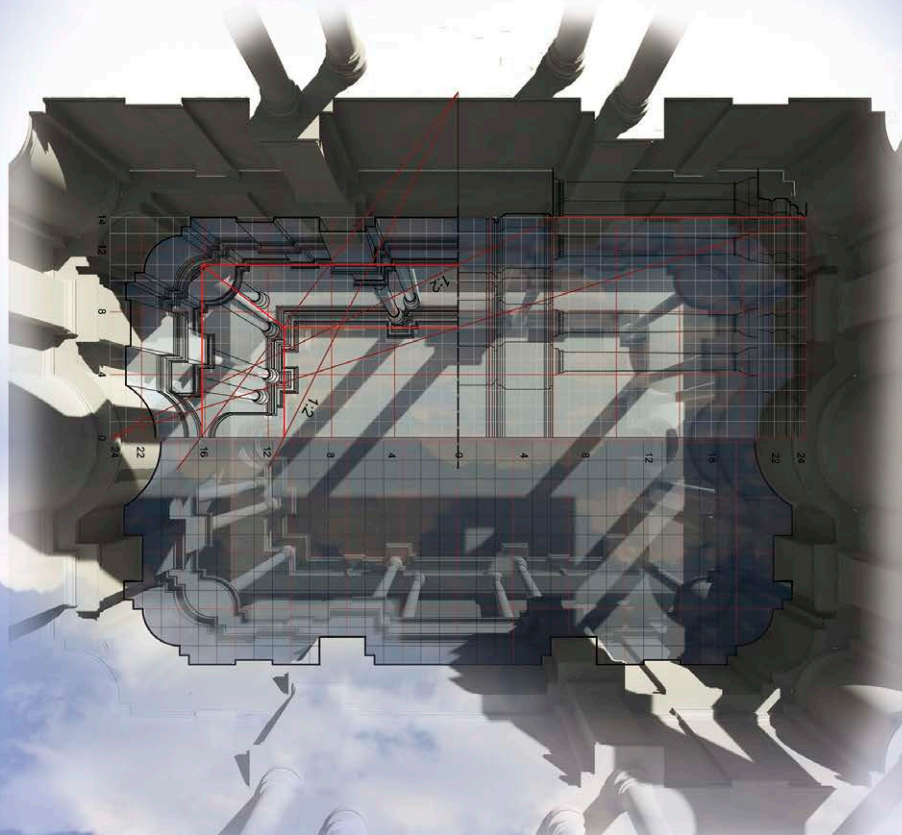


a cura di
Maria Teresa Bartoli
Monica Lusoli



■ Le teorie, le tecniche,
i repertori figurativi nella
prospettiva d'architettura
tra il '400 e il '700



STUDIE SAGGI

- 148 -

Comitato Scientifico

Riccardo Migliari (*Uniroma1*)
Maria Teresa Bartoli (*Unifi*)
Maura Boffito (*Unige*)
Vito Cardone (*Unisa*)
Agostino De Rosa (*IUAV*)
Aldo De Santis (*Unical*)
Fauzia Farneti (*Unifi*)
Anna Marotta (*Unito*)
Michela Rossi (*POLIMI*)
Roberto Ranon (*Uniud*)

L'Editore si avvale di un Comitato scientifico che indica gli scritti da pubblicare con l'intento di valorizzare le pubblicazioni attraverso un processo di referaggio ([4]:3) che ha l'obiettivo di asseverare la dignità scientifica di una pubblicazione: quest'ultima deriva dalla sua accettabilità da parte della 'comunità degli studiosi' della materia.

Le teorie, le tecniche,
i repertori figurativi nella
prospettiva d'architettura
tra il '400 e il '700

Dall'acquisizione alla lettura del dato

a cura di
MARIA TERESA BARTOLI
MONICA LUSOLI

FIRENZE UNIVERSITY PRESS

2015

Le teorie, le tecniche, i repertori figurativi nella prospettiva d'architettura tra il '400 e il '700 : dall'acquisizione alla lettura del dato / a cura di Maria Teresa Bartoli, Monica Lusoli. – Firenze : Firenze University Press, 2015.
(Studi e saggi ; 148)

<http://digital.casalini.it/9788866558842>

ISBN 978-88-6655-884-2 (online)

Progetto grafico di Alberto Pizarro Fernández, Pagina Maestra snc

Volume pubblicato con i fondi dell'Unità di ricerca di Firenze del PRIN 2010/11, Architectural Perspectives, digital preservation, content access and analytics, coordinato dal prof. Riccardo Migliari.

Certificazione scientifica delle Opere

Tutti i volumi pubblicati sono soggetti ad un processo di referaggio esterno di cui sono responsabili il Consiglio editoriale della FUP e i Consigli scientifici delle singole collane. Le opere pubblicate nel catalogo della FUP sono valutate e approvate dal Consiglio editoriale della casa editrice. Per una descrizione più analitica del processo di referaggio si rimanda ai documenti ufficiali pubblicati sul catalogo on-line della casa editrice (www.fupress.com).

Consiglio editoriale Firenze University Press

G. Nigro (Coordinatore), M.T. Bartoli, M. Boddi, R. Casalbuoni, C. Ciappei, R. Del Punta, A. Dolfi, V. Fargion, S. Ferrone, M. Garzaniti, P. Guarnieri, A. Mariani, M. Marini, A. Novelli, M. Verga, A. Zorzi.

La presente opera è rilasciata nei termini della licenza Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International (CC BY-SA 4.0: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode>).

CC Firenze University Press
Università degli Studi di Firenze
Firenze University Press
Borgo Albizi, 28, 50122 Firenze, Italy
www.fupress.com

Sostituirsi idealmente a Ghiberti: entrare – per così dire – nella sua testa? Ma non c'è in effetti un altro modo di scrivere la storia. O riesco a rifare dentro di me – e sia pure nel modo più schematico e più rozzo – quella specifica «operazione», cui ogni singola realtà umana nel fatto si riduce o mi resterà altrimenti comunque (e interamente) preclusa... L'uomo ... conosce ciò che fa. E non è tra conoscente e conosciuto che l'atto del conoscere istituisce relazioni, ma tra operazioni e operazioni. Tra operazioni mentali e manuali al limite; tra enunciato ed esperimento. Vero è ciò che funziona. E ciò vale anche per la storia...

Decio Gioseffi, Il Terzo Commentario e il pensiero prospettico del Ghiberti

SOMMARIO

PRESENTAZIONE <i>Riccardo Migliari</i>	XIII
INTRODUZIONE L'ATTUALITÀ DELLA PROSPETTIVA D'ARCHITETTURA <i>Maria Teresa Bartoli</i>	XV
UNITÀ DI RICERCA DI ROMA	
IL 'TEOREMA FONDAMENTALE' DEL <i>DE PROSPECTIVA PINGENDI</i> <i>Riccardo Migliari, Marta Salvatore</i>	3
RIGHE DI LEGNO, RIGHE DI CARTA E FILI DI SETA: PER UNA 'COSTRUZIONE' DELLA PROSPETTIVA SECONDO PIERO DELLA FRANCESCA <i>Jessica Romor</i>	25
IL SECONDO LIBRO DEL <i>DE PROSPECTIVA PINGENDI</i> ED IL QUADRATO DEGRADATO COME ELEMENTO DI RIFERIMENTO: DISAMBIGUAZIONE DELLE FIGURE REGOLARI <i>Leonardo Baglioni</i>	35
LE ANAMORFOSI DEL <i>DE PROSPECTIVA PINGENDI</i> <i>Matteo Flavio Mancini</i>	45
<i>PROPIA FORMA</i> E <i>PROSPECTIVA</i> DEL CATINO ABSIDALE DI PIERO DELLA FRANCESCA <i>Marta Salvatore</i>	55
PROSPETTIVE SOLIDE. LA SCALA REGIA IN VATICANO <i>Leonardo Paris</i>	65
LA SALA DEL MAPPAMONDO IN PALAZZO VENEZIA. UNA QUADRATURA ROMANA TRA QUATTROCENTO E NOVECENTO <i>Laura De Carlo, Prokopios Kantas, Matteo Flavio Mancini, Nicola Santopuoli</i>	77

DIVULGAZIONE E VALORIZZAZIONE. LA GALLERIA PROSPETTICA DI PALAZZO SPADA <i>Tommaso Empler</i>	87
UNITÀ DI RICERCA DI VENEZIA	
<i>UT PICTURA ITA VISIO</i> , PER UNA TEORIA DELLA PROSPETTIVA NORD- EUROPEA <i>Agostino De Rosa</i>	97
GIRARD DESARGUES E ABRAHAM BOSSE: ALLE ORIGINI PROIETTIVE DEL QUADRATURISMO? <i>Christian Boscaro</i>	111
IL DINAMISMO PERCETTIVO NEL REFETTORIO DI ANDREA POZZO <i>Alessio Bortot</i>	119
ANDREA POZZO A ROMA: NUOVE IPOTESI FRUITIVE DEL REFETTORIO DI TRINITÀ DEI MONTI <i>Antonio Calandriello</i>	127
METODOLOGIE PER IL RILIEVO TRAMITE STRUMENTAZIONE FOTOGRAFICA DI PROSPETTIVE ARCHITETTONICHE AFFRESCATE E DIPINTE SU SUPERFICI MURARIE PIANE E VOLTATE <i>Francesco Bergamo</i>	135
SALOMON DE CAUS, DIDATTICA DELLA PROSPETTIVA <i>Stefano Zoerle</i>	143
<i>ARCHITECTURA PICTA</i> . LE PROSPETTIVE ARCHITETTONICHE DELLA SALA MORONE NEL CONVENTO DI SAN BERNARDINO A VERONA <i>Giuseppe D'Acunto, Ilaria Forti</i>	151
COSTRUZIONI PROTO-PROIETTIVE NELLE PITTURE PROSPETTICHE DI PADRE EMMANUEL MAIGNAN <i>Gabriella Liva</i>	161
DEFORMAZIONI PROSPETTICHE E DEFORMAZIONI MATERIALI: UNA RILETTURA DELL'IMPIANTO PROSPETTICO DELLA TAVOLETTA DELLA FLAGELLAZIONE DI CRISTO DI PIERO DELLA FRANCESCA ALLA LUCE DELLE ALTERAZIONI PLASTICHE DEL SUO SUPPORTO. <i>Isabella Friso</i>	171

SCENOGRAPHIA, CIOÈ DESCRIZIONE DELLE SCENE: DALLA TEORIA DI DANELE BARBARO ALLA PRATICA DI PAOLO VERONESE <i>Cosimo Monteleone</i>	179
UNITÀ DI RICERCA DI FIRENZE	
I FUOR DI REGOLA NELLE PROSPETTIVE DEL BEATO ANGELICO <i>Maria Teresa Bartoli</i>	191
DALLA MISURA ALLA RAPPRESENTAZIONE, LA 'GEOMETRIA PRATICA' NELLO SVILUPPO DEI PROCEDIMENTI PROSPETTICI NEL RINASCIMENTO <i>Carlo Biagini</i>	203
GEOMETRIE E PROPORZIONI NUMERICHE NELLA PROSPETTIVA DEL SETTORE DI APRILE A SCHIFANOIA (F. DEL COSSA). DALL'ANALISI ALLA COMUNICAZIONE <i>Manuela Incerti, Stefania Iurilli</i>	213
LE ARCHITETTURE DELL'INGANNO DI PELLEGRINO TIBALDI A BOLOGNA. APPUNTI PER UN'IPOTESI INTERPRETATIVA <i>Anna Maria Manferdini</i>	223
LA PROSPETTIVA SOLIDA SU UNA VOLTA A PADIGLIONE CON PIANTA TRAPEZIA, PARTENDO DA UN BOZZETTO PIANO. LA CHIESA DI SAN MATTEO A PISA <i>Nevena Radojevic</i>	233
NUOVI SISTEMI DI RAPPRESENTAZIONE. IL CASO DELLA QUADRATURA NELLA CHIESA DI SAN MATTEO A PISA <i>Carlo Battini</i>	245
L'INGANNO DELL'ARCHITETTURA GENERATA SUL PIANO. DALL'ANALISI DELLA FINTA CUPOLA DI AREZZO, ALCUNI LINEAMENTI DEL PROCESSO CREATIVO DI ANDREA POZZO <i>Stefano Giannetti</i>	253
IL SUPERAMENTO DELLO SPAZIO REALE, ILLUSIONISMO ARCHITETTONICO E BOSCHERECCIA IN PALAZZO MARTELLI <i>Fauzia Farneti</i>	263
PROSPETTIVA SCENOGRAFICA: UN ESEMPIO A FIRENZE <i>Nicola Velluzzi</i>	275

METODI SEMI-AUTOMATICI PER LA RICOSTRUZIONE DI MODELLI DIGITALI DI PROSPETTIVE DI ARCHITETTURA <i> Davide Pellis, Vincenzo Donato</i>	283
UNITÀ DI RICERCA DI MILANO	
LA PROSPETTIVA DI SOTTO IN SU DEL SALONE DI PALAZZO CALDERARA A VANZAGO <i> Giampiero Mele, Maria Pompeiana Iarossi, Sara Conte</i>	294
«SONO FORSE IO, MAESTRO» LA PROSPETTIVA NEI CENACOLI FIORENTINI DI SAN MARCO E FULIGNO <i> Giampiero Mele, Sylvie Duvernoy</i>	303
IL CONVITO IN CASA DI LEVI DI PAOLO VERONESE: ANALISI PROSPETTICA E RICOSTRUZIONE DELLO SPAZIO SIMULATO <i> Alberto Sdegno, Silvia Masserano</i>	313
UNITÀ DI RICERCA DI COSENZA	
OMOGRAFIA SOLIDA STEREOSCOPICA. IL CASO DELL'URNA DI S. CRISTINA <i> Laura Inzerillo</i>	325
UNITÀ DI RICERCA DI SALERNO	
IL VERO SI PROLUNGA NEL VEROSIMILE <i> Adriana Rossi</i>	335
LE PROSPETTIVE ARCHITETTONICHE NELLE VILLE VESUVIANE DEL SETTECENTO <i> M.Ines Pascariello, Fausta Fiorillo</i>	347
UNITÀ DI RICERCA DI GENOVA	
PROSPETTIVA E SCENOGRAFIA NELLA SALA DELL'AUTUNNO <i> Roberto Babbetto, Cristina Cándito</i>	357

UNITÀ DI RICERCA DI TORINO

- EREDITÀ SETTECENTESCHE NELLE PROSPETTIVE ILLUSORIE
NEOGOTICHE NEL PIEMONTE SABAUDO: DAL DUOMO DI
BIELLA AL SAN BARTOLOMEO A VALENZA 369
Anna Marotta
- UN QUADRATURISTA ANALFABETA: GIUSEPPE DALLAMANO
(MODENA 1679-MURAZZANO 1758) 381
Rita Binaghi
- PER BERNARDINO GALLIARI “PROSPETTIVO INSIGNE” E
L’ATTIVITÀ DEI GALLIARI IN PIEMONTE. NUOVI INDIRIZZI DI
RICERCA 391
Laura Facchin
- GIUSEPPE E FRANCESCO NATALI QUADRATURISTI: GLI “ASSAI
CONSIDERABILI LAVORI DELL’ARTE ARCHITETTONICA” FRA
LOMBARDIA ASBURGICA E STATO FARNESIANO 403
Anna Còccioli Mastroviti
- GIULIO TROILI E GIUSEPPE BARBIERI, ARCHITETTI E GESUITI
CHE GIOCANO CON LA SCIENZA DELLA QUADRATURA AL
CONFINE TRA VIRTUOSISMO PITTORICO E FISICA TRADUZIONE
DI PRINCIPI GEOMETRICO-MATEMATICI 415
Marinella Pigozzi
- IL PUNTO DI VISTA ‘DINAMICO’ NEGLI SPAZI
ARCHITETTONICI DI COLLEGAMENTO. LA GALLERIA
DELL’AURORA A PALAZZO CORSINI 427
Barbara Aterini
- I PUNTI DI VISTA DELL’ARCHITETTURA DIPINTA: L’OPERA DI
ARCANGELO GUGLIELMELLI A SANTA RESTITUTA 437
Andrea Giordano, Maria Rosaria Cundari
- “TROPPO NOTI AI PROFESSORI”: I MOTIVI POZZESCHI NELLA
PITTURA ARCHITETTONICA A SIVIGLIA NELL’ULTIMO
SETTECENTO 447
Sara Fuentes Lázaro
- MODELOS E FORMAS NA DECORAÇÃO ILUSIONISTA NO
BRASIL COLONIAL: ENTRE NORDESTE E SUDESTE 457
Magno Mello Moraes

IL 'TEOREMA FONDAMENTALE' DEL DE PROSPECTIVA PINGENDI*

Riccardo Migliari, Marta Salvatore

1. Il 'teorema fondamentale' e i possibili condizionamenti di un lettore

In una disciplina matematica, il teorema fondamentale è la proposizione sulla quale si appoggiano le deduzioni, gli enunciati e le dimostrazioni successive. Esiste un passo, nel *De Prospectiva Pingendi*, che assolve appunto questo ruolo ed è anche l'unico, in tutto il trattato, che non sia corredato da una illustrazione¹.

Forse anche per questo motivo, il passo in questione è stato spesso trascurato dagli esegeti dell'opera pierfrancescana: l'unico che sembra concedergli una certa importanza è Rudolf Wittkower in un suo scritto del 1953 (Wittkower 1953). Ma vi sono anche altre ragioni che rendono il passo sfuggente: la più importante è legata all'atteggiamento mentale del lettore, condizionato da conoscenze che non appartengono al mondo di Piero e da un modo di ragionare ormai molto lontano dal suo. Giocano un ruolo determinante in questo condizionamento:

- l'idea che il *De Prospectiva Pingendi* sia, esclusivamente, un trattato di prospettiva;
- l'idea che Piero si serva consapevolmente del punto di fuga, conoscenza, sia pure intuitivamente, il significato e che, per conseguenza, sia anche in grado di far cenno al punto di distanza.

* Gli autori ringraziano Marisa Dalai, Carlo Maccagni, Ottavio Besomi per i commenti e le preziose informazioni prodigate nel corso delle riunioni della Commissione per l'edizione nazionale delle opere di Piero della Francesca.

¹ Si tratta del passo che incomincia con: «Et hora, perchè voglio dire de le linee et superficie degradate, è necesario essa proportionione dimostrare, perchè quando dico proportionalmente che è proportionione intendo, perchè le proportioni sono innumerabili; et questa non è dupla commo è .2. et .4. e .8., et non è sexquialtera commo .4. .6. .9., nè sexquitertia commo .9. .12. .16., nè tripla, nè quadrupla, ma dico essere proportionione degradata, non commo .4. .8. .12. .15., nè commo .6. .9. .11. .12., ma è secondo la distantia da l'ochio al termine dove se mecte le cose degradate et la distantia dal termine a la cosa veduta», *De Prospectiva Pingendi*, Libro I,11 (Della Francesca 1942: 73-74).

Tutto ciò offusca il valore del passo del quale ci occupiamo. Noi riteniamo, invece, che nel passo in questione si celi il più importante contributo di Piero alla storia della rappresentazione: un ponte gettato tra il mondo euclideo delle certezze e il mondo proiettivo delle apparenze e perciò, appunto, il ‘teorema fondamentale’ del *De Prospectiva Pingendi*.

Il trattato di Piero dovrebbe essere letto e studiato padroneggiando molte e diverse competenze, che interessano discipline oggi distinte da un grado elevato di specializzazione².

Il *De Prospectiva Pingendi*, infatti, non è solo un trattato teorico e pratico di prospettiva: è un documento per la storia della lingua volgare e dei suoi rapporti con quella latina, utilizza con piena consapevolezza le proiezioni ortogonali associate tre secoli prima di Gaspard Monge, descrive la forma di un capitello composito nel momento in cui gli architetti stanno elaborando la teoria degli ordini architettonici, è una preziosa raccolta di disegni, gli unici che ci siano pervenuti di mano di Piero Della Francesca, e perciò è, in sé e per sé, un’opera d’arte. Noi pensiamo, perciò, che una lettura realmente approfondita e attenta di quest’opera potrebbe darla solo un gruppo interdisciplinare di studiosi, disposti ad ascoltarsi e ad aiutarsi l’un l’altro.

Abbiamo sentito il bisogno di fare questa premessa, quasi ovvia, anche per giustificare questa nostra, parziale, lettura odierna, che è fatta da un solo e unilaterale punto di vista: quello della geometria descrittiva. Questo punto di vista, che esplicitamente inquadra il *De Prospectiva Pingendi* nella storia della geometria descrittiva, anziché, com’è più consueto, nella storia della prospettiva, è autorizzato dalla presenza, nel trattato di Piero, di due dei metodi che formano, attualmente, il corpus disciplinare della geometria descrittiva: il metodo delle proiezioni ortogonali, che fu poi prevalentemente attribuito a Monge, e la prospettiva vera e propria. Nel trattato di Piero questi due metodi sono presenti entrambi in una fase fondativa della loro evoluzione, precisamente nel momento in cui si passa da un loro uso meramente intuitivo, ad una prima formulazione teorica, il che definisce, appunto, il confine tra ciò che è ‘metodo’ in senso scientifico e ciò che è artificio empirico e parzialmente inconsapevole.

È bene ricordare che, nella accezione attuale, la geometria descrittiva comprende i metodi di rappresentazione e lo studio delle superfici, nonché molte e utili applicazioni. Con il termine ‘metodo di rappresentazione’ intendiamo un insieme di teorie e di procedimenti che permettono di costruire il modello virtuale di un oggetto a tre dimensioni e di operare su quello come si farebbe su un oggetto reale. Infine, un metodo di rappresentazione è tale quando non solo produce una raffigurazione

² Sul pericolo derivante da interpretazioni specialistiche dell’opera di Piero, ci aveva già messi in guardia Corrado Maltese (Maltese 1989).

dell'oggetto reale o virtuale che studia, ma quando premette, altresì, di compiere su questa rappresentazione operazioni geometriche che, a loro volta, simulano operazioni reali. Ad esempio, nel metodo oggi noto come 'metodo di Monge', è possibile disegnare un mattone e studiare e misurare la forma che quel mattone acquisisce ove sia tagliato da un piano obliquo. Nella prospettiva si possono compiere queste operazioni, ma anche altre di più comune uso, come la costruzione delle ombre lineari e la misura e la resa del chiaroscuro.

2. *Il De Prospectiva Pingendi testimone delle due facce del mondo: come è, e come appare*

Ci siamo soffermati su questa definizione perché Piero utilizza, appunto, sia metodi che procedimenti, e precisamente: un metodo di rappresentazione del quale dà per scontata la padronanza da parte dei suoi lettori³ (e cioè le proiezioni ortogonali); un altro metodo (il primo modo) che serve per costruire modelli in prospettiva e, da ultimo, un procedimento grafico (il secondo modo) che serve a produrre prospettive e che si serve del primo dei suddetti metodi (e cioè le proiezioni ortogonali).

Dunque è necessario intendersi sui termini e, soprattutto, cogliere la differenza tra metodo e semplice procedimento. Ma prima ancora, bisogna inquadrare questi metodi nella cultura del tempo, seppure nelle linee più generali.

In quel tempo, come oggi, il mondo presenta due facce: come appare, e come è.

Per conoscere il mondo come è esistono, già al tempo di Piero, sofisticate teorie: dagli Elementi di Euclide, al corpus delle opere di Archimede. Queste teorie permettono di misurare e descrivere le forme a tre dimensioni e di rappresentarle con il disegno, in due dimensioni, come impronte sulla sabbia (icnografia) o ombre proiettate dal Sole (ortografia).

Per descrivere il mondo come appare, esiste invece la teoria che va dall'Ottica di Euclide alle *Quaestiones Perspectivæ* di Biagio Pelacani⁴, che giustifica l'aspetto delle cose (*perspectiva naturalis*), ma non permette di

³ «Però piglarò questo altro modo, col quale porrò parte per parte dimostrare le degradationi, nel qual modo, commo dissi nel principio del primo, è necesario intendere quello che l'omo vol fare et quello sapere ponere in propria forma sopra del piano, perché commo siranno poste in propria forma, la forza de le linee seguendo l'arte le produrranno degradate, sicommo se rapresentano nel termine dalle linee visuali», *De Prospectiva Pingendi*, Libro III, Introduzione (Della Francesca 1942: 129-130).

⁴ Per ricostruire la cultura geometrica del tempo di Piero e le relative origini sono fondamentali gli studi di Francesca Cecchini (Cecchini 2006) e Filippo Camerota (Camerota 2006). Sulla prospettiva naturale di Biagio Pelacani si vedano gli studi di Valeria Sorge (Sorge 1997) e di Graziella Federici Vescovini (Federici Vescovini 1961).

riprodurlo scientificamente. Alla luce di queste semplici considerazioni, si spiega facilmente quanto segue.

- Piero nulla dice del metodo che utilizza per rappresentare gli oggetti come sono, presumibilmente⁵ perché la teoria è nota e le applicazioni sono condivise tra i destinatari del suo lavoro. Ciò non significa, tuttavia, che quella teoria e quelle applicazioni non facciano parte integrante del trattato, tanto è vero che sono impiegate esplicitamente nei procedimenti del terzo libro e implicitamente nel metodo esposto nel primo e nel secondo libro.
- Piero riprende il ragionamento sull'apparenza e sull'essenza del mondo dal punto in cui gli antichi l'hanno lasciato e dedica perciò alla *perspectiva naturalis* e alla *propia forma* delle figure le prime undici proposizioni del suo trattato.
- Piero sviluppa poi, autonomamente, il suddetto ragionamento nel passo compreso tra le proposizioni 11 e 12, che qui chiamiamo 'teorema fondamentale' e, così facendo, fonda la *perspectiva artificialis* e getta un ponte tra l'essenza e l'apparenza delle cose, tra il mondo antico e quello moderno.
- Dato che le proposizioni dell'ottica di Euclide riguardano la riduzione delle grandezze per effetto della distanza da chi osserva, su questo aspetto della apparenza delle cose, in particolare, si fondano gli sviluppi teorici elaborati da Piero e, in particolare, il 'teorema fondamentale' del quale desideriamo parlare.
- A partire dalla dodicesima proposizione, Piero, abbandona il ragionamento squisitamente matematico, e impone al suo discorso, e ai suoi disegni, un carattere pratico, rivolgendosi ai pittori, come ai migliori interpreti della apparenza delle cose⁶.

3. Il mondo come è: il metodo della 'propia forma'

Prima di esaminare il teorema al quale è dedicato questo scritto, sarà bene, però, soffermarci sulle teorie e sulle applicazioni che riguardano il mondo come è. Dunque, il metodo che permette di descrivere le co-

⁵ Sta di fatto, però, che è impossibile trovare una qualche testimonianza precedente che attesti la stessa maturità dimostrata da Piero nell'uso delle 'proiezioni ortogonali'.

⁶ Si notino, nella dodicesima proposizione del primo libro, le dimensioni del piano destinato ad ospitare la prospettiva: «Metiamo che il piano asignato .BC. sia .20. braccia, et .DB. che è termine per infine a l'ochio sia .10. braccia, et l'ochio sia levato sopra .D. .3. braccia, il quale posi essere .A.», *De Prospectiva Pingendi*, Libro I (Della Francesca 1942: 75). Si tratta delle dimensioni di una parete da affrescare, larga all'incirca dodici metri, con l'osservatore posto alla distanza di sei metri.

se come sono è quello che oggi è noto come 'metodo di Monge'. Piero utilizza questo metodo in una forma solo leggermente diversa, paradossalmente più generale, benché più povera.

Questa rappresentazione è formata da due disegni associati: l'icnografia di vitruviana memoria, che Piero chiama *figura della larghezza*⁷ e l'ortografia, che chiama *figura della altezza*⁸, con evidente riferimento alle operazioni di misura che si possono compiere su di esse, dal momento che la pianta conserva la *propria forma*⁹ delle entità geometriche orizzontali (linee e forme piane) e il prospetto la vera forma dei segmenti verticali.

Da questa prima rappresentazione Piero è in grado di desumere la rappresentazione del medesimo oggetto in una posizione generica, nella quale le facce e gli spigoli non sono più in *propria forma*.

Consideriamo, ad esempio, la proposizione V del terzo libro: «Il cubo dato posante sopra ad uno suo angulo, et che nisuno suo lato sia equidistante al termine posto, proportionalmente degradare» (Della Francesca 1942: 145), proposizione dedicata alla prospettiva dell'esaedro.

Il poliedro è prima rappresentato in pianta e alzato, appoggiato con una faccia sul piano icnografico (orizzontale), con gli spigoli verticali paralleli e le facce verticali oblique rispetto al piano ortografico (verticale) e perciò in posizione particolare. Al solido viene poi applicata una traslazione, da sinistra a destra e dall'alto in basso, e una rotazione di circa ottanta gradi, che fa perno su un vertice e muove gli altri su piani paralleli al piano dell'ortografia (Figg. 1 e 2).

Il procedimento, ineccepibile, attesta la capacità di utilizzare la rappresentazione per simulare operazioni che interessano le tre dimensioni, così come si potrebbe fare nello spazio reale, e dunque dimostra l'operatività del metodo.

Questa tecnica appartiene a quei movimenti che oggi sono generalmente noti come 'cambiamento dei piani di proiezione', giacché il movimento di un oggetto rispetto ai piani di proiezione equivale al movimento del piano di proiezione rispetto all'oggetto, e che permettono di risolvere molti problemi relativi alle sezioni piane e alla vera forma delle figure geometriche.

Gaspard Monge si servirà ampiamente dei movimenti nelle sue *Leçons* [Monge, 1799], per risolvere i problemi di intersezione più complessi e

⁷ «Hora per fare la figura de la larghezza in propria forma, piglia la quantità de la pianella de la basa, ch'è .GH., et fà una superficie quadrata [...]», *De Prospectiva Pingendi*, Libro III, 6 (Della Francesca 1942: 149).

⁸ «[...] et ai compiuta la figura de l'altezza in propria forma», *De Prospectiva Pingendi*, Libro III, 6 (Della Francesca 1942: 151).

⁹ «[...] è necesario intendere quello che l'omo vol fare, et quello sapere ponere in propria forma sopra del piano», *De Prospectiva Pingendi*, Libro III, Introduzione (Della Francesca 1942: 130).

Figura 1. La rappresentazione dell'esaedro in posizione generica, dal codice palatino a Parma. Il solido compie due rotazioni: la prima intorno all'asse verticale, al seconda facendo perno su uno dei vertici. La leggera traslazione verso il basso è un espediente per evitare che parte della figura esca dal bordo superiore del foglio.

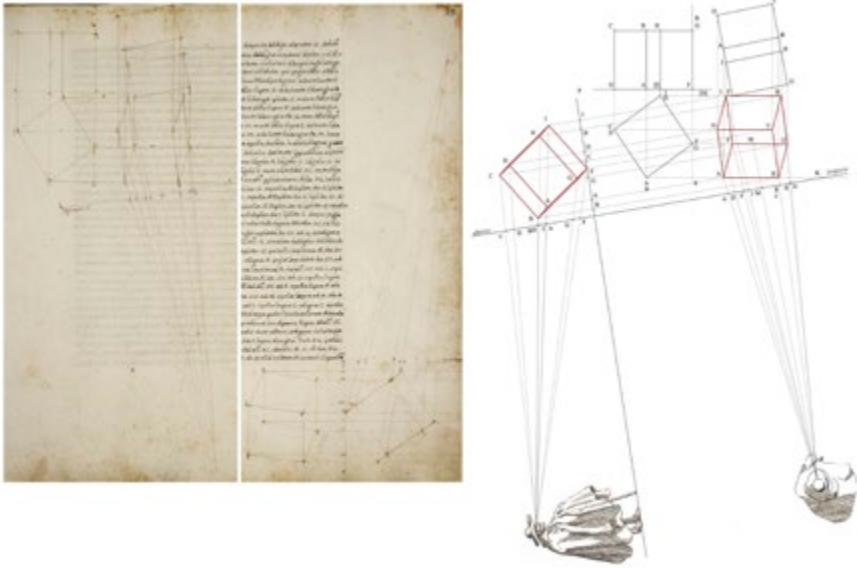
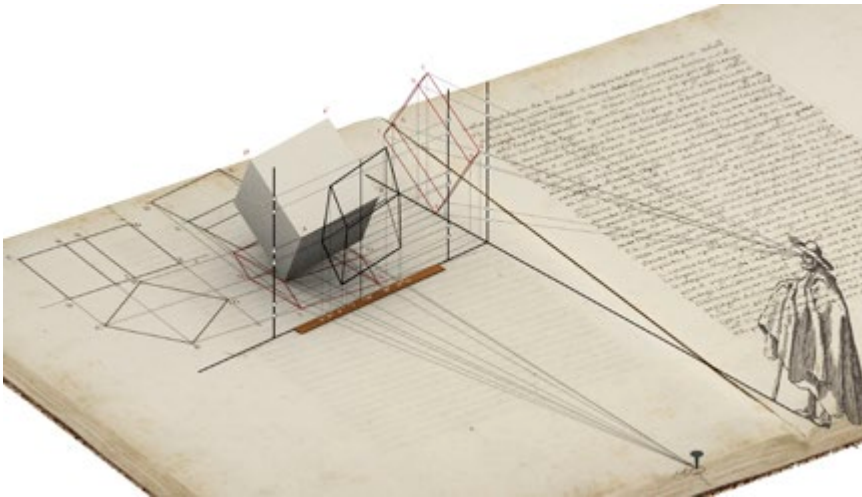


Figura 2. Ricostruzione tridimensionale dell'esaedro in posizione generica, dal codice palatino a Parma.



per altre ragioni, conferendo alla 'sua' geometria quel carattere visuale e dinamico che le dona gran parte del suo fascino.

Vorremmo ora soffermarci su un altro aspetto del metodo fin qui discusso, che d'ora in avanti chiameremo, in omaggio a Piero, 'metodo della *propia forma*', non potendolo chiamare 'metodo di Monge' per evidenti ragioni. Questo aspetto è quello che riguarda l'associazione tra le due figure della larghezza e della altezza, ovvero della pianta e del prospetto. Le due figure, infatti, debbono essere sempre associate, poiché nell'una si legge la posizione del punto rispetto al piano orizzontale (la larghezza) mentre nell'altro si legge e si misura la quota del punto (l'altezza); e così facendo un qualsiasi punto **P**, del quale sia data la prima e la seconda figura, può essere ricollocato nello spazio che si trova sopra il disegno della larghezza.

Ebbene, benché Piero non dica una sola parola di commento su queste questioni, è lecito affermare che egli sia perfettamente consapevole della relazione che il modello tridimensionale dell'oggetto dei suoi studi instaura con i disegni della *propia forma* e con la prospettiva, vale a dire che è consapevole di quella configurazione spaziale che noi oggi, con i nostri mezzi, possiamo facilmente raffigurare in uno spazio virtuale.

Infatti, ogni volta che può, Piero esplicita questa relazione legando le figure del medesimo punto oggettivo per mezzo di linee di riferimento (quelle che noi oggi chiamiamo linee di richiamo)¹⁰.

Ciò è palese nei disegni relativi alle proposizioni 5 e 8 del terzo libro, la prima dedicata alla prospettiva dell'esaedro, che abbiamo poc'anzi commentata, la seconda dedicata alla prospettiva di una testa umana, colta in una vista a livello degli occhi e in un'altra dal sotto in su.

Tuttavia vi sono casi in cui Piero non può servirsi di questo artificio. Nelle rappresentazioni del capitello italico, ad esempio, queste linee non sono mai presenti, anche se le due figure della larghezza e della altezza stanno sulla medesima pagina del codice. Perché? Noi crediamo che ciò accade quando la figura della larghezza e quella della altezza hanno una tale complessità da non poter essere ospitate su un solo foglio e quando, di necessità, si disegnano su due fogli distinti e quanto più grandi è possibile, per ridurre l'errore grafico e per evitare fraintendimenti. In questi casi, il disegno che il codice ci mostra è solo una allusione, incompleta e sommaria, ad un altro disegno il cui originale, purtroppo, è perduto, ma che il lettore può ricostruire grazie alla accuratissima descrizione che il testo ne dà, guidandolo passo dopo passo. E d'altronde, nel disegno d'architettura, ancora oggi, proprio questo è l'uso: si separano i disegni della

¹⁰ «Si on a la projection horizontale d'un point la projection de ce même point sur le plan vertical supposé abattu sera dans la droite, menée par la projection horizontale perpendiculairement à l'intersection L M des deux plans de projection, et réciproquement. Ce résultat est d'un usage très-fréquent dans la pratique», (Monge 1799: 14).

pianta e dell'alzato, ponendoli su due fogli distinti, che risultano così di più facile esecuzione e di più spedita consultazione, anche se ciò, prima dell'avvento dei computer, comportava spesso errori e fraintendimenti.

Non dobbiamo dunque sorprenderci dell'uso che Piero fa della rappresentazione in *propia forma* per generare una prospettiva, dal momento che padroneggia il metodo, ma dobbiamo essere consapevoli del fatto che quella prospettiva, che insegna nel terzo libro, è generata, nella rappresentazione in *propia forma*, come risultato di ripetute operazioni di intersezione e, perciò, non è essa stessa il frutto di un metodo, bensì il risultato di un procedimento meccanico.

Per apprezzare appieno questa differenza, è bene osservare che nel modo praticato nel primo e, con maggiore evidenza, nel secondo libro, la prospettiva si costruisce operando direttamente nello spazio prospettico. Infatti, i solidi rappresentati nascono da una impronta sul suolo che è già una prospettiva e si elevano in uno spazio che è quello del mondo come appare, dunque uno spazio anisotropo, nel quale le altezze dipendono dalla distanza dall'osservatore e con la distanza gli oggetti rimpiccoliscono fin quasi a scomparire.

In altre parole, parole moderne, in questo che è realmente un metodo, le figure a tre dimensioni sono costruite nello spazio proiettivo, che è lo spazio del mondo come appare.

Nel terzo libro, invece, la prospettiva nasce nello spazio isotropo della *propia forma*, che è governato dalle leggi euclidee e le figure a tre dimensioni sono costruite nello spazio del mondo come è.

Dunque il *De Prospectiva Pingendi* non è 'solo' un trattato di prospettiva, ma è un trattato che pone in relazione lo spazio come è con lo spazio come appare, e il metodo della *propia forma* con il metodo della prospettiva.

Il *De Prospectiva Pingendi* costituisce, perciò, la prima testimonianza di quella scienza della rappresentazione che oggi è nota come 'geometria descrittiva' nel senso ampio che abbiamo prima definito. E dovremo altresì precisare che, quanto ai metodi, la prospettiva del primo modo di Piero, è il caso più generale, nel quale sono compresi, come specializzazioni di quello, i metodi che si servono delle proiezioni ortogonali¹¹. E dunque, a ben vedere, la geometria descrittiva è un caso particolare della prospettiva.

Quanto ai rapporti tra il metodo della prospettiva e il metodo delle proiezioni ortogonali, essi si limiteranno alle corrispondenze tra punti dello spazio finito, che Piero intesse nel terzo libro, e tali resteranno fino a quando, con Kepler (Kepler: 1619) e Desargues (Desargues: 1639), la geometria si arricchirà dell'idea del punto e della retta all'infinito: al-

¹¹ L'idea di questa gerarchia si trova già nell'opera di Wilhelm Fiedler (Fiedler 1874: 124-129).

lora (e solo allora) la prospettiva darà un significato al punto di fuga. Le conseguenze di questa conquista saranno straordinarie:

- la figura generale di una stella di rette incidenti in un punto, ammetterà, come caso particolare, una stella di rette parallele che hanno il loro sostegno in un punto all'infinito, «but d'une mesme ordonnance des droictes» (Desargues 1639), e analogamente per il fascio di piani;
- la prospettiva diventerà uno strumento capace di trattare l'infinito in termini finiti;
- lo spazio euclideo e lo spazio proiettivo, si fonderanno in uno, giacché lo spazio delle cose come sono è solo un caso particolare dello spazio delle cose come appaiono.

4. *Il mondo come appare: il metodo della 'prospettiva'*

Le undici proposizioni propedeutiche del primo libro svolgono il ruolo che nella trattazione attuale della prospettiva come metodo di rappresentazione è svolto dalle operazioni proiettive e dai concetti che ne derivano, portando alla definizione dello spazio proiettivo o, come si dice anche, all'ampliamento dello spazio euclideo. Questo ruolo consiste nel giustificare la convergenza, nello spazio illusorio, delle immagini delle rette che nello spazio reale sono parallele e, in particolare, di quelle perpendicolari al quadro.

A ben vedere la prospettiva moderna è tutta qui, tutta compresa in quel punto che Guidubaldo Del Monte (Del Monte 1600), cent'anni più tardi, chiamerà *punctum concursus* e Brook Taylor (Taylor 1715), trascorso oltre un secolo ancora, *vanishing point*.

Nella concezione attuale, che deriva dalla lenta evoluzione dell'idea dell'infinito geometrico, il punto di fuga giustifica e misura lo scorcio prospettico. Ciò significa che, per costruire la giusta diminuzione di grandezze eguali poste a distanze diverse, ci si serve, oggi, di punti di fuga particolari (detti 'punti di misura' e, in casi particolari, 'punti di distanza').

Nella concezione del *De Prospectiva Pingendi*, invece, è esattamente il contrario: è lo scorcio prospettico che suggerisce il punto di fuga o meglio *l'occhio*, ovvero il *puncto* **A**¹².

¹² Piero chiama *occhio* indifferentemente ciò che noi oggi chiamiamo centro di proiezione e il punto principale, o punto di fuga delle perpendicolari al quadro, cioè due punti ben distinti, il primo collocato nello spazio e il secondo sul quadro. Quest'uso è del tutto naturale: infatti, se ci poniamo davanti ad uno specchio, guardando con un occhio soltanto, il punto principale coincide esattamente con la pupilla riflessa nello specchio. E se misuriamo l'altezza della testa, ad esempio, dai capelli al mento, troveremo che è la metà del vero, sempre e comunque, quale che sia la nostra distanza e posizione rispetto allo specchio. Queste osservazioni empiriche sono molto probabilmente alla base degli sviluppi teorici che seguiranno.

Vogliamo dire che Piero, non potendo giustificare geometricamente il punto di fuga, del quale ha solo una evidenza parziale nella convergenza visiva delle rette perpendicolari al quadro, struttura il suo ragionamento in questo modo: prima studia la degradazione delle grandezze e cerca di esprimerla con una legge matematica, poi applica questa legge al lato del quadrato, parallelo al quadro, che si trova più lontano dall'osservatore, infine prolunga le due rette che rappresentano i lati del medesimo quadrato perpendicolari al quadro e ricava il punto in cui sono incidenti come un dato empirico.

Questo dato è convalidato dalla ricorrenza degli esiti della suddetta costruzione e dalle esperienze che possono farsi con l'uso di uno specchio nel quale, il *puncto A* si trova, invariabilmente, ove lo sperimentatore vede il riflesso del proprio occhio.

La compresenza, nelle costruzioni grafiche, di rappresentazioni diverse della medesima macchina prospettica, come vedremo nella tredicesima proposizione, suggerisce poi che quel punto *A* nel quale, come si è detto, convergono le prospettive delle rette perpendicolari al quadro, abbia una relazione geometrica con l'occhio di chi osserva, ovvero con il centro di proiezione; ma nulla di più.

Questa differenza con la concezione attuale del punto di fuga non è di poco conto, poiché è la riprova di una difficoltà irrisolta: il paradosso di una convergenza che sembra contraddire la ventitreesima definizione del primo libro degli Elementi e, implicitamente, il quinto postulato, laddove la prospettiva rappresenta come incidenti rette che non dovrebbero avere alcun punto in comune.

Ciò non di meno, dopo aver consolidato il risultato sperimentale suddetto, Piero lo fa proprio e lo utilizza per realizzare una costruzione abbreviata del quadrato degradato che è, molto semplicemente, una sezione del triangolo che ha vertice nel *puncto A*; tutto ciò in modo non dissimile da quello ancora oggi praticato, aprendo così la via alle conquiste di Guidubaldo prima e Brook Taylor poi.

Coerentemente con la difficoltà generale che abbiamo accennata nella introduzione, non è facile distinguere la nostra interpretazione del pensiero di Piero Della Francesca, dalla sua concezione originale e il punto di fuga è esattamente il confine che dobbiamo osservare.

Per noi il punto di fuga è l'immagine di un punto molto lontano o, per dirla in termini geometricamente esatti, la rappresentazione prospettica della direzione di una stella di rette parallele.

Per Piero il punto di fuga è semplicemente il punto del quadro in cui appaiono incontrarsi le prospettive delle rette perpendicolari al quadro.

Piero non attribuisce a questo punto altro significato, né spiega o tenta di spiegare il perché ciò accade, ma si limita a mostrare che così è e lo fa limitatamente ad una classe particolare di rette e non per ogni classe, ovvero per le rette che hanno una direzione generica.

Ma torniamo alle proposizioni del primo libro. Le prime quattro si limitano a esaminare, per via geometrica, i vari effetti illusori della prospettiva: grandezze che pur essendo diverse appaiono eguali, per effetto della distanza (2), angoli visuali che esprimono differenze di grandezza o di distanza (3, 4). Delle proposizioni successive, alcune (6, 7) continuano a descrivere gli effetti illusori, mentre altre (da 5 a 11) definiscono i rapporti che derivano da divisioni operate sulla vera forma delle figure.

Tra la proposizione undicesima e le successive, esplicitamente dedicate alla degradazione delle grandezze apparenti e perciò agli scorci prospettici, Piero stabilisce, per la prima volta, e in termini matematici, la distanza principale come modulo della degradazione delle grandezze apparenti, sicché, a buon diritto, questo passo può essere considerato come il 'teorema fondamentale' del primo modo di fare la prospettiva.

Quella che, con definizione oggi condivisa, si chiama distanza principale o, anche, distanza focale, è la distanza che separa il centro di proiezione dal quadro, ovvero l'occhio dal «termine dove se mette le cose degradate» (Della Francesca 1942: 74). Lo scorcio si può descrivere matematicamente come rapporto tra questa distanza e la distanza degli oggetti osservati dal punto di vista.

E tuttavia il fenomeno è ancora più complesso perché lo scorcio non solo dipende dalla distanza dell'osservatore dal quadro, ma anche dalla distanza dell'osservatore dalle cose osservate:

[...] perché quando dico proportionalmente ch'è proportione intendendo, perché le proportioni sono innumerabili, et questa nonn è dupla commo è .2. et .4. e .8., et nonn è sexquialtera commo .4., .6., .9., nè sexquitertia commo .9., .12., .16., nè tripla, nè quadrapla, ma dico essere proportione degradata, non commo .4., .8., .12., .15., nè commo .6., .9., .11., .12., ma è secondo la distantia da l'ochio al termine dove se mette le cose degradate et la distantia dal termine a la cosa veduta. (Della Francesca 1942: 73-74)

Questo punto merita, dunque, una ulteriore riflessione. Dati un osservatore, ovvero un punto di vista, e alcuni oggetti separati da intervalli oggettivamente eguali davanti a chi osserva, la prospettiva muta, se muta la distanza dell'osservatore dai suddetti oggetti, e precisamente: se l'osservatore è più vicino, gli intervalli apparenti si dilatano ed è più evidente la differenza tra quelli più vicini e più grandi, e quelli più lontani e più piccoli. E questo è il comportamento della *perspectiva naturalis* (Fig. 3).

Se introduciamo il piano di quadro e l'operazione di proiezione che ha centro nell'occhio dell'osservatore e supporto dell'immagine nel quadro, le cose si complicano e precisamente: se si trasla il quadro avvicinandolo all'osservatore, la prospettiva non cambia la sua forma, ma semplicemente si rimpiccolisce; se si trasla il quadro allontanandolo dall'osservatore,

la prospettiva non cambia la sua forma, ma si ingrandisce. Quando uno degli oggetti tocca il piano di quadro, la parte che ha in comune con esso è in grandezza naturale e non subisce alcuno scorcio (Fig. 4).

Di conseguenza intervengono, nella *perspectiva artificialis*, due fattori: il primo è dato dalla distanza dell'osservatore dagli oggetti che dà alla prospettiva la sua 'forma'; il secondo è dato dalla distanza dell'osservatore dal quadro, che dà alla prospettiva la sua 'scala', ovvero il rapporto di riduzione o ingrandimento dell'immagine prospettica¹³.

La conquista di Piero sta nell'essere riuscito ad esprimere, con una unica e semplice legge, l'interazione tra i due suddetti fattori, mediante una successione di rapporti nei quali il denominatore esprime la distanza dell'osservatore dal quadro e la successione in sé la degradazione delle grandezze percepite da quell'osservatore.

Ma, per meglio comprendere questo rilevante momento della storia della prospettiva, è necessario entrare nel merito del ragionamento di Piero.

Il passo in questione, che non è illustrato, così recita nel manoscritto conservato a Parma:

Cioè così: sono quatro linee equidistante, et l'una da l'altra è uno braccio, et sono lunghe uno braccio, et sono infra do linee parallele, et da la prima linea che è termine a l'ochio è quatro braccia; dico la seconda a la prima essere sexquiquarta, et la terza a la seconda nel termine è sexquiquinta, et la quarta a la terza nel termine è sexquisexta. (Della Francesca 1942, Libro I, 11: 74)

In primo luogo occorre chiarire il significato esatto dei termini *sexquiquarta*, *sexquiquinta* e *sexquisexta*. Essi indicano, nelle proporzioni, una frazione nella quale il numeratore è eguale al denominatore più uno cioè:

$$(x + 1)/x ;$$

perciò, proporzione *sexquiquarta*, dove $x = 4$, significa $(4 + 1)/4$, e cioè semplicemente $5/4$; e così *sexquiquinta* significa $6/5$, *sexquisexta* $7/6$ e così via.

¹³ Il paragone con la fotografia è inevitabile, ma introduce una ulteriore complicazione perché in fotografia il quadro ha dimensioni finite e fisse, mentre in prospettiva è indefinitamente esteso. Quindi, se tenendo ferma la posizione della macchina fotografica si monta un obiettivo grandangolare (nel quale il piano di quadro è vicino al centro di proiezione) la prospettiva abbraccia un ampio angolo di campo; se si monta un teleobiettivo, la prospettiva abbraccia un angolo di campo ristretto; ma l'immagine prospettica, ovvero la forma della prospettiva, non cambia, come è stato più volte dimostrato anche empiricamente. L'impressione che tra le due immagini vi sia una differenza nella compressione dello spazio, perché la prima mostra uno spazio dilatato e la seconda uno compresso, è dovuta solo al fatto che la prima immagine evidenzia gli oggetti e la porzione di spazio più vicina all'osservatore, mentre la seconda evidenzia gli oggetti più lontani.

Ora, il ragionamento di Piero può essere letto come segue (Figura 5). L'occhio, che è collocato nel punto **A**, guarda la linea **BC**, che è posta convenzionalmente sul quadro (il *termine* nel linguaggio di Piero), e vede altresì le linee **DE**, **FG**, **HI**, che sono scaglionate in distanza ad intervalli eguali.

La distanza principale è **AB** e misura 4 braccia, mentre **BD**, **DF**, **FH** sono intervalli di un braccio. Le grandezze **BC**, **DE**, **FG**, **HI** etc. misurano anch'esse un braccio, come gli intervalli che le separano.

Posto che **BC** non subisce alcuno scorcio, perché sta sul quadro, ci chiediamo: qual'è lo scorcio di **DE**?

Inoltre: in quale rapporto stanno, tra loro, le grandezze degli scorci prodotti dalla prospettiva?

Il rapporto tra **BE'** e **BC**, dove **BE'** è la prospettiva di **DE**, per similitudine di triangoli, vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{BE}' : \mathbf{AB} &= \mathbf{DE} : \mathbf{AD} \quad \text{ma } \mathbf{BC} = \mathbf{DE} \quad \text{e perciò} \\ \mathbf{BE}' : \mathbf{AB} &= \mathbf{BC} : \mathbf{AD} \quad \text{dunque} \\ \mathbf{BE}' &= (\mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC}) / \mathbf{AD} \end{aligned}$$

e poiché **AB** = 4, **BC** = 1 e **AD** = 5 il rapporto vale 4/5, il che significa che **BE'** = 4/5 di **BC** e **BC** = 5/4 **BE'**.

Tuttavia il testo dice: «dico la seconda a la prima essere sexquiquarta», dove *seconda* dovrebbe essere **DE**, che, vista da **A**, si riduce a **BE'**, e *prima* **BC**, perciò l'espressione giusta dovrebbe essere la prima, che vale però 4/5 e non 5/4.

Riassumendo: **BE'** è più piccolo di **BC** e, precisamente, i 4/5 di **BC**, ma Piero sembra dire che **BE'** sta a **BC** come 5 a 4.

Si pone, perciò, un problema interpretativo: perché Piero dice *secunda ad primam* (rapporto che vale 4/5) e non il contrario, cioè *prima ad secundam* (rapporto che vale 5/4)?

Possiamo credere che non dia troppo peso a queste convenzioni matematiche? In fondo, quando nomina un segmento, non distingue il verso (**AB** e **BA** sono la stessa cosa): lo stesso potrebbe fare per un rapporto.

Sta di fatto, però, che questa ambiguità trae in inganno¹⁴.

Veniamo alle altre grandezze, rapportandole tutte alla prima, **BC**. Senza perderci nelle proporzioni risulta che, se ci chiediamo quanto lo scorcio è più piccolo della grandezza intera, otteniamo la successione:

¹⁴ In questo tranello cade, ad esempio, Alessandra Sorci nel suo lavoro intitolato *La forza delle linee*. Questa l'interpretazione del passo: «Poiché la seconda linea della serie è lontana cinque braccia dall'occhio, la sua proiezione sulla prima sarà eguale ai 5/4 della lunghezza effettiva [...]» (Sorci 2001: 86). Ma la seconda 'linea' è più lontana della prima e perciò non può apparire più grande, bensì apparirà più piccola e, precisamente, i 4/5 della prima.

Figura 3 (a sinistra, a). Variazioni della prospettiva in funzione della distanza dell'osservatore dagli oggetti osservati.

Figura 4 (a destra, b). Variazioni della prospettiva in funzione della traslazione del quadro, ferma restando la posizione dell'osservatore rispetto agli oggetti osservati.

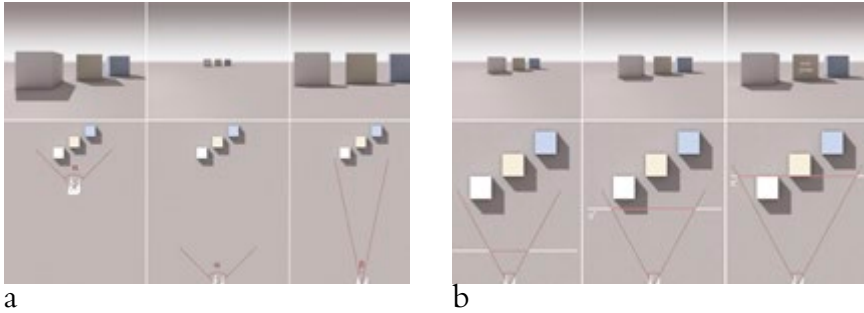
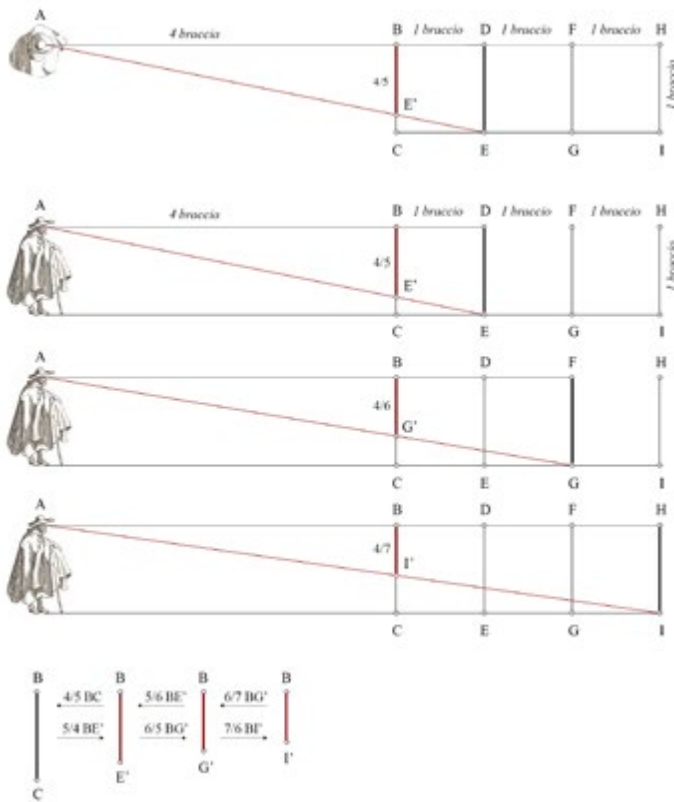


Figura 5. Trascrizione grafica del ragionamento di Piero con una serie di segmenti orizzontali (sopra) e verticali (sotto).



$(4/5), (4/6), (4/7)$

che si legge: la seconda è $4/5$ della prima, la terza è $4/6$ della prima ... e così via.

Se facciamo il contrario, chiedendoci quanto la grandezza intera è più grande dello scorcio, otteniamo la successione:

$(5/4), (6/4), (7/4)$

che si legge: la prima è $5/4$ della seconda, la prima è $6/4$ della terza ... e così via.

Veniamo ora al confronto che interessa Piero, che non è quello dei singoli scorci rispetto alla grandezza intera, ma quello degli scorci tra di loro, come se volesse seguire, passo dopo passo, la degradazione, 'entrando' nella prospettiva. E vedremo, poi, di capire il perché.

Se teniamo per buona la prima successione e ci chiediamo, perciò, quanto lo scorcio di una grandezza è più piccolo dello scorcio di quella che la precede, la degradazione diventa:

$$(4/5) : 1 = (4/5)$$

$$(4/6) : (4/5) = (5/6)$$

$$(4/7) : (4/6) = (6/7)$$

e la successione è: $(4/5), (5/6), (6/7)$, che si legge: il secondo è $4/5$ del primo; il terzo è $5/6$ del secondo; il quarto è $6/7$ del terzo.

Se, al contrario, teniamo per buona la seconda successione e ci chiediamo quanto lo scorcio di una grandezza che è più vicina all'osservatore è più grande dello scorcio di quella che la segue, la degradazione diventa:

$$1 : (4/5) = (5/4)$$

$$(4/5) : (4/6) = (6/5)$$

$$(4/6) : (4/7) = (7/6)$$

e la successione è: $(5/4), (6/5), (7/6)$, che si legge: il primo è $5/4$ della seconda; il secondo è $6/5$ del terzo; il terzo è $7/6$ del quarto.

A questo punto Piero sembra presagire le difficoltà del lettore, vuoi dovute ai termini latini *sesquiquarta* e seguenti, che pochi possono intendere immediatamente, vuoi alla difficoltà di seguire un ragionamento astratto, e perciò esprime le suddette relazioni con l'esempio di una successione numerica: 105, 84, 70, 60.

Se applichiamo a questa successione le considerazioni suddette, otteniamo, nel primo caso:

$$84/105 = 0,8; (4/5 = 0,8)$$

$$70/84 = 0,83; (5/6 = 0,83 \dots)$$

$$60/70 = 0,85; (6/7 = 0,85 \dots)$$

e, nel secondo:

$$105/84 = 1,25; (5/4 = 1,25)$$

$$84/70 = 1,2; (6/5 = 1,2 \dots)$$

$$70/60 = 1,17; (7/6 = 1,17 \dots)$$

la corrispondenza è, ovviamente, perfetta.

Dunque la nota di Giusta Nicco-Fasola ove dice che «La legge fisicamente esatta della degradazione fu trovata solo da Leonardo, secondo la progressione $1/2, 1/3, 1/4, 1/5$ » e che «la progressione di Piero dà una diminuzione minore specialmente per le prime grandezze» (Della Francesca 1942: 74) è priva di senso.

Infatti, come mostrato sopra, per arrivare ai rapporti descritti da Piero si deve passare, di necessità, per la formulazione che Nicco-Fasola attribuisce a Leonardo. E comunque i calcoli di Piero sono esatti.

C'è un'altra domanda, forse più importante di quella che riguarda l'ordine dei raffronti tra le grandezze, di cui sopra. La domanda è questa: perché Piero studia i rapporti che intercedono tra gli scorci delle grandezze osservate invece di esprimere, più semplicemente, il rapporto tra la distanza dell'osservatore dal quadro e lo scorcio prospettico? Noi crediamo per due ragioni:

- la prima, per verificare se esista una legge costante della degradazione delle grandezze apparenti, come anche Wittkower riconosce ma senza entrare nel merito di questa delicata questione (Wittkower 1953);
- la seconda per esprimere la suddetta legge: invariante al variare della distanza dell'osservatore dalle grandezze osservate e dal quadro, che è veramente il nocciolo della questione.

Ora Piero è convinto che, variando la distanza dell'osservatore dal quadro e dalle grandezze ad esso associate, varino anche gli scorci dei quattro segmenti di retta che considera nel suo esempio, e cioè i rapporti tra le grandezze intere e le grandezze degradate, e ha ragione. Testualmente: «Dunque, mutando termine, se muta proportione» (Della Francesca 1942, Libro I, 11: 74)

Infatti, se l'osservatore si pone, ad esempio, a sei braccia di distanza dal quadro ove si trova il segmento **BC**, senza altro mutare, la successione

$$5/4, 6/4, 7/4 \quad \text{diventa} \quad 7/6, 8/6, 9/6.$$

Tuttavia la successione dei rapporti tra gli scorci, che ne deriva, diventa:

$$7/6, 8/7, 9/8$$

rapporti che appartengono ancora alla successione precedentemente cal-

colata, opportunamente estesa:

$$a_n = (x + 1)/x = \dots (5/4), (6/5), (7/6), (8/7), (9/8) \dots$$

Il rapporto (7/6), che prima riguardava la coppia terza/quarta grandezza, si conserva ora come rapporto tra la prima e la seconda grandezza.

La distanza tra l'osservatore e queste grandezze (terza e quarta nel primo caso, prima e seconda nel secondo) non varia e non varia neppure l'angolo che le grandezze medesime sottendono nell'occhio.

E perciò una costanza della legge della degradazione Piero l'ha trovata ed è nel proprio nel modo in cui si costruiscono i rapporti, secondo la legge

$$a_n = (x + 1)/x$$

Qui si intende anche meglio la ragione della scelta di Piero, di studiare i rapporti tra gli scorci, anziché i rapporti degli scorci rispetto alla grandezza reale: perché, così facendo, ci si affranca dalla distanza principale, ovvero dal quadro, e si esprime una legge che vale anche per la *perspectiva naturalis*, oltre a essere operativa per quella *artificialis*.

La teoria qui enunciata ha una semplice e diretta applicazione, che però Piero non sviluppa, preferendole le costruzioni grafiche che seguiranno. Non è corretto inserire nell'analisi di un testo una considerazione che va oltre il suo semplice dettato, ma in questo caso ci sentiamo di fare una eccezione, perché l'esame di questa applicazione, permette di apprezzare meglio il significato della proposizione.

Supponiamo di disegnare la prospettiva del quadrato in modo che il lato di fronte, e più vicino, sia distante quattro braccia dall'osservatore, allora questo lato, **BC**, sarà lungo i 5/4 della prospettiva del lato successivo **DE** e per costruire la prospettiva di **DE** basta dividere **BC** in cinque parti e considerarne quattro: sarà questa la lunghezza della prospettiva di **DE**.

Volendo ora costruire la prospettiva di un altro segmento **FG**, di egual misura, posto a eguale distanza da **DE**, basta dividere **DE** in sei parti e costruire la prospettiva di **FG** in modo che sia lunga cinque di queste parti ... e così via.

Se, invece, il primo dei lati considerati è distante cinque braccia dall'osservatore, e non quattro come nell'esempio precedente, per avere lo scorcio del lato successivo, basta dividerlo in sei parti e prenderne cinque. Insomma, questa formula è capace di generare una prospettiva relazionando le mutue distanze delle grandezze osservate alla distanza di chi le osserva (Fig. 6).

Infine, è illuminante il confronto tra la successione proposta da Piero, con quella proposta da Leonardo (Figura 7).

Dunque, Piero propone la successione $a_n = (x + 1)/x$ invece di quella assai più semplice indicata da Leonardo $a_n = 1/(x + 1)$.

Nella successione scritta da Piero, la posizione del quadro non ha im-

portanza: anche variandola, la successione rimane la stessa e il denominatore della frazione che corrisponde alla posizione del quadro, indica la distanza principale:

... $2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5, 7/6, 8/7, 9/8, 10/9$...

Ad esempio, se l'osservatore dista un braccio dalla tavola dipinta (posizione 1 della figura), il primo lato del quadrato degradato è doppio di quello successivo, il secondo è $3/2$ del terzo e così via...

Se invece l'osservatore dista quattro braccia dal quadro (posizione 4), la prima grandezza è $5/4$ etc. come è stato detto più volte.

Invece, nella successione scritta da Leonardo la posizione del quadro è fissa: modificandola, la successione cambia e bisogna scriverla da capo, diversa.

Ad esempio, se nella successione di Leonardo, spostiamo il quadro dalla posizione 1 alla posizione 4, i valori che si desumono dalla similitudine dei triangoli diventano:

... $1, 4/5, 4/6, 4/7, 4/8, 4/9, 4/10$...

La successione di Piero esprime la contrazione dello spazio proiettivo (come diciamo oggi) ed è indipendente dalla operazione di proiezione, perciò è la legge della *perspectiva naturalis* ed è una legge generale.

Al contrario, la successione di Leonardo esprime la legge della degradazione indotta dalla operazione di proiezione e sezione sul quadro e perciò è la legge della *perspectiva artificialis*, nel particolare caso in cui il quadro si trovi nella posizione 1.

La legge di Piero, tuttavia, opera nella prospettiva quanto quella di Leonardo e perciò salda i due mondi, quello antico della *perspectiva naturalis* con quello moderno della *perspectiva artificialis*; e salda i due spazi: quello Euclideo e quello prospettico (o proiettivo).

Tutto ciò dimostra, ancora una volta, che, nella prospettiva delle origini e prima di Guidubaldo del Monte, il punto di fuga e, conseguentemente, il punto di distanza, hanno un significato minore. Ciò che conta è il controllo geometrico dello scorcio, ovvero della degradazione delle grandezze apparenti.

La convergenza delle immagini delle rette perpendicolari al quadro (e tra loro perciò parallele) è un dato empirico, evidente, ma altrimenti inspiegabile. La degradazione prospettica, al contrario, è un dato che da empirico diviene teorico e generale, attraverso l'enunciazione di una legge. Che poi questa legge nelle sue infinite possibili applicazioni non si possa 'con numeri dimostrare' ha poca importanza, giacché le relazioni geometriche che esprime si ottengono con semplici costruzioni grafiche

Figura 6. Applicazione del 'teorema fondamentale' alla costruzione della prospettiva di una serie di quadrati.

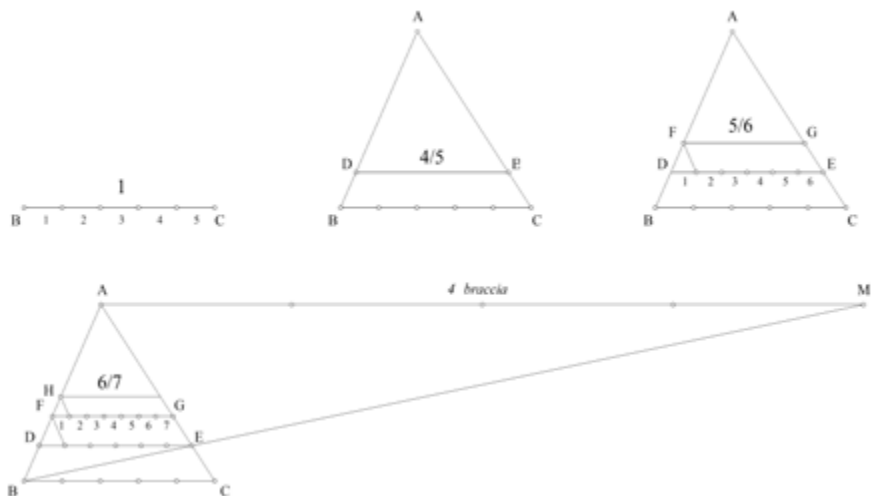
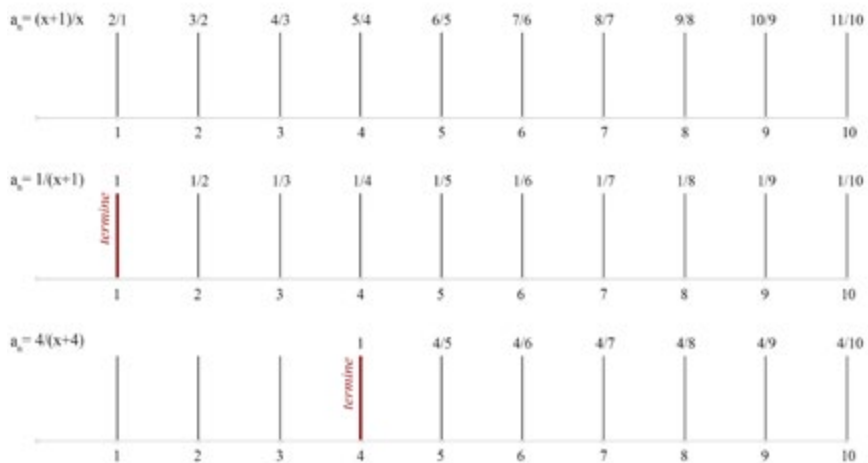


Figura 7. La prima successione, in alto, mostra i rapporti descritti da Piero, che valgono indipendentemente dalla posizione del quadro. La seconda e la terza, mostrano i rapporti trovati da Leonardo in due diverse posizioni del quadro.



che costruiscono gli oggetti direttamente nello spazio anisotropo della prospettiva (primo modo) o che simulano l'intersezione della piramide visiva con il quadro nello spazio isotropo della rappresentazione ortografica.

5. Conclusioni

Noi crediamo che il primo insegnamento che si può trarre dal *De Prospectiva Pingendi* è la inscindibile coerenza delle componenti disciplinari che ne formano il contenuto: l'arte del disegno, i fondamenti della geometria e della matematica, la concezione fisica e filosofica dello spazio, la lingua come espressione di un pensiero scientifico ma anche nella sua accezione letteraria.

E più ancora, in questo quadro di armoniosa complessità, deve essere colta la coerenza dei metodi di rappresentazione e l'atto di nascita di quella scienza che sarà poi nota con il termine tardo settecentesco coniato da Monge.

Pertanto studiare nel trattato solo gli aspetti che riguardano la prospettiva, può essere fuorviante come lo sarebbe ascoltare la voce di un solo strumento in una partitura orchestrale.

Nelle pagine che precedono abbiamo perciò ricercato una visione complessiva dei contenuti del *De Prospectiva Pingendi* e del suo primo libro in particolare.

In primo luogo abbiamo riconosciuto nell'opera di Piero un ponte gettato tra l'essenza e l'apparenza delle cose e perciò tra la geometria euclidea e la prospettiva, tra il mondo antico e quello moderno che si apre, appunto, convenzionalmente, con l'anno della morte di Piero.

Abbiamo poi analizzato le proposizioni geometriche del primo libro soffermandoci su quella che separa i teoremi della *perspectiva naturalis*, dai teoremi della *perspectiva artificialis*. E visto che questa proposizione, a differenza di tutte le altre, è orfana di un disegno e di un nome, l'abbiamo chiamata 'teorema fondamentale' della prospettiva di Piero Della Francesca, riconoscendole il ruolo che le spetta: vale a dire quello di una verità capace di dare ineccepibile validità scientifica a tutte le proposizioni, le ipotesi e le verifiche che seguiranno.

6. Note bibliografiche

- Camerota F. 2006, *La prospettiva del Rinascimento - Arte, architettura, scienza*. Mondadori Electa, Milano.
- Cecchini F. 2006, *Ambiti di diffusione del sapere ottico nel Duecento - Tracce per uno studio sulle conoscenze scientifiche degli artisti italiani del XIII secolo*. In Cojannot-Le Blanc M., Dalai Emiliani M., Dubourg Glatigny P., (a cura di) *L'artiste et l'oeuvre a l'épreuve de la perspective*, École française de Rome, Rome: 19-42.

- Della Francesca P. 1460-1480, *De Prospectiva Pingendi* (ristampa anastatica dell'ed. critica a cura di Nicco-Fasola, G. 1942, Sansoni G.C. Editrice Nuova, Firenze)
- Del Monte G. 1600, *Guidi Ubaldi e Marchionibus Montis Perspectivae libri sex*. Pisauri.
- Desargues G. 1639, *Brouillon project d'une Atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan, par L,S,G,D,L*.
- Federici Vescovini G. 1961, *Le questioni di "perspectiva" di Biagio Pelacani da Parma*. «Rinascimento», 12: 163-243.
- Fiedler G. 1874, *Trattato di Geometria Descrittiva del dr. Guglielmo Fiedler*. Le Monnier, Firenze.
- Kepler J. 1619, *Ioannis Keppleri Harmonices mundi; libri V, Sumptibus Godofredi Tampachii, Bibl. Francof. excudebat Ioannes Plancus*. Lincii Austriae.
- Maltese C. 1989, *Piero Della Francesca e l'applicazione delle proiezioni parallele alla pittura*. In *Studi di Storia dell'arte sul Medioevo e il Rinascimento, nel centenario della nascita di Mario Salmi*, vol. II, Atti del Convegno Internazionale Arezzo-Firenze, 16-19 Novembre, Edizioni Polistampa Firenze: 489-517.
- Monge G. 1799, *Géométrie Descriptive, Leçons données aux écoles normales, l'an 3 de la République; par Gaspard Monge*. Baudouin, Paris (riproduzione anastatica 1989, Gabay, Sceaux).
- Pohlke K. 1872, *Darstellende Geometrie*. Rudolph Gaertner, Berlin (edd. origg. 1860).
- Sorci A. 2001, *'La forza de le linee'. Prospettiva e stereometria in Piero Della Francesca*. Sismel Edizioni del Galluzzo, Tavernuzze, Firenze.
- Sorge V. 1997, *La verità della visione: nota sulla "Perspectiva" di Biagio Pelacani da Parma*. «Doctor Seraphicus», XLIV: 51-64.
- Taylor B. 1715, *Linear perspective or, a new method of representing justly all manner of objects as they appear to the eye in all situations*. R. Knaplock, London.
- Wittkower R. 1953, *Brunelleschi and 'Proportion in Perspective'*. «Journal of the Warburg and Courtauld Institutes», 16 (3-4): 275-291.