UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA “LA SAPIENZA”
DIPARTIMENTO DI SCIENZE ATTUARIALI E FINANZIARIE

DOTTORATO DI RICERCA IN SCIENZE ATTUARIALI
(XVII CICLO)

ASPETTI ASSICURATIVI E FINANZIARI DELL’INTEGRALE DI CHOQUET

MARIA ELENA ADDESSI

ROMA, DICEMBRE 2004

Sento il dovere di ringraziare tutti Coloro che mi hanno aiutata in questo percorso di ricerca.

Prima d'altri il professor **Francesco Cetta** che mi ha indirizzata e seguita;

tutti i professori del dottorato di ricerca e, particolarmente, i coordinatori, professoressa **Lucia Vitali** e professor **Fabio Grasso**;

il professor **Paolo De Angelis** per i preziosi suggerimenti.

Ringrazio sentitamente il professor **Riccardo Ottaviani** per la disponibilità dimostrata tutte le volte, non poche, che mi sono rivolta a Lui per un consiglio.

INTRODUZIONE

L'integrale di Choquet si colloca nella vasta letteratura sulla teoria dell'utilità attesa. La funzione di utilità è essenzialmente soggettiva e dipende "*dall'atteggiamento di fronte al rischio del soggetto, o individuo, cui si riferisce, e del quale esprime le preferenze a tale riguardo*[1]".

Un ambito, quindi, difficilmente schematizzabile sia per la costante incoerenza dei comportamenti umani, sia pure per il continuo susseguirsi ed accavallarsi di situazioni sempre diverse.

Ci si riferisce all'atteggiamento dell'individuo di fronte all'incertezza, quindi ad una situazione soggettiva non limitata allo specifico delle assicurazioni, ma che tuttavia di queste costituisce la motivazione di base: il problema, infatti, è stato e viene continuamente dibattuto.

DE FINETTI, B- EMANUELLI, F. (1967), *Economia delle assicurazioni,*UTET, Capitolo 2, pagina 63

Tracciare un excursus storico della letteratura in merito alla teoria dell'utilità attesa non è semplice, sia per la sua vastità, sia per i diversi approcci dai quali è stato affrontata. Può essere tuttavia agevole, e ritengo anche utile, fissare alcuni capisaldi ad indicare, sia pure per sommi capi, l'evolversi del pensiero scientifico su tale argomento.

Già nel secolo XVIII, forse non a caso nell'età dei lumi e degli enciclopedisti, D. Bernoulli (1700-1782) propone "*l'introduzione di quel particolare approccio operativo in problemi di scelta tra decisioni con conseguenze aleatorie*[2]" focalizza quindi il concetto di alea unita da nesso logico alla scelta, quindi l'utilità che da essa ci si attende.

Il discorso prosegue e si delinea attraverso le teorie volte a prevedere, in capo all'individuo, un comportamento in qualche modo razionalizzabile attraverso la proposizione di aspetti

[2] DABONI, L. (1982), *Sulla nozione di utilità bernoulliana*, in "Saggi in onore di Bruno Menegoni", Rendiconti del Comitato per gli Studi e per la Programmazione Economica, Volume XX, Editrice Alceo Padova, pagina 97.

normativi; aspetti normativi che il Daboni(1982) sintetizza con due sistemi di assiomi[3] interdipendenti.

Un tema quindi complesso e centrale in ogni scelta assicurativa.

Se oggi possiamo parlare di teoria dell'utilità, ciò si deve all'ingente mole di studi che si sono susseguiti sull'argomento; difficile quindi proporre idee nuove o soluzioni originali, ma sempre utile soffermarci su specifici e limitati aspetti.

Ritengo che l'integrale di Choquet, per l'originalità della costruzione e del metodo di indagine, rappresenti un capitolo appassionante ed essenziale della moderna matematica attuariale.

Una delle prime critiche alla teoria dell'utilità attesa (EUT) di Von Neumann e Morgenstern fu mossa da Allais con il risultato noto come *paradossodo di Allais*[4]; tale paradosso consiste in un esperimento in cui le persone fanno scelte non coerenti con il modello di utilità attesa. Successivamente, un'altro paradosso, fu

---

[3] Continuità (o proprietà archimedea), sostituibilità(o assioma di indipendenza), assioma di monotònia.

[4] Si veda appendice B.

evidenziato da Ellsberg[5] che mise in dubbio la possibilità di descrivere le scelte individuali in condizioni di incertezza attraverso il modello di utilità attesa.

L'esperimento di Allais si basa sull'impostazione oggettiva della probabilità, in quanto la probabilità di un dato evento è nota, mentre le osservazioni di Ellsberg sono basate su probabilità incognite.

Successivamente modelli alternativi a quello della EUT sono stati proposti per descrivere i comportamenti non inquadrabili in tale teoria.

In tutti i modelli viene riformulato l'assioma di indipendenza che è il nucleo centrale del modello dell'utilità attesa.

I modelli alternativi possono essere suddivisi in due gruppi mediante i seguenti criteri:

- modelli basati sulla definizione di probabilità oggettivista;
- modelli basati su probabilità soggettive.

[5] Si veda appendice B.

Sui modelli oggettivistici, bisogna ricordare il tentativo di Allais per risolvere i paradossi, ad essi contrapponendo il così detto *funning out*[6] basato sulle curve di indifferenza.

Dai modelli soggettivistici prende spunto l'argomento di questo lavoro incentrato sul modello di *Choquet expected utility* definito da Schmeidler.

Il modello di utilità attesa, tuttavia, resta ancora, il modello più utilizzato dalle teorie finanziarie e assicurative.

Le ragioni di una tale persistenza, nonostante i noti limiti del modello in parola (es. i paradossi di Allais ed Ellseberg) e la presenza di modelli alternativi, vanno probabilmente ricercate nella sua semplicità descrittiva.

Il presente lavoro si articola in tre capitoli e appendici.

---

[6] Il concetto di *funning out* è riferito alla caratteristica delle curve d'indifferenza di essere lineari e non parallele.

Nel capitolo primo viene proposta uno studio dei parametri di Choquet riguardo la pratica assicurativa generalizzando i risultati proposti da[7] CHATEAUNEUF-GRANT-EICHBERGER(2003). Sono state considerate diciotto ipotesi di lavoro in relazione alle possibili funzioni di utilità (nello specifico sono state esaminate funzioni esponenziali nel caso di propensione ed avversione al rischio e funzioni lineari) e alle scelte dei parametri di Choquet γ e λ.

E' stata valutata la differenza, in termini di utilità attesa, tra l'acquisto e il non acquisto di una copertura assicurativa, ed è stata effettuata una analisi di sensitività rispetto alle variabili in gioco: parametri di Choquet, capitale iniziale a disposizione dell'assicurato, probabilità di sinistro, ammontare del danno.

In tutti i diciotto casi sono state calcolate le probabilità che rendono indifferente l'acquisto della copertura e sono state proposte alcune considerazioni numeriche.

---

[7] CHATEAUNEUF, A.-GRANT, S.- EICHBERGER, J.(2003), *Choice under Uncertainty with the Best and worst in Mind: Neo-Additive* c*apacities*, Universiy of Heidelberg, Department of Economics, Discussion Paper Series No. 393.

L’asimmetria informativa nei confronti della controparte, sia essa la compagnia o l’assicurato, viene esplicitata attraverso l’uso dei parametri di Choquet.

Nel capitolo secondo sono state esaminate le proprietà dei funzionali di premio in ipotesi di non equilibrio attuariale, ovvero, nel caso in cui le parti non abbiano a disposizione le stesse informazioni su un determinato fenomeno e/o sull’evolversi di questo.

E’ necessario osservare che i ragionamenti alla base delle scelte dell’assicurato e dell’assicuratore sono speculari ma si basano su diverse informazioni (asimmetria informativa).

Il premio è stato scomposto in relazione ai diversi stati di natura e sono state descritte e giustificate le proprietà del funzionale di premio che risulta essere un integrale di Choquet.

Il capitolo terzo è incentrato sull’analisi di portafoglio, si introduce una misura di rischio e di questa né vengono definite assiomaticamente le proprietà.

Si dimostra inoltre che sull'insieme dei rischi è possibile definire un unico funzionale che soddisfi contemporaneamente la condizione di linearità e di risk-free.

Tale funzionale è l'integrale di Choquet.

CAPITOLO PRIMO: ATTEGGIAMENTI NEI CONFRONTI DEL RISCHIO E INFORMAZIONE ASIMMETRICA

1. Posizione del problema

Chi intraprende una qualsivoglia attività economica/finanziaria si espone ad un rischio che è stimato attraverso una funzione di ripartizione.

A fronte di un importo aleatorio X si è disposti a corrispondere l'importo certo[8] $M=E[u(X)]$ con u funzione di utilità.

---

[8] Se, ad esempio, la variabile aleatoria X è discreta ed assume il valore x_1 con probabilità p_1, x_2 con probabilità p_2, …, x_n con probabilità p_n, risulta $E[u(X)] = \sum_i x_i p_i$.

L'equivalente certo, M, dipende dalla scelta della funzione di utilità e dal vettore delle probabilità ($p_1,\dots, p_n$) nel caso in cui si riferisca ad una variabile aleatoria discreta od la funzione di densità nel caso si voglia esaminare una variabile aleatoria continua.

La funzione di utilità, a sua volta, dipende dall'avversione, propensione, o indifferenza nei confronti del rischio

Mediante la capacità sub-additiva, e, nello specifico i parametri di Choquet, è possibile investigare sul processo inferenziale che sta alla base della stima della probabilità di un determinato evento stimando nuovamente il vettore delle probabilità in base al giudizio che si ha della distribuzione adottata.

La capacità sub-additiva è adatta a modellare l'ottimismo e/o pessimismo sintetizzati dalla funzione di utilità e la asimmetria informativa identificabile nelle stime dei vettori di probabilità.

Nei contratti aleatori, l'asimmetria informativa consiste nelle diverse valutazioni che le parti hanno circa l'eventualità che si verifichi un determinato evento. Le diverse valutazioni si esplicano in altrettanti vettori di probabilità.

Il valore dell'integrale di Choquet è basato su una distribuzione di probabilità (π) ed su dei parametri che, opportunamente scelti e combinati, rispecchiano le diverse valutazioni circa l'evento che si sta valutando.

In questo capitolo è proposta un'analisi di sensitività dei parametri di Choquet (γ,λ) e vengono generalizzati i risultati proposti da CHATEAUNEUF, A.-GRANT, S.- EICHBERGER, J.(2003)[9].

2. Assicurazione

Chi acquista una copertura assicurativa preferisce ridurre l'eventuale danno derivante da una determinata esposizione al rischio trasferendo questo all'assicuratore.

La convenienza di tale trasferimento, in ambiente di asimmetria informativa, può essere valutata attraverso l'utilizzo dei parametri di Choquet[10].

Denotiamo con:

[9] CHATEAUNEUF, A.-GRANT, S.- EICHBERGER, J.(2003), *Choice under Uncertainty with the Best and worst in Mind: Neo-Additive* c*apacities*, Universiy of Heidelberg, Department of Economics, Discussion Paper Series No. 393.

[10] Si veda Appendice A, paragrafo n.7.

x: la disponibilità finanziaria iniziale

π_L: probabilità di sinistro

q: premio puro

L: costo del sinistro

$u(\cdot)$: funzione d'utilità di classe C^2 non decrescente.

La decisione di acquistare una copertura assicurativa consiste nel valutare la (1.1):

$$\begin{aligned} &D_A(\gamma,\lambda,x,L,\pi_L,q)= \\ &=u(x-q)-[(\lambda+(1-\gamma-\lambda)\cdot(1-\pi_L))\cdot u(x)+(\gamma+(1-\gamma-\lambda)\cdot\pi_L)\cdot u(x-L)] \end{aligned} \tag{1. 1}$$

dove:

$u(x-q)$ è l'utilità attesa che deriva dall'acquisto della copertura assicurativa,

$[\lambda+(1-\gamma-\lambda)\cdot(1-\pi_L)]\cdot u(x)+[\gamma+(1-\gamma-\lambda)\cdot\pi_L]\cdot u(x-L)$:l'utilità attesa dal non acquisto della copertura assicurativa nel caso in cui non accade il sinistro e nel caso in cui si verifica.

L'equazione (1.1) è una applicazione dei parametri di Choquet . In riferimento alla (1.1) è stato posto *inf*(f)=0, (ipotesi di non sinistro), *sup*(f)=L (ipotesi di sinistro) e $E(f)=\pi_L \cdot L$.

I parametri di Choquet rispecchiano il grado di fiducia di chi opera la scelta dell'acquisto della copertura rispetto alla probabilità di sinistro.

3. Analisi di sensitività

Procediamo ora ad un'analisi di sensitività della (1.1) con riferimento a tutte le variabili descrittive adottando funzioni d'utilità lineari per l'indifferenza nei confronti del rischio ed esponenziali nel caso di avversione o propensione[11].

In ambo i casi, il decisore acquisterà la polizza se e solo se la (1.1) è maggiore di zero.

-*Analisi di sensitività con funzione d'utilità lineare* $u(x)=\beta x$ *(indifferenza verso il rischio)*

[11] Si sono scelte funzioni si fatte in accordo con il lavoro già citato di CHATEAUNEUF, A.-GRANT, S.- EICHBERGER, J.(2003).

Si verifica banalmente che il segno di (1.1) non dipende da $\beta > 0$ e pertanto scegliamo $\beta = 1$.

$$D_A(\gamma,\lambda,x,L,\pi_L,q) = \\ (x-q) - ([\lambda + (1-\gamma-\lambda)\cdot(1-\pi_L)]\cdot x + [\gamma + (1-\gamma-\lambda)\cdot\pi_L]\cdot(x-L)) \qquad 1.2$$

le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial D_A(\gamma,\lambda,x,L,\pi_L,q)}{\partial\lambda} = -(1-\pi_L)\cdot(L-2x) \qquad 1.3$$

$$\frac{\partial D_A(\gamma,\lambda,x,L,\pi_L,q)}{\partial\gamma} = \pi_L\cdot(L-2x) \qquad 1.4$$

$$\frac{\partial D_A(\gamma,\lambda,x,L,\pi_L,q)}{\partial\pi_L} = -(1-\gamma-\lambda)\cdot(L-2x) \qquad 1.5$$

$$\frac{\partial D_A(\gamma,\lambda,x,L,\pi_L,q)}{\partial q} = -1 \qquad 1.6$$

$$\frac{\partial D_A(\gamma,\lambda,x,L,\pi_L,q)}{\partial x} = 2\cdot(\pi_L\cdot(1-\gamma-\lambda)+\gamma) \qquad 1.7$$

$$\frac{\partial D_A(\gamma,\lambda,x,L,\pi_L,q)}{\partial L} = \pi_L \cdot (1-\gamma-\lambda) - \gamma \qquad 1.8$$

Osserviamo[12] preliminarmente che le derivate rispetto ai parametri di Choquet (γ, λ) e a π_L si annullano per $L=2x$, la costante "*2*" è funzione del numero dei parametri considerati. Infatti se nella (1.1) oltre l'*inf* e il *sup* della *f* si specificano anche *n* valori intermedi le (1.3), (1,4) e (1.5) si annullerebbero per $L=nx$.

Le derivate (1.3) e (1.4) hanno segno opposto giacché all'aumentare del parametro λ aumenta la fiducia nella distribuzione, in altre parole diminuisce l'asimmetria informativa, π_L mentre all'aumentare di γ la sfiducia, aumenta ovvero l'asimmetria informativa.

La derivata rispetto a π_L, (1.5), oltre che per $L=2x$ si annulla quando $\lambda + \gamma = 1$ ovvero nel caso in cui si è in grado di pesare in maniera esaustiva l'asimmetria informativa. In altre parole, se

---

[12] La derivata (1.5) è stata aggiunta per completezza per poter studiare la come varia la differenza (1.1) al variare della probabilità di sinistro.

$\lambda + \gamma < 1$, il confine tra pessimismo ed ottimismo risulta confuso e la "confusione" è data dal complemento ad uno di $\lambda + \gamma$.

Anche la derivata rispetto alla disponibilità finanziaria iniziale e rispetto al costo sinistri hanno segno opposto.

Analisi di sensitività con funzione d'utilità esponenziale $u(x) = \alpha \cdot \left(e^{\vartheta x} - 1\right)$ (avversione / propensione verso il rischio)

In questo caso risulta

$$D_A(\gamma, \lambda, x, L, \pi_L, q) = \qquad 1.9$$

$$= \alpha\left[\left(e^{\theta(x-q)} - 1\right) - \left(\left[\lambda + (1-\gamma-\lambda)\cdot(1-\pi_L)\right]\left(e^{\theta x} - 1\right) + \left[\gamma + (1-\gamma-\lambda)\cdot\pi_L\right]\left(e^{\theta(x-L)} - 1\right)\right)\right]$$

Le derivate parziali della (2.10) sono:

$$\frac{\partial D_A(\gamma, \lambda, x, L, \pi_L, q)}{\partial \lambda} = -\alpha \cdot \pi_L \cdot \left(e^{\theta x} + e^{\theta(x-L)} - 2\right) \qquad 1.10$$

$$\frac{\partial D_A(\gamma, \lambda, x, L, \pi_L, q)}{\partial \gamma} = \alpha \cdot (1-\pi_L)\cdot\left(e^{\theta x} + e^{\theta(x-L)} - 2\right) \qquad 1.11$$

$$\frac{\partial D_A(\gamma, \lambda, x, L, \pi_L, q)}{\partial \pi_L} = \alpha \cdot (1-\gamma-\lambda)\cdot\left(e^{\theta x} + e^{\theta(x-L)} - 2\right) \qquad 1.12$$

$$\frac{\partial D_A(\gamma, \lambda, x, L, \pi_L, q)}{\partial q} = -\alpha \cdot \theta \cdot e^{\theta(x-q)} \qquad 1.13$$

$$\frac{\partial D_A(\gamma,\lambda,x,L,\pi_L,q)}{\partial x}= \qquad 1.\ 14$$

$$=\alpha\cdot\theta\cdot e^{\theta(x-q-L)}\left(e^{\theta L}-e^{\theta q}\left(e^{\theta L}\left(\gamma(\pi_L-1)+\lambda\pi_L-\pi_L-1\right)+\gamma(\pi_L-1)+\pi_L(\lambda-1)\right)\right)$$

$$\frac{\partial D_A(\gamma,\lambda,x,L,\pi_L,q)}{\partial L}=\alpha\cdot\theta\cdot e^{\theta(x-L)}\left(\gamma(\pi_L-1)+\pi_L(\lambda-1)\right) \qquad 1.\ 15$$

Le (1.9), (1.10), (1.11), (1.12), (1.13)., (1.14) e (1.15) descrivono l'atteggiamento sia di chi è propenso al rischio, (α<0, $\theta<0$), sia di chi è avverso al rischio (α>0, $\theta>0$).

Le derivate rispetto ai parametri di Choquet (γ, λ) hanno segno opposto come nel caso di funzione d'utilità lineare (indifferenza nei confronti del rischio).

Il segno, della derivata parziale rispetto alla distribuzione (π_L), dipende dalla predisposizione nei confronti del rischio (infatti, il segno della (1.12) dipende da α).

Come nel caso d'indifferenza nei confronti del rischio, la derivata rispetto al premio q è negativa (per ipotesi $\alpha\cdot\theta>0$).

Come risulta evidente dalla tabella 1.1 da una parte si tiene conto della funzione di utilità adotta, in altre parole si analizza l'atteggiamento nei confronti del rischio (indifferente, propenso, avverso), dall'altra si prende in considerazione l'*opinione* che si ha della distribuzione (parametri di Choquet).

Nella tabella 1.1, vengono calcolate le probabilità, π_L, che rendono del tutto indifferente comprare o non comprare la copertura, in altre parole sono le probabilità che annullano le equazioni (1.3) e (1.10).

Nella funzione d'utilità che descrive l'atteggiamento di propensione al rischio (1.16) è stato posto $\alpha=1$ e $\theta=1$, mentre nell'equazione d'avversione al rischio $\alpha=-1$ e $\theta=-1$.

Funzioni d'utilità $\rightarrow$ **Parametri di Choquet** $\downarrow$	**Avverso** $U(x) = 1 - e^{-x}$	**Indifferente** $U(x) = x$	**Propenso** $U(x) = e^{x} - 1$
Utilità attesa $\gamma = \lambda = 0$	$\pi_L = \frac{e^q - 1}{e^L - 1}$	$\pi_L = \frac{q}{L \cdot}$	$\pi_L = \frac{e^L - e^{L-q}}{e^L - 1}$
Pessimismo $\lambda = 0$ **e** $0 < \gamma < 1$	$\pi_L = \frac{e^q + \gamma - 1}{(\gamma - 1)(1 - e^L)}$	$\pi_L = \frac{\gamma \cdot L - q}{L \cdot (\gamma - 1)}$	$\pi_L = \frac{e^L(\gamma - 1) - \gamma + e^{L-q}}{(\gamma - 1)(e^L - 1)}$
Cauto pessimismo $0 < \lambda \leq \gamma < 1$ **e** $\lambda + \gamma \neq 1$	$\pi_L = \frac{e^q - \lambda \cdot e^L + \gamma - 1}{(\gamma + \lambda - 1)(1 - e^L)}$	$\pi_L = \frac{\gamma \cdot L - q}{L \cdot (\gamma + \lambda - 1)}$	$\pi_L = \frac{e^L(\gamma - 1) - \gamma + e^{L-q}}{(\gamma + \lambda - 1)(e^L - 1)}$
Cauto ottimismo $0 < \gamma \leq \lambda < 1$ **e** $\lambda + \gamma \neq 1$	$\pi_L = \frac{e^q - \lambda \cdot e^L + \gamma - 1}{(\gamma + \lambda - 1)(1 - e^L)}$	$\pi_L = \frac{\gamma \cdot L - q}{L \cdot (\gamma + \lambda - 1)}$	$\pi_L = \frac{e^L(\gamma - 1) - \gamma + e^{L-q}}{(\gamma + \lambda - 1)(e^L - 1)}$
Ottimismo $\gamma = 0$ **e** $0 < \lambda < 1$	$\pi_L = \frac{e^q - \lambda \cdot e^L - 1}{(\gamma - 1)(1 - e^L)}$	$\pi_L = \frac{q}{L \cdot (1 - \lambda)}$	$\pi_L = \frac{e^{L-q} - e^L}{(\lambda - 1)(e^L - 1)}$
criterio di Hurwitz $\lambda + \gamma = 1$	$\pi_L = 1 - \frac{ln(e^L(1 - \lambda) + \lambda}{L}$	$\pi_L = 1 - \lambda = \gamma$	$\pi_L = 1 - \frac{ln(e^L(1 - \gamma) + \gamma)}{L}$

Tabella 1. 1

La seguente tabella mostra una analisi empirica della funzione di utilità rispetto ai parametri di Choquet ed ai diversi atteggiamenti nei confronti del rischio.

Funzioni d'utilità $\rightarrow$ **Parametri di Choquet** $\downarrow$	**Avverso** $U(x) = 1 - e^{-x}$	**Indifferente** $U(x) = x$	**Propenso** $U(x) = e^{x} - 1$
Pessimismo $\lambda = 0$ **e** $\gamma = 0,2$	0, 0322538	0,045454	0,085658
Cauto pessimismo $0 < \lambda \leq \gamma < 1$ **e** $\gamma = 0,05 \quad \lambda = 0,04$	0,0439896	0,311355	0,676089
Cauto ottimismo $0 < \gamma \leq \lambda < 1$ **e** $\gamma = 0,04 \quad \lambda = 0,05$	0,0549786	0,322344	0,687078
Utilità attesa $\gamma = \lambda = 0$	0,0900305	O,333333	0,665240
Ottimismo $\gamma = 0$ **e** $0 < \lambda < 1$	0,112538	0,416666	0,831550
criterio di Hurwitz $\lambda = \gamma = 0,5$	0.214853	0,5	0.785144

Tabella 1. 2

E' opportuno osservare che, comunque assegnati i parametri di Choquet, la funzione di utilità dell'avverso è minore della funzione di utilità dell'indifferente che è a sua volta minore della funzione di utilità del propenso al rischio.

Ed inoltre la funzione d'utilità attesa è monotòna rispetto agli atteggiamenti di ottimismo pessimismo ed utilità attesa.

I parametri di Choquet risultano uno strumento per misurare l'asimmetria informativa e possono essere utilizzati in sostituzione delle probabilità di sinistro in quanto per ogni coppia di parametri, e per ogni funzione di utilità, è possibile determinare una probabilità equivalente (tabella1.1) e pertanto i parametri di Choquet possono essere utilizzati al posto delle probabilità.

Una ulteriore analisi, che in questa tesi non è proposta, riguarda lo studio delle funzioni di distribuzione dei parametri.

CAPITOLO SECONDO:IL FUNZIONALE DI PREMIO

1.Posizione del problema

L'equilibrio attuariale è studiato nell'ipotesi che le parti, assicuratori ed assicurati, abbiano a disposizione le stesse informazioni sullo stato di un determinato fenomeno e/o sull'evolversi di questo.

Questa ipotesi di lavoro è una semplificazione della realtà: le informazioni a disposizione delle parti non sono le stesse.

La Compagnia d'Assicurazione possedendo le serie storiche è in grado di proporre un'ipotesi sulla distribuzione di sinistro; l'assicurato può valutare il proprio rischio di sinistro e premunirsi mediante l'acquisto[13] di una polizza.

Più in generale, possono essere proposti diversi contesti in cui il decisore ha informazioni incomplete e/o distorte relative a situazioni incerte; problemi di questo tipo sono ampiamente discussi nella così detta *Agency Theory*[14].

L'obiettivo di questo capitolo è analizzare un contratto d'assicurazione alla luce delle suddette osservazioni e mostrare alcune applicazioni dell'integrale di Choquet.

I ragionamenti alla base delle scelte dell'assicurato e dell'assicuratore sono speculari, ma si basano su diverse informazioni.

L'assicuratore stima la distribuzione di probabilità su cui ha costruito le basi tecniche, mentre l'assicurato può dedurre dalle

---

[13] Si tratta ovviamente di assicurazioni non obbligatorie.

[14] Nell'ambito dell'Agency Theory sono studiati, ad esempio, i rapporti tra lo Stato ed i suoi debitori, tra la Banca e i depositanti, o tra Assicurato ed Assicuratore.

condizioni contrattuali le basi statistiche assunte dalla controparte.

Per modellare i diversi livelli di fiducia nei confronti della distribuzione adottata sarà utilizzato l'integrale di Choquet ed il modello di Schmeidler.

2. Il contratto assicurativo

Sia Ω l'insieme dei possibili stati del mondo, v una capacità convessa[15] ed u una funzione d'utilità concava.

La funzione di capacità è stata scelta convessa perché, com'evidenziato da Dana(2000) e Rigotti-Shannon(2004), riflette l'atteggiamento pessimistico delle parti del contratto assicurativo[16], mentre la funzione d'utilità perché è stato ipotizzato che si opera in condizione di avversione al rischio.

Definizione 2. 1- Contratto assicurativo completo
Un contratto assicurativo completo è una funzione

$$y : \Omega \rightarrow R^n \qquad \textbf{2. 1}$$

[15] La funzione f è convessa nell'intervallo I se comunque scelti $x_1, x_2 \in I$ e $0 \leq \lambda \leq 1$ si ha $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$. La funzione g è concava in I se $(-g)$ è convessa in I .

[16] DANA, R. A.(2000), *Ambiguity, Uncertainty Avversion and Equilibrium Welfare*, Discussion Peper, Ceremade.Si veda Dana(2000) e Rigotti-Shannon(2004) e RIGOTTI, L.-SHANNON,C(2004), *Uncertainty and Risk in Financial Markets.*

Se l'insieme degli eventi Ω è composto da due elementi, sinistro –non sinistro, si hanno due diversi pay-off, derivanti da polizza sinistrata e polizza non sinistrata.

Definizione 2. 2 - Contratto assicurativo incompleto o ambiguo.

Un contratto assicurativo incompleto è una funzione

$y : \Omega \setminus \{\omega_i\} \to R^{m<n}$ per qualche i 2. 2

Alcuni autori[17] analizzano la differenza tra contratti completi[18] e incompleti evidenziandone l'ambiguità di questi ultimi.

La differenza tra contratto completo ed ambiguo è che nel primo caso ad ogni stato di natura viene assegnato un pay off, nel secondo caso invece vi sono stati di natura in cui il pay off corrispondente non è determinato.

3. Proprietà dei contratti completi

Le parti del contratto assicurativo, Compagnia e assicurato, si trovano a dover ottimizzare un funzionale del tipo:

[17] Per un approfondimento si rimanda al lavoro di Mukerji(1998).
[18] Il caso dei contratti completi è la situazione standard.

$$\sum_{i=1}^{n}(\omega_i - y_i)P_i \qquad 2.\ 3$$

dove $\{\omega_i\}$ è la valutazione imputabile dall'*i*-esimo stato di natura con $\omega_i \le \omega_{i+1}$, (y_i) è la porzione di premio necessaria per coprire il rischio *i*-esimo e P_i è la probabilità associata allo stato i.

La $\sum_{i=1}^{n}(\omega_i - y_i)P_i$

2. 3) in termini d'utilità[19] attesa può essere proposta nella forma:

$$\sum_{i=1}^{n}(u(\omega_i) - u(y_i))P_i \qquad 2.\ 4$$

L'assicuratore avrà convenienza a proporre il contratto se

$$\sum_{i=1}^{n}u(y_i)P_i \ge \sum_{i=1}^{n}u(\omega_i)P_i = U \qquad 2.\ 5$$

da cui la condizione di equilibrio

$$\sum_{i=1}^{n}u(y_i)P_i = \sum_{i=1}^{n}u(\omega_i)P_i \qquad 2.$$

6

Il premio ottimo risulta:

$$y = u^{-1}(U) \qquad 2.\ 7$$

[19] Ci riferiamo ad una funzione di utilità lineare o esponenziale.

4. Proprietà dei contratti incompleti

Andersson[20] ha analizzato un modello in cui l'assicuratore possiede un'unica distribuzione di probabilità e preferisce trattare contratti completi in quanto ipotizza che le informazioni, ovvero gli stati del mondo, siano esclusivamente quelle deducibili dal contratto.

Si analizza ora, in accordo con lo studio di Anderson, come la Compagnia possa aggiornare le sue informazioni attraverso l'integrale di Choquet[21]:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[u(y(\omega_i))-u(y(\omega_{i+1}))\right]v(\{\omega_1,\cdots,\omega_n\})+u(\omega_n)\geq U_v \qquad \textbf{2. 8}$$

con

$$U_v=\sum_{i=1}^{n-1}\left[u(\omega_i)-u(\omega_{i+1})\right]v(\{\omega_1,\cdots,\omega_n\})+u(\omega_n) \qquad \textbf{2. 9}$$

Per calcolare il premio ottimo rispetto allo stato i-esimo introduciamo la derivata Lagrangiana L con λ il moltiplicatore:

$$\frac{\partial L}{\partial y_i}=-P_i+\lambda u'(y(\omega_i))\left[v(\{\omega_1,\cdots,\omega_n\})-v(\{\omega_1,\cdots,\omega_{n-1}\})\right] \qquad \textbf{2. 10}$$

[20] ANDERSSON, F.(1999), *Uncertainty aversion in a simple insurance mode*l, Finnish Economic Papers, 12,1, pp 16-27.
[21] Si veda in proposito l'Appendice Matematica.

Denotiamo inoltre con:

$$\Delta v(\omega_i) = v(\{\omega_1, \cdots, \omega_i\}) - v(\{\omega_1, \cdots, \omega_{i-1}\}) \qquad \textbf{2.11}$$

Con la notazione (2.11) l'equazione d'ottimo per il premio è data da:

$$u'(y(\omega_i)) = \frac{\Delta v(\omega_j)}{\Delta v(\omega_i)} \frac{P_i}{P_j} u'(y(\omega_j)) \qquad \textbf{2.12}$$

La(2.12) è la relazione tra la copertura ottima degli stati *i* e *j* espressa attraverso le funzioni d'utilità e le capacità.

E' interessante osservare che l'assicurato può dedurre la probabilità P utilizzata dall'assicuratore.

Dalla (2.12) possiamo scrivere

$$\frac{P_i}{P_j} = \frac{\Delta v(\omega_i)}{\Delta v(\omega_j)} \frac{u'(y(\omega_i))}{u'(y(\omega_j))} \qquad \textbf{2.13}$$

E sommando rispetto all'indice *i* si ottiene

$$\frac{1}{P_j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta v(\omega_i) u^{\prime}(y(\omega_i))}{\Delta v(\omega_j) u^{\prime}(y(\omega_j))} \qquad 2.\ 14$$

La (2.14) mostra come può essere costruita la distribuzione di probabilità dalla conoscenza delle funzioni di utilità e dalle capacità assegnate agli stati di natura.

5. Funzionale di premio assicurativo

Ci proponiamo ora di fornire un approccio assiomatico volto a caratterizzare i premi assicurativi in un mercato concorrenziale.
S'ipotizza pertanto che tutti gli agenti siano price taker e che nessuno possa influenzare i prezzi in modo autonomo.
Si assumono i seguenti assiomi per caratterizzare i premi (puri).

Assioma 2. 1

Date le condizioni di mercato il premio assicurativo dipende unicamente dalla sua distribuzione.
Dall'Assioma 2. 1 si deduce che la configurazione del mercato influenza il prezzo della copertura: in un mercato perfetto[22] il

22

prezzo sarà uguale al valore atteso; mentre in mercati non perfetti i prezzi eccederanno il valore atteso.

Indicato con H il funzionale di premio e con $X : \Omega \rightarrow R^{+}$ un rischio risulta:

$$H(X) = H(X') \quad se \quad \Gamma_{P,X} = \Gamma_{P,X'} \qquad 2.\,15$$

con

$$\Gamma_{P,X}(t) = P\{\omega \in \Omega | \quad X(\omega) > t\} \qquad 2.\,16$$

<u>Assioma 2. 2</u>

Assegnati i rischi X e Y con $X(\omega) \leq Y(\omega)$ per ogni valore di Ω risulta $H(X) \leq H(Y)$.

Se il rischio Y è più gravoso del rischio X in ogni stato del mondo, esso deve avere un prezzo più elevato. La monotònia consente di confrontare due rischi e ordinarli in base alle diverse entità delle eventuali perdite.

In quest'ambito è anche opportuno specificare il concetto di dominanza stocastica.

Definizione 2. 3

Il rischio X domina il rischio Y secondo la dominanza stocastica del primo ordine, $X \underset{FSD}{\geq} Y$ se $\Gamma_{P,X}(t) \leq \Gamma_{P,Y}(t)$.

Si osserva che se il funzionale di premio H soddisfa gli assiomi 2.1 e 2.2 le condizioni a e b sono equivalenti:

a) $\Gamma_{P,X}(t) \leq \Gamma_{P,Y}(t)$ il rischio Y ha una probabilità più alta del rischio X di trovarsi sulle code della distribuzione;

b) Il rischio Y si può derivare dal rischio X aggiungendoci un rischio.

Assioma 2. 3

I rischi X ed Y sono comonotòni

$$H(X+Y) = H(X) + H(Y) \qquad 2.\ 17$$

cioè il premio H è lineare rispetto ai rischi.

Assioma[23] 2.4

$$H(I_\Omega) = v(\Omega) = 1 \qquad 2.\ 18$$

Teorema 1 (Schimdler)[24]

---

[23] L'assioma 2.4 può anche essere definito di normalizzazione in quanto impone un valore massimo per il funzionale di premio.

[24] Per la dimostrazione si rimanda all'appendice matematica.

Se il funzionale di premio soddisfa gli assiomi 1, 2, 3 e 4 allora esiste un'unica funzione monotòna d'insieme $v : A \subseteq \Omega \to R$ tale che:

$$H(X) = \int_{\Omega} X dv = \int_{0}^{\infty} v(\{\omega \in \Omega | X(\omega) > t\})dt \qquad 2.19$$

dove $v(A) = H(1_A)$.

In caso di dominanza stocastica del primo ordine il risultato di Schimdler si può affinare come segue.

Teorema 2

Se l'insieme dei rischi contiene tutte variabili aleatorie di bernoulli ϑ, con $0 \le \vartheta \le 1$ esiste un'unica funzione g tale che

$$H(X) = H(1)\int_{\Omega} X d(g \circ P) = H(1)\int_{0}^{\infty} g(\Gamma_{P,X}(t))dt \qquad 2.20$$

dove 1 è la variabile aleatoria degenere che vale 1 con probabilità 1.

Il teorema 2 ci permette di caratterizzare ulteriormente il funzionale di prezzo interpretando la capacità come una misura di probabilità distorta.

In tal modo vengono rese omogenee le due componenti in cui si articola il premio assicurativo: il premio all'incertezza (relativa alla probabilità degli eventi) ed il premio di rischio (relativo alle eventuali conseguenze).

Consideriamo la σ-algebra formata da tutti i sottoinsiemi A di Ω e una funzione crescente

$$g : [0,1] \to [0,1] \qquad 2.21$$

tale $g(0)=0$ e $g(1)=1$ definita funzione di distorsione.

La funzione di distorsione consente di interpretare la funzione di capacità v come una probabilità distorta $v = g \circ P$.

La nuova espressione di funzionale di prezzo è

)

$$H(X) = \int_{\Omega} X dv = \int_{0}^{\infty} g \circ P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) > t\}) dt = \int_{0}^{\infty} g(\Gamma_{P,X}(t)) dt \qquad 2.22$$

<u>Dimostrazione(della 2.22)</u>

Abbiamo già dimostrato che esiste un'unica funzione d'insieme monotòna v tale che $H(X) = \int_{\Omega} X dv$.La funzione v è definita dalla relazione $v(A) = H(1_A)$ con A sottoinsieme di Ω.

Resta da dimostrare che $v = H(1) g \circ P$ dove g è l'unica funzione di distorsione.

Definiamo $g(\vartheta)=H(I_\vartheta)$ dove $H(I)=1$ dove I_ϑ è una variabile aleatoria di Bernoulli con $\vartheta\in[0,1]$ tale che

$$P\{\omega\in\Omega| \quad I_\vartheta(\omega)=0\}=1-\vartheta$$

$$P\{\omega\in\Omega| \quad I_\vartheta(\omega)=1\}=\vartheta$$

Osserviamo che la funzione g è ben definita dall'assioma di monotònia in quanto $H(I_\vartheta)=v(\{\omega\in\Omega| \quad I_\vartheta(\omega)=1\})$. Le proprietà del funzionale di prezzo sono quindi "ereditate" dalla funzione g che risulta essere di distorsione.

La funzione g pertanto risulta definita come segue:

$$g(\vartheta)=g(\Gamma_{I_\vartheta}(t))=v(\{\omega\in\Omega| \; I_\vartheta(\omega)>t\}) \quad per \quad 0\le t<1$$

$$g(\vartheta)=g(\Gamma_{I_\vartheta}(t))=v(\{\omega\in\Omega| \; I_\vartheta(\omega)>t\})=v(\varnothing)=0 \quad per \quad 1\le t.$$

Resta ancora da verificare che $v(\{\omega\in\Omega| \; X(\omega)>t\})=g(\Gamma_{P,X}(t))$ per ogni rischio X e per ogni reale t.

Definita con $I_{\Gamma_{P,X}(t)}(\omega):\Omega\to[0,\infty]$ una variabile di Bernoulli tale che

$$I_{\Gamma_{P,X}(t)}(\omega)=\begin{cases} 0 & se \quad X(\omega)\le t \\ 1 & se \quad X(\omega)>t \end{cases}$$

si ha

$$v(\{\omega \in \Omega | X(\omega) > t\}) = v(\{\omega \in \Omega | 1_{\Gamma_{P,X}(t)}(\omega) > t\}) = g(\Gamma_{P,X}(t))$$

Da cui segue

$$H(X) = \int_{\Omega} X dv = \int_{0}^{\infty} v(\{\omega \in \Omega | \ X(\omega) > t\}) dt = \int_{0}^{\infty} g(\Gamma_{P,X}(t)) dt \qquad 2.\ 23$$

C.V..D.

Il prossimo teorema stabilisce una relazione diretta tra funzionale di premio ed integrale di Choquet.

Teorema 2. 1

Il funzionale di premio $H(.)$, e soddisfa gli assiomi se e solo se è rappresentabile come integrale di Choquet:

$$H(X) = \int_{\Omega} X d(g \circ P) = \int_{0}^{\infty} g(\Gamma_{P,X}(t)) dt \qquad 2.\ 24$$

Diremo che il premio ha un caricamento non negativo se

$$E(X) \leq H(X) \qquad 2.\ 25$$

Osserviamo che la (2.25) è verificata per ogni rischio X se e solo se $g(\vartheta) \leq \vartheta$.

ed il caricamento è non eccessivo se

$$H(X) \leq max(X) \qquad 2.26$$

Si noti che la (2.26) costituisce l'estremo superiore del valore del funzionale di premio.

Il funzionale di premio è stato costruito mediante un integrale ed è quindi invariante rispetto a fattori di scala:

$$H(aX) = aH(X) \quad \text{con} \quad a > 0 \qquad 2.27$$

Inoltre è stato costruito mediante capacità, ovvero probabilità distorte e pertanto è anche invariante per traslazioni.

$$H(X + b) = H(X) + b \quad \text{con} \quad b > 0 \qquad 2.28$$

Le (2.27) e (2. 28) possono essere riassunte nella(2.29):

$$H(aX + b) = aH(X) + b \qquad 2.29.a$$

Se la funzione di distorsione g è concava risulta

$$H(X + Y) \leq H(X) + H(Y) \qquad 2.29.b$$

La (2.29) corrisponde ad una conveniente logica operativa per entrambi i contraenti: la Compagnia offre sconti su pacchetti che offrono due o più polizze che devono risultare inferiori alla somma dei premi richiesti nel caso in cui i prodotti vengano separatamente. L'assicurato sarà disposto in tal modo ad effettuare un investimento di maggiore importo.

6. Caratteristiche dei premi assicurativi

Si denoti con F la $\sigma - algebra$ degli eventi all'epoca T.

Un contratto è descritto dalla variabile aleatoria $X : \Omega \rightarrow R$ dove $X(\omega)$ rappresenta il pay-off in T relativo allo stato di natura ω.

Indichiamo con:

$B_0(\Omega, F)$: l' insieme di tutte le variabili aleatorie semplici;

$B(\Omega, F)$: l'insieme di tutte le variabili aleatorie limitate;

$M(\Omega, F)$: l'insieme di tutte le variabili aleatorie limitate inferiormente.

$M^+(\Omega, F)$: l'insieme di tutte le variabili aleatorie non negative.

χ: l'insieme dei contratti assicurativi.

Se si vuole considerare contemporaneamente assicurazione e la riassicurazione si deve fissare il prezzo anche per variabili aleatorie non positive: si può contestualmente voler vendere il contratto X_1 e riscattare X_2 e pertanto considerare una variabile aleatoria del tipo $X_1 - X_2$, i rispettivi funzionali di prezzo sono funzioni appartenenti allo spazio $B_0(\Omega, F)$ se ci riferiamo ad una rappresentazione discreta, saranno invece appartenenti allo spazio $B(\Omega, F)$ se continua. Le conseguenze associate ai rischi risultano essere variabili aleatorie appartenenti allo spazio $M^+(\Omega, F)$.

A tal fine considereremo anche l'ipotesi in cui il rischio sia una variabile aleatoria inferiormente limitata.

Sia ψ lo spazio vettoriale contenente i pay-off di tutti i possibili portafogli di attività finanziarie trattati sul mercato. Supponiamo che i titoli privi di rischio, I_Ω, scambiati sul mercato, paghino 1 in ogni stato del mondo.

Un contratto di assicurazione è replicabile se esiste un portafoglio che ha gli stessi pay-off del contratto.

Si indichi con

$$V : \psi \to R \tag{2. 30}$$

il funzionale di prezzo di mercato.

Se non sono possibili arbitraggi il funzionale V è monotono ed esiste un'unica funzione di probabilità P tale che:

$$V(Y)=\int_{\Omega} YdP \qquad 2.31$$

La (2.31) è anche definita probabilità aggiustata per il rischio.

Saranno ora illustrate le proprietà delle polizze assicurative i cui prezzi sono conseguenti all'iterazione di agenti economici razionali.

Ipotizziamo che esista un solo valore per il premio e quindi, senza perdita di generalità, che esista un'unica Compagnia che agisca sul mercato.

Se la Compagnia è in grado di assumersi il rischio X è anche in grado di assumersi il rischio troncato $X \wedge n$ con $X \leq n$.

Il prezzo del contratto assicurativo lo definiamo infinito quando la Compagnia non copre il rischio sottostate.

Nel seguito si elencano le proprietà "desiderabili", dal punto di vista attuariale, che dovrebbe avere il funzionale di prezzo.

<u>Proprietà 2. 1</u>

Se il $X \subseteq \chi$ è assicurabile, allora tutti i rischi troncati da X sono assicurabili. In formule:

$$X \wedge n \subseteq \chi \quad \text{con} \quad n \leq X \qquad 2.32$$

<u>Proprietà 2. 2: omogeneità</u>

$$H(\alpha X) = \alpha H(X) \qquad 2.33$$

Per ogni $\alpha \in [0,1]$.

In base alla proprietà 1 non si considerano costi di transazione per coperture proporzionali.

Proprietà 2. 3: <u>(subadditività)</u>

$$H(X_1 + X_2) \leq H(X_1) + H(X_2) \qquad 2.34$$

La (2.34)è una naturale condizione di prezzo. Infatti, se valesse la disuguaglianza opposta, $H(X_1 + X_2) > H(X_1) + H(X_2)$, per l'assicurato converebbe acquistare separatamente le coperture per i rischi X_1 e X_2.

La (2.36) è la naturale conseguenza della scelta di capacità sub additive.

Ai fini della riassicurazione è interessante osservare che acquistare il rischio X è analogo a cedere il rischio $-X$.

Da quanto descritto il prezzo da pagare per cedere il rischio X ad un'altra compagnia è $H(-X)$.

$$0 \leq H(X+(-X)) \leq H(X)+H(-X) \qquad 2.\ 35$$

Se la proprietà di subadditività viene sostituità con la proprietà di additività, ci troviamo a lavorare in un mercato coerente.

In base alla proprietà 2 ogni volta che parte di un contratto assicurativo può essere replicata mediante un portafoglio di attività finanziarie, il prezzo di tali parte è uguale al prezzo di mercato del portafoglio atto a replicarle.

<u>Proprietà 2. 4: subcontinuità</u>

Il funzionale di premio è continuo a sinistra.

$$\lim_{n \to X} H(X \wedge n) = H(X) \qquad 2.\ 36$$

<u>Proprietà 2. 5: compatezza</u>

La proprietà di subcontinuità può essere generalizzata dalla seguente.

Se $\{X_n\}_{n \in N} \subseteq B_0^+(\Omega, F) \cap \chi$ e $\lim_n X_n = X$ con $\lim_n X_n = X \subseteq \chi$ allora $\lim_n H(X_n) = H(X)$.

Se un rischio non è assicurabile vuol dire che non è possibile determinarne il prezzo e pertanto poniamo $H(X)=\infty$.

Se l'insieme dei rischi χ soddisfa le proprietà sopra elencate seguenti affermazioni sono equivalenti

ogni funzionale $H:\chi \to R \cup \{\infty\}$ soddisfa gli assiomi 1, …, 4;

- Esiste un unico insieme compatto, Q, di probabilità numerabilmente additive tali che:

$$H(X)=\sup_{q\in Q}\int_{\Omega} Xdq \qquad \forall X\in\chi \qquad 2.37$$

Per ogni variabile aleatoria limitata $X\in\chi$, l'estremo superiore presente nella ($H(X)=\sup_{q\in Q}\int_{\Omega} Xdq \qquad \forall X\in\chi$ 2. 37) è un massimo. In altre parole, se valgono le proprietà indicate, i premi sono costruiti considerando la massima perdita attesa rispetto a una famiglia di probabilità Q.

I premi che soddisfano le proprietà elencate sono coerenti con il mercato.

Affiniamo ora il risultato della ($H(X)=\sup_{q\in Q}\int_{\Omega} Xdq \qquad \forall X\in\chi$ 2. 37) distinguendo nel premio la parte pura e quella di sicurezza.

Secondo il criterio della deviazione standard si ha:

$$H(X) = E(X) + \gamma\sqrt{var(X)} \quad \text{con} \quad \gamma > 0 \qquad 2.\ 38$$

Si fa ora vedere come è possibile fornire una analoga scomposizione del funzionale di prezzo rispetto al nostro modello.

In altre parole è lo stesso per la compagnia vendere X_1 e X_2 separatamente e poi riscattarli congiuntamente o venderli congiuntamente e riscattarli separatamente.

Quanto detto può essere espresso dalla proprietà di simmetria.

<u>Proprietà 2. 6: Simmetria</u>

$$H(X_1) + H(X_2) + H(-(X_1 + X_2)) = H(X_1 + X_2) + H(-X_1) + H(-X_2) \qquad 2.\ 39$$

con

$X_1, X_2, -X_1, -X_2, (X_1 + X_2), -(X_1 + X_2) \in \chi$

Introduciamo ora la definizione di caricamento coerente con la nostra formalizzazione.

<u>Definizione 2.4</u>

Sia Q l'insieme delle probabilità neutrali al rischio[25]. Il livello di ambiguità di un contratto X è definito dalla ($H(X_1)+H(X_2)+H(-(X_1+X_2))=H(X_1+X_2)+H(-X_1)+H(-X_2)$ 2. **39**)

$$Amb_Q(X)=\sup_{q,q'\in Q}\left|\int_\Omega Xdq-\int_\Omega Xdq'\right| \qquad 2.\ 40$$

L'ambiguità misura pertanto l'ambigua informazione su cui si basa la fissazione del prezzo di X.

Teorema 2. 2

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

Il funzionale H con il mercato

Esiste un'unica probabilità $P, P(A)=\frac{1}{2}\left(\max_{q\in Q} q(A)+\min_{q\in Q} q(A)\right)$, tale che:

$$H(X)=\int_\Omega Xdp+\frac{1}{2}Amb_Q(X) \qquad 2.\ 41$$

<u>Esempio</u>

L'insieme delle probabilità Q può contenere tutti i possibili valori delle probabilità tra due assegnati q, q':

[25] Tutte le possibili probabilità su cui si basa la formazione del prezzo di X.

$$Q = \{\alpha q + (1-\alpha) q' \mid \alpha \in [0,1]\}$$

Per la (2.41) l'ambiguità dell'informazione è data da

$$Amb_Q(X) = \left| \int_\Omega X dq - \int_\Omega X dq' \right|$$

Per il funzionale scegliamo come probabilità il valor medio di q, q' e quindi otteniamo:

$$H(X) = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega X dq + \int_\Omega X dq' \right) + Amb_Q \left| \int_\Omega X dq - \int_\Omega X dq' \right|$$

che equivale a:

$$H(X) = \begin{cases} \int_\Omega X dq & se \quad \int_\Omega X dq \geq \int_\Omega X dq' \\ \int_\Omega X dq' & altrimenti \end{cases}$$

7. La riassicurazione

Per la modellizzazione supponiamo che il mercato sia caratterizzato da due sole categorie di compagnie assicurative: le imprese (compagnie di primo livello) di piccole e medie dimensioni, che stipulano polizze con clienti finali anche per importi irrisori e le compagnie di grandi dimensioni (di secondo livello) a cui è demandata la funzione di riassicuratore.

Date le differenze dei soggetti è logico ipotizzare che esistano due famiglie di distribuzioni di probabilità una per ogni livello.

Sia (Ω, A, P) lo spazio delle probabilità che rappresenta il mercato.

Le compagnie di primo livello avranno a disposizione uno spazio di probabilità $(\Omega, A_1, P_1) \subseteq (\Omega, A, P)$ mentre quelle di secondo livello $(\Omega, A_2, P_2) \subseteq (\Omega, A, P)$.

In riferimento ai due spazi di probabilità consideriamo livelli di prezzo: $H_1(X)$, $H_2(X)$. Per effetto del pooling risk si può ipotizzare che:

$$H_2(X) \leq H_1(X) \qquad 2.42$$

Considerando ora la riassicurazione, ci chiediamo ora in base a quali calcoli di convenienza una compagnia decida di ricorrere a tale fattispecie contrattuale e come avvenga la cernita tra i rischi da mantenere in portafoglio e i rischi da cedere al riassicuratore.

Abbiamo indicato con $X : \Omega \rightarrow R^+$ il generico rischio assunto dalla Compagnia al momento di stipula della polizza.

Il portafoglio di tutti i rischi assicurati può essere indicato con:

$$Y(\omega) = \sum_i X_i(\omega) \qquad 2.43$$

La Compagnia fisserà un livello massimo di rischio accettabile sulla base della propria capacità di copertura. Per esempio se la varianza del portafoglio supera una soglia stabilità sarà necessario ricorrere alla riassicurazione.

Determinata la soglia α, se $Var(Y) > \alpha$ la compania sarà orientaa a cedere parte dei rischi assunti in base ad un programma del tipo:

$$\max_{X \in \chi} \left| H_2(X) - H_1(X) \right| \qquad 2.44$$

sotto i seguenti vincoli

$$\begin{cases} X(\omega) \leq Y(\omega) & \forall \omega \in \Omega \\ Var(Y - X) = \beta \quad \text{con} & \beta \leq \alpha \end{cases} \qquad 2.45$$

Il primo vincolo si può definire di tipo istituzionale: la compagnia non può cedere l'intero portafoglio altrimenti verrebbe meno l'oggetto stesso della propria attività d'impresa. La seconda condizione si riferisce al massimo livello di rischio sostenibile: il parametro β è il livello di variabilità che si considera accettabile rispetto alla capacità di copertura. Lo scopo della Compagnia attraverso la politica della riassicurazione è ridurre la varianza di portafoglio.

Dopo aver verificato il rispetto di tali vincoli, verranno riassicurati i rischi che massimizzano l'arbitraggio, in altre parole quelli che garantiscono un profitto maggiore in seguito alla cessione.

E' interessante notare che il secondo vincolo è calcolato rispetto ad una capacità v:

$$Var(Y-X)=E_v[(Y-X)-E_v(Y-X)]^2 \qquad 2.46$$

dove

$$E_v(Y-X)=\int_{\Omega}(Y-X)dv$$

Si verifica facilmente che se si impiega una probabilità non additiva non è più verificata la relazione di scomposizione della varianza[26].

Si consideri ad esempio un insieme universo composto da tre elementi $\Omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ e l'insieme delle sue parti e pertanto[27] composto da otto elementi :

[26] $Var(X)=E(X^2)-E^2(X)$

$\wp(\Omega) = (\varnothing, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_3\})$.

Le capacità assegnate agli elementi dell'insieme $\wp(\Omega)$ sono:

$v(\varnothing) = 0$, $v(\omega_1) = 0{,}4$, $v(\omega_2) = 0{,}3$, $v(\omega_3) = 0{,}2$, $v(\omega_1, \omega_2) = 0{,}6$,

$v(\omega_1, \omega_3) = 0{,}5$, $v(\omega_2, \omega_3) = 0{,}8$, $v(\Omega) = 1$.

Si consideri inoltre una variabile aleatoria $X : \Omega \to R^+$ tale che:

$X(\omega_1) = 12$, $X(\omega_2) = 8$, $X(\omega_3) = 3$.

Vogliamo calcolare la varianza di Choquet (2.46) della variabile aleatoria X .

Il valore atteso di Choquet è calcolato in base alla (A.32) (caso discreto):

$$E_v(X) = \int_{\Omega} X dv = (12 - 8)v(\omega_1) + (8 - 3)v(\omega_1, \omega_2) + (3 - 0)v(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 7{,}6$$

Calcoliamo ora gli scarti dal valor medio ed indichiamoli con Y

$$Y = X - E_v(X)$$

Pertanto si ha

$$Y(\omega_1) = X(\omega_1) - E_v(X) = 12 - 7{,}6 = 4{,}4$$

$$Y(\omega_2) = X(\omega_2) - E_v(X) = 8 - 7{,}6 = 0{,}4$$

$$Y(\omega_3) = X(\omega_3) - E_v(X) = 3 - 7{,}6 = -4{,}6$$

---

[27] Teorema di Cantor.

Si osserva che le differenze sopra riportate risultano decrescenti in quanto è stata sottratta alla variabile aleatoria X una stessa costante.

Per ricavare $E(Y^2) = E\left[(X - E(X))^2\right]$ occorre calcolare gli Y^2:

$Y^2(\omega_1) = 19{,}36$

$Y^2(\omega_2) = 1{,}6$

$Y^2(\omega_3) = 21{,}6$

Per applicare l'integrazione di Choquet occorre permutare gli l'ordine degli atomi dell'insieme universo.

$$Var_v(X) = \int_\Omega Y^2 dv = (21{,}6 - 19{,}36)v(\omega_3) + (19{,}36 - 1{,}6)v(\omega_3, \omega_2) + 1{,}6\, v(\Omega) = 8{,}48$$

In questo caso (capacità non additive) non è soddisfatta la legge di scomposizione della varianza:

$$E[X - E(X)]^2 = E\left[X^2\right] - E^2[X]$$

da $X^2(\omega_1) = 144$, $X^2(\omega_2) = 64$, $X^2(\omega_3) = 9$ risulta

$$E(X^2) = \int_\Omega X^2 dv = \left(X^2(\omega_1) - X^2(\omega_2)\right)v(\omega_3) + \left(X^2(\omega_2) - X^2(\omega_3)\right)v(\omega_3, \omega_2) + X^2(\omega_3)v(\Omega)$$

e sostituendo i valori si ha:

$$E\left[X^2\right] = (144 - 64)0{,}4 + (64 - 9)0{,}6 + 9 = 74 \qquad E^2[X] = 57{,}76$$

da cui $E\left[X^2\right] - E^2[X] = 74 - 57{,}76 = 16{,}24 \neq 8{,}48$.

CAPITOLO TERZO: DOMINANZA STOCASTICA E SELEZIONE DI PORTAFOGLIO

1. Motivazione

Il modello del 1952 di Markovitz analizza i futuri pay-off mediante il criterio media-varianzia: alla media corrisponde il rendimento del titolo mentre alla varianza il rischio.

L'approccio è semplice e intuitivo: a parità di rendimento atteso si sceglie il titolo meno rischioso, mentre a parità di rischio è preferibile il titolo con rendimento atteso maggiore.

Nel modello di von Neumann-Morgenstern, invece, ad ogni investitore è associata una funzione d'utilità, $u(\cdot)$, crescente (rispetto alla variabile indipendente denaro), e le decisioni di investimento vengono effettuate in base alla massimizzazione dell'utilità attesa rispetto al patrimonio finale. L'avversione al rischio è caratterizzata da funzioni di utilità concave.

La teoria di von Neumann Morgenstern può essere schematizzata dai seguenti assiomi.

Assegnata la relazione di preferenza $\prec$ su un insieme di rischi G risulta:

Assioma di completezza

Una sola delle seguenti affermazioni è vera:

- $X \prec Y \qquad \forall X, Y \in G$
- $Y \prec X \qquad \forall X, Y \in G$
- $Y \approx X \qquad \forall X, Y \in G$

Assioma di transitività

Se $X \prec Y$ e $Y \prec Z$ allora $X \prec Z \quad \forall X, Y, Z \in G$

Assioma di continuità

$\forall X, Y, Z \in G$ tali che $X \succeq Y \succeq Z$ esiste $p \in [0,1]$ tale che il rischio $pX + (1-p)Z$ è equivalente al rischio Y.

In simboli $(X, p; Z, p-1) \approx Y$.

Assioma di indipendenza

$\forall X,Y \in G$ tali che $X \succeq Y$ $\forall p \in [0,1]$ e $\forall Z \in G$ risulta $(X,p;Z,p-1) \succeq (Y,p;Z,p-1)$.

Se la relazione di preferenza $\succeq$ soddisfa le ipotesi della teoria dell'utilità attesa, EUT, allora esiste una funzione, $u: R \to R$, tale che:

$$X \succeq Y \Leftrightarrow U(X) = E[u(X)] \leq U(Y) = E[u(Y)] \qquad \textbf{3. 1}$$

Il certo equivalente[28] $c(X)$ di un rischio X corrisponde a:

$$u(c(X)) = U(X) \qquad (3.2)$$

Mentre il rischio per il premio, $q(X)$, associato al rischio X è definito dalla (3.3):

$$q(X) = E(X) - c(X) \qquad (3.3)$$

nel caso di avversione al rischio risulta $q(X) > 0$, di propensione $q(X) < 0$, di indifferenza $q(X) = 0$.

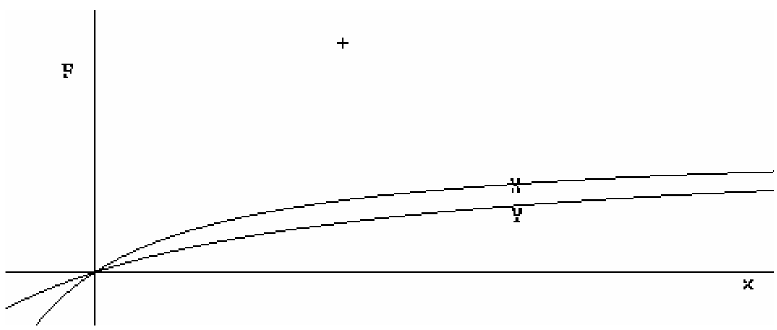
[28] Douglas W- Ukhov,A-(2004), Equilibrium Risk Premia for Risk Seekers.

2. Dominanza stocastica del secondo ordine e EUT

Sia (Ω, F, P) uno spazio di probabilità e $G = \{X : (\Omega, F) \to R | X \text{ variabile aleatoria} \}$ l'insieme delle variabili aleatorie su (Ω, F).

Indicata con $F_X(x) = Pr(X \leq x)$ la funzione di distribuzione della variabile aleatoria X e con $f_X(x)$ la funzione densità, diremo che la variabile aleatoria X domina Y per dominanza stocastica di secondo ordine, SSD, se esiste almeno un valore di x tale che la disuguaglianza (3.4) risulti stretta:

$$X \succ_2 Y \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{x} f_X(s)ds \leq \int_{-\infty}^{x} f_Y(s)ds \qquad \forall x \in R \tag{3.4}$$



Se quindi, la variabile aleatoria X domina la variabile aleatoria Y, l'investitore, avverso al rischio, che massimizza una funzione di utilità attesa, preferirà l'investimento X all'investimento Y. In simboli:

$$X \succ_2 Y \Leftrightarrow E_P[u(X)] \geq E_P[u(Y)] \qquad 3.5$$

Il rischio $X \in G$ è detto inefficiente rispetto alla dominanza SSD, se esiste un rischio $Y \in G$ tale che $Y \succ_2 X$, mentre è definito efficiente se $X \succ_2 Y$. La dominanza stocastica del secondo ordine può essere testata mediante approcci di programmazione lineare[29].

Dimostriamo come i criteri di scelta basati sul criterio media-varianza possano portare a situazioni discutibili[30].

Sia $\Omega = \{1,2\}$, $F = 2^{\Omega}$, $P(1) = p$ ed X e Y due variabili aleatorie così definite:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{con probabilità} \quad p \\ 0 & \text{con probabilità} \quad 1-p \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} y > 0 & \text{con probabilità} \quad p \\ 0 & \text{con probabilità} \quad 1-p \end{cases}$$

[29] Post (2003), *Empirical Tests for Stochastic Dominance*, Journal of Finance.
[30] Il paradosso proposto è stato preso sul sito http://www.math.ethz.ch/~degiorgi/.

I rispettivi valori attesi e varianze sono: $E_P(X)=0$, $E_P(Y)=yp=\mu$, $\sigma^2_P(Y)=py^2(1-p)=y\mu(1-p)$, $\sigma^2_P(X)=0$.

Fissato μ e facendo divergere y, il valore di p diventa infinitesimo (come nel caso di vincita ad una lotteria).

Sotto queste ipotesi, i criteri di trade-off basati sull'analisi media varianza non selezionano nessuno dei due rischi, mentre, un operatore razionale, a parità di esborso iniziale, sceglierebbe il rischio Y in quanto, in tal caso, può avere un corrispondente pay-off positivo o nullo; il rischio X può avere solo pay-off nulli: si realizza quindi la situazione paradossale di cui prima abbiamo fatto cenno.

Obiettivo dei paragrafi successivi è definire misure di rendita, RE(.) e le misure di RI(.) che siano coerenti con l'ordine di preferenza indotto dalla dominanza stocastica del secondo ordine, ossia:

$$X \succ_2 Y \Rightarrow (RE(X) \quad RI(X)) \succ (RE(Y) \quad RI(Y)) \qquad 3.6$$

2. Misure coerenti di rischio

Il De Giorgi[31], prendendo le mosse dal sul criterio media-varianza, adotta le proprietà di misura coerente di rischio di Artzen, Delbaean, Heat ed Heber e dimostra l'equivalenza di tali proprietà con la teoria dell'utilità attesa di Choquet.

Una misura coerente di rischio $\rho : G \to R$ è definita dalle seguenti proprietà (3.7), (3.8), (3.9), (3.10).

Proprietà subadditiva

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \qquad \forall X, Y \in G \qquad 3.7$$

Proprietà di omogeneità (positiva)

$$\rho(\alpha X) = \alpha\rho(X) \quad \forall X \in G \quad \forall \alpha \in R^{+} \qquad 3.8$$

Invarianza per traslazioni

$$\rho(X + \alpha X(e_0)) \leq \rho(X) - \alpha \quad \forall X \in G \quad \forall \alpha \in R \qquad 3.9$$

Nella (3.9) $X(e_i)$ è il pay-off della strategia e_i, ed in particolare $X(e_0)$ è il pay-off della strategia risk-free.

Monotoicità

[31] De Giorgi, E. (2002), Reward-Risk Portfolio Selection and Stochastic Dominance, www.risklab.ch/ftp/papers/RewardRiskPortfolioSelect.ps

$X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y) \quad \forall X, Y \in G$ (3.10)

Teorema

La funzione $\rho : G \rightarrow R$ è una misura coerente di rischio se e solo se esiste una famiglia di probabilità P su (Ω, F) tale che $\forall X \in G$ risulta:

$\rho(X) = -inf\{E_p[X]p \in P\}$ (3.11)

Esempio

Si consideri l'universo composto da quattro stati di natura, $\Omega = \{1,2,3,4\}$ e due rischi X ed Y tali che $X(1) = -1$, $Y(1) = -1$, $X(2) = -0{,}75$, $Y(2) = -1$, $X(3) = -0{,}25$, $Y(3) = 0$, $X(4) = 4$ e $Y(4) = 4$.

Si consideri inoltre la famiglia (generalized scenario) $P = \{P_0, P_1, P_2\}$ delle misure di probabilità sull'insieme universo Ω con $P_0 = \{0{,}5 \quad 0{,}125 \quad 0{,}125 \quad 0{,}25\}$, $P_1 = \{0{,}4 \quad 0{,}6 \quad 0 \quad 0\}$, $P_2 = \{0 \quad 0 \quad 0{,}2 \quad 0{,}8\}$.

Se si applica il criterio del valore atteso non è possibile stabilire un ordinamento tra i rischi.

Per la misura di probabilità P_0 si ha:

$E_{P_0}(X) = E_{P_0}(Y) = 0{,}375$

per la misura P_1

$$-1 = E_{P_1}(Y) \le E_{P_1}(X) = -0,85$$

mentre per P_2

$$3,15 = E_{P_2}(X) \le E_{P_2}(Y) = 3,2$$

Secondo la misura di rischio, ρ, che è la metrica degli opposti degli estremi inferiori dei valori attesi, i rischi X e Y sono ordinabili, e risulta:

$$\rho(X) = max\{E_{P_i}[-X] | i = 0,1,2\} = 0,85$$

$$\rho(Y) = max\{E_{P_i}[-Y] | i = 0,1,2\} = 1$$

3. Selezione di portafoglio

Siano $\Omega = \{1,2,...,S\}$, $F = 2^{\Omega}$ e P una misura di probabilità (Ω, F) tale che $P(s) \ge 0 \ \forall s \in \Omega$.

Si supponga di avere $(K+1)$ investimenti che in $t = 0$ hanno prezzo q_k e a scadenza payoff A_k. L'investimento con $k = 0$ è risk free.

Posto $R_k = \dfrac{A_k}{q_k} - 1$ il rendimento a scadenza del k-esimo investimento, assumiamo che $P(R_k \le 0) \ge 0$ per $k = 1,2,...,K$.

Posto w_0 il patrimonio iniziale, l'insieme

$$H = \left\{ w_0 \sum_{k=0}^{K} R_k \lambda_k \middle| \sum_{k=0}^{K} \lambda_k = 1 \right\} \tag{3.12}$$

rappresenta tutti i possibili portafogli finanziabili con w_0, e pertanto il rendimento a scadenza risulta una variabile aleatorie ed $H \subseteq G$.

La misura di rendita, μ, soddisfa le proprietà (3.13), (3.14) e (3.15).

Linearità

$$\mu(X+Y) = \mu(X) + \mu(Y) \qquad \forall X, Y \in G \tag{3.13.a}$$

$$\mu(\alpha X) = \alpha \mu(X) \qquad \forall x \in G \quad \forall \alpha \in R \tag{3.13.b}$$

Risk free

$$\mu(X(e_0)) = R_0 \tag{3.14}$$

Dominanza stocastica

$$X \succ_2 Y \rightarrow \mu(X) \geq \mu(Y) \qquad \forall X, Y \in G \tag{ 3.15}$$

Le misure di rischio subadditive ed omogenee sono convesse.

Per la proprietà subadditiva tra rischi (3.7), la misura di rischio ρ del rischio $Z = \alpha X + (1-\alpha)Y$, con $\alpha \in [0,1]$, risulta:

$$\rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \rho(\alpha X) + \rho((1-\alpha)Y) \qquad (3.16)$$

e dalla condizione di omogeneità positiva (3.9) si ha la convessità:

$$\rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1-\alpha)\rho(Y) \qquad (3.17)$$

La misura di rischio di un investimento nullo è nulla da cui la misura di rischio di un investimento risk-free:

$$\rho(X(e_0)) = 0 \qquad (3.18)$$

e pertanto

$$\rho(Y + X(e_0)) = \rho(Y) \qquad (3.19)$$

Il De Giorgi addotta come misura di rischio la distanza aleatoria di Minkoski.

Assegnata la variabile aleatoria X e la funzione convessa h la norma di Minkoski (3.20) che è interpretabile come una misura di distorsione della probabilità.

$$\|X\|_h = inf\left\{ a \,\middle|\, E\left[h\left(\frac{|X|}{a}\right)\right] \leq 1 \right\} \qquad (3.20)$$

da cui il funzionale (3.21) di misura di rischio di Minkoski

$$\rho(X) = \left\| (X - E_p(x))^- \right\|_h \qquad (3.21)$$

con $x^{-} = min\{x,0\}$.

Il funzionale (3.21) è subadditivo e positivamente omogeneo quindi convesso. Ed è inoltre monotono rispetto alla dominanza stocastica del secondo ordine.

Assegnata una misura di rischio ed una misura di rendita, possiamo definire la coppia rendita rischio (μ,ρ) sull'insieme dei rischi G.

Assegnata la coppia (μ,ρ) condizione necessaria affinché il rischio X appartenga al portafoglio è che lo stesso ottimizzi la (3.22)

$$\xi_1\rho - \xi_2\mu \tag{3.22}$$

per ogni coppia di numeri reali (ξ_1,ξ_2).

Se il gestore di portafoglio è neutrale nei confronti del rischio, $\xi_1 = 0$, e quindi l'unico criterio di selezione è il rendimento μ; se invece $\xi_2 = 0$ si ha $X = w_0 X(e_0)$.

Nell'ipotesi $(\xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0)$, il funzionale da massimizzare risulta

$$\xi\rho - \mu \tag{3.23}$$

con $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$.

La (3.23) è una funzione di utilità dipendente da μ è ρ, con μ funzione lineare e ρ funzione convessa.

Per ogni coppia (μ, ρ) è definita una misura di dispersione[32]:

$$R_\xi(X) = \xi\rho(X) - \mu(X) \qquad 3.24$$

La misura di dispersione $R_\xi(X)$ eredità le proprietà della coppia (μ, ρ) e pertanto risulta monotòna rispetto alla dominanza stocastica del secondo ordine (3.25), invariante per traslazioni (3.26),e convessa (3.27).

$$X \succ_2 Y \Rightarrow R_\xi(X) \leq R_\xi(Y) \qquad 3.25$$

$$R_\xi(X + R_0) = \xi\rho(X) - \mu(X) - R_0 = R_\xi(X) - R_0 \qquad 3.26$$

$$R_\xi(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha R_\xi(\alpha X + (1-\alpha)Y) + (1-\alpha)R_\xi((1-\alpha)Y) \qquad 3.27$$

---

[32] Pflug, C. (1998): *How to measure risk?*, Working Paper, IIASA and University of Vienna.

4. Caratterizzazione delle misure di rischio e di rendita

Dopo aver definito le proprietà minimali di una misure di rischio e di rendita, verranno introdotti alcuni teoremi che mettono in evidenza alcune proprietà delle stesse.

Dimostremo che sull'insieme dei rischi è possibile trovare un unico funzionale[33] che soddisfi contemporaneamente la condizione di linearità e di risk free e sia coerente con la monotònia rispetto alla dominanza stocastica del secondo ordine. Tale funzionale è l'integrale di Choquet.

Sia $\mu : G \longrightarrow R$ una misura di rendita e $P = (p(1), p(2), \ldots, p(s))$ uno spazio di probabilità[34] su (Ω, F). Assunto $P(s) > 0 \quad \forall s \in \Omega$ risulta[35]:

$$\mu(X) = E_p(X) \qquad 3.28$$

Sia ρ una misura di rischio, la corrispondente misura di dispersione è data dalla (3.29)

$$R_p(X) = sup\{E_P[-X] p \in P\} = -inf\{E_P[X] p \in P\} \qquad 3.29$$

---

[33] A tal proposito si veda in appendice matematica la rappresentazione di Schimdler.
[34] La dominanza stocastica del secondo ordine è definita rispetto a P.
[35] Per la dimostrazione si rimanda al paper del de Giorgi.

Mostriamo ora come (3.29) possa essere formulata attraverso l'integrale di Choquet.

Indicato, $\forall A \in F$, con

$$D = \{v \mid v(A) = g(P(A)), g \text{ non decrescente}, g(0) = 0, g(1) = 1\} \qquad 3.30$$

l'insieme delle funzioni di distorsione o capacità della probabilità P definiamo il con la (3.31) il nucleo della funzione di distorsione v.

$$ker(v) = \{Q \mid \text{additive su } \Omega \text{ tali che } Q(\Omega) = v(\Omega),\ Q(A) \geq v(A)\} \qquad 3.31$$

Osserviamo brevemente che $\forall A \in F$ si ha

$$v(A^C) = g(P(A^C)) = g(1 - P(A)) \neq 1 - g(P(A)) = 1 - v(A)$$

Se $v \in D$,e la funzione, g, con cui è stata costruita la capacità, v, è convessa la misura (3.32) risulta di rischio e positivamente omogenea e convessa[36]:

$$\rho_v(X) = -min\{E_Q[X - E_P[X]] \ \ Q \in Ker(v)\} \qquad 3.32$$

Ed inoltre, la (3.32) può essere scritta[37] come combinazione lineare di un valore atteso, $E_P[X]$, e di un ulteriore misura di

[36] Per un approfondimento si veda SCHMEIDLER, D., (1986) *"Integral Representation with Additivity",* in "Proceedings of the American Mathematical Society".
[37] Si veda De Giorgi(2002)

rischio, $R_v(X)$, calcolabile mediante l'integrale di Choquet:

$$\rho_v(X) = E_P[X] + R_v(X) \qquad 3.33$$

con[38]

$$R_v(X) = -\int_{-\infty}^{0} \left(g\left(\overline{F}_X(x) - 1\right)\right)dx - \int_{0}^{\infty} \left(g\left(\overline{F}_X(x)\right)\right)dx \qquad 3.34$$

Osserviamo inoltre che il valore atteso della variabile aleatoria X può essere scritto nella forma

$$E_p(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) = \int_{-\infty}^{0} \left(\overline{F}_X(x) - 1\right)dx + \int_{0}^{\infty} \overline{F}_X(x)dx \qquad 3.35$$

Se il funzionale g è differenziabile, la (3.34) diventa:

$$-R_v(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} x g^{/}\left(\overline{F}_X(x)\right)dF_X(x) \qquad 3.36$$

La (3.36) può essere interpretata come una correzione del valore atteso della variabile aleatoria X:

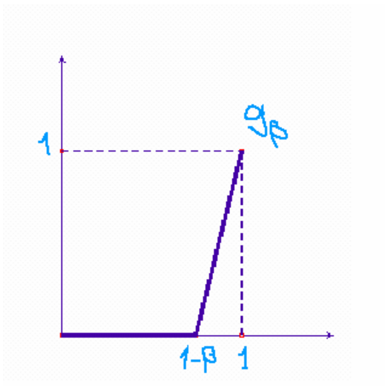
$$\int_{-\infty}^{\infty} g^{/}\left(\overline{F}_X(x)\right)dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(g\left(\overline{F}_X(x)\right)\right)dx = g(1) - g(0) = 1$$

[38] Nella (3.34) $\overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$ ed $F_X(x) = P[X \leq x]$.

5. Conditional value at risk

Sia $\beta \in (0,1)$, definiamo la finzione g_β come segue

$$g_\beta(x) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 < x \le 1-\beta \\ -\dfrac{1-\beta}{\beta} + \dfrac{x}{\beta} & se \quad 1-\beta < x \le 1 \end{cases}$$



Sia $x_\beta = F_X^{-1}(\beta) = inf\{x \in R \mid F_X(x) \ge \beta\} = inf\{x \in R \mid \overline{F}_X(x) \le 1-\beta\}$

Per $x_\beta < 0$ la dispersione per calcolare il conditional value at risk è:

$$R_{v\beta}(X) = -\int_{-\infty}^{0} \left(g_\beta\left(\overline{F}_X(x) - 1\right)\right) dx - \int_{0}^{\infty} \left(g_\beta\left(\overline{F}_X(x)\right)\right) dx =$$

$$R_{v\beta}(X) = -\int_{-\infty}^{x_\beta} \left(-\frac{1-\beta}{\beta} + \frac{\overline{F}_X(x)}{\beta} - 1 \right) dx$$

$$R_{v\beta}(X) = -\int_{-\infty}^{x_\beta} \left(\frac{1-\overline{F}_X(x)}{\beta} \right) dx$$

$$R_{v\beta}(X) = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{x_\beta} F_X(x) dx$$

Per $x_\beta > 0$

$$R_{v\beta}(X) = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{x_\beta} F_X(x) dx - x_\beta$$

La misura di dispersione che corrisponde al conditional value at risk[39] è:

$$\rho_v(X) = E_P[X] + R_v(X).$$

[39] Si veda Vanini e Vignola(2001) (da completare)

APPENDICE A: L'INTEGRALE DI CHOQUET

1. Definizioni preliminari

Definizione A. 1- σ-algebra

Sia Ω un insieme ed $A=\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω.

L'insieme A è una σ-algebra su Ω se $\bigcup_i^{\infty} A_i \in \Omega$ e $\bigcap_i^{\infty} A_i \in \Omega$.

Definizione A. 2

Sia ν una misura assegnata sull'insieme (A, Ω).

La misura ν è monotòna se:

$A_i \subseteq A_j$ risulta $\nu(A_i) \leq \nu(A_j)$ A. 1

La misura ν è finita se:

$0 \leq \nu(A_i) \leq +\infty \quad \forall \; A_i \in A$ A. 2

La misura ν è subadditiva se:

$\nu(A_i \cup A_j)+\nu(A_i \cap A_j) \leq \nu(A_i)+\nu(A_j)$ per ogni $A_i, A_j \in A$ A. 3

La misura ν è superadditiva se:

$\nu(A_i \cup A_j)+\nu(A_i \cap A_j) \geq \nu(A_i)+\nu(A_j) \quad \forall A_i, A_j \in A$ A. 4

La misura ν è additiva se è subadditiva e superadditiva:

$\nu(A_i \cup A_j)+\nu(A_i \cap A_j) = \nu(A_i)+\nu(A_j) \quad \forall A_i, A_j \in A$ A. 5

La (A.3) e (A.4) sono soddisfatte contemporaneamente se la ν è additiva . Infatti:

$\nu(A_i \cup A_j) = \nu(A_i)+\nu(A_j) \quad \forall A_i, A_j \in A$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$ A. 6

La misura ν è σ-additiva se per ogni successione $\{A_i\}$ di insiemi disgiunti di Ω si ha:

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$ A. 7

Una misura monotòna tale che ν(∅)=0 e ν(Ω)=1 è definita capacità.

Una classe M=$\{A_1, \cdots, A_n\}$ di sottoinsiemi di Ω è definita se esiste una permutazione degli indici $\{1,2,\cdots,n\}$ tale che $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n$.

Teorema A. 1

Sia ν: A→R una funzione di insieme.

a) Se ν è una capacità risulta 0≤ν(A)≤ν(Ω);
b) Se ν additiva allora è modulare.

Dimostrazione

a) La tesi è diretta conseguenza della definizione di capacità: $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega \rightarrow \nu(\emptyset) \leq \nu(A) \leq \nu(\Omega)$.

b) Se $A_i \cap A_j = \emptyset$ segue che $\nu(A_i \cap A_j)=0$ da cui la (A.5).

2. Spazi di Banach e funzioni di distribuzione

Indichiamo con B:=B(Ω,A) lo spazio di Banach[40] delle funzioni limitate A-misurabili su Ω, dotato della norma dell'estremo superiore[41], $\|.\|_\infty$, e con $B_0:=B_0(\Omega,A)$ il sottospazio di B generato dalle funzioni semplici, limitate e A- misurabili.

Denotata con $X: B \rightarrow R$ una variabile aleatoria su B si definisce con la (A.8) il livello superiore debole di X rispetto a t.

$\{X \geq t\} := \{\omega \in \Omega | \ X(\omega) \geq t\}$

A. 8

e con la (A.9) il livello superiore forte di X rispetto a t.

[40] Lo spazio di Banach è uno spazio normato e completo.

[41] Indicato con *L*(*X;Y*) l'insieme delle funzioni limitate da X in Y, la norma dell'estremo superiore per $f \in L(X;Y)$ è definita da $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

$\{X>t\}=\{\omega\in\Omega|\ X(\omega)>t\}$ A. 9

Definizione A. 3

La funzione di distribuzione di X rispetto alla capacità v, $G_{v,X}$, è definita da:

$G_{v,X}=v(\{\omega\in\Omega|\ X(\omega)>t\})$ con $t\in R$ A. 10

Nel seguito si elencano le cinque proprietà fondamentali della funzione di distribuzione $G_{v,X}$

Proprietà A. 1

La funzione $G_{v,X}$ è limitata al variare della variabile aleatoria X.

Dimostrazione

La funzione di distribuzione è una capacità e perta

nto è limitata inferiormente da 0 e superiormente da 1.

Proprietà A. 2

La funzione $G_{v,X}$ è decrescente.

Dimostrazione

Comunque scelte le variabili aleatorie X e Y tali che $X(\omega)\leq Y(\omega)$ risulta $G_{v,Y} \leq G_{v,X}$ perché $\{\omega\in\Omega| X(\omega)\leq t\}\subseteq\{\omega\in\Omega| Y(\omega)\leq t\}$ e dunque la monotònia della funzione di capacità

$v(\{\omega\in\Omega| X(\omega)\leq t\})\geq v(\{\omega\in\Omega| Y(\omega)\leq t\})$.

Proprietà A. 3

La funzione $G_{v,X}$ ha al più una infinità numerabile di punti di discontinuità.

Dimostrazione

Ogni funzione monotòna ha al più un insieme numerabile di punti di discontinuità. Per i dettagli della dimostrazione si rimanda al testo del Giusti[42].

Proprietà A. 4

La funzione $G_{v,X}$ è Lebesgue integrabile[43].

Definizione A. 4

[42] GIUSTI, E.(1989), *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri, Torino, pagina 151.

[43] Anche in questo caso si omette la dimostrazione in quanto è fatto noto che le funzioni monotòne e limitate sono Lebesgue integrabili.

Due distribuzioni G e G° sono uguali quasi ovunque[44], $G \approx G^{\circ}$ se l'insieme dei $t \in R$ tale che $G^{\circ}(t) \neq G(t)$ ha misura (euclidea) nulla.

Osservazione A. 1

Se $G \approx G^{\circ}$ risulta

$$\int_{[a,b]} G(t)dt = \int_{[a,b]} G^{\circ}(t)dt \qquad \text{A. 11}$$

Teorema A. 2

Comunque scelta la successione di funzioni $\{X_n\}$ appartenente allo spazio di Banach le condizioni a e b sono equivalenti.

a) La successione $\{X_n\}$ converge a X rispetto alla metrica indotta dalla norma dell'estremo superiore, $\|.\|_{\infty}$;

b) La successione $\{X_n\}$ converge uniformemente a X su Ω.

Dimostrazione

(a $\Rightarrow$ b) Se la successione $\{X_n\}$ converge a X rispetto alla norma il $\lim_{n \to \infty} \|X_n - X\|_{\infty} = 0$, per le proprietà della norma dell'estremo superiore si ha $0 \leq |X_n - X| \leq \|X_n - X\|_{\infty}$.

[44] La definizione di "uguali quasi ovunque" è estendibile a misure diverse da quella euclidea.

Passando al limite, $0 \le \lim_{n\to\infty}|X_n - X| \le \lim_{n\to\infty}\|X_n - X\|_\infty = 0$ segue la convergenza uniforme.

(b $\Rightarrow$ a) La successione $\{X_n\}$ converge uniformemente a X se $\lim_{n\to\infty}(X_n - X) = 0$ per ogni elemento ω appartenente al dominio delle $\{X_n\}$ è pertanto $\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\omega\in\Omega}(X_n - X)\right) = 0$.

3. Costruzione dell'integrale di Choquet

Qualsiasi variabile aleatoria X è esprimibile come differenza di due variabili aleatorie positive[45]: $X^+=\max\{X,0\}$ e $X^-=-\min\{X,0\}$:

$$X = X^+ - X^- \qquad \text{A. 12}$$

La scomposizione della variabile aleatoria X in X^+, X^- e data dalla (A.13):

$$E(X) = E(X^+ - X^-) = E(X^+) - E(X^-) \qquad \text{A. 13}$$

[45] Se $X=0$ segue che $max\{X,0\}=min\{X,0\}$ e pertanto la tesi è verificata. Se $X>0$ si ha $X^+=X$ ed $X^-=0$, mentre con $X<0$ si ottiene $X^+=0$ ed $X^-=X$.

Se B=(Ω,A,P) è uno spazio di probabilità dotato di struttura di spazio di Banach ed X una variabile aleatoria su tale spazio è possibile costruire due successioni $\{X_n^+\}$ ed $\{X_n^-\}$convergenti rispettivamente a X^+ ed X^-.

Sia (A.14)

$$A_{i,n}=\{\omega\in\Omega|\ X_n(\omega)=x_{i,n}\} \qquad \text{A. 14}$$

una partizione di Ω calcoliamo il valore atteso degli elementi della successione $\{X_n^+\}$:

$$E\left(X_n^+\right)=\sum_{i=1}^{m} x_{i,n} P\left(A_{i,n}\right) \qquad \text{A. 15}$$

per la (A.14) la (A.15) diventa

$$E\left(X_n^+\right)=\sum_{i=1}^{m} x_{i,n} P\left(X_n^+ = x_{i,n}\right) \qquad \text{A. 16}$$

Dove

P : la funzione di probabilità sullo spazio B

m: la cardinalità delle possibili determinazioni della variabile aleatoria $X_n(\omega)$.

Se $x_{i,n}$ può assumere tutte le possibili determinazioni reali nell'intervallo $\left[0, x_{i,m}\right]$, ovvero x è una variabile aleatoria continua, risulta (Teorema Radom Nikodim[46]):

$$E\left(X_n^+\right) = \sum_{i=1}^{m} \int_0^{x_{i,n}} P\left(X_n^+ = x_{i,n}\right) dy \qquad \text{A. 17}$$

Per l'uniforme convergenza di $\{X_n\}$, nella (A.17) gli operatori di integrazione e sommatoria possono essere **permutati:**

$$E\left(X_n^+\right) = \int_0^{x_{i,n}} \sum_{x_{i,n} > y} P\left(X_n^+ = x_{i,n}\right) dy \qquad \text{A. 18}$$

Introdotta la funzione per la variabile aleatoria X, f_x, si ha:

$$E\left(X_n^+\right) = \int_0^{\infty} \left(1 - f_{X_n^+}(y)\right) dy \qquad \text{A. 19}$$

Per le proprietà di convergenza delle funzioni monotòne possiamo scrivere:

$$E\left(X^+\right) = \lim_{n\to\infty} E\left(X_n^+\right) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} P\left(X_n^+ > y\right) dy =$$
$$= \int_0^{\infty} P\left(X^+ > y\right) dy = \int_0^{\infty} \left(1 - f_{X^+}(y)\right) dy \qquad \text{A. 20}$$

Analogalmente:

---

[46] Per la dimostrazione si rimanda al testo di KOLMOGOROV, A. N.-FOMIN, S.V.(1980), *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Edizioni Mir, Mosca. Pagina348.

$$E\left(X^{-}\right)=\cdots=\int_{0}^{\infty}\left(1-f_{X_{n}^{-}}(y)\right)dy$$

A. 21

Nei successivi passaggi sarà mostrata la scomposizione del valore atteso della variabile aleatoria X; tale scomposizione coincide con l'integrale di Choquet se le probabilità vengono sostituite dalle capacità.

$$E(X)=\int_{0}^{\infty}\left(1+f_{X+}(y)\right)dy-\int_{0}^{\infty}\left(1+f_{X-}(y)\right)dy=$$

$$=\int_{0}^{\infty}P(X>y)dy-\int_{0}^{\infty}P(X<-y)dy=$$

$$=\int_{0}^{\infty}P(X>y)dy+\int_{-\infty}^{0}P(X<y)dy=$$

$$=\int_{0}^{\infty}P(X>y)dy-\int_{-\infty}^{0}\left(1-P(X<y)+1\right)dy=$$

$$=\int_{0}^{\infty}P(X>y)dy-\int_{-\infty}^{0}\left(P(X>y)-1\right)dy=$$

$$=\int_{0}^{\infty}\left(1-f_{x}(y)\right)dy-\int_{-\infty}^{0}\left(1-f_{x}(y)-1\right)dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}f_{x}(y)dy+\int_{0}^{\infty}\left(1-f_{x}(y)\right)dy$$

A. 22

Definizione A. 5

L'integrale secondo Choquet della variabile aleatoria X rispetto alla capacità v è definito dalle (A.23), (A.24).

$$\int_{\Omega} X dv = \int_{-\infty}^{0} \left(\nu\{\omega \in \Omega | X(\omega) \geq t\} - 1 \right) dt + \int_{0}^{\infty} \nu\{\omega \in \Omega | X(\omega) \geq t\} dt \qquad \text{A. 23}$$

che equivale alla[47]

$$\int_{\Omega} X dv = \int_{-\infty}^{0} \left(G_{\nu,X}(t) - 1 \right) dt + \int_{0}^{\infty} G_{\nu,X}(t) dt \qquad \text{A. 24}$$

Assegnata la capacità v e la variabile aleatoria X la (A.23) è ben definita; inoltre gli integrali nella (A.23) e nella (A.24) sono ben definiti in quanto ogni reale t induce una partizione dell'insieme Ω in due insiemi disgiunti $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \geq t\}$ e $\Omega \setminus \{\omega \in \Omega | X(\omega) \geq t\}$.

4. Proprietà dell'integrale di Choquet

Proprietà A. 5

$$\int_{\Omega} I_A dv = v(A) \qquad \text{A. 25}$$

con

---

[47] La funzione $G_{\nu,X}(t)$ è definita dall'equazione (A.10).

$$I_A = \begin{cases} 1 & se \qquad \omega \in A \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Per la proprietà di additività dell'integrale, la (A.25) può essere espressa come la somma di due integrali definiti su domini disgiunti:

$$\int_{\Omega} I_A dv = \int_{\Omega \setminus A} I_A dv + \int_{A} I_A dv = 0 + v(A)$$

Proprietà A. 6

$$\int \alpha X dv = \alpha \int X dv \tag{A. 26}$$

La (A.26) è diretta conseguenza delle proprietà degli integrali.

Proprietà A. 7

$$\int_{\Omega} X + \beta I_{\Omega} dv = \int_{\Omega} X dv + \beta \tag{A. 27}$$

ricordando che $v(I_{\Omega})=1$ segue che:

$$\int_{\Omega} X + \beta I_{\Omega} dv = \int_{\Omega} X dv + \beta \int_{\Omega} I_{\Omega} dv = \int_{\Omega} X dv + \beta v(\Omega) + \int_{\Omega} X dv + \beta$$

Proprietà A. 8

Se $X \geq Y$ risulta:

$$\int_{\Omega} X dv \le \int_{\Omega} Y dv \qquad \text{A. 28}$$

Per le proprietà degli spazi di Banach si ha, inoltre:

$$(X_n \to X) \;\Rightarrow\; \left(\int_{\Omega} X_n dv \to \int_{\Omega} X dv\right) \qquad \text{A. 29}$$

Le proprietà enunciate per le variabili aleatorie continue possono essere proposte, con alcuni accorgimenti, anche per variabili aleatorie discrete.

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i I_{A_i} \qquad \text{A. 30}$$

con $\alpha_1 \ge \cdots \ge \alpha_N \ge \alpha_{N+1} = 0$ costanti reali e $A_1, \cdots, A_N$ partizione disgiunta dell'insieme Ω.

La (A.30) è equivalente alla (A.31):

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) I_{\bigcup_{j=1}^{i} A_j} \qquad \text{A. 31}$$

Ad esempio[48] per N=2 si ha:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{2} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) I_{\bigcup_{j=1}^{i} A_i} = (\alpha_1 - \alpha_2) I_{A_1} + (\alpha_2 - \alpha_3) I_{A_1 \cup A_2} \qquad \text{A. 32}$$

---

[48] Si omette la dimostrazione nel caso generale in quanto può essere svolta con il procedimento induttivo.

ricordando che α_3=0 e gli insiemi A_1e A_2 disgiunti la (A.32) diventa:

$$\sum_{i=1}^{2}(\alpha_i-\alpha_{i+1})I_{\bigcup_{j=1}^{i}A_j}=(\alpha_1-\alpha_2)I_{A_1}+(\alpha_2)(I_{A_1}+I_{A_2})=$$

$$=\alpha_1 I_{A_1}+\alpha_2 I_{A_1}=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i I_{A_i} \qquad \text{A. 33}$$

Con la stessa tecnica dimostrativa la (A.31) può essere verificata per qualsiasi naturale N.

La Φ è non negativa in quanto somma di numeri non negativi.

La Φ è combinazione lineare di funzioni semplici quindi il suo integrale si può scrivere come una sommatoria:

$$I(\Phi)=\int_{\Omega}\Phi dv=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i v(A_i) \qquad \text{A. 34}$$

che equivale per la (A.31) alla (A.35)

$$I(\Phi)=\int_{\Omega}\Phi dv=\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i-\alpha_{i+1})v\left(\bigcup_{j=1}^{i}A_i\right) \qquad \text{A. 35}$$

5. Cenni sul modello di Schmeidler

In ambito decisionale il modello di Schmeidler[49] è una valida alternativa al modello di utilità attesa (von Neumann -

[49] SCHMEIDLER, D., (1986) *"Integral Representation with Additivity",* in "Proceedings of the American Mathematical Society".

Morgenstein) in quanto è adatto per descrivere il comportamento di soggetti che operano in contesti di informazione asimmetrica.

Iniziamo con alcune definizioni

Definizione A. 6

Le funzioni X ed Y sono comonotòne se $\forall\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ risulta:

$$X(\omega_1) \leq X(\omega_2) \Leftrightarrow Y(\omega_1) \leq Y(\omega_2) \qquad \text{A. 36}$$

Definizione A. 7

Un insieme di funzioni χ su Ω è comonotòno se ogni sua coppia di funzioni è comonotòne.

Teorema A. 3

Assegnate $X_1, X_2, \cdots, X_n, X, Y : \Omega \longrightarrow R$ risulta che

a) X e Y sono comonotòne se:

$$(X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \geq 0 \qquad \text{A. 37}$$

b) X e Y sono comonotòne se l'insieme (A.37) è una catena:

$$C_t = \{\omega \in \Omega: \{X(\omega) \leq t\} \text{ e } \{Y(\omega) \leq t\}\} \quad \text{con } t \in R \qquad \text{A. 38}$$

c) Se le funzioni $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono un insieme di funzioni comonotòne allora l'insieme (A.38) è una catena

$\{\omega\in\Omega$: $\{ X_i(\omega)\leq t\}$ con $i=1, 2, \ldots, n\}$ con $t\in R$ A. 39

d) Se X e Y sono comonotòne i seguenti insiemi $\{X , X+Y\}$, $\{X,\alpha X\}$con α reale , $\{\alpha X, \beta Y\}$con α e β reali, $\{u\circ X, w\circ Y\}$ u e w funzioni monotòne, sono comonotòni.

e) Se l'insieme $X_1,X_2, \ldots, X_n$ è comonotòno anche l'insieme $\beta_1X_1, \beta_2X_2, \ldots, \beta_nX_n$ con $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ numeri reali.

Dimostrazione

a)Se X e Y sono comonotòne le quantità $X(\omega_1)$- $X(\omega_2)$ e $(Y(\omega_1)$-$Y(\omega_2))$ hanno segno concorde e pertanto la (A.36) è verificata.

b) Si ponga $X(\omega)\leq Y(\omega)$.

Comunque scelti t< t' si ha $\{\omega\in\Omega: X(\omega)\leq t\}\subseteq \{\omega\in\Omega: X(\omega)\leq t'\}$ ed $C_t\subseteq \{Y(\omega)\leq t\}$ da cui $C_t\subseteq C_{t'}$.

Per la dimostrazione dei punti (b), (c), (d) ed (e) si rimanda al testo del Kolmogorov-Fomin[50].

Osservazione 4.1

---

[50] KOLMOGOROV, A. N.-FOMIN, S.V.(1980), *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Edizioni Mir, Mosca.

Le conseguenze dell'uniforme convergenza sono la (A.39) e la (A.40):

$$\int_{\Omega}(X+Y)dv = \int_{\Omega} Xdv + \int_{\Omega} Ydv \qquad \text{A. 40}$$

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{N}\beta_i X_i\right)dv = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\beta_i X_i dv \qquad \text{A. 41}$$

6. Rappresentazione di Schmeidler

La rappresentazione, mediante integrale, della variabile aleatoria X, proposta da Schmeidler è la seguente:

$$I(X) = \int_{\Omega} Xdv = \int_{0}^{\infty} v(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq t\})dt + \int_{0}^{-\infty}[v(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq t\}) - 1]dt \qquad \text{A. 42}$$

Nell'impostazione di Schmeidler la variabile aleatoria $X(\omega)$ è o l'effetto economico o l'utilità che il decisore realizza se si verifica l'evento ω e pertanto la relazione di preferenza, può essere esplicitata attraverso il funzionale $I(\cdot)$ confrontando in tal modo differenti varabili aleatorie.

La funzione integranda nella (A.41) può essere interpretata come la funzione di distribuzione della variabile aleatoria X sull'insieme Ω:

$$X^*(t)=\begin{cases} v(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\geq t\}) & con \quad t\geq 0 \\ v(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)< t\}) & con \quad t< 0 \end{cases}$$
A. 43

Se $X(t)$ è non negativo si considera solo il primo addendo della formula (A.41) perchè $X^*(t)=0$ per ogni $t<0$ e risulta:

$$I(X)=\int_{\theta}^{\tau} X^*(t)dt$$
A. 44

dove $\theta=inf\{X(\omega)\}$ e $\tau=sup\{X(\omega)\}$.

Indicata con I_E la funzione caratteristica dell'insieme E risulta $I(I_E)=v(E)$.

Teorema A. 4

Il funzionale $I(\cdot)$ gode delle seguenti proprietà:

a) $I(I_\Omega)=1$

b)Se le variabili X e Y sono comonotòne si ha:

$I(X+Y)=I(X)+I(Y)$

c)Se le variabili X e Y, sono monotòne, con X>Y, risulta:

$I(X)\geq I(Y)$

Dimostrazione

E' sufficiente dimostrare il teorema per le funzioni semplici: ogni funzione nello spazio di Banach, può essere ottenuta come il limite di una successione di funzioni semplici.

La proprietà (a) segue banalmente dalla definizione del funzionale $I(\cdot)$.

Dimostriamo ora le proprietà (b) e (c) servendoci di funzioni costanti a tratti.

Per ogni valore di k e per ogni valore di n, con $1 \leq k \leq 2^n$ si definisca l'insieme:

$$E_n^k = \left\{ \omega \in \Omega \middle| \quad \frac{\lambda(k-1)}{2^n} < X(\omega) \leq \frac{\lambda k}{2^n} \quad con \quad \lambda > 0 \right\} \qquad \text{A. 45}$$

e le successioni di funzioni $X_n(\omega) = \dfrac{\lambda(k-1)}{2^n}$ e $Y_n(\omega) = \dfrac{\lambda k}{2^n}$.

Per ogni numero naturale n e per ogni $\omega \in \Omega$ si ha la seguente catena di disuguaglianze:

$$X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega) \leq X(\omega) \leq Y_{n+1}(\omega) \leq Y_n(\omega)$$

Per l'ipotesi di monotònia si ha:

$$I(X_n(\omega)) \leq I(X(\omega)) \leq I(Y_n(\omega))$$

e

$$0 \leq I(Y_n(\omega)) - I(X_n(\omega)) \leq \frac{\lambda k}{2^n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

Dalle nostre ipotesi gli integrali Schmeidler relativi alle successioni di funzioni a scala valgono:

$$I(X_n) = \int_0^{\lambda} v(\{\omega \in \Omega | \quad X_n \geq t\})dv$$

$$I(Y_n) = \int_0^{\lambda} v(\{\omega \in \Omega | \quad Y_n \geq t\})dv$$

da cui

$$I(X) = \int_0^{\lambda} v(\{\omega \in \Omega | \quad X(\omega) \geq t\})dv$$

A. 46

La (A.45) è diretta conseguenza dalla monotònia della funzione di capacità v.

Quanto dimostrato per le variabili aleatorie continue, non negative, può essere esteso alle variabili aleatorie discrete.

Sia k, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$, il numero delle determinazioni che può assumere X al variare di ω.

La funzione semplice non negativa X può essere espressa in un solo modo come somma di k termini:

$$X = \sum_{i=1}^{k} t_i I_{E_i} \qquad \text{A. 47}$$

con $E_i \cap E_j = \varnothing$ per ogni $i \neq j$.

Se si pone $t_{k+1} = 0$ è verificata la (A.47):

$$\int_0^{t_m} v(\{\omega \in \Omega | \quad X(\omega) \geq t\})dt = \sum_{i=m}^{k} (t_i - t_{i+1}) v\left(\bigcup_{j=1}^{i} E_j\right) \qquad \text{A. 48}$$

con m intero compreso tra 1 e k.

Per m=2 e k=4 si ha[51]:

$$\sum_{i=2}^{4} (t_i - t_{i+1}) v\left(\bigcup_{j=1}^{i} E_j\right) = \qquad \text{A. 49}$$

$$= (t_2 - t_3) v\left(\bigcup_{j=1}^{2} E_j\right) + (t_3 - t_4) v\left(\bigcup_{j=1}^{3} E_j\right) + (t_4 - t_5) v\left(\bigcup_{j=1}^{4} E_j\right) =$$

dall'ipotesi $E_i \cap E_j = \varnothing$ segue:

$$(t_2 - t_3) v\left(\bigcup_{j=1}^{2} E_j\right) = t_2 v(E_1) - t_3 v(E_1) + t_2 v(E_2) - t_3 v(E_2)$$

$$(t_3 - t_4) v\left(\bigcup_{j=1}^{3} E_j\right) = t_3 v(E_1) - t_4 v(E_1) + t_3 v(E_2) - t_4 v(E_2) + t_3 v(E_3) - t_4 v(E_3)$$

$$(t_4 - t_5) v\left(\bigcup_{j=1}^{5} E_j\right) = t_4 v(E_1) - t_5 v(E_1) + t_4 v(E_2) - t_5 v(E_2) + t_4 v(E_3) - t_5 v(E_3) + t_4 v(E_4) - t_5 v(E_4)$$

e pertanto la (A.48) diventa

---

[51] Si omette la dimostrazione nel caso generale in quanto può essere agevolmente svolta con il metodo induttivo.

$$\sum_{i=2}^{k}(t_i - t_{i+1})v\left(\bigcup_{j=1}^{i}E_j\right) = \int_0^{t_2} v(\{\omega \in \Omega| \quad X(\omega) \geq t\})dt = \sum_{i=2}^{k}(t_i - t_{i+1})v\left(\bigcup_{j=1}^{i}E_j\right).$$

Definizione A. 8–Azione

Una azione è una funzione che associa all'insieme degli stati Ω un numero reale.

Definizione A. 9

Ogni azione f induce una relazione d'ordine sull'insieme Ω.

L'insieme $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ è ordinato rispetto all'azione f se esiste una permutazione degli elementi di $\Omega = \{\omega_{1_f}, \cdots, \omega_{n_f}\}$ tale che

$$f(\omega_{1_f}) \leq f(\omega_{2_f}) \leq \cdots \leq f(\omega_{n_f}) \qquad \text{A. 50}$$

Definizione A. 10

L'azione $f\ g$ è preferibile all'azione f, $f \prec g$, se

$$\sum_{k=1}^{n} f(\omega_k) \leq \sum_{k=1}^{n} g(\omega_k) \qquad \text{A. 51}$$

Si elencano nel seguito le proprietà fondamentali delle azioni.

Proprietà A. 9–Tricotomia

Solo una delle seguenti relazioni può essere verificata

$f \preceq g \qquad g \approx f \qquad g \preceq f$

Proprietà A. 10

–Transitività

Se $(g \preceq f \quad f \preceq h)$ allora $g \preceq h$

7. Capacità neo-additiva

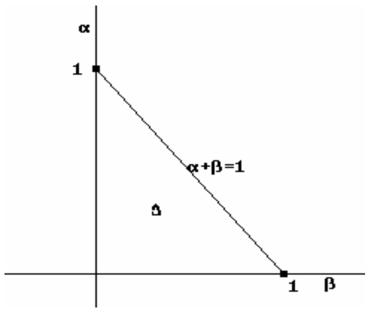
La capacità neo-additiva, $\nu(E \mid \pi, \gamma, \lambda)$, è combinazione lineare di due capacità duali[52]: la prima, $\mu^0(E)$, in riferimento alla completa ignoranza o ambiguità dell'evento E, la seconda, $\mu^1(E)$, alla conoscenza dell'evento.

$$\mu^0(E) = \begin{cases} 1 & per \quad E = \Omega \\ 0 & altrove \end{cases} \qquad \text{A. 52}$$

$$\mu^1(E) = \begin{cases} 1 & per \quad E = \varnothing \\ 0 & altrove \end{cases} \qquad \text{A. 53}$$

Indichiamo con (Ω, A, π) si indichi uno spazio di probabilità (con Ω l'insieme universo e $\pi : A \subseteq \Omega \longrightarrow [0,1]$) e si consideri il seguente triangolo

[52] La capacità v è la duale della capacità $\bar{v}$ se $\forall A \subseteq \Omega$ risulta $v(A) = 1 - \bar{v}(A)$.



$\Delta = \{(\alpha,\beta) : \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1\}$.

Avendo indicato con (γ,λ) un punto appartenente al triangolo in figura risulta

$$\nu(E \mid \pi,\gamma,\lambda) = \gamma \cdot \mu^0(E) + \lambda \cdot \mu^1(E) + (1-\gamma-\lambda) \cdot \pi(E) \qquad \text{A. 54}$$

Definizione A. 11

Il valore atteso dell'integrale di Choquet rispetto alla capacità neo additiva è dato dalla[53] (A.54):

$$V(f \mid \nu(\cdot \mid \pi,\gamma,\lambda)\pi,\gamma,\lambda) = \gamma \cdot \inf_{\varepsilon \subseteq S} f + \lambda \cdot \sup_{\varepsilon \subseteq S} f + (1-\gamma-\lambda) \cdot E_\pi[f] \qquad \text{A. 55}$$

Teorema 6.1

La capacità neo additiva ν gode delle seguenti proprietà

a) comunque assegnati tre eventi (E,F,G) tali che $E \cap F \neq \varnothing \neq E \cap G$ e $E \cup F \neq S \neq E \cup G$

b) risulta

[53] Per ulteriori approfondimenti teorici si rimanda a Denneberg (2000).

$$\nu(E \cup F) - \nu(F) = \nu(E \cup G) - \nu(G) \qquad \text{A. 56}$$

b) comunque assegnati due eventi (E, F) tali che $E \cap F \neq \varnothing$ e $E \cup F \neq S$ si ha:

$$\nu(E \cup F) \leq \nu(E) + \nu(F) \qquad \text{A. 57}$$

$$\bar{\nu}(E \cup F) \leq \bar{\nu}(E) + \bar{\nu}(F) \qquad \text{A. 58}$$

Dimostrazione

Punto a

$$\nu(E \cup F) - \nu(F) =$$
$$\gamma \cdot \left(\mu^0(E \cup F) - \mu^0(F)\right) + \lambda \cdot \left(\mu^1(E \cup F) - \mu^1(F)\right) + (1 - \lambda - \gamma) \cdot \left(\pi(E \cup F) - \pi(F)\right)$$

ma $\mu^0(E \cup F) = \mu^0(F) = 0$ e $\mu^1(E \cup F) = \mu^1(F) = 1$

e pertanto

$$\nu(E \cup F) - \nu(F) = (1 - \lambda - \gamma) \cdot \left(\pi(E \cup F) - \pi(F)\right) \qquad \text{A. 59}$$

per ipotesi $E \cap F = \varnothing$ e dunque $\pi(E \cup F) = \pi(E) + \pi(F)$. La (A.58) può essere riscritta nella forma (A.59):

$$\nu(E \cup F) - \nu(F) = (1 - \lambda - \gamma) \cdot \left(\pi(E) + \pi(F) - \pi(F)\right) =$$

$$= (1 - \lambda - \gamma) \cdot \pi(E) \qquad \text{A. 60}$$

La (A.59) non dipende dall'insieme F e quindi la tesi (a) è verificata.

Punto b

$$\nu(E \cup F) = \gamma \cdot \mu^0(E \cup F) + \lambda \cdot \mu^1(E \cup F) + (1 - \lambda - \gamma) \cdot \pi(E \cup F) \qquad \text{A. 61}$$

$$\nu(E) + \nu(F) =$$

$$= \gamma \cdot (\mu^0(E) + \mu^0(F)) + \lambda \cdot (\mu^1(E) + \mu^1(F)) + (1 - \lambda - \gamma) \cdot (\pi(E) + \pi(F)) \qquad \text{A. 62}$$

Ricordando che $E \cup F \neq S, \varnothing$ risulta

$\mu^0(E \cup F) = \mu^0(F) = \mu^0(E) = 0$ e $\qquad \mu^1(E \cup F) = \mu^1(F) = \mu^1(E) = 1$

l'espressione (A.60) può essere riscritta nella (A.62)

$$\nu(E \cup F) = \lambda + (1 - \lambda - \gamma) \cdot \pi(E \cup F) = (1 - \gamma) \cdot \pi(E \cup F) \qquad \text{A. 63}$$

mentre la (A.61) diventa

$$\nu(E) + \nu(F) = \lambda \cdot (1 + 1) + (1 - \lambda - \gamma) \cdot (\pi(E) + \pi(F)) =$$

$$= (1 + \lambda - \gamma) \cdot (\pi(E) + \pi(F)) \qquad \text{A. 64}$$

La tesi deriva dal fatto che la funzione π è una probabilità.

7. Il significato dei parametri nell'integrale di Choquet

Nelle espressioni (A.53) e (A.54) riguardanti rispettivamente la capacità e l'integrale di Choquet sono stati introdotti i parametri

γ e λ. Si vuole ora studiare l'atteggiamento di fiducia e/o sfiducia nei confronti della distribuzione adottata rispetto a tali valori. Sono enucleabili sei possibili diversi atteggiamenti:

1) $\gamma = \lambda = 0$ valore atteso

2) $\lambda = 0 \quad e \quad 0 < \gamma \leq 1$ pessimismo

3) $0 < \lambda \leq \gamma \leq 1$ cauto pessimismo

4) $0 < \gamma \leq \lambda \leq 1$ cauto ottimismo

5) $\gamma = 0 \quad e \quad 0 < \lambda \leq 1$ ottimismo

6) $\lambda + \gamma = 1$ criterio di Hurwitz

Il primo atteggiamento non necessita di commenti, in quanto, sostituendo i valori dei parametri nella (A.54) si ha proprio l'utilità attesa.

Nel secondo e quinto atteggiamento, si considera alternativamente nullo il peso dell'estremo superiore della funzione f (atteggiamento 2 –pessimismo-) e dell'estremo inferiore della funzione f (atteggiamento 5 –ottimismo-) . Nel terzo atteggiamento, -cauto pessimismo-, è pesato maggiormente l'estremo inferiore rispetto all'estremo superiore della funzione f, mentre nel quarto caso, -cauto ottimismo-, viene assegnato un peso maggiore all'estremo superiore rispetto all'estremo inferiore. In riferimento al criterio di Hurwitz è interessante notare che l'integrale di Choquet è combinazione lineare dei punti critici di f, indipendentemente dalla funzione di utilità attesa. Come ulteriore osservazione, se si pone $\lambda = \gamma = 0{,}5$ l'integrale di Choquet

APPENDICE B:CURVE DI INDIFFERENZA

L'utilità attesa (ex ante) di un paniere di due attività rischiose (c_1, c_2) e data dalla (1):

$$U(c_1, c_2) = \pi_1 u(c_1) + \pi_2 u(c_2) \tag{U1}$$

dove $u(c)$ è l'utilità attesa dell'evento c e (π_1, π_2) le probabilità riferite alle attività (c_1, c_2).

Le due attività sono indifferenti sulle curve di equazione:

$$U(c_1, c_2) = costante \tag{U2}$$

e pertanto, differenziando (U2) si ottiene:

$$dc_1 \pi_1 \left(\frac{\partial}{\partial c_1} u(c_1) \right) + dc_2 \pi_2 \left(\frac{\partial}{\partial c_2} u(c_2) \right) = 0 \tag{U3}$$

Appendice C: I paradossi di Allais e Ellsberg[54]

1. Paradosso di Allais

Sebbene il modello di utilità attesa sia molto flessibile, infatti la funzione di utilità può assumere qualsiasi inclinazione, vi sono talvolta ipotesi, generate da questo, che vengono scartate da chi deve prendere una decisione.

Un esperimento in tal senso è stato proposto da Allais(1953) che ha chiesto ad un gran numero di persone, a fronte della stessa posta, di scegliere una alternativa in ognuna delle seguenti situazioni.

Situazione A

Alternativa a

Vincita	1
Probabilità di vincita	1

[54] Per un approfondimento si veda MACHINA M. J.(2002), "*State of the world and the state of decision theory*", http://econ.ucsd.edu/~mmachina/. (Paradosso di Allais pagina 9, Paradosso di Ellsberg pagina 13)

Alternativa b

Vincita	5	1	0
Probabilità di vincita	0,1	0,89	0,1

Situazione B

Alternativa c

Vincita	5	0
Probabilità di vincita	0,1	0,9

Alternativa d

Vincita	5	1	0
Probabilità di vincita	0,1	0,89	0,1

La maggior parte degli intervistati ha preferito le alternative a e c in evidente contrasto con la teoria dell'utilità attesa.

Infatti, comunque scelta una funzione di utilità, u, deve risultare

$$u(a) > u(b) \rightarrow u(1) > 0{,}1 \cdot u(5) + 0{,}89 \cdot u(1) + 0{,}01 \cdot u(0) \qquad \text{(C.1)}$$

$$u(c) > u(d) \rightarrow 0{,}1 \cdot u(5) + 0{,}90 \cdot u(0) > 0{,}11 \cdot u(1) + 0{,}89 \cdot u(0) \qquad \text{(C.2)}$$

Dalla (C.1) si ottiene

$$0{,}11u(1) > 0{,}10 \cdot u(5) + 0{,}01 \cdot u(0) \qquad \text{(C.3)}$$

mentre dalla (C.2)

$0{,}11u(1) < 0{,}10 \cdot u(5) + 0{,}01 \cdot u(0)$ (C.4)

Per ovvie ragioni la (C.3) e (C.4) non possono essere verificate contemporaneamente da cui il paradosso.

2. Paradosso di Ellsberg

Un'urna contiene 90 palline di cui: 30 gialle e 60 blu o rosse. Sia p la percentuale incognita ($0 \leq p \leq 60\%$) di palline rosse all'interno dell'urna.

Si estrae una pallina dall'urna e si scommette sul colore.

Anche in questo caso allo scommettitore si chiede di scegliere una alternativa in ognuna delle seguenti situazioni.

Situazione A

Si scommette su giallo o rosso e si vince secondo la seguente tabella:

Pallina estratta / Scommessa	Gialla	Rossa	Blu
Gialla	100	0	0
Rossa	0	100	0

Situazione B

Si scommette sulla coppia rosso-blu oppure giallo-blu e si vince secondo la seguente tabella:

Pallina estratta Scommessa	Gialla	Rossa	Blu
rosso-blu	0	100	100
giallo-blu	100	0	100

La maggior parte delle persone ha scommesso su giallo, nella situazione A e rosso-blu nella situazione B:

$$Situazione\_A(giallo) \succ Situazione\_A(rossa) \tag{C.5}$$

$$Situazione\_B(rossa/blu) \succ Situazione\_B(giallo/blu) \tag{C.6}$$

Dalla (C.5) per il decisore segue, relativamente alle probabilità

$$P(giallo) > P(rossa) \tag{C.7}$$

dunque

$$P(giallo \cup blu) > P(rossa \cup blu) \tag{C.8}$$

Che è in contraddizione con la (C.6).

CONCLUSIONI

Conclusioni invero non definitive, ma riferite ad un tratto di un percorso di ricerca. Un discorso quindi non concluso, ma un contributo e una premessa per ulteriori e successivi approfondimenti.

L'analisi che ho proposto è rivolta e circoscritta ai mercati imperfetti; ho voluto così focalizzare un ambito ove i soggetti agiscono in condizione di incertezza mettendo quindi in atto comportamenti difficilmente schematizzabili; essenziale, quindi, l'osservazione dell'esperienza, per quanto questa possa dimostrare in termini dati.

E' stato dimostrato come, alla presenza di ambiguità informativa, il valore atteso e la probabilità additiva non si rilevino più strumenti idonei a descrivere l'andamento dei prezzi.

Si è pertanto creduto di rinvenire nell'integrale di Choquet una risposta adeguata a situazioni simili a quelle proposte dai paradossi di Allais ed Ellesberg.

BIBLIOGRAFIA

1. ACZEL, J., (1969) *"On Applications and Theory of Functional Equation"*, Academic Press, New York.
2. ANDERSSON, F.(1999), *Uncertainty aversion in a simple insurance mode*l, Finnish Economic Papers, 12,1, pp 16-27
3. ANSCOMBE, F.J. – AUMANN, R.J. (1963) *"A definition of Subjective Probability",* in "Ann. Math. Stat.".
4. ARTZNER, P. – DELBAEN, F. – EBER, J.M. – HEATH, D., (1999) *"Coherent Measures of Risk",* in Mathematical Finance.
5. CASTAGNOLI, E. – MACCHERONI, F. – MARINACCI, M., (2000) *"Insurance Premia Consistent with Market",* Mimeo, Milano e Torino.
6. CASTAGNOLI, E.- MACCHERONI, F.- MARINACCI, M., (luglio 2004) *Choquet insurance pricing: a caveat*, Mathematical finance, Vol 14, 481-485.
7. CHATEAUNEUF, A.-GRANT, S.- EICHBERGER, J.(2003), *Choice under Uncertainty with the Best and worst in Mind: Neo-Additive capacities*, Universiy of Heidelberg, Department of Economics, Discussion Paper Series No. 393.
8. CHOQUET, G., (1953) *"Theorie des Capacités",* in Ann. Inst. Fourier.
9. DABONI, L. (1982), *Sulla nozione di utilità bernoulliana*, in "Saggi in onore di Bruno Menegoni", Rendiconti del Comitato per gli Studi e per la Programmazione Economica, Volume XX, Editrice Alceo Padova, pp. 97-114.
10. DANA, R. A.(2000), *Ambiguity, Uncertainty Avversion and Equilibrium Welfare*, Discussion Peper, Ceremade.
11. DE FINETTI, B- EMANUELLI, F. (1967), *Economia delle assicurazioni,*UTET, Capitolo 2.
12. DE GIORGI, E.(2002), *Reward-Risk Portfolio Selection and*

Stochastic dominance, www.risklab.ch/ftp/papers/RewardRiskPortfolioSelect.ps.

13. DHAENE, J.- VANDUFFEL, S. –GOOVAERTS M.J. - KAAS, Ryncke (2004), *Comonotonic Approximations for Optimal Portfolio Selection Problems*, forthcoming.

14. DOBB, J.L., (1994) *"Measure Theory",* in Graduate texts in Mathematics, Springer – Verlag, New York.
15. DOUGLAS W- UKHOV,A-(2004*), Equilibrium Risk Premia for Risk Seekers*,www.kelley.iu.edu/Finance/workingpapers.
16. DOW, J. – WERLANG, S.R.C., (1992) *"Uncertainty Aversion, Risk Aversion and the Optimal Choise of Portfolio",* in Econometrica.
17. ELLSBERG, D. (1961), *Risk, ambiguity and the Savage axioms*, QJE, 75, 643-669.
18. GILBOA -SCHMEIDLER (1989). MaxMin Expected Utility with Non-Unique Prior. *Journal ofMathematical Economics.*
19. GIUSTI, E.(1989), *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri, Torino.
20. GRECO, G.H., (1982) *"Sulla rappresentazione di funzionali mediante integrali",* in Rend. Sem. Mat. Univ. Padova.
21. Karni, E,.(2004), *Axiomatic Foundations of Agency Theory*, www.econ.jhu.edu.
22. KEYNES, J.M., (1921) *"A Treatise on Probability",* in "The collected Writings of John Maynard Keynes", Macmillan.
23. KOLMOGOROV, A. N.-FOMIN, S.V.(1980), *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Edizioni Mir,Mosca.
24. MACCHERONI, F., (1999) *"Note sull'Integrale di Choquet",* in Studi Matematici, Istituto di Metodi Quantitativi, Università L. Bocconi.
25. MACHINA M. J.(2002), "*State of the world and the state of decision theory*", http://econ.ucsd.edu/~mmachina/.

26. MAGALÌ E. ZUANON , *Rappresentabilità di un preordine mediante l'integrale di Choquet*, Amases.
27. MARINACCI, M., (1997) *"A simple proof of a basic result for multiple priors",* Mimeo, Univ. Of Toronto.
28. ORTU, F., (2000) *"Arbitrage, Linear Programming and Martingales in Securities Markets with Bid-Ask spreads"* , Univ. Of Southern California, Los Angeles.
29. PFLUG, C. (1998): *How to measure risk?,* Working Paper, IIASA and University of Vienna.
30. RIGOTTI, L.-SHANNON,C(2004), *Uncertainty and Risk in Financial Markets*,
31. SCHMEIDLER, D., (1986) *"Integral Representation with Additivity",* in "Proceedings of the American Mathematical Society".
32. SCHMEIDLER, D., (1989) *"Subjective Probability and Expectet Utility without Additivity",* in Econometrica.