è ottenuta come  $X^2 / \phi$ .

La statistica del Chi-Quadrato, oltre che in valore assoluto, è utilizzata in un *test-statistico*. Piuttosto che nel comparare il modello corrente con quello completo, l'utilizzo di questo test è particolarmente utile nel processo di inserimento e/o verifica delle variabili esplicative.



In accordo con quanto mostrato in letteratura di statistica inferenziale, se questo test risulta essere inferiore al p-value (fissato comunemente al 5%), il valutatore potrà accettare l'ipotesi alternativa.

In ipotesi di inserimento *forward* delle variabili, il suddetto risultato farà concludere al valutatore che la nuova variabile esplicativa inserita nel modello è *statisticamente significativa*.

Altre statistiche utili per apprezzare la bontà di adattamento di un modello sono l'*Akaike Information criterion* (AIC), la sua versione *corretta* (AICc) ed il *Bayesian Information criterion* (BIC):

$$(55) \quad \begin{cases} AIC = -2LL + 2p \\ AICc = -2LL + 2p \frac{n}{n-p-1} \\ BIC = -2LL + p \log(n) \end{cases}$$

Dalla formula (55), si osserva che tutti e tre i criteri di comparazione tra GLM confrontano la funzione di log-verosimiglianza stimata dal modello con il numero dei parametri e/o dei gradi di libertà del modello stesso.

Come dimostrato in [87], queste statistiche al ridursi in valore assoluto indicano un miglioramento della bontà di adattamento di un modello.

Il processo di modellizzazione si concluderà quando il valutatore riterrà di aver valutato ogni variabile esplicativa, spesso andando a rivedere in senso critico quanto selezionato all'inizio del processo per via delle *correlazioni* tra le unità statistiche, ed osservando i residui del modello (v. §6.6 di [57]).

### 3.2.1.i Stima del parametro di dispersione

In un GLM la stima dei regressori  $\beta$  non dipende dal parametro di dispersione  $\phi$ .

Diversamente, il parametro di scala  $\phi$  è strettamente collegato a quello di dispersione ed ambedue sono determinati in modo automatico nel processo di stima della massima verosimiglianza ottenuta dall'algoritmo utilizzato dal software statistico selezionato.

L'influenza di tali parametri nelle d.d.p. appartenenti alla famiglia esponenziale lineare concerne *la determinazione della funzione di varianza* (v. formula (38)). Un parametro di dispersione elevato, essendo un fattore di distribuzione, aumenta il valore della varianza e, quindi, anche della deviazione standard calcolata a livello del singolo parametro o del modello.

I software utilizzati in questa tesi (SAS ed Emblem) consentono di poter determinare il parametro di scala (e di conseguenza il parametro di dispersione) secondo due stimatori noti in letteratura:

- Il metodo della Devianza;
- Il metodo di Pearson.

In accordo con [72], in tesi è stato selezionato il primo stimatore per i GLM in cui le determinazioni della variabile risposta  $\{y_i, i=1\dots n\}$  sono alte in valore assoluto (ad es. per stimare il costo medio o il *DaU\_1yr*), viceversa il criterio di Pearson per valori bassi delle  $y_i$  (ad es. per descrivere la frequenza).

Nel solo caso in cui sia stata selezionata la d.d.p. di Poisson per descrivere la v.a.  $Y$ , il valutatore potrà decidere di *rendere ininfluente il parametro di dispersione*, fissando ad 1 il valore del parametro di scala (Poisson classica). Diversamente, in seguito alla formula (38), la distribuzione di *Poisson* selezionata sarà quella *Sovradispersa*.

#### 3.2.1.I La Sovradispersione

Si parla di *sovradsipersione* quando le unità statistiche di una determinata popolazione hanno una varianza empirica maggiore di quella ottenuta con il modello stimato.

In un GLM, come anticipato nel paragrafo precedente, questo dipende dal modo in cui si sceglie di stimare il parametro di *dispersione*.

Un'indicazione della presenza di sovradsipersione può essere ricavata dal rapporto della Devianza scalata o della statistica del Chi-Quadrato con i *gradi di libertà*. Questi ultimi sono calcolati come differenza tra il numero massimo dei parametri di un GLM ( $n$ ) ed il numero dei parametri del modello ( $p$ ). Valori maggiori di uno di tale rapporto suggeriscono di correggere il modello per tenere conto del fenomeno della sovradsipersione.

*La frequenza è affetta generalmente dal problema della sovradsipersione.*



Scegliendo la distribuzione di Poisson, vale la seguente uguaglianza:

$$(56) \quad E(Y) = Var(Y)$$

Una delle possibili soluzioni a tale ipotesi forte e spesso poco realistica nell'analisi del numero dei sinistri, perseguita anche in questa tesi per la determinazione del  $DaU_{1yr}$  (v. Capitolo 4), è quella di selezionare un parametro di dispersione diverso da quello unitario e di definire un'ulteriore classe di GLM nota come: “*Modelli di Poisson con Sovradispersione*”.

Questi modelli rientrano nella classe dei modelli con quasi-verosimiglianza (v. §3.2.1.f), sebbene non sia necessario modificare la struttura del valore atteso. La funzione di varianza, invece, è descritta di seguito:

$$(57) \quad Var(Y_i) = \frac{\phi}{\omega_i} V(\mu_i) = \frac{\phi}{\omega_i} \mu_i$$

I modelli di Poisson e di Poisson con sovradispersione hanno dunque la stessa funzione di Varianza, ma un diverso parametro di dispersione che in tesi è stato determinato secondo la stimatore di Pearson (v. §3.2.1.i).

I regressori  $\beta$ , non essendo influenzati da tale parametro di disturbo, non subiranno variazioni se messi a confronto nei due modelli.

Coerentemente con l'obiettivo di catturare la sovradispersione, subiranno variazioni:

- La deviazione standard dei parametri e/o del modello;
- Le statistiche della bontà di adattamento (v. §3.2.1.h).

*Con il modello di Poisson con sovradispersione (di seguito “Poisson ODP”) si accoglie implicitamente un'ipotesi di varianza crescente in modo lineare con la media.*

Qualora tale ipotesi non fosse rispettata, il modello potrebbe essere inadeguato a stimare con precisione la variabile risposta di interesse.

### 3.2.1.m Il GLM come PIRM

Questo paragrafo ha l'obiettivo di riepilogare in modo sintetico quali scelte tecniche ed operative sono state concepite in questa tesi al fine di descrivere la capacità di un GLM ad essere eletto come *Modello interno Parziale* per il *Premium Risk*.

- **Database:** dopo aver determinato il  $DaU_{1yr}$  (v.§3.1), è stata definita una *soglia* (v. §3.3) che ha consentito di separare le polizze con sinistri di importo al di sotto (Attritional) o al di sopra (Punta o Large) di tale ammontare;
- **Numero Modelli:** in modo coerente con il processo tariffario del ramo RCA in seguito all'indennizzo diretto (v.§2.2.3) sono stati realizzati
  - *GLM Attritional*
    - 7 Modelli Singoli: 3 Modelli di Frequenza e 4 di Costo Medio;
    - 1 Modello Convoluta per la stima del  $DaU_{1yr}$ .
  - *GLM (con quasi-verosimiglianza) Large*
    - 1 Modello di  $DaU_{1yr}$  relativo alle gestioni NoCard e Card.
- **Ipotesi Probabilistiche e strutturali** (d.d.p. / funzione collegamento / parametro  $\phi$ ):
  - *Modelli di Frequenza:* Poisson ODP / logaritmo / Pearson;
  - *Modelli di Costo Medio:* Gamma / logaritmo / Devianza;
  - Modello Convoluta del  $DaU_{1yr}$  (Attritional): Gamma / logaritmo / Devianza;
  - Modelli di  $DaU_{1yr}$  (Large): Pareto / logaritmo / Devianza.
- **Bontà di Adattamento e selezione dei trend:** in modo coerente con la definizione dei Modelli di Rischio (v.§2.2.1.i) adoperati in una fase del processo tariffario e volendo stimare la d.d.p. del  $DaU_{1yr}$ , non c'è alcun vincolo legale e/o commerciale che guiderà la selezione delle variabili esplicative.

In conclusione, grazie alle proprietà dei GLM con quasi-verosimiglianza nel fitting di distribuzioni a "coda pesante" (v. §3.2.1.f), il GLM è l'unico modello ad essere utilizzato per la stima del  $DaU_{1yr}$  (Large).

### 3.2.2 Il Modello Additivo Generalizzato ed il Modello Misto Lineare Generalizzato (GLMM)

In questo paragrafo saranno descritti altri due modelli che rientrano nella famiglia dei Modelli di regressione:

- Il Modello Additivo Generalizzato;
- Il Modello Misto Lineare Generalizzato.

Sebbene utilizzati in molti campi della statistica, questi modelli non rivestono ancora un ruolo rilevante nella letteratura attuariale.

Oltre a descriverne i vantaggi e gli svantaggi teorici ed operativi, in modo analogo a quanto presentato per il GLM, saranno mostrate le modalità con le quali sono stati utilizzati come PIRM nella stima del  $DaU_{1yr}$ .

#### 3.2.2.a Il Modello Additivo Generalizzato (GAM)

I Modelli Additivi Generalizzati sono modelli di regressione introdotti nel 1990 da Hastie and Tibshirani.

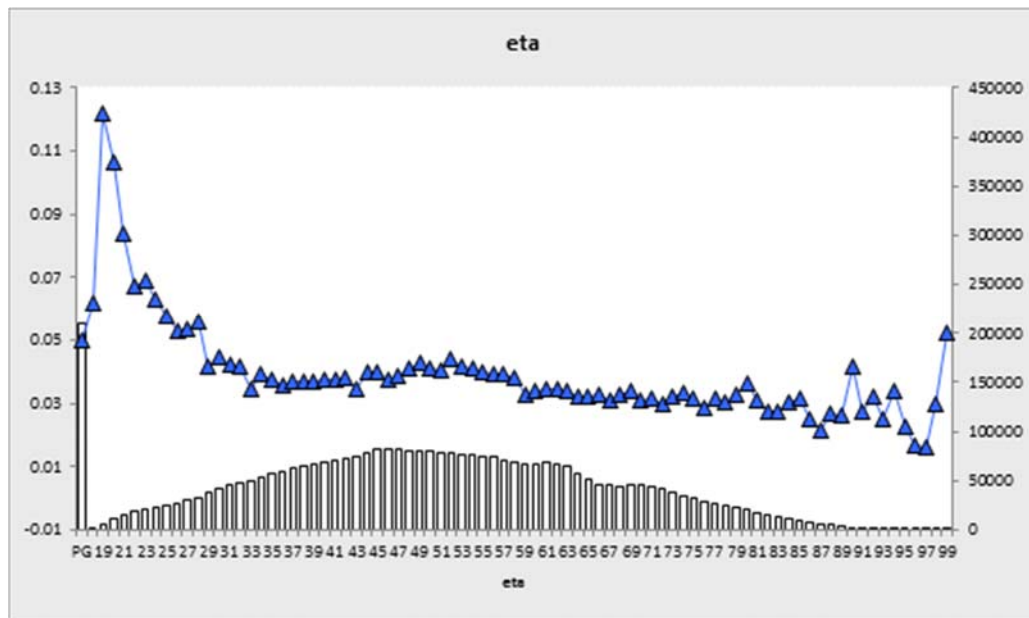
A differenza degli altri Modelli di Regressione presentati in questa tesi, il GAM è l'unico modello *non parametrico*.

Sebbene la letteratura presenti diversi altri modelli di regressione non parametrica, il GAM mostra due caratteristiche che permettono di apprezzarne maggiormente il valore applicativo:

- Un'ipotesi di *additività* che consente di esplorare contemporaneamente diverse relazioni non parametriche;
- La possibilità di essere anche un modello semi-parametrico, selezionando delle ipotesi probabilistiche del tutto analoghe a quelle di un GLM (v. §3.2.1.c).

Il GAM, inoltre, potrebbe essere una valida alternativa al GLM per la gestione delle variabili esplicative *quantitative continue*.

Dal Caso di studio descritto nel Capitolo 4, è riportato di seguito il grafico della Frequenza Card della variabile esplicative "età dell'assicurato".



**Figura 16** – Analisi Univariata: La frequenza Card della variabile Età dell'assicurato

Escludendo la prima modalità (persone giuridiche - PG), per tutti gli assicurati (persone fisiche) di questa base dati è osservabile un trend di frequenza assimilabile ad un polinomio di secondo o terzo grado.

Il GLM, per l'ipotesi di *linearità*, non sarebbe in grado di catturare un trend polinomiale di grado superiore al primo<sup>2</sup> e, a meno di elaborazioni intermedie da parte del valutatore quali raggruppamento o *cluster analysis*, questa variabile inserirebbe nel modello un numero elevato di parametri.

Il GAM, invece, per l'ipotesi di *additività*, consente di stimare la variabile risposta Y con un numero di polinomi eguale al numero delle variabili esplicative selezionate dal valutatore:

$$(58) \quad Y = s_0 + s_1(X_1) + s_2(X_2) + \dots + s_n(X_n)$$

<sup>2</sup> I software adoperati in questa tesi, tuttavia, hanno sviluppato dei tool aggiuntivi che consentono al valutatore di poter imporre una semplificazione del trend anche mediante interpolazione polinomiale o per spline.

Inoltre il GAM generalizza il modello *additivo normale* in modo del tutto analogo al GLM rispetto al modello lineare normale:

- *Ipotesi probabilistica*: il valutatore potrà selezionare una qualunque delle d.d.p. appartenenti alla famiglia esponenziale lineare (v. formula (36));
- *Ipotesi strutturale*: esiste un legame tra il valore atteso delle variabili risposta  $\mu_i$  ed il vettore  $\{x_i, i=1\dots n\}$  delle determinazioni delle variabili esplicative.

In seguito a tali ipotesi è semplice dimostrare che il GLM è un caso particolare del GAM.

Osservando la formula (57), al variare della categoria di funzioni  $s(x)$  varierà anche il risultato finale del GAM. In questa tesi sono state selezionate le funzioni appartenenti alla famiglia delle *cubic spline* (v. Appendix B - [73]).

Definita la funzione del previsore additivo

$$(59) \quad \eta(X) = s_0 + \sum_i s_i(X_i) = g(\mu(X))$$

*derivabile almeno due volte* rispetto alle variabili esplicative, per *smoothing spline* si definisce la soluzione al seguente problema di ottimizzazione:

$$(60) \quad \min_{s(x)} \sum_{i=1}^n (y_i - \eta(x_i))^2 + \lambda \int_a^b (\eta''(t))^2 dt$$

dove  $\lambda$  è una costante e  $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$ .

E' dimostrato che esiste un'unica funzione  $s(x)$  che *minimizza* la formula (59) ed è una (*natural*) *cubic spline*.

Il rapporto  $\lambda/(1+\lambda)$  è il *parametro di smoothing* ed è compreso nel compatto  $[0,1]$ . Al crescere di  $\lambda$  la cubic spline tende ad essere geometricamente liscia (in inglese "smoothed").

### 3.2.2.b Il GAM come PIRM

Questo paragrafo, in modo analogo a quanto mostrato per il GLM (v. §3.2.1.m), ha l'obiettivo di riepilogare in modo sintetico le scelte tecniche ed operative ideate per utilizzare il GAM come *Modello interno Parziale* per il *Premium Risk*.

Il software scelto in questo elaborato per il fitting del GAM (SAS) mostra alcuni limiti rispetto al (solo) obiettivo di questa tesi:

- *Funzioni di collegamento*: non sono state implementate tutte le funzioni link illustrate per il GLM. In particolare, è esclusa (v. pag.1855 di [77]) la possibilità di poter selezionare la funzione logaritmo in ipotesi di d.d.p. Gamma (GAM parametrico o semi-parametrico);
- Variabile Peso ( $\omega$ ): la sintassi della procedura per il fitting di un GAM in SAS non presenta la possibilità di selezionare una variabile peso.

Se il primo limite non consente di modellizzare il *Costo Medio* ed il *DaU\_1yr*, il secondo non permette di analizzare il fenomeno della *Frequenza*.

Per tale ragione, analogamente a quanto descritto nel §3.2.1.m in merito a

- La struttura del *Database*;
- Il *Numero Modelli*;
- Le *Ipotesi Probabilistiche e strutturali*;
- La *Bontà di Adattamento e la selezione dei trend*;

e ricordando che il perimetro dei modelli diversi dal GLM riguarda *solo* le polizze con sinistri di costo inferiore o uguale alla soglia (Attritional), l'approccio ideato in questa tesi è quello di creare un *Modello Misto GLM-GAM* creato seguendo tali passi operativi:

- Utilizzo del GAM (*semi-parametrico*) con ipotesi di distribuzione Poisson o Gamma e funzione di collegamento canonica (v. §3.2.1.e) supportate dal software statistico;
- Selezione delle variabili quantitative ordinali per le quali il GAM individua un trend non lineare (per mezzo delle *cubic spline* illustrate nel paragrafo precedente);
- Utilizzo del GLM in cui *le variabili esplicative sono semplificate adoperando la stessa cubic spline indicata dal GAM*, ma con ***Ipotesi Probabilistiche e strutturali*** (d.d.p. / funzione collegamento / parametro  $\phi$ ) mostrate al §3.2.1.m:
  - *Modelli di Frequenza*: Poisson ODP / logaritmo / Pearson;
  - *Modelli di Costo Medio*: Gamma / logaritmo / Devianza;
  - *Modello Convoluto del DaU\_1yr (Attritional)*: Gamma / logaritmo / Devianza.

### 3.2.2.c Il Modello Misto Lineare Generalizzato (GLMM)

Il Modello Misto Lineare Generalizzato (GLMM), ultimo dei tre modelli utilizzati in questa tesi per determinare un requisito di capitale per il *Premium Risk*, consente di generalizzare due modelli noti in letteratura (v. [65]):

- Il Modello Lineare Generalizzato (GLM);
- Il Modello Misto;

Condividendo le stesse ipotesi del GLM (v. §3.2.1.c), il GLMM generalizza il GLM poiché supera uno dei maggiori limiti metodologici di quest'ultimo modello, ossia quello di poter essere usato solo per unità statistiche *incollegate*.

Gran parte della determinazione della variabile risposta  $\{y_i, i=1\dots n\}$ , invece, sono spesso correlate tra le unità statistiche, anche all'interno del caso di studio di questa tesi.

Difatti, in un database come quello descritto al §2.2.1.h può accadere che un assicurato abbia rinnovato la polizza RCA in diversi anni di competenza (o esercizi). Quello che sembra logico supporre è che l'assicurato avrà un comportamento di guida simile nei diversi anni.

E' possibile ad esempio verificare la suddetta affermazione sulle determinazioni della *frequenza NoCard* o, genericamente, su una qualunque delle basi tecniche indicate al §2.2.3.d, impiegando una delle misure di "associazione" individuate in letteratura.

Aver superato tale vincolo, quindi, consente di poter utilizzare un modello che dovrebbe essere in grado di replicare in modo più veritiero la variabile risposta  $Y$ , anche a parità di variabili esplicative nei modelli.

La possibilità di tenere conto delle correlazioni, tuttavia, è un punto di forza del Modello Misto che, piuttosto, mostra un limite nell'ipotesi probabilistica. Il Modello Misto, infatti, ipotizza che la variabile risposta sia distribuita solo secondo una distribuzione Normale.

Il GLMM, condividendo le stesse ipotesi probabilistiche e strutturali del GLM, invece consente di poter selezionare una qualunque delle d.d.p. appartenenti alla *famiglia esponenziale lineare* e di poter scegliere una *funzione di collegamento* diversa dalla sola funzione di identità.

Formalizzando quanto detto

$$(61) \quad Y = X\beta + Z\gamma + \varepsilon$$

la variabile risposta  $Y$  incorpora le correlazioni grazie al vettore delle *variabili disturbo*  $Z$  e del *fattore casuale* (o *fattore random*)  $\gamma$ .

Il fattore casuale nel GLMM assume una d.d.p. Normale di medio 0 (“zero”) e varianza individuata dalla matrice  $\mathbf{G}$ . Il *limite* preminente del GLMM deriva da questa ipotesi che, per le caratteristiche proprie della distribuzione Normale, disturba i valori stimati dal modello  $\{y_i, i=1 \dots n\}$  in modo simmetrico intorno alla media nulla.

La distribuzione degli errori  $\varepsilon$  è distribuita secondo una Normale di media 0 e varianza  $\mathbf{R}$ , come è verificato per una qualunque delle d.d.p. appartenenti alla *famiglia esponenziale lineare*.

Nelle ipotesi strutturali di questo modello, oltre alla *funzione link*, potranno essere specificate pertanto:

- Vettore delle variabili di disturbo  $Z$  e matrice di varianza  $G$ ;
- Matrice di varianza  $R$ .

Sarà il valutatore a decidere se inserire uno o ambedue gli *effetti random* introdotti dalle matrici di varianza indicate sopra (*G-side*, *R-side* o *ambedue*).

In un GLMM con effetto random del tipo *G-side*, il valore atteso stimato della variabile risposta  $Y$  sarà condizionato alla variabilità indotta dal fattore casuale:

$$(62) \quad g(E(Y | \gamma)) = x' \beta + z' \gamma$$

Quindi la d.d.p. selezionata nell'ipotesi probabilistica non riguarda più in modo esclusivo la variabile risposta, ma la v.a. condizionata  $Y|\gamma$ .

Un GLMM con effetto random del tipo *R-side*, assume invece una forma nota (v. formula (43)):

$$(63) \quad g(E(Y)) = g(\mu) = x' \beta$$

Diversamente dal GLM però la varianza dell'errore  $\varepsilon$  non è costante, ma assume la forma specificata e/o stimata da un valutatore e identificata da  $\mathbf{R}$ .

In ipotesi di distribuzione di Poisson ad esempio, definita con  $A$  una *matrice diagonale* che contiene la matrice di varianza  $\mathbf{R}$ , la funzione di varianza del GLMM sarà uguale a

$$(64) \quad Var(Y) = E(Y) = \mu = A^{1/2} R A^{1/2}$$

Non è esclusa la possibilità ad un valutatore di scegliere un GLMM completo di ambedue gli effetti casuali:

$$(65) \quad \begin{cases} E(Y | \gamma) = g^{-1}(X\beta + Z\gamma) = g^{-1}(\eta) = \mu \\ Var(\gamma) = G \\ Var(Y | \gamma) = A^{1/2} R A^{1/2} \end{cases}$$





Al variare della/e componenti casuali cambia anche la procedura di fitting del GLMM che, in sintesi potrà essere:

- *GLMM con effetti random* → Tecnica di *pseudo-verosimiglianza* di Wolfinger e O'Connell (1993) e Breslow e Clayton (1993);
- *GLMM senza effetti random* → *Massima verosimiglianza* o *verosimiglianza ristretta* o *quasi-verosimiglianza*;

Sulla "Bontà di Adattamento e selezione dei trend" vale tutto quanto già definito per il GLM (v. §3.2.1.h), ad esclusione della Devianza e/o della Devianza Scalata che non sono calcolate in caso di GLMM con effetti random.

### 3.2.2.d Il GLMM come PIRM

In modo analogo a quanto mostrato per il GLM (v. §3.2.1.m) e per il GAM (v. §3.2.2.b), anche in questo paragrafo sono riepilogate le scelte tecniche ed operative ideate per utilizzare il GLMM come *Modello interno Parziale* per il *Premium Risk*.

Non si rileva alcuna differenza sostanziale rispetto a quanto già mostrato per il GLM in merito a

- La struttura del *Database*;
- Il *Numero Modelli*;
- Le *Ipotesi Probabilistiche e strutturali*;
- La *Bontà di Adattamento* e la *selezione dei trend*;

La differenza, invece, nasce dall'aver selezionato in ogni modello un effetto random congiunto tra *G-side* e *R-side*:

- **G-side:**
  - Variabili di disturbo **Z**: la variabile di interesse è l'anno di competenza. *Il DaU sarà stimato tenendo conto della correlazione osservata tra i diversi anni.*
  - Matrice di Varianza **G**: stimata con il metodo di Chovlesky, garantisce che i coefficienti di varianza e covarianza siano *positivi*. Nel perimetro della tesi non è ragionevole pensare che la varianza del parametro di disturbo influisca su valori minori di 0 ("zero");
- **R-side:** *Il DaU terrà conto anche della correlazione osservata tra i profili di rischio.*

### 3.3 La definizione di una soglia: i sinistri punta

La definizione di una *soglia* per l'identificazione dei sinistri punta è un argomento noto in letteratura e di rilevanza centrale in questo elaborato e nella definizione del PIRM.

Come indicato all'interno della Direttiva e più volte citato in tesi, il requisito di capitale richiesto dalla Direttiva è pensato considerando un *percentile di una distribuzione di probabilità*.

Il percentile, fissato al 99.5% della distribuzione, sarà quasi certamente oltre la soglia selezionata.

Obiettivo di questo paragrafo, pertanto, è quello di mostrare alcune delle tecniche maggiormente in uso per la definizione della soglia, senza avere la pretesa di essere esaustivo, anche alla luce del grande interesse espresso dalla letteratura statistico-attuariale degli ultimi anni.

Nel Capitolo 4 e più precisamente al §4.2 saranno mostrate le evidenze numeriche derivanti dall'applicazione di queste metodologie al caso di studio.

#### 3.3.1 La Disuguaglianza di Bienaymé-Cebicev

Publicata per la prima volta nel 1853 dal coautore meno noto Irénée-Jules Bienaymé, la disuguaglianza di *Bienaymé-Cebicev* è un corollario della *disuguaglianza di Markov*.

Definita la v.a.  $Y$  con valore atteso  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$  e  $\lambda$  un parametro appartenente all'insieme dei numeri Reali positivi, allora questa disuguaglianza dimostra *che è possibile determinare la probabilità che assuma un valore nell'intervallo simmetrico*  $[\mu - \lambda\sigma, \mu + \lambda\sigma]$ :

$$(66) \quad \Pr(\mu - \lambda\sigma \leq Y \leq \mu + \lambda\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

Questo teorema assicura, quindi, *indipendentemente dalla distribuzione della variabile aleatoria (metodo distribution free)*, che

- La probabilità che tale v.a. assuma valori distanti dalla media più di  $\lambda$  volte la deviazione standard è al massimo pari al rapporto  $1/\lambda^2$ ;
- La probabilità che una v.a. possa avere valori esterni a un intervallo simmetrico rispetto alla media aritmetica è calcolabile.

Utilizzando per semplicità il sottoinsieme dei numeri Naturali per la scelta del parametro  $\lambda$  si ottiene:

- Almeno il 75% dei valori sono compresi tra  $\mu-2\sigma$  e  $\mu+2\sigma$
- Almeno l'88% dei valori sono compresi tra  $\mu-3\sigma$  e  $\mu+3\sigma$
- Almeno il 93% dei valori sono compresi tra  $\mu-4\sigma$  e  $\mu+4\sigma$
- Almeno il 96% dei valori sono compresi tra  $\mu-5\sigma$  e  $\mu+5\sigma$
- Almeno il 99% dei valori sono compresi tra  $\mu-10\sigma$  e  $\mu+10\sigma$

Nel caso di studio, tale disuguaglianza consente ad un valutatore di selezionare la soglia in modo *indiretto*.

Calcolata la *media* e la *varianza* della v.a.  $DaU_{1yr}$  e scegliendo il parametro  $\lambda$ , la soglia  $u$  sarà pari a

$$(67) \quad u = \mu + \lambda\sigma$$

Poiché il  $DaU_{1yr}$  non può assumere valori inferiori allo 0 ("zero"), la soglia coinciderà quindi con l'estremo superiore del compatto.

In conclusione, noti i vantaggi dell'assenza di un'ipotesi di distribuzione a priori della v.a. di interesse e della semplicità di calcolo, uno dei limiti maggiori che si riscontrano in questo approccio riguarda la *totale discrezionalità* nella scelta del parametro  $\lambda$ .

### 3.3.2 Il metodo del Quantile

Tra gli approcci maggiormente utilizzati dalle Compagnie sia a fini tariffari che di parametrizzazione del PIRM è il metodo del quantile.

Premesso che non esiste alcun riferimento preciso in letteratura, tale metodo nasce dalla prassi ordinaria degli attuariati.

Definita una v.a. oggetto di analisi, questo approccio è basato su due elementi:

- La scelta del numero dei *quantili*;
- La scelta dell'*i-mo* quantile.

I *percentili con un decimale* sono spesso la scelta prevalente delle Compagnie ed è anche coerente con l'approccio scelto in questa tesi e mostrato al Capitolo 4.

Sia il  $DaU_{1yr}$  la v.a. oggetto di analisi, sarà definita una tabella che, *per ogni percentile* della distribuzione empirica di tale variabile, conterrà (almeno) le seguenti informazioni:

- Distribuzione percentuale del numero dei sinistri;
- Distribuzione percentuale cumulata del numero dei sinistri;
- Numero dei sinistri;
- Costo Minimo, Medio e Massimo;
- Costo totale;
- Costo totale cumulato;
- Costo totale cumulato percentuale.

Usualmente, all'aumentare dei percentili del  $DaU_{1yr}$ , la differenza percentuale tra il *Costo Minimo* e/o il *Costo Massimo* ed il *Costo Medio* tendono ad aumentare sino ad osservare un'improvvisa aumento della variabilità.

La soglia  $u$  è scelta come il *Costo Massimo* del percentile in cui è osservabile il suddetto fenomeno.

In un portafoglio di rischi RCA, le soglie, diversificate per Gestione (v. §2.2.3.d), spesso ricadono tra il 99.0-mo percentile ed il 99.7-mo.

Pur essendo un approccio *distribution free*, a confronto con la disuguaglianza di Bienaymé-Cebicev, questo metodo introduce degli elementi quantitativi per la selezione della soglia, nonché la possibilità di analizzare in modo dettagliato e disaggregato (quantile per quantile) la distribuzione empirica della v.a.  $DaU_{1yr}$ .

La componente di *expert judgement* resta, tuttavia, un elemento discrezionale rilevante, ma contenuto di norma all'interno di un ristretto insieme di quantili prossimi.

### 3.3.3 La Teoria dei Valori Estremi (EVT)

L'ultima delle metodologie adoperate per determinare una soglia utile, alla definizione dei sinistri punta, proviene dallo studio della *Teoria dei Valori Estremi* (v. [44]).

In particolare, definita la v.a. “Punte oltre la soglia” (di seguito “POT”) come la differenza tra una qualunque determinazione del  $DaU_{1yr}(Y^*)$  e la soglia  $u$ , la EVT ha l'obiettivo di determinare una distribuzione che mostri di quanto il costo  $Y^*$  possa eccedere la soglia  $u$ .

Tale distribuzione, nota come *funzione di distribuzione dell'eccesso*  $F_u(y)$  assume la seguente forma

$$(68) \quad F_u(y) = \Pr(Y^* - u \leq y | Y^* > u) = \frac{F(Y^* + u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

Grazie al teorema di *Pickands-Balkema-de Haan* (v.[74]), si dimostra che la *distribuzione di Pareto Generalizzata* (di seguito anche “GPD”) è l'approssimazione naturale per la funzione di distribuzione dell'eccesso:

$$(69) \quad F_u(y) \approx G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi y / \beta)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-y/\beta), & \xi = 0 \end{cases}$$

Di seguito sono mostrati il grafico della distribuzione di ripartizione e della distribuzione di densità della GPD al variare del parametro di forma (o *shape*)  $\xi$ :

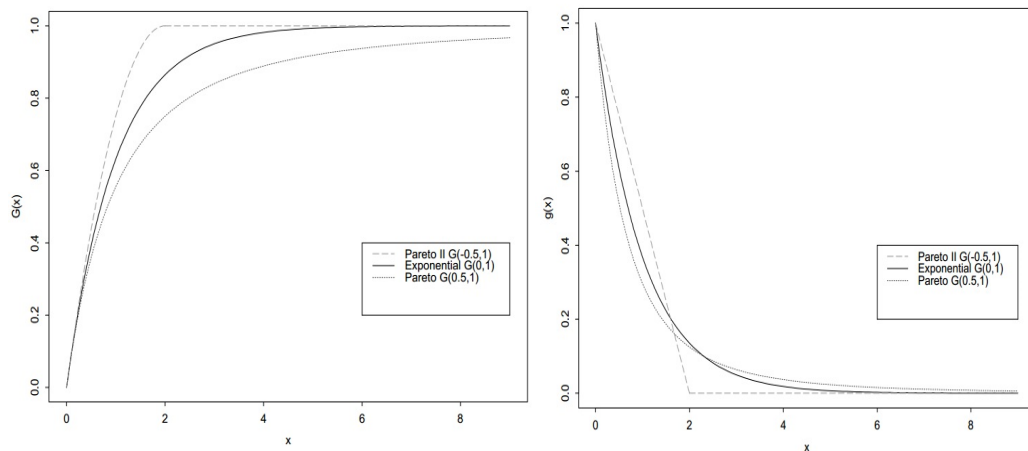


Figura 17 – Funzione di Ripartizione e di Densità della GPD

Sia  $\beta$  il *parametro di scala* della GPD, vale pertanto la seguente relazione:

$$(70) \quad \begin{cases} \xi > 0 \rightarrow \text{Pareto} \\ \xi = 0 \rightarrow \text{Esponenziale} \\ \xi < 0 \rightarrow \text{Pareto\_II\_Tipo} \end{cases}$$

Per valori di  $\xi$  positivi e crescenti, la GPD è una distribuzione a *coda pesante* (v. §3.2.1.f), ossia adatta a rappresentare il fenomeno dei sinistri punta che è oggetto di analisi di questo paragrafo.

La GPD, inoltre, è una generalizzazione della distribuzione di *Pareto*. Si dimostra infatti che per  $\xi > 0$  la GPD coincide con una distribuzione di Pareto con parametro di scala  $\lambda = \beta/\xi$  e parametro di forma  $\alpha = 1/\xi$ .

Questa affermazione consente, pertanto, di individuare un collegamento sostanziale tra l'analisi dei sinistri oltre la soglia ed i *GLM con quasi-verosimiglianza*. Come dimostrato al §3.2.1.f, grazie all'utilizzo della quasi-verosimiglianza, i GLM consentono ad un valutatore di poter stimare il *DaU\_1yr* oltre la soglia  $u$  selezionando la distribuzione di Pareto come ipotesi probabilistica<sup>3</sup>.

Tuttavia, l'obiettivo di questo paragrafo è quello di determinare la soglia  $u$ .

Sebbene la EVT sia finalizzata a trovare la migliore d.d.p. per descrivere la *distribuzione dell'eccesso* con soglia determinata, *un valutatore*, verificato che la GPD o la Pareto sono due distribuzioni ammesse dalla EVT (v. formule (69) e (70)), *potrà utilizzare diversi strumenti quantitativo-statistici per testare e determinare la soglia "migliore"*.

Per *soglia migliore* si intende quella soglia  $u$  tale per cui la *distribuzione dell'eccesso* sia meglio descritta da una GPD o da una Pareto. Per testare tale bontà di adattamento, *al variare della soglia  $u$* , un valutatore potrà:

- Osservare le statistiche base e l'istogramma della d.d.p. del *DaU\_1yr*;
- Definire un QQ-Plot in ipotesi GPD o Pareto;
- Analizzare il grafico a dispersione della funzione di *Eccesso della Media*<sup>4</sup>;
- Analizzare la stabilità del Parametro di forma  $\xi$  (Hill-Plot).

In conclusione, diversamente dai due approcci precedenti (v. §3.3.1 e §3.3.2), questo approccio si fonda su un'ipotesi probabilistica del *DaU\_1yr*.

<sup>3</sup> Per metodi parametrici come i GLM è sempre opportuno compiere un'approfondita analisi esplorativa dei dati per verificare la bontà di un'ipotesi probabilistica rispetto alla distribuzione empirica delle determinazioni della variabile risposta e/o oggetto di indagine. Uno dei metodi maggiormente utilizzati e riportati anche nel Capitolo 4 di questa tesi, è il QQ-Plot, grafico a dispersione che consente di valutare la differenza tra i quantili teorici di una d.d.p. e quelli di una distribuzione empirica di una variabile risposta.

<sup>4</sup> Valore atteso della v.a. POT (v. pag. 2 [CerEsp])



### 3.4 La stima del DaU in orizzonte annuale per il calcolo del SCR

La Direttiva Solvency II prescrive alle Compagnie che operano all'interno dell'Euro zona di calcolare un SCR per il Premium Risk in funzione di una certa *misura di volatilità* (v. §1.2.2).

Tale misura di volatilità dovrà essere *calibrata* in modo tale da replicare il *percentile* di una distribuzione di perdite. La Direttiva, infatti, identifica anche la misura di rischio scelta per la determinazione del SCR, ossia il *Value at Risk* (di seguito "VaR"), il percentile/livello di confidenza, che dovrà essere pari al 99.5%, e l'orizzonte temporale annuale (v. §1.2.a).

Dal 1 Gennaio 2016, data di entrata in vigore delle Direttiva, le Compagnie dovranno anche aver comunicato quale approccio tra i cinque consentiti (v. §1.1.c) intenderanno seguire nella determinazione di tale requisito di capitale.

Scegliendo il IRM o il PIRM, in accordo con l'articolo 122 della Direttiva e con la linea guida sulla Pre-applicazione dei Modelli Interni [20], le Compagnie potrebbero tuttavia comunicare e giustificare alcune deroghe ai suddetti criteri di calibrazione (Misura di Rischio, livello di confidenza o orizzonte temporale).

I Modelli Interni Parziali presentati in questo Capitolo (v. §3.2) rispettano i tre elementi suggeriti dalla Direttiva per il calcolo del SCR per il *Premium Risk* poiché

- Il *DaU\_1yr* (v. §3.1) è la variabile risposta di un *Modello Interno Parziale* per il *Premium Risk*. Tale variabile è stata calcolata e corretta in modo da tener conto delle perdite possibili per una Compagnia autorizzata all'esercizio del ramo RCA in orizzonte annuale;
- Il GLM (v. §3.2.1.m), Il Modello Misto GLM-GAM (v. §3.2.2.b) ed il GLMM (v. §3.2.2.d) sono modelli *stocastici* (analitici).

Quest'ultima affermazione non consente, tuttavia, di comprendere come determinare un percentile e/o utilizzare un approccio VaR al 99.5-mo percentile, bensì di poter calcolare la *deviazione standard* o il *coefficiente di variazione* (di seguito anche "CoV") della variabile risposta (v. [46], [47] e [66]).

Avendo già illustrato gli approcci con i quali è stata determinata la *soglia dei sinistri punta* (v. §3.3), l'elemento metodologico più rilevante ed innovativo di questa tesi di ricerca è che i **Modelli di Rischio** utilizzabili nel processo di tariffazione, **possono individuare una approssimazione attendibile della distribuzione del DaU\_1yr**.

Mentre l'obiettivo di un Attuariato di Tariffa, è quello di determinare una sintesi del comportamento degli assicurati rispetto al costo (*DaU*) che questi produrranno in media, per il Risk Management che dovrà *costruire, applicare, testare e convalidare* il PIRM (v. §1.5) è fondamentale che i Modelli di Rischio descritti sopra possano produrre un risultato calibrato in modo coerente con quanto richiesto dalla Direttiva.



La relazione tra il valore atteso della variabile risposta  $DaU\_1yr$  e la media è già stata descritta in ognuno dei Modelli di Rischio o PIRM proposti:

- GLM: formula (42);
- Modello Misto GLM-GAM: formula (42) e/o (59);
- GLMM: formula (65).

Essendo modelli *stocastici*, inoltre, per i PIRM presentati in questa tesi sarà possibile determinare la *deviazione standard* esatta della stima della variabile risposta  $DaU\_1yr$  secondo la seguente formula (v. anche formula (41)):

$$(71) \quad \begin{cases} \phi = \nu^{-1} \\ \varphi = \nu \\ Var(Y) = \frac{\mu^2}{\nu} \\ \sigma(Y) = \sqrt{Var(Y)} = \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} = \frac{\mu}{\sqrt{\phi}} \end{cases} \quad \text{per } 0 < y < \infty$$

La formula (71) è valida in ipotesi di distribuzione Gamma o Pareto (v. [57]) del  $DaU\_1yr$ , ossia proprio le d.d.p. selezionate in questo elaborato rispettivamente nel Modello Convoluta del  $DaU\_1yr$  (Attritional) e nei Modelli di  $DaU\_1yr$  (Large). Tale misura classica di volatilità è spesso utilizzata a livello di singolo parametro per la selezione delle variabili esplicative (v. §3.2.1.h) o considerata a livello globale per calcolare un *margin di sicurezza* intorno alla media.

Per il solo GLM, inoltre, è riportata in bibliografia (v. [57]) anche la formula di calcolo dell'*errore quadratico medio*, pari al quadrato dell'*errore di previsione* dello stimatore ( $Y^*$ ):

$$(72) \quad MSE(Y^*) = Var(Y^*) + E\left[\left(Y - E[Y^*]\right)^2\right]$$

Tale misura standard dell'errore compiuto del GLM è estendibile anche al Modello Misto GLM-GAM ed al GLMM, ma non risolve l'intento di poter conoscere la distribuzione (stimata) del  $DaU\_1yr$ .

L'aspetto metodologico innovativo di questa tesi consiste nel mostrare che è possibile ottenere la distribuzione del  $DaU\_1yr$  mediante i valori stimati  $\{y_i, i=1 \dots n\}$  dai tre Modelli Interni Parziali sul costo Attritional e dal GLM con quasi-verosimiglianza per la parte di costo Large.

Per la *legge dei grandi numeri*, tale affermazione sarà tanto più veritiera quanto maggiore sarà il numero delle unità statistiche in analisi.



Nel mercato italiano, tenendo conto anche della CARD, la distribuzione del  $DaU_{1yr}$  ottenuta in tesi segue la formula (v. anche §2.2.3):

$$(73) \left\{ \begin{array}{l} NoCard_{AL} = freq_{NC} \times CM_{NC}^{AL} \\ Card_{AL} = freq_{Card} \times CM_{Card}^{AL} \\ ForfGest = freq_{Card} \times CM_{FG} \\ ForfDeb = freq_{FD} \times CM_{FD} \\ DaU_{1yr}^{LL} = (NoCard_{LL} + Card_{LL}) / Veic \\ DaU_{1yr} = (NoCard_{AL} + Card_{AL} - ForfGest + ForfDeb) + DaU_{1yr}^{LL} = \\ = DaU_{1yr}^{AL} + DaU_{1yr}^{LL} \end{array} \right.$$

Poiché il  $DaU_{1yr}$  è stato costruito a partire da un Database Tariffario (v. §3.1) e nota l'obbligatorietà dei prodotti assicurativi nel perimetro della tesi (v. §2.2.a), la numerosità degli esposti al rischio ("Veic") nel database è spesso statisticamente significativa<sup>5</sup>.

Un'ipotesi rilevante mostrata in formula (73) è l'indipendenza stocastica tra  $DaU_{1yr}$  Attritional e Large. Indipendenza che spesso non è rispettata poiché alcuni profili di rischio, oltre a produrre un costo Attritional elevato e ricorrente per la Compagnia, concorrono a produrre anche un numero maggiore di sinistri punta.

E' possibile raggiungere l'obiettivo, ossia quello di determinare un percentile della distribuzione del  $DaU_{1yr}$ , applicando al *portafoglio atteso* i coefficienti di personalizzazione ottenuti dalle variabili significative in ognuno dei modelli indicati in formula.

Discostandosi da quanto suggerito in altri modelli interni noti nella letteratura nazionale ed internazionale e relativi al *Premium Risk*, tra cui si richiamano [80], [83] e [88], la soluzione presentata in tesi, quindi, pur basata su un approccio collettivo di teoria del rischio (nell'ipotesi che il  $DaU_{1yr}$  segua un processo di Poisson Composto), si fonda su una stima puntuale di tale costo, diversificata tra *Nuovi Affari* e *Potenziali Rinnovi*, in coerenza con le simulazioni svolte dall'Attuariato sui futuri profili di rischio sottoscritti dalla Compagnia.

Il SCR calcolato sul portafoglio atteso, sarà quindi confrontato con quello ottenuto applicando i PIRM al portafoglio storico. La variazione prodotta dal mix di portafoglio atteso determinerà quindi la componente di volatilità propria del rischio di tariffazione.

---

<sup>5</sup> Una misura del tutto illustrativa sebbene seguita dalla gran parte delle Compagnie che utilizzano il GLM come Modello di Rischio è di 100,000 veicoli anno (e non meno di 25,000 veicoli anno per anno di calendario).

### 3.5 Novità, limiti e aree di sviluppo dei PIRM

Questa tesi vuole evidenziare l'opportunità che hanno le Compagnie di poter determinare il *Premium Risk* osservando l'output di un Modello di Rischio, in molti casi già adoperato dall'Attuariato per ragioni tariffarie (v. §2.2.1.i).

La soluzione proposta è particolarmente efficace per le garanzie “personal line” e/o per tutti quei prodotti assicurativi con tariffa determinata o determinabile mediante l'utilizzo di tecniche di regressione.

Gli elementi di *novità* ed i *punti di forza* dei PIRM presentati in tesi sono:

- *Visione “integrata”* tra le diverse funzioni aziendali (v. §1.5) nella determinazione della variabile risposta (*DaU\_1yr*) alla base del calcolo del requisito di capitale del *Premium Risk*:
  - Calcolata dal Risk Management secondo una visione ultimate-1 year delle riserve, seguendo tuttavia le indicazioni di altri servizi aziendali (v. §3.1);
  - Coerente con le logiche, i caricamenti e le spese allocate a fabbisogno dall'Attuariato;
  - Definita sullo stesso perimetro descritto nella definizione del Premium Risk: “(...) il premium risk, rappresenta il rischio di tariffazione derivante dai contratti da sottoscrivere (inclusi i rinnovi)”.
- *Modelli di Rischio*: il *punto di forza* di maggiore interesse è quello di poter utilizzare i Modelli di Rischio noti ed adoperati dall'Attuariato. Il “costo” di implementazione, di un PIRM come questo non dovrebbe essere particolarmente elevato. Potrebbe, inoltre, essere utilizzato come *analisi di sensitività* dell'eventuale IRM già in fieri;
- Utilizzo del *GLM con quasi-verosimiglianza* per la stima del *DaU\_1yr* dei sinistri oltre la norma (o punta), tra le maggiori fonti di influenza della “coda” della variabile risposta e, quindi, sulla stima del SCR;
- Utilizzo dei Modelli Additivi Generalizzati (GAM) per determinare eventuali trend non lineari delle variabili ed avere una stima semi-parametrica della distribuzione del *DaU\_1yr*;
- Utilizzo dei Modelli Misti Lineari Generalizzati (GLMM) per determinare la distribuzione del *DaU\_1yr* eliminando l'ipotesi forte dell'indipendenza tra costi per sinistro e tra costi e numero di sinistri.



Tra i *limiti* di questo approccio, oltre il perimetro già indicato sopra, si evidenziano:

- *Fitting*: impossibilità di stimare il  $DaU_{1yr}$  secondo procedure di *fitting* diverse dalla massimizzazione della funzione di verosimiglianza, dovuta alla scelta dei modelli di regressioni indicati in questo Capitolo. Come dimostrato anche nel paper [85], ogni procedura mostra dei limiti metodologici ed applicativi, a volte anche nella stima dei momenti fondamentali della variabile risposta.
- *Ipotesi Probabilistiche*: seppur le distribuzioni appartenenti alla famiglia esponenziale lineare (v. §3.2.1.d) siano molte e molto utilizzate anche in ambito assicurativo, potrebbe essere interessante fare dei test di adattamento di altre distribuzioni classiche o di misture di d.d.p.<sup>6</sup>;
- *Numerosità dei dati*: come descritto nel paragrafo precedente, la numerosità delle unità statistiche nel Database Tariffario è rilevante nel definire un'approssimazione validabile della distribuzione stimata del  $DaU_{1yr}$ ;
- *Selezione della soglia*: tema rilevante in letteratura, la selezione della soglia assume una forte importanza nei risultati ottenuti da ogni PIRM interessato ad analizzare la coda della distribuzione stimata del  $DaU_{1yr}$ ;
- *Tempi operativi*: nel Caso di studio descritto nel Capitolo 4, il GLM ha prodotto gli output circa 5 volte più velocemente del GAM e 4 volte più del GLMM<sup>7</sup>.

Possibili *aree di miglioramento* e di questo approccio sono

- Identificare l'effetto di mitigazione degli eventuali trattati/contratti di riassicurazione sul  $DaU_{1yr}$  (v. §3.2.a);
- Individuare ulteriori tecniche di allocazione dei coefficienti correttivi sul DaU per ottenere il  $DaU_{1yr}$  (ad esempio l'*Individual Claim Reserve* [64])
- Confrontare metodologie per aggregare il requisito di capitale così calcolato tra
  - Diversi settori tariffari all'interno del ramo RCA;
  - Differenti LoB o sotto-LoB;
  - I rischi o i sotto-rischi definiti all'interno della Direttiva Solvency II.
- Valutare l'integrazione di tale approccio nei Modelli Interni che rientrano nella famiglia delle *Dinamic Financial Analyses* (di seguito "DFA").

---

<sup>6</sup> Solo il GLM, grazie alla procedura di fitting che massimizza la *quasi-(log)verosimiglianza* è in grado di utilizzare alcune altre distribuzioni note in letteratura (v. §3.2.1.f).

<sup>7</sup> Computer con diverse specifiche tecniche e migliorie informatiche nella gestione del Database potrebbero migliorare le performance, ma sembra esserci comunque una discreta differenza tra i tre modelli di regressione.





## Capitolo 4

### Un caso di studio

L'ultimo capitolo è dedicato allo studio di un caso utile a mostrare le potenzialità applicative dell'approccio metodologico descritto nel capitolo precedente.

Dopo aver introdotto il perimetro dei dati utilizzati, si procederà a chiarire le ipotesi con le quali è stato determinato il Danno Aggregato a costo ultimo in orizzonte temporale annuale (*DaU\_1yr*).

Attraverso un'analisi esplorativa dei dati, poi, verranno mostrate le peculiarità dei rischi oggetto di analisi ed i test necessari per sostenere la bontà delle *ipotesi probabilistiche* introdotte nei tre Modelli Interni Parziali (v.§3.2).

Definita una soglia (v.§3.3) per individuare i sinistri punta, saranno infine presentati e confrontati i risultati tra i diversi PIRM, sia a livello di valore atteso della variabile risposta, sia che nel requisito di capitale del *Premium Risk*.

Al fine di mostrare i vantaggi legati all'utilizzo del modello interno (parziale), i suddetti requisiti di capitale (SCR) saranno comparati anche con lo stesso requisito calcolato secondo quanto previsto dalla SF (v. §1.2.2) e dalla SF con USP (v. §1.3).

#### 4.1 Descrizione del caso di studio

In accordo con quanto descritto nel Capitolo 2, il Database Tariffario utilizzato nel caso di studio concerne dei potenziali profili di rischio di una media Compagnia italiana autorizzata all'esercizio del ramo RCA da almeno *15 anni* (NLoB, v.§1.3.b).

Tale portafoglio di rischi, creato tenendo conto anche delle analisi univariate del mercato assicurativo (fonte ANIA), è limitato al solo settore delle *autovetture ad uso privato* (Settore I) e contiene le polizze vive almeno un giorno di assicurati negli anni 2009-2011.

La competenza dei profili di rischio di questo caso di studio ricade quindi nel periodo successivo alla pubblicazione del D.P.R. 28 giugno 2006, n. 254, ossia dopo l'introduzione della *Convenzione Assicuratori sul Risarcimento Diretto*.

I PIRM, visto anche quanto schematizzato ai paragrafi 3.2.1.m / 3.2.2.b / 3.2.2.d, saranno costruiti in modo coerente con le *Modifiche allo schema di tariffazione dopo l'indennizzo diretto* (v. §2.2.3).

#### 4.1.1 Dal Danno Aggregato al DaU\_1yr

La variabile risposta dei PIRM è il *DaU\_1yr*.

Per ottenere tale grandezza, a partire dal Database Tariffario del Danno Aggregato osservato, sono stati allocati i seguenti caricamenti (v. §3.1):

	Costo Denunciato
<b>2009</b>	0.9994
<b>2010</b>	1.0183
<b>2011</b>	1.0997

	Fattore Correttivo
<b>Contributo al FGVS</b>	1.024
<b>Spese Amm. e Provvigioni</b>	1.139
<b>Rendimenti sulle riserve Tecniche</b>	0.970
<b>Caricamento per scontistica</b>	1.096
<b>Utile</b>	1.020

**Figura 18** – Caricamenti per la determinazione del *DaU\_1yr*

Mentre i caricamenti del costo sono stati allocati sulle polizze con almeno un sinistro negli anni di avvenimento indicati nella prima tabella, i restanti fattori correttivi (*Spese&Comm*, v. §2.2.1.b) saranno caricati dopo aver stimato il *DaU\_1yr* sulla base dati simulata.

Per *livello base* si definisce l'intercetta dei tre modelli di regressione, ossia quel *DaU\_1yr* stimato che dovrebbero produrre i rischi per i quali le variabili esplicative mostrino un regressore uguale a 1<sup>8</sup>.

Sebbene i primi fattori influiranno sui trend delle variabili esplicative e sulla forma della distribuzione del *DaU\_1yr*, gli ultimi influiranno solo sul valore atteso di tale variabile esplicative. In termini geometrici, ciò equivale ad una traslazione sull'asse delle ascisse.

Uno dei *possibili sviluppi* indicati al §3.5. è quello di indagare su eventuali tecniche alternative per l'allocazione di tali fattori correttivi sul database. Tuttavia, questo modo di procedere, come mostrato anche nel § 2.2.1.1, è coerente con i passi operativi seguiti dall'Attuariato nel processo di tariffazione.

<sup>8</sup> Livello base in una struttura moltiplicativa individuata dalla funzione di collegamento link (v. 3.2.1.e)

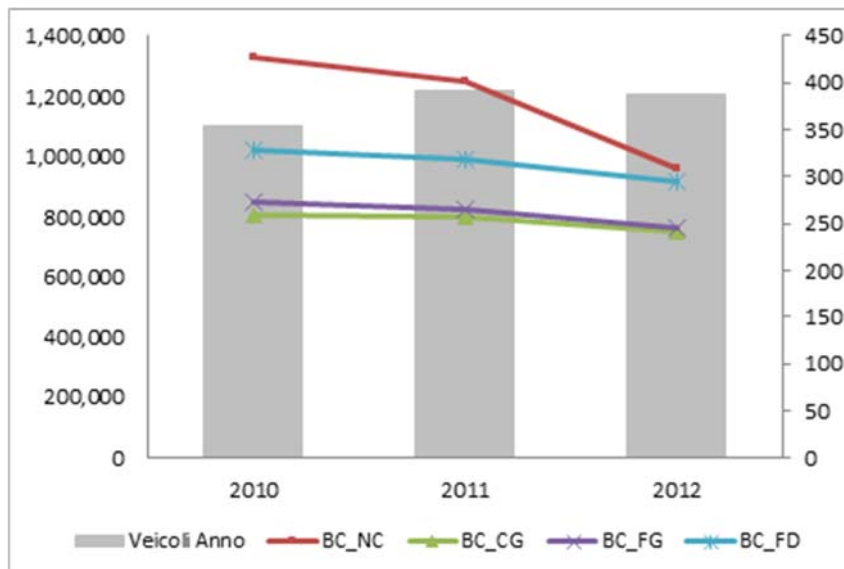


#### 4.1.2 Analisi Esplorativa dei dati

Prima di selezionare e quindi di utilizzare un modello statistico, un valutatore analizzerà le informazioni a sua disposizione per

- Comprendere meglio il fenomeno;
- Valutare che le ipotesi di un modello siano verificate;
- Ridurre il Rischio di Modello.

Poiché il fenomeno oggetto di analisi è il *DaU\_1yr*, di seguito è mostrata la distribuzione empirica di tale variabile risposta per anno di competenza e per Gestione CARD:



**Figura 19** – Buring Cost (BC) o *DaU\_1yr* per Anno e Gestione CARD

La componente di costo (pesata per gli esposti al rischio) relativa al Forfait Gestionario (*BC\_CG* nel grafico) è stata cambiata di segno per essere comparabile con le altre gestioni (v. §2.2.3.d) e per poter essere modellizzata secondo le ipotesi probabilistiche descritte nel Capitolo 3<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> La d.d.p. selezionata per la valutazione del costo medio e del *DaU\_1yr* è la Gamma, definita su un supporto positivo.

Dai trend indicati in Figura 19, tutte le componenti di costo sono in flessione. Occorre notare, inoltre, che la componente di costo Card (*BC\_Card* nel grafico) gestita da questa ipotetica Compagnia è lievemente inferiore al recupero del Forfait (Gestionario).

Da quanto descritto nel §3.4, i tre modelli interni parziali utilizzano i dati osservati del *DaU\_1yr* (di seguito indicati anche come "*Db storico*") per poi consentire ad un valutatore di ottenere una stima di tale variabile aleatoria su un portafoglio futuro di assicurati (di seguito indicati anche come "*Db prospettico*").

Tale portafoglio futuro è calcolato tenendo conto dell'esperienza dell'Attuariato sui volumi di rinnovi e di nuova produzione, nonché della logiche commerciali e di marketing relative alla sottoscrizione dei rischi nell'annualità immediatamente successiva alla data di valutazione, ossia in coerenza con l'orizzonte temporale annuale richiesto dalla Direttiva.

Il Risk Management di un'ipotetica Compagnia descritta in questo caso di studio dovrà pertanto osservare

- Il mix di business del *Db storico* modellizzato attraverso i tre PIRM;
- L'eventuale distanza tra il mix indicato nel punto precedente ed i profili di rischio attesi riportati nel *Db prospettico*.

Focalizzando le analisi sul *Db storico*, coerentemente con l'oggetto di questo paragrafo, sono riportati in Appendice i grafici delle "Analisi Univariate", ossia delle serie storiche del *DaU\_1yr* per ognuna delle variabili esplicative selezionabili nei tre Modelli di Rischio oggetto di questa tesi.

Di seguito, tuttavia, si potranno osservare i grafici dei valori osservati del *DaU\_1yr* di tre variabili che sintetizzano in modo esplicito le eventuali differenze di mix di business di un prodotto RCA:

- Et  del proprietario (ossia dell'assicurato secondo il mercato italiano);
- Alimentazione – Cavalli Fiscali;
- Area Geografica<sup>10</sup>.

Tali variabili, inoltre, sono state fatte interagire con la variabile della competenza ("Anno") al fine di poter identificare eventuali differenze di rischiosit  negli anni pi  lontani dalla data di valutazione.

In generale, osservando i tre grafici riportati di seguito (v. Figura 20), il portafoglio storico sembra mostrare consistenza nel tempo sia rispetto al numero degli esposti al rischio sia per i valori empirici di *DaU\_1yr* tra le diverse modalit  di ogni variabili esplicative.

---

<sup>10</sup> In particolare per questa variabile sar  riportato il cluster geografico ottenuto a partire dai valori osservati di *DaU\_1yr* per provincia differenziata tra Capoluogo e Non-Capoluogo.

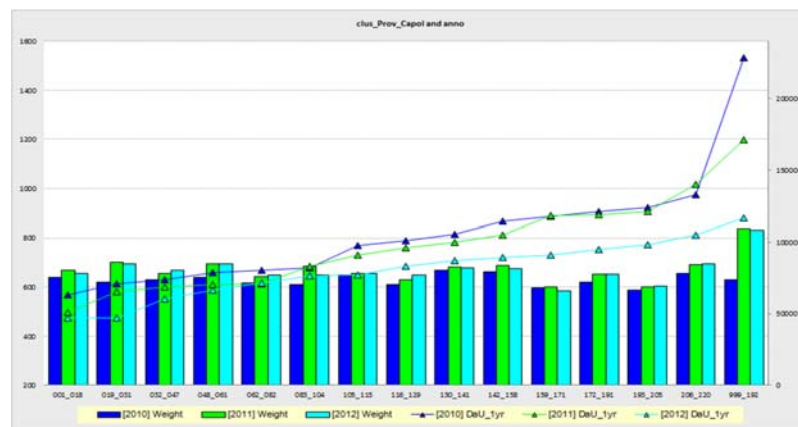
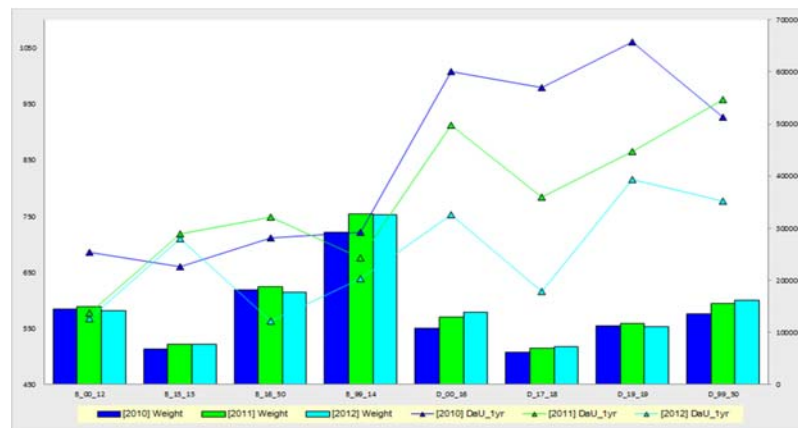
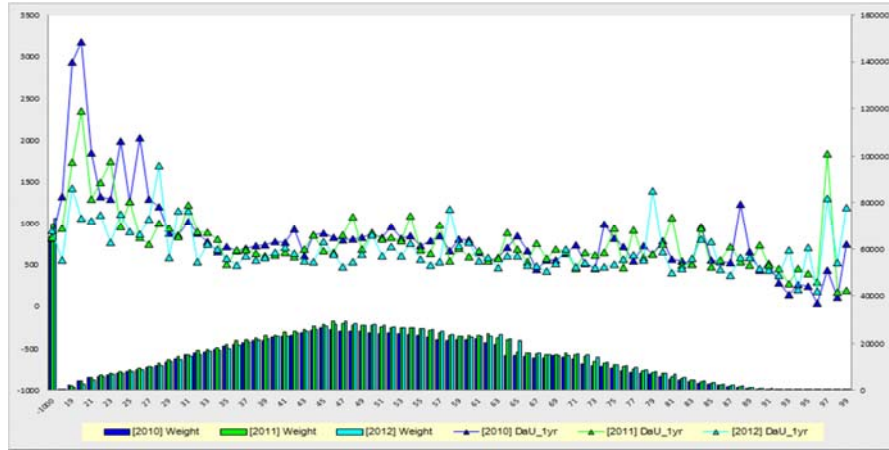
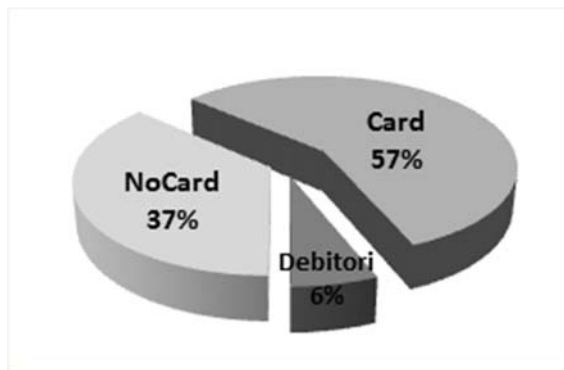


Figura 20 – Distribuzione del mix di business del Db storico

Per stimare i momenti e la distribuzione del  $DaU_{1yr}$  sono stati creati diversi modelli di frequenza e costo medio.

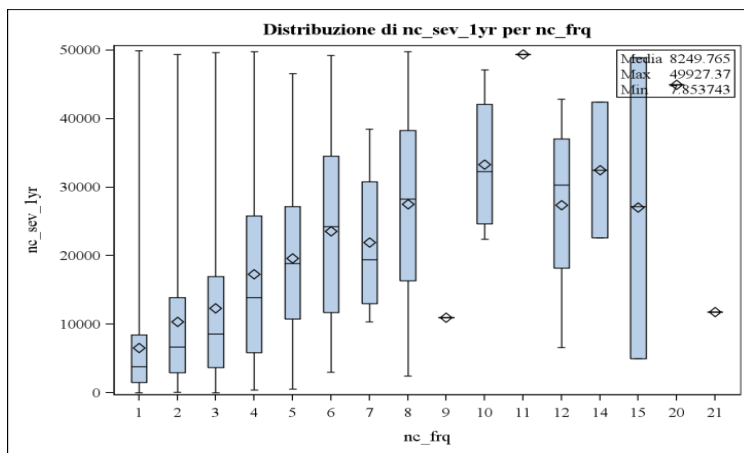
A partire dal numero dei sinistri ( $M$ ) per Gestione CARD, numeratore della frequenza e base tecnica della tariffazione, è mostrata la distribuzione percentuale del volume delle polizze che hanno causato/subito almeno una partita di danno (di seguito “sinistrati”):



**Figura 21** – Aerogramma del numero dei sinistri per Gestione CARD

La somma dei sinistri causati (NoCard e Debitori) è inferiore a quella dei sinistri Card di circa 14 punti percentuali (di seguito “p.p.”). Il numero dei sinistri della gestione Forfait Gestionaria non è rappresentato, poiché coincide con quello dei sinistri Card. Tale uguaglianza è stata imposta per costruzione ed è coerente con la normativa e le eventuali riconciliazioni della base dati con la Modulistica di Vigilanza.

Poiché i sinistri NoCard sono usualmente a coda lunga e mostrano un costo medio particolarmente elevato rispetto ai sinistri in convenzione, è illustrato un box-plot del costo medio in orizzonte temporale annuale rispetto alla polizze sinistrate:



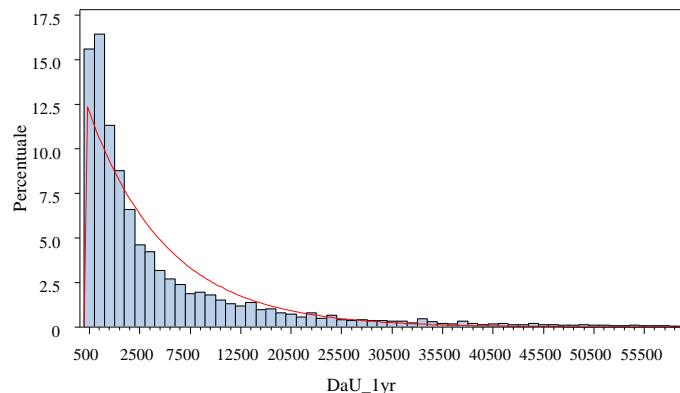
**Figura 22** – Box-Plot del Costo Medio in orizzonte annuale per numero dei sinistri NoCard

Il box-plot mostra un'altra caratteristica rilevante tipica delle polizze sottoscritte negli anni 2009-2010: la presenza di *plurisinistrati*. Tuttavia, aggiungendo le numerosità di tali assicurati, solo il 6% dei rischi sinistrati ha avuto più di un sinistro.

Un altro obiettivo dell'analisi esplorativa dei dati è quello di verificare la bontà delle ipotesi selezionate dal valutatore nell'utilizzo dei PIRM per la stima del *DaU\_1yr*.

In generale, sarebbe logico supporre che tanto più le ipotesi probabilistiche e strutturali saranno sostenibili nella base dati, tanto minore sarà il *Rischio di Modello*, definito come il *rischio che il modello adoperato per un approccio stocastico non sia adeguato a rappresentare la complessità del mondo reale*.

Per via della convenzione CARD, tuttavia, lo 0.6% delle polizze del caso di studio ha prodotto esclusivamente un *costo negativo* per la Compagnia, ossia un *profitto*. In questo caso di studio tali polizze sono state eliminate dalla base dati, poiché il peso sul totale *DaU\_1yr* è pressoché nullo (circa pari allo 0.001%). Qualora si assistesse a incidenze significative di assicurati con premio negativo, si potrebbe pensare ad esempio di traslare tutti gli importi di Forfait Gestionario di un importo pari al forfait più elevato in valore assoluto e poi sottrarlo nuovamente al momento della convoluzione per la determinazione del *DaU\_1yr* (v. formula (73)). Sono mostrate di seguito le *statistiche di base* e l'*istogramma della distribuzione empirica* della variabile risposta costruita come saldo economico delle suddette gestioni CARD:



<b>Num. Record</b>	6,003,860	<b>Esposti al Rischio</b>	3,525,452
<b>N</b>	271,602	<b>Errore Std Media</b>	32
<b>Media</b>	7,785	<b>Dev Std</b>	10,112
<b>CoV (%)</b>	130%	<b>Varianza</b>	16,386,113
<b>Asimmetria</b>	2	<b>Curtosi</b>	6

**Figura 23** – Distribuzione Empirica e statistiche base del *DaU\_1yr*

Osservando il grafico e la tabella, si rileva che l'asimmetria di tale distribuzione empirica è positiva. Tale peculiarità, discussa anche nel capitolo precedente, è comune ai costi assicurativi del ramo RCA. Nel sottoinsieme dei rischi sinistrati (4.0%), la gran parte dei sinistri ha costi medi di basso e medio importo.

Il grafico evidenzia, tuttavia, anche la natura *heavy tail* di questa tipologia di business assicurativo, mostrata (al fine di migliorarne la visualizzazione in Figura 23) solo fino ad un massimo di 60,000€. Il costo massimo rilevato nel database è invece pari a 9.8 milioni di euro (o "mln/€").

Un'altra grandezza di sintesi rilevante per la valutazione del *DaU\_1yr* è il *coefficiente di variabilità* (di seguito anche "CoV"), ossia il rapporto tra la deviazione standard e la media del *DaU\_1yr*. In particolare, il CoV nel caso di studio è pari al 130%.

Sull'istogramma di Figura 23 è stato sovrapposta la funzione di densità della distribuzione Gamma che si adatta in modo migliore ai dati osservati:

Parametri		Stima
Soglia	Theta	6.2
Scale	Sigma	7,779
Forma	Alfa	1.0
Media		<b>7,785</b>
Dev. Std		10,020

**Figura 24** – Parametri della distribuzione Gamma teorica

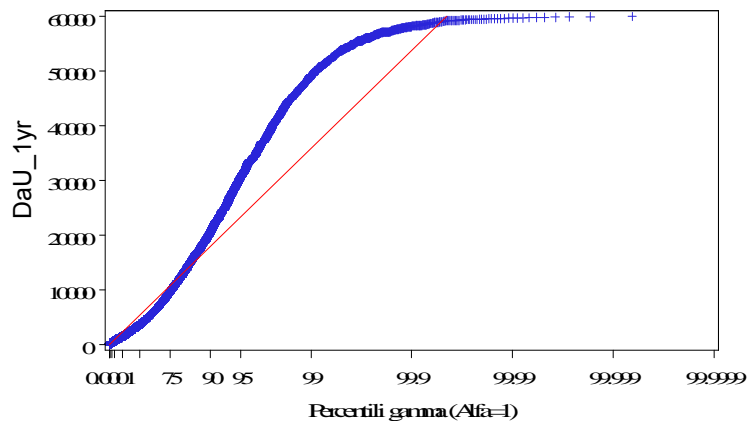
I parametri sono stati determinati in modo automatico da una procedura iterativa di adattamento descritta in [76], a meno del parametro  $\alpha$  che è stato definito dal valutatore in modo iterativo.

In particolare, il valore di  $\alpha$  è stato scelto dopo aver verificato che il risultato dei seguenti test statistici fosse il migliore nei vari tentativi<sup>11</sup>:

- Test statistico "T di Student";
- Test del "Segno";
- Test del "Rango con segno";
- Analisi del grafico del QQ-Plot.

<sup>11</sup> Progressione aritmetica di passo 0.1 negli estremi da 1 fino a 3 (compresi).

Provato che il risultato dei primi tre test per  $\alpha$  uguale ad uno è nettamente al di sotto (minore di 0.0001) del p-value del test statistico (fissato in modo standard al 5%), il *QQ-Plot*, ossia il grafico che mostra i percentili teorici della distribuzione Gamma con quelli empirici della distribuzione osservata del *DaU\_1yr*, ha mostrato il miglior adattamento di tale distribuzione empirica ai dati osservati:



**Figura 25** – QQ-Plot della distribuzione empirica del *DaU\_1yr* VS la d.d.p. Gamma teorica

Analizzando in modo critico tale grafico, la distribuzione Gamma (indicata dalla linea continua):

- *Sovrastima* lievemente la distribuzione empirica all'interno dell'intervallo interquartile classico (tra il 25-mo ed il 75-mo percentile);
- *Sottostima* in modo crescente la coda della distribuzione.

Mentre il primo limite sarebbe maggiormente rilevante se il caso di studio avesse l'obiettivo di determinare il premio equo del *costo storico denunciato* (v. §2.2.1.1), in quanto strettamente connesso con il livello medio della variabile risposta, il secondo limite assume un significato rilevante nel calcolo del SCR per il *Premium Risk*.

A partire dal 94-mo percentile indicato nel QQ-Plot, infatti, la distanza tra il percentile teorico della distribuzione Gamma di parametri indicati in Figura 24 e quelli osservati (*DaU\_1yr*) nel caso di studio appare crescente.

Questa evidenza conferma la necessità di modellizzare i sinistri punta (v. §3.2) con modelli che tengano conto di ipotesi probabilistiche diverse dalla d.d.p. Gamma. Come indicato al Capitolo 3, in tesi i modelli scelti a tal fine sono i *GLM con quasi verosimiglianza* (v. §3.2.1.f).



## 4.2 La soglia selezionata

Dall'analisi esplorativa dei dati, in particolare da quanto mostrato in Figura 25, è emersa l'esigenza di dover valutare ulteriori ipotesi probabilistiche per valori del *DaU\_1yr* osservati maggiori del 94-mo percentile.

Il 94-mo percentile è, tuttavia, una *soglia* indicata esclusivamente dall'osservazione di un grafico (il *QQ-Plot*) senza ricorrere ad alcuna metodologia quantitativa.

L'obiettivo di questo paragrafo è, pertanto, quello di mostrare le evidenze numeriche ottenute dall'applicazione di alcune metodologie classiche per la determinazione di una soglia.

Tali metodologie sono già state descritte al §3.3 insieme ai vantaggi ed agli svantaggi teorici derivanti dal loro utilizzo.

Poiché il costo rilevato nel database di questo caso di studio è differenziato per Gestione CARD, sono state definite due diverse soglie:

- Soglia *NoCard*;
- Soglia *Card*.

La natura dei sinistri ed il relativo *DaU\_1yr* tra le due gestioni indicate (v. §2.2.2.b) sono talmente differenti da ritenersi necessaria una valutazione separata della soglia. A prova di questo, analizzando ad esempio il costo medio del *DaU\_1yr* rilevato nel database per la gestione NoCard (14.5k/€) è 5.5 volte maggiore di quello della gestione Card (2.6k/€).

In un portafoglio di rischi reale, la suddetta diversificazione sarebbe stata ampliata anche con le due gestioni escluse: Forfait Gestionaria e Debitrice.

Tale affermazione, in particolare, riguarda le partite di danno CTT che, come definito in formula (32) ed a differenza dei sinistri CID, non presentano alcun limite massimo o importo standard di liquidazione e/o riservazione.

Nel caso di studio, tuttavia, è stata *esclusa* la presenza di partite di danno CTT. Questa limitazione, però, non ha usualmente un forte impatto a causa della bassa incidenza di sinistri CTT nei portafogli assicurativi (circa il 10% del totale dei sinistri in convenzione, v. anche § 2.2.3.d).

Di seguito è riportato lo schema riassuntivo dei risultati ottenuti con i tre approcci standard:

	NoCard (€)	Card (€)
<b>Cebicev (<math>\lambda=4</math>)</b>	333,245	55,700
<b>Quantile (93.9-mo)</b>	335,843	54,073
<b>EVT (Pareto)</b>	300,000 - 450,000	37,000-87,000
<b>Selezionata</b>	<b>300,000</b>	<b>55,000</b>

*Figura 26 – Le soglie indicati dai tre approcci standard (v. §3.3)*

Tenendo conto della prima evidenza empirica mostrata dal QQ-Plot e nota la media e la deviazione standard del  $DaU_{1yr}$ , il metodo della disuguaglianza di Bienaymé-Cebicev (v. §3.3.1) con parametro  $\lambda$  uguale a 4, identifica una soglia eguale a 333.2k/€ per i sinistri Card e 55.7k/€ per i sinistri Card:

- Almeno il 93% dei valori sono compresi tra  $\mu-4\sigma$  e  $\mu+4\sigma$

Per far fronte al limite tecnico di questo approccio, ossia quello della *totale discrezionalità* del parametro  $\lambda$ , sono stati testati anche tutti i valori discreti compresi nel seguente insieme {3, 4, ..., 9}.

L'approccio del percentile, tuttavia, conferma il risultato indicato in Figura 26 del primo approccio che è piuttosto simile anche alla rilevazione empirica del 94-mo percentile indicata al paragrafo precedente.

Come indicato nel §3.3.2, anche in questo caso di studio, il quantile selezionato è quello del *percentile con un decimale*.

Osservando la variazione percentuale tra il *Costo Minimo* e/o il *Costo Massimo* ed il *Costo Medio* per ogni Gestione, si rileva che il 93.9-mo percentile è quello oltre il quale la distribuzione empirica del  $DaU_{1yr}$  appare maggiormente affetta da costi elevati e poco numerosi (sinistri punta).

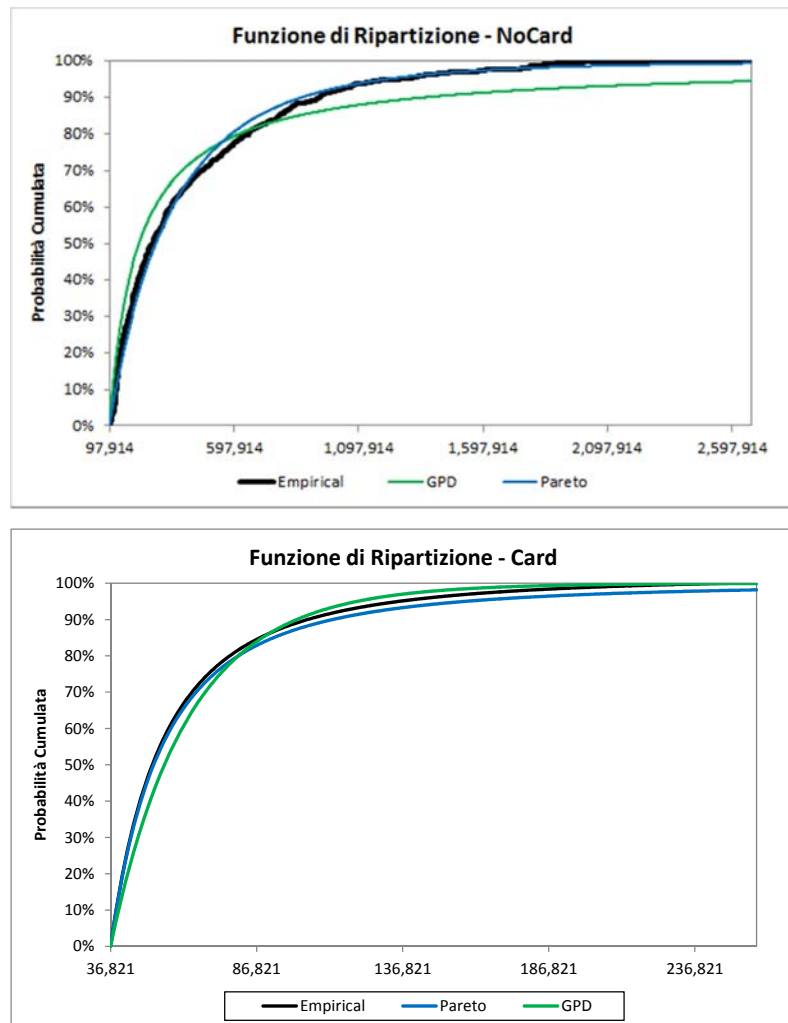
Per la gestione NoCard, ad esempio, la media della differenza percentuale tra Costo Minimo e Costo Medio passa dal -1.1% fino ai percentili inferiori al suddetto percentile ad un -13.7% oltre la soglia. Per la gestione Card i valori di questo rapporto sono rispettivamente pari a -0.8% e 12.5%. Il rapporto tra Costo Massimo e Costo Medio per le due Gestioni è ancora più volatile oltre il valore del 93.9-mo percentile, raggiungendo il 27% per la gestione NoCard.

I primi due metodi, quindi, mostrano una differenza quasi irrilevante nella determinazione della soglia e sul quantile della distribuzione.

L'approccio basato sulla Teoria degli Eventi Estremi (EVT) illustrato al §3.3.3 ha confermato il valore della soglia indicata dagli altri due metodi.

In particolare, grazie all'*ipotesi probabilistica* su cui si fonda il POT ed in modo coerente con quanto mostrato nel paragrafo indicato sopra, sono stati determinati i seguenti grafici:

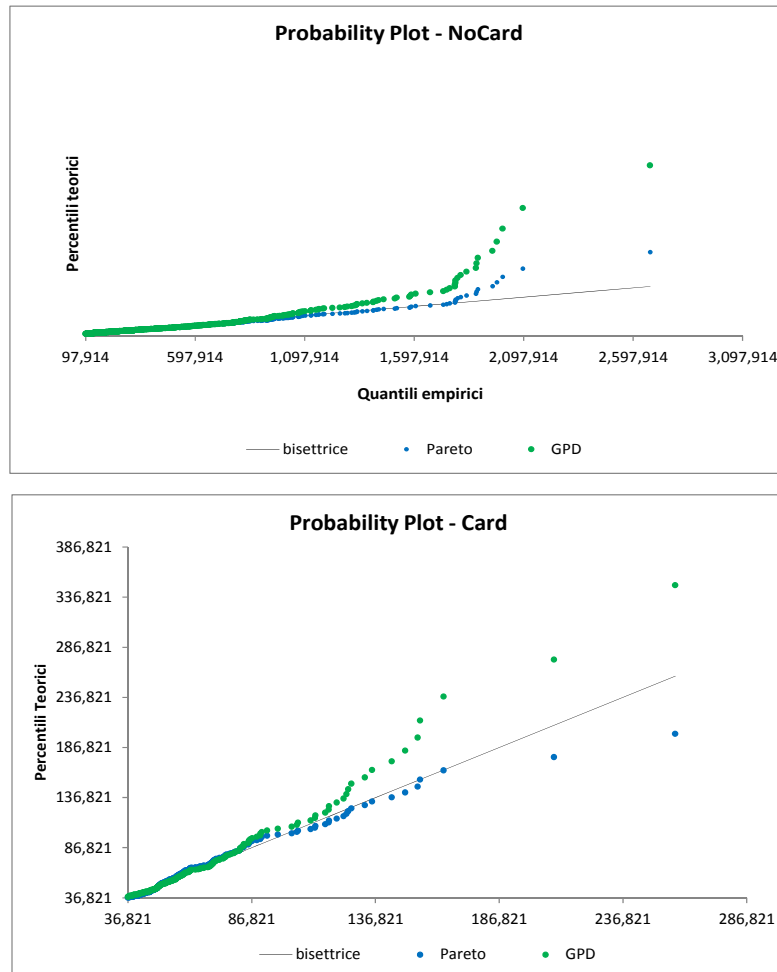
- Funzione di ripartizione empirica del *DaU\_1yr* VS funzioni di ripartizione teoriche (GPD o Pareto):



**Figura 27** –Confronto tra funzioni di ripartizione dei valori oltre la soglia (POT)

La distribuzione che si adatta in modo migliore alla distribuzione empirica della variabile risposta è quella Pareto (linea azzurra).

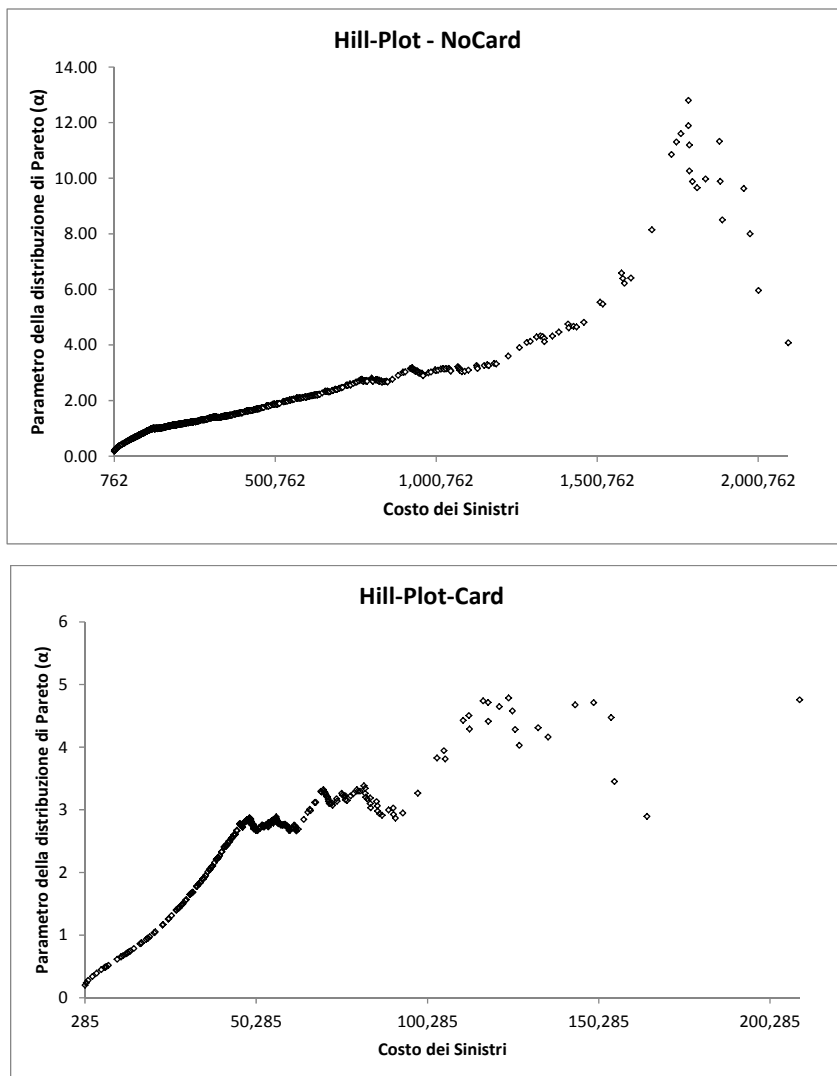
- QQ-Plot in ipotesi GPD o Pareto:



**Figura 28** – QQ-Plot per la scelta della d.d.p. per il DaU\_1yr oltre la soglia

Seppur fino agli 86k/€ le d.d.p. Pareto e GPD sembrano replicare i percentili della distribuzione empirica in modo simile, la Pareto si adatta in modo migliore per gli importi più elevati e, quindi, più complessi da studiare.

- Hill-Plot della stabilità del Parametro di forma  $\xi$ :



**Figura 29** – Hill-Plot della distribuzione Pareto

Per ambedue le gestioni, i grafici mostrano come le soglie selezionate in Figura 26 siano inferiori ai livelli del  $Dau_{1yr}$  oltre ai quali la Pareto non sarebbe più selezionabile come ipotesi probabilistica.



Verificata, quindi, la bontà della soglia selezionata ed aver confrontato i tre approcci presentati nel terzo capitolo, è riportata di seguito una tabella di sintesi del perimetro dei sinistri oltre tale soglia:

	Sinistri Punta	%DaU_1yr
<b>NoCard</b>	519	44.2%
<b>Card</b>	540	21.9%
<b>Totale</b>	<b>1,059</b>	<b>29.8%</b>

*Figura 30 – Sintesi del numero e del costo dei sinistri Large*

La Figura 30 evidenzia come il 6% del totale numero dei sinistri di questo portafoglio produca un costo pari circa al 30% del totale *Dau\_1yr*.

Per la gestione NoCard, affetta maggiormente dal fenomeno dei sinistri extra-norma, la percentuale del costo oltre il 93.9-mo percentile è persino pari al 44% del totale costo in orizzonte temporale annuale.

In conclusione, la base dati utilizzata dal Risk Management per determinare una stima del SCR per il *Premium Risk* è stata costruita *separando tutti i sinistri di importo fino alla soglia (Attritional) da quelli Large*, diversamente da quanto mostrato nei passi operativi di un processo di tariffazione (v. §2.2.1.h).

### 4.3 La scelta tra i modelli

In questo paragrafo saranno mostrate le evidenze statistiche con le quali sono stati selezionati i tre Modelli Interni Parziali (PIRM), tenuto conto di quanto descritto nel paragrafo chiamato “*Bontà di adattamento*” (v. §3.2.1.h).

Il processo di modellizzazione per ognuno dei PIRM presentati in questa tesi ed illustrato in modo dettagliato nei paragrafi 3.2.1.m / 3.2.2.b / 3.2.2.d, vede nell’ordine la determinazione dei seguenti modelli:

- I modelli di frequenza e costo medio (Attritional);
- Il modello di costo per i sinistri punta.

#### 4.3.1 I modelli di frequenza e costo medio

Prima di illustrare le statistiche ottenute nella modellizzazione del numero e del costo dei sinistri di importo inferiore alla soglia (v. §4.2) con i tre diversi Modelli Interni Parziali, si riporta di seguito una tabella riassuntiva dei risultati ottenuti per il DaU\_1yr<sup>AL</sup>:

	Osservato	GLM	Modello Misto	GLMM
<b>Costo NoCard</b>	1,289,079	0.61%	0.05%	-0.03%
<b>Costo Card</b>	841,482	0.36%	0.15%	0.32%
<b>Forfait Gest.</b>	895,194	0.04%	0.03%	0.02%
<b>Forfait Deb.</b>	1,074,233	0.27%	0.13%	0.05%
<b>DaU_1yr<sup>AL</sup> (k/€)</b>	<b>2,309,600</b>	<b>0.58%</b>	<b>0.13%</b>	<b>0.11%</b>
<b>Sinistri NoCard</b>	148,255	0.00%	3.00%	0.00%
<b>Sinistri Card</b>	232,000	0.00%	6.60%	0.00%
<b>Sinistri Deb.</b>	24,846	0.00%	trend lineare	0.00%
<b>Numero Sinistri (N)</b>	<b>405,101</b>	<b>0.00%</b>	<b>4.90%</b>	<b>0.00%</b>

*Figura 31 – Risultati dei PIRM per i sinistri Attritional*

Osservando il costo dei sinistri per ogni Gestione, il GLMM risulta essere il modello con maggiore potere predittivo, ad esclusione della sola componente di Costo Card che, invece, è stimata in modo migliore dal Modello Misto. Il GLM, pur producendo la peggior stima in termini di costo, è il migliore, insieme al GLMM, nel descrivere i modelli del numero dei sinistri

Per “*trend lineare*” si intende l’impossibilità di trovare una *cubic spline* adatta ad approssimare in modo non lineare anche una sola delle variabili esplicative selezionate nei modelli. In questo caso, il Modello Misto presenta dei risultati analoghi a quelli del GLM.

Le variabili esplicative che, invece, hanno prodotto un miglioramento nella bontà di adattamento della variabile risposta nel Modello Misto (grazie all’utilizzo di una *spline*) sono l’anzianità di polizza del solo contratto assicurativo RCA (“Anz\_Cliente” o “ANZPOL” nei grafici) e l’età del veicolo (“Eta\_Veic”).

Coerentemente con l’architettura dei modelli indicata in formula (73), nei prossimi sotto paragrafi saranno descritte le statistiche ottenute dall’utilizzo dei tre Modelli Interni Parziali, con particolare riferimento a quelli relativi al *Dau\_1yr* Attritional. Obiettivo di tali statistiche è di osservare e confrontare la bontà di adattamento dei tre PIRM presentati in questa tesi, senza entrare nel merito delle selezioni che, invece, saranno presentate in Appendice.

#### 4.3.1.a PIRM – Numero dei Sinistri NoCard

Il modello di Frequenza NoCard:

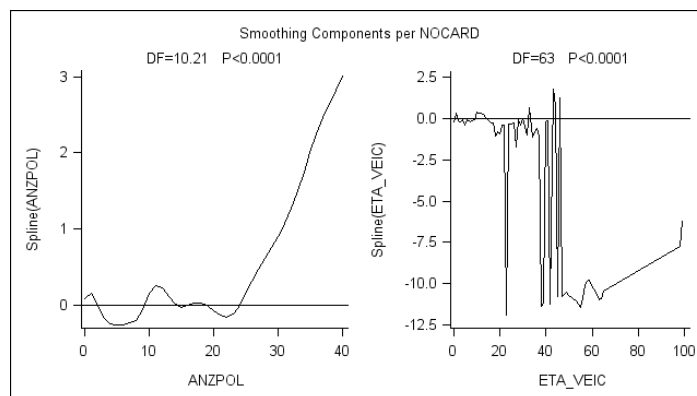
- *Variabile Risposta*: Numero dei sinistri NoCard;
- *Variabile Peso*: Esposti al rischio.

	GLM	Modello Misto	GLMM
<b>Deviance</b>	6,015	36.01%	n.d.
<b>Scaled Deviance</b>	7,123	14.85%	n.d.
<b>Dev(s) / GdL</b>	1	0.00%	n.d.
<b>Chi-Squared</b>	10,062	193.29%	-74.59%
<b>Scaled Chi-Sq.</b>	11,233	616.63%	n.d.
<b>Chi-SQ(s)/ GdL</b>	1.49	-12.75%	-13.42%
<b>AIC</b>	9,658	30.23%	-8.00%
<b>AICC</b>	9,658	32.15%	-8.66%
<b>BIC</b>	9,808	28.24%	-5.50%

*Figura 32 – Risultati dei PIRM - Frequenza NoCard*



Per il Modello Misto, da una prima analisi dei test statistici, sembra che l'Anz\_Cliente e l'Eta\_Veic siano le due variabili che possono essere rappresentate mediante una cubic spline:



**Figura 33 – Modello Misto e Cubic Spline - Frequenza NoCard**

Dalla Figura 33, tuttavia, emerge che un trend polinomiale è effettivamente rilevabile solo per l'anzianità di polizza. Sebbene questo trend sia statisticamente significativo, non sembra particolarmente logico (v. §3.2.1.h).

Tuttavia, l'obiettivo di questo elaborato è di trovare i migliori coefficienti di ogni variabili significativa al fine di poter studiare l'intera distribuzione del *DaU\_1yr*. Per tale ragione, questa mancanza parziale di ragionevolezza del trend, specie per le modalità maggiori di nove, non è particolarmente di interesse di un valutatore<sup>12</sup>.

---

<sup>12</sup> Diverso è il caso in cui il Modello Misto sia scelto come Modello di Rischio di un processo tariffario. In tal caso, una mancanza di ragionevolezza può comportare anche l'esclusione di tale variabile dal modello.

#### 4.3.1.b PIRM – Numero dei Sinistri Card

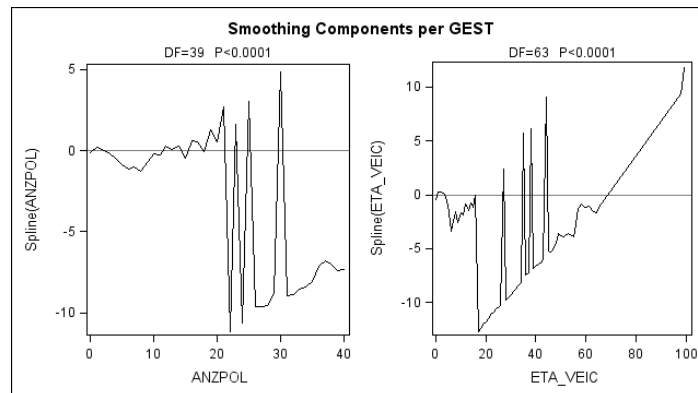
Il modello di Frequenza Card:

- *Variabile Risposta*: Numero dei sinistri Card;
- *Variabile Peso*: Esposti al rischio.

	GLM	Modello Misto	GLMM
<b>Deviance</b>	3,054	78.88%	n.d.
<b>Scaled Deviance</b>	6,740	326.13%	n.d.
<b>Dev(s) / GdL</b>	1	0.00%	n.d.
<b>Chi-Squared</b>	9,842	25.30%	-74.02%
<b>Scaled Chi-Sq.</b>	21,715	150.42%	n.d.
<b>Chi-SQ(s)/ GdL</b>	3.2	-6.25%	-59.69%
<b>AIC</b>	5,816	51.73%	-6.50%
<b>AICC</b>	5,816	51.72%	-7.66%
<b>BIC</b>	5,959	51.27%	-4.00%

**Figura 34 – Risultati dei PIRM - Frequenza Card**

In questo modello, diversamente da quanto visto per la gestione NoCard, ambedue le variabili esplicative, mostrano un trend polinomiale praticamente assente e non di facile comprensione. Ciò conferma il risultato di netta diversità tra i valori osservati negli altri modelli da quelli stimati dal Modello Misto.



**Figura 35 – Modello Misto e Cubic Spline - Frequenza Card**

#### 4.3.1.c PIRM – Numero dei Sinistri Forfait Debitrice

Il modello di Frequenza Forfait Debitrice:

- *Variabile Risposta*: Numero dei sinistri Forfait Debitrice;
- *Variabile Peso*: Esposti al rischio.

	GLM	Modello Misto	GLMM
<b>Deviance</b>	3,222	0.00%	n.d.
<b>Scaled Deviance</b>	6,740	0.00%	n.d.
<b>Dev(s) / GdL</b>	1	0.00%	n.d.
<b>Chi-Squared</b>	10,533	0.00%	-76.37%
<b>Scaled Chi-Sq.</b>	22,030	0.00%	n.d.
<b>Chi-SQ(s)/ GdL</b>	3.3	0.00%	-38.65%
<b>AIC</b>	5,910	0.00%	65.1%
<b>AICC</b>	5,910	0.00%	65.1%
<b>BIC</b>	6,050	0.00%	63.2%

**Figura 36** – Risultati dei PIRM - Frequenza Forf. Deb.

Il Modello Misto, pur riuscendo a replicare correttamente la componente di *DaU\_1yr* relativa alla gestione Forfait Debitrice (v. Figura 31), non evidenzia trend polinomiali per le variabili esplicative inserite nei modelli.

Per tale ragione, i risultati del Modello Misto e del GLM sono del tutto analoghi (v. §4.3.1).

#### 4.3.1.d PIRM – Costo dei Sinistri NoCard

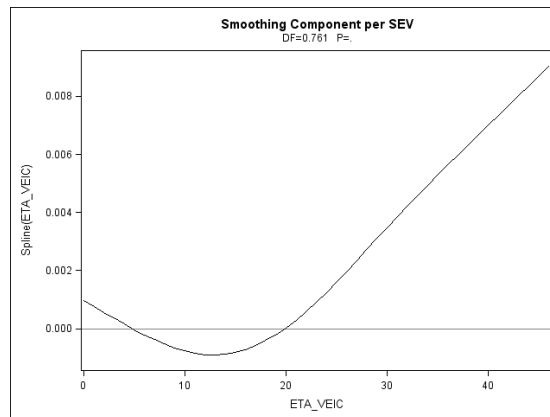
Il modello di Costo Medio NoCard:

- *Variabile Risposta*: Costo dei sinistri NoCard;
- *Variabile Peso*: Numero dei sinistri NoCard.

	GLM	Modello Misto	GLMM
<b>Deviance</b>	3,383	13.45%	n.d.
<b>Scaled Deviance</b>	2,633	-0.04%	n.d.
<b>Dev(s) / GdL</b>	1	0.00%	n.d.
<b>Chi-Squared</b>	26,344	17.44%	-93.05%
<b>Scaled Chi-Sq.</b>	20,503	-96.44%	n.d.
<b>Chi-SQ(s)/ GdL</b>	4.2	-38.10%	-49.52%
<b>AIC</b>	49,210	-0.45%	-9.00%
<b>AICC</b>	49,211	-0.45%	-9.00%
<b>BIC</b>	49,328	-81.67%	-82.18%

*Figura 37 – Risultati dei PIRM – Costo Medio NoCard*

I modelli di costo medio, grazie alla natura quantitativa continua della variabile risposta, mostrano spesso dei trend assimilabili a polinomi su almeno una variabile esplicativa. In questo caso, osserviamo la natura quasi parabolica descritta dal Modello Misto per l'Eta\_Veic:



*Figura 38 – Modello Misto e Cubic Spline – Costo Medio NoCard*

#### 4.3.1.e PIRM – Costo dei Sinistri Card

Il modello di Costo Medio Card:

- *Variabile Risposta*: Costo dei sinistri Card;
- *Variabile Peso*: Numero dei sinistri Card.

	GLM	Modello Misto	GLMM
<b>Deviance</b>	1,503	29.47%	n.d.
<b>Scaled Deviance</b>	2,484	0.08%	n.d.
<b>Dev(s) / GdL</b>	1	0.00%	n.d.
<b>Chi-Squared</b>	2,108	28.08%	22.84%
<b>Scaled Chi-Sq.</b>	3,481	-0.92%	n.d.
<b>Chi-SQ(s)/ GdL</b>	1.4	-22.86%	-7.14%
<b>AIC</b>	45,730	0.60%	12.98%
<b>AICC</b>	45,731	0.60%	12.98%
<b>BIC</b>	45,582	1.17%	4.72%

Figura 39 – Risultati dei PIRM – Costo Medio Card

Il Costo Medio Card è l'unica componente del  $DaU_{1yr}$  descritta in modo migliore dal Modello Misto rispetto al GLMM.

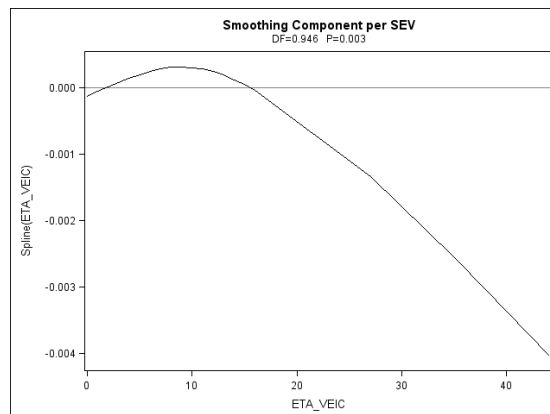


Figura 40 – Modello Misto e Cubic Spline – Costo Medio Card

#### 4.3.1.f PIRM – Costo dei Sinistri Forfait Gestionaria

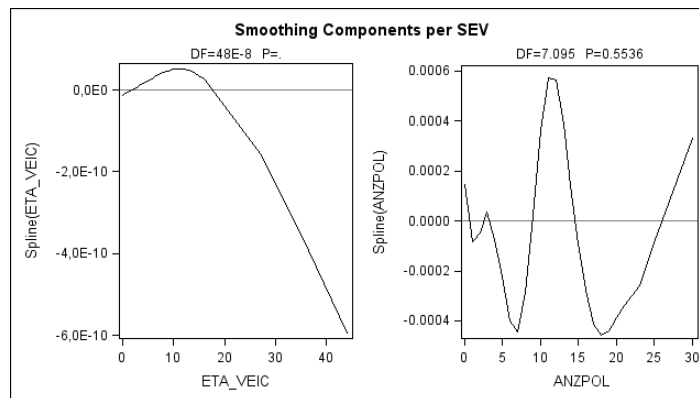
Il modello di Forfait Medio Gestionario:

- *Variabile Risposta*: Costo dei sinistri Forfait Gestionaria;
- *Variabile Peso*: Numero dei sinistri Card.

	GLM	Modello Misto	GLMM
<b>Deviance</b>	523	17.78%	n.d.
<b>Scaled Deviance</b>	2,466	0.45%	n.d.
<b>Dev(s) / GdL</b>	1	0.00%	n.d.
<b>Chi-Squared</b>	883	9.40%	-1.47%
<b>Scaled Chi-Sq.</b>	4,156	-6.50%	n.d.
<b>Chi-SQ(s)/ GdL</b>	1.6	-1.25%	-6.25%
<b>AIC</b>	43,723	5.22%	-14.77%
<b>AICC</b>	43,723	5.22%	-15.62%
<b>BIC</b>	43,827	5.22%	-10.56%

**Figura 41** – Risultati dei PIRM – Forfait Medio Gestionario

Seguendo i test statistici, il GAM mostra un trend non lineare per l'Eta\_Veic e per l'Anz\_Cliente. Tuttavia, nei risultati del Modello Misto mostrato in Figura 41, la sola variabile inserita e gestita in modo additivo (ossia seguendo la spline riportata di seguito) è l'età del veicolo.



**Figura 42** – Modello Misto e Cubic Spline – Forfait Medio Gestionari

#### 4.3.1.g PIRM – Costo dei Sinistri Forfait Debitrice

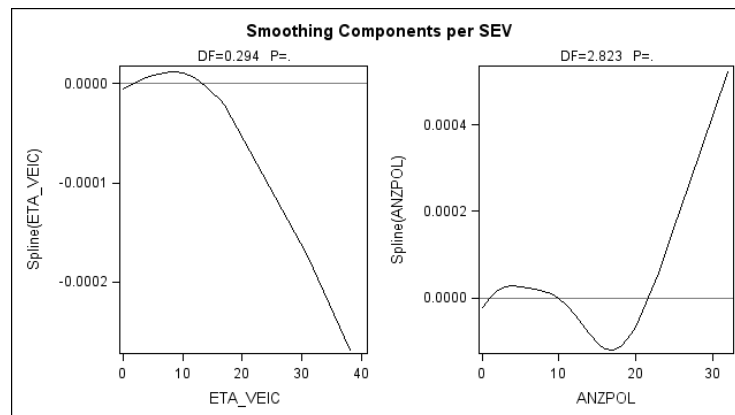
Il modello di Forfait Medio Debitore:

- *Variabile Risposta*: Costo dei sinistri Forfait Debitrice;
- *Variabile Peso*: Numero dei sinistri Forfait Debitrice.

	GLM	Modello Misto	GLMM
<b>Deviance</b>	263	134.22%	n.d.
<b>Scaled Deviance</b>	2,633	-5.92%	n.d.
<b>Dev(s) / GdL</b>	1	0.00%	n.d.
<b>Chi-Squared</b>	344	180.81%	-27.85%
<b>Scaled Chi-Sq.</b>	3,452	12.57%	n.d.
<b>Chi-SQ(s)/ GdL</b>	1.3	21.54%	-5.38%
<b>AIC</b>	41,269	11.48%	-8.80%
<b>AICC</b>	41,270	11.48%	-9.71%
<b>BIC</b>	41,369	11.47%	-2.00%

**Figura 43 – Risultati dei PIRM – Forfait Medio Debitore**

Anche se il GLMM risulta essere anche in questo caso il migliore PIRM per l’analisi di quest’ultima componente di *DaU\_1yr* Attritronal, il Forfait Medio Debitore evidenzia un trend polinomiale per ambedue le variabili esplicative continue presenti nel base dati del caso di studio:



**Figura 44 – Modello Misto e Cubic Spline – Forfait Medio Debitore**

#### 4.3.1.h PIRM – Il modello del DaU\_1yr Attritional

Il *Modello Convoluto* (anche detto “Modello Combinato”) è il modello che conclude la trattazione del Danno Aggregato a costo ultimo in orizzonte annuale e di importo sotto la *soglia* (v. §4.2).

Ampliando gli aspetti teorici indicati al §3.4, il Modello Convoluto è necessario al fine di poter determinare:

- i. La stima del *DaU\_1yr* (Attritional) costruita secondo la combinazione lineare dei indicati in formula (73) a livello di ogni profilo di rischio contenuto nella base dati del caso di studio;
- ii. Un ulteriore Modello con:
  - *Variabile Risposta: DaU\_1yr* (Attritional) calcolato al punto precedente;
  - *Variabile Peso*: Esposti al rischio.

Il Modello Convoluto è anche definito “modello dei modelli”, poiché la variabile risposta è stata stimata dai “Modelli Singoli” mostrati nei paragrafi precedenti.

Le variabili esplicative selezionate nei modelli saranno, pertanto, tutte significative. Un valutatore dovrà quindi analizzare l’effetto di tali variabili sul Danno Aggregato ed eventualmente deselezionare quelle che hanno perso potere predittivo dopo l’aggregazione delle diverse componenti di frequenza e di costo medio:

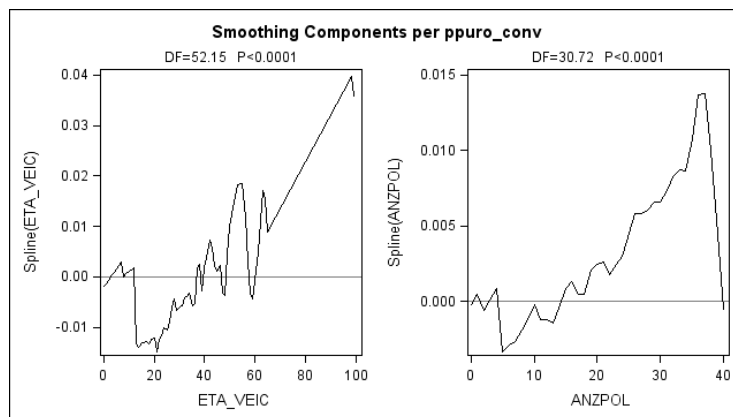
	GLM	Modello Misto	GLMM
<b>Deviance</b>	138,501	-0.50%	n.d.
<b>Scaled Deviance</b>	866,806	0.00%	n.d.
<b>Dev(s) / GdL</b>	1	0.00%	n.d.
<b>Chi-Squared</b>	194,889	1.10%	3.20%
<b>Scaled Chi-Sq.</b>	1,219,712	1.50%	n.d.
<b>Chi-SQ(s)/ GdL</b>	1	0.00%	0.00%
<b>AIC</b>	10,683,615	-0.60%	-1.70%
<b>AICC</b>	10,683,615	0.00%	-1.00%
<b>BIC</b>	10,684,081	-0.70%	-0.90%

*Figura 45 – Risultati dei PIRM – DaU\_1yr (Attritional)*



Il GLMM, anche per questa variabile risposta, è il PIRM che evidenzia una bontà di adattamento migliore.

Osservando il risultato del Modello Misto, sia l'età del veicolo che l'anzianità di polizza mostrano un trend assimilabile a quello lineare.



**Figura 46 – Modello Misto e Cubic Spline – DaU\_1yr (Attritional)**

In conclusione, in coerenza con quanto visto nei paragrafi precedenti e con la Figura 31, il GLMM sembra essere il PIRM che è in grado di spiegare in modo migliore il DaU\_1yr (Attritional).

Ciò è principalmente dovuto alla capacità di questo modello di catturare le correlazioni a livello di singola polizza (R-side) o a livello aggregato (G-side) (v. §3.2.2.c).

Il Modello Misto, tuttavia, mostra dei risultati migliori del GLM, benchmark nel mercato assicurativo internazionale.

### 4.3.2 Il modello di costo per i sinistri punta

La base dati creata dall'Attuariato e dal Risk Management per determinare una stima del SCR per il *Premium Risk* è stata costruita *separando i sinistri Attritional da quelli Large* (v. §4.2).

Tale impostazione è un altro elemento di novità presentato in tesi, anche osservando la base dati creata per fini di tariffazione (v. §2.2.1.h).

Nella Figura 30 si osserva che il costo (ossia quello che sarà definito nel seguito *DaU\_1Yr* (Large) che eccede la soglia del 94-mo percentile è pari a circa il 29% del totale Danno Aggregato.

Tale incidenza di costo, rappresentativa del 6% del totale numero dei sinistri delle Gestioni CARD, potrebbe compromettere i risultati ottenuti con uno dei PIRM presentati. La numerosità dei profili di rischio con almeno un sinistro Large, difatti, ammonta nella totalità della gestione NoCard e Card a sole 1,059 unità.

Per tale ragione, il PIRM selezionato per descrivere il *DaU\_1Yr* (Large), ossia il GLM con quasi-verosimiglianza in ipotesi di distribuzione Pareto, è unico e rappresentativo della totalità dei sinistri punta (v. anche §3.2.1.m).

Se da un lato questo approccio consente di *ottenere una stima più attendibile del PIRM*, lo stesso presenta un *limite dovuto all'eterogeneità* della tipologia dei sinistri e dei sinistrati tra le due gestioni.

Definito quindi il modello GLM con

- *Variabile Risposta*: DaU\_1yr Large;
- *Variabile Peso*: Esposti al rischio;

Il risultato del PIRM è descritto di seguito:

	DaU_1yr Large (k/€)	GLM
<b>2009</b>	237,655	6.5%
<b>2010</b>	226,471	-4.4%
<b>2011</b>	224,193	-2.4%
<b>Totale</b>	<b>688,319</b>	<b>1.5%</b>

*Figura 47 – Tabella di Costo stimato (GLM) vs Costo Osservato*

In conclusione, quindi, il GLM stima con un margine ritenuto accettabile il DaU\_1yr dei sinistri oltre la soglia. Nel 2009, tuttavia, mostra un limite che, come sarà evidenziato nel prossimo paragrafo, non è ritenuto particolarmente rilevante.

#### 4.4 La distribuzione stimata del DaU in orizzonte annuale

Da quanto mostrato nel paragrafo precedente, il DaU\_1yr, per via dell'ipotesi di *indipendenza* tra sinistrati con danno al di sotto della soglia da quelli che hanno causato (almeno) un sinistro punta (v. §3.2), è stimato per mezzo di

- Un modello del *DaU\_1yr* Attritional (v. §4.3.1.h);
- Un modello di costo per i sinistri punta (v. §4.3.2).

Tutti e i PIRM adoperati in questo caso di studio hanno pertanto consentito di determinare una stima individuale (ossia per ogni profilo di rischio) del *DaU\_1yr* in ogni anno di competenza.

Dalla definizione di questo rischio, il Risk Management dovrà selezionare i “(...) *contratti da sottoscrivere (inclusi i rinnovi) nell'anno successivo e dai rischi ancora in vigore sui contratti esistenti*”. Il portafoglio di rischi utilizzato, ossia il database tariffario (v. §2.2.1.h), include però un numero maggiore di profili di rischio rispetto a tale definizione.

Il Risk Management potrà nuovamente cooperare con l'Attuariato per individuare il perimetro indicato dalla Direttiva. Anche nel processo tariffario, infatti, è necessario poter valutare l'effettivo impatto di una nuova tariffa sul portafoglio in scadenza (*Potenziali Rinnovi*) e sugli eventuali *Nuovi Affari* (v. §2.2.1.p).

Nel caso di studio, si è ipotizzato che il Risk Management abbia determinato i rischi nel perimetro richiesto dalla Direttiva, ossia le polizze che saranno sottoscritte per almeno un giorno (di seguito “*polizze vive*”) nel anno  $t+1$  con dati noti all'anno  $t$ , secondo una simulazione a *portafoglio chiuso*.

Più precisamente, l'ipotesi selezionata è quella di aver un *turnover*<sup>13</sup> perfetto di entrate ed uscite di polizze in portafoglio.

Il criterio seguito per la determinazione dei *Potenziali Rinnovi*, non avendo dati reali o realistici per costruire un'analisi univariata o multivariata del tasso di retention, ha riguardato il solo periodo di decorrenza della polizza.

---

<sup>13</sup> Pur essendo un'ipotesi semplificata, questo approccio è spesso usato da Compagnie di piccolo o medio portafoglio.

Osservate, infatti, le *polizze vive* alla fine dell'anno  $t$ , sono state selezionate solo quelle con *data di scadenza*

- Maggiore o pari al  $31/12/t$ ;
- Minore del  $31/12/t+1$ .

A differenza dell'Attuariato che utilizza il *periodo di validità* della nuova tariffa, il Risk Management ha l'obiettivo di intercettare tutti i potenziali rinnovi entro l'anno  $t+1$ .

Per i Nuovi Affari nell'anno  $t+1$ , dopo aver individuato i profili di rischio che sono stati sottoscritti per la prima volta nell'anno precedente ( $t$ ), è stata fatta un'ipotesi semplificativa di invarianza del numero e del mix di tali profili nell'anno successivo.

Nella nuova base dati così ottenuta si è tenuto conto dei seguenti elementi:

- Ageing o scivolamento delle variabili esplicative;
- Scontistica commerciale (C\_Sco) e per flessibilità (v. anche §3.2.c).

Per semplicità, è stata esclusa ogni analisi di scivolamento della classe Bonus-Malus, detta anche "Analisi di personalizzazione a posteriori" che, dopo l'introduzione della legge n. 20/2007, ha spesso un impatto medio di non particolare rilievo sulle Compagnie autorizzate al ramo RCA nel mercato italiano.

La nuova base dati (di seguito anche "Db"), costruita selezionando i profili di rischio secondo le modalità descritte sopra, è ora costituita da:

	Db Prospettico	Db Storico
<b>Num. Record</b>	2,204,378	6,003,860
<b>Esposti al Rischio</b>	1,366,465	3,525,452

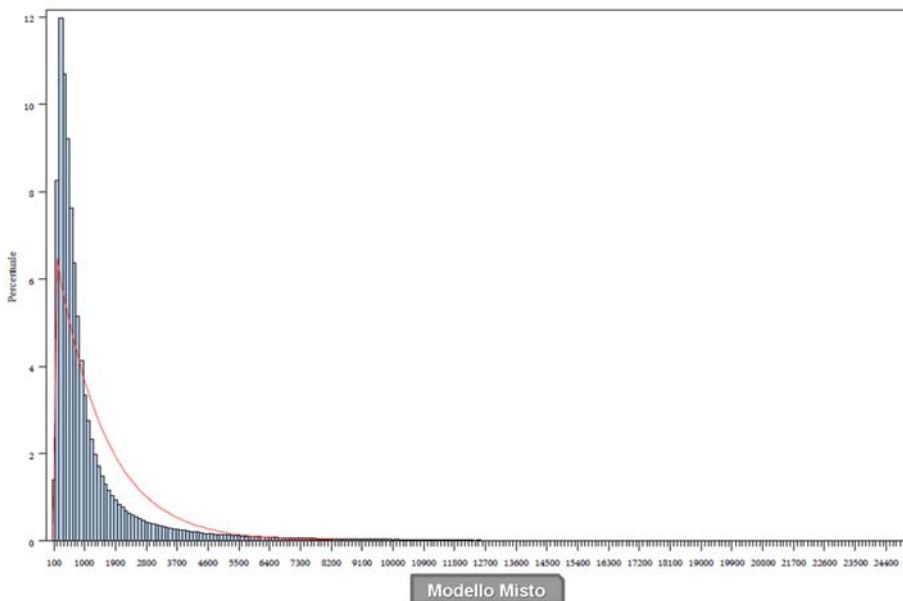
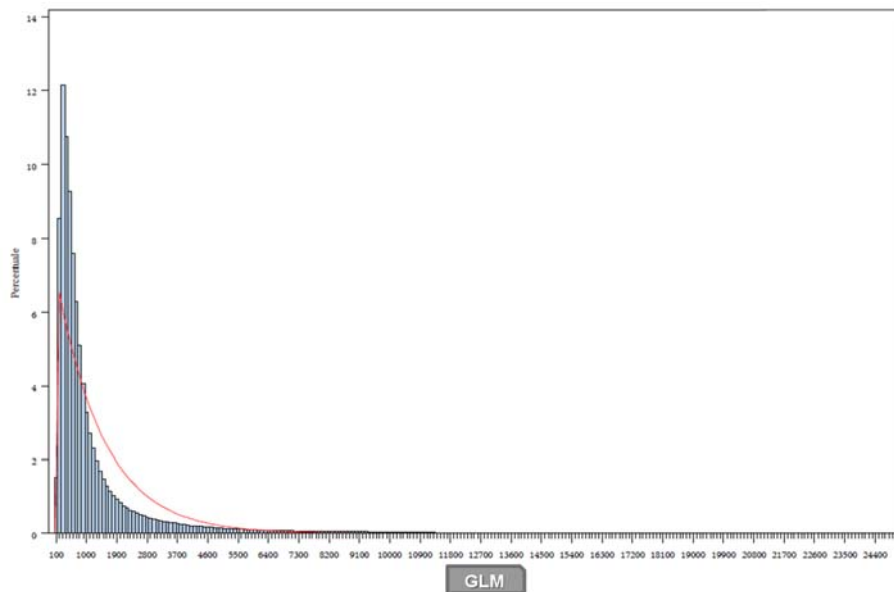
**Figura 48** – Alcune grandezze della base dati selezionata

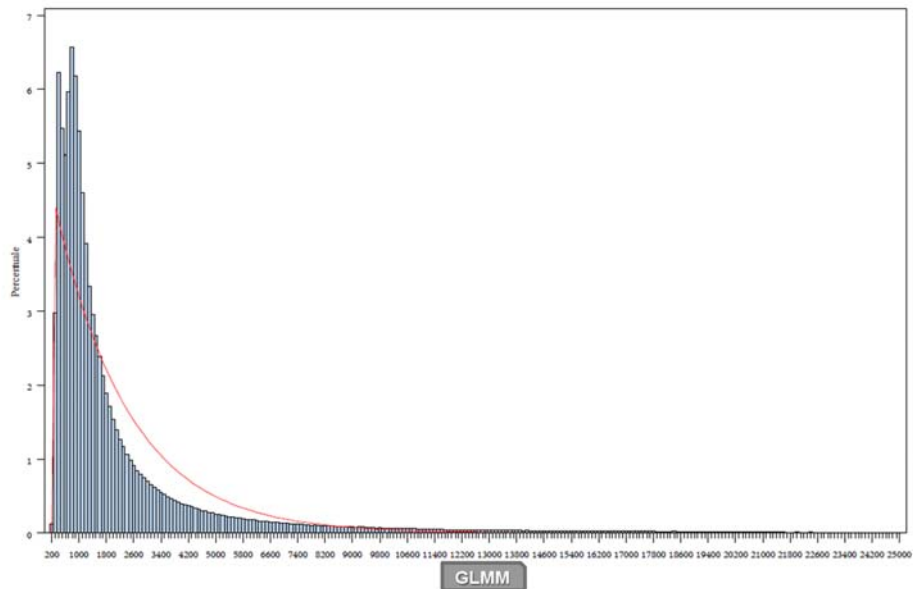
Il numero di record e degli esposti al rischio è circa pari al 30% della base dati di partenza, ossia quella utilizzata per determinare i regressori con i tre PIRM presentati nel Capitolo 3.

Il Risk Management, coerentemente con quanto mostrato al §4.1, dovrà verificare l'eventuale distanza tra i profili di rischio del *Db storico* rispetto a quelli attesi ed indicati nel *Db prospettico*. La procedura indicata sopra, spesso la più applicata nella prassi assicurativa per la creazione di questa base dati prospettica, non mostra per costruzione differenze tangibili. Anche qualora si adoperassero altre procedure (v. §2.2.1.p) per la creazione della nuova base dati, non si evidenziano a priori sostanziali limiti metodologici di questo approccio. L'Attuariato, difatti, dovrà comunque stabilire quali saranno le polizze a rinnovo e di nuova produzione per la determinazione del fabbisogno.

Applicando i *regressori* di ogni variabile esplicativa selezionata (v. sezione B dell'Appendice) al *DaU\_1yr base* (ossia l'intercetta dei PIRM) ad ogni profilo di rischio si determina la *distribuzione stimata del DaU\_1yr*.

Di seguito saranno mostrati i grafici (troncati fino al valore di 30k/€ per migliorarne la visualizzazione) delle tre distribuzione così ottenute:





**Figura 49** – Distribuzione del  $DaU_{1yr}$  stimato tramite i PIRM

Analogamente a quanto realizzato in Figura 23, al di sopra della distribuzione stimata (istogramma) con i PIRM, è stata sovrapposta la funzione di densità della distribuzione Gamma che si adatta in modo migliore ai dati osservati.

In questo caso, però, l'informazione derivante dalla distribuzione teorica non è particolarmente rilevante, poiché l'obiettivo dell'approccio posposto in tesi è quello di determinare un percentile della distribuzione stimata dai PIRM.

Infine, la distribuzione stimata del  $DaU_{1yr}$  tiene conto sia della parte Attrititional che Large.

## 4.5 Il calcolo del requisito di capitale per il Premium Risk

Dopo aver determinato la distribuzione stimata del  $DaU_{1yr}$  con i PIRM, calcolare il SCR per il Premium Risk dipende dalla determinazione di un percentile di tale distribuzione.

Come riportato in Figura 2 e, più in generale al §1.2.a, utilizzando una misura di rischio VaR, il SCR sarà calcolato come

$$(74) \quad SCR = VaR_{\alpha} - E(DaU_{1yr}^*)$$

In coerenza con quanto richiesto dalla Direttiva, il percentile  $\alpha$  selezionato è il 99.5-mo:

	GLM	Modello Misto	GLMM
<b>E(DaU<sub>1yr</sub><sup>*</sup>) - Expected Losses (k/€)</b>	2,338	2,328	2,327
<b>99.5-mo quantile (k/€)</b>	826,619	830,364	853,210
<b>SCR - Premium Risk (k/€)</b>	<b>824,281</b>	<b>828,036</b>	<b>850,882</b>

Figura 50– Il SCR per il Premium Risk nei tre PIRM utilizzati

Il GLMM, ossia il PIRM più robusto statisticamente nel replicare il  $DaU_{1yr}$  Attritional, evidenzia un requisito di capitale per il Premium Risk più elevato rispetto al GLM (3.2%) ed al Modello Misto (2.8%).

In altri termini, il modello che descrive meglio il profilo di rischio atteso della Compagnia<sup>14</sup> non è necessariamente quello che produce un requisito di capitale minore. Tale risultato permette di mostrare come una migioria tecnica nell'analisi del rischio non implichi necessariamente un risparmio per la Compagnia.

La possibilità del GLMM di poter aumentare<sup>15</sup> il costo di profili di rischio correlati, ossia, simili rispetto alle loro caratteristiche multivariate rispetto al  $DaU_{1yr}$  produce una maggiore rischiosità sulla coda della distribuzione stimata.

<sup>14</sup> Sul 70% del  $DaU_{1yr}$ , ossia senza tenere conto dei sinistri punta, la cui stima è invariante in seguito all'ipotesi di indipendenza e per la scelta metodologica di stimare il  $DaU_{1yr}$  con il GLM di quasi-verosimiglianza

<sup>15</sup> La matrice di correlazione è stata stimata con il metodo di Chovlesky (v.§3.2.2.d)

Come indicato nella “*Descrizione del caso di studio*” (v. §4.1), della media Compagnia italiana autorizzata all’esercizio del ramo RCA sono note tutte le polizze sottoscritte per almeno un giorno negli anni 2009-2011 (database di partenza), ma anche i dati necessari alla determinazione del parametro di volatilità del *Premium Risk* secondo le metodologie che prendono il nome di USP (v. §1.3).

Come mostrato in Figura 9, la serie storica fittizia di tali dati conta più di 15 anni (v. [30]). Ciò consentirebbe ad una Compagnia analoga a quella presentata nel caso di studio di poter assegnare piena credibilità a tale approccio alternativo alla SF<sup>16</sup>.

Con la pubblicazione recente dei *Delegated Acts*, pur restando invariato il criterio di calcolo del coefficiente di credibilità, è stata proposta una nuova ed unica metodologia di calcolo per gli USP (di seguito “*USP\_DA*”) del *Premium Risk* (v. Annex XVII del [30]).

Definito il *Risk Based Capital ratio* (di seguito “*RBC ratio*”) come il rapporto tra il requisito di capitale ed i premi lordi contabilizzati della Compagnia, si ottengono i seguenti risultati:

<b>RBC ratio</b>	
<b>PIRM</b>	
<i>GLM</i>	6.4%
<i>GAM</i>	6.5%
<i>GLMM</i>	6.7%
<b>SF - MW</b>	22.1%
<b>USP_QIS5</b>	
<i>Metodo 1</i>	11.6%
<i>Metodo 2</i>	10.9%
<i>Metodo 3</i>	12.2%
<b>USP_DA</b>	11.3%

**Figura 51**– RBC ratio calcolato a partire dai diversi PIRM

Il requisito di capitale ottenuto con uno qualunque dei PIRM, a parità di volume, è *sempre inferiore* a quello calcolato con gli altri due approcci.

<sup>16</sup> Ciò comporta, però, un’ulteriore criticità tecnica che non è stata investigata in un caso di studio che si fonda su dati teorici, ossia la disomogeneità delle diverse generazioni dei sinistri (Ante e Post CARD).







## Conclusioni

Limitata ai rami assicurativi e ai prodotti per i quali sia possibile raccogliere, calcolare e stimare le probabili perdite future secondo metodologie statistiche di regressione, la tesi ha l'obiettivo di *illustrare un nuovo Modello Interno Parziale per il Premium Risk*.

A partire dalla definizione (v. art.112 della Direttiva) di Modello Interno Parziale (v. art.112 della Direttiva), questo strumento consente ad una Compagnia di determinare un requisito di capitale tra quelli previsti (v. Figura 4) dalla Direttiva.

In particolare, questa tesi si è focalizzata sul Premium Risk, ossia su uno specifico sotto-rischio contenuto all'interno del Non – Life Underwriting Risk.

*Definito come il rischio che i premi relativi ai nuovi contratti (compresi i rinnovi) più la riserva premi iniziale siano insufficienti a coprire il costo dei sinistri e le spese generate dei contratti*, il PIRM ideato nasce dall'idea di voler potenziare ogni possibile interazione tra le (almeno) due funzioni aziendali che si occupano dell'oggetto di tale rischio: i *Premi*.

Se da un lato, quindi, la Direttiva definisce agli artt. 112 e 114 che il *Risk Management* è la funzione aziendale preposta a costruire, applicare, testare, convalidare, documentare, analizzare il funzionamento del modello interno ed informare l'organo amministrativo, direttivo o di vigilanza in merito ai risultati prodotti, l'*Attuariato di Tariffa* è la funzione aziendale incaricata di determinare il prezzo di un rischio.

Prezzare un rischio è certamente uno dei temi classici delle Scienze Attuariali.

Oltre ad aver illustrato uno schema dettagliato sui diversi "passi operativi" necessari alla creazione di una tariffa commercializzabile, è stato identificato il perimetro di questo elaborato nel ramo di Responsabilità Civile Autoveicoli terrestri.

Il Premio o il prezzo di una copertura assicurativa del ramo RCA è certamente una delle attività tecniche di maggior interesse all'interno di una Compagnia Danni che ne è stata autorizzata all'esercizio. Inoltre, come indicato nel primo capoverso, i prodotti assicurativi di questo ramo sono tipicamente prezzati utilizzando spesso delle tecniche di regressione, anche successivamente all'entrata in vigore della CARD che ne ha solo alterato l'architettura.

Il *Modello Lineare Generalizzato (GLM)*, il *Modello Additivo Generalizzato (GAM)* ed il *Modello Misto Lineare Generalizzato (GLMM)* rientrano nella categoria delle tecniche di regressione e proprio questi sono stati scelti e confrontati come potenziali PIRM per il *Premium Risk*.

I GLM sono riconosciuti come una delle metodologie maggiormente in uso tra i *Modelli di Rischio* (multivariati) utilizzati dall'Attuariato per le tematiche di Tariffazione.

*La tesi ha mostrato come un modello noto e spesso già utilizzato dalle medie-grandi Compagnie nazionali ed internazionali possa divenire anche uno strumento utile per determinare un errore di insufficienza dei premi.*

Come descritto sopra, tale elaborato non si limita al solo GLM, ma estende il calcolo di tale *errore di tariffazione* anche per mezzo dell'utilizzo di altri modelli di interesse noto nella letteratura statistica e crescente nella letteratura attuariale: il GAM ed il GLMM.

Per via di alcuni limiti dei software utilizzati, il GAM è stato utilizzato solo parzialmente. Più spesso, difatti, ricorre in tesi il termine "Modello Misto". Descritto nei dettagli al §3.2.2.b, il Modello Misto è un GLM nel quale alcune variabili quantitative continue (per le quali il GAM individua un *trend non lineare*) sono interpolate per mezzo di *cubic spline* ottenute tramite l'applicazione di un GAM.

Il collegamento tra l'utilizzo di un Modello di Rischio da parte dell'Attuariato ed il PIRM di interesse del Risk Management si fonda attraverso:

- Una stima del *Danno Aggregato in orizzonte temporale annuale* (di seguito "*DaU\_1yr*"), coerente con quanto richiesto dalla Direttiva;
- Una stima della distribuzione totale di questa variabile aleatoria, necessaria per calcolare un requisito di capitale secondo un approccio *Value at Risk* al 99.5mo percentile.

Definito il Danno Aggregato come il totale dei costi che l'assicuratore dovrà risarcire per il pagamento di ogni sinistro, l'Attuariato ha l'onere di studiarne il valore atteso e di determinare un criterio per personalizzare i rischi di una futura *generazione tariffaria*.

Il primo aspetto metodologico rilevante, quindi, ha riguardato la determinazione del *DaU\_1yr*, calcolato tenendo conto a *livello individuale* di:

- I coefficienti correttivi del fabbisogno;
- I coefficienti di sviluppo del modello di Reserving della Compagnia ad un anno.

In altri termini, il database tariffario dell'Attuariato è stato corretto per ogni polizza al fine di tenere conto del costo ultimo dei sinistri in orizzonte annuale, ma anche di un correttivo *per spese e per l'allocazione dell'Utile*.

Determinata poi una *soglia* per circoscrivere i sinistri Attritional dai Large, il suddetto database è stato diviso in due segmenti.

Il GLM, il Modello Misto ed il GLMM sono stati utilizzati per studiare il *DaU\_1yr Attritional*, mentre la parte di costo causato dalle polizze con (almeno) un sinistro Large è stata modellizzata con un *GLM con quasi-verosimiglianza*:

$$\left\{ \begin{array}{l} NoCard_{AL} = freq_{NC} \cdot xCM_{NC}^{AL} \\ Card_{AL} = freq_{Card} \cdot xCM_{Card}^{AL} \\ ForfGest = freq_{card} \cdot xCM_{FG} \\ ForfDeb = freq_{FD} \cdot xCM_{FD} \\ DaU_{1yr}^{LL} = (NoCard_{LL} + Card_{LL}) / Veic \\ DaU_{1yr} = (NoCard_{AL} + Card_{AL} - ForfGest + ForfDeb) + DaU_{1yr}^{LL} = \\ = DaU_{1yr}^{AL} + DaU_{1yr}^{LL} \end{array} \right.$$

Il secondo aspetto di innovazione proposto in questi PIRM riguarda il modo con cui è stata modellizzata la coda destra della distribuzione osservata del  $DaU_{1yr}$ , ossia per mezzo di un GLM con quasi-verosimiglianza ed errore di distribuzione Pareto (v. §4.3.2).

Il terzo ed ultimo elemento che contraddistingue la metodologia proposta in tesi riguarda il *portafoglio* su cui stimare il  $DaU_{1yr}$  per mezzo dei PIRM. Determinate le polizze su cui graverà il *rischio di tariffazione*, ossia quelle che andranno a rinnovo nell'orizzonte annuale richiesto dalla Direttiva, nonché la componente di nuovi affari futuri, sono stati applicati i *regressori* di ogni variabile esplicativa dei suddetti PIRM al  $DaU_{1yr}$  base (ossia l'intercetta dei PIRM) in modo da ottenere la *distribuzione stimata del  $DaU_{1yr}$* .

Calcolando poi il percentile di tale distribuzione stimata è stato calcolato il *requisito di capitale* del *Premium Risk* in modo coerente con i modelli e le ipotesi di evoluzione dei costi e del mix di portafoglio ipotizzato dall'Attuariato per fini tariffari.

In tutti e tre i casi, il SCR così calcolato è risultato essere inferiore rispetto allo stesso requisito calcolato con l'approccio market-wide (SF) o con l'utilizzo degli USP mostrati la prima volta nelle specifiche tecniche del QIS5 (v. [13]) e modificati poi dai Delegated Acts (v. [30]).

Discostandosi da quanto suggerito in altri modelli interni noti nella letteratura nazionale ed internazionale e relativi al *Premium Risk*, tra cui si richiamano [82], [83] e [88], la soluzione presentata in tesi, seppur sia basata su un approccio collettivo di teoria del rischio (nell'ipotesi che il  $DaU_{1yr}$  segua un processo di Poisson Composto), si fonda su una stima puntuale di tale costo, diversificata tra *Nuovi Affari* e *Potenziali Rinnovi*, per sinistri Attritional e Large e per gestione CARD. La stima puntuale, quindi, noti i punti di novità, di forza ed i limiti descritti al §3.5, presenterà dei risultati affidabili tanto maggiore sarà il volume degli assicurati, ma usualmente il risultato è perseguibile per tutte quelle Compagnie che utilizzano tali modelli di regressione come Modelli di Rischio nel processo di tariffazione.

Si intravedono come possibili aree nelle quali sviluppare e migliorare l'approccio presentato le metodologie individuali di allocazione del costo ultimo in orizzonte temporale annuale e l'aggregazione del requisito di capitale tra i diversi settori tariffari (cioè tra autovetture, motocicli, ciclomotori, ecc.).

Rimane la necessità di valutare l'eventuale integrazione di questo modello interno parziale per le Compagnie che già adottano un modello interno appartenente alla famiglia DFA.



## Bibliografia

### **Sezione I – Il rischio di Tariffazione secondo la Direttiva Solvency II**

- [1] ANIA (2009-2013), “CARD CONVENZIONE tra ASSICURATORI per il RISARCIMENTO DIRETTO”, Roma.
- [2] ANIA (2013), “Solvency II: origine, struttura e sviluppo”, presentazione al mercato.
- [3] CEA, CGAE (2007), “Solvency II Glossary”.
- [4] CEIOPS (2009), “CEIOPS’ Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: Articles 120 to 126. Tests and Standards for Internal Model Approval”, (former Consultation Paper 56).
- [5] CEIOPS (2009), “Draft CEIOPS’ Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR standard formula Article 109 h, i Undertaking-specific parameters” (former Consultation Paper 75).
- [6] CEIOPS (2010), “Draft CEIOPS Level 3 Guidance on Solvency II: Pre-application process for Internal Models”, (former Consultation Paper 80).
- [7] Cerchiara R.R. (2008), “Lucidi estratti da QUADERNO ISVAP, n°6, con aggiornamenti apportati dal docente” dispense del corso di Bilancio Contabile & Financial Reporting presso la Sapienza Università di Roma.
- [8] Cucinella A. (2008), “Ripercussioni operative e tecniche dell’indennizzo diretto sui criteri di tariffazione”, Corso di formazione CISA: L’indennizzo diretto nell’assicurazione RC Auto in Italia. Modelli ed esperienze.
- [9] Desantis (2006), “Risarcimento diretto nell’rca: effetti sulla riservazione e la valutazione della riserva sinistri. Technical report, ANIA” ottava edizione, Milano, Giuffrè editore.
- [10] Donati A. e Volpe Putzolu G. (2012), “Manuale di Diritto delle Assicurazioni” ottava edizione, Milano, Giuffrè editore.
- [11] DIRETTIVA 2009/138/CE DEL PARLAMENTO EUROPEO E DEL CONSIGLIO del 25 novembre 2009
- [12] DIRETTIVA 2014/51/UE DEL PARLAMENTO EUROPEO E DEL CONSIGLIO del 16 aprile 2014
- [13] EIOPA (2010), “Technical Specification QIS5”, Frankfurt am Main.
- [14] EIOPA (2011), “EIOPA Report on the fifth Quantitative Impact Study (QIS5) for Solvency II”, Frankfurt am Main.
- [15] EIOPA (2011), “Calibration of the Premium and Reserve Risk Factors in the Standard Formula of Solvency II”, Frankfurt am Main.

- [16] EIOPA (2012), *“Technical Specifications for the Solvency II valuation and Solvency Capital Requirements calculations (Part I)”*, Frankfurt am Main.
- [17] EIOPA (2013), *“Technical Specification on the Long Term Guarantee Assessment (Part I)”*, Germany, Frankfurt am Main.
- [18] EIOPA (2013), *“Consultation Paper on the Proposal for Guidelines on the System of Governance”*, Germany, Frankfurt am Main.
- [19] EIOPA (2013), *“Guidelines on System of Governance”*, Germany, Frankfurt am Main.
- [20] EIOPA (2013), *“Final Report on Public Consultations No. 13/011 on the Proposal for Guidelines on the Pre application for Internal Models”*, Germany, Frankfurt am Main.
- [21] EIOPA (2014), *“Draft Delegated Acts SII March 2014 (clean)”*, Germany, Frankfurt am Main.
- [22] EIOPA (2014), *“Technical Specification for the Preparatory Phase Part I”*, Germany, Frankfurt am Main.
- [23] EIOPA (2014), *“Annexes to Technical Specification for the Preparatory Phase Part I”*, Germany, Frankfurt am Main.
- [24] EIOPA (2014), *“Consultation Paper on the proposal for Guidelines on system of governance and own risks and solvency assessment”*, Germany, Frankfurt am Main.
- [25] EIOPA (2014), *“Consultation Paper on the proposal for Guidelines on Solvency II relating to Pillar 1 requirements”*, Frankfurt am Main.
- [26] EIOPA (2014), *“Consultation Paper on the proposal for Guidelines on the Use of Internal Models”*, Frankfurt am Main.
- [27] EIOPA (2014), *“The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation”*, Frankfurt am Main.
- [28] European Parliament (2009), *“Solvency II Directive 2009/138/EC”*, Brussels.
- [29] European Commission (2011), *“Draft Implementing measures Solvency II”*, Brussels.
- [30] European Commission (2014), *“Delegated Acts Solvency II”*, Brussels.
- [31] IVASS (ISVAP), *“Istruzioni allegare al provvedimento n. 2495 (parzialmente abrogate dal Regolamento ISVAP n. 22/08 e n. 27/08)”*, Roma.
- [32] IVASS (ISVAP), *“REGOLAMENTO N. 16 DEL 4 MARZO 2008”*, Roma.
- [33] IVASS (ISVAP), *“REGOLAMENTO N. 19 DEL 14 MARZO 2008”*, Roma.
- [34] IVASS (2014), *“Provvedimento n. 18 del 5 agosto 2014”*, Roma.
- [35] Magatti V. (2009), *“Dalla nuova richiesta di Solvibilità alla stima del Premium Risk per un’Impresa Danni”*, tesi di Laurea Magistrale, Sapienza Università di Roma.
- [36] Ministero dello Sviluppo Economico (2007 – 2014), *“Relazione del Comitato Tecnico istituito ai sensi dell’art.13 del D.P.R. del 18 luglio2006, n. 254, con D.M. 19 dicembre 2006”*.

- [37] Savelli N. (2007), "*Solvency II e Risk Management*", VII Congresso Nazionale degli Attuari.
- [38] Savelli N. (2008), "*Il Progetto Solvency II*", lezioni presso la Sapienza - Università di Roma.
- [39] Savelli N. (2012), "*Da Solvency I a Solvency II: il ruolo della funzione attuariale e del risk management*", workshop su Temi Attuali nella gestione della Previdenza, presso Università di Milano - Bicocca.

### **Sezione II – Un modello interno parziale per il rischio di Tariffazione**

- [40] Akaike H. (1979), "A Bayesian Extension of the Minimum AIC Procedure of Autoregressive Model Fitting", *Biometrika*, 66, 237–242.
- [41] Breslow N. E. e Clayton, D. G. (1993), "Approximate inference in generalized linear mixed models". *Journal of the American Statistical Association*, 88(421), <http://www.jstor.org/stable/2290687>.
- [42] C.D. Daykin et al. (1994), "*Practical Risk Theory for Actuaries*", 2nd edition, Boca Raton, Chapman & Hall/CRC.
- [43] Chunyang Zhou et al. (2009), "A New Method to Choose the Threshold in the Pot Model", *Information Science and Engineering (ICISE)*, pag. 750 – 753.
- [44] Cerchiara R.R. e Esposito G. (2005), "*Extreme value theory: the choice of threshold for rating and reinsurance*", Quaderni di Dipartimento, Sapienza Università di Roma.
- [45] Cerchiara R.R. (2013), "Come migliorare l'assorbimento di capitale?", Atti del congresso "Quali sono le leve per un impiego più efficiente del capitale nel business danni", Towers Watson, Milano.
- [46] Cerchiara R.R. e Magatti V. (2014), "Undertaking Specific Parameters or a Partial Internal Model under Solvency 2?", Atti del Congresso Internazionale degli Attuari, Washington D.C..
- [47] Cerchiara R.R. e Magatti V. (2014), "The estimation of Standard Deviation of Premium Risk under Solvency 2", MAF Springer Book 2014.
- [48] D'arcangelo E. e Vitiello C. (2013), "La riparametrizzazione dei Modelli Lineari e le procedure glm e mixed di SAS", SAS Campus 2012, Sapienza Università di Roma.
- [49] Davison, A.C. e Shell, E.J. (1991), "*Residuals and Diagnostics*", in D. V. Hinkley, N. Reid, and E. J. Snell, eds., *Statistical Theory and Modelling*, London: Chapman & Hall.
- [50] EIOPA (2014), "*Solvency II Calibration Paper*", Germany, Frankfurt am Main.
- [51] Embrechts P., Kluppelbrg C., Mikosch T. (1997): "*Modelling extremal events*", Springer Verlag, Berlin.
- [52] Fahrmeir L. e Tutz G. (2001), "*Multivariate statistical model based on generalized linear models*", 2. Ed., Springer.



- [53] Feldblum S. (1989), “*Asset liability matching for property/casualty insurers*”, CAS Special Interest Seminar.
- [54] FOPI (2004), “*White paper of the Swiss Solvency Test*”, November 2004, Berna.
- [55] Gazzetta Ufficiale (2006). Dpr 254, 18-7-2006.
- [56] Gazzetta Ufficiale (2007). L. 40/2007.
- [57] Gigante P., Picech L. e Sigalotti L. (2010), “*La tariffazione nei rami danni con modelli lineari generalizzati*”, Trieste: EUT editore.
- [58] Grasso, F. (2007), “*L’idenizzo diretto nell’assicurazione rca in italia*”, Technical re-port, Dipartimento di Scienze Attuariali e Finanziarie, Università La Sapienza, Rome (Italy).
- [59] Hardin, J. W. and Hilbe, J. M. (2003), “*Generalized Estimating Equations*”, Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.
- [60] Hastie, T.J. e Tibshirani, R.J. (1990), “*Generalized Additive Models*”, New York, Chapman & Hall.
- [61] IAA (2004), “*A Global Framework for Insurer Solvency assessment*”, Ottawa.
- [62] Jorgensen B. e Paes De Souza M. C. (1994), “*Fitting Tweedie’s Compound Poisson Model to Insurance Claim Data*”, from Scand Actuarial J 1994; 1: 69-93.
- [63] Klugman S.A. et al. (2012), “*Loss Models: From Data to Decisions*”, 4th edition, Hoboken (New Jersey), Wiley – SOA.
- [64] Larsen, C.R. (2007), “*An Individual Claim Reserving Model*”, Astin Bulletin, volume 37, issue 1
- [65] Lindsey, J.K. (1997), “*Applying Generalized Linear Models*” Springer
- [66] Magatti V. (2012), “*Dalla scelta di un modello di pricing alla definizione di un requisito di capitale per il premium risk*”, Atti del XXXVI Congresso Annuale A.M.A.S.E.S..
- [67] Maggina F. (2008), “*Misure di efficienza dei Sistemi Bonus–Malus: approcci per la valutazione e impatto della recente normativa italiana*”, Tesi di Dottorato, Sapienza Università di Roma.
- [68] McCullagh, P. (1983), “*Quasi-likelihood Functions*” Annals of Statistics, 11, 59–67.
- [69] Mc Cullagh P. e Nelder J.A. (1989), “*Generalized Linear Model*”, 2, ed. Chapman and Hall.
- [70] McNeil A. (1997): “*Estimating the tails of the loss severity distributions using extreme value theory*” ASTIN Bulletin, 27, 117-137.
- [71] Melisi G. (2013), “*Modelli di Tariffazione e Capital Allocation nell’assicurazione RCA con Black-Box*”, Tesi di Dottorato, Sapienza Università di Roma.
- [72] Nelder J.A. e Wedderburn R.W.M.(1972), “*Generalized Linear Models*”, Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 135, 370–384.

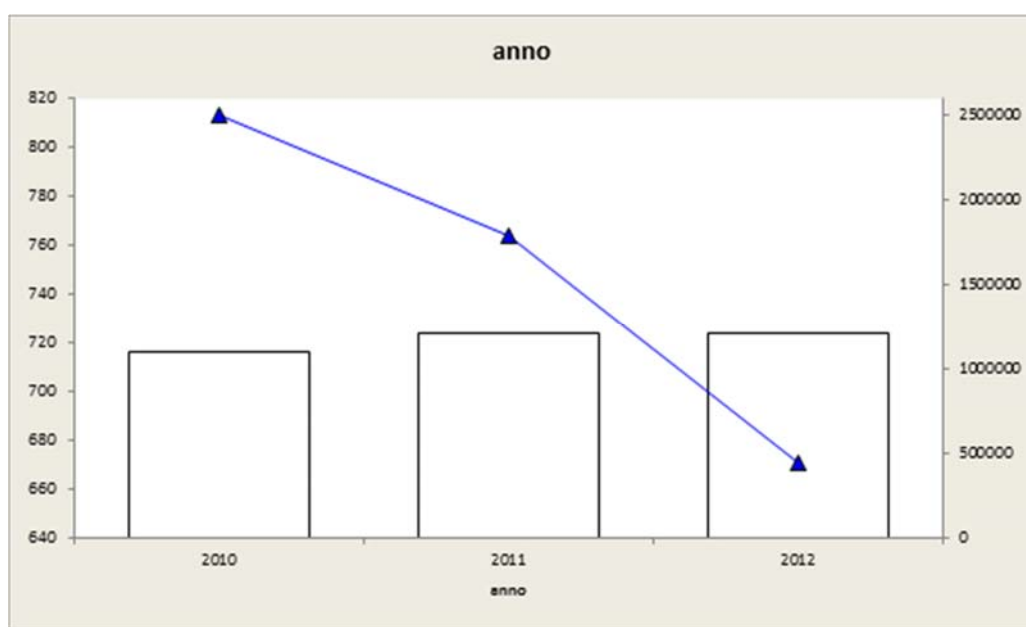
- [73] Ohlsson E. e Johansson B. (2010), "*Non-Life Insurance Pricing with Generalized Linear Models*", EAA Series Textbook, Berlino: Springer.
- [74] Pickands J. (1975): "*Statistical Inference Using Extreme Order Statistics*", *Annals of Statistics* 3, 119-131.
- [75] SAS/STAT® (2009) 9.2 User's Guide The GENMOD Procedure (Book Excerpt).
- [76] SAS/STAT® (2009) 9.2 User's Guide The UNIVARIATE Procedure (Book Excerpt).
- [77] SAS/STAT® (2009) 9.2 User's Guide The GAM Procedure (Book Excerpt).
- [78] SAS/STAT® (2009) 9.2 User's Guide The GLIMMIX Procedure (Book Excerpt).
- [79] Savelli N. (2002), "*Solvency and Traditional Reinsurance for Non-Life Insurance*", *Proceeding 6th International Congress on IME – Insurance: Mathematics and Economic*, Technical University, Lisbon.
- [80] Savelli N. e Clemente G.P. (2008), "Modelling Aggregate Non-Life Underwriting Risk: Standard Formula vs Internal Model", *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, per 18th International AFIR Colloquium.
- [81] Towers Watson "*Emblem User's guide*".
- [82] Savelli, N. and Clemente, G. (2009), "*Hierarchical structures in the aggregation of premium risk for insurance underwriting*". In *ASTIN 2009*.
- [83] Savelli N. e Clemente G.P. (2011), "*Hierarchical Structures in the Aggregation of Premium Risk for Insurance Underwriting*", *Scandinavian Actuarial Journal*, Issue 3.
- [84] Savelli N. e Clemente G.P. (2012), "*Modelling Aggregate Non-Life Underwriting Risk: Standard Formula vs. Internal Model*", *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, n. LXXII, Roma
- [85] Savelli N., Clemente G.P., Zappa D. (2014), "*Modelling Premium Risk for Solvency II: from empirical data to risk capital evaluation*", *Atti del Congresso Internazionale degli Attuari*, Washington D.C..
- [86] Ribatet M. (2013), "*POT: Generalized Pareto Distribution and Peaks Over Threshold*", R package version 1.1-3.
- [87] Simonoff, J. S. (2003), "*Analyzing Categorical Data*", New York: Springer-Verlag.
- [88] Spedicato G.A. (2011), "*Solvency II premium risk modeling under the direct compensation CARD system*", *Tesi di Dottorato*, Sapienza Università di Roma.
- [89] Vannucci L. (2007), "*Profittabilità, mutualità e indennizzo diretto nell'rc auto: un modello per le valutazioni attuariali*", pubblicato in *Convegno CISA 2007*.
- [90] Werner G. e Modlin C. (2010), "*Basic Ratemaking*", quarta edizione CAS.
- [91] Wolfinger, R. e O'Connell, M. (1993), "*Generalized Linear Mixed Models: A Pseudo-likelihood Approach*" *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 4, 233–243.



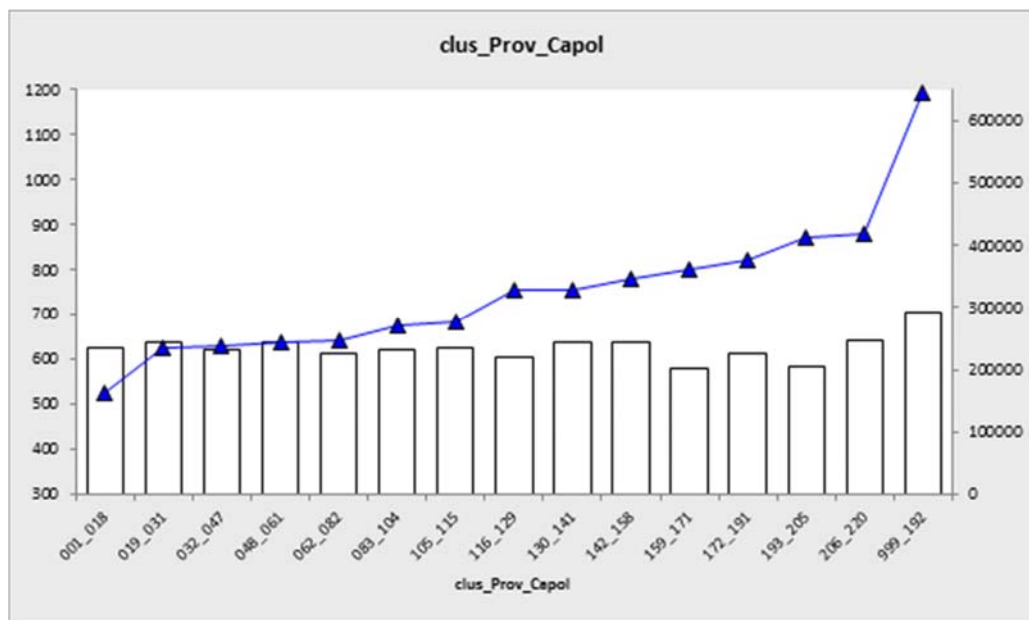
## Appendici

### A. Analisi univariata e misure di associazione dei fattori di rischio

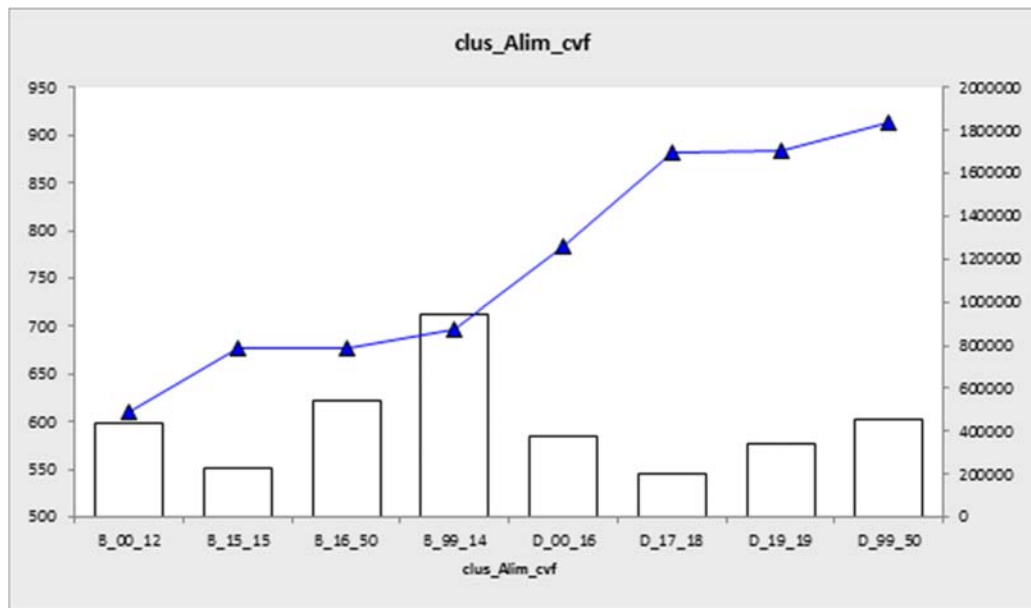
Di seguito saranno riportati i grafici e le tabelle relative ad un'analisi univariata del *DaU\_1yr* per ognuna delle variabili esplicative selezionate nei PIRM:



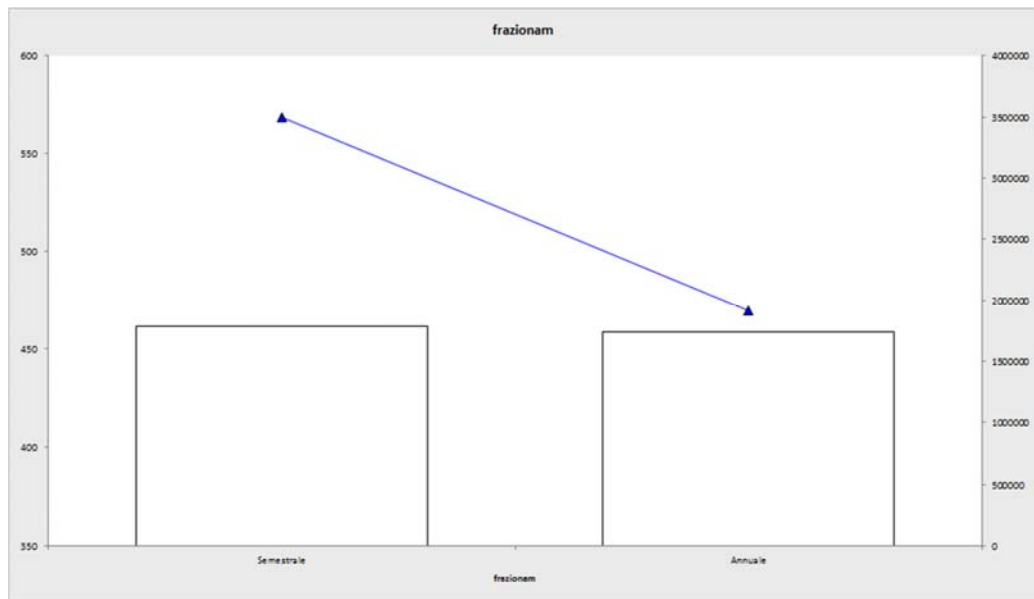
	DaU_1yr	Veic
2010	813	1,103,864
2011	763	1,215,470
2012	670	1,206,875



	DaU_1yr	Veic
001_018	525	247,071
019_031	624	203,818
032_047	631	245,369
048_061	639	291,111
062_082	642	233,511
083_104	677	244,690
105_115	683	234,121
116_129	753	224,768
130_141	757	230,583
142_158	782	244,589
159_171	801	232,709
172_191	822	242,959
193_205	873	227,245
206_220	879	202,502
999_192	1,194	221,163



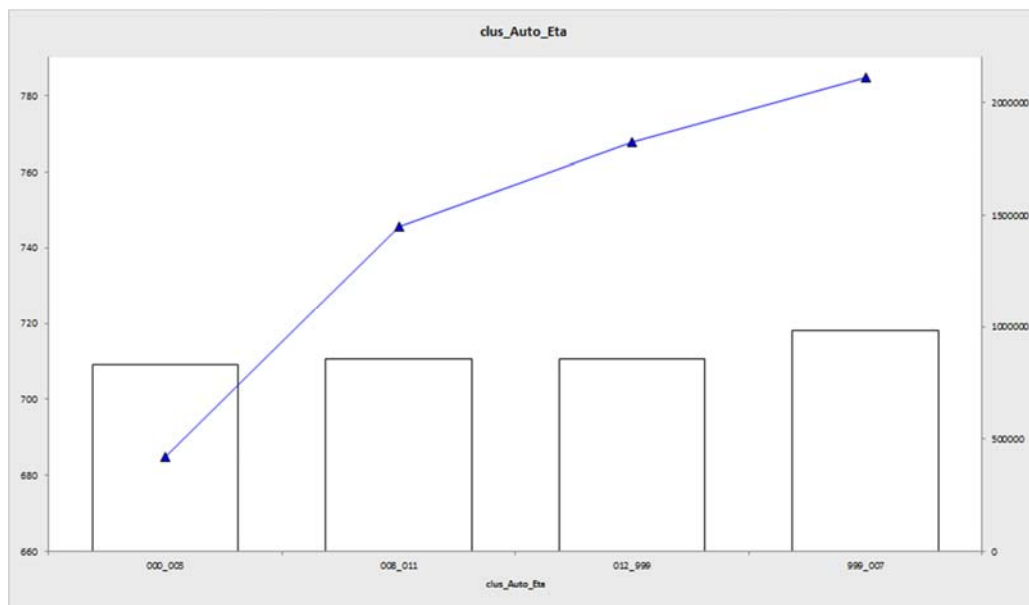
	DaU_1yr	Veic
B_00_12	610	437,027
B_16_50	677	545,911
B_99_14	677	944,892
B_15_15	698	223,811
D_17_18	783	203,439
D_00_16	881	376,548
D_99_50	883	453,698
D_19_19	913	340,885



	DaU_1yr	Veic
Semestrale	569	1,788,524
Annuale	470	1,737,685

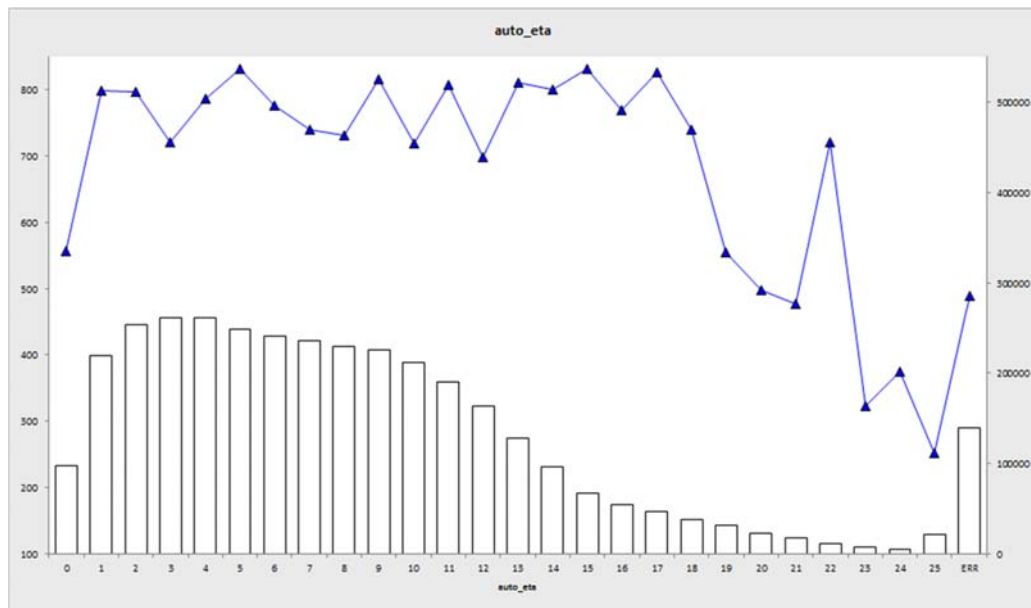
Per la vetustà del veicolo, inoltre, saranno mostrati sia i grafici della variabile raggruppata (clus\_Auto\_Eta), che quelli della variabile con il maggior dettaglio di determinazioni (auto\_eta).

In particolare, la variabile raggruppata è stata selezionata come variabile esplicativa nel GLM e nel GLMM, mentre quella granulare è stata utilizzata nel Modello Misto.

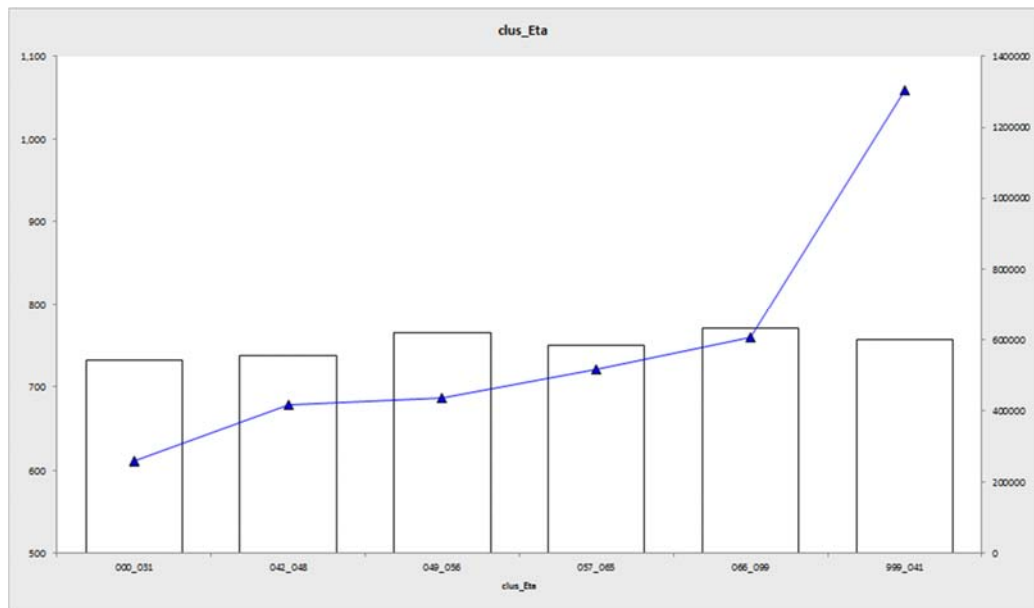


	DaU_1yr	Veic
012_999	685	830,381
000_003	746	855,715
008_011	768	855,288
999_007	785	984,826

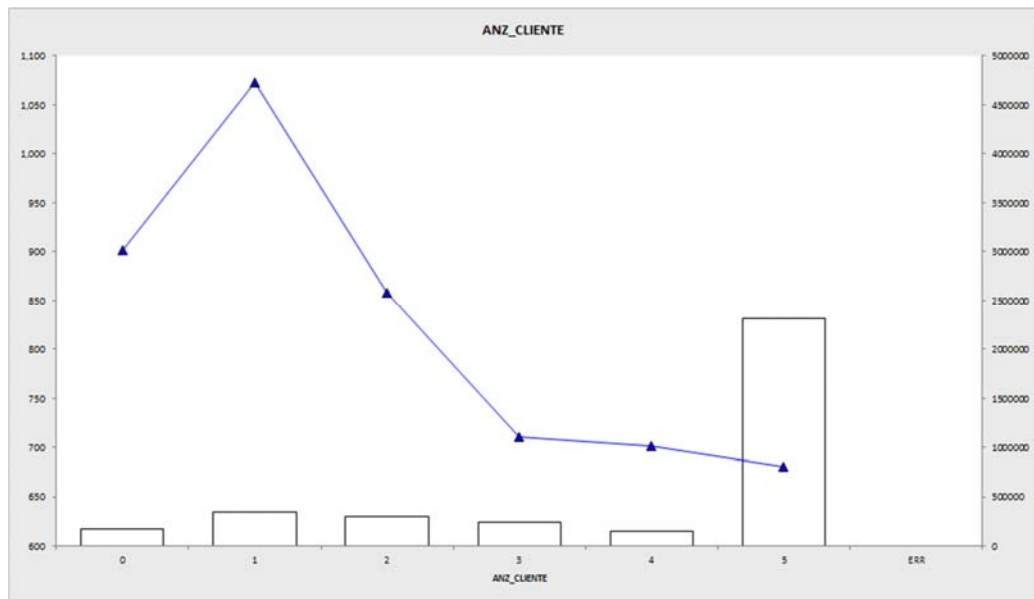




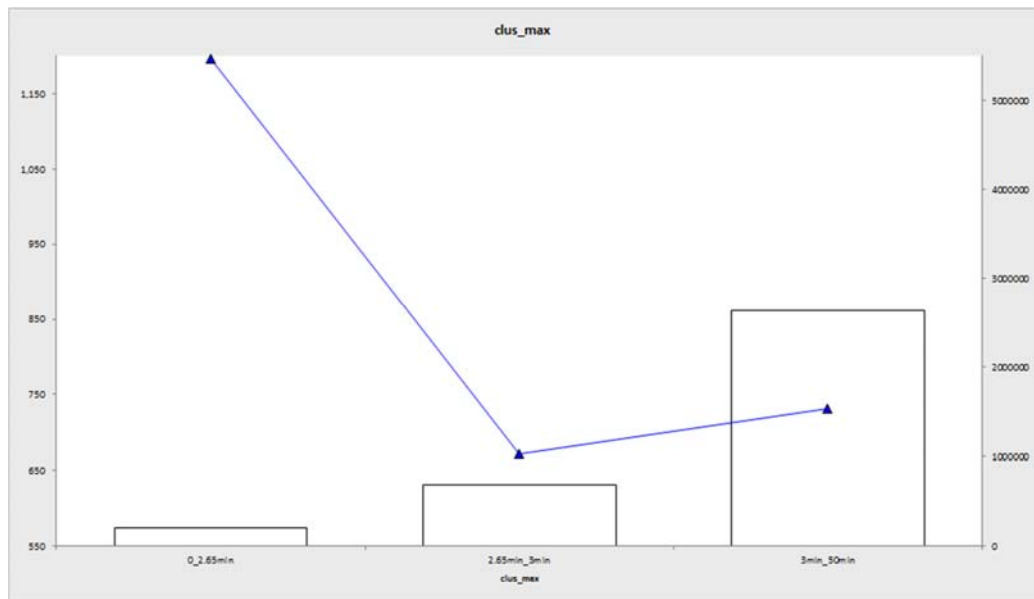
	DaU_1yr	Veic		DaU_1yr	Veic
0	558	97,773	20	499	23,534
1	799	219,032	21	478	17,600
2	797	253,184	22	721	12,102
3	721	260,392	23	323	8,131
4	787	261,012	24	374	5,432
5	832	247,680	25	252	22,131
6	777	240,685	ERR	490	139,340
7	740	235,449			
8	732	229,137			
9	816	225,058			
10	719	211,633			
11	808	189,887			
12	699	163,385			
13	811	128,411			
14	800	95,771			
15	832	67,617			
16	770	55,016			
17	827	47,297			
18	741	37,585			
19	555	31,936			



	DaU_1yr	Veic
066_099	611	541,723
999_041	678	553,458
057_065	687	617,570
042_048	722	582,938
049_056	759	631,373
000_031	1,059	599,146



	DaU_1yr	Veic
0	901	173,173
1	1,073	342,467
2	858	296,410
3	711	240,905
4	702	155,682
5	680	2,317,572
ERR	-	-

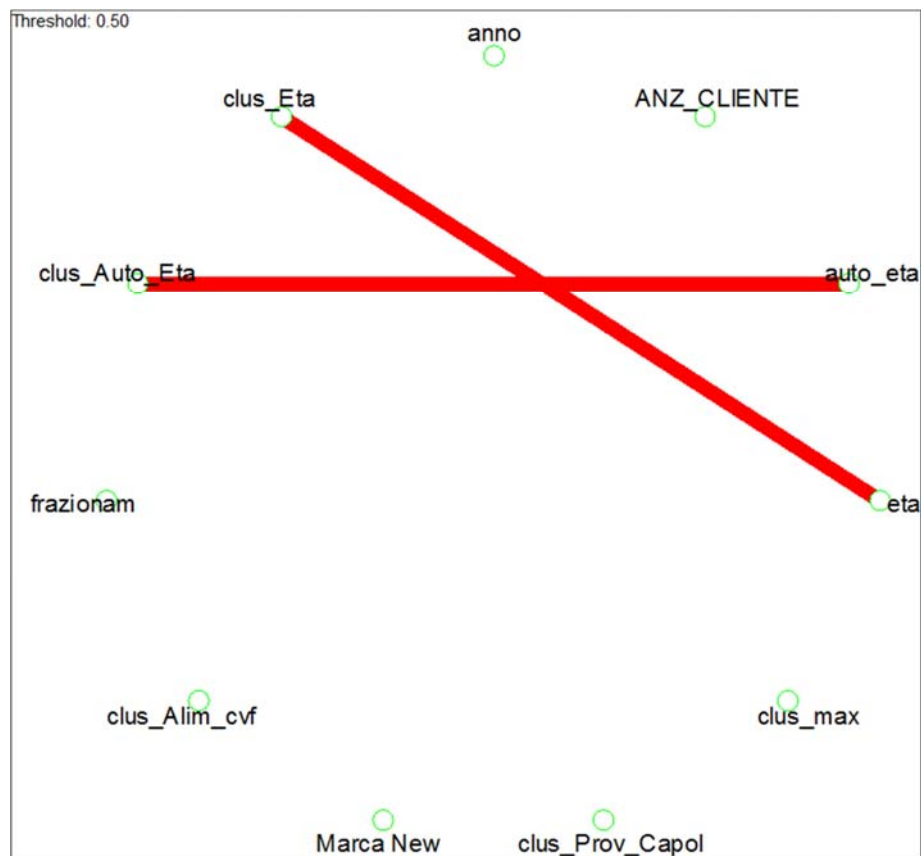


	DaU_1yr	Veic
0_2.65mln	1,197	208,031
2.65mln_3mln	671	690,010
3mln_50mln	732	2,628,168

Un altro elemento di interesse per un valutatore impegnato nell'analisi della variabile risposta (in questa tesi il *DaU\_1yr*) riguarda le correlazioni tra le variabili. Sebbene il termine maggiormente in uso nella prassi è quello di "correlazione", il criterio adoperato per analizzare tale fenomeno è la statistica *V di Cramer*.

Tale indicatore misura in particolare l'*associazione* tra le variabili ed è preferito rispetto ad altre misure classiche di correlazione poiché consente di ottenere un risultato anche tra variabili qualitative o nel confronto tra variabili quantitative e qualitative.

Osservando il grafico di tale indicatore dopo aver fissato come soglia un'associazione almeno pari al 50%



si evidenzia come non ci siano correlazioni rilevanti tra le variabili esplicative, a meno dell'età del proprietario ("eta") e della vetustà del veicolo ("auto\_eta") con la loro rispettiva versione raggruppata, correlazione vera per costruzione.

In conclusione, ognuna delle variabili esplicative potrebbe risultare significativa nei PIRM.

## B. I modelli statistici

### i. Prospetto riepilogativo dei fattori di rischio

#### Modello Lineare Generalizzato (GLM) – DaU\_1yr (Attritional)

<i>Variabili Esplicative</i>	<i>Modalità</i>	<i>Previsore Lineare</i>	<i>Valore Stimato</i>	<i>Variabili Esplicative</i>	<i>Modalità</i>	<i>Previsore Lineare</i>	<i>Valore Stimato</i>
Intercept	-	7.54	1,887.83	Anz_Cliente	0	0.29	1.34
anno	2009	0.22	1.25	Anz_Cliente	1	0.47	1.59
anno	2010	0.17	1.18	Anz_Cliente	2	0.24	1.27
anno	2011	-	1.00	Anz_Cliente	3	0.05	1.06
clus_Auto_Eta	000_003	-	0.09	Anz_Cliente	4	0.04	1.04
clus_Auto_Eta	008_011		0.09	Anz_Cliente	5	-	1.00
clus_Auto_Eta	012_999		0.00	clus_Prov_Capol	001_018	-	0.35
clus_Auto_Eta	999_007	-	1.00	clus_Prov_Capol	019_031	-	0.27
clus_Eta	000_031		0.51	clus_Prov_Capol	032_047	-	0.13
clus_Eta	042_048		0.12	clus_Prov_Capol	048_061	-	0.07
clus_Eta	049_056		0.14	clus_Prov_Capol	062_082	-	0.03
clus_Eta	057_065		0.04	clus_Prov_Capol	083_104	-	0.02
clus_Eta	066_099	-	0.05	clus_Prov_Capol	105_115	-	0.01
clus_Eta	999_041	-	1.00	clus_Prov_Capol	116_129	-	1.10
clus_max	0_2.65mln		0.30	clus_Prov_Capol	130_141		0.09
clus_max	2.65mln_3mln	-	1.00	clus_Prov_Capol	142_158		0.12
clus_max	3mln_50mln	-	0.08	clus_Prov_Capol	159_171		0.15
clus_Alim_cvf	B_00_12	-	0.40	clus_Prov_Capol	172_191		0.18
clus_Alim_cvf	B_15_15	-	0.27	clus_Prov_Capol	193_205		0.21
clus_Alim_cvf	B_16_50	-	0.29	clus_Prov_Capol	206_220		0.26
clus_Alim_cvf	B_99_14	-	0.26	clus_Prov_Capol	999_192		0.76
clus_Alim_cvf	D_00_16	-	0.03	frazionam	1		0.70
clus_Alim_cvf	D_17_18	-	0.20	frazionam	2	-	1.00
clus_Alim_cvf	D_19_19		0.04				
clus_Alim_cvf	D_99_50	-	1.00				

**Modello Misto (GLM-GAM) – DaU\_1yr (Attritional)**

<i>Variabili Esplicative</i>	<i>Modalità</i>	<i>Previsore Lineare</i>	<i>Valore Stimato</i>	<i>Variabili Esplicative</i>	<i>Modalità</i>	<i>Previsore Lineare</i>	<i>Valore Stimato</i>
Intercept	-	7.06	1,165.91	Anz_Cliente	0	0.28	1.32
anno	2009	0.25	1.25	Anz_Cliente	1	0.46	1.59
anno	2010	0.18	1.19	Anz_Cliente	2	0.25	1.28
anno	2011	-	1.00	Anz_Cliente	3	0.06	1.06
clus_Auto_Eta	000_003	- 0.08	0.93	Anz_Cliente	4	0.02	1.03
clus_Auto_Eta	008_011	0.07	1.08	Anz_Cliente	5	-	1.00
clus_Auto_Eta	012_999	0.00	1.00	clus_Prov_Capol	001_018	- 0.34	0.72
clus_Auto_Eta	999_007	-	1.00	clus_Prov_Capol	019_031	- 0.27	0.76
clus_Eta	000_031	0.45	1.57	clus_Prov_Capol	032_047	- 0.11	0.90
clus_Eta	042_048	0.07	1.08	clus_Prov_Capol	048_061	- 0.05	0.96
clus_Eta	049_056	0.12	1.13	clus_Prov_Capol	062_082	- 0.03	0.97
clus_Eta	057_065	0.03	1.03	clus_Prov_Capol	083_104	- 0.02	0.98
clus_Eta	066_099	- 0.06	0.94	clus_Prov_Capol	105_115	- 0.01	0.99
clus_Eta	999_041	-	1.00	clus_Prov_Capol	116_129	-	1.06
clus_max	0_2.65mln	0.31	1.36	clus_Prov_Capol	130_141	0.06	1.15
clus_max	2.65mln_3mln	-	1.00	clus_Prov_Capol	142_158	0.14	1.16
clus_max	3mln_50mln	- 0.08	0.93	clus_Prov_Capol	159_171	0.15	1.16
clus_Alum_cvf	B_00_12	- 0.39	0.68	clus_Prov_Capol	172_191	0.15	1.22
clus_Alum_cvf	B_15_15	- 0.22	0.81	clus_Prov_Capol	193_205	0.20	1.27
clus_Alum_cvf	B_16_50	- 0.26	0.77	clus_Prov_Capol	206_220	0.24	2.05
clus_Alum_cvf	B_99_14	- 0.32	0.73	clus_Prov_Capol	999_192	0.72	1.00
clus_Alum_cvf	D_00_16	- 0.03	0.97	frazionam	1	0.72	2.05
clus_Alum_cvf	D_17_18	- 0.18	0.84	frazionam	2	-	1.00
clus_Alum_cvf	D_19_19	0.03	1.03				
clus_Alum_cvf	D_99_50	-	1.00				

**Modello Lineare Misto Generalizzato – DaU\_1yr (Attritional)**

<i>Variabili Esplicative</i>	<i>Modalità</i>	<i>Previsore Lineare</i>	<i>Valore Stimato</i>	<i>Variabili Esplicative</i>	<i>Modalità</i>	<i>Previsore Lineare</i>	<i>Valore Stimato</i>
Intercept	-	7.05	1,147.43	Anz_Cliente	0	0.30	1.35
anno	2009	0.16	1.18	Anz_Cliente	1	0.46	1.58
anno	2010	0.11	1.11	Anz_Cliente	2	0.23	1.26
anno	2011	-	1.00	Anz_Cliente	3	0.07	1.07
clus_Auto_Eta	000_003	-	0.06	Anz_Cliente	4	0.07	1.08
clus_Auto_Eta	008_011		0.05	Anz_Cliente	5	-	1.01
clus_Auto_Eta	012_999		0.00	clus_Prov_Capol	001_018	-	0.29
clus_Auto_Eta	999_007		-	clus_Prov_Capol	019_031	-	0.17
clus_Eta	000_031		0.43	clus_Prov_Capol	032_047	-	0.09
clus_Eta	042_048		0.06	clus_Prov_Capol	048_061	-	0.04
clus_Eta	049_056		0.12	clus_Prov_Capol	062_082	-	0.02
clus_Eta	057_065		0.02	clus_Prov_Capol	083_104	-	0.01
clus_Eta	066_099	-	0.05	clus_Prov_Capol	105_115	-	0.00
clus_Eta	999_041		-	clus_Prov_Capol	116_129		-
clus_max	0_2.65mln		0.25	clus_Prov_Capol	130_141		0.05
clus_max	2.65mln_3mln		-	clus_Prov_Capol	142_158		0.08
clus_max	3mln_50mln	-	0.05	clus_Prov_Capol	159_171		0.10
clus_Alum_cvf	B_00_12	-	0.33	clus_Prov_Capol	172_191		0.14
clus_Alum_cvf	B_15_15	-	0.21	clus_Prov_Capol	193_205		0.17
clus_Alum_cvf	B_16_50	-	0.21	clus_Prov_Capol	206_220		0.24
clus_Alum_cvf	B_99_14	-	0.24	clus_Prov_Capol	999_192		0.74
clus_Alum_cvf	D_00_16	-	0.02	frazionam	1		0.73
clus_Alum_cvf	D_17_18	-	0.13	frazionam	2		-
clus_Alum_cvf	D_19_19		0.02				1.00
clus_Alum_cvf	D_99_50		-				

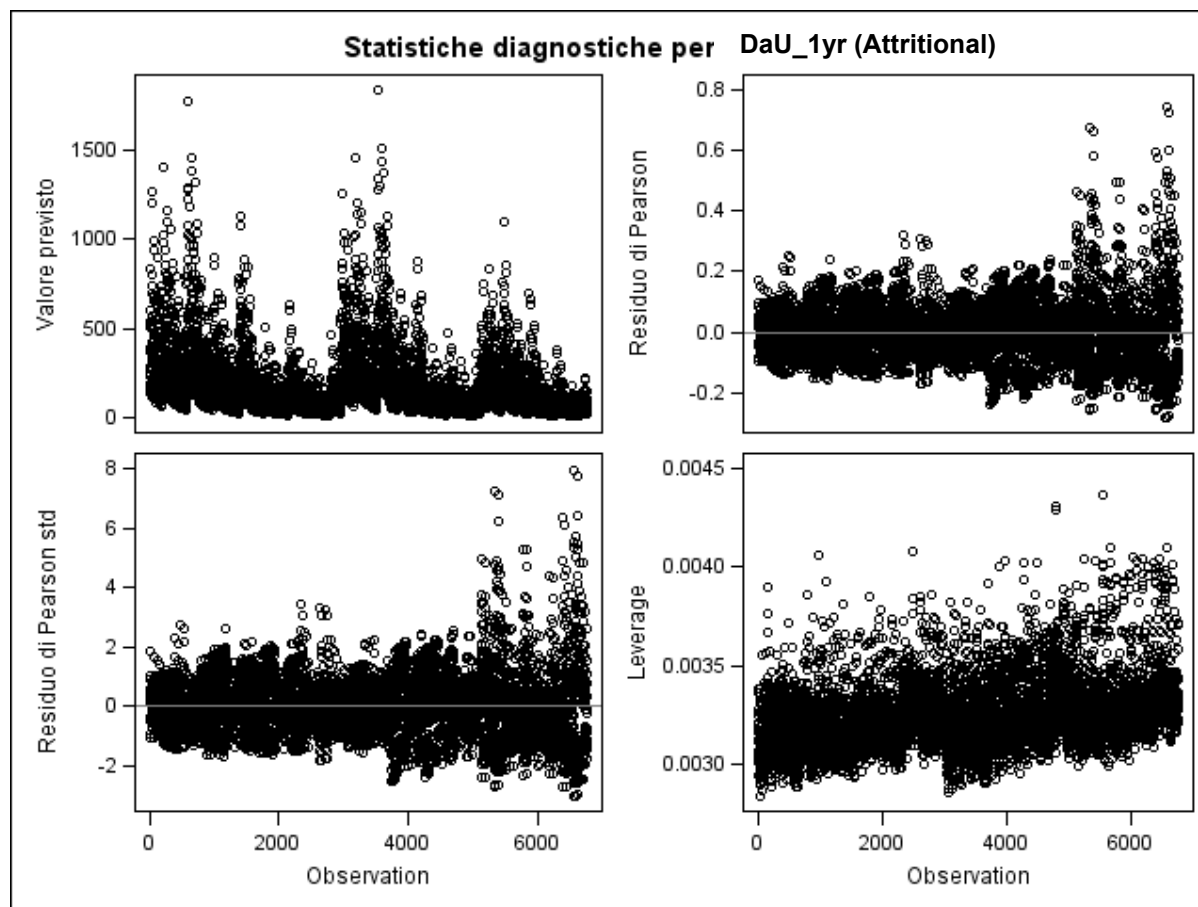


**Modello Lineare Generalizzato (GLM) – DaU\_1yr (Large)**

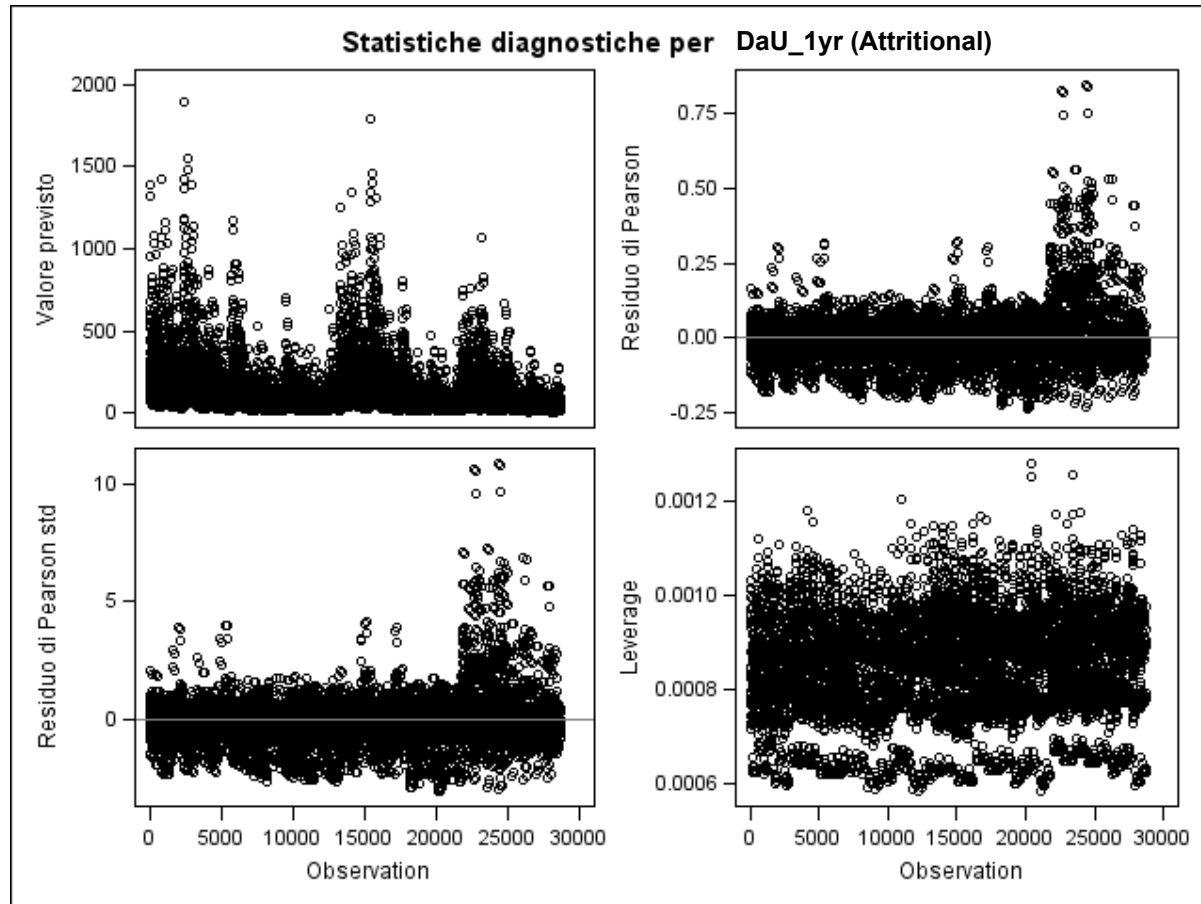
<i>Variabili Esplicative</i>	<i>Modalità</i>	<i>Previsore Lineare</i>	<i>Valore Stimato</i>
Intercetta	-	12.90	400,312.19
anno	2009	0.07	1.07
anno	2010	- 0.31	0.74
anno	2011	-	1.00
clus_Eta	000_031	0.15	1.16
clus_Eta	042_048	0.34	1.40
clus_Eta	049_056	0.26	1.30
clus_Eta	057_065	0.92	2.52
clus_Eta	066_099	0.78	2.17
clus_Eta	999_041	-	1.00
clus_Prov_Capol	001_018	- 1.25	0.29
clus_Prov_Capol	019_031	- 0.46	0.63
clus_Prov_Capol	032_047	- 0.02	0.98
clus_Prov_Capol	048_061	-	1.04
clus_Prov_Capol	062_082	0.04	1.07
clus_Prov_Capol	083_104	0.07	1.10
clus_Prov_Capol	105_115	0.10	1.24
clus_Prov_Capol	116_129	0.22	1.30
clus_Prov_Capol	130_141	0.26	1.38
clus_Prov_Capol	142_158	0.32	1.41
clus_Prov_Capol	159_171	0.35	1.58
clus_Prov_Capol	172_191	0.45	1.88
clus_Prov_Capol	193_205	0.63	1.95
clus_Prov_Capol	206_220	0.67	2.54
clus_Prov_Capol	999_192	0.93	1.00

*ii. Validazione dei Modelli*

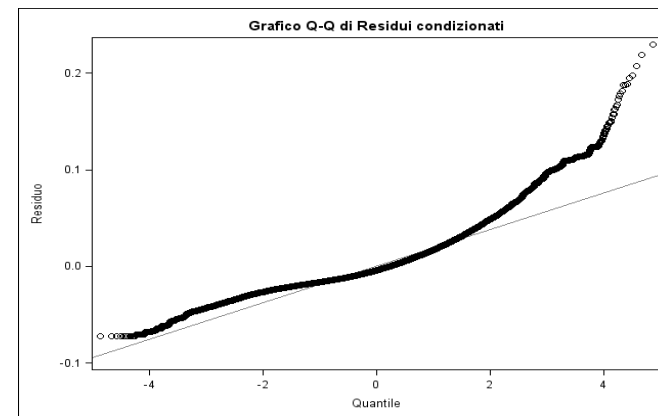
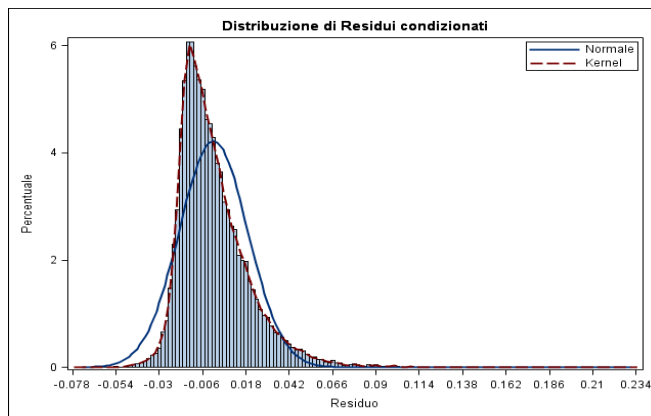
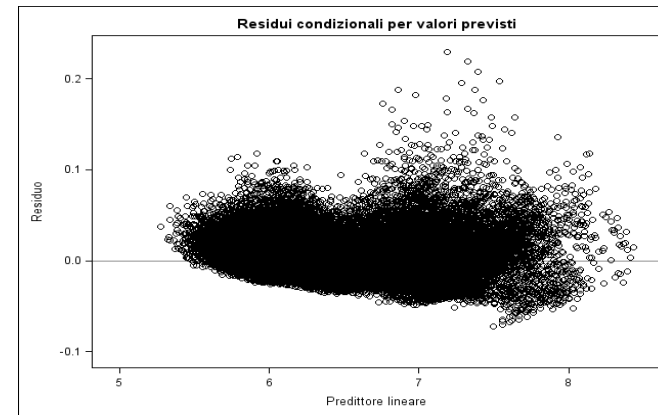
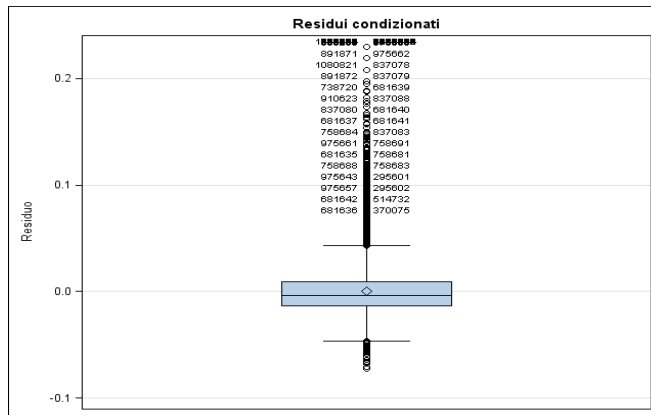
**Modello Lineare Generalizzato (GLM) – DaU\_1yr (Attrititional)**



Modello Misto (GLM-GAM) – DaU\_1yr (Attritional)



## Modello Lineare Misto Generalizzato – DaU\_1yr (Attritional)<sup>17</sup>



<sup>17</sup> La PROC GLMMIX consente di analizzare i residui con un dettaglio maggiore rispetto alla PROC GENMOD o GAM

### Modello Lineare Generalizzato (GLM) – DaU\_1yr (Large)

