



**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA

**Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale**

**Dottorato di ricerca in Ing. Strutturale e Geotecnica**

**XXVIII ciclo**

**IMPIEGO DI UN MODELLO COSTITUTIVO AVANZATO PER LO STUDIO  
DEL COMPORTAMENTO DI SCAVI IN TERRENI A GRANA FINE**

Dottorando:

Fabiano Bertoldo (matr. 799428)

Tutor:

Prof. Ing Luigi Callisto

Roma, Febbraio 2016



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
1.1	Condizioni di drenaggio in relazione agli scavi in terreni a grana fine . . . . .	7
1.2	Analisi numeriche di scavi in terreni a grana fine . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Formulazione di un modello costitutivo per argille naturali</b>	<b>25</b>
2.1	Formulazione generale del modello a due superfici di Hashiguchi . . . . .	26
2.2	Specializzazione del modello al caso delle argille naturali (Rouainia & Muir Wood) . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Implementazione e studio parametrico</b>	<b>43</b>
3.1	Schemi degli algoritmi utilizzati . . . . .	43
3.2	Confronto con una precedente implementazione . . . . .	53
3.3	Riflessioni sul significato fisico dei parametri . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Influenza delle condizioni di drenaggio sulla modellazione degli scavi</b>	<b>83</b>
4.1	Risposta del modello in condizioni di deformazione piana . . . . .	83
4.2	Analisi di un problema al finito . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Simulazione dello scavo del Bund IFC</b>	<b>103</b>
5.1	Descrizione del caso di studio . . . . .	104
5.2	Calibrazione del modello costitutivo . . . . .	121
5.3	Modellazione e risultati . . . . .	127
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>137</b>
<b>7</b>	<b>Appendice</b>	<b>139</b>
7.1	Definizioni e notazioni . . . . .	139
7.2	Variabili tensionali e deformative . . . . .	141

7.3 Derivate del modello costitutivo . . . . . 144



# Sintesi della tesi

L'oggetto della presente tesi riguarda lo studio e l'implementazione di un modello costitutivo avanzato per argille naturali, e il suo utilizzo per lo studio del comportamento degli scavi in terreni a grana fine.

Nel capitolo 1 vengono discussi alcuni degli aspetti principali che riguardano il comportamento degli scavi nei terreni a grana fine, focalizzando in particolare l'attenzione sul ruolo delle condizioni di drenaggio e sugli effetti del tempo. Inoltre, in relazione all'analisi numerica degli scavi, vengono esaminati alcuni risultati di letteratura, dai quali si evince l'importanza che può avere in questo tipo di problemi l'utilizzo di un modello costitutivo capace di riprodurre fedelmente il comportamento del terreno.

Nel capitolo 2 si riporta la formulazione generale di un modello costitutivo elasto-plastico con incrudimento isotropo e cinematico. Tale modello viene quindi specializzato al caso delle argille naturali, attraverso la definizione di una particolare superficie di snervamento e l'introduzione di leggi d'incrudimento specifiche.

Nel capitolo 3 viene discussa l'implementazione del modello costitutivo, svolta seguendo uno schema di tipo esplicito, che ha consentito lo sviluppo di una subroutine UMAT utilizzabile nel codice di calcolo agli elementi finiti Abaqus/Standard. Nello stesso capitolo inoltre viene offerta un'interpretazione fisica dei parametri costitutivi, e vengono riportati i risultati di alcune analisi parametriche che hanno reso possibile individuare un procedimento attraverso il quale poter calibrare il modello costitutivo.

Nel capitolo 4 vengono mostrati i risultati di alcune analisi numeriche relative ad uno scavo ideale eseguito in un terreno a grana fine, svolte con lo scopo di indagare l'effetto delle condizioni di drenaggio sulla risposta complessiva dell'opera. Queste analisi sono svolte considerando diverse caratteristiche del terreno, e quindi assegnando diversi valori ai parametri costitutivi e alle condizioni iniziali.

Infine, nel capitolo 5, si illustra l'applicazione ad un caso reale: uno scavo profondo realizzato a Shanghai per la costruzione di un nuovo centro finanziario. In particolare si presentano i risultati della calibrazione del modello, si riportano i dettagli costruttivi dell'opera, e si mostrano i confronti tra i risultati della simulazione numerica e i dati di monitoraggio.

Si precisa che nella presente tesi, ove non diversamente specificato e fatta eccezione per il capitolo 1, a tensioni positive corrispondono stati di trazione, e analogamente a deformazioni positive corrispondono stati di estensione.

Dal momento che la maggior parte dei codici di calcolo utilizza questa stessa convenzione, tenerne conto durante la scrittura delle leggi costitutive rende poi molto più agevole l'implementazione nel codice di calcolo.

# Capitolo 1

## Introduzione

Nel presente capitolo viene introdotto l'argomento della ricerca. Nella prima parte si discutono alcuni degli aspetti riguardanti il comportamento degli scavi nei terreni a grana fine, enfatizzando in particolar modo il ruolo che rivestono le condizioni di drenaggio sulla risposta di queste opere. Successivamente, attraverso un'analisi della letteratura, si mostrano alcuni dei risultati che possono ottenersi dalle analisi numeriche degli scavi, in funzione del tipo di modello costitutivo adottato per il terreno.

### 1.1 Condizioni di drenaggio in relazione agli scavi in terreni a grana fine

La realizzazione delle opere civili rende spesso necessaria l'esecuzione di scavi. Questo è vero soprattutto in area urbana, in cui la forte antropizzazione ha ridotto notevolmente gli spazi disponibili in superficie: si pensi ad esempio alla costruzione di stazioni metropolitane e di parcheggi in sotterraneo. Nonostante queste opere siano oggetto di studio da diversi anni, alcuni aspetti legati ad esse non sono stati ancora del tutto chiariti.

In uno scavo generalmente si ha a che fare con un sistema costituito dal terreno e dalle strutture di sostegno, e in molti casi anche dalle strutture adiacenti allo scavo stesso. Il modo in cui questi elementi interagiscono è funzione di diversi fattori, tra cui le loro caratteristiche meccaniche, il tipo di vincoli che li lega, le condizioni al contorno (intese come tensionali, deformative ed idrauliche) e la loro variazione nel tempo. Il fattore tempo in particolare è importante soprattutto nel caso in cui i terreni interessati siano caratterizzati da una bassa permeabilità.

A seguito di uno scavo è intuitivo aspettarsi importanti variazioni dello stato tensionale nel sottosuolo, perlomeno nella parte di terreno sottostante lo scavo stesso. L'entità e la direzione di questa variazione saranno infatti

diverse da zona a zona, e quindi saranno diversi i percorsi tensionali subiti da elementi di terreno posizionati in punti differenti dello spazio fisico di interesse. Le strutture di sostegno, che a loro volta risentono di questa variazione, sono portate a sopportare delle azioni di entità connessa alle proprietà meccaniche del terreno con cui interagiscono.

Il comportamento del terreno è governato dalle tensioni efficaci. Per questo motivo nel caso di scavi profondi, dove è lecito aspettarsi che i terreni interessati siano saturi, la risposta del sistema geotecnico dipenderà necessariamente dal regime delle pressioni interstiziali e dalla loro variazione per effetto dei lavori. Se si ha a che fare con terreni a bassa permeabilità, a seguito dello scarico tensionale dovuto allo scavo, a breve termine, le pressioni interstiziali si possono ridurre anche notevolmente. Durante le fasi costruttive e al trascorrere del tempo la modifica continua delle pressioni interstiziali ha un effetto diretto sulle tensioni efficaci, e quindi sul comportamento delle opere di sostegno, in particolare su spostamenti e sollecitazioni. Nella maggior parte dei casi al trascorrere del tempo, e quindi al tendere verso le condizioni drenate, si ha un effetto peggiorativo. Per stare in sicurezza quindi si potrebbe pensare di assumere che gli scavi in terreni a grana fine siano realizzati in condizioni drenate, ma questa ipotesi risulterebbe estremamente cautelativa e potrebbe portare ad un aumento eccessivo dei costi di costruzione. Una scelta molto più razionale invece sarebbe quella di effettuare uno studio accurato delle condizioni di drenaggio e degli effetti della dissipazione delle variazioni di pressione interstiziale, in relazione ovviamente ai tempi di costruzione dell'opera e tenendo conto di eventuali ritardi o interruzioni nei lavori. Questo porterebbe ad assumere nei calcoli una distribuzione di pressioni interstiziali consapevole, con benefici in termini di costi, ma con doveri da parte del progettista che dovrà predisporre dei controlli in corso d'opera per verificare la validità delle assunzioni fatte, ed eventualmente predisporre di interventi di salvaguardia nel caso in cui ci si trovasse in condizioni diverse da quelle previste.

Per seguire un approccio come quello appena descritto occorre necessariamente rinunciare alla prassi di esprimere, in condizioni non drenate, la resistenza del terreno in termini di tensioni totali. Infatti, oltre che risultare discutibile dal punto di vista concettuale, questo metodo non consentirebbe una valutazione esplicita delle pressioni interstiziali (Callisto 2011).

## **Percorsi tensionali tipici**

Lo studio dei percorsi tensionali subiti dal terreno a seguito di uno scavo può essere visto come un primo passo verso la comprensione del comportamento di queste opere. Analogamente a quanto fatto da Ng (1999) e da Callisto (2011), ovvero facendo alcune ipotesi semplificative, è possibile ricavare qualitativamente l'andamento di questi percorsi tensionali, che come già detto sono diversi da zona a zona. Si considerino ad esempio due elementi di terreno situati alla medesima profondità, disposti rispettivamente a monte e a valle di una paratia

posta a sostegno di uno scavo (figura 1.1a), e si ritengano valide le seguenti ipotesi:

1. stato di deformazione piano;
2. il comportamento pre-rottura del terreno è elastico isotropo;
3. le direzioni principali della tensione nel piano considerato coincidono con l'orizzontale e la verticale, e di conseguenza le tensioni tangenziali in tali direzioni sono nulle;
4. la resistenza del terreno può essere descritta dal criterio di resistenza di Mohr-Coulomb con coesione efficace nulla;
5. effetti di installazione della paratia trascurabili;
6. nelle condizioni precedenti allo scavo i due elementi hanno un rapporto tra tensione efficace orizzontale e verticale pari al coefficiente di spinta a riposo  $K_0$ .

Consideriamo il caso in cui durante lo scavo il terreno si comporta in condizioni drenate. La rimozione del terreno ha due effetti principali: da un lato comporta una riduzione delle tensioni verticali nelle zone che si trovano a valle dell'opera di sostegno; dall'altro induce uno spostamento della paratia verso l'interno dello scavo. Nell'elemento  $A$ , a seguito dell'allontanamento dell'opera, si ha un rilascio tensionale in direzione orizzontale. Le tensioni verticali invece, stante l'ipotesi tre, rimangono invariate durante lo scavo. Il percorso tensionale ideale relativo all'elemento  $A$ , quindi, sarà interessato da un decremento di  $\sigma'_h$  a tensione verticale efficace costante, e tenderà verso le condizioni limite attive. Nell'elemento  $P$  si ha invece una riduzione di tensione verticale, la quale può essere anche molto importante in funzione della distanza dell'elemento dal fondo scavo. In funzione di questa riduzione, le tensioni orizzontali subiscono a loro volta un decremento, seppur di misura minore. A questo va però sommato il contributo dovuto allo spostamento della parete, che induce un incremento di tensione orizzontale. Se in prima istanza si assume che i due contributi si compensino, il percorso tensionale ideale dell'elemento  $P$  sarà caratterizzato da un decremento di  $\sigma'_v$  a tensione orizzontale efficace costante, e tenderà verso le condizioni limite passive. In figura 1.1b sono riportati i percorsi tensionali appena descritti, in un diagramma in cui compaiono anche le rette corrispondenti alle condizioni limite. Se l'entità dello scavo è considerevole l'elemento  $P$  potrebbe raggiungere le condizioni limite passive.

In condizioni non drenate, stante l'ipotesi due, il percorso tensionale seguito dai due elementi durante lo scavo avrà sul piano  $\sigma'_h$ - $\sigma'_v$  una pendenza negativa unitaria (segmenti  $OA_1$  e  $OP_1$  in figura 1.1c), e sarà accompagnato da uno sviluppo di sovrappressioni interstiziali negative, in misura maggiore nell'elemento  $P$ . Rispetto ai corrispondenti percorsi drenati (segmenti  $OA_2$  e  $OP_2$  in figura 1.1c) è evidente che in condizioni non drenate ci si avvicina alle condizioni limite con velocità minore, con conseguente beneficio per la stabilità dell'opera. Se a

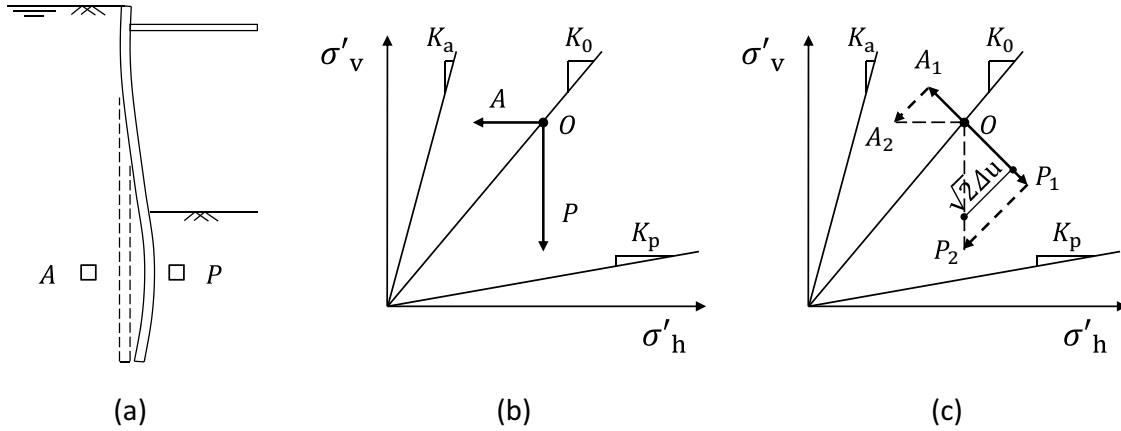


Figura 1.1: Percorsi tensionali idealmente seguiti da due elementi posti in prossimità di uno scavo: (b) in condizioni drenate; (c) in condizioni non drenate.

fine scavo si volesse osservare l'effetto della consolidazione, al tendere verso le condizioni drenate si osserverebbe una progressiva riequalizzazione delle pressioni interstiziali, e quindi un avvicinamento alle condizioni limite.

Come noto il comportamento di una terra dipende dalla sua storia di carico, ovvero dal suo passato: in riferimento alla variazione dello stato tensionale efficace durante lo scavo in un terreno a grana fine, questo si traduce in una differente risposta a seconda che il terreno sia normalmente consolidato oppure sovraconsolidato. Solitamente, in stato di normal consolidazione basta un modesto spostamento orizzontale della paratia per indurre alla mobilitazione delle condizioni limite attive nelle zone di terreno che si trovano immediatamente a tergo di essa, mentre invece occorrono spostamenti maggiori per raggiungere le condizioni limite passive a valle: in questi casi è quindi prevedibile che gli elementi di terreno che si trovano a monte (come l'elemento A di figura 1.1a) raggiungano per primi la resistenza disponibile. Per contro, nel caso di terreno sovraconsolidato il valore del coefficiente di spinta a riposo potrebbe essere tanto elevato da risultare anche molto prossimo a quello corrispondente alle condizioni limite passive: in questa situazione può accadere che un elemento situato all'interno dello scavo raggiunga le condizioni limite passive nello stesso momento in cui un elemento situato alla stessa profondità a monte dell'opera raggiunge quelle attive.

Come è logico attendersi, data la complessità dei casi reali, la variazione dello stato tensionale a cui un terreno è soggetto durante la realizzazione di un'opera sotterranea può differire da quella ricavata a partire dalle ipotesi semplificative sopra riportate. Ad esempio, a seconda della tecnica adottata per la realizzazione delle paratie, si potrebbe avere una variazione dello stato tensionale efficace ancor prima di effettuare lo scavo. Inoltre, nelle zone di terreno prossime all'opera di sostegno vi è sempre una componente di tensione tangenziale diretta verticalmente, la quale comporta necessariamente una rotazione delle direzioni principali della tensione e quindi una modifica del percorso tensionale rispetto a quello idealmente ipotizzato.

Essendo la tensione concettualmente astratta, una misura diretta della sua variazione non è possibile; tuttavia, disponendo di misure indirette della variazione di stato tensionale totale (orizzontale) e di pressione interstiziale in alcuni punti del terreno situati in prossimità di un'opera sotterranea in via d'esecuzione, è possibile risalire ad una stima della corrispettiva variazione dello stato tensionale efficace. Di solito ciò viene eseguito assumendo che la tensione verticale totale agente a monte dell'opera di sostegno rimanga invariata durante le fasi di scavo, e che la riduzione di tensione verticale totale subita al di sotto dello scavo sia pari al peso del terreno asportato. Elaborazioni di questo tipo sono state fatte ad esempio da Tedd et al. (1984), da Ng (1999) e ancora da Ng et al. (2012), e si sono ottenuti percorsi tensionali sostanzialmente in accordo con quelli di figura 1.1.

I percorsi tensionali ricavati da Ng (1999), in riferimento ad uno scavo effettuato per la costruzione di un parcheggio sotterraneo a Cambridge, sono mostrati in figura 1.2. Nella stessa figura si riportano anche una sezione dello scavo (da cui è possibile dedurre la posizione dei punti monitorati) ed un elenco delle fasi costruttive. Il terreno interagente con l'opera è costituito da argilla leggermente sovraconsolidata, con coefficiente di spinta a riposo  $K_0 \simeq 1.5$ . In corrispondenza della prima fase dei lavori, in cui vengono costruiti i pannelli di calcestruzzo armato, si è registrata nel terreno una importante riduzione di tensione orizzontale<sup>1</sup>; tale riduzione, di entità crescente con la profondità, sembra comportare nel terreno il raggiungimento delle condizioni limite attive. A parte questo, si può notare che durante le fasi di scavo i percorsi tensionali relativi agli elementi di valle seguono un andamento del tutto analogo a quello del percorso  $OP_1$  di figura 1.1c, associabile ad una condizione di drenaggio impedita: considerata la bassa permeabilità del terreno e la rapidità di esecuzione dello scavo, questo risultato è del tutto ragionevole.

Un ulteriore approfondimento riguardo allo studio dei percorsi tensionali conseguenti ad uno scavo può aversi attraverso l'utilizzo dell'analisi numerica, in cui si tiene conto della presenza di tensioni tangenziali agenti in direzione verticale, e dalla quale può essere ricavata la variazione della tensione efficace agente nella direzione perpendicolare al piano di deformazione. Calabresi et al. (2002), in riferimento ad uno scavo profondo 29.5 metri realizzato a Bologna, hanno svolto alcune simulazioni numeriche in Plaxis atte ad indagare l'effetto della rigidità del terreno e degli elementi strutturali sul comportamento dell'opera. Per i terreni, comprendenti un deposito coesivo leggermente sovraconsolidato e alcune intercalazioni sabbiose e limose, è stato adottato un legame elasto-plastico con incrudimento isotropo regolato da deformazioni volumetriche e deviatoriche (modello Hardening Soil). Come risultato dell'analisi, in riferimento ad elementi di terreno che si trovano a monte e a valle dell'opera di sostegno, si riportano in figura 1.3 gli andamenti delle tensioni efficaci (indicate con  $\sigma'_b$  e  $\sigma'_a$ ) agenti lungo le direzioni principali<sup>2</sup>: i percorsi drenati sono relativi ad elementi che si trovano all'interno dell'intercalazione sabbiosa, mentre quelli non drenati sono riferiti ad elementi contenuti nelle argille. Osservando

<sup>1</sup>Un effetto simile è stato osservato anche da Tedd et al. (1984) in riferimento allo scavo di un tunnel sotterraneo dell'autostrada M25 a nord-est di Londra.

<sup>2</sup>Tali direzioni coincidono inizialmente con l'orizzontale e la verticale.

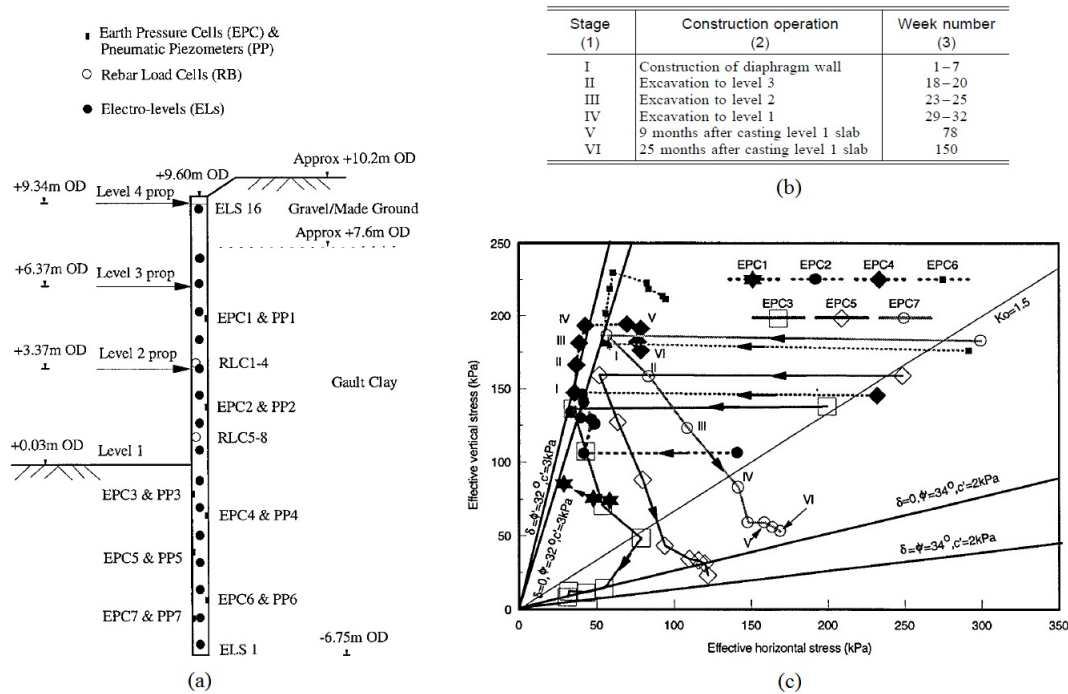


Figura 1.2: Scavo del parcheggio sotterraneo di Lion Yard: (a) schema del pannello strumentato; (b) fasi costruttive; (c) stress paths ricavati sulla base delle misure in sito (Ng 1999).

i risultati rappresentati sul piano deviatorico, si evince che i percorsi tensionali tendono alle condizioni limite in corrispondenza di zone dello spazio delle tensioni che sono relative a compressione triassiale per elementi che si trovano a monte della paratia ed estensione triassiale per elementi che si trovano a valle. Considerazioni analoghe possono essere fatte se si guardano i percorsi tensionali riportati in figura 1.4, ottenuti da Hashash & Whittle (2002) attraverso l'analisi numerica di uno scavo ideale in argilla.

La conoscenza dei percorsi tensionali tipici dei problemi di scavo è utile perchè può dare delle indicazioni sulla tipologia delle prove di laboratorio che occorre effettuare se si vuole studiare la risposta di un terreno soggetto a sollecitazioni di questo tipo. Inoltre, attraverso i risultati di queste prove si potrebbe calibrare un modello costitutivo, oppure si potrebbe verificare se uno specifico modello è capace di riprodurre adeguatamente il comportamento del terreno reale. Su questo argomento in letteratura si possono trovare diversi studi (si vedano ad esempio Burland & Fourie 1985, Tedd & Charles 1985, Fourie & Potts 1991, Amorosi et al. 1999).

## Comportamento degli scavi in condizioni non drenate

Considerato il fatto che negli scavi in terreni a grana fine le condizioni di breve termine sono più favorevoli di quelle a lungo termine, perchè come si è visto lo sviluppo di  $\Delta u$  negative consente di avvicinarsi alle condizioni limite con velocità minore di quella che si avrebbe in condizioni drenate, è lecito porsi il problema di quantificare



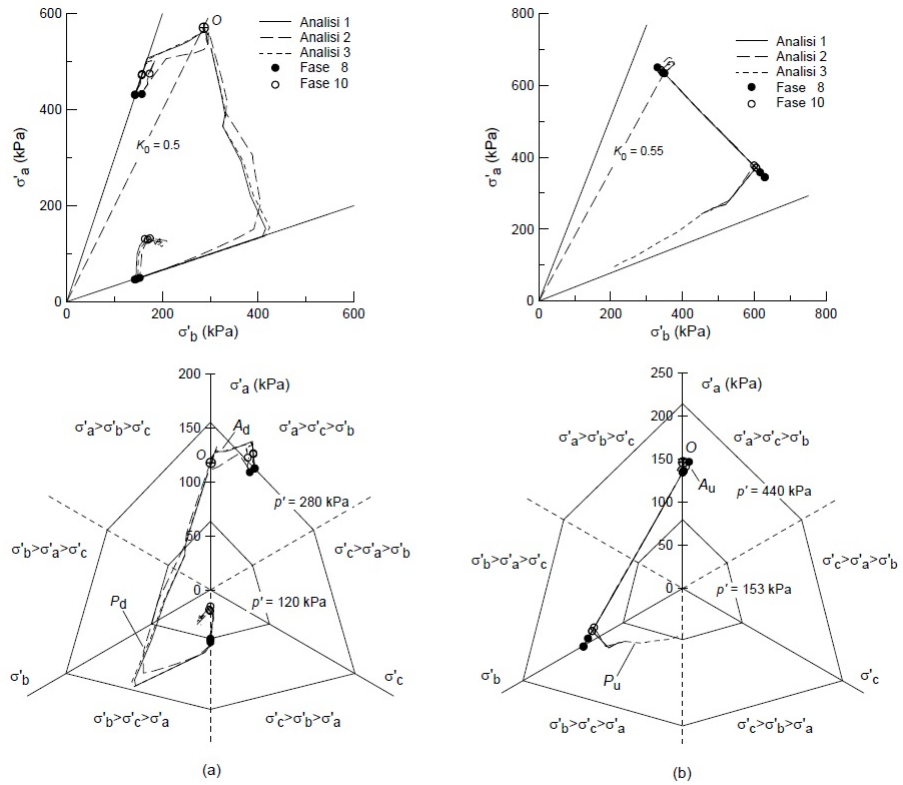


Figura 1.3: Stress paths ottenuti dalle analisi numeriche di uno scavo profondo a Bologna: (a) drenati; (b) non drenati (Calabresi et al. 2002).

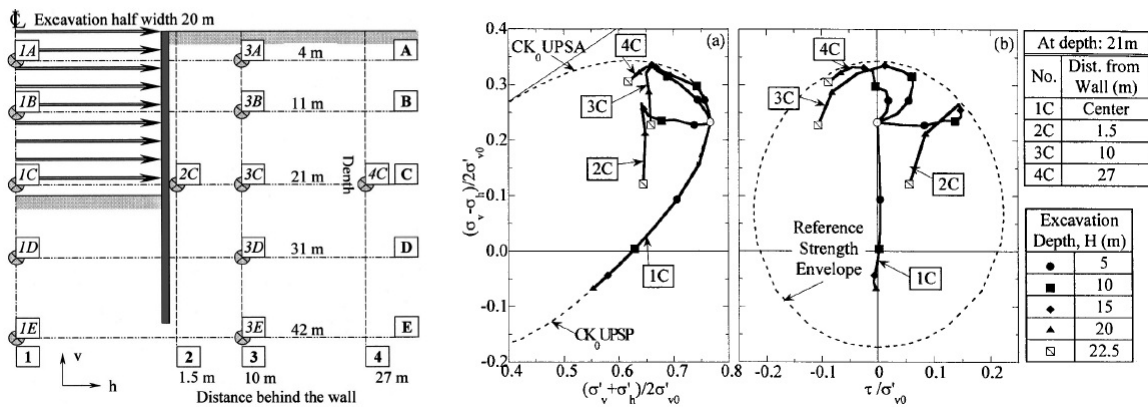
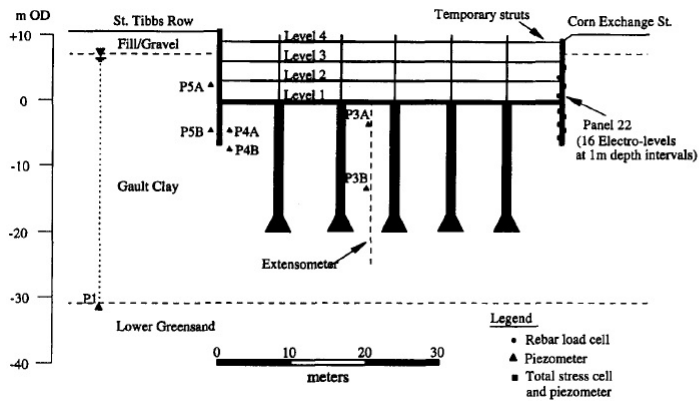


Figura 1.4: Stress paths ottenuti dalle analisi numeriche di uno scavo in argilla (Hashash & Whittle 2002).

queste sovrappressioni. In linea di principio se lo scavo è importante può accadere che le  $\Delta u$  siano talmente grandi in modulo da annullare il valore della pressione interstiziale, o addirittura renderlo negativo. Sebbene in generale un terreno a grana fine possa sostenere valori di pressioni interstiziali anche molto negativi, la presenza di fessure e di eterogeneità pone dei limiti alla suzione. Inoltre, se il fondo scavo non è protetto dalle precipitazioni atmosferiche, negli strati più superficiali i valori negativi di pressione interstiziale potrebbero annullarsi in tempi molto rapidi. Per questi motivi sarebbe prudente assumere nei calcoli una distribuzione di  $u$  che sia al minimo nulla, senza fare affidamento sui valori negativi.

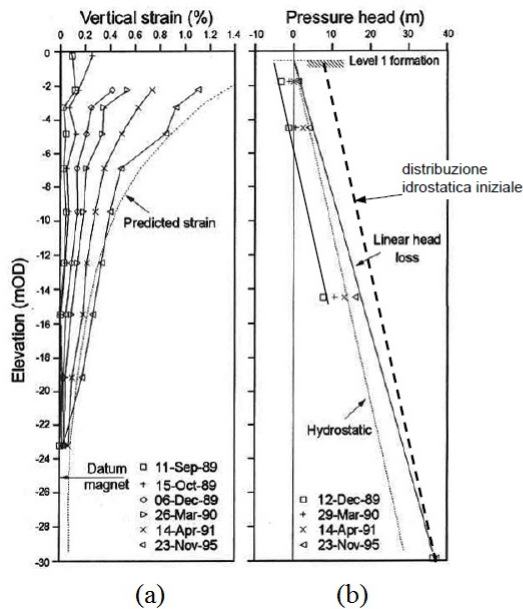
Un caso reale in cui le pressioni interstiziali sono state attentamente monitorate è quello relativo al parcheggio sotterraneo di Lion Yard, per realizzare il quale è stato eseguito uno scavo di 10 metri sostenuto da tre livelli di vincolo orizzontale. Il sottosuolo comprende uno strato di riporto spesso 3 metri, a cui seguono un deposito argilloso dello spessore di circa 37 metri ed uno strato profondo di tipo granulare. Il profilo delle pressioni interstiziali nella condizione precedente l'inizio dei lavori, ricavato attraverso alcune indagini in sito, è approssimativamente idrostatico con quota piezometrica posta a circa tre metri dal piano campagna. In figura 1.5 è rappresentata una sezione dello scavo, ed è inoltre riportata la sequenza delle fasi costruttive; si precisa che durante le fasi di scavo, avvenute in tempi rapidi, il fondo scavo è stato protetto dalle precipitazioni. In figura 1.6b sono riportati, in corrispondenza delle diverse fasi costruttive, gli andamenti con la profondità delle pressioni interstiziali, che sono state misurate attraverso delle celle piezometriche installate al centro dello scavo: in data 12 dicembre 1989, subito dopo l'ultima fase di scavo, si registra un andamento di  $u$  circa parallelo a quello idrostatico, con valori negativi in prossimità del fondo scavo; successivamente, col passare del tempo, le pressioni interstiziali aumentano e tendono ad una condizione stazionaria associata ad una filtrazione verso il fondo scavo (si precisa che il fondo scavo in questo caso non è stato impermeabilizzato). Sulla base delle misure effettuate sono stati calcolati i rapporti  $\alpha$  tra i decrementi di pressione interstiziale indotti dallo scavo e le rispettive variazioni di tensione verticale totale, per le fasi VI, IX e XII: i risultati, riportati in figura 1.6c, mostrano che ad ogni fase di scavo si ha in generale una riduzione di pressione interstiziale pari a circa il 75% di  $\Delta\sigma_v$ .

Il problema della valutazione dell'entità e della distribuzione delle sovrappressioni interstiziali generate da uno scavo in un terreno a grana fine, e quindi dei corrispettivi valori di  $\alpha$  (rapporto tra i decrementi di pressione interstiziale indotti dallo scavo e le rispettive variazioni di tensione verticale totale), è stato affrontato anche da Maltese (2013). L'autore ha effettuato delle analisi numeriche agli elementi finiti prendendo in considerazione uno scavo ideale in un terreno a grana fine, utilizzando per il sottosuolo il modello costitutivo Hardening Soil, calibrato sui risultati di alcune prove di laboratorio eseguite sull'argilla di Pisa. Le analisi sono svolte in condizioni di deformazione piana, considerando due diverse geometrie: una con scavo largo ed una con scavo stretto. Durante le fasi di scavo il drenaggio è impedito, e conseguentemente si generano nel terreno delle sovrappressioni interstiziali negative. L'andamento del rapporto  $\alpha$ , calcolato in riferimento all'ultima fase di scavo, è riportato in figura 1.7:



Stage (1)	Construction operation (2)	Week number (3)
I	Construction of diaphragm wall	1-7
II	Construction of bored piles	7-12
III	Reduced level dig to Level 4	12-13
IV	Casting of Level 4 slab	14-17
V	Installation of Level 4 struts	17-21
VI	Excavation to Level 3	18-20
VII	Casting of Level 3 slab	21-24
VIII	Installation of Level 3 struts	23-23
IX	Excavation to Level 2	23-25
X	Casting of Level 2 slab	26-28
XI	Installation of Level 2 struts	27-28
XII	Excavation to Level 1	29-32
XIII	Casting of Level 1 slab	35-41
XIV	Removal of all temporary struts	45-45
XV	4 months after casting Level 1 slab	56
XVI	9 months after casting Level 1 slab	78
XVII	15 months after casting Level 1 slab	104
XVIII	25 months after casting Level 1 slab	150

Figura 1.5: Sezione e fasi costruttive dello scavo del parcheggio di Lion Yard (Ng 1998).



Fase di scavo	$\Delta\sigma_v$ (kPa)	$\alpha$	
		P3A	P3B
VI (livello 3)	63	0.73	0.55
IX (livello 2)	63	0.79	0.71
XII (livello 1)	63	0.73	0.86

(c)

Figura 1.6: Scavo del parcheggio di Lion Yard, misure effettuate in centro allo scavo relative a: (a) deformazione verticale misurata con estensimetro; (b) profilo delle pressioni interstiziali; (c) rapporti  $\frac{\Delta u}{\Delta\sigma_v}$  (Nash et al. 1996).

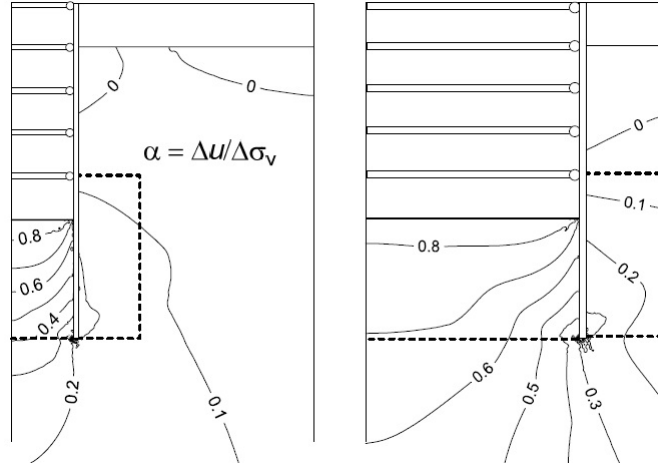


Figura 1.7: Risultati di un'analisi numerica: sovrappressioni interstiziali generate durante uno scavo eseguito in condizioni non drenate (Callisto et al. 2014).

si osserva che tale rapporto assume valori maggiori di 0.8 nelle zone prossime al fondo scavo, e tende poi a ridursi con la profondità fino a raggiungere valori di 0.4 in prossimità del piede della paratia; si può inoltre vedere che nel caso di scavo largo si hanno in generale valori di  $\alpha$  più elevati, e quindi maggiori decrementi di pressione interstiziale (ciò è vero soprattutto in prossimità dell'asse di simmetria, internamente allo scavo).

## Effetti della consolidazione

Osservando i risultati sperimentali provenienti dall'elaborazione dei dati di monitoraggio di opere in vera grandezza si può riscontrare che la progressiva dissipazione delle sovrappressioni interstiziali indotte dallo scavo, causata dalla consolidazione, porta effettivamente ad un peggioramento delle condizioni dello scavo.

In riferimento ad un tunnel autostradale situato a Londra, in cui si era previsto un controllo degli spostamenti anche nei mesi successivi al completamento dei lavori, Symons & Tedd (1989) individuano un chiaro effetto del fenomeno della consolidazione. Il tunnel, realizzato tramite uno scavo di 9 metri sostenuto da paratie di pali secanti profondi 18 metri, viene aperto al pubblico nel gennaio del 1984. Nei mesi successivi al completamento dell'opera viene registrato un progressivo sollevamento del fondo scavo, che in circa tre anni passa da 25 mm a 35 mm (figura 1.8). Contemporaneamente a questo fenomeno si misurano anche dei piccoli incrementi di spostamento orizzontale nelle opere di sostegno e nel terreno che si trova a tergo di esse.

Un comportamento analogo è stato osservato a San Francisco, in riferimento ad uno scavo di 13 metri sostenuto da paratie profonde 41 metri supportate da tre livelli di contrasto (Koutsoftas et al. 2000). Come si può vedere in figura 1.9b, a scavo ultimato gli spostamenti orizzontali misurati in prossimità della paratia raggiungono un valore massimo di 35 mm, in corrispondenza di una profondità compresa tra 15 e 20 m. Successivamente, nel periodo in cui viene costruita la platea di fondo, si nota un incremento degli spostamenti, soprattutto nella zona

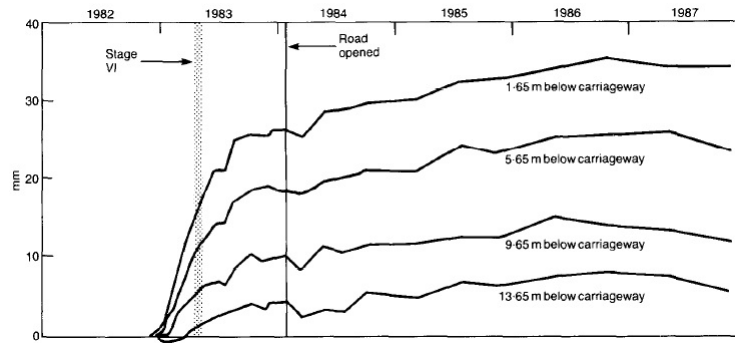


Figura 1.8: Sollevamento del fondo scavo indotto dalla consolidazione (Symons & Tedd 1989).

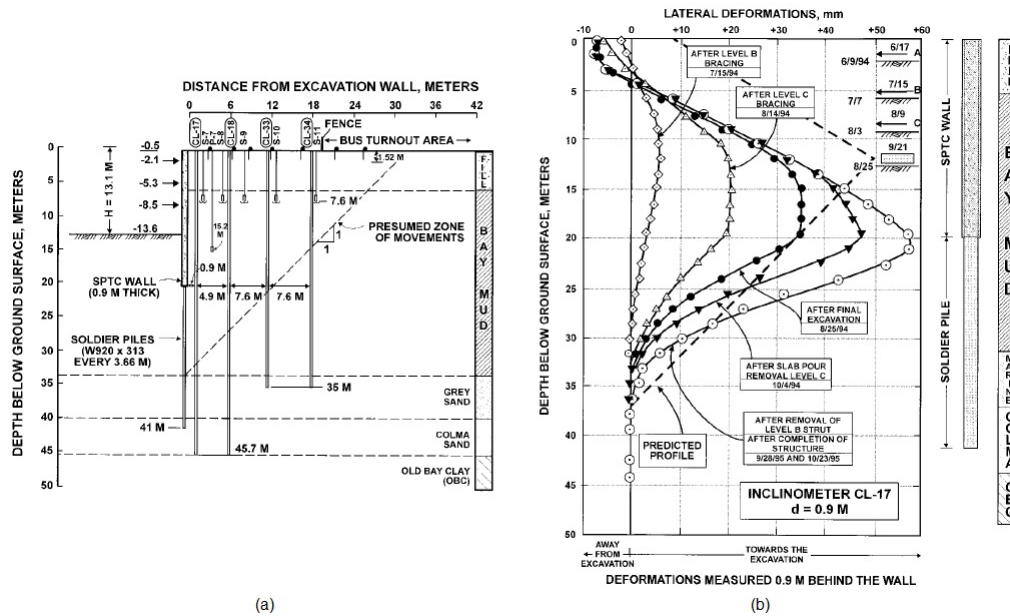


Figura 1.9: MMT: (a) sezione dello scavo; (b) spostamenti orizzontali indotti (Koutsoftas et al. 2000).

compresa tra le quote di 13 e 27 metri. Le misure rilevate un anno dopo mostrano un ulteriore incremento di spostamento orizzontale nelle quote sottostanti il fondo scavo, fino al raggiungimento di un valore massimo pari a 58 mm verificatosi alla quota di 20 m.

Un altro caso in cui gli effetti della consolidazione sono molto evidenti è quello relativo al parcheggio sotterraneo di Lion Yard. Per monitorare il comportamento dell'opera, sia durante le fasi costruttive che nei mesi a seguire, sono stati installati all'interno dello scavo dei piezometri ed un assestometro (vedi figura 1.5). La particolarità di quest'opera consiste nel fatto che tra il fondo dello scavo e la platea è stata interposta un'intercapedine dello spessore di 150 mm, e quindi il rigonfiamento del terreno è potuto avvenire senza incontrare particolari resistenze: dopo la fine dei lavori, in sei anni si è verificato un sollevamento di 5 cm (Nash et al. 1996). In figura 1.10 è possibile apprezzare l'equalizzazione delle pressioni interstiziali nel tempo, avvenuta nei mesi successivi al completamento della struttura, ed il conseguente aumento degli spostamenti orizzontali dell'opera di sostegno.

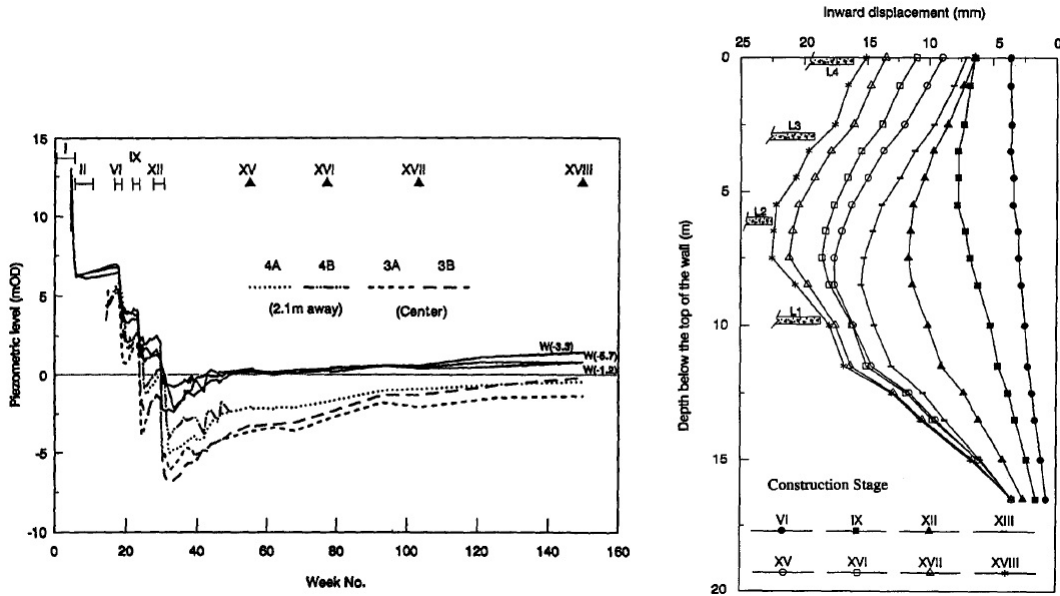


Figura 1.10: Variazioni della pressione interstiziale nel terreno durante la costruzione del parcheggio di Lion Yard e spostamenti orizzontali delle opere di sostegno (Ng 1998).

Effetti simili a quelli discussi finora, seppur di entità minore, sono stati osservati anche a Shanghai (Liu et al. 2005).

Se la costruzione di un'opera sotterranea dovesse subire un ritardo durante le fasi di scavo, ovvero prima della realizzazione del solettone di fondo, gli effetti sugli spostamenti potrebbero essere ben maggiori di quelli osservati nei casi in cui è invece presente un importante livello di contrasto alla base dello scavo, ed in alcuni casi questo potrebbe causare seri danni alle strutture e agli edifici adiacenti allo scavo. Durante la costruzione del Taipei National Enterprise Center, realizzato grazie ad uno scavo profondo 20 metri, a causa di un ritardo di 20 giorni nella realizzazione dei livelli di contrasto orizzontale si sono osservati incrementi degli spostamenti orizzontali delle opere di sostegno pari al 10% (Ou et al. 1998). Effetti deleteri di entità ancora maggiore si sono riscontrati in India, dove un ritardo di 3 mesi nei lavori di scavo di una stazione metropolitana ha causato importanti cedimenti alla base degli edifici situati nei pressi del cantiere (Som & Gupta 1994).

## 1.2 Analisi numeriche di scavi in terreni a grana fine

Uno degli strumenti più utilizzati per lo studio del comportamento di uno scavo è senza dubbio l'analisi numerica. Nella maggior parte dei casi questo tipo di analisi consente di ottenere una stima adeguata delle sollecitazioni negli elementi strutturali e degli spostamenti orizzontali delle opere di sostegno, ma non dei cedimenti indotti nel terreno circostante. Come si mostrerà nel seguito, attraverso esempi presi dalla letteratura, i risultati delle

analisi numeriche dipendono fortemente dal tipo di modello costitutivo adottato, e quindi la loro attendibilità è legata necessariamente ai limiti dei modelli disponibili.

Come esempio si fa riferimento allo scavo del Taipei National Enterprise Center (TNEC), uno scavo di forma irregolare con profondità massima di 19.7 metri, effettuato in terreni prevalentemente a grana fine. In figura 1.11 si riportano gli spostamenti orizzontali della paratia e i cedimenti del piano campagna in corrispondenza delle diverse fasi costruttive. Lim et al. (2010) hanno effettuato una serie di analisi numeriche 2D sullo scavo del TNEC utilizzando cinque diversi modelli costitutivi: MCC, HS e HS small strain per le analisi svolte in termini di tensioni efficaci; M-C e USC per le analisi svolte in termini di tensioni totali. Per i terreni a grana fine è stato assunto un comportamento non drenato nelle fasi di scavo, del tutto in linea con i dati sperimentali. I risultati delle analisi numeriche, intesi come spostamenti orizzontali della paratia e cedimenti del piano campagna, sono stati confrontati dagli autori con i risultati delle misurazioni sperimentali (si veda la figura 1.12).

Una prima osservazione va fatta sul tipo di analisi svolte: nonostante sia chiaro che il comportamento di una terra dipenda dalle tensioni efficaci, vengono svolte anche delle analisi in tensioni totali, a dimostrazione del fatto che questo tipo di analisi vengono ancora impiegate. Come spiegano gli autori questo accade perchè i parametri che solitamente vengono utilizzati in questo tipo di analisi sono molto semplici da ottenere. Tuttavia si ricorda che tali analisi non consentono una determinazione esplicita delle pressioni interstiziali e quindi non permettono una comprensione completa del comportamento dello scavo.

Passando ai modelli costitutivi si è visto che l'uso del modello MCC con parametri calibrati attraverso i risultati delle prove di laboratorio non porta a risultati soddisfacenti. In particolare gli spostamenti orizzontali dell'opera calcolati relativi alle ultime fasi di scavo risultano molto inferiori a quelli misurati. Gli autori attribuiscono questa differenza al fatto che negli strati poco profondi, dove l'argilla è sovraconsolidata, la superficie plastica è orientata lungo la linea  $K_0$  (figura 1.13). Per cui in un percorso tensionale di estensione il modello MCC, caratterizzato da una superficie plastica simmetrica rispetto alla retta di compressione isotropa, consente di sviluppare deformazioni plastiche per scarichi tensionali ben maggiori di quelli che occorrerebbero nella realtà, e quindi sottostima le deformazioni. Una stima più accurata delle deformate si otterrebbe decrementando in modo convenzionale la rigidità del terreno negli strati di argilla sovraconsolidata, ma in ogni caso il modello non è abile a riprodurre una stima accurata dei cedimenti del piano campagna. I risultati ottenuti invece coi modelli HS e HS small strain sono molto più accurati. Nelle analisi in tensioni totali si è osservato che il modello di Mohr-Coulomb con  $\varphi = 0$  non è affidabile, mentre col modello USC si riescono ad ottenere delle ottime corrispondenze coi risultati sperimentali sia per quanto riguarda le deformate che i cedimenti.

Sullo stesso scavo, sempre al fine di testare le capacità di diversi modelli costitutivi, Kung et al. (2009) hanno svolto altre analisi numeriche 2D in tensioni efficaci. In tutte le analisi lo strato di argilla normal consolidata è stato modellato con un modello MCC. Per i terreni sovraconsolidati, nell'analisi A è stato utilizzato un modello

Stage No.	Construction day	Construction activities
1	156-162	Excavated to elevation -2.80 m
2	164-169	Installed section H300 × 300 × 10 × 15 at first prop level (elevation -2.0 m), preload = 784.8 kN per prop
3	181-188	Excavated to elevation -4.9 m
4A	217	Cast floor slab (B1F) at elevation -3.5 m
4B	222-328	Demolished first level of prop and cast ground level of slab
5	233-255	Excavated to elevation -8.6 m
7	318-337	Excavated to elevation -11.8 m
9	363-378	Excavated to elevation -15.2 m
11A	419-423	Excavated to elevation -17.3 m (centre strip)
12A	425-429	Installed H400 × 400 × 13 × 21 sections at second prop level (elevation -16.5 m), preload = 1177 kN per prop (centre strip)
11B	430-436	Excavated to elevation -17.3 m (side strips)
12B	437-444	Installed H400 × 400 × 13 × 21 sections at second prop level (elevation -16.5 m), preload = 1177 kN per prop (side strips)
13	445-460	Excavated to elevation -19.7 m
15	506-520	Cast floor slab (B5F) at elevation -17.1 m
16	528	Demolished second level of prop

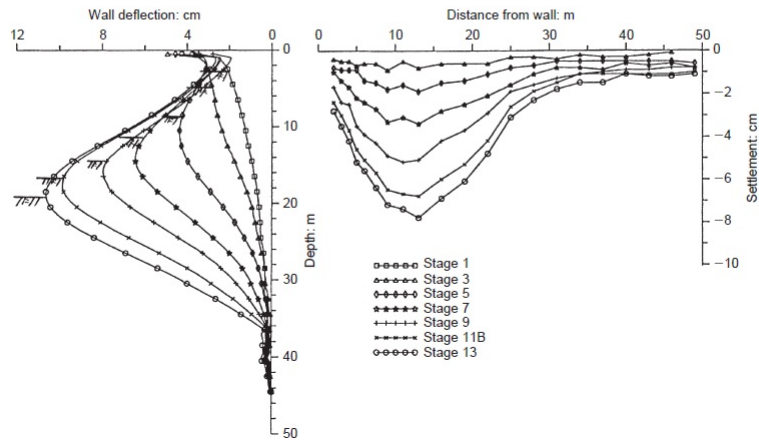


Figura 1.11: Scavo del TNEC: fasi costruttive, spostamenti orizzontali e cedimenti del piano campagna (Ou et al. 2000)



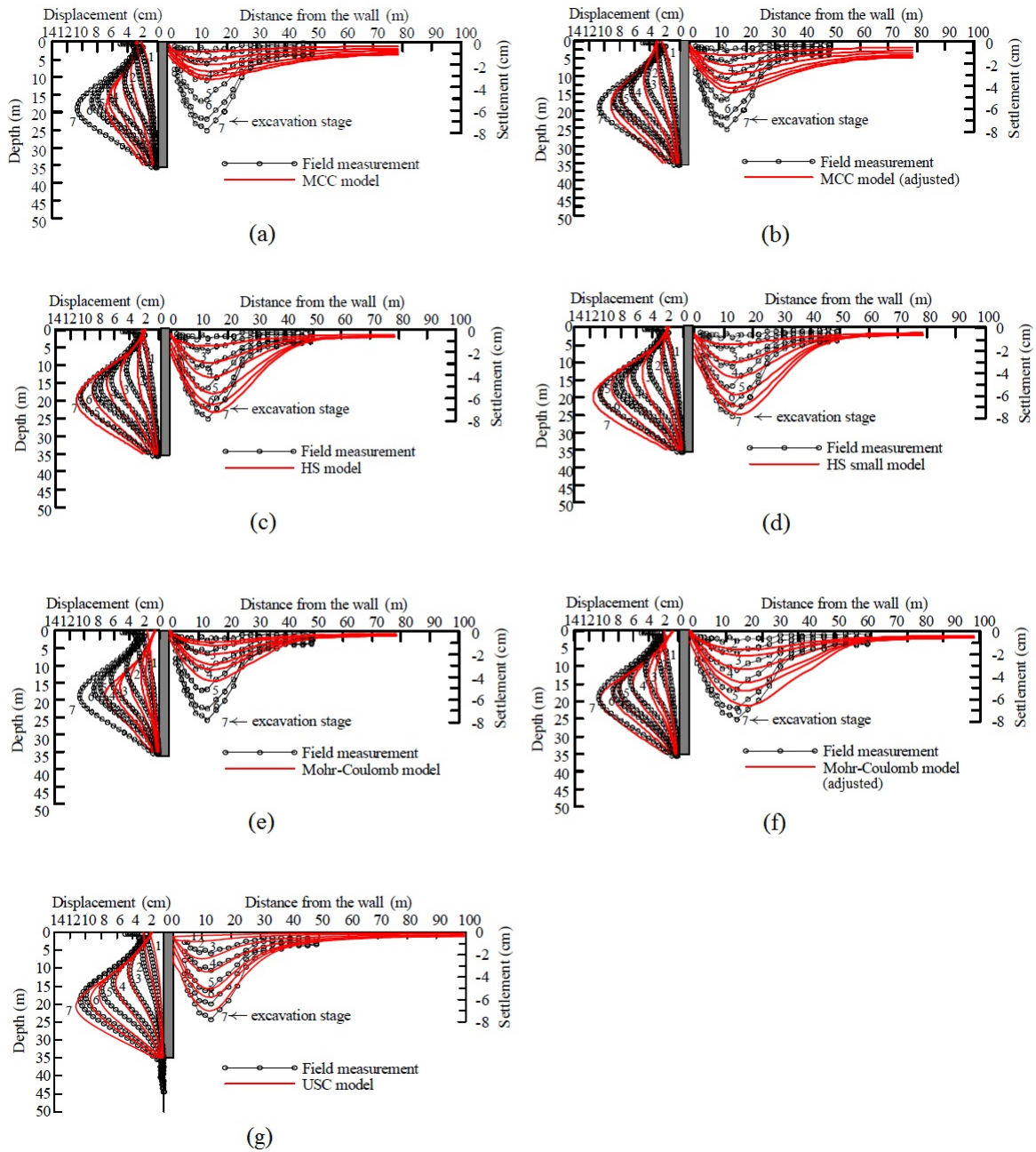


Figura 1.12: Analisi numeriche relative allo scavo del TNEC. Risultati ottenuti usando diversi modelli costitutivi. Per le analisi in tensioni efficaci: (a) MCC; (b) MCC con rigidità ridotta nei terreni sovraconsolidati; (c) Hardening Soil; (d) Hardening Soil small strain. Per le analisi in tensioni totali: (e) Mohr-Coulomb; (f) Mohr-Coulomb con modulo non drenato ridotto; (g) Undrained Soft Clay (Lim et al. 2010).

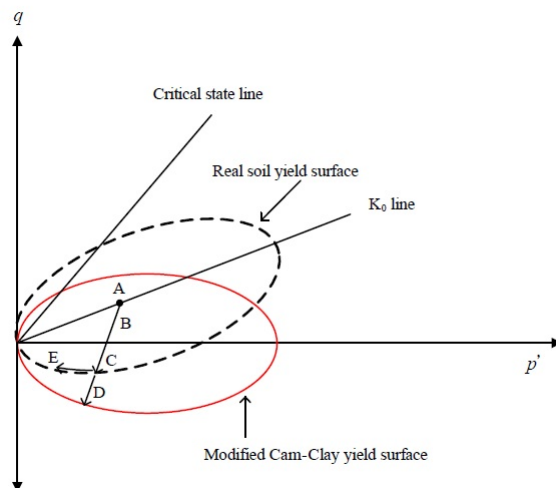


Figura 1.13: Relazione tra la superficie plastica del modello MCC e quella rappresentativa della terra reale (Lim et al. 2010).

a tre superfici plastiche ad incrudimento misto (Stallebrass & Taylor 1997), denominato 3-SKH, mentre nelle analisi B, C e D si è utilizzato un modello MCC con diversi valori del modulo di taglio a piccole deformazioni  $G_0$ . Osservando la figura 1.14 si evince che il modello più affidabile è il 3-SKH, il quale permette di stimare con ottima precisione anche i cedimenti del piano campagna.

Ricapitolando: si sono visti i risultati di alcune analisi numeriche effettuate in condizioni di deformazione piana, ed in particolare si è osservato che non tutti i modelli costitutivi sono abili nel riprodurre gli spostamenti dell'opera e i cedimenti del piano campagna che si riscontrano in sito. Alcune analisi sono svolte in termini di tensioni totali, ma questo metodo d'analisi non può essere utilizzato se si vuole affrontare il problema degli scavi in modo completo e consapevole. Dei modelli costitutivi testati il più affidabile risulta essere il 3-SKH, un modello elastoplastico ad incrudimento cinematico e isotropo composto da tre superfici plastiche: tale modello permette di rappresentare in maniera efficace il comportamento dei terreni sovraconsolidati, che dipende fortemente dalla storia di carico subita.

Dall'analisi dei risultati fin qui riportati appare chiaro che la scelta delle leggi costitutive adottate per modellare il terreno gioca un ruolo importante, e in molti casi può rendersi necessario disporre di un modello che tenga conto di alcuni particolari aspetti dei terreni. Come ben noto, il comportamento meccanico dei terreni naturali è caratterizzato dai fenomeni che influenzano i legami tra le particelle e dalle reazioni che intercorrono tra esse; il complesso dei caratteri da cui dipende tale comportamento, solitamente molto differente da quello degli stessi terreni ricostituiti, può essere indicato sinteticamente col termine *struttura*. Sebbene alcuni dei fattori responsabili della struttura di una terra, come ad esempio la disposizione geometrica dei granuli (*fabric*) e la resistenza dei contatti interparticellari (*bounding*), siano stati studiati in modo dettagliato (per un'approfondimento sull'argo-

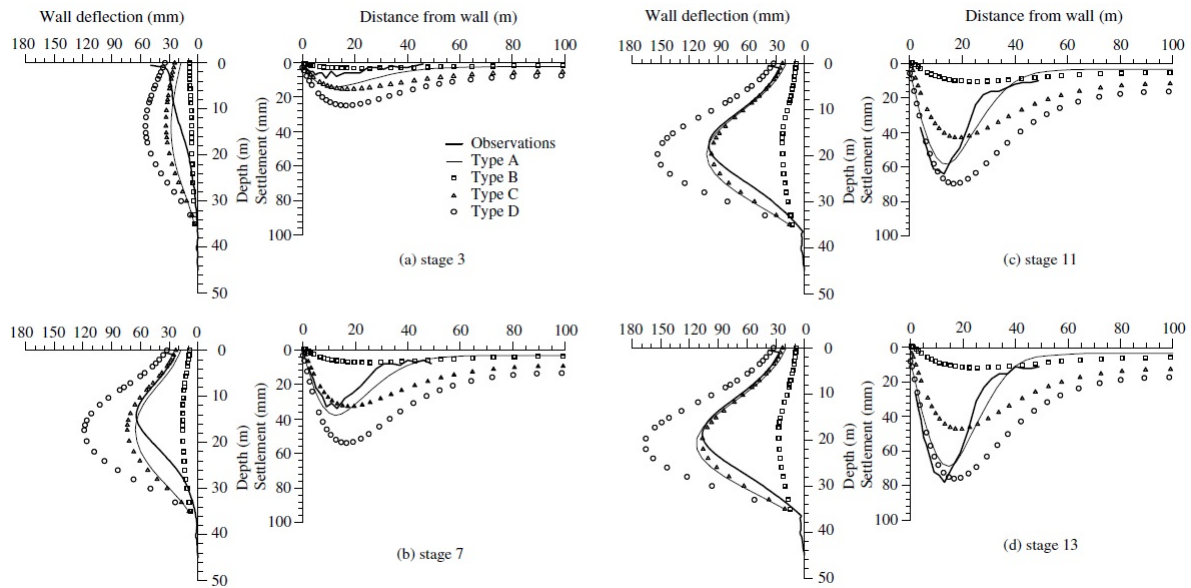


Figura 1.14: Risultati di analisi numeriche 2D sullo scavo del TNEC: spostamenti e cedimenti per diverse fasi di scavo (Kung et al. 2009).

mento si vedano ad esempio Burland 1990 e Cotecchia & Chandler 2000), è probabile che altri non siano ancora stati investigati. Per poter riprodurre fedelmente il comportamento dei terreni sono stati sviluppati negli anni diversi modelli costitutivi, più o meno complessi, ognuno dei quali ha inevitabilmente dei pregi e dei difetti. Il modello di Rouainia & Muir Wood (2000), che fa parte dei modelli derivanti dalla teoria della *bounding surface plasticity*, può riprodurre alcune delle caratteristiche tipiche delle argille naturali (tra cui ad esempio l'evoluzione della rigidità a piccole deformazioni dovuta allo sviluppo di deformazioni plastiche, la progressiva perdita della struttura e la dipendenza della risposta dalla direzione dei percorsi tensionali), ed ha il vantaggio di non essere eccessivamente complicato: per questi motivi il citato modello è stato studiato approfonditamente nel presente lavoro di tesi, ed è stato poi utilizzato per l'analisi degli scavi in argilla.



## Capitolo 2

# Formulazione di un modello costitutivo per argille naturali

I modelli costitutivi derivanti dalla teoria classica dell'elastoplasticità con incrudimento non riescono a descrivere in maniera esaustiva il complesso comportamento dei materiali, soprattutto in condizioni di carico cicliche. Tra le teorie sviluppatesi per far fronte a questo problema una delle più note è la *bounding surface plasticity*. Questa teoria, per la cui formulazione si rimanda a Dafalias (1986), prevede che nello spazio delle tensioni siano definite una o più superfici esterne alla superficie di snervamento; dato un generico stato tensionale plastico, si individua sulla superficie esterna un corrispettivo stato coniugato, e si fa dipendere il modulo plastico dalla distanza tra questi due stati tensionali: così facendo è possibile ottenere una graduale evoluzione della rigidità, sia lungo percorsi tensionali di scarico e ricarico che lungo percorsi monotoni, consentendo ad esempio una corretta transizione da stati elastoplastici a rigidità elevata a stati molto deformabili e prossimi alla rottura.

Tra i modelli costitutivi scaturiti dall'applicazione della *bounding surface plasticity* trova spazio quello sviluppato da Hashiguchi (1988), in cui la legge d'incrudimento cinematico è pensata per poter essere applicata efficientemente non solo a materiali ad incrudimento positivo ma anche a materiali ad incrudimento negativo. Nel successivo paragrafo verrà presentata la formulazione delle leggi costitutive di questo modello, che fu originariamente ideato per i metalli. Successivamente, tramite l'introduzione di una specifica superficie di snervamento e di precise leggi d'incrudimento, il modello verrà adattato alle terre a grana fine. In particolare, le leggi d'incrudimento che verranno utilizzate sono quelle che furono proposte da Rouainia & Muir Wood (2000).

Prima di iniziare con la formulazione vera e propria si richiamano brevemente due concetti:

- data una funzione  $f$  definita in  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ , essa è omogenea di grado  $n$  in  $A$  se per ogni  $P \in A - \{0\}$  risulta

soddisfatta la seguente relazione:

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^n f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad n, t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

- il teorema di Eulero stabilisce che condizione necessaria e sufficiente affinché  $f$ , differenziabile in  $A$ , sia omogenea di grado  $n$  in  $A$  è che:

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} x_k = n f \quad (2.2)$$

## 2.1 Formulazione generale del modello a due superfici di Hashiguchi

Si assume l'esistenza di una funzione di snervamento  $\bar{y} = y(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\kappa}})$ , dipendente dalle tensioni  $\boldsymbol{\sigma}$  e da un vettore di variabili interne d'incrudimento  $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ ; questa funzione dev'essere tale per cui, per ogni fissato  $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ , sia  $\bar{y} < 0$  se lo stato è elastico,  $\bar{y} = 0$  se lo stato è plastico e  $\bar{y} > 0$  se lo stato non è raggiungibile senza ulteriori plasticizzazioni. Il luogo geometrico  $y(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\kappa}}) = 0$  descrive una superficie nello spazio delle tensioni detta superficie di snervamento, la quale divide gli stati elastici attuali (interni) da quelli plastici (sulla frontiera) e da quelli irraggiungibili per quei fissati valori di  $\bar{\boldsymbol{\kappa}}$ . Una variazione delle variabili interne d'incrudimento porta ad una evoluzione della superficie di snervamento, e poichè tale evoluzione deve dipendere dallo sviluppo di deformazioni plastiche deve essere  $\bar{\boldsymbol{\kappa}} = \bar{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\varepsilon}^p)$ .

In generale l'incrudimento può essere sia isotropo che cinematico. Sia  $\bar{\kappa}$  la variabile interna associata all'incrudimento isotropo e sia  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  il vettore contenente le variabili interne associate all'incrudimento cinematico. Si assume che  $\boldsymbol{\sigma}$  ed  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  abbiano la stessa dimensione (stesso numero di componenti), ed inoltre si assume che tutte le variabili interne abbiano la dimensione fisica di una tensione. La superficie di snervamento  $y(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\kappa}}) = 0$ , che d'ora in poi chiameremo superficie interna, può essere scritta nella forma:

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) - F(\bar{\boldsymbol{\kappa}}) = 0 \quad (2.3)$$

dove si è posto:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.4)$$

Per semplicità le funzioni  $f$  ed  $F$  vengono assunte omogenee di grado  $n$ , e ciò implica che la superficie interna evolve con le  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  mantenendo invariata la sua forma.

Si definisce una ulteriore funzione  $\hat{y} = y(\boldsymbol{\sigma}, \hat{\boldsymbol{\kappa}})$ , dipendente dalle tensioni  $\boldsymbol{\sigma}$  e da un vettore di variabili interne d'incrudimento  $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ . Fissato  $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ , il luogo geometrico  $y(\boldsymbol{\sigma}, \hat{\boldsymbol{\kappa}}) = 0$  descrive una superficie nello spazio delle tensioni

che chiameremo superficie esterna. Come la superficie interna, anch'essa evolve con le deformazioni plastiche, e quindi deve essere  $\hat{\kappa} = \hat{\kappa}(\varepsilon^p)$ .

Analogamente a quanto fatto in precedenza, si assume che  $\hat{\kappa}$  sia la variabile interna associata all'incrudimento isotropo e che  $\hat{\alpha}$  sia il vettore contenente le variabili interne associate all'incrudimento cinematico. Si assume che  $\sigma$  ed  $\hat{\alpha}$  abbiano la stessa dimensione, ed inoltre si assume che tutte le variabili interne abbiano la dimensione fisica di una tensione. La superficie esterna può essere scritta nella forma:

$$f(\hat{\sigma}) - F(\hat{\kappa}) = 0 \quad (2.5)$$

dove si è posto:

$$\hat{\sigma} = \sigma - \hat{\alpha} \quad (2.6)$$

Le due superfici appena introdotte, descritte dalle equazioni 2.3 e 2.5, hanno evidentemente la stessa forma, mentre differiscono per dimensione e per posizione nello spazio delle tensioni (vedi figura 2.1). I termini  $\bar{\alpha}$  ed  $\hat{\alpha}$  rappresentano il centro delle superfici, mentre  $\bar{\kappa}$  e  $\hat{\kappa}$  sono parametri rappresentativi della loro dimensione. Per semplicità si assume che tali superfici siano anche convesse.

Si assume che lo stato tensionale corrente  $\sigma_p$  debba essere sempre tale da soddisfare la relazione  $y(\sigma_p, \bar{\kappa}) \leq 0$ : ciò equivale a dire che la sua posizione nello spazio delle tensioni debba essere sempre interna (o al limite appartenere) alla superficie interna. Inoltre si assume che la superficie esterna debba sempre contenere quella interna. Quest'ultima condizione, nel caso in cui i centri delle due superfici non coincidono, può essere scritta nella seguente forma:

$$f(\hat{\sigma}_d) \leq F(\hat{\kappa}) \quad (2.7)$$

dove  $\hat{\sigma}_d = \sigma_d - \hat{\alpha}$ , e  $\sigma_d$  (vedi figura 2.1) è lo stato tensionale rappresentativo del punto d'intersezione della superficie interna con la retta passante per i centri delle due superfici (dato che i punti d'intersezione sono due, si precisa che  $\sigma_d$  è quello che dista maggiormente da  $\hat{\alpha}$ ). In forma differenziale la 2.7 assume la seguente espressione:

$$\left. \frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial \hat{\sigma}} \right|_{\hat{\sigma}_d}^T \dot{\hat{\sigma}}_d \leq \frac{\partial F(\hat{\kappa})}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}} \quad (2.8)$$

Dato che le superfici hanno la stessa forma, e dal momento che sono state assunte convesse, se la condizione appena introdotta è soddisfatta allora è vero anche che le superfici non si intersecano; per cui le espressioni 2.7 e 2.8 possono anche essere viste come delle condizioni di non intersezione.

Si introducono ora alcune utili definizioni. Dato uno stato tensionale  $\sigma_p$  interno (o appartenente) alla superficie interna, ovvero tale per cui sia  $f(\bar{\sigma}_p) \leq F(\bar{\kappa})$ , si definisce superficie coniugata di  $f(\bar{\sigma}_p)$  la superficie per la quale

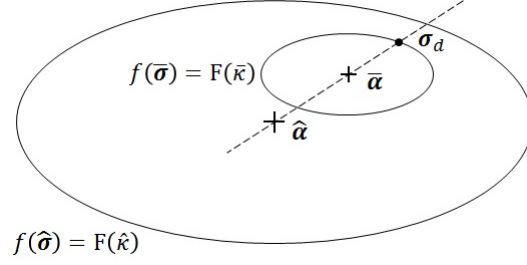


Figura 2.1: Rappresentazione delle superfici nello spazio delle tensioni.

risulta soddisfatta la seguente relazione:

$$f(\hat{\sigma}) = \frac{F(\hat{\kappa})}{F(\bar{\kappa})} f(\bar{\sigma}_p) \quad (2.9)$$

Dato uno stato tensionale  $\sigma_p$  generico, in corrispondenza di esso si definiscono i seguenti versori normali alle superfici:

$$\bar{n}_p = \frac{\left. \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \right|_{\bar{\sigma}_p}}{\left\| \left. \frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \right|_{\bar{\sigma}_p} \right\|} \quad (2.10)$$

$$\hat{n}_p = \frac{\left. \frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial \hat{\sigma}} \right|_{\hat{\sigma}_p}}{\left\| \left. \frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial \hat{\sigma}} \right|_{\hat{\sigma}_p} \right\|} \quad (2.11)$$

Va fatto presente che nel caso in cui  $\sigma_p$  coincida con il centro di una delle due superfici, allora il versore riferito a tale superficie calcolato in  $\sigma_p$  è indefinito.

Dato uno stato tensionale  $\sigma_p$  appartenente alla frontiera della superficie interna si definisce il suo stato tensionale coniugato come quel vettore  $\sigma_c$  (vedi figura 2.2) che appartiene alla superficie coniugata di  $f(\bar{\sigma}_p)$  e tale da soddisfare la seguente relazione:

$$\hat{n}_c = \bar{n}_p \quad (2.12)$$

Utilizzando le definizioni di superficie coniugata e di versore sopra introdotte, e ricorrendo alle proprietà delle funzioni omogenee, è facile dimostrare che la tensione coniugata è data dalla seguente espressione:

$$\sigma_c = \left[ \frac{F(\hat{\kappa})}{F(\bar{\kappa})} \right]^{\frac{1}{n}} \bar{\sigma}_p + \hat{\alpha} \quad (2.13)$$

Stante le ipotesi introdotte si può dimostrare che, quando le due superfici sono in contatto tra loro, il punto di



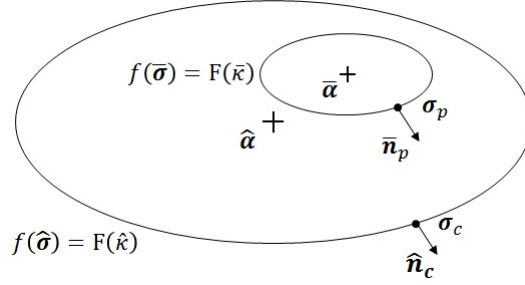


Figura 2.2: Tensione coniugata.

contatto  $\sigma_h$  coincide con  $\sigma_d$  (quindi appartiene alla retta congiungente i due centri) ed inoltre i versori normali  $\bar{n}_h$  ed  $\hat{n}_h$  risultano identici.

A questo punto, seguendo l'idea di Hashiguchi (1988), si formula la legge d'incrudimento cinematico imponendo che la condizione di non intersezione (equazione 2.8) sia soddisfatta quando le due superfici si trovano in contatto.

Dal momento che il punto di contatto  $\sigma_h$  appartiene ad entrambe le superfici si ha:

$$f(\bar{\sigma}_h) = F(\bar{\kappa}) \quad (2.14)$$

$$f(\hat{\sigma}_h) = F(\hat{\kappa}) \quad (2.15)$$

Introducendo il vettore  $\mathbf{a} = \bar{\alpha} - \hat{\alpha}$  è possibile esprimere  $\bar{\sigma}_h$  e  $\hat{\sigma}_h$  come quota parte di  $\mathbf{a}$ , ad esempio ponendo:

$$\bar{\sigma}_h = (\rho - 1) \mathbf{a} \quad (2.16)$$

$$\hat{\sigma}_h = \rho \mathbf{a} \quad (2.17)$$

Utilizzando la proprietà delle funzioni omogenee si può scrivere:

$$f(\bar{\sigma}_h) = f[(\rho - 1) \mathbf{a}] = (\rho - 1)^n f(\mathbf{a}) = F(\bar{\kappa}) \quad (2.18)$$

$$f(\hat{\sigma}_h) = f(\rho \mathbf{a}) = \rho^n f(\mathbf{a}) = F(\hat{\kappa}) \quad (2.19)$$

e quindi ricavare  $\rho$ , che sarà dato da:

$$\rho = \frac{\left(\frac{\hat{F}}{\bar{F}}\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\frac{\hat{F}}{\bar{F}}\right)^{\frac{1}{n}} - 1} \quad (2.20)$$

dove si è posto  $\bar{F} = F(\bar{\kappa})$  ed  $\hat{F} = F(\hat{\kappa})$ .

La condizione di non intersezione:

$$\left. \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}_h \leq \frac{\partial F(\hat{\kappa})}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}} \quad (2.21)$$

assieme alla relazione derivante dall'applicazione del teorema di Eulero:

$$\left. \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}_h = n \dot{F} \quad (2.22)$$

e alla definizione di versore normale:

$$\hat{\mathbf{n}}_h = \frac{\left. \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h}}{\left\| \left. \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h} \right\|} \quad (2.23)$$

si traduce nella seguente espressione:

$$\hat{\mathbf{n}}_h^T \left[ \dot{\rho} \mathbf{a} + \rho \dot{\mathbf{a}} - \frac{\partial \dot{F}}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}} \rho \mathbf{a} \right] \leq 0 \quad (2.24)$$

Al fine di soddisfare la 2.24, stante la convessità delle superfici, può porsi:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} \mathbf{a} + \dot{\mathbf{a}} - \frac{\partial \dot{F}}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}} \mathbf{a} = \dot{\mu} \boldsymbol{\beta} \quad (2.25)$$

dove  $\dot{\mu} \geq 0$  è un fattore proporzionale, mentre  $\boldsymbol{\beta}$  (figura 2.3), vettore congiungente lo stato tensionale corrente  $\boldsymbol{\sigma}_p$  (appartenente alla superficie interna) al corrispettivo coniugato  $\boldsymbol{\sigma}_c$ , è dato da:

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\sigma}_c - \boldsymbol{\sigma}_p \quad (2.26)$$

La 2.25 esprime la legge d'incrudimento cinematico. Si può dimostrare che, quando le superfici sono in contatto, la 2.25 soddisfa sempre la 2.24. Infatti, preso un qualsiasi stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma}_p$  appartenente alla superficie interna, ovvero tale per cui  $f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p) = F(\bar{\kappa})$ , il prodotto scalare tra  $\hat{\mathbf{n}}_h$  e  $\boldsymbol{\beta}$  è sempre negativo, e si annulla solamente quando  $\boldsymbol{\sigma}_p$  coincide con  $\boldsymbol{\sigma}_h$ .

Ora bisogna ricavare l'espressione di  $\dot{\mu}$ . La condizione di consistenza applicata alla superficie interna è data dalla seguente espressione:

$$\left. \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p}^T \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_p = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\kappa}} \dot{\bar{\kappa}} \quad (2.27)$$

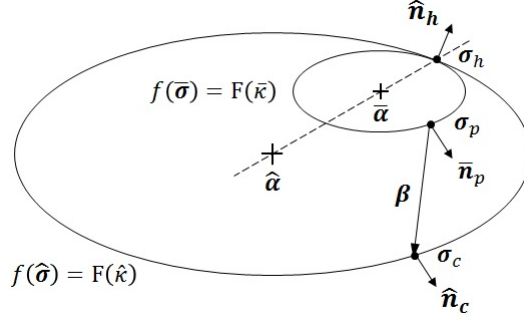


Figura 2.3: Rappresentazione delle superfici nella situazione di contatto.

Facendo uso del teorema di Eulero, da cui si ricava:

$$\frac{\partial f(\bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \bigg|_{\bar{\sigma}_p}^T \bar{\sigma}_p = n f(\bar{\sigma}_p) = n \bar{F} \quad (2.28)$$

e usando la definizione di versore normale (equazione 2.10), è possibile riscrivere la 2.27 nella seguente forma:

$$\bar{\mathbf{n}}_p^T \left[ \dot{\bar{\sigma}}_p - \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\kappa}} \dot{\bar{\kappa}} \bar{\sigma}_p \right] = 0 \quad (2.29)$$

Sostituendo la 2.25 nella 2.29, e notando che  $\bar{\sigma}_p = \hat{\sigma}_p - \mathbf{a}$ , si ottiene:

$$\bar{\mathbf{n}}_p^T \left[ \dot{\hat{\sigma}}_p + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \mathbf{a} - \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}} \mathbf{a} - \dot{\mu} \beta - \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\kappa}} \dot{\bar{\kappa}} \bar{\sigma}_p \right] = 0 \quad (2.30)$$

dalla quale si ricava l'espressione di  $\dot{\mu}$ :

$$\dot{\mu} = \frac{\bar{\mathbf{n}}_p^T \left[ \dot{\hat{\sigma}}_p + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \mathbf{a} - \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}} \mathbf{a} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\kappa}} \dot{\bar{\kappa}} \bar{\sigma}_p \right]}{\bar{\mathbf{n}}_p^T \beta} \quad (2.31)$$

Ponendo  $\hat{F} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}}$  ed  $\bar{F} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\kappa}} \dot{\bar{\kappa}}$ , il rapporto  $\frac{\dot{\rho}}{\rho}$  può essere espresso come:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{1}{n} (1 - \rho) \left( \frac{\hat{F}}{\hat{F}} - \frac{\bar{F}}{\bar{F}} \right) \quad (2.32)$$

e quindi la 2.31 può essere riscritta nella seguente forma:

$$\dot{\mu} = \frac{\bar{\mathbf{n}}_p^T \left[ \dot{\hat{\sigma}}_p - \frac{\rho}{n} \left( \frac{\hat{F}}{\hat{F}} - \frac{\bar{F}}{\bar{F}} \right) \mathbf{a} - \frac{\hat{F}}{n \bar{F}} \hat{\sigma}_p \right]}{\bar{\mathbf{n}}_p^T \beta} \quad (2.33)$$

Imponendo  $\dot{\mu} \geq 0$ , e notando che  $\bar{\mathbf{n}}_p^T \boldsymbol{\beta} \geq 0$  per ogni  $\boldsymbol{\sigma}_p$ , dalla 2.33 si ottiene:

$$\bar{\mathbf{n}}_p^T \left[ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_p - \frac{\rho}{n} \left( \frac{\dot{\hat{F}}}{\hat{F}} - \frac{\dot{\bar{F}}}{\bar{F}} \right) \mathbf{a} - \frac{\dot{\bar{F}}}{n\bar{F}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_p \right] \geq 0 \quad (2.34)$$

Assumendo una legge di flusso associata, in modo che il vettore  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  sia normale alla superficie interna, si può scrivere:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \bar{\mathbf{n}}_p \quad (2.35)$$

dove  $\dot{\lambda}$  è una quantità scalare positiva detta moltiplicatore plastico. Se la variazione delle variabili interne d'incrudimento è espressa attraverso una funzione omogenea delle  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  di grado unitario allora valgono le seguenti relazioni:

$$\dot{\bar{\kappa}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \dot{\bar{\kappa}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \bar{\mathbf{n}}_p = \dot{\lambda} \bar{b} \quad (2.36)$$

$$\dot{\hat{\kappa}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \dot{\hat{\kappa}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \bar{\mathbf{n}}_p = \dot{\lambda} \hat{b} \quad (2.37)$$

$$\dot{\bar{\alpha}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \dot{\bar{\alpha}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \bar{\mathbf{n}}_p = \dot{\lambda} \bar{b}_\alpha \quad (2.38)$$

$$\dot{\hat{\alpha}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \dot{\hat{\alpha}}}{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p} \bar{\mathbf{n}}_p = \dot{\lambda} \hat{b}_\alpha \quad (2.39)$$

che possono essere espresse sinteticamente come:

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \mathbf{b} \quad (2.40)$$

Sostituendo queste espressioni nella 2.34 si ottiene:

$$\bar{\mathbf{n}}_p^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}_p \geq \dot{\lambda} \bar{d} \quad (2.41)$$

dove:

$$\bar{d} = \bar{\mathbf{n}}_p^T \left[ \hat{\mathbf{b}}_\alpha + \frac{\rho}{n} \left( \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\kappa}} \hat{b} - \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\kappa}} \bar{b} \right) \mathbf{a} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\kappa}} \bar{b} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_p \right] \quad (2.42)$$

La 2.41 può essere rispettata ponendo:

$$\dot{\lambda} = \frac{\bar{\mathbf{n}}_p^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}_p}{\bar{d} + h} \quad (2.43)$$

dove  $h \geq 0$  è funzione di  $b = \bar{\mathbf{n}}_p^T \boldsymbol{\beta}$ , ovvero della distanza tra lo stato tensionale corrente ed il coniugato. Tale funzione, che deve annullarsi quando  $b = 0$ , entra in gioco nel calcolo del moltiplicatore plastico e permette

quindi di tener conto di un contributo di rigidità elastoplastica del materiale legato alla distanza dello stato tensionale attuale dalla superficie esterna. Inoltre  $h$  deve essere tale da garantire la continuità della rigidità nel passaggio da stati elastici a stati elastoplastici.

Il termine dato dalla somma delle quantità  $\bar{d}$  ed  $h$ , che compare al denominatore nella 2.43, è chiamato anche modulo plastico.

### Alcune considerazioni sulla notazione utilizzata

Lo stato tensionale in un punto può essere rappresentato come un tensore del secondo ordine o in alternativa, come solitamente accade nei codici di calcolo, come un vettore composto da sei componenti di tensione (tre normali e tre tangenziali)<sup>1</sup>:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \tau_{12} & \tau_{13} & \tau_{23} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

La stessa cosa vale per gli stati tensionali relativi ai centri delle superfici precedentemente introdotte:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_{12} & \bar{\alpha}_{13} \\ \bar{\alpha}_{21} & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_{23} \\ \bar{\alpha}_{31} & \bar{\alpha}_{32} & \bar{\alpha}_3 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_{12} & \hat{\alpha}_{13} \\ \hat{\alpha}_{21} & \hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_{23} \\ \hat{\alpha}_{31} & \hat{\alpha}_{32} & \hat{\alpha}_3 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^T = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_3 & \bar{\alpha}_{12} & \bar{\alpha}_{13} & \bar{\alpha}_{23} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}^T = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 & \hat{\alpha}_2 & \hat{\alpha}_3 & \hat{\alpha}_{12} & \hat{\alpha}_{13} & \hat{\alpha}_{23} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

---

<sup>1</sup>Quando viene utilizzata quest'ultima forma di rappresentazione si sta seguendo la notazione di Voigt.

I vettori congiungenti i centri delle superfici ad un generico stato tensionale sono dati da:

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T} - \bar{\mathbf{A}} \quad (2.50)$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{T} - \hat{\mathbf{A}} \quad (2.51)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.52)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.53)$$

e le corrispettive parti deviatoriche valgono:

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{T}} + \bar{p}\mathbf{I} \quad (2.54)$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{T}} + \hat{p}\mathbf{I} \quad (2.55)$$

$$\bar{\mathbf{s}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{p}\boldsymbol{\delta} \quad (2.56)$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{p}\boldsymbol{\delta} \quad (2.57)$$

Nel paragrafo precedente tutte le espressioni sono state scritte utilizzando la notazione di Voigt. Sebbene possa risultare facilmente intuibile che le stesse espressioni restano valide anche nella notazione classica (cioè quella in cui le componenti della tensione vengono riarrangiate in una matrice), è bene chiarire come passare da una notazione all'altra. Ad esempio si consideri la 2.8, che in termini tensoriali diventa:

$$\left. \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\mathbf{T}}} \right|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_d} : \dot{\hat{\mathbf{T}}}_d \leq \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}} \quad (2.58)$$

dove:

$$\left. \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\mathbf{T}}} \right|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_d} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_1} & \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_{12}} & \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_{13}} \\ \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_{21}} & \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_2} & \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_{23}} \\ \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_{31}} & \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_{32}} & \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_3} \end{array} \right] \Bigg|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_d} \quad (2.59)$$

Dal momento che nella notazione di Voigt le componenti della tensione con indici misti sono solo tre, e quindi risulta:

$$\left. \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \right|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_d}^T = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_1} & \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_2} & \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_3} \\ 2 \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_{12}} & 2 \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_{13}} & 2 \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_{23}} \end{array} \right] \Bigg|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_d} \quad (2.60)$$

la 2.8 e la 2.58 portano alla stessa espressione scalare:

$$\left. \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_1} \right|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_d} \dot{\hat{\sigma}}_{d1} + \left. \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_2} \right|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_d} \dot{\hat{\sigma}}_{d2} + \left. \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_3} \right|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_d} \dot{\hat{\sigma}}_{d3} + 2 \left. \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_{12}} \right|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_d} \dot{\hat{\sigma}}_{d12} + 2 \left. \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_{13}} \right|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_d} \dot{\hat{\sigma}}_{d13} + 2 \left. \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\sigma}_{23}} \right|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_d} \dot{\hat{\sigma}}_{d23} \leq \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}} \quad (2.61)$$

Al medesimo risultato si perverebbe seguendo la notazione usata da Hashiguchi (1988), secondo la quale la 2.58 verrebbe scritta nella seguente forma:

$$\text{tr} \left( \frac{\partial f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \hat{\mathbf{T}}} \Big|_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}_d} \cdot \dot{\hat{\mathbf{T}}}_d \right) \leq \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\kappa}} \dot{\hat{\kappa}} \quad (2.62)$$

Nelle espressioni in cui compaiono i moduli dei tensori non c'è invece una esatta corrispondenza tra la notazione classica e quella di Voigt. Si prenda ad esempio la 2.10, che nella notazione classica diventa:

$$\bar{N}_p = \frac{\left. \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\mathbf{T}}} \right|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p}}{\left\| \left. \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\mathbf{T}}} \right|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p} \right\|} \quad (2.63)$$

La 2.10 e la 2.63 non portano alle stesse espressioni scalari; infatti dalla prima risulta:

$$\bar{n}_{p12} = 2 \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\sigma}_{12}} \Big|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p} \left[ \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\sigma}_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\sigma}_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\sigma}_3} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\sigma}_{12}} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\sigma}_{13}} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\sigma}_{23}} \right)^2 \right] \Big|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.64)$$

mentre dalla seconda si ha:

$$\bar{n}_{p12} = \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\sigma}_{12}} \Big|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p} \left[ \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\sigma}_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\sigma}_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\sigma}_3} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\sigma}_{12}} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\sigma}_{13}} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\sigma}_{23}} \right)^2 \right] \Big|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.65)$$

Si noti comunque che le espressioni 2.29, 2.33, 2.34, 2.35 e 2.40 non dipendono dal valore che assume il modulo, e quindi se fossero derivate da equazioni scritte nella notazione classica porterebbero al medesimo risultato. Prendendo ad esempio la 2.33 si può osservare quanto segue:

$$\dot{\mu} = \frac{\bar{\mathbf{n}}_p^T \left[ \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}_p - \frac{\rho}{n} \left( \frac{\dot{F}}{F} - \frac{\dot{F}}{F} \right) \mathbf{a} - \frac{\dot{F}}{nF} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_p \right]}{\bar{\mathbf{n}}_p^T \boldsymbol{\beta}} \frac{\left\| \left. \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p} \right\| \left\| \left. \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\mathbf{T}}} \right|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p} \right\|}{\left\| \left. \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p} \right\| \left\| \left. \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\mathbf{T}}} \right|_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_p} \right\|} = \frac{\bar{N}_p : \left[ \dot{\hat{\mathbf{T}}}_p - \frac{\rho}{n} \left( \frac{\dot{F}}{F} - \frac{\dot{F}}{F} \right) (\bar{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{A}}) - \frac{\dot{F}}{nF} \hat{\mathbf{T}}_p \right]}{\bar{N}_p : (\mathbf{T}_c - \mathbf{T}_p)} \quad (2.66)$$

Si lascia al lettore la verifica che la 2.35 è equivalente alla corrispondente espressione ottenuta utilizzando una notazione classica, e si procede ora con la specializzazione del modello ai terreni a grana fine.

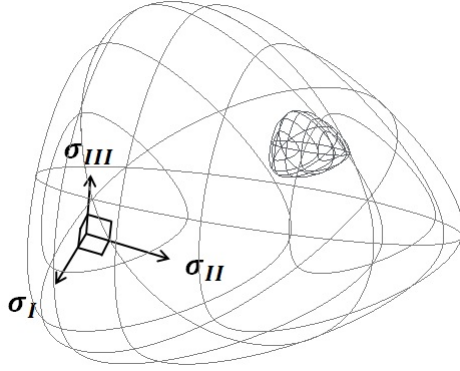


Figura 2.4: Rappresentazione delle superfici del modello nello spazio delle tensioni principali (a tensioni positive corrispondono stati di compressione).

## 2.2 Specializzazione del modello al caso delle argille naturali (Rouainia & Muir Wood)

Nel modello costitutivo di Rouainia & Muir Wood (2000) le superfici del modello assumono, nello spazio delle tensioni principali, la forma di ellissoidi (vedi figura 2.4). Le funzioni  $f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})$  ed  $f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$  sono funzioni omogenee di secondo grado ( $n = 2$ ). Scritte in funzione degli invarianti assumono le seguenti espressioni:

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{\bar{q}^2}{\bar{M}^2} + \bar{p}^2 \quad (2.67)$$

$$f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{\hat{q}^2}{\hat{M}^2} + \hat{p}^2 \quad (2.68)$$

dove:

$$\bar{p} = -\frac{1}{3} \text{tr} \bar{\mathbf{T}} \quad (2.69)$$

$$\hat{p} = -\frac{1}{3} \text{tr} \hat{\mathbf{T}} \quad (2.70)$$

$$\bar{q} = \sqrt{3\bar{J}_2} \quad (2.71)$$

$$\hat{q} = \sqrt{3\hat{J}_2} \quad (2.72)$$

$$\bar{J}_2 = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{S}} \quad (2.73)$$

$$\hat{J}_2 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{S}} : \hat{\mathbf{S}} \quad (2.74)$$

I termini adimensionali  $\bar{M}$  ed  $\hat{M}$  determinano la forma delle due superfici; essi sono funzione dell'angolo di Lode e sono tali da non compromettere l'omogeneità delle funzioni  $f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})$  ed  $f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ . In particolare possono essere scritti



come:

$$\bar{M} = Mm \left[ \frac{2}{(1 + m^\alpha) + (1 - m^\alpha) \sin(3\bar{\theta})} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.75)$$

$$\hat{M} = Mm \left[ \frac{2}{(1 + m^\alpha) + (1 - m^\alpha) \sin(3\hat{\theta})} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (2.76)$$

dove:

$$\bar{\theta} = \frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{3\sqrt{3}\bar{J}_3}{2\bar{J}_2^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.77)$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{3\sqrt{3}\hat{J}_3}{2\hat{J}_2^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.78)$$

$$\bar{J}_3 = \det \bar{\mathbf{S}} \quad (2.79)$$

$$\hat{J}_3 = \det \hat{\mathbf{S}} \quad (2.80)$$

$M$ ,  $m$  ed  $\alpha$  sono parametri del modello. Per garantire la convessità delle superfici l'intervallo di valori che essi possono assumere è limitato.

Le funzioni  $F(\bar{\kappa})$  ed  $F(\hat{\kappa})$  sono anch'esse omogenee di secondo grado, e sono date dalle seguenti relazioni:

$$F(\bar{\kappa}) = \bar{\kappa}^2 \quad (2.81)$$

$$F(\hat{\kappa}) = \hat{\kappa}^2 \quad (2.82)$$

$$\bar{\kappa} = Rp_c \quad (2.83)$$

$$\hat{\kappa} = rp_c \quad (2.84)$$

dove  $r$  e  $p_c$  sono variabili interne denominate rispettivamente grado di struttura (o più semplicemente struttura) e pressione media efficace di riferimento, ed  $R$  è un parametro del modello che, moltiplicato per  $p_c$ , fornisce la dimensione della superficie di snervamento.

Il centro della superficie esterna è espresso come:

$$\hat{\mathbf{A}} = -\hat{\kappa}\mathbf{I} - (r-1)p_c\mathbf{N}_0 \quad (2.85)$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = -\hat{\kappa}\boldsymbol{\delta} - (r-1)p_c\boldsymbol{\eta}_0 \quad (2.86)$$

$$\boldsymbol{\delta}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

dove  $\mathbf{N}_0$  è un tensore deviatorico adimensionale che stabilisce quanto il centro della superficie esterna si discosta

dall'asse idrostatico. Esso è un ulteriore parametro del modello, e si può dimostrare che le sue componenti non sono tutte linearmente indipendenti.

Definendo le deformazioni incrementali plastiche come:

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1^p & \dot{\varepsilon}_{12}^p & \dot{\varepsilon}_{13}^p \\ \dot{\varepsilon}_{21}^p & \dot{\varepsilon}_2^p & \dot{\varepsilon}_{23}^p \\ \dot{\varepsilon}_{31}^p & \dot{\varepsilon}_{32}^p & \dot{\varepsilon}_3^p \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

$$(\dot{\varepsilon}^p)^T = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1^p & \dot{\varepsilon}_2^p & \dot{\varepsilon}_3^p & \dot{\gamma}_{12}^p & \dot{\gamma}_{13}^p & \dot{\gamma}_{23}^p \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

ed introducendo i seguenti invarianti di deformazione plastica volumetrica e deviatorica:

$$\dot{\varepsilon}_p^p = -\dot{\mathbf{E}}^p : \mathbf{I} \quad (2.90)$$

$$\dot{\varepsilon}_q^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}}_s^p : \dot{\mathbf{E}}_s^p} \quad (2.91)$$

dove  $\dot{\mathbf{E}}_s^p$  è il tensore deviatorico delle deformazioni incrementali plastiche:

$$\dot{\mathbf{E}}_s^p = \dot{\mathbf{E}}^p + \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_p^p \mathbf{I} \quad (2.92)$$

dall'applicazione della 2.35, che riscritta in termini tensoriali diviene:

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{\lambda} \bar{\mathbf{N}}_p \quad (2.93)$$

si ottiene:

$$\dot{\varepsilon}_p^p = \dot{\lambda} \bar{n}_{pp} \quad (2.94)$$

$$\dot{\varepsilon}_q^p = \dot{\lambda} \bar{n}_{pq} \quad (2.95)$$

$$\bar{n}_{pp} = -\bar{\mathbf{N}}_p : \mathbf{I} \quad (2.96)$$

$$\bar{n}_{pq} = \sqrt{\frac{2}{3} \left( \bar{\mathbf{N}}_p + \frac{1}{3} \bar{n}_{pp} \mathbf{I} \right) : \left( \bar{\mathbf{N}}_p + \frac{1}{3} \bar{n}_{pp} \mathbf{I} \right)} \quad (2.97)$$

A questo punto si introducono le leggi che esprimono la dipendenza delle variabili interne dalle deformazioni plastiche. Queste leggi, che in Rouainia & Muir Wood (2000) sono espresse direttamente in forma incrementale,

sono tali per cui risulta che le  $\dot{\kappa}$  siano funzioni omogenee di grado unitario delle  $\dot{\varepsilon}^p$ :

$$\frac{\dot{p}_c}{p_c} = \frac{\dot{\varepsilon}_p^p}{\lambda^* - \kappa^*} \quad (2.98)$$

$$\frac{\dot{r}}{r-1} = -\frac{k}{\lambda^* - \kappa^*} \dot{\varepsilon}_d \quad (2.99)$$

Le grandezze adimensionali  $\lambda^*$  e  $\kappa^*$  sono parametri del modello, e rappresentano le pendenze di due rette sul piano  $\varepsilon_p - \ln p$ .  $k$  è un ulteriore parametro che rappresenta la velocità con cui decade  $r$  in funzione di  $\dot{\varepsilon}_d$ , grandezza che tiene conto sia delle deformazioni plastiche volumetriche che di quelle deviatoriche, pesate attraverso il parametro  $A_d$ :

$$\dot{\varepsilon}_d = \sqrt{(1 - A_d) (\dot{\varepsilon}_p^p)^2 + A_d (\dot{\varepsilon}_q^p)^2} \quad (2.100)$$

$$\bar{n}_d = \sqrt{(1 - A_d) (\bar{n}_{pp})^2 + A_d (\bar{n}_{pq})^2} \quad (2.101)$$

Ci sono quindi tutti gli ingredienti necessari per ricavare le 2.40:

$$R\dot{p}_c = \dot{\lambda}\bar{b} = \dot{\lambda} \frac{Rp_c}{\lambda^* - \kappa^*} \bar{n}_{pp} \quad (2.102)$$

$$\dot{r}p_c + r\dot{p}_c = \dot{\lambda}\hat{b} = \dot{\lambda} \frac{rp_c}{\lambda^* - \kappa^*} \left( \bar{n}_{pp} - k \frac{r-1}{r} \bar{n}_d \right) \quad (2.103)$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda}\bar{b}_\alpha = \dot{\alpha} + \left( \frac{\dot{p}_c}{p_c} + \frac{\dot{r}}{r-R} \right) \mathbf{a} + \dot{\mu}\boldsymbol{\beta} \quad (2.104)$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda}\hat{b}_\alpha = \dot{\lambda} \left( -\hat{b}\boldsymbol{\delta} - \hat{b}\boldsymbol{\eta}_0 + \frac{\bar{b}}{R}\boldsymbol{\eta}_0 \right) \quad (2.105)$$

La 2.104 è stata ottenuta dalla 2.25, avendo posto:

$$\frac{\dot{F}}{\bar{F}} = 2 \frac{\dot{p}_c}{p_c} \quad (2.106)$$

$$\frac{\dot{\hat{F}}}{\hat{F}} = 2 \left( \frac{\dot{p}_c}{p_c} + \frac{\dot{r}}{r} \right) \quad (2.107)$$

$$\rho = \frac{r}{r-R} \quad (2.108)$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \frac{\dot{r}}{r} \frac{R}{R-r} \quad (2.109)$$

Dalla 2.33 si ottiene l'espressione di  $\dot{\mu}$ :

$$\dot{\mu} = \frac{\bar{\mathbf{n}}_p^T \left[ \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}_p - \left( \frac{\dot{p}_c}{p_c} + \frac{\dot{r}}{r-R} \right) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_p + \frac{\dot{r}}{r-R} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_p \right]}{\bar{\mathbf{n}}_p^T \boldsymbol{\beta}} = \frac{\bar{\mathbf{n}}_p^T \left[ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_p - \dot{\alpha} - \left( \frac{\dot{p}_c}{p_c} + \frac{\dot{r}}{r-R} \right) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_p + \frac{\dot{r}}{r-R} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_p \right]}{\bar{\mathbf{n}}_p^T \boldsymbol{\beta}} \quad (2.110)$$

Dalla 2.42 si ricava:

$$\bar{d} = \bar{\mathbf{n}}_p^T \left[ \hat{\mathbf{b}}_\alpha + \frac{r}{r-R} \left( \frac{\hat{b}}{rp_c} - \frac{\bar{b}}{Rp_c} \right) \mathbf{a} + \frac{\bar{b}}{Rp_c} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_p \right] \quad (2.111)$$

La grandezza  $h$ , che compare nell'espressione del moltiplicatore plastico (equazione 2.43), deve dipendere dalla distanza tra le due superfici del modello; minore è la distanza maggiore dovrebbe essere la deformabilità. Introducendo le quantità scalari  $b$  e  $b_{max}$ , che quantificano rispettivamente l'attuale e la massima distanza tra lo stato tensionale corrente ed il suo coniugato sulla superficie esterna (scalate rispetto alla direzione del versore normale)<sup>2</sup>:

$$b = \bar{\mathbf{n}}_p^T \boldsymbol{\beta} \quad (2.112)$$

$$b_{max} = 2 \frac{r-R}{R} \bar{\mathbf{n}}_p^T \boldsymbol{\beta} \quad (2.113)$$

è possibile far dipendere  $h$  in modo proporzionale al rapporto  $\frac{b}{b_{max}}$ , in modo tale che esso si riduca man mano che le superfici del modello tendono ad avvicinarsi.

Prendendo in considerazione la relazione proposta da Rouainia & Muir Wood (2000), e tenendo conto del fatto che ci debba essere continuità tra rigidità elastica ed elastoplastica, viene proposta la seguente espressione:

$$h = \frac{Bp_c}{(\lambda^* - \kappa^*) R} \left( \frac{b}{b_{max}} \right)^\psi \left( \frac{b_0}{b_0 - b} \right)^{\psi_2} \quad (2.114)$$

dove  $b_0$  indica il valore assunto da  $b$  nel più recente passaggio da stato elastico ad elastoplastico. La differenza sostanziale rispetto all'equazione proposta in Rouainia & Muir Wood (2000) sta nell'ultimo termine, senza il quale la continuità della rigidità non sarebbe soddisfatta.

L'idea di introdurre il rapporto  $\frac{b_0}{b_0 - b}$  è scaturita in seguito alla lettura dell'articolo di Grammatikopoulou et al. (2006), in cui gli autori, probabilmente ispirati da Kavvas & Amorosi (2000), affrontano il problema della discontinuità della rigidità nella transizione elastoplastica cui sono affetti i modelli costitutivi di Al-Tabbaa & Muir Wood (1989) e di Stallebrass & Taylor (1997). Oltre alla correzione del modulo plastico però, Grammatikopoulou et al. (2006) propongono anche di considerare due superfici di plasticizzazione diverse a seconda che le superfici del modello costitutivo si trovino o meno a contatto tra loro: questa idea, essendo discutibile in quanto viola i principi della meccanica del continuo, non è stata presa in considerazione nella presente tesi.

Rimane infine da definire il comportamento elastico, che non solo descrive la risposta del modello quando lo stato tensionale si muove all'interno della superficie di plasticizzazione, ma influisce anche sul comportamento

---

<sup>2</sup>Per essere più precisi, per come viene qui definito,  $b_{max}$  è la componente della massima distanza che si avrebbe se il parametro  $m$  fosse unitario.

elastoplastico. Come nella versione originale del modello, il legame elastico è assunto di tipo isotropo non lineare, dipendente dalla pressione media efficace in maniera che la rigidezza sia più elevata per stati soggetti a confinamento maggiore. Il legame tra gli incrementi di tensione ed i corrispettivi incrementi di deformazione elastica è dato da:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (2.115)$$

dove  $\mathbf{D}$  indica la matrice elastica:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

Nella matrice elastica compaiono il modulo di compressibilità volumetrica  $K$  e quello di rigidezza tangenziale  $G$ :

$$K = \frac{p}{\kappa^*} \quad (2.117)$$

$$G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}K \quad (2.118)$$

che sono funzioni degli unici due parametri elastici,  $\kappa^*$  e  $\nu$ .



## Capitolo 3

# Implementazione e studio parametrico

Il modello costitutivo è stato implementato in linguaggio Fortran attraverso lo sviluppo di una subroutine UMAT utilizzabile in Abaqus/Standard, la quale verrà brevemente illustrata nel paragrafo 3.1. L'integrazione delle leggi costitutive è di tipo esplicito ed è eseguita attraverso lo schema di Eulero modificato con controllo automatico dell'errore. La scelta di utilizzare uno schema esplicito anziché implicito è stata fatta per i seguenti motivi:

- l'implementazione di tipo esplicito richiede solitamente meno sforzo e minor tempo, in quanto non sono necessarie le derivate del secondo ordine del potenziale plastico;
- il legame ipoelastico solitamente non si presta bene ai metodi d'implementazione impliciti;
- l'introduzione di una variabile che tenga conto del più recente passaggio elastoplastico ( $b_0$  nella equazione 2.114) potrebbe creare una ulteriore complicazione qualora si scegliesse un metodo implicito.

Inoltre alcuni studi hanno dimostrato che lo schema esplicito, sicuramente meno elegante di quello implicito (per un confronto tra i due metodi si veda Hu & Liu 2014), può risultare comunque accurato ed affidabile: a tal proposito si vedano ad esempio i lavori di Abbo (1997) e Potts & Ganendra (1994).

Il corretto funzionamento della subroutine è stato verificato effettuando dei confronti con alcune precedenti implementazioni, e i risultati di uno di questi confronti sono riportati nel paragrafo 3.2. In seguito è stata analizzata l'influenza dei parametri sulla risposta costitutiva, che è di fondamentale importanza per poter attribuire un significato fisico alle diverse grandezze in gioco; i risultati di quest'analisi sono mostrati nel paragrafo 3.3.

### 3.1 Schemi degli algoritmi utilizzati

Gli algoritmi adottati nell'implementazione sono fortemente ispirati a quelli pubblicati in Sloan et al. (2001), sebbene in alcuni casi siano stati leggermente modificati. Oltre alla subroutine principale UMAT sono state scritte

diverse subroutine “satelliti”, ognuna delle quali serve a svolgere una determinata operazione, come ad esempio calcolare gli invarianti della tensione (KQINV) oppure ricavare il vettore normale alla superficie di snervamento in un dato punto (KDF). Nel seguito verranno illustrati gli schemi di funzionamento delle subroutine ritenute più importanti.

In figura 3.2 è riportato lo schema della UMAT, il cui scopo principale è quello di calcolare gli incrementi dello stato tensionale (ed eventualmente delle variabili di stato) che conseguono ad un assegnato incremento di deformazione; tra le variabili in ingresso quindi abbiamo il vettore  $\sigma$ , che rappresenta lo stato tensionale corrente, il vettore delle variabili di stato  $\kappa$ , contenente  $p_c$ ,  $r$  ed  $\bar{\alpha}^1$ , e l’incremento di deformazione  $\dot{\epsilon}$ , oltre ovviamente ai parametri costitutivi ed ad una serie di altre grandezze; in uscita avremo, oltre alla matrice di rigidezza, i valori aggiornati di  $\sigma$  e  $\kappa$ .

La prima operazione che viene svolta dalla UMAT è di controllo: attraverso la subroutine KADM, riportata in dettaglio in figura 3.3, si verifica l’ammissibilità dei valori assunti da  $\sigma$  e  $\kappa$ . Quest’operazione è fondamentale soprattutto nel primo step, dato che le condizioni iniziali vengono solitamente definite dall’utente (in modo diretto oppure tramite le subroutine SIGINI e SDVINI) e possono quindi essere soggette ad errore. I requisiti che devono essere rispettati sono i seguenti:

- lo stato tensionale  $\sigma$  deve trovarsi all’interno (o al più sulla frontiera) della superficie di snervamento;
- la superficie interna non deve intersecare la superficie esterna.

Per verificare il rispetto di quest’ultima condizione, il caso in cui le due superfici sono concentriche è stato considerato a parte: in questa circostanza infatti è sufficiente verificare che la dimensione della superficie esterna, proporzionale ad  $rp_c$ , sia maggiore o al limite uguale di quella interna, proporzionale a  $Rp_c$ .

Ad ogni step di calcolo, a meno che non vengano date istruzioni particolari, il primo ingresso nella UMAT ha lo scopo di costruire la matrice di rigidezza globale<sup>2</sup>, che viene poi utilizzata per ricavare gli spostamenti nodali e di conseguenza gli incrementi di deformazione. A questo punto si entra nuovamente nella UMAT, e per ogni singolo punto di Gauss l’incremento di deformazione  $\dot{\epsilon}$  (ricavato poco prima) viene utilizzato per calcolare il corrispondente stato tensionale elastico  $\sigma_{de}$ , ovvero lo stato tensionale a cui quel determinato  $\dot{\epsilon}$  condurrebbe nel caso in cui si rimanesse in campo elastico. Questo calcolo viene svolto dalla subroutine KDEL, che ricava l’incremento tensionale utilizzando la matrice elastica secante. In alternativa si può effettuare un calcolo iterativo utilizzando la rigidezza elastica tangente. A scopo informativo si riportano di seguito le espressioni della rigidezza tangente e di quella secante per il classico modello di Cam-Clay, scritte in termini di modulo di compressibilità

---

<sup>1</sup>A rigore le variabili di stato dovrebbero essere  $\bar{\kappa} = Rp_c$ ,  $\hat{\kappa} = rp_c$  e  $\bar{\alpha}$ , ma nell’implementazione si è scelto di considerare separatamente l’incrudimento di  $p_c$  e quello di  $r$ .

<sup>2</sup>La matrice di rigidezza globale viene costruita a partire dalle matrici di rigidezza calcolate in corrispondenza dei punti di Gauss.



volumetrica:

$$K = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon_p^e} = \frac{vp}{\kappa} \quad (3.1)$$

$$K_{de} = \frac{\Delta p}{\Delta \varepsilon_p^e} = \frac{p_0}{\Delta \varepsilon_p^e} \left[ \exp \left( \frac{v}{\kappa} \Delta \varepsilon_p^e \right) - 1 \right] \quad (3.2)$$

che possono essere confrontate con quelle utilizzate in questa tesi, derivanti dall'aver assunto un legame lineare sul piano  $\ln p - \varepsilon_p^e$ :

$$K = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon_p^e} = \frac{p}{\kappa^*} \quad (3.3)$$

$$K_{de} = \frac{\Delta p}{\Delta \varepsilon_p^e} = \frac{p_0}{\Delta \varepsilon_p^e} \left[ \exp \left( \frac{1}{\kappa^*} \Delta \varepsilon_p^e \right) - 1 \right] \quad (3.4)$$

Si ricorda inoltre che il modulo di rigidezza tangenziale vale:

$$G = \frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \quad (3.5)$$

Il valore  $\sigma_{de}$  ottenuto potrebbe trovarsi all'interno della superficie di snervamento (o al limite giacere sul suo confine): questo comporterebbe la permanenza in campo elastico, e in questa circostanza l'unica ulteriore istruzione da eseguire sarebbe l'aggiornamento di  $\sigma$ . Viceversa  $\sigma_{de}$  potrebbe risultare esterno alla superficie: in tal caso ci troveremmo necessariamente in una delle situazioni rappresentate in figura 3.1, e un'integrazione elastoplastica sarebbe necessaria. Nel caso in cui lo stato tensionale di partenza fosse interno alla superficie di snervamento (caso a) bisognerebbe per prima cosa identificare il punto in corrispondenza del quale il percorso tensionale elastico interseca la superficie e quindi ricavare il corrispondente stato tensionale  $\sigma_y$ : quest'operazione, detta "ricerca dello zero di una funzione", può essere svolta applicando il metodo "Pegasus" proposto da Dowell e Jarratt nel 1972.

Data una funzione  $f(\alpha)$  che cambia di segno in un dato intervallo, lo schema "Pegasus" (figura 3.4) consente di trovare il valore di  $\alpha$  (interno all'intervallo) per cui tale funzione si annulla. Si parte considerando due valori  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  tali per cui  $f(\alpha_0) < 0$  e  $f(\alpha_1) > 0$ , quindi si linearizza la funzione e si ricava il valore di  $\alpha$  corrispondente all'intersezione con l'asse delle ascisse:

$$\alpha = \alpha_1 - f(\alpha_1) \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{f(\alpha_1) - f(\alpha_0)} \quad (3.6)$$

Sulla base del segno di  $f(\alpha)$  l'intervallo viene opportunamente ridotto e viene effettuata una nuova linearizzazione. Il procedimento si ripete finché non risulta  $f(\alpha) = 0$ . Ovviamente  $f$  rappresenta la funzione della superficie

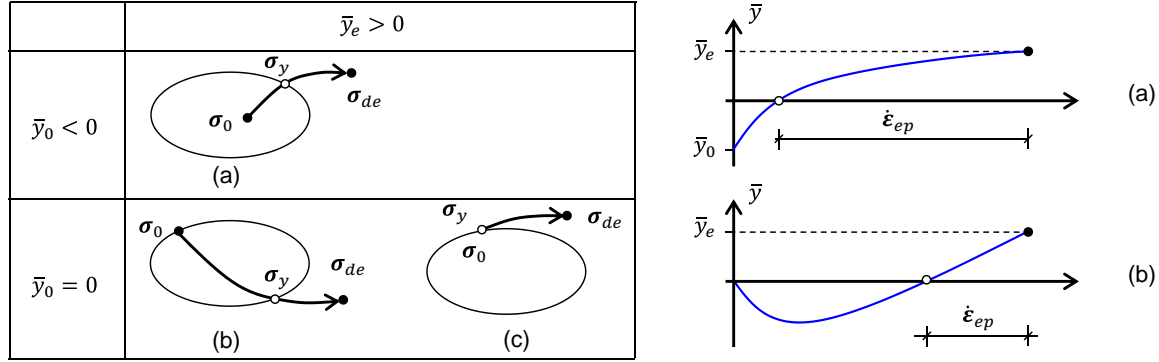


Figura 3.1: Percorsi tensionali elastoplastici.

di snervamento  $\bar{y}$ , mentre ad un generico  $\alpha$  corrisponde un incremento di deformazione  $\alpha\dot{\epsilon}$ , a cui a sua volta corrisponde un dato incremento di tensione elastico che porta a  $\sigma_y$ .

Nel caso in cui lo stato tensionale di partenza si trovi invece sulla frontiera della superficie di snervamento occorre distinguere il caso in cui il percorso tensionale è esterno alla superficie (caso c di figura 3.1) da quello in cui è previsto un rientro in campo elastico (caso b di figura 3.1). Nel primo caso lo stato tensionale iniziale coincide con quello di snervamento e quindi si può porre  $\alpha = 0$ . Nel secondo caso è possibile ricavare  $\alpha$  (e quindi  $\sigma_y$ ) ricorrendo alla subroutine KUNL (vedi figura 3.5), la quale al suo interno contiene l'algoritmo "Pegasus".

Una volta individuato il valore di  $\alpha$  a cui corrisponde il passaggio di stato, essendo  $\alpha\dot{\epsilon}$  l'incremento di deformazione che porta lo stato tensionale dal valore iniziale al valore  $\sigma_y$ , il complementare  $\dot{\epsilon}_{ep} = (1 - \alpha)\dot{\epsilon}$  sarà quello con cui dovrà essere eseguita l'integrazione elastoplastica. Come già accennato l'integrazione è effettuata col metodo di Eulero modificato (schema di figura 3.6), suddividendo  $\dot{\epsilon}_{ep}$  in piccole parti  $\dot{\epsilon}_n = \Delta t \dot{\epsilon}_{ep}$  e linearizzando il problema attraverso l'uso della rigidità elastica tangente. Per capire come funziona lo schema si pensi di essere arrivati ad un punto in cui il vettore delle tensioni vale  $\sigma_n$  e quello delle variabili di stato vale  $\kappa_n$ . Dato un incremento  $\dot{\epsilon}_n$ , attraverso la subroutine KEP si calcolano i corrispondenti incrementi  $\dot{\sigma}_1$  e  $\dot{\kappa}_1$ :

$$\dot{\sigma}_1 = D_{ep}\dot{\epsilon}_n = \left( D_e - \frac{D_e \bar{\mathbf{n}} \bar{\mathbf{n}}^T D_e}{\bar{\mathbf{n}}^T D_e \bar{\mathbf{n}} + \bar{d} + h} \right) \dot{\epsilon}_n \quad (3.7)$$

$$\dot{\kappa}_1 = \dot{\lambda} \mathbf{b} = \left( \frac{\bar{\mathbf{n}}^T D_e \dot{\epsilon}_n}{\bar{\mathbf{n}}^T D_e \bar{\mathbf{n}} + \bar{d} + h} \right) \mathbf{b} \quad (3.8)$$

dove  $D_{ep}$  è la matrice elastoplastica,  $D_e$  è la matrice elastica (tangente),  $\bar{\mathbf{n}}$  è il versore normale alla superficie di plasticizzazione (calcolato in  $\sigma_n$ ) e  $\dot{\lambda}$  è il moltiplicatore plastico. Per  $\mathbf{b}$  (funzione di  $\sigma_n$  e  $\kappa_n$ ),  $\bar{d}$  e  $h$  si vedano le equazioni 2.102, 2.103, 2.104, 2.111 e 2.114.

Successivamente vengono calcolate le quantità:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{\sigma}_n + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_1 = \boldsymbol{\kappa}_n + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_1 \quad (3.10)$$

e, utilizzando come valori di partenza  $\boldsymbol{\sigma}_1$ ,  $\boldsymbol{\kappa}_1$  e  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_n$ , il calcolo degli incrementi viene ripetuto, ottenendo:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_2 = D_{ep}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_n \quad (3.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_2 = \dot{\lambda}\mathbf{b} \quad (3.12)$$

A questo punto viene calcolato l'errore relativo  $e$ , che sarà tanto maggiore quanto più i due incrementi precedentemente calcolati differiscono tra loro (ma comunque non minore di un valore prefissato  $e_{ps}$ ):

$$e_\sigma = \frac{1}{2} \frac{|\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_2|}{|\boldsymbol{\sigma}_n + \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_2}{2}|} \quad (3.13)$$

$$e_\kappa = \frac{1}{2} \frac{|\dot{\boldsymbol{\kappa}}_1 - \dot{\boldsymbol{\kappa}}_2|}{|\boldsymbol{\kappa}_n + \frac{\dot{\boldsymbol{\kappa}}_1 + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_2}{2}|} \quad (3.14)$$

$$e = \max(e_\sigma, e_\kappa, e_{ps}) \quad (3.15)$$

Se l'errore risulta superiore ad una data tolleranza il calcolo viene rieseguito adottando un  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_n$  minore; in caso contrario lo stato tensionale e le variabili di stato vengono aggiornate assegnando:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \frac{\dot{\boldsymbol{\sigma}}_1 + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_2}{2} \quad (3.16)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{n+1} = \boldsymbol{\kappa}_n + \frac{\dot{\boldsymbol{\kappa}}_1 + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_2}{2} \quad (3.17)$$

e l'integrazione prosegue con un nuovo incremento  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{n+1}$ . Il procedimento termina quando la somma degli incrementi  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_n$  per i quali l'errore sia risultato accettabile eguaglia la quantità  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{ep}$ .

Come si può notare in figura 3.6, la scelta del valore del nuovo incremento  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_n$  viene fatta di volta in volta basandosi sull'entità dell'errore ricavato nella linearizzazione precedente. Inoltre lo schema contiene una subroutine KCOR che serve a correggere i valori assunti dallo stato tensionale e dalle variabili di stato nel caso in cui questi non rispettino (entro i limiti previsti) la condizione di appartenenza alla superficie di plasticizzazione.

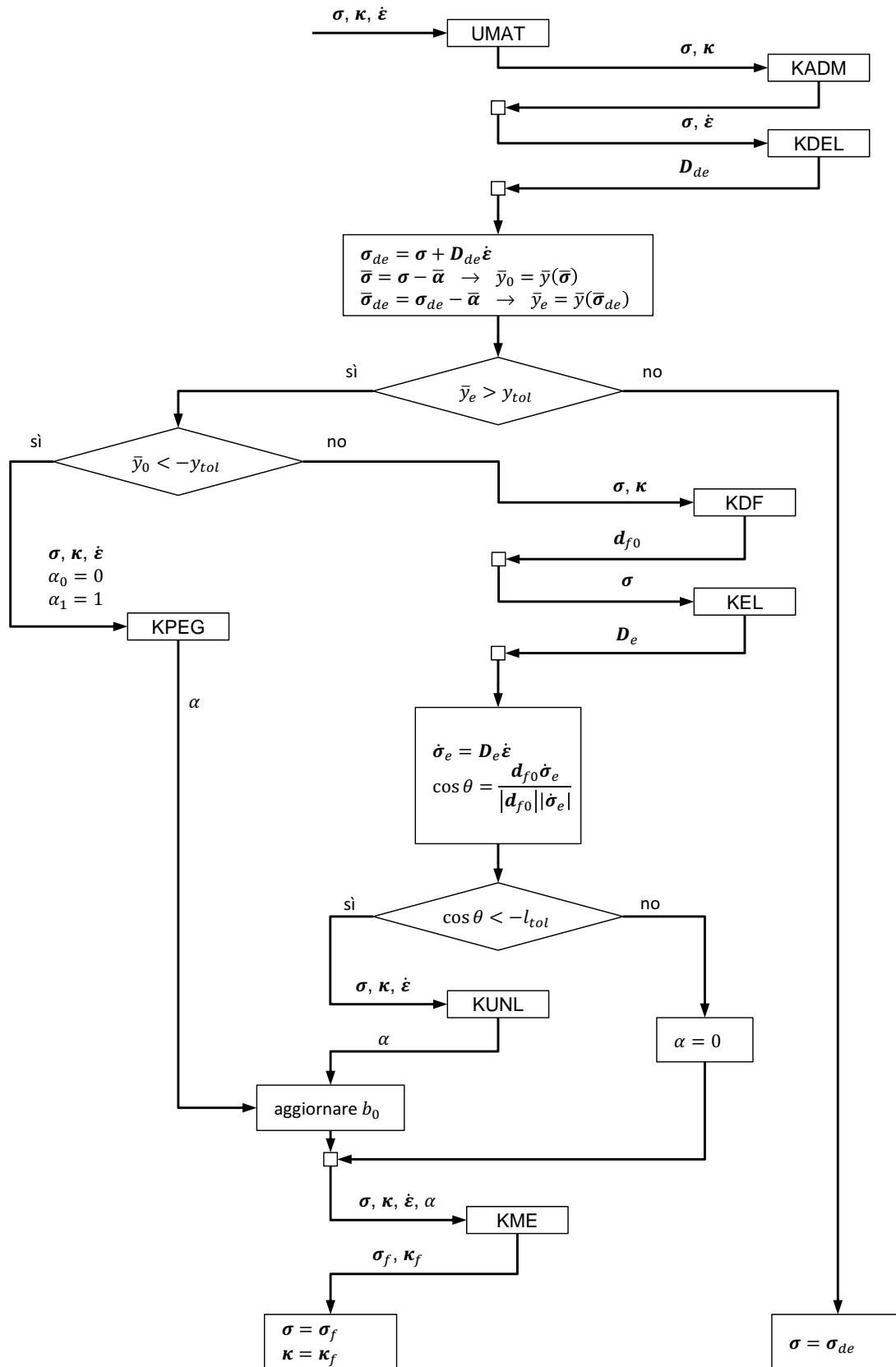


Figura 3.2: Subroutine principale (UMAT).

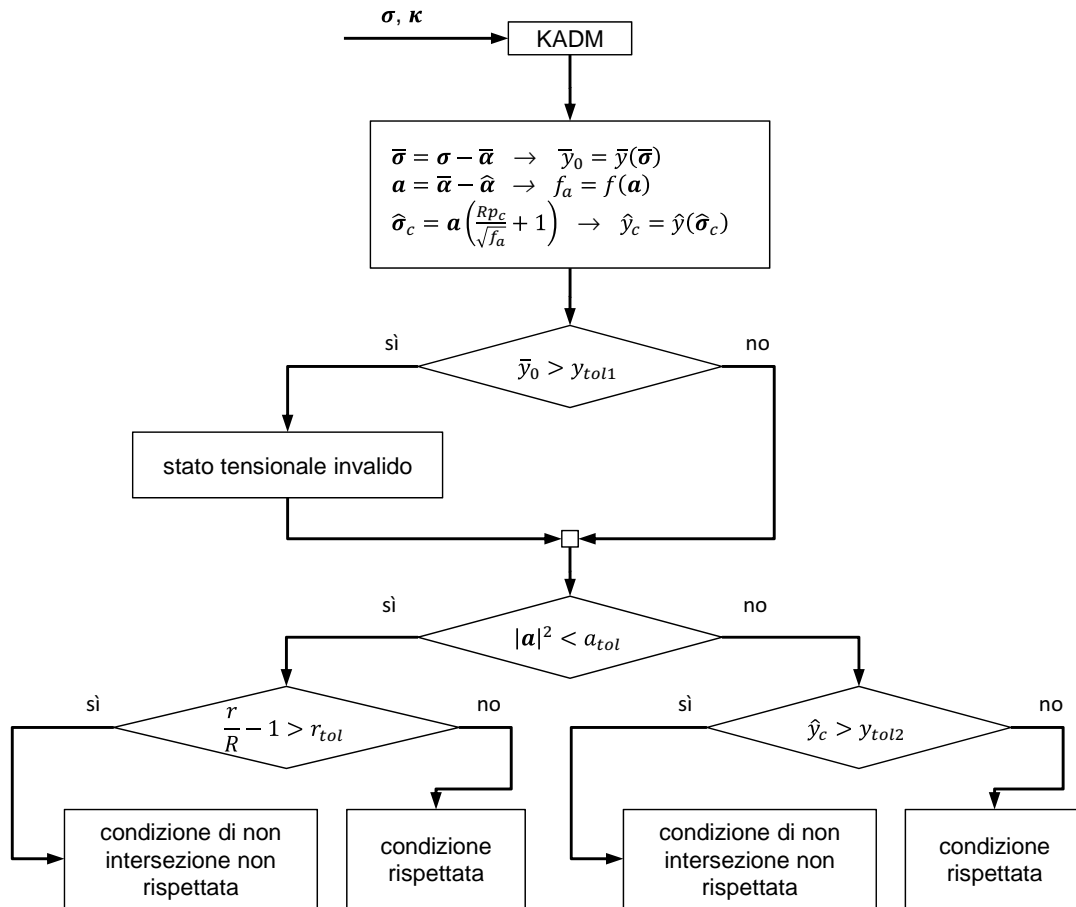


Figura 3.3: Subroutine per il controllo dell'ammissibilità dello stato tensionale e delle variabili di stato (KADM).

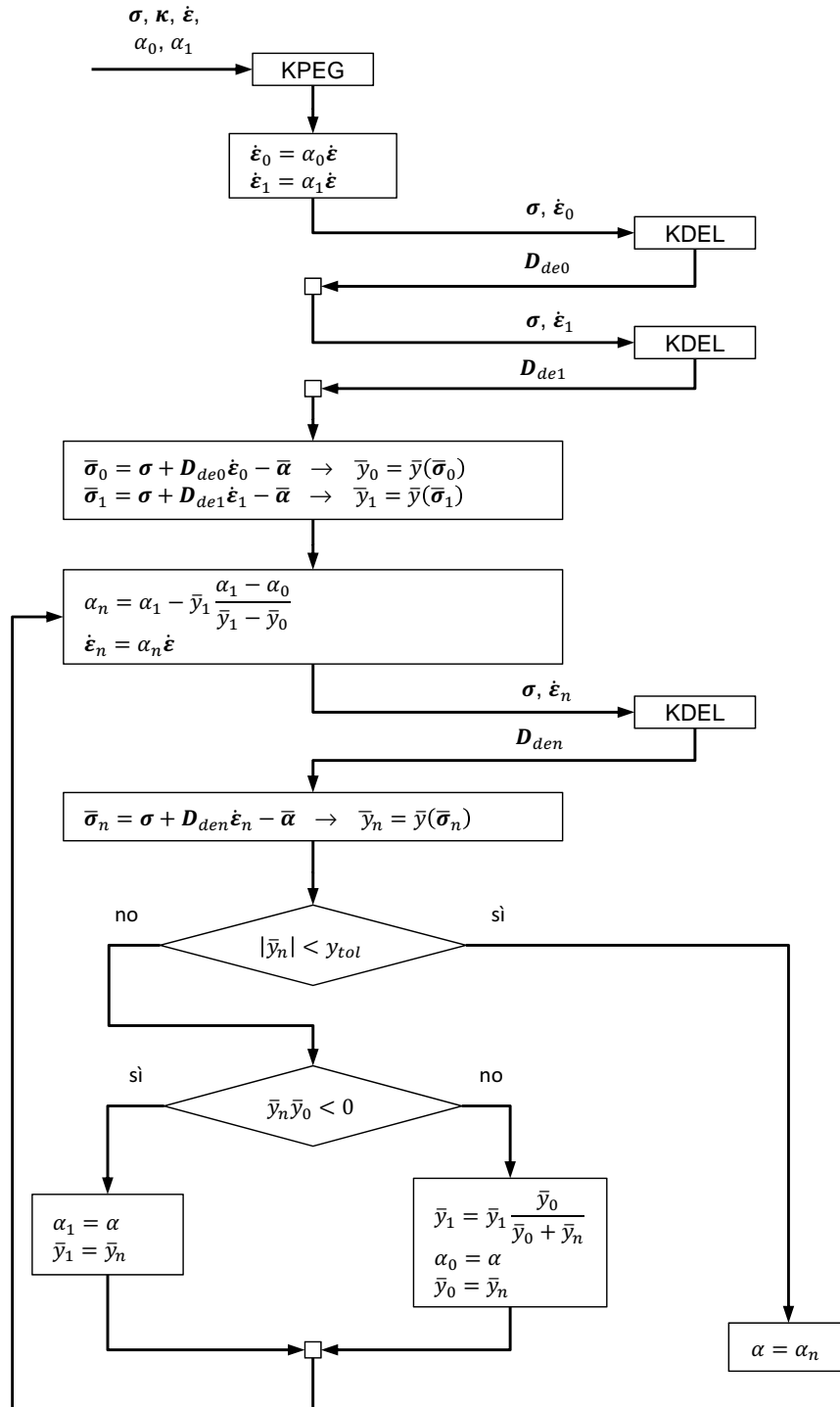


Figura 3.4: Subroutine per la ricerca dello zero (KPEGASUS).

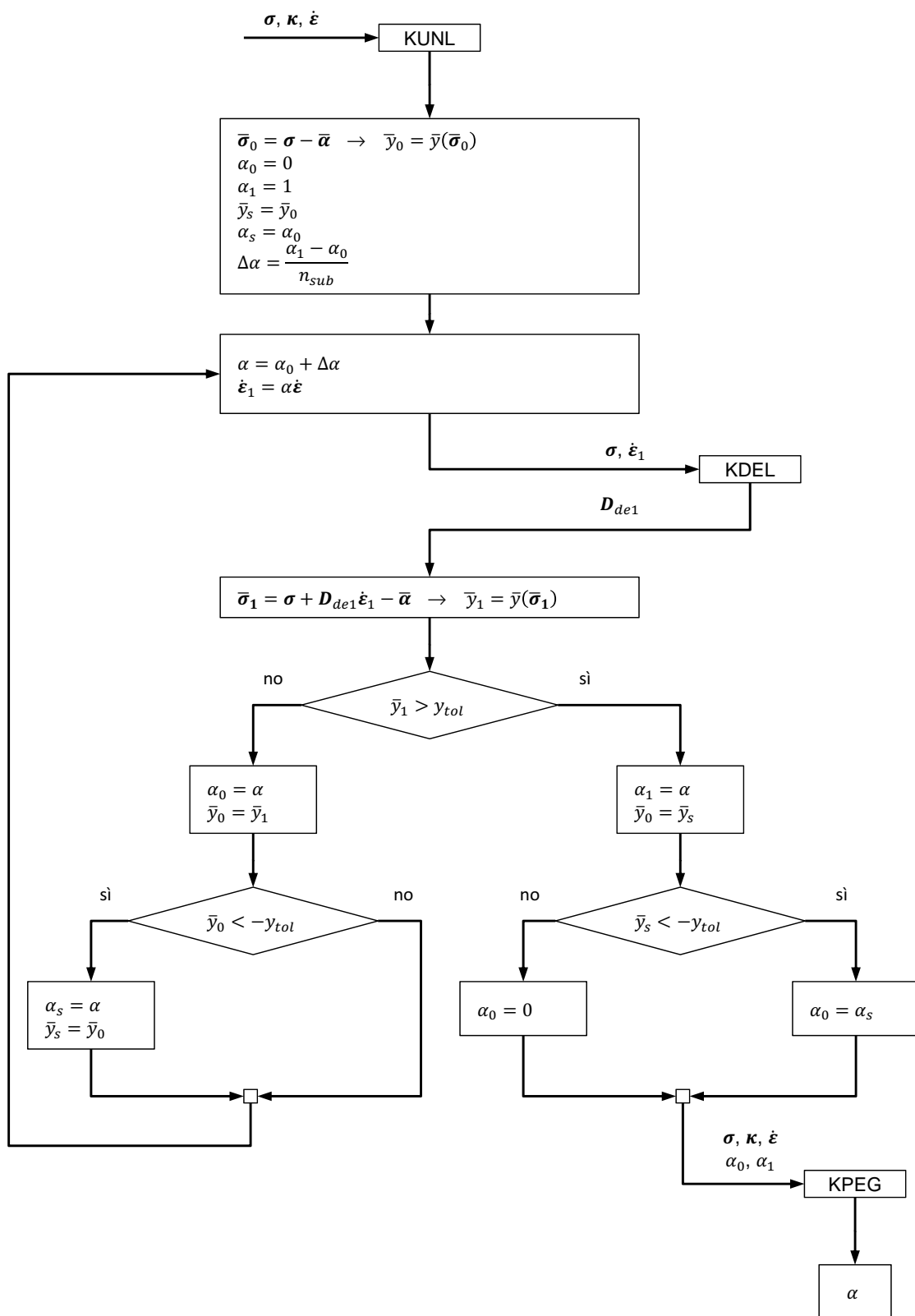


Figura 3.5: Subroutine per la ricerca dello zero nel caso di rientro in campo elastico (KUNL).

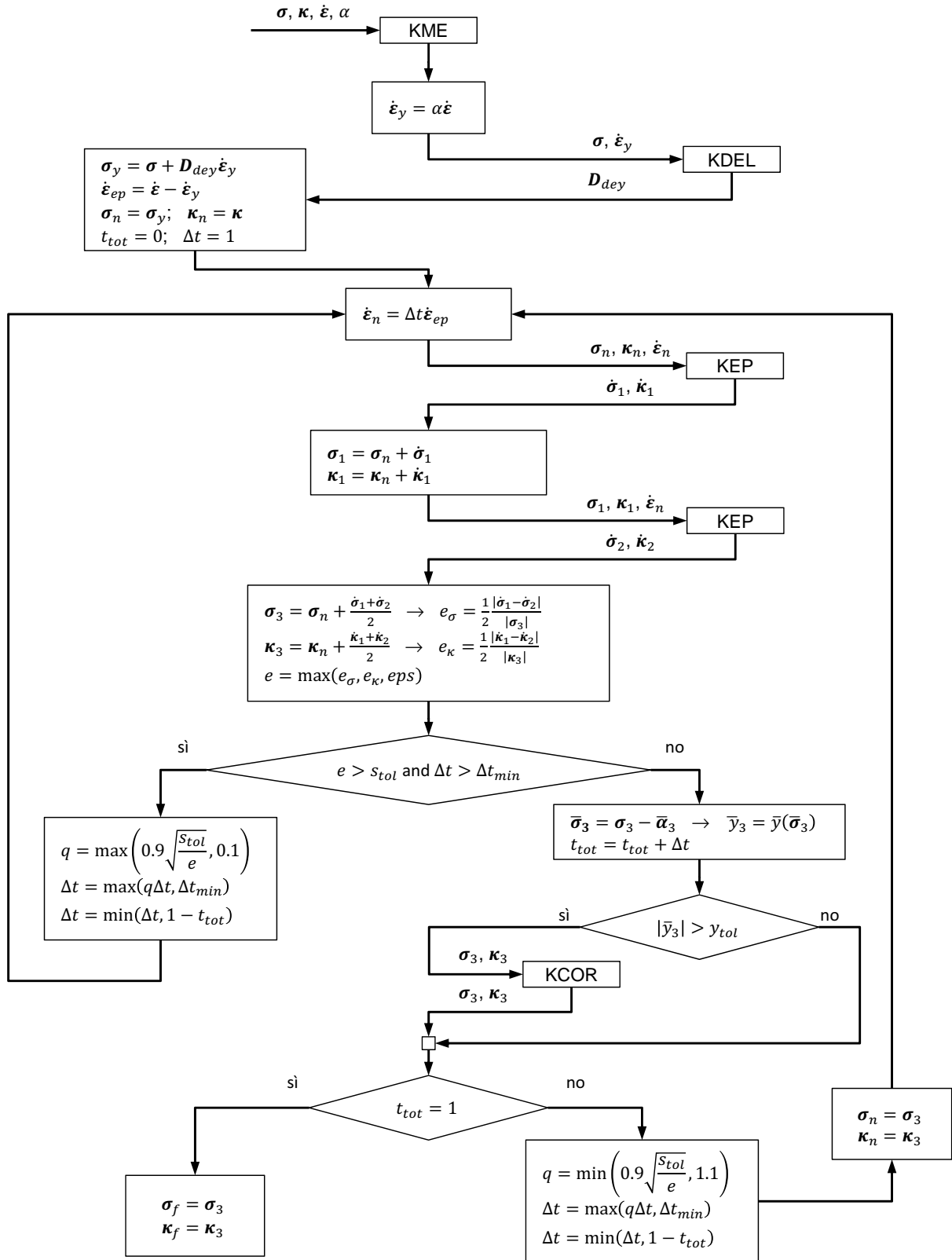


Figura 3.6: Subroutine per l'integrazione elastoplastica col metodo di Eulero modificato (KME).



### 3.2 Confronto con una precedente implementazione

Per verificare la corretta implementazione del modello costitutivo sono stati fatti alcuni confronti coi risultati di precedenti implementazioni, e sono stati presi in considerazione diversi autori, tra cui Rouainia & Muir Wood (2000), Zhao et al. (2005), Bing (2007) e Cocciuti (1999). Nonostante si siano eseguite molte prove, qui si riporta solamente il confronto fatto coi risultati ottenuti da Cocciuti (1999), che fra tutti è quello ritenuto più significativo in quanto la legge d'incrudimento cinematico utilizzata dall'autore è uguale a quella ricavata nel capitolo precedente (equazione 2.104), mentre invece la legge d'incrudimento utilizzata dagli altri autori è differente e soprattutto non assicura la non intersezione delle superfici del modello.

Le sole differenze che intercorrono tra le equazioni costitutive ricavate in questa tesi e quelle usate da Cocciuti (1999) stanno nel termine  $h$ , grandezza che compare come addendo nell'espressione del modulo plastico. Nel presente lavoro viene infatti proposta la seguente relazione:

$$h = \frac{Bp_c}{(\lambda^* - \kappa^*)R} \left( \frac{b}{b_{max}} \right)^\psi \left( \frac{b_0}{b_0 - b} \right)^{\psi_2} \quad (3.18)$$

mentre in Cocciuti (1999) viene utilizzata l'espressione:

$$h_2 = \frac{p_c^2}{\left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{T}} \right\|^2} \frac{B_2 p_c}{(\lambda^* - \kappa^*)R} \left( \frac{b}{b_{max}} \right)^\psi \quad (3.19)$$

Per fare il confronto è stato utilizzato  $h_2$  in luogo di  $h$ , in modo tale da eliminare qualsiasi differenza sulle leggi costitutive; quindi si sono effettuate alcune analisi parametriche, che comprendono simulazioni di prove edometriche e di prove triassiali, ed è stata riscontrata una perfetta coincidenza di risultati. A titolo d'esempio si mostrano i diagrammi ottenuti dalla simulazione di prove triassiali non drenate relative al caso in cui si è posto  $r = 3$  (figure 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10).

L'implementazione effettuata da Cocciuti (1999), eseguita all'interno del codice di calcolo alle differenze finite FLAC, è stata utilizzata dall'autore per simulare il comportamento dell'argilla del Fucino (Burghignoli et al. 2003). Nel caso in cui si volesse utilizzare il modello proposto nella presente tesi per descrivere il comportamento della stessa argilla, al fine di poter adattare i parametri provenienti da una precedente calibrazione, potrebbe essere utile capire se esiste una relazione tra i parametri  $B$  e  $B_2$  presenti nelle equazioni 3.18 e 3.19. Elaborando i risultati della simulazione della prova triassiale relativa al caso in cui  $k = 2$  e  $A_d = 0.6$ , si è constatato che il rapporto  $\frac{p_c^2}{\left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{T}} \right\|^2}$  tende rapidamente a 6 rimanendo poi costante fino allo stato critico. Eseguendo due simulazioni distinte, adottando entrambe le leggi 3.18 e 3.19, ed assumendo  $B_2 = 2$ ,  $\psi_2 = 0$  e  $B = 12$ , si è ottenuta una perfetta corrispondenza di risultati. Facendo ulteriori prove, al fine di capire quanto il rapporto  $\frac{p_c^2}{\left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{T}} \right\|^2}$  possa

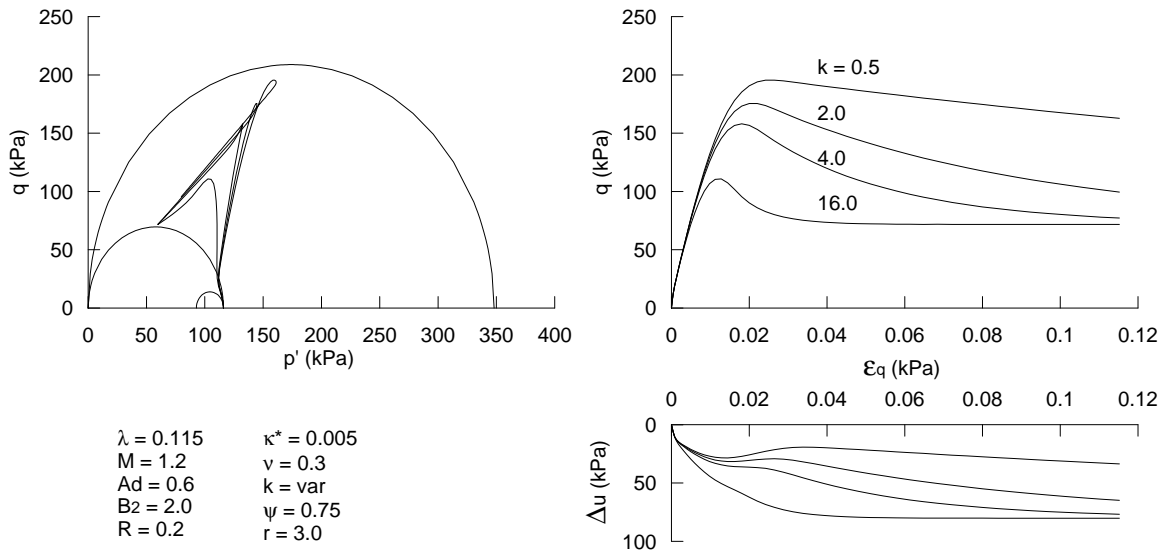


Figura 3.7: Prove triassiali non drenate con parametro  $k$  variabile.

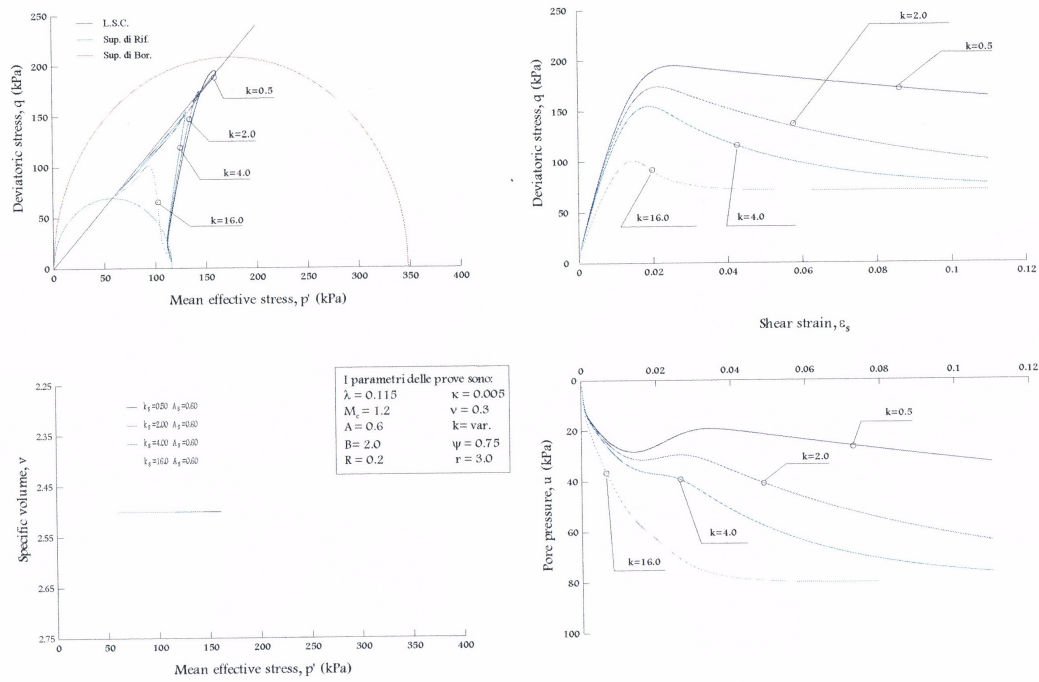


Figura 3.8: Prove triassiali non drenate con parametro  $k$  variabile (digitalizzata da Cocciuti 1999).

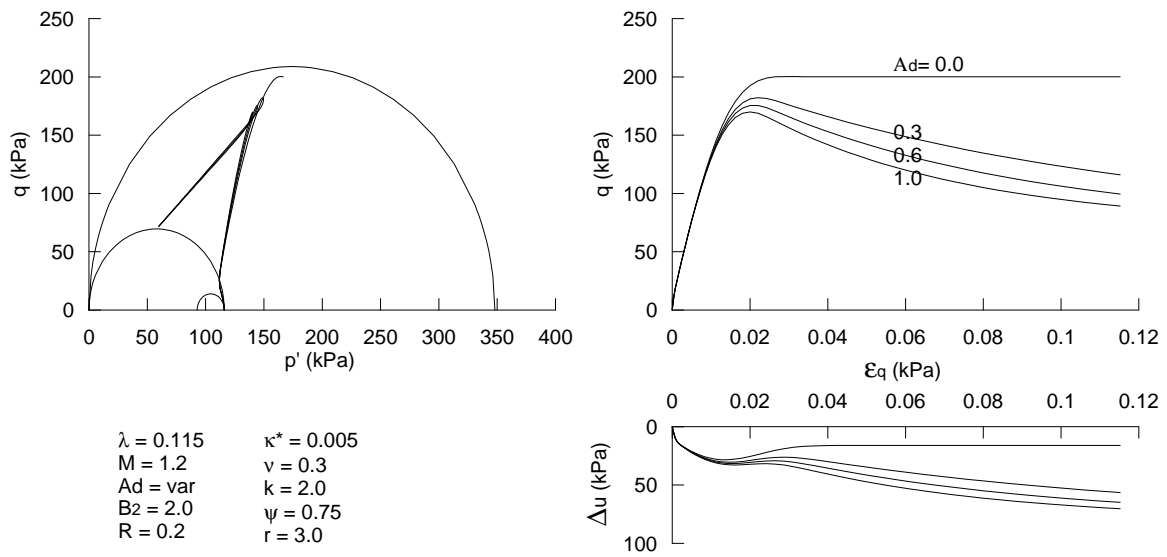


Figura 3.9: Prove triassiali non drenate con parametro  $A_d$  variabile.

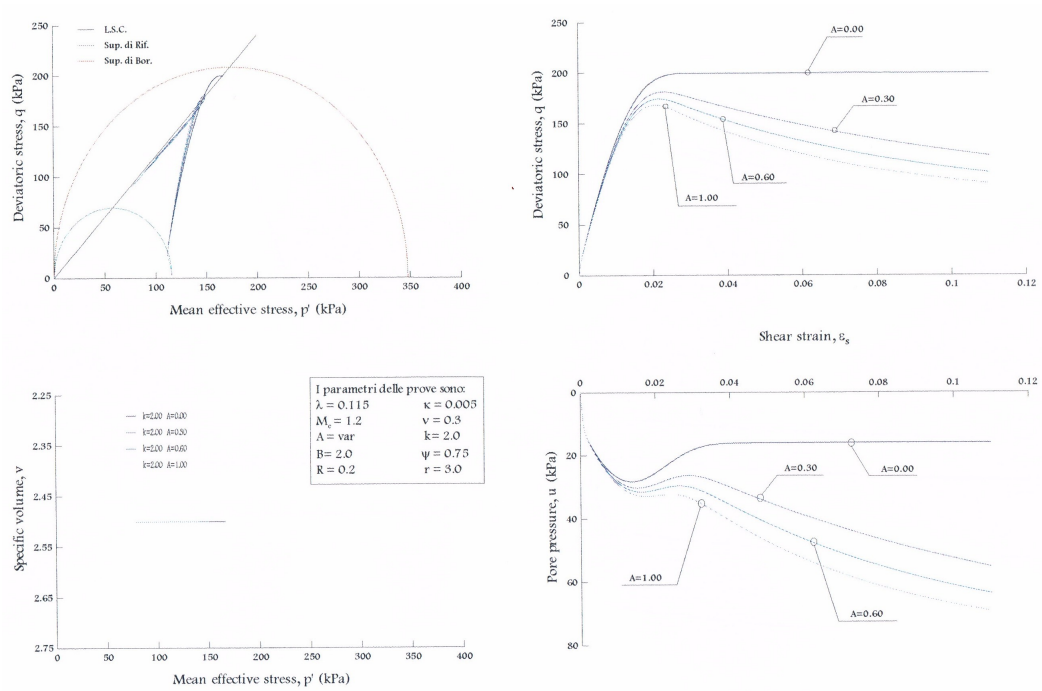


Figura 3.10: Prove triassiali non drenate con parametro  $A_d$  variabile (digitalizzata da Cocciuti 1999).

effettivamente dipendere dai valori assunti dalle variabili di stato e quanto dai percorsi tensionali, si potrebbe stabilire se esiste una relazione generale tra i parametri  $B$  e  $B_2$ .

### 3.3 Riflessioni sul significato fisico dei parametri

Studiare l'influenza dei parametri sulla risposta del modello è un passo necessario verso la comprensione del loro significato fisico, ed il modo più semplice per farlo è attraverso la simulazione numerica di prove di laboratorio. Fortunatamente un nutrito gruppo di questi parametri può essere associato a grandezze già note, e ciò è possibile (almeno in parte) perchè il modello costitutivo implementato è un'evoluzione del classico modello MCC. Prima di procedere con le analisi parametriche è opportuno fare delle osservazioni su alcune di queste grandezze, in modo tale da ridurne ove possibile il campo di variabilità. Il parametro  $M$  ad esempio, che rappresenta la pendenza della proiezione della linea dello stato critico sul piano degli invarianti, può essere messo in relazione con l'angolo di resistenza al taglio a stato critico  $\varphi'_{cs}$  attraverso l'espressione:

$$M = \frac{6 \sin \varphi'_{cs}}{3 - \sin \varphi'_{cs}} \quad (3.20)$$

Di conseguenza, considerando dei valori di  $\varphi'_{cs}$  compresi tra  $24^\circ$  e  $32^\circ$ , si può in prima approssimazione affermare che  $M$  ha un campo di variabilità che va da 0.94 a 1.3 circa.

Prendiamo ora in considerazione i parametri da cui dipende la forma della superficie di plasticizzazione, ovvero quelli che oltre ad  $M$  compaiono nell'espressione di  $\bar{M}$  (equazione 2.75). La quantità  $m$  è pari al rapporto tra la resistenza a stato critico ad estensione triassiale (a cui corrisponde un angolo di Lode  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ) e quella a compressione triassiale ( $\theta = -\frac{\pi}{6}$ ), e solitamente è minore dell'unità. La costante  $\alpha$  invece, che vale 1 in Rouainia & Muir Wood (2000) e 4 in Zhao et al. (2005), è più difficile da interpretare, anche se a grandi linee può essere vista come un indice della velocità con cui la resistenza decade al variare di  $\theta$ . Facendo varie prove si è notato che variando  $\alpha$  da 1 a 4 la forma della superficie di snervamento cambia impercettibilmente, e quindi si è deciso di assumere sempre un valore unitario e non approfondirne l'influenza sulla risposta costitutiva.

Stante l'ipotesi di convessità della superficie di snervamento, fondamentale per la formulazione del modello, i valori che possono assumere  $m$  ed  $\alpha$  sono limitati e devono essere tali da rispettare la disuguaglianza:

$$\bar{M}^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{M}}{\partial \theta} \right)^2 - \bar{M} \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \theta^2} \geq 0 \quad (3.21)$$

In figura 3.11, dove è rappresentata come esempio la curva ottenuta dall'intersezione tra la superficie di snervamento e il piano deviatorico per due diversi valori di  $m$ , sono riportati in una piccola tabella i valori di  $m$  che consentono di rispettare la condizione di convessità.

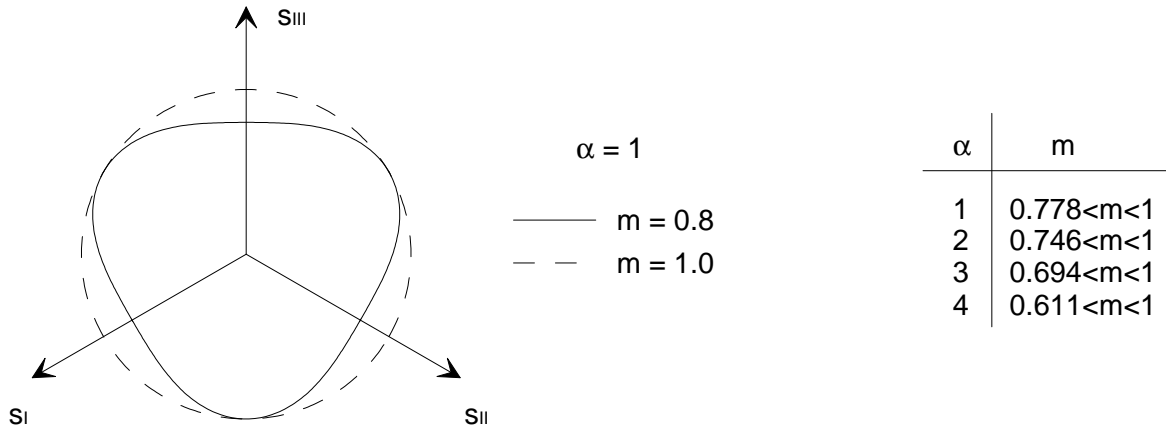


Figura 3.11: Forma della superficie di plasticizzazione sul piano deviatorico e valori di  $m$  consentiti per garantirne la convessità.

Le grandezze  $\lambda^*$  e  $\kappa^*$  rappresentano le pendenze rispettivamente della retta di stato critico e del tratto elastico della retta di rigonfiamento sul piano  $\ln p - \varepsilon_p$ , dove  $\varepsilon_p$  è la deformazione volumetrica. In geotecnica di solito si ha più familiarità con le pendenze  $\lambda$  e  $\kappa$  (piano  $\ln p - v$ ), oppure con gli indici  $C_c$  e  $C_s$  (piano  $\log \sigma_a - v$ ), ed è quindi logico chiedersi se sia possibile trovare una corrispondenza tra queste quantità ed i parametri del modello implementato. Considerando ad esempio:

$$\lambda = -\frac{\Delta v}{\ln p} \quad (3.22)$$

ed esprimendo gli incrementi di deformazione volumetrica come:

$$\Delta \varepsilon_p = -\frac{\Delta v}{v_0} \quad (3.23)$$

è possibile ricavare la relazione:

$$\lambda^* = \frac{\Delta \varepsilon_p}{\ln p} = \frac{\lambda}{v_0} \quad (3.24)$$

Inoltre, ricordando che:

$$\lambda = \frac{C_c}{\ln 10} \quad (3.25)$$

si può ottenere:

$$\lambda^* = \frac{C_c}{v_0 \ln 10} \quad (3.26)$$

Come conseguenza di questi passaggi matematici si ottiene che la correlazione tra  $\lambda^*$  e  $C_c$  (e in modo analogo tra  $\lambda^*$  e  $\lambda$ ) dipende da  $v_0$ , ovvero dipende da quale sia la configurazione indeformata che si prende come riferimento: tale correlazione è quindi relativa, e lo stesso ragionamento potrebbe essere fatto anche in riferimento a  $\kappa^*$  e  $\kappa$ .

Un discorso a parte va fatto invece per le grandezze  $\kappa^*$  e  $C_s$  (o in alternativa  $\kappa$  e  $C_s$ ), tra le quali può risultare discutibile trovare una correlazione. Infatti, nel caso specifico in cui il coefficiente di spinta non rimane costante, ad una retta che si trova sul piano  $\log \sigma_a - v$  non può essere associata una retta sul piano  $\ln p - v$ , e in un processo di scarico edometrico è chiaro che il rapporto tra la tensione efficace orizzontale e quella verticale aumenta.

Per concludere, considerando valori di  $C_c$  compresi tra 0.3 e 0.8 e contenuti in acqua che vanno da 20% fino a 60% (e quindi valori di volume specifico pressochè variabili tra 1.5 e 2.6), ci si può aspettare che  $\lambda^*$  vari tra 0.05 e 0.2. Per una stima di  $\kappa^*$  invece, anche alla luce delle precedenti considerazioni, si ritiene che sia più corretto basarsi sui valori di rigidezza a piccole deformazioni piuttosto che sull'indice  $C_s$ ; tuttavia in prima ipotesi si può considerare  $0.004 \leq \kappa^* \leq 0.02$ .

## **Effetto dell'introduzione di una superficie esterna ed effetto della struttura**

Il modello costitutivo implementato può essere visto come un'evoluzione del modello di Al-Tabbaa & Muir Wood (1989), che a sua volta deriva dal modello MCC; perciò, prima di studiare l'influenza dei singoli parametri, può essere interessante analizzare le principali innovazioni che si sono introdotte nel tempo, confrontando la risposta di modelli che hanno un grado di complessità via via crescente. Questo può essere fatto facendo variare opportunamente il parametro  $R$  e le variabili di stato  $r$  e  $p_c$ . In tutte le analisi svolte si è preso in considerazione un elemento finito tridimensionale<sup>3</sup> di forma cubica e con lato unitario, opportunamente vincolato, che è stato sottoposto a percorsi tenso-deformativi tipici delle più comuni prove di laboratorio.

Nel primo caso preso in esame (b01) si è assegnato  $R = 1$ ,  $r = 1$  e  $p_c = 50$  kPa, cosicché le superfici del modello si trovano a coincidere ed il grado di struttura risulta unitario. In queste condizioni i parametri che contano sono  $\nu$ ,  $\kappa^*$ ,  $\lambda^*$ ,  $m$ ,  $M$  ed  $\alpha$ , e se non fosse per il legame elastico qui utilizzato il modello sarebbe praticamente equivalente al classico modello MCC.

Sono state considerate tre diverse configurazioni iniziali, cui corrispondono i parametri e le variabili di stato di tabella 3.1; queste configurazioni sono rappresentate schematicamente in figura 3.12. Le simulazioni comprendono delle prove triassiali drenate, delle triassiali non drenate e una prova edometrica (a controllo di spostamento). Dai risultati (figure 3.13, 3.14 e 3.15) salta subito all'occhio il principale limite del modello MCC, ovvero l'elevata dimensione del dominio elastico. In condizioni non drenate questo difetto può portare a valutazioni errate della variazione delle tensioni efficaci: in queste condizioni infatti l'unico percorso tensionale possibile in ogni situazione che precede lo snervamento è quello a pressione media efficace costante. Un altro punto debole è offerto dalla discontinuità della rigidezza nella transizione da stati elastici a stati elastoplastici, che si traduce immediatamente in una risposta costitutiva irregolare.

---

<sup>3</sup>L'elemento utilizzato è il C3D8P della libreria di Abaqus.

Mantenendo unitario il grado di struttura e riducendo il parametro  $R$  si ottiene il modello di Al-Tabbaa & Muir Wood (1989): in questa situazione anche i parametri  $B$ ,  $\psi$ ,  $\psi_2$  ed  $R$  contribuiscono alla risposta costitutiva. Le condizioni iniziali scelte come riferimento (b02), rappresentate in figura 3.16, conseguono ad aver assunto  $R = 0.1$ : la dimensione della superficie di snervamento è quindi pari ad un decimo di quella del caso b01, e di conseguenza lo stato puramente elastico è confinato in una piccola regione dello spazio delle tensioni. Questo implica tra l'altro che, contrariamente a quanto accade nel modello MCC, lo stato tensionale può raggiungere il punto della superficie di snervamento a cui corrispondono deformazioni volumetriche plastiche nulle anche in condizioni diverse dallo stato critico.

Lo scopo principale dell'introduzione di una superficie aggiuntiva è quello di avere una rigidezza che evolve fin dalle piccole deformazioni, in modo da ottenere un miglior comportamento d'insieme. Il miglioramento può essere ad esempio osservato nelle simulazioni fatte a deformazione volumetrica impedita (figura 3.18), dove abbiamo dei percorsi tensionali molto più realistici rispetto a prima; ma anche in condizioni edometriche (figura 3.19) la risposta appare più verosimile, soprattutto lungo il ramo di scarico e ricarico. Avendo due superfici è inoltre possibile far dipendere la rigidezza complessiva dalla loro distanza relativa, in modo tale da poter ottenere delle leggi di decadimento che si adattino bene a quelle sperimentali.

Se si assegna un grado di struttura iniziale maggiore dell'unità allora tutti i parametri costitutivi, compresi  $k$ ,  $A_d$  e  $\eta_0$  (che per ora si mantiene nullo), diventano responsabili della risposta del modello. L'introduzione di  $r$  permette di modellare adeguatamente quei materiali detti strutturati, quale ad esempio l'argilla del Fucino (vedi Burghignoli et al. 2003). Per fare dei confronti coi modelli meno avanzati si è inizialmente scelto di porre  $r = 2$  senza modificare il valore della variabile  $p_c$  (caso b03), ottenendo quindi una superficie esterna praticamente doppia rispetto a prima. In figura 3.20, oltre alle posizioni iniziali delle superfici del modello, è riportata anche la posizione di una superficie di riferimento, il cui centro si trova sull'asse isotropo in corrispondenza del valore della pressione media efficace  $p_c$ : questa superficie, a cui si fa riferimento anche in Rouainia & Muir Wood (2000), evolve con le deformazioni volumetriche plastiche, e tende a coincidere con la superficie esterna per  $r$  che tende ad uno.

La riduzione di  $r$ , indicata col termine destrutturazione, è fatta dipendere dagli incrementi di deformazione plastica  $\dot{\epsilon}_d$ ; per  $A_d = 1$  dipenderà dalla sola componente deviatorica, mentre con  $A_d = 0$  dipenderà dalla sola componente volumetrica (vedi equazione 2.100). Dal momento che la dimensione della superficie esterna è proporzionale ad  $rp_c$ , e tenendo conto che  $p_c$  varia con le deformazioni volumetriche plastiche (aumenta con  $\dot{\epsilon}_p^p > 0$  e decresce con  $\dot{\epsilon}_p^p < 0$ ), va da se che un processo di destrutturazione non porta necessariamente ad una riduzione della superficie esterna: ad esempio, nel caso in cui si abbiano deformazioni volumetriche plastiche positive, supponendo che vi sia una riduzione del grado di struttura, può accadere che le variazioni di  $r$  e di  $p_c$

siano tali per cui venga soddisfatta l'equazione:

$$(r + \dot{r})(p_c + \dot{p}_c) > rp_c \quad (3.27)$$

e quindi tali da avere un incremento di dimensione della superficie esterna nonostante la destrutturazione. In modo del tutto duale si potrebbe verificare il caso particolare in cui la superficie esterna si riduce in assenza di destrutturazione, ad esempio se ci fossero solo deformazioni plastiche volumetriche (negative) e se  $A_d$  fosse unitario.

Come nel modello MCC l'incrudimento negativo della superficie di plasticizzazione, la cui dimensione è proporzionale a  $Rp_c$ , si può avere solo per deformazioni volumetriche negative. A differenza del modello MCC però si potrebbero osservare dei picchi di resistenza anche in corrispondenza di zone dello spazio delle tensioni cui corrispondono rapporti  $\frac{q}{p}$  minori di  $\bar{M}$ ; questo può avvenire in situazioni in cui lo stato tensionale corrente si trova a contatto con la superficie esterna mentre questa incrudisce negativamente: si veda ad esempio la curva tenso-deformativa relativa al punto B di figura 3.21, oppure quella relativa al punto A di figura 3.22.

I risultati ottenuti nel caso b03 differiscono molto da quelli relativi al caso b02; il comportamento risulta in generale più instabile e in alcuni casi molto più dilatante. Per avere dei risultati che siano maggiormente confrontabili con quelli del caso b02 probabilmente sarebbe più opportuno imporre quantomeno la coincidenza della superficie esterna. Assegnando  $r = 2$ , al fine di ottenere una dimensione  $rp_c$  pari a 50 kPa, si ricava  $p_c = 25$  kPa. Se si vuole anche che la dimensione delle superfici di snervamento si mantengano uguali a quelle del caso b02, essendo le stesse funzione di  $p_c$ , occorre raddoppiare il valore di  $R$ . Il risultato è mostrato in figura 3.24 (caso b04).

Confrontando la figura 3.18 (caso b02) con la 3.26 (caso b04) si osserva un comportamento d'insieme simile, anche se in quest'ultima si può vedere l'effetto dell'incrudimento della superficie esterna dovuto sostanzialmente alla destrutturazione (perché avviene a seguito di incrementi di deformazione volumetrica plastica nulli).

Mettendo a confronto le diverse curve edometriche (figura 3.28) possono essere fatte le seguenti osservazioni: le pendenze finali delle curve tendono allo stesso valore perché  $\lambda^*$  è il medesimo; le curve relative ai casi b01, b02 e b03 tendono a convergere lungo la stessa linea, la quale può essere vista come una linea di compressibilità intrinseca (ICL); nel caso b03 si tende alla ICL solo a destrutturazione completata; a parità di volume specifico, la ICL per il caso b04 si trova a valori di pressione media efficace molto inferiori rispetto alle altre, e quindi la posizione della ICL nello spazio  $\ln p - \varepsilon_p$  dipende chiaramente da  $p_c$ .



$\nu$	$\kappa^*$	$\lambda^*$	$m$	$M$	$R$	$k$	$A_d$	$B$	$\psi$	$\eta_0$	$\alpha$	$\psi_2$
0.2	0.01	0.1	0.8	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	<b>0.0</b>	1.0	1.0

	$p_c$ (kPa)	$r$	$\bar{\alpha}_1$ (kPa)	$\bar{\alpha}_2$ (kPa)	$\bar{\alpha}_3$ (kPa)	$\sigma_1$ (kPa)	$\sigma_2$ (kPa)	$\sigma_3$ (kPa)
A	50.0	1.0	-50.0	-50.0	-50.0	-100.0	-100.0	-100.0
B	50.0	1.0	-50.0	-50.0	-50.0	-70.0	-70.0	-70.0
C	50.0	1.0	-50.0	-50.0	-50.0	-30.0	-30.0	-30.0

Tabella 3.1: Parametri e condizioni iniziali per il caso b01.

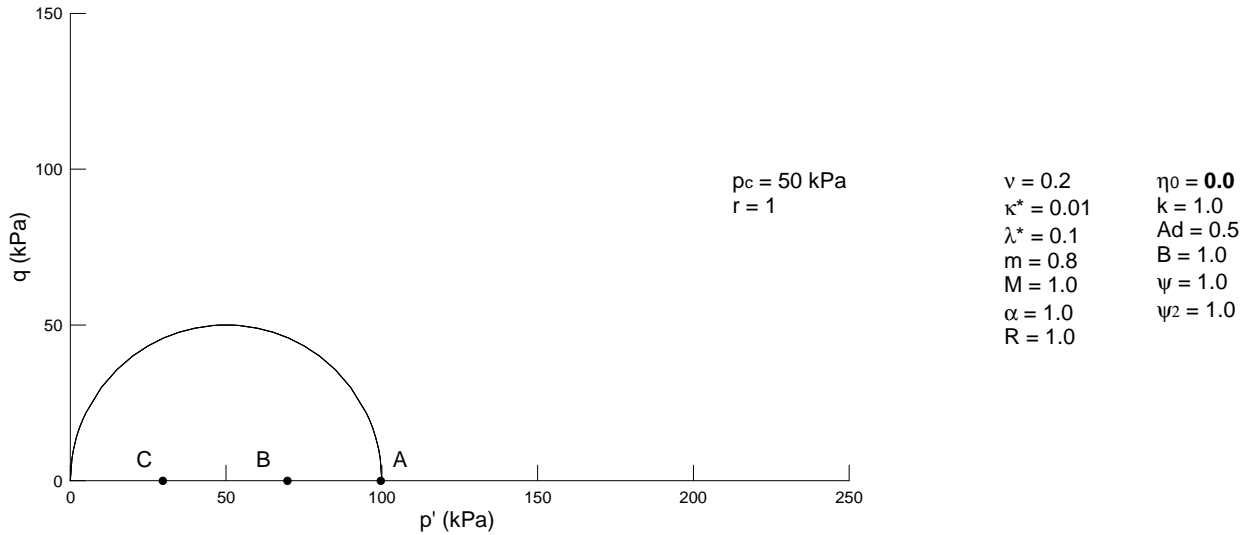
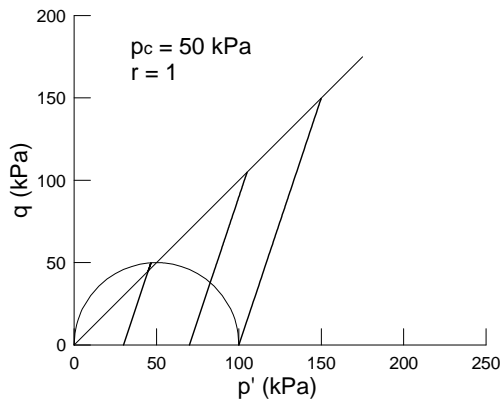


Figura 3.12: Configurazioni iniziali con  $R = 1.0$  e  $r = 1.0$  (caso b01).



$v = 0.2$        $\eta_0 = 0.0$   
 $\kappa^* = 0.01$      $k = 1.0$   
 $\lambda^* = 0.1$       $Ad = 0.5$   
 $m = 0.8$         $B = 1.0$   
 $M = 1.0$         $\psi = 1.0$   
 $\alpha = 1.0$        $\psi_2 = 1.0$   
 $R = 1.0$

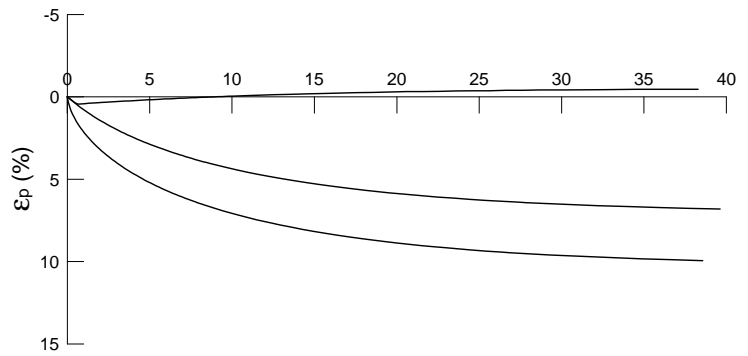
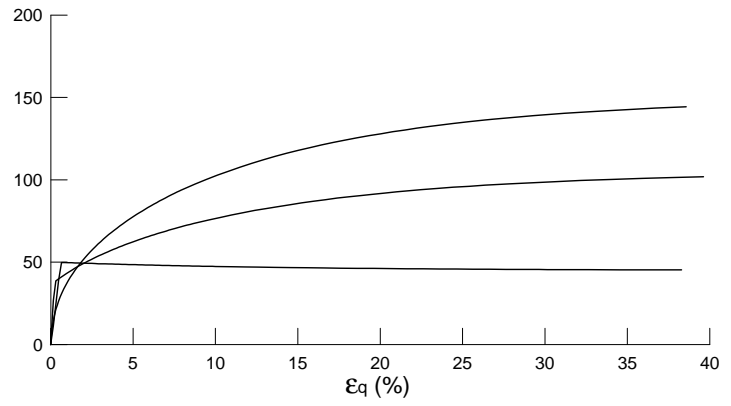
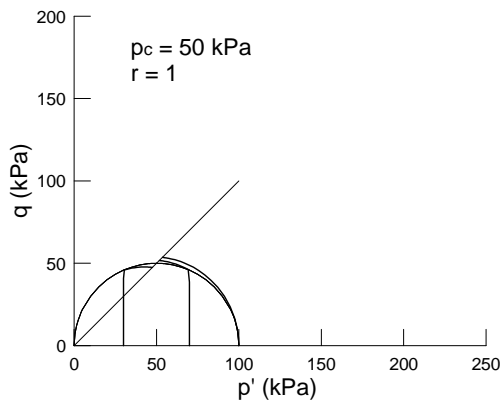


Figura 3.13: Risultati delle simulazioni delle prove triax-CID con  $R = 1.0$  e  $r = 1.0$  (caso b01).



$v = 0.2$        $\eta_0 = 0.0$   
 $\kappa^* = 0.01$      $k = 1.0$   
 $\lambda^* = 0.1$       $Ad = 0.5$   
 $m = 0.8$         $B = 1.0$   
 $M = 1.0$         $\psi = 1.0$   
 $\alpha = 1.0$        $\psi_2 = 1.0$   
 $R = 1.0$

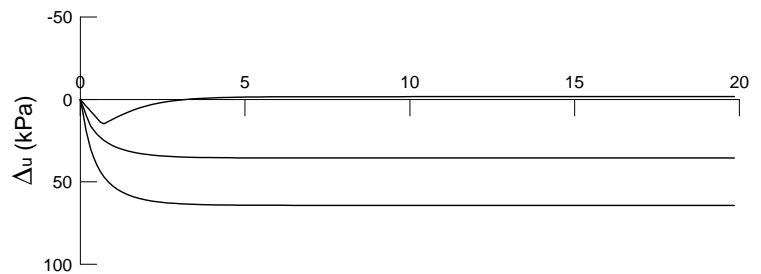
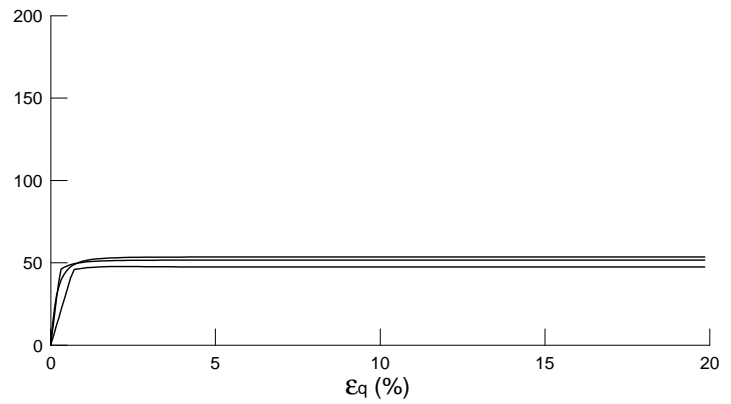


Figura 3.14: Risultati delle simulazioni delle prove triax-CIU con  $R = 1.0$  e  $r = 1.0$  (caso b01).

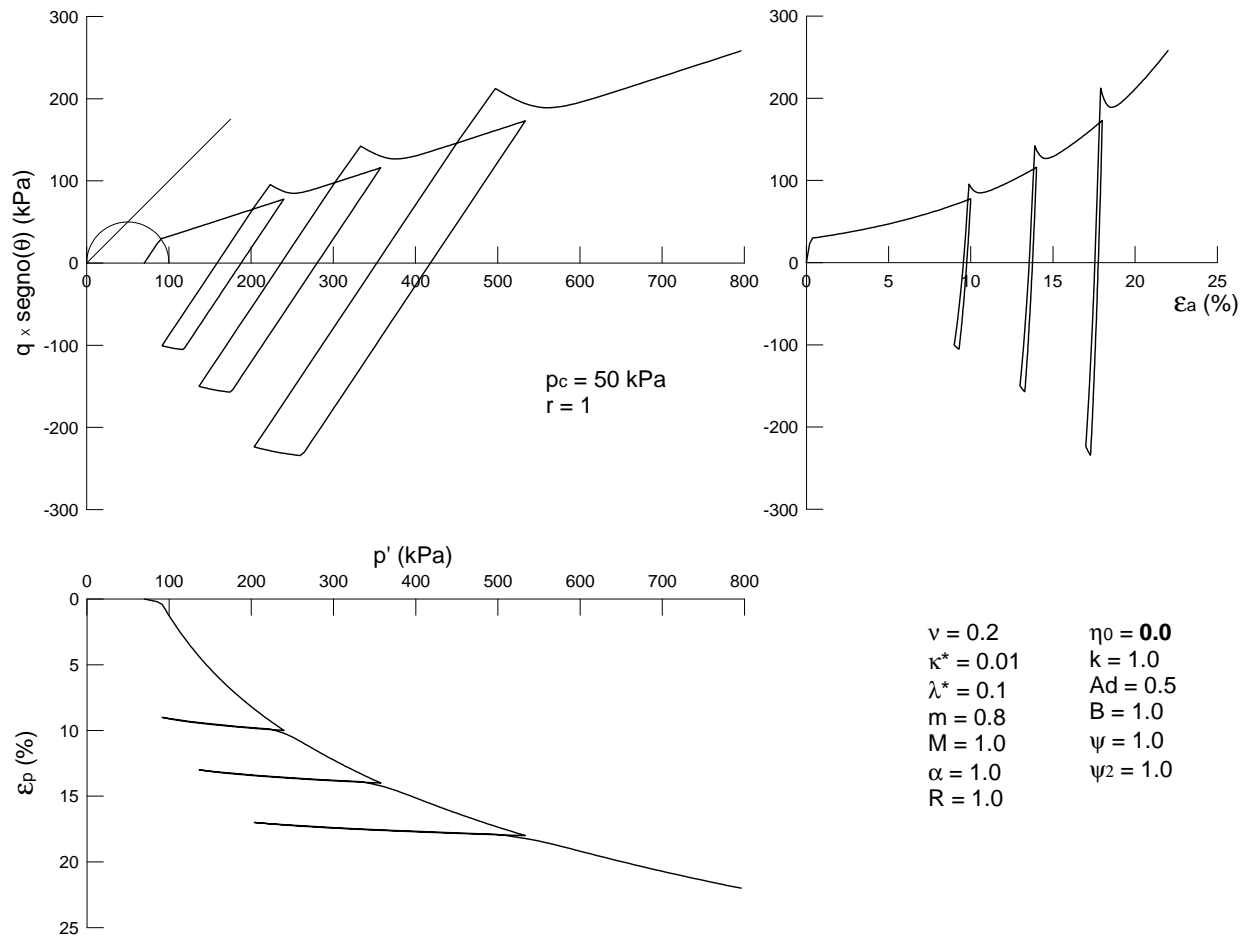


Figura 3.15: Risultati delle simulazioni della prova edometrica con  $R = 1.0$  e  $r = 1.0$  (caso b01).

$\nu$	$\kappa^*$	$\lambda^*$	$m$	$M$	$R$	$k$	$A_d$	$B$	$\psi$	$\eta_0$	$\alpha$	$\psi_2$
0.2	0.01	0.1	0.8	1.0	0.1	1.0	0.5	1.0	1.0	<b>0.0</b>	1.0	1.0

	$p_c$ (kPa)	$r$	$\bar{\alpha}_1$ (kPa)	$\bar{\alpha}_2$ (kPa)	$\bar{\alpha}_3$ (kPa)	$\sigma_1$ (kPa)	$\sigma_2$ (kPa)	$\sigma_3$ (kPa)	$b_0$ (kPa)
A	50.0	1.0	-95.0	-95.0	-95.0	-100.0	-100.0	-100.0	1.00
B	50.0	1.0	-75.0	-75.0	-75.0	-70.0	-70.0	-70.0	121.24
C	50.0	1.0	-35.0	-35.0	-35.0	-30.0	-30.0	-30.0	51.96

Tabella 3.2: Parametri e condizioni iniziali per il caso b02.

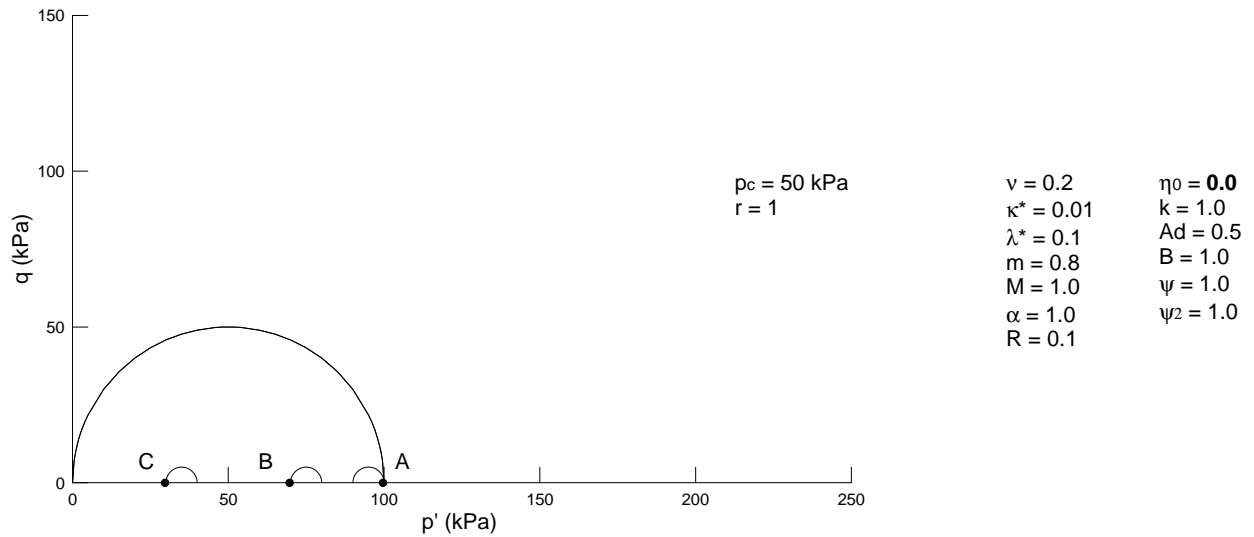


Figura 3.16: Configurazioni iniziali con  $R = 0.1$  e  $r = 1.0$  (caso b02).

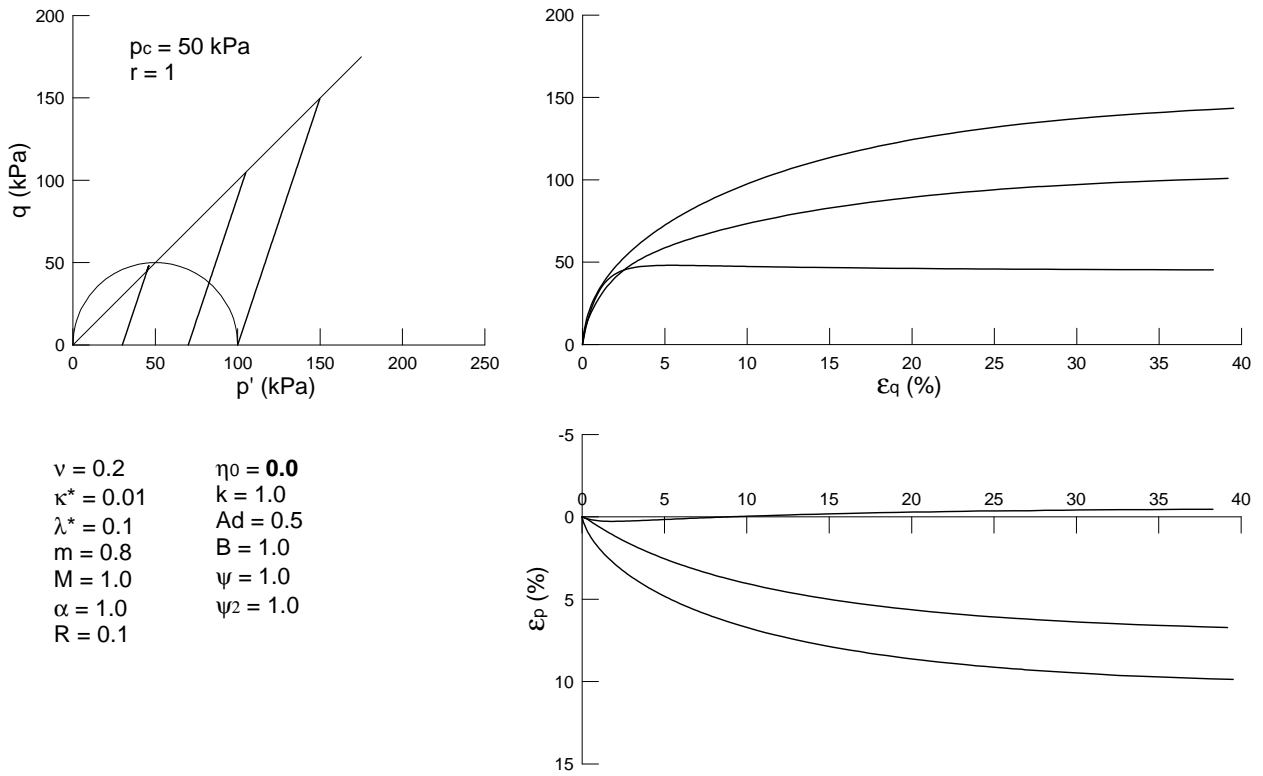


Figura 3.17: Risultati delle simulazioni delle prove triax-CID con  $R = 0.1$  e  $r = 1.0$  (caso b02).

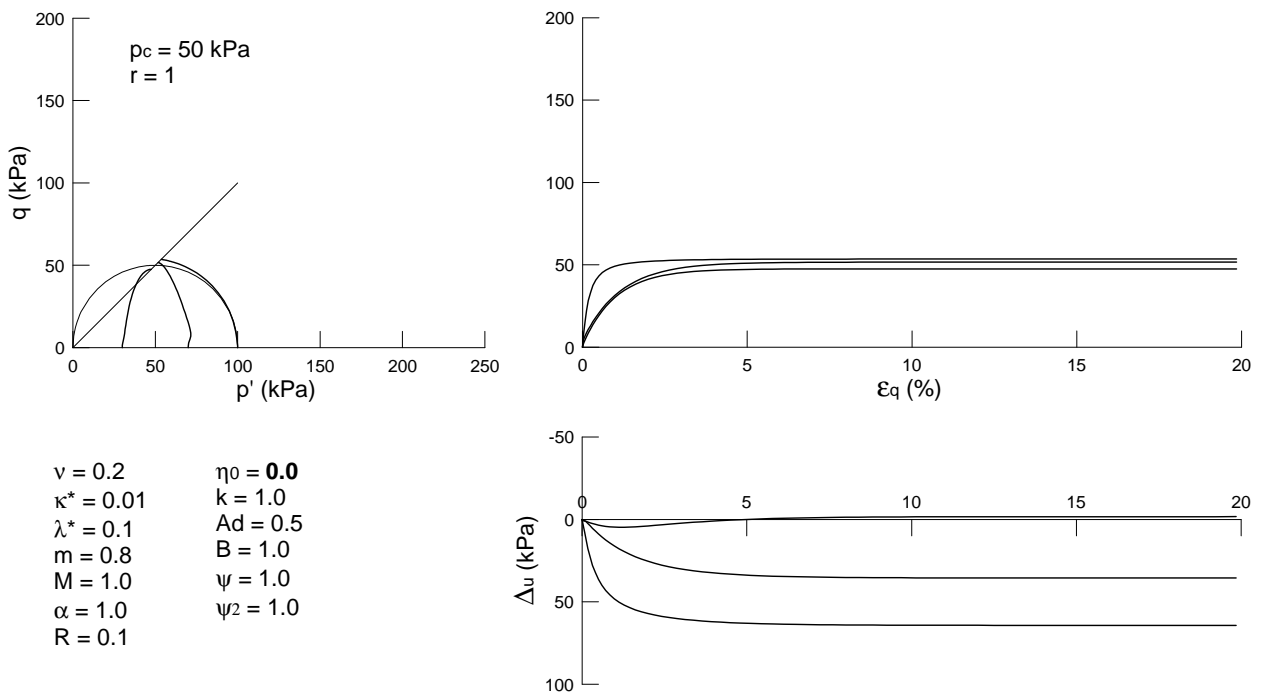


Figura 3.18: Risultati delle simulazioni delle prove triax-CIU con  $R = 0.1$  e  $r = 1.0$  (caso b02).

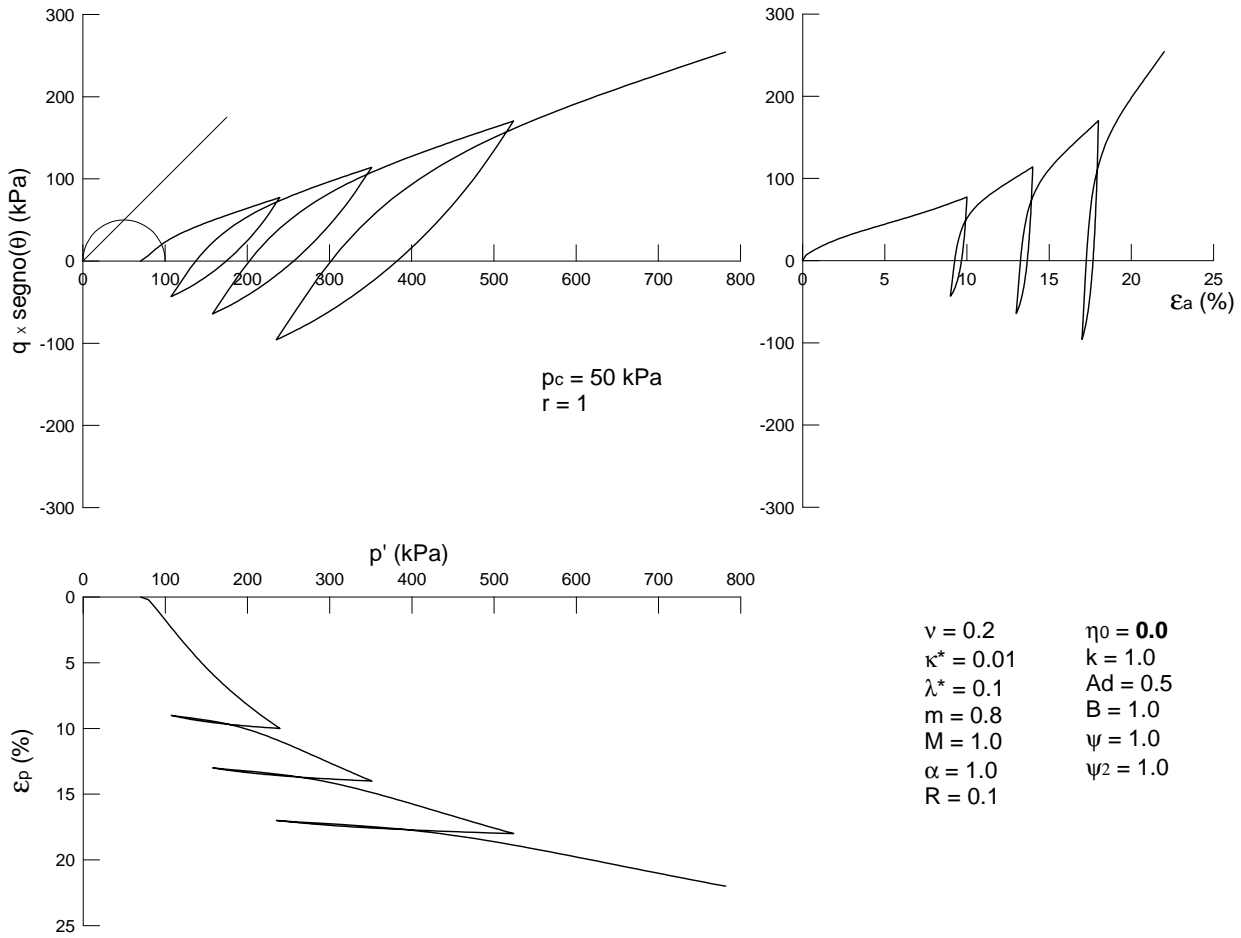


Figura 3.19: Risultati delle simulazioni della prova edometrica con  $R = 0.1$  e  $r = 1.0$  (caso b02).

$\nu$	$\kappa^*$	$\lambda^*$	$m$	$M$	$R$	$k$	$A_d$	$B$	$\psi$	$\eta_0$	$\alpha$	$\psi_2$
0.2	0.01	0.1	0.8	1.0	0.1	1.0	0.5	1.0	1.0	<b>0.0</b>	1.0	1.0

	$p_c$ (kPa)	$r$	$\bar{\alpha}_1$ (kPa)	$\bar{\alpha}_2$ (kPa)	$\bar{\alpha}_3$ (kPa)	$\sigma_1$ (kPa)	$\sigma_2$ (kPa)	$\sigma_3$ (kPa)	$b_0$ (kPa)
A	50.0	2.0	-95.0	-95.0	-95.0	-100.0	-100.0	-100.0	173.2
B	50.0	2.0	-75.0	-75.0	-75.0	-70.0	-70.0	-70.0	121.24
C	50.0	2.0	-35.0	-35.0	-35.0	-30.0	-30.0	-30.0	51.96

Tabella 3.3: Parametri e condizioni iniziali per il caso b03.

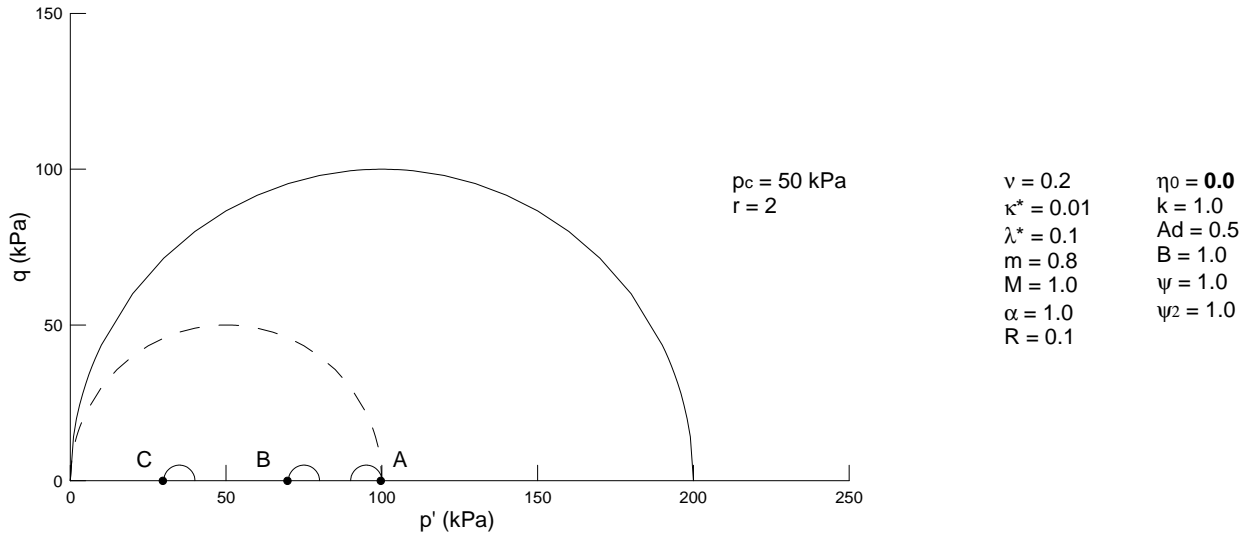


Figura 3.20: Configurazioni iniziali con  $R = 0.1$ ,  $r = 2.0$  e  $p_c = 50$  kPa (caso b03).

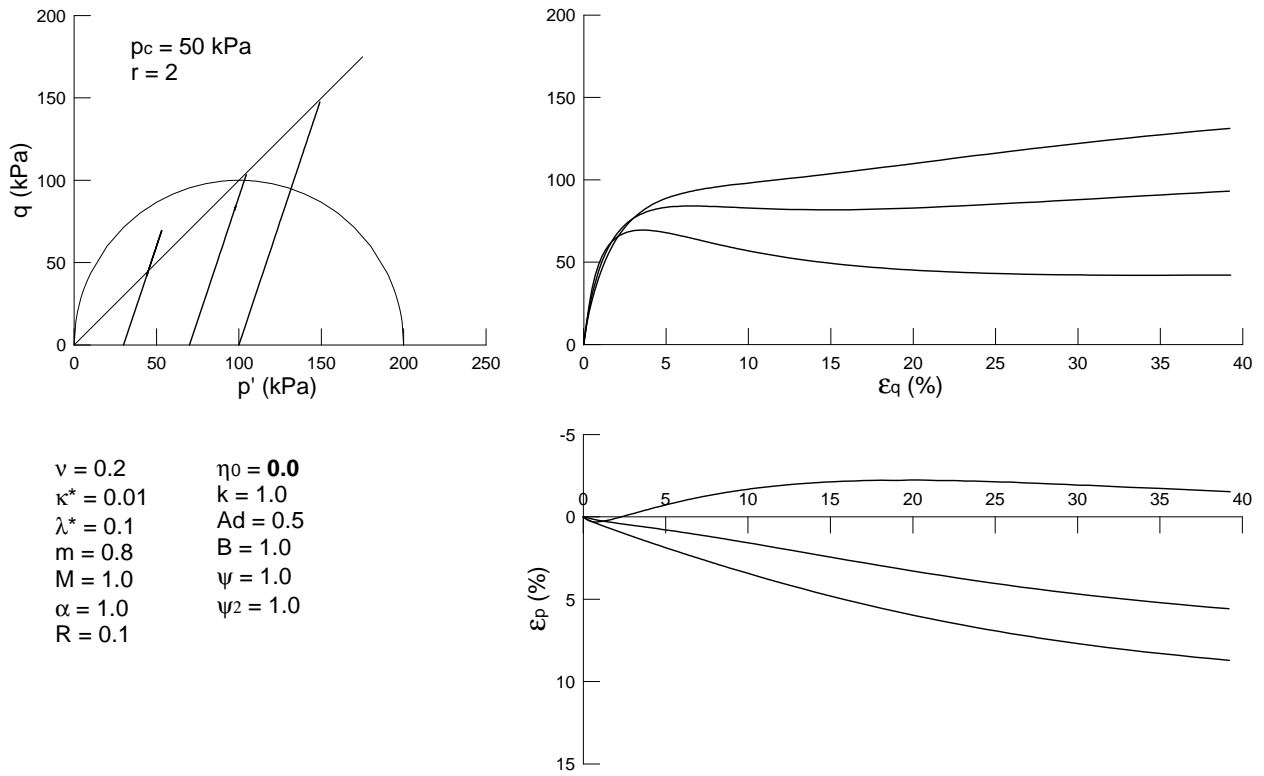


Figura 3.21: Risultati delle simulazioni delle prove triax-CID con  $R = 0.1$ ,  $r = 2.0$  e  $p_c = 50 \text{ kPa}$  (caso b03).

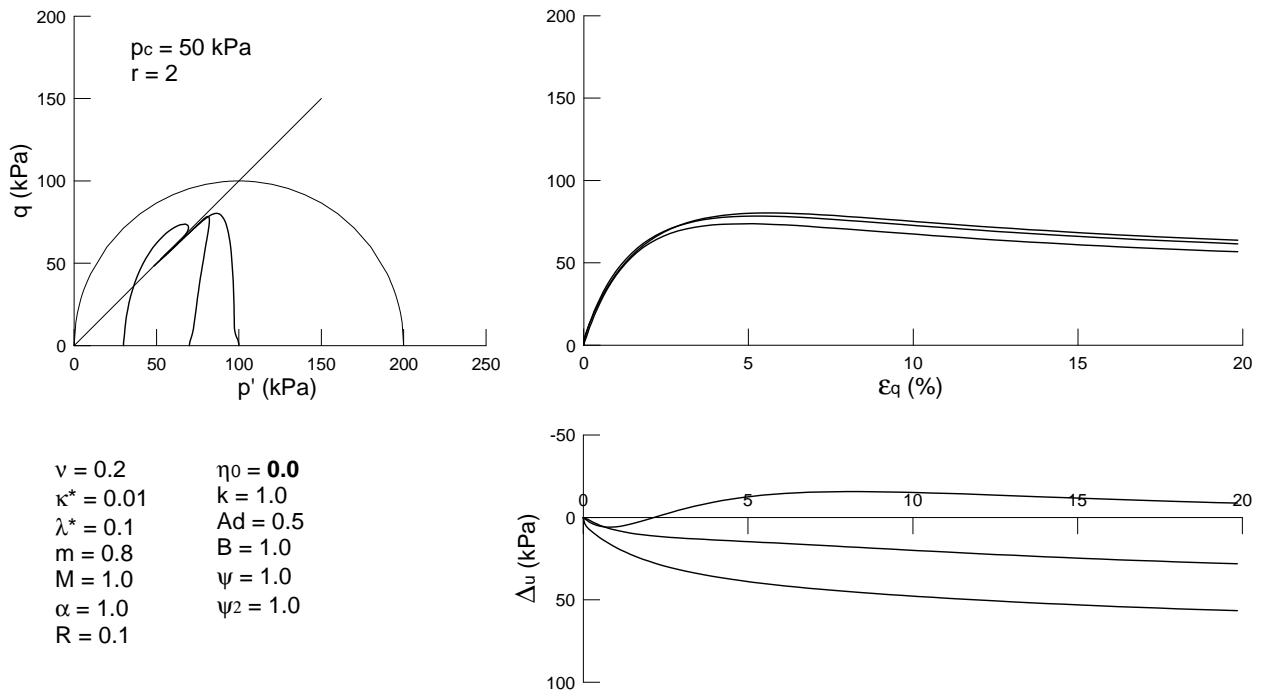


Figura 3.22: Risultati delle simulazioni delle prove triax-CIU con  $R = 0.1$ ,  $r = 2.0$  e  $p_c = 50 \text{ kPa}$  (caso b03).



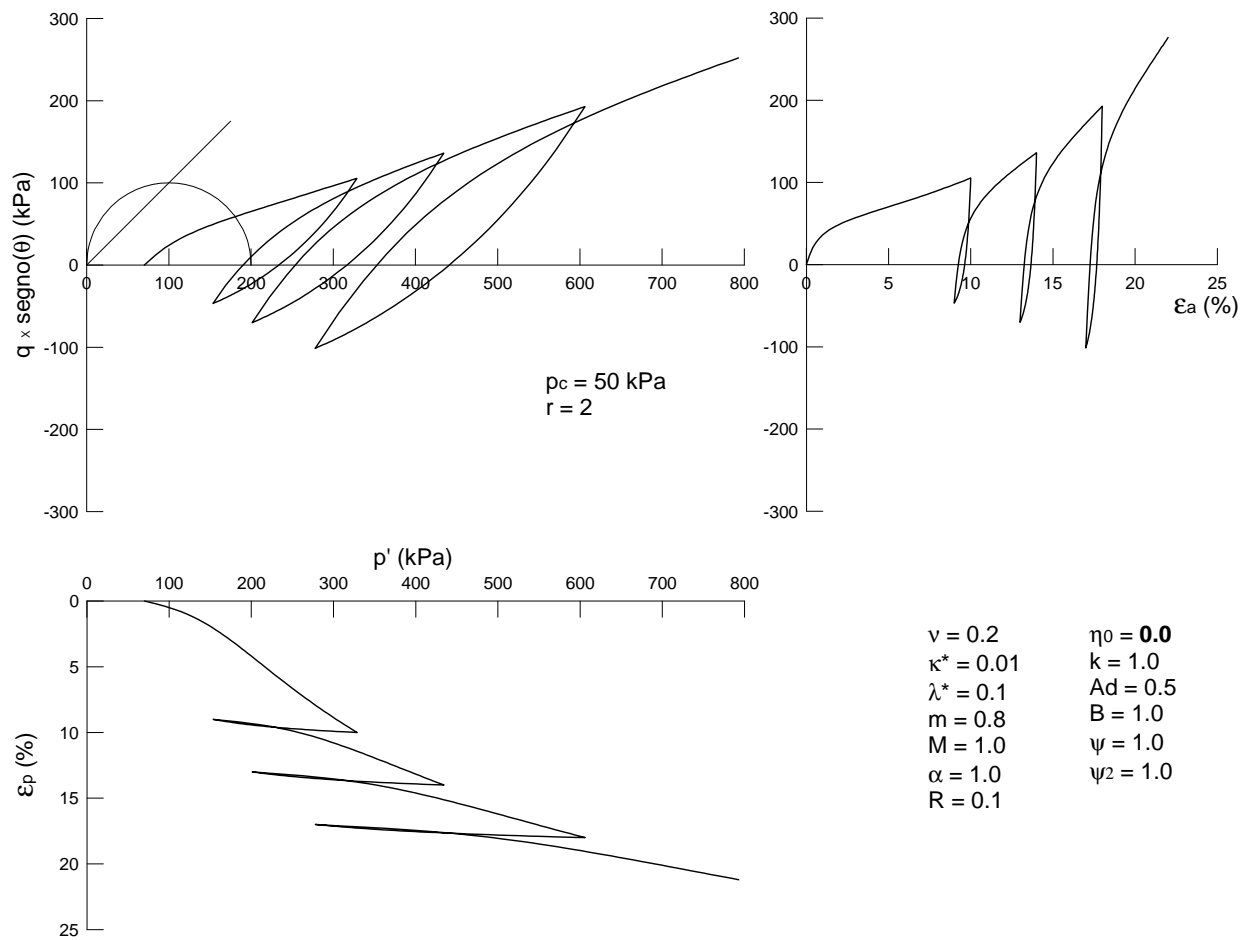


Figura 3.23: Risultati delle simulazioni della prova edometrica con  $R = 0.1$ ,  $r = 2.0$  e  $p_c = 50 \text{ kPa}$  (caso b03).

$\nu$	$\kappa^*$	$\lambda^*$	$m$	$M$	$R$	$k$	$A_d$	$B$	$\psi$	$\eta_0$	$\alpha$	$\psi_2$
0.2	0.01	0.1	0.8	1.0	0.2	1.0	0.5	1.0	1.0	<b>0.0</b>	1.0	1.0

	$p_c$ (kPa)	$r$	$\bar{\alpha}_1$ (kPa)	$\bar{\alpha}_2$ (kPa)	$\bar{\alpha}_3$ (kPa)	$\sigma_1$ (kPa)	$\sigma_2$ (kPa)	$\sigma_3$ (kPa)	$b_0$ (kPa)
A	25.0	2.0	-95.0	-95.0	-95.0	-100.0	-100.0	-100.0	1.00
B	25.0	2.0	-75.0	-75.0	-75.0	-70.0	-70.0	-70.0	121.24
C	25.0	2.0	-35.0	-35.0	-35.0	-30.0	-30.0	-30.0	51.96

Tabella 3.4: Parametri e condizioni iniziali per il caso b04.

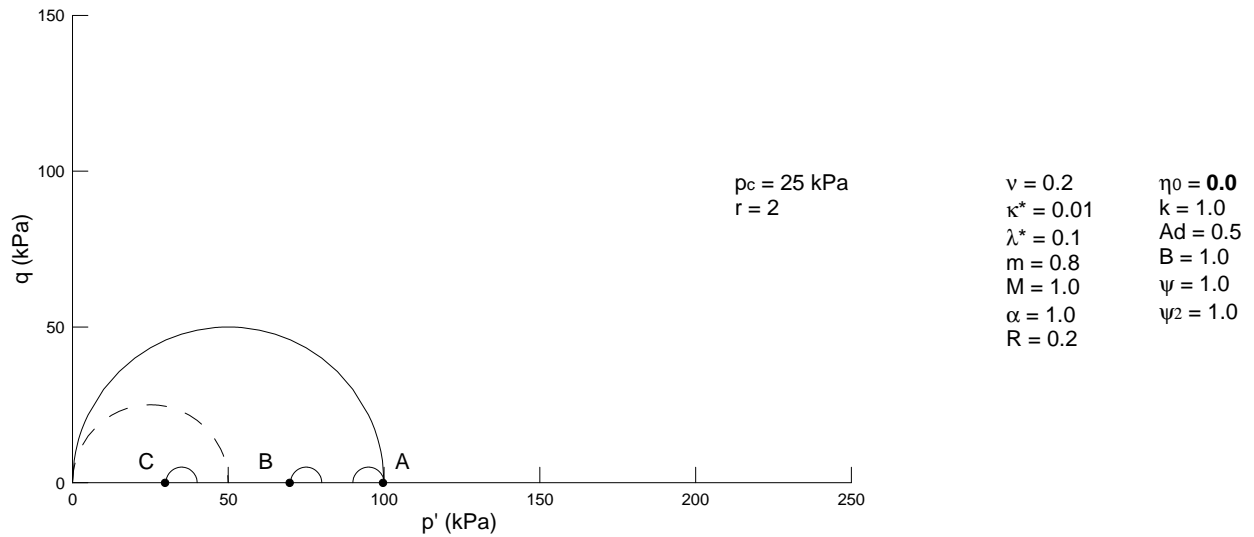


Figura 3.24: Configurazioni iniziali con  $R = 0.2$ ,  $r = 2.0$  e  $p_c = 25 \text{ kPa}$  (caso b04).

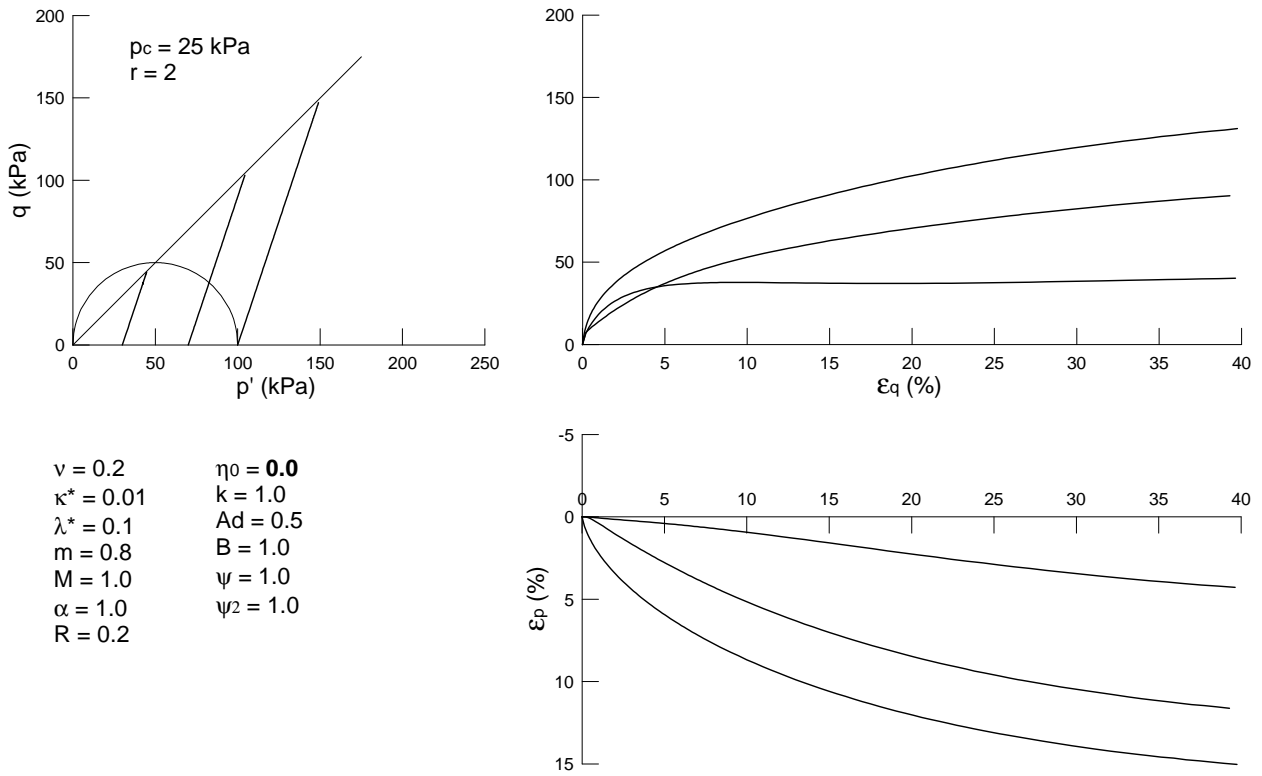


Figura 3.25: Risultati delle simulazioni delle prove triax-CID con  $R = 0.2$ ,  $r = 2.0$  e  $p_c = 25 \text{ kPa}$  (caso b04).

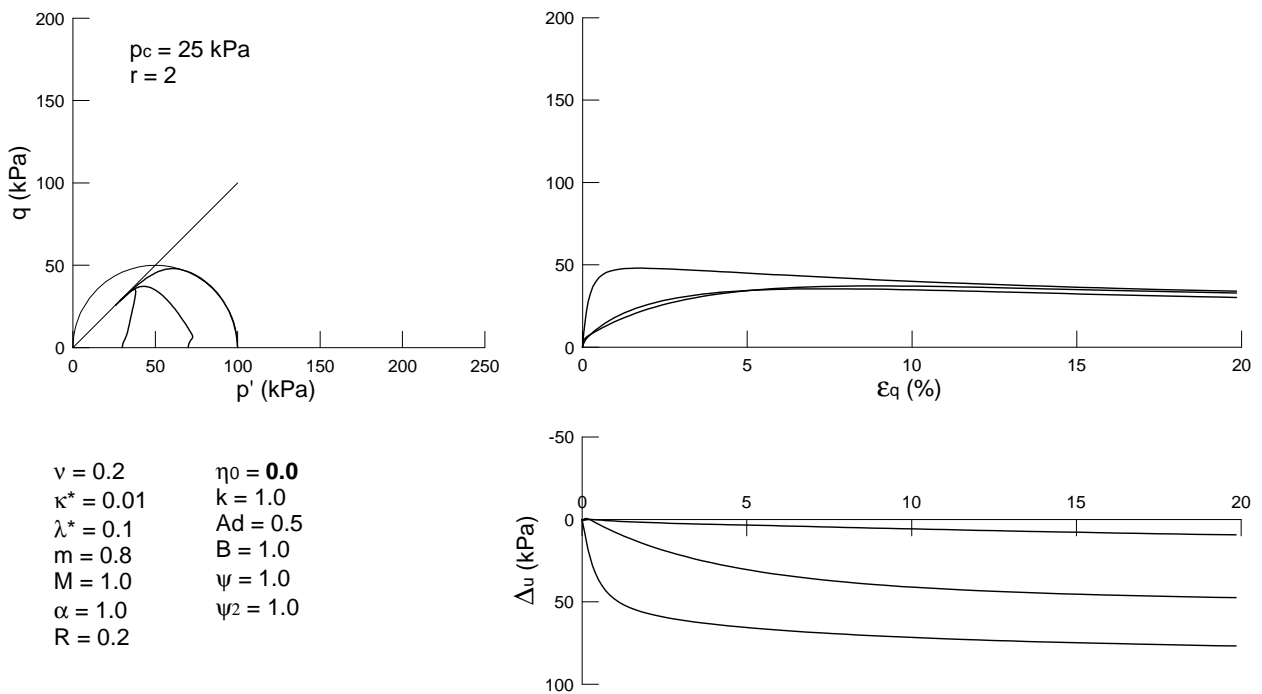


Figura 3.26: Risultati delle simulazioni delle prove triax-CIU con  $R = 0.2$ ,  $r = 2.0$  e  $p_c = 25 \text{ kPa}$  (caso b04).

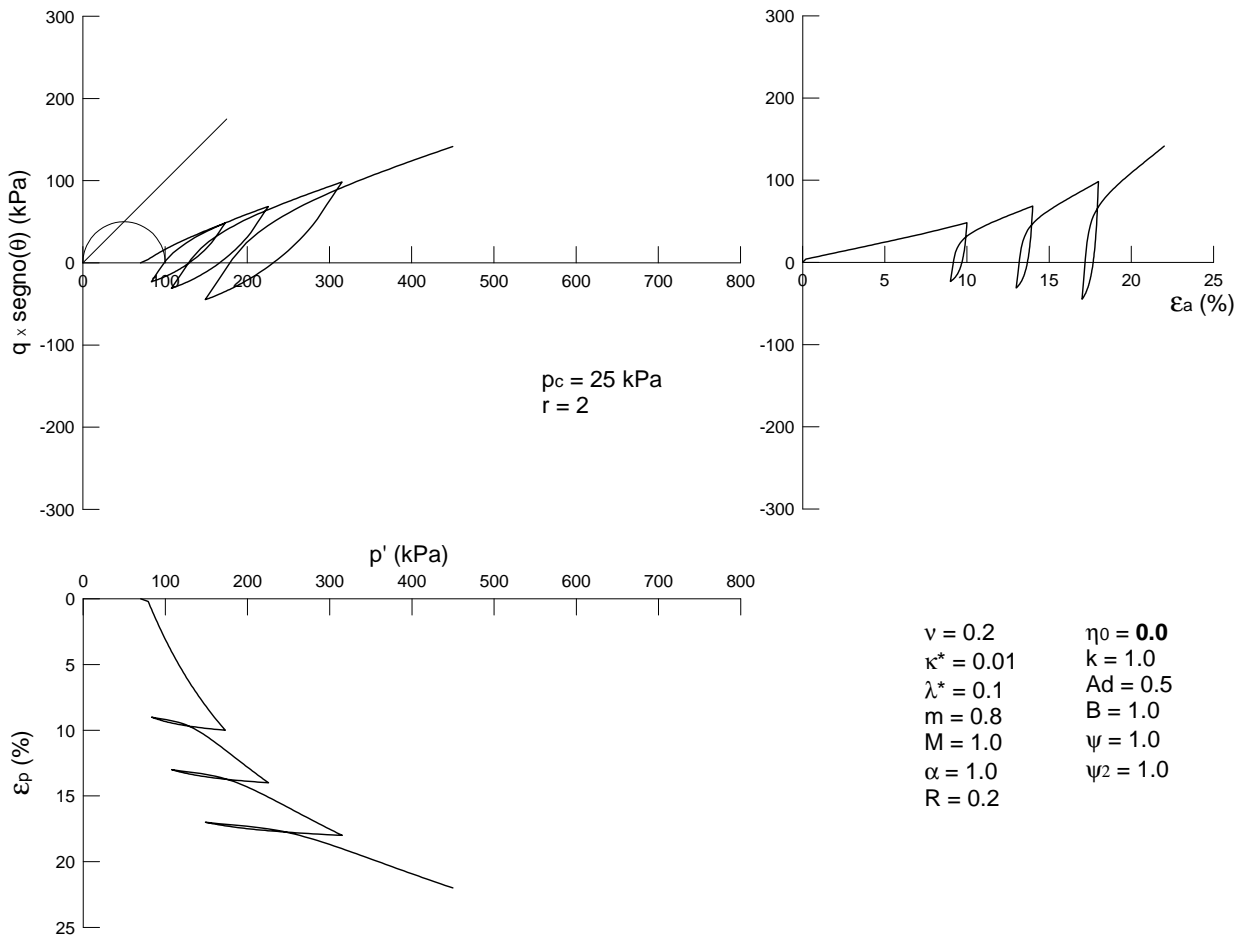


Figura 3.27: Risultati delle simulazioni della prova edometrica con  $R = 0.2$ ,  $r = 2.0$  e  $p_c = 25$  kPa (caso b04).

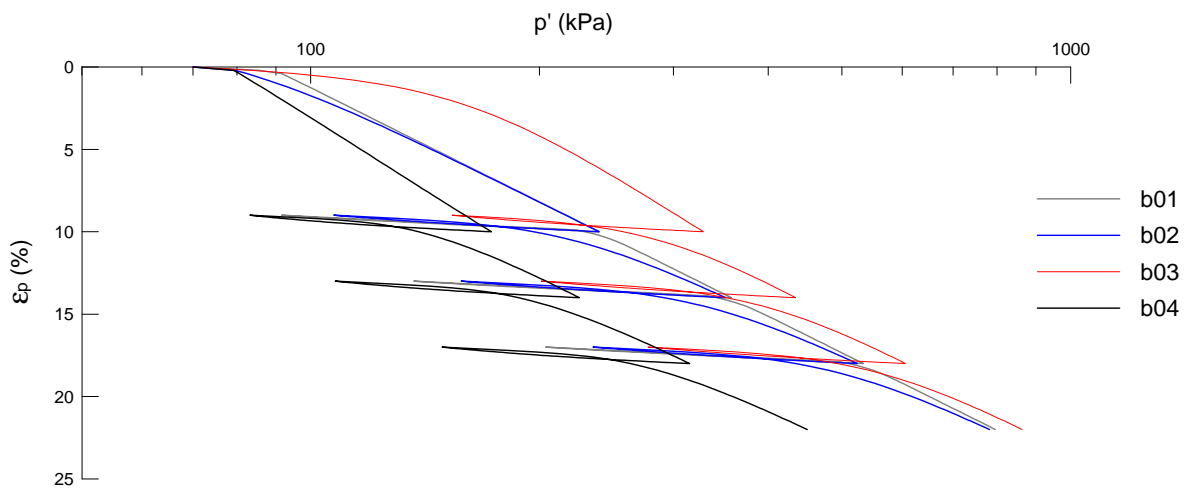


Figura 3.28: Confronto fra le diverse curve di compressibilità ottenute.

## Breve studio parametrico

Prendendo come condizione iniziale di riferimento quella corrispondente al punto B del caso b04 (vedi tabella 3.4), e variando i parametri  $B$ ,  $k$  e  $\kappa^*$ , sono state effettuate alcune simulazioni di prove triassiali drenate, prove triassiali non drenate e prove di compressione edometrica. Lo scopo principale di queste simulazioni è quello di indagare l'effetto di tali parametri sulla risposta costitutiva, e quindi ottenere delle indicazioni su come poter calibrare tali parametri sulla base dei risultati delle più comuni prove di laboratorio.

Il primo parametro ad essere indagato è  $B$ , il quale compare nell'espressione di  $h$ :

$$h = \frac{Bp_c}{(\lambda^* - \kappa^*)R} \left( \frac{b}{b_{max}} \right)^\psi \left( \frac{b_0}{b_0 - b} \right)^{\psi_2} \quad (3.28)$$

e quindi di conseguenza entra in gioco nel computo della matrice di rigidezza elastoplastica:

$$\mathbf{D}_{ep} = \left( \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \bar{\mathbf{n}} \bar{\mathbf{n}}^T \mathbf{D}_e}{\bar{\mathbf{n}}^T \mathbf{D}_e \bar{\mathbf{n}} + \bar{d} + h} \right) \quad (3.29)$$

Chiaramente i termini della matrice  $\mathbf{D}_{ep}$  crescono al crescere di  $h$ ; quindi, dal momento che  $h$  è direttamente proporzionale al parametro  $B$ , un aumento di  $B$  dovrebbe comportare un aumento di rigidezza. Osservando i risultati delle simulazioni delle prove triax-CID e triax-CIU (riportati nelle figure 3.29 e 3.30) si può notare infatti che la rigidezza aumenta al crescere di  $B$ . In figura 3.30 si può inoltre notare che, in condizioni non drenate, nel caso con  $B$  più elevato si ha un incremento della resistenza di picco, e a parità di deformazione deviatorica si sviluppano sovrappressioni interstiziali maggiori.

Attraverso un ragionamento analogo è possibile avere un'idea dell'influenza del parametro  $\psi$ , anch'esso presente nell'espressione di  $h$ . Infatti, osservando che il rapporto  $\frac{b}{b_{max}}$  è sempre minore dell'unità, ci si può facilmente rendere conto che un incremento di  $\psi$  ridurrebbe la rigidezza elastoplastica.

L'effetto del parametro  $k$ , detto velocità di destrutturazione, è chiaramente visibile se si osservano i risultati delle simulazioni delle prove edometriche: tale parametro ha infatti un effetto immediato sulla curva di compressibilità, in quanto valori di  $k$  maggiori consentono un più rapido raggiungimento della ICL, come mostrato in figura 3.32. Dall'esame dei risultati ottenuti attraverso le simulazioni di prove triassiali non drenate, riportati in in figura 3.31, si nota inoltre che a valori di  $k$  maggiori è associato un comportamento più rigido. In Callisto & Rampello (2004), in riferimento ad alcune argille italiane, si forniscono dei valori di velocità di destrutturazione compresi tra 0.45 e 1.7.

Infine, osservando che ad un incremento del parametro  $\kappa^*$  corrisponde un decremento del termine  $(\lambda^* - \kappa^*)$ , dato che quest'ultimo compare a denominatore nelle espressioni di  $\bar{d}$  ed  $h$ , ne consegue che la rigidezza globale aumenta con  $\kappa^*$ : questo risultato è confermato dai risultati delle prove triassiali drenate riportati in figura 3.33.

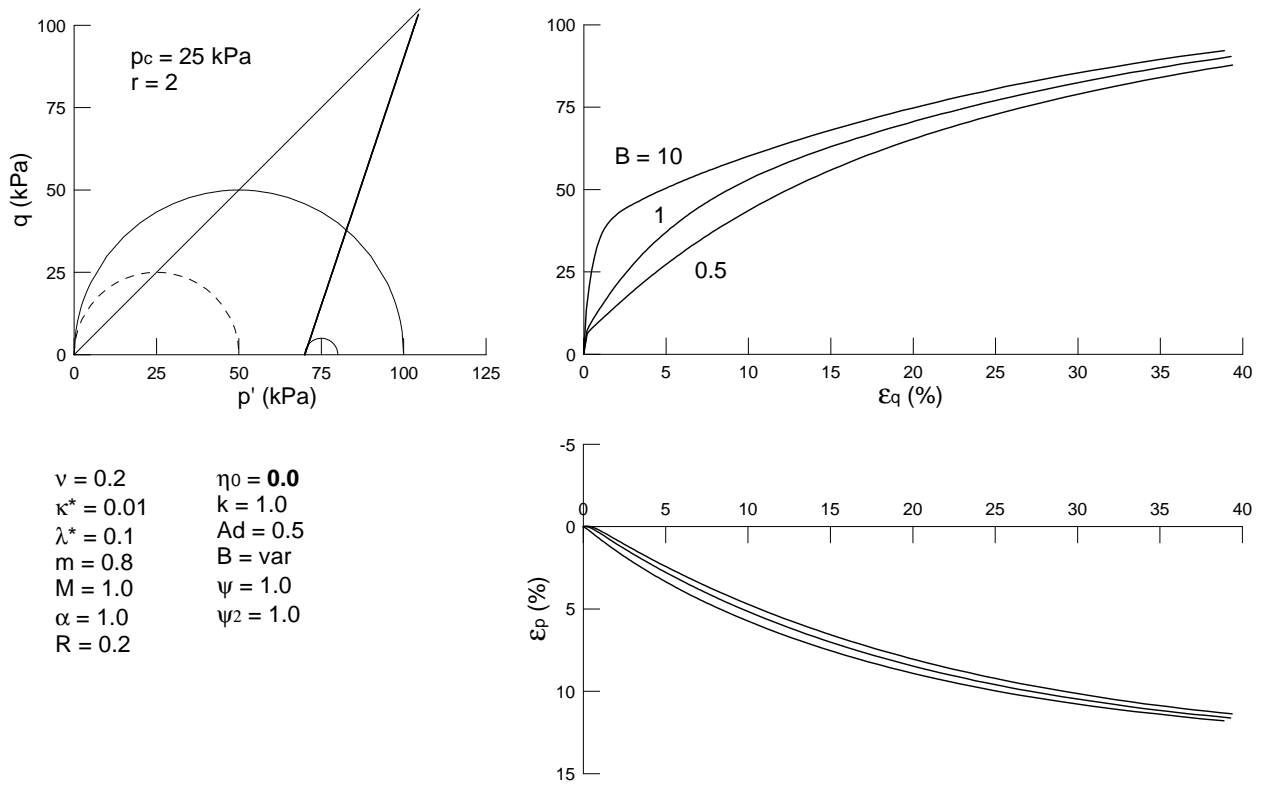


Figura 3.29: Effetto di  $B$  sulla simulazione delle prove triax-CID.

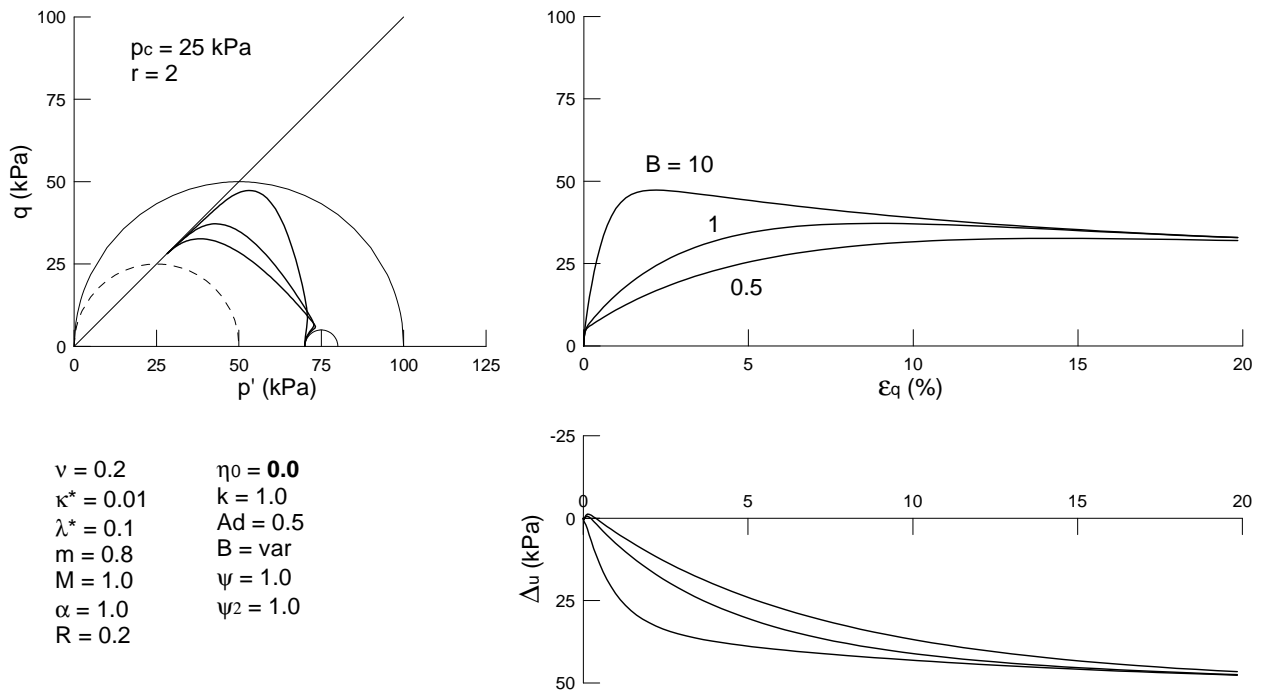


Figura 3.30: Effetto di  $B$  sulla simulazione delle prove triax-CIU.

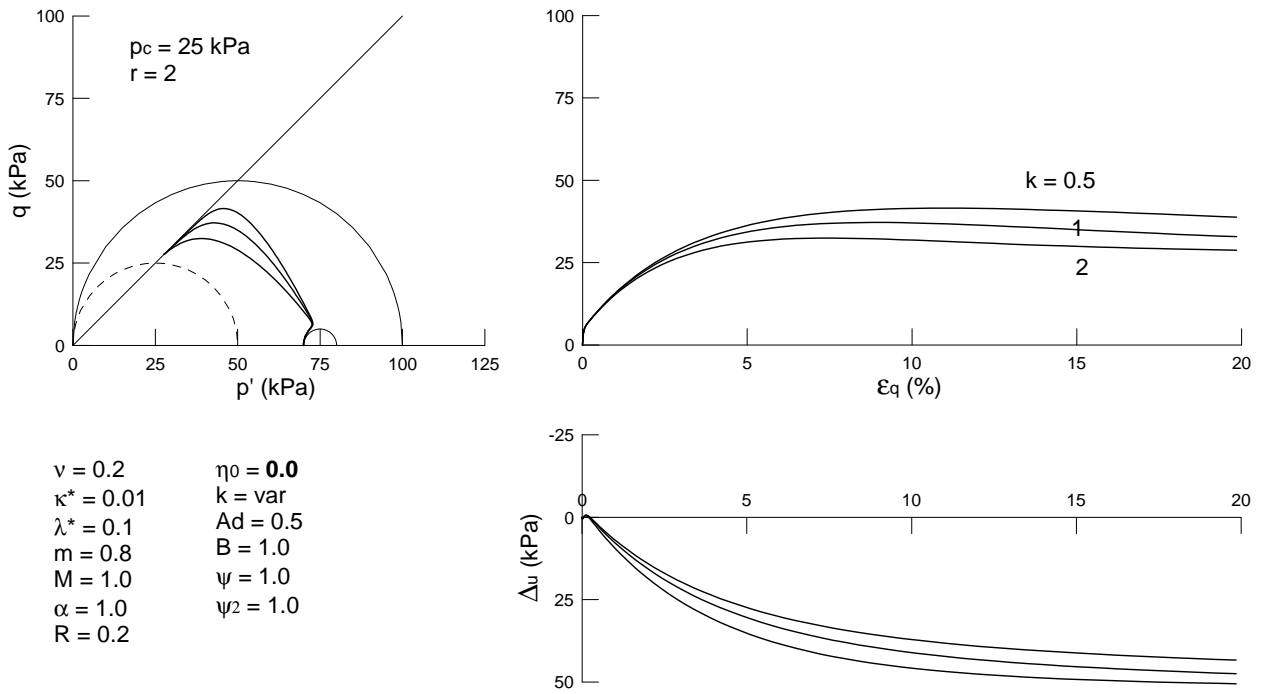


Figura 3.31: Effetto di  $k$  sulla simulazione delle prove triax-CIU.

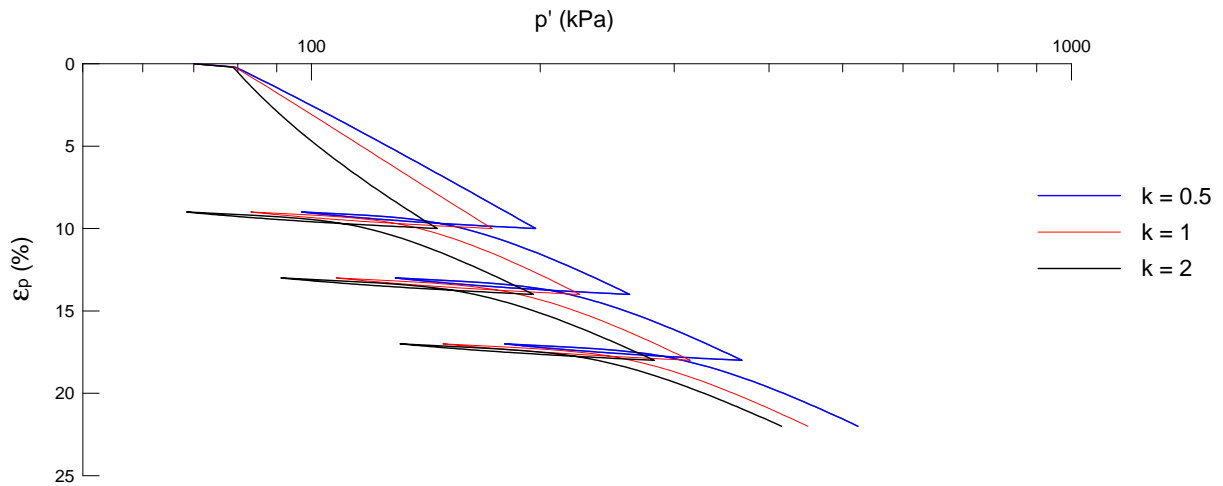


Figura 3.32: Effetto di  $k$  sulla simulazione delle prove edometriche.

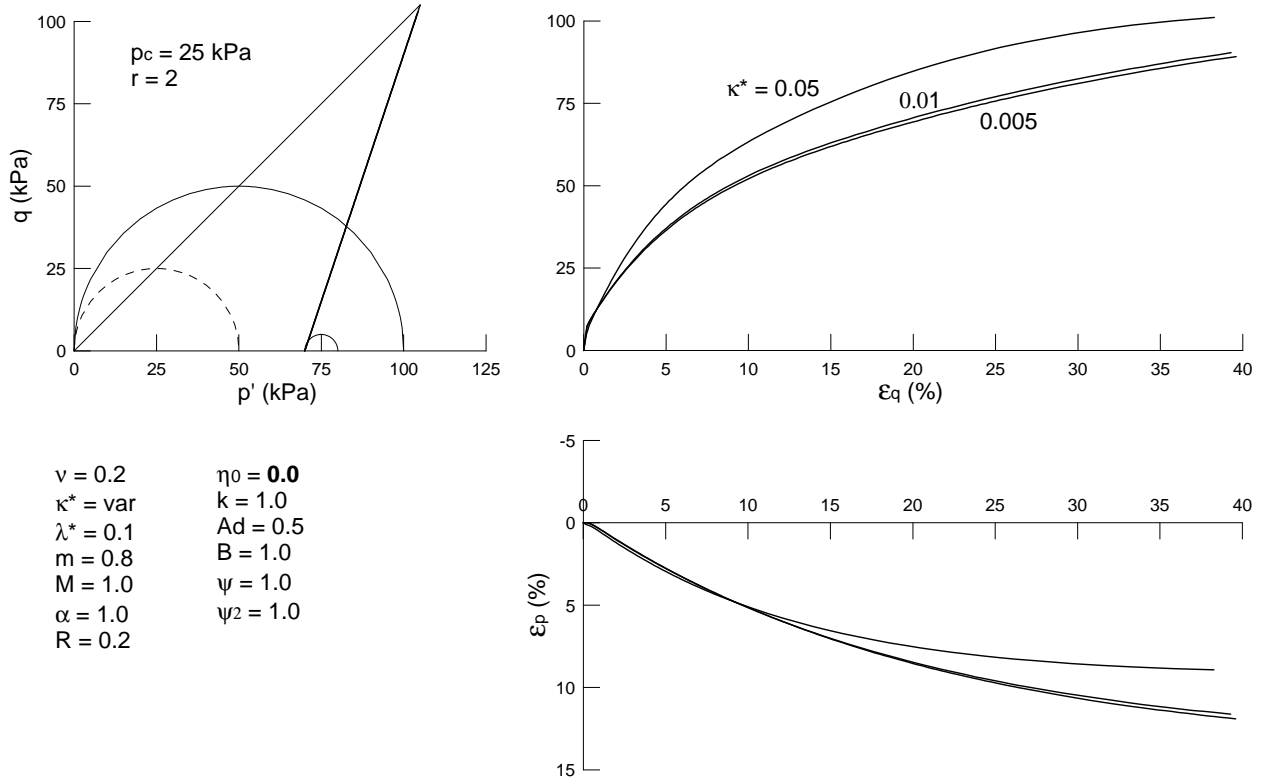


Figura 3.33: Effetto di  $\kappa^*$  sulla simulazione delle prove triax-CID.

## Influenza dei parametri e delle condizioni iniziali sulla risposta in condizioni edometriche

Dal momento che i risultati di una prova edometrica possono essere utilizzati per la calibrazione del modello costitutivo (ad esempio per ricavare  $\lambda^*$ ,  $p_c$  ed il grado di struttura iniziale), è sicuramente utile affrontare uno studio approfondito della risposta costitutiva in condizioni edometriche. Per prima cosa si è studiato il percorso tensionale seguito da un elemento sottoposto ad uno stato di compressione a deformazione laterale impedita, e si è visto che tale percorso sul piano degli invarianti tende asintoticamente ad una retta la cui pendenza  $\chi_0$  dipende in larga misura da  $M$ , e in misura minore dai parametri elastici  $\kappa^*$  e  $\nu$  (come mostrato in figura 3.34). In tabella 3.5, oltre ai valori di  $\chi_0$  ottenuti nelle simulazioni ed ai corrispettivi  $K_0 = \frac{3-\chi_0}{3+2\chi_0}$ , sono riportati per confronto i valori dei coefficienti di spinta in quiete ricavati utilizzando la relazione proposta da Jaky (1944): si deduce che il modello costitutivo potrebbe in alcuni casi non permettere una valutazione corretta del rapporto tra tensioni efficaci orizzontali e verticali in processi di compressione edometrica. Per completezza sono state fatte alcune prove variando i parametri  $\lambda^*$ ,  $m$ ,  $R$ ,  $k$ ,  $A_d$ ,  $B$  ed  $\eta_0$ , ed altre prove in cui si è fatto variare il grado di struttura iniziale, e in nessun caso si è osservata un'influenza su  $\chi_0$ .

Durante la simulazione di una prova di compressibilità edometrica si ha un progressivo sviluppo di deformazioni



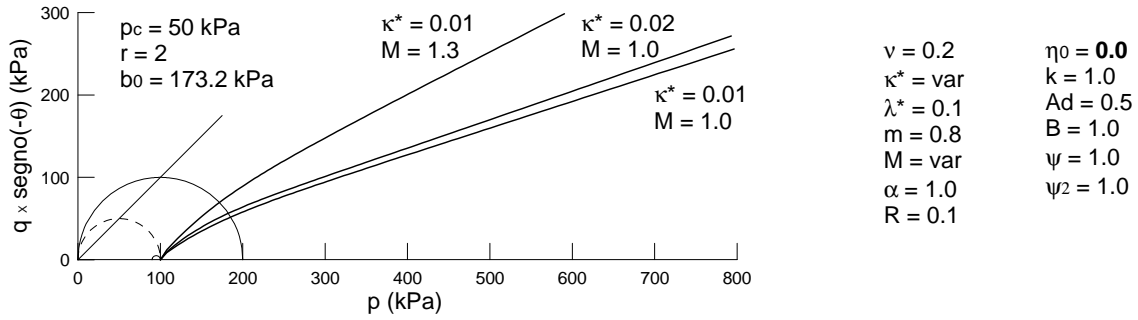


Figura 3.34: Influenza dei parametri del modello sul percorso tensionale seguito in condizioni edometriche.

$M$	$\kappa^*$	$\nu$	$\chi_0$	$K_0$	$1 - \frac{3M}{6+M}$
1	0.01	0.2	0.324	0.734	0.571
1	0.02	0.2	0.349	0.717	0.571
1	0.01	0.3	0.321	0.736	0.571
1.3	0.01	0.2	0.511	0.619	0.466

Tabella 3.5: Confronto fra i valori di  $K_0$  ottenuti dalle simulazioni e quelli calcolati con la relazione di Jaky (1944).

plastiche volumetriche e deviatoriche, le quali comportano necessariamente un decremento del grado di struttura. Sul piano  $\ln p - \varepsilon_p$ , a destrutturazione completata, la curva di compressibilità tende asintoticamente ad una retta che ha pendenza  $\lambda^*$  e che possiamo indicare col termine ICL. Per individuare la posizione della ICL sul piano  $\ln p - \varepsilon_p$  si può convenzionalmente far riferimento al valore di pressione media efficace  $p_{ICL}$  in corrispondenza del quale si ha una deformazione volumetrica nulla: dalle analisi effettuate risulta che tale valore dipende quasi esclusivamente dalla variabile di stato  $p_c$ , sebbene in alcuni casi possa subire delle piccole variazioni. Ad esempio in figura 3.35 sono mostrati i risultati ottenuti per diversi valori del grado di struttura iniziale, e si può osservare che  $p_{ICL}$  risulta compreso tra 95 e 100 kPa, e quindi vale circa  $2p_c$ ; in figura 3.36 sono riportati invece i risultati di simulazioni svolte mantenendo invariati  $p_c$  ed  $r$ , ma partendo da valori di pressione media efficace diversi<sup>4</sup>: in questo caso  $p_{ICL}$  varia tra 88 e 101 kPa. Piccole variazioni di  $p_{ICL}$  possono aversi anche a seconda dei valori assunti dai parametri del modello.

Prima di essere sottoposto ad una qualsiasi prova di laboratorio un provino subisce solitamente un disturbo tensionale, che nella più semplice delle ipotesi può essere visto come un annullamento della componente deviatorica a pressione media efficace costante. Dal momento che ad un percorso tensionale così fatto vanno necessariamente associate delle deformazioni plastiche, è lecito supporre che il campionamento comporti una riduzione del

<sup>4</sup>Si precisa che i valori di  $b_0$  utilizzati nelle analisi a cui fanno riferimento le figure 3.35 e 3.36 sono posti pari a  $\sqrt{3}(rp_c - p_0)$

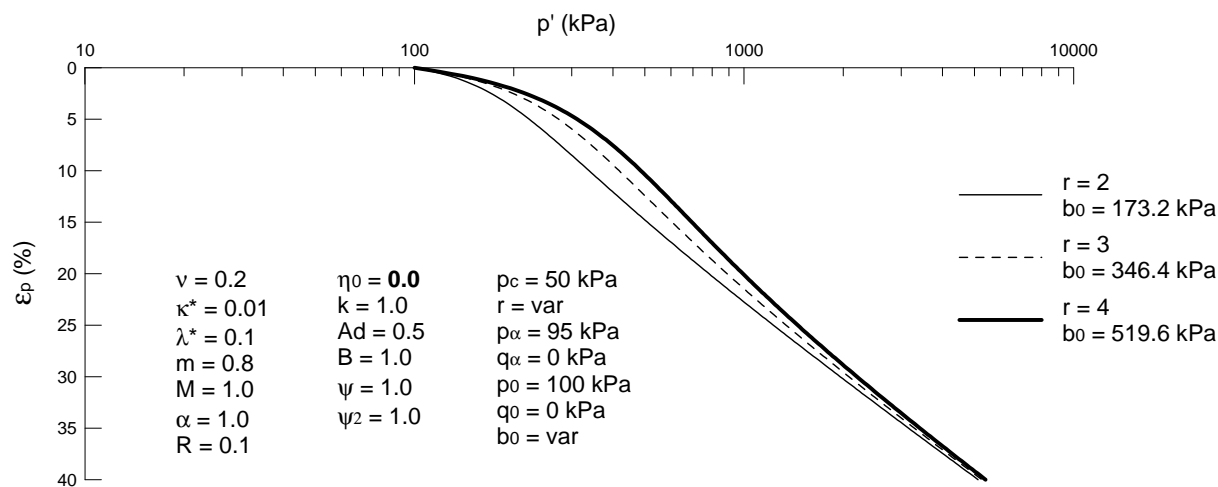


Figura 3.35: Curve di compressibilità edometrica ottenute per diversi valori del grado di struttura iniziale.

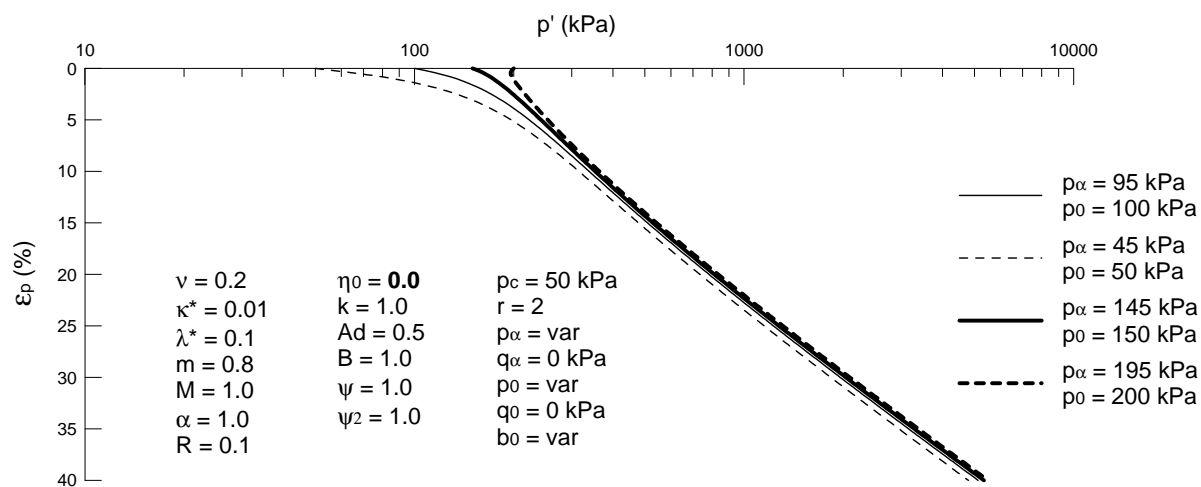


Figura 3.36: Curve di compressibilità edometrica associate a diversi stati tensionali di partenza.

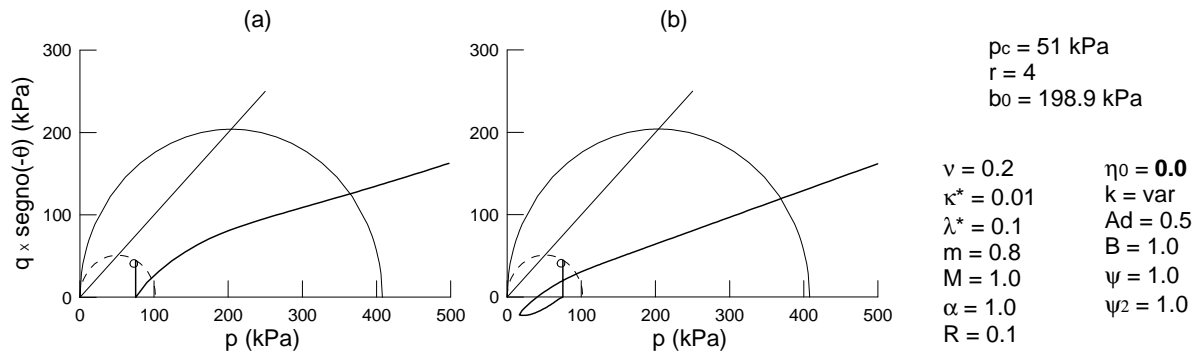


Figura 3.37: Percorsi tensionali che prevedono la simulazione del campionamento: (a) scarico tensionale a  $p$  costante; (b) scarico tensionale a  $p$  costante e rigonfiamento.

$k$	$r_{(q=0)}$	$\frac{\Delta r}{r_0}$
1	3.891	2.7%
2	3.801	5%
3	3.725	6.9%

Tabella 3.6: Riduzione del grado di struttura a seguito del campionamento.

grado di struttura. Per avere un'idea sull'entità della possibile destrutturazione causata dal disturbo tensionale sono state fatte delle simulazioni di prove edometriche in cui è stato simulato anche il campionamento. Le condizioni iniziali, che sono rappresentate in figura 3.37, prevedono uno stato tensionale assialsimmetrico con tensione efficace verticale pari a 105 kPa e tensione orizzontale pari a 60 kPa. Nella prima fase delle analisi viene simulato il campionamento, imponendo all'elemento di seguire un percorso tensionale a pressione media efficace costante, fino all'annullamento della componente deviatorica; nella seconda fase, in cui viene simulata la fase di compressione edometrica, è stato considerato anche il caso in cui il provino viene fatto rigonfiare. In figura 3.38 si riportano alcune curve di compressibilità ottenute per diversi valori della velocità di destrutturazione: come è lecito attendersi, si osserva che la destrutturazione maggiore si ha nel caso in cui l'elemento viene fatto rigonfiare. In tabella 3.6 sono riportati i valori del grado di struttura che si hanno alla fine della prima fase dell'analisi, ovvero in corrispondenza dell'annullamento di  $q$ : la destrutturazione, che è maggiore per valori di  $k$  più elevati, risulta dell'ordine del 5%<sup>5</sup>.

Osservando le curve di compressibilità di figura 3.38 si nota che in tutte è presente una sorta di picco, più o meno marcato in funzione di  $k$ . Dal momento che le curve edometriche fatte su provini di argilla naturale possono avere comportamenti analoghi, ha senso chiedersi se sia possibile mettere in relazione il valore di pressione

<sup>5</sup>La destrutturazione che si ha nel caso in cui viene simulato anche il rigonfiamento, funzione della velocità di destrutturazione e dell'entità del rigonfiamento, può raggiungere valori anche superiori al 50%.



caso	$k$	$p_f$ (kPa)	$p_x$ (kPa)	$\frac{p_f}{p_x}$	$r_x$	$r_x \frac{p_x}{p_f}$	$r_0 \frac{p_x}{p_f}$
a	1	320.8	153.4	2.09	3.08	1.47	1.91
a	2	234.5	120.1	1.95	2.88	1.48	2.05
a	3	199.0	112.7	1.77	2.72	1.54	2.26
b	1	187.1	112.4	1.66	2.20	1.32	2.40
b	3	107.7	97.0	1.11	1.27	1.14	3.60

Tabella 3.7: Confronto tra il rapporto  $\frac{p_f}{p_x}$  ed il grado di struttura ottenuti nelle simulazioni (nel caso b, oltre al campionamento, è stato simulato anche il rigonfiamento).

media efficace a cui corrisponde il picco con il grado di struttura. Questo problema, che viene affrontato anche in Callisto & Rampello (2004), è stato studiato nel caso specifico prendendo in considerazione i risultati delle analisi di figura 3.38, e nel seguito se ne illustrano i principali risultati.

Per ogni curva di compressibilità, escludendo i tratti finali in corrispondenza dei quali si ha una destrutturazione completa, sono stati individuati sul piano  $\ln p-\varepsilon_p$  i punti a cui corrisponde una tangente pari a  $\lambda^*$ ; i valori di pressione media efficace e di deformazione volumetrica corrispondenti ai punti appena definiti sono stati indicati coi termini  $p_f$  ed  $\varepsilon_{pf}$  (si veda ad esempio la figura 3.39). Successivamente sono stati ricavati i valori di pressione media efficace  $p_x$  dei punti che si trovano sul prolungamento della ICL e a cui è associata una deformazione volumetrica pari a  $\varepsilon_{pf}$ ; questi sono dati da:

$$p_x = \exp \left( \ln p_{ICL} + \frac{\varepsilon_{pf}}{\lambda^*} \right) \quad (3.30)$$

Per ogni curva si è calcolato il corrispettivo rapporto  $\frac{p_f}{p_x}$ , e si è osservato che tale rapporto è di norma inferiore al grado di struttura  $r_x$  a cui corrisponde la medesima deformazione volumetrica  $\varepsilon_{pf}$ . In tabella 3.7 sono riportati i risultati delle elaborazioni: nei casi in cui viene simulato il solo disturbo prodotto dal campionamento il rapporto  $\frac{p_f}{p_x}$  risulta inferiore al grado di struttura  $r_x$  mediamente del 50%, e vale circa la metà del grado di struttura iniziale, mentre invece nei casi in cui viene simulato anche il rigonfiamento la differenza tra la quantità  $\frac{p_f}{p_x}$  e il reale grado di struttura è dell'ordine del 20%. Va ricordato che parte della destrutturazione è dovuta al disturbo, e nel caso in cui viene simulato il rigonfiamento la destrutturazione può essere più o meno importante a seconda dell'entità del corrispondente scarico tensionale. La rapidità con cui la curva di compressibilità tende alla ICL dipende ovviamente dalla velocità di destrutturazione, ma dipende anche dagli altri parametri costitutivi. In particolare si è visto che in condizioni edometriche i parametri  $\kappa^*$  e  $B$  possono avere un effetto importante, mentre invece è trascurabile l'effetto di  $A_d$  e di  $\nu$  (figura 3.40).

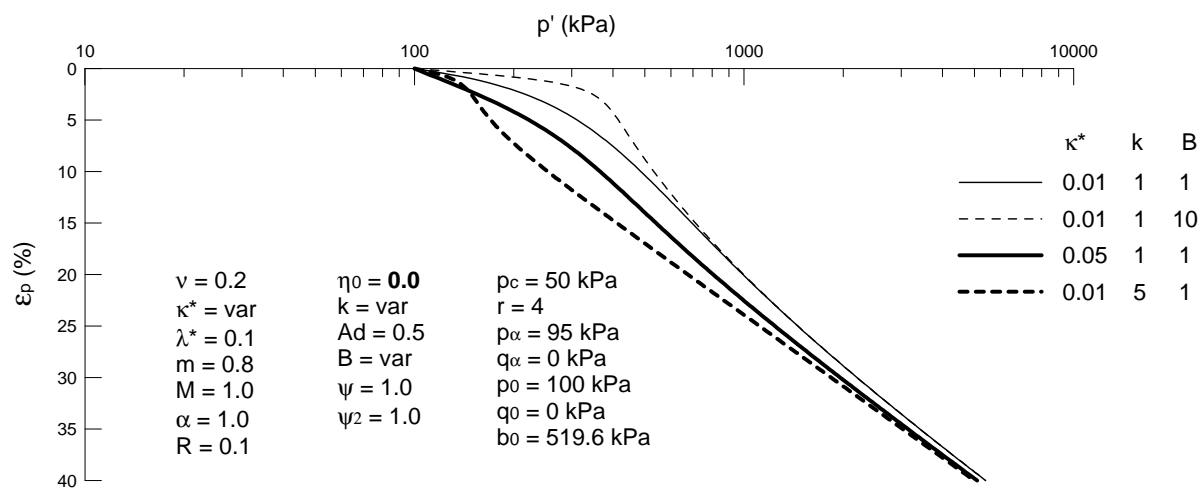


Figura 3.40: Effetto di alcuni parametri sull'andamento della curva di compressibilità edometrica.

## Capitolo 4

# Influenza delle condizioni di drenaggio sulla modellazione degli scavi

Nella maggior parte dei problemi riguardanti gli scavi è lecito assumere che le deformazioni siano impedito lungo una determinata direzione orizzontale, ovvero quella che è diretta parallelamente all'opera di sostegno; questa ipotesi è solitamente valida se sono rispettate le seguenti condizioni: se la geometria dello scavo è regolare, e se le zone considerate sono abbastanza lontane dagli spigoli dello scavo stesso. Come si è visto nel capitolo 1, le zone di terreno che si trovano in prossimità dello scavo sono soggette a perturbazioni differenti a seconda che si trovino a monte o a valle dell'opera: un elemento di terreno posto al di sotto dello scavo subirà una forte riduzione di tensione totale verticale, mentre un elemento che si trova a tergo dell'opera subirà in genere una modesta riduzione di tensione orizzontale per effetto dell'allontanamento della parete.

Nel paragrafo successivo si mostrano i risultati di uno studio fatto per capire quale sia la risposta del modello costitutivo nelle condizioni di deformazione piana tipiche degli scavi, e verrà inoltre discusso l'effetto delle condizioni di drenaggio sui percorsi tensionali e sulle deformazioni. Successivamente verrà affrontato il problema di uno scavo ideale in argilla, e verrà analizzato il comportamento dell'opera in relazione alle condizioni di drenaggio e alle caratteristiche del terreno.

### 4.1 Risposta del modello in condizioni di deformazione piana

Si è studiata la risposta del modello costitutivo in condizioni non drenate lungo percorsi delle tensioni totali tipici degli scavi, ovvero percorsi di compressione ed estensione, in condizioni di deformazione piana. Lo stato tensionale efficace iniziale è caratterizzato da simmetria assiale e coincide col centro della superficie interna: la

$\nu$	$\kappa^*$	$\lambda^*$	$m$	$M$	$R$	$k$	$A_d$	$B$	$\psi$	$\eta_0$	$\alpha$	$\psi_2$
0.22	0.025	0.15	0.88	1.0	0.1	2.5	0.5	5.0	2.0	<b>0.0</b>	1.0	0.0

	$p_c$ (kPa)	$r$	$\bar{\alpha}_1$ (kPa)	$\bar{\alpha}_2$ (kPa)	$\bar{\alpha}_3$ (kPa)	$\sigma_1$ (kPa)	$\sigma_2$ (kPa)	$\sigma_3$ (kPa)
caso 1	90	1	-72.5	-72.5	-125	-72.5	-72.5	-125
caso 2	60	1.5	-72.5	-72.5	-125	-72.5	-72.5	-125

Tabella 4.1: Parametri e condizioni iniziali utilizzati nelle analisi 2D.

tensione verticale efficace vale 125 kPa e quella orizzontale è di 72.5 kPa. Ai parametri del modello sono stati assegnati i valori riportati in tabella 4.1 (tali valori sono stati scelti in modo da riprodurre abbastanza fedelmente il comportamento dell'argilla di Pisa, ben descritto dai risultati delle prove di laboratorio pubblicati da Callisto et al. nel 2002). Sono stati analizzati due diversi casi, con grado di struttura iniziale  $r = 1$  ed  $r = 1.5$ . In entrambi i casi la posizione iniziale della superficie esterna, ipotizzata appartenente all'asse isotropo, è stata ricavata assumendo nota la distanza relativa tra le due superfici del modello.

In primo luogo sono state effettuate delle simulazioni numeriche a controllo di spostamento: ciò ha permesso di ottenere la risposta del modello in condizioni non drenate fino al raggiungimento dello stato critico, con la possibilità di percorrere anche i tratti associati a una caduta di resistenza. I percorsi tensionali ricavati da queste analisi, mostrati in figura 4.1a, hanno inizialmente un andamento simile a quello che si otterrebbe con un semplice modello elastico isotropo; nel caso in cui il grado di struttura iniziale vale  $r = 1.5$  tuttavia si osserva un comportamento fortemente non lineare a partire dalla condizione in cui la superficie esterna viene raggiunta. Rappresentando i risultati sul piano deviatorico (figura 4.1b) si osserva che in entrambe le condizioni limite attiva e passiva l'angolo di Lode vale circa 10 gradi, e la resistenza disponibile risulta intermedia tra quella triassiale in compressione ed estensione. Riportando su tale piano anche le sezioni delle due superfici nella condizione di stato critico è possibile osservare che nel caso con  $r = 1.5$  si verifica un picco di resistenza con successivo decadimento, e si tende allo stato critico per valori della tensione deviatorica più bassi; questo comportamento può essere osservato anche nel piano tensioni-deformazioni (figura 4.2).

Successivamente sono state svolte alcune simulazioni a controllo di forze: per il percorso di compressione si è imposto un decremento della tensione totale orizzontale a tensione totale verticale costante, mentre per il percorso di estensione è stata assegnata una riduzione di tensione totale verticale a tensione totale orizzontale costante. Una prima fase delle simulazioni è stata condotta in condizioni non drenate fino ad ottenere una deformazione orizzontale pari a circa l'1 %; in seguito si è studiato l'effetto della progressiva dissipazione delle



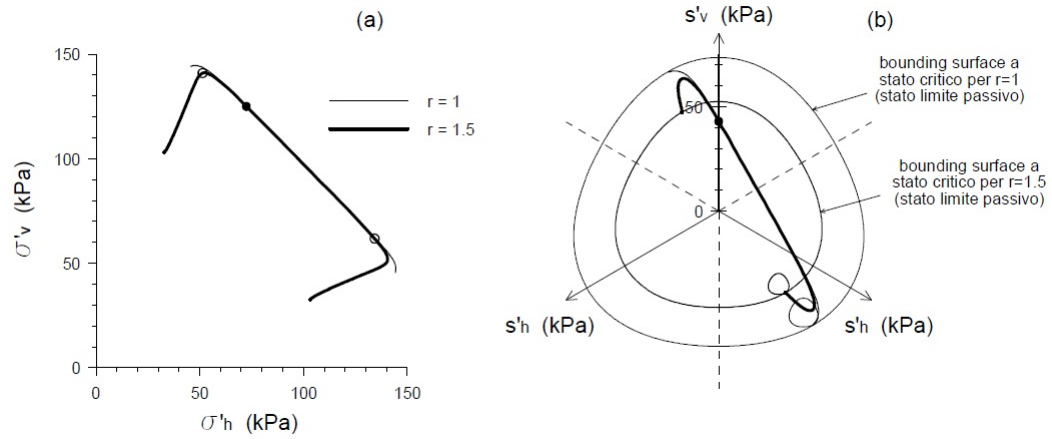


Figura 4.1: Percorsi tensionali in condizioni non drenate: (a) sul piano  $\sigma'_h - \sigma'_v$ ; (b) sul piano deviatorico (a tensioni positive corrispondono stati di compressione).

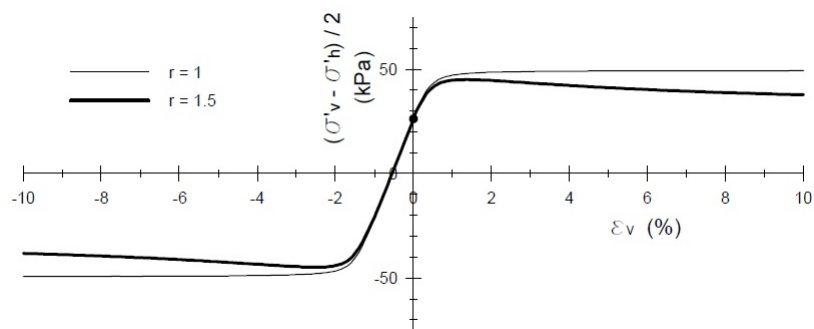


Figura 4.2: Diagramma tensioni-deformazioni in condizioni non drenate (a tensioni positive corrispondono stati di compressione).

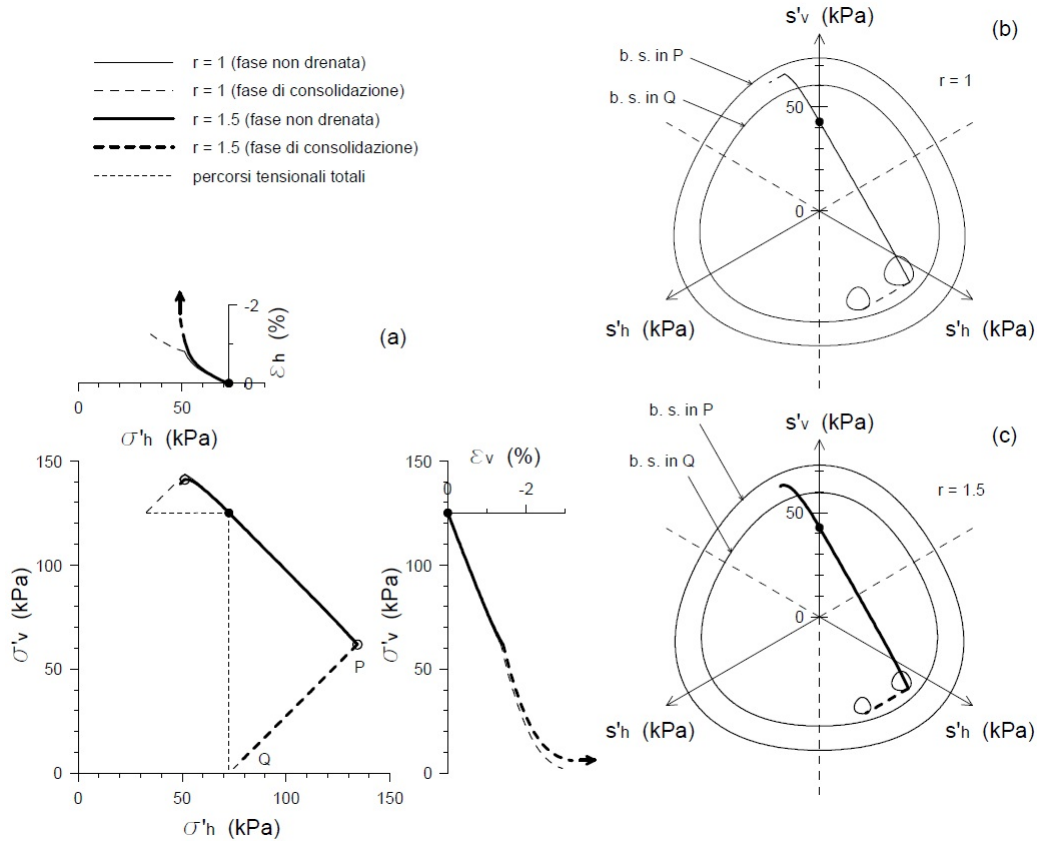


Figura 4.3: Effetto della consolidazione: (a) percorsi tensionali di compressione ed estensione e deformazioni sviluppate; rappresentazione sul piano deviatorico dei percorsi tensionali e delle superfici esterne relative ai percorsi di estensione (b) per  $r = 1$  e (c) per  $r = 1.5$  (a tensioni positive corrispondono stati di compressione).

sovrapressioni interstiziali. I risultati, mostrati in figura 4.3a, indicano che a seguito della consolidazione si verifica un progressivo sviluppo di deformazioni plastiche. Poichè il comportamento in condizioni non drenate nel caso con grado di struttura iniziale  $r = 1.5$  è associato a una caduta di resistenza, la dissipazione delle pressioni interstiziali indotte determina una condizione di instabilità numerica che indica una divergenza delle deformazioni. Nelle figure 4.3b e 4.3c si sono diagrammati i percorsi tensionali nel piano deviatorico, insieme alle superfici esterne raggiunte, per il percorso passivo, al termine della fase non drenata (punto P) e al termine della consolidazione (punto Q). È interessante notare che l'effetto della consolidazione risulta sfavorevole per due motivi distinti: da un lato la consolidazione produce delle variazioni di tensioni efficaci che dirigono lo stato tensionale verso zone del piano deviatorico prossime alla condizione di estensione, e perciò caratterizzate da una minore resistenza disponibile; dall'altro essa induce, per entrambi i valori di  $r$ , un incrudimento negativo della superficie esterna.

## 4.2 Analisi di un problema al finito

Per studiare l'effetto delle condizioni di drenaggio sul comportamento degli scavi nei terreni a grana fine è stato preso in considerazione lo schema riportato in figura 4.4, che rappresenta la sezione bidimensionale di uno scavo simmetrico avente le seguenti caratteristiche:

- larghezza dello scavo = 6 metri;
- altezza dello scavo = 7 metri;
- lunghezza della paratie = 12 metri.

Il terreno è costituito da un deposito argilloso avente le seguenti proprietà:

- peso di volume  $\gamma = 20 \text{ kN m}^{-3}$ ;
- indice dei vuoti iniziale  $e_0 = 1.1$ ;
- permeabilità  $k_s = 1.0 \text{ e } -9 \text{ m s}^{-1}$ .

Nella situazione precedente alle operazioni di scavo la distribuzione delle pressioni interstiziali è assunta idrostatica, con superficie piezometrica posta a 3 metri dal piano campagna, ed il terreno che si trova al di sopra della falda è supposto saturo con pressioni interstiziali nulle. Lo stato tensionale iniziale è quindi litostatico e rispetta le condizioni di simmetria radiale, e le tensioni efficaci orizzontali sono state ricavate assumendo un coefficiente di spinta in quiete  $K_0 = 0.8$  per i primi tre metri di terreno e  $K_0 = 0.6$  per i successivi 27 metri (si fa presente che il dominio utilizzato nelle analisi, come illustrato in figura 4.5, è profondo 30 metri). Assumendo un peso di volume dell'acqua pari a  $\gamma_w = 10 \text{ kN m}^{-3}$ , stante l'ipotesi di completa saturazione del mezzo, è possibile ricavare il peso di volume del secco (richiesto come dato d'ingresso dal codice di calcolo Abaqus), che sarà pari a:

$$\gamma_d = \gamma - \gamma_w \frac{e}{1+e} = 1.4762 \text{ kN m}^{-3} \quad (4.1)$$

Per semplicità la posizione iniziale della superficie interna è stata assunta coincidente con lo stato tensionale litostatico: ciò implica che, sebbene il dominio elastico sia confinato in una piccola regione dello spazio delle tensioni, il comportamento costitutivo sarà inizialmente governato dalla sola rigidità elastica. Per quanto riguarda invece la superficie esterna, la sua dimensione  $rp_c$  è stata assegnata in modo tale da rispettare le seguenti condizioni:

- il centro della superficie esterna deve trovarsi sull'asse isotropo, e quindi il parametro  $\boldsymbol{\eta}_0$  dev'essere nullo;

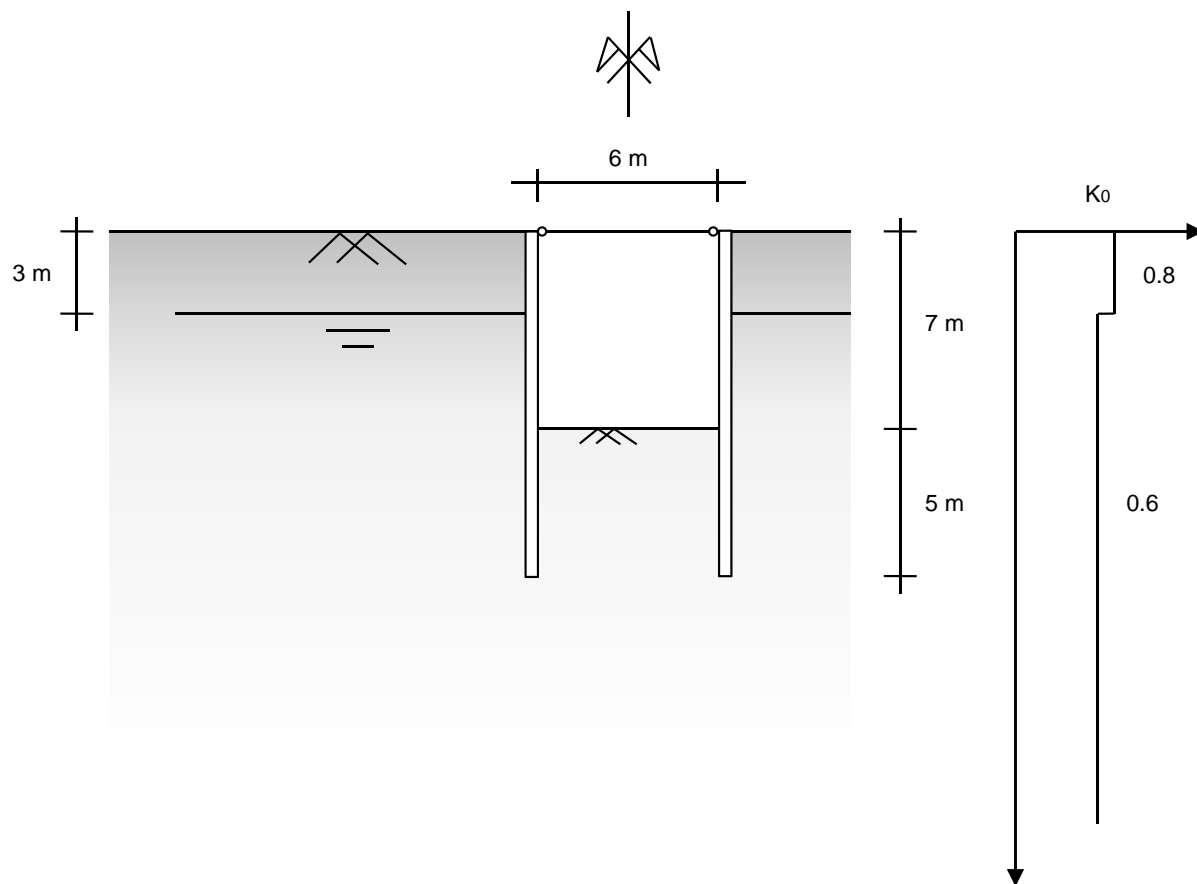


Figura 4.4: Schema dello scavo considerato nelle analisi.

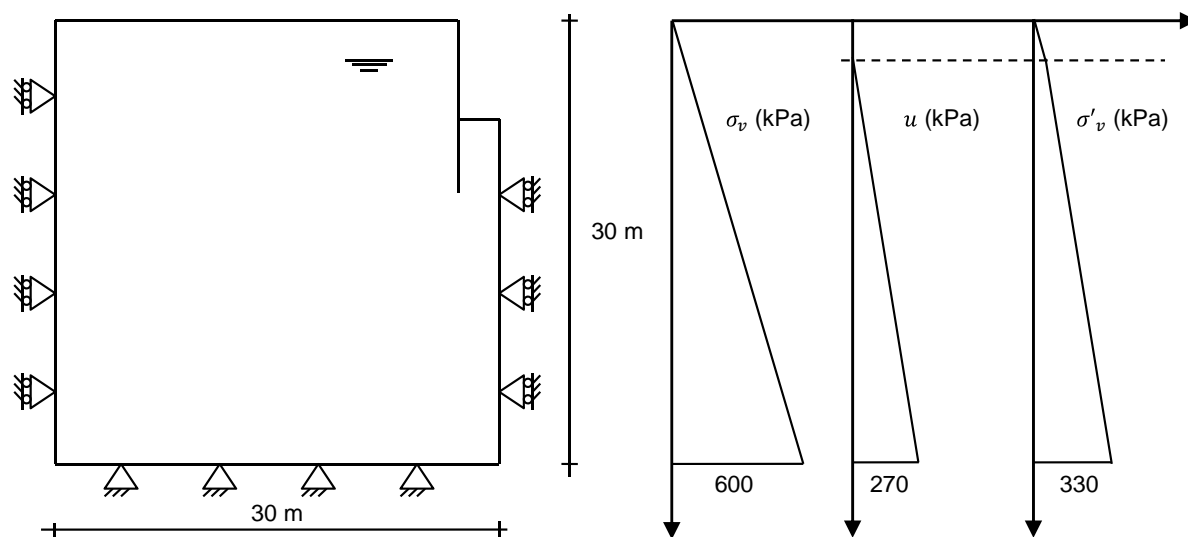


Figura 4.5: Vincoli al contorno del dominio e condizioni iniziali (tensioni totali verticali, pressioni interstiziali e tensioni efficaci verticali).

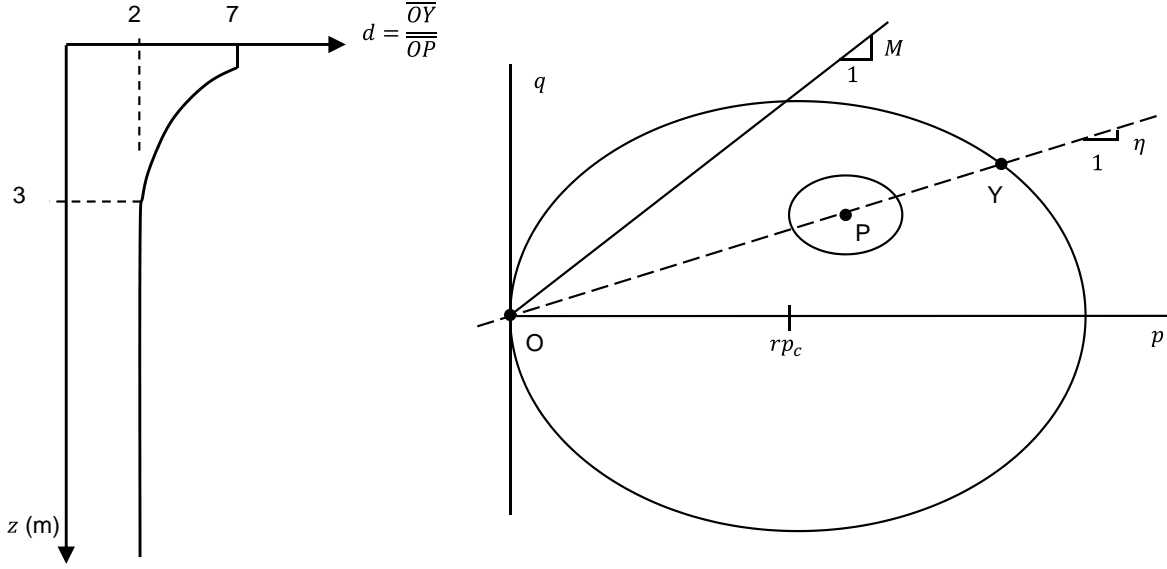


Figura 4.6: Posizione iniziale delle superfici del modello.

- la distanza che sul piano degli invarianti  $p$ - $q$  intercorre tra il punto  $P$ , corrispondente allo stato tensionale litostatico, ed il punto  $Y$ , appartenente alla superficie esterna e tale per cui risulti  $\frac{q_y}{p_y} = \frac{q_p}{p_p}$ , è stabilita a priori e deve essere tale per cui il rapporto  $d = \frac{\sqrt{p_y^2 + q_y^2}}{\sqrt{p_p^2 + q_p^2}}$  segua l'andamento di figura 4.6.

Essendo le tensioni litostatiche note, gli invarianti corrispondenti al punto  $Y$  possono essere ricavati risolvendo il seguente sistema d'equazioni:

$$\begin{cases} q_y = \eta p_y \\ \sqrt{p_y^2 + q_y^2} = d \sqrt{p_p^2 + q_p^2} \end{cases} \quad (4.2)$$

dove  $\eta = 3 \frac{1-K_0}{1+2K_0}$  è il rapporto tra gli invarianti calcolato in  $P$ , mentre  $d$ , che è una misura della fissata distanza tra le superfici, può essere visto come una sorta di grado di sovraconsolidazione. Utilizzando l'equazione della superficie esterna se ne ricava di conseguenza la dimensione:

$$rp_c = \frac{d}{2} \left( 1 + \frac{\eta^2}{M^2} \right) \sqrt{(p_p^2 + q_p^2) (1 + \eta^2)} \quad (4.3)$$

Come illustrato in tabella 4.2 sono stati analizzati tre differenti casi. Nel primo di essi (T1) il deposito argilloso è privo di struttura ( $r = 1$ ), e quindi il suo comportamento sarà analogo a quello dello stesso terreno ricostituito. Non essendoci una struttura, in questa situazione la distanza tra le due superfici del modello è un indice diretto del grado di sovraconsolidazione, il quale risulta pari a  $OCR \simeq 1.3$ , con valori maggiori nei primi tre metri di profondità. Nel secondo caso (T2) la dimensione della superficie esterna è mantenuta uguale a quella del primo

$\nu$	$\kappa^*$	$\lambda^*$	$m$	$M$	$R$	$k$	$A_d$	$B$	$\psi$	$\eta_0$	$\alpha$	$\psi_2$
0.22	0.025	0.15	0.88	1.0	0.1	var	0.5	5.0	2.0	<b>0.0</b>	1.0	0.0

	$r$	$k$
T1	1.0	2.5
T2	2.0	2.5
T3	2.0	4.0

Tabella 4.2: Parametri e grado di struttura iniziale utilizzati nelle analisi.

caso, ma al terreno viene assegnato un grado di struttura iniziale  $r = 2$  e una velocità di destrutturazione  $k = 2.5$ : queste condizioni iniziali, assieme ai parametri riportati in tabella 4.2, sono qualitativamente rappresentative dell'argilla di Pisa, ampiamente studiata (Callisto 1996, Callisto & Calabresi 1998) è già calibrata in precedenti lavori (Callisto et al. 2002). Come evidenziato dai risultati degli studi parametrici discussi nel paragrafo 3.3, il comportamento di due materiali aventi diverso grado di struttura ma con stessa dimensione della superficie esterna (a parità di parametri) si mantiene approssimativamente analogo fino al raggiungimento della resistenza (si vedano ad esempio le figure 3.18 e 3.26), ma poi l'effetto della destrutturazione può comportare una considerevole caduta di resistenza e quindi materiali più o meno strutturati possono avere risposte post-picco molto diverse: per questo motivo ci si attende che nei casi T1 e T2 il comportamento dello scavo sia differente. Inoltre se la velocità di destrutturazione è elevata (come nel caso T3, in cui  $k = 4$ ) la resistenza di picco può ridursi, e quindi le condizioni di sicurezza dello scavo possono peggiorare notevolmente rispetto ai casi precedenti.

La paratia posta a sostegno dello scavo è modellata con elementi beam di tipo B21, cioè a due nodi e con un solo punto di Gauss. Il legame assegnato ad essa è elastico lineare con rigidezza assiale  $EA = 15000000$  kN/m e rigidezza flessionale  $EI = 312000$  kN, a cui corrisponde un'opera di sostegno composta da diaframmi di calcestruzzo armato di spessore pari a 50 centimetri. Tale opera è certamente sovradimensionata per uno scavo di sette metri, in quanto ha un momento flettente resistente maggiore di 1000 kN m/m. Dopo il primo metro di scavo lo spostamento della testa della paratia viene mantenuto fisso, come se venisse installato un puntone infinitamente rigido. Per il terreno si sono utilizzati degli elementi solidi di tipo CPE8RP, che sono elementi porosi bidimensionali ad otto nodi e ad integrazione ridotta, cioè con quattro punti di Gauss.

Per ogni caso è stata effettuata la verifica alla stabilità del fondo scavo nelle condizioni di breve termine, seguendo il metodo proposto da Bjerrum & Eide (1956); l'azione, ovvero la tensione totale verticale agente alla profondità di 12 metri a monte dell'opera ( $E = 240$  kPa), è stata confrontata con la resistenza, data da:

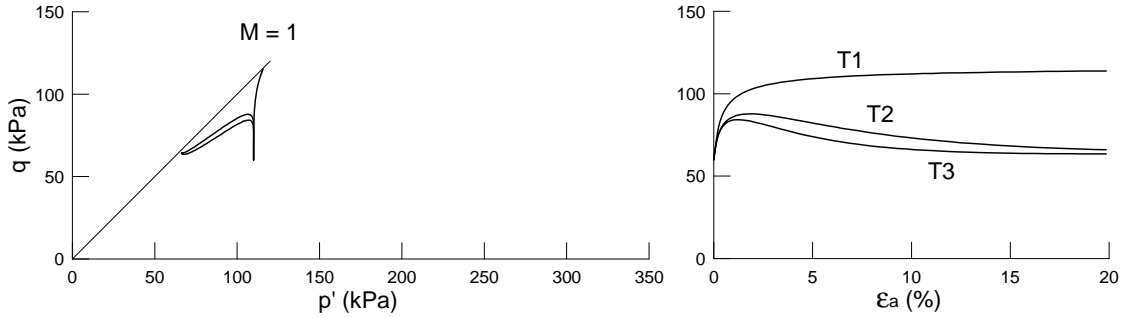


Figura 4.7: Risultati delle simulazioni delle prove triax-CIU per la stima della coesione non drenata a 12 metri.

	T1	T2	T3
$R/E$	1.5	1.23	1.19

Tabella 4.3: Coefficienti di sicurezza alla stabilità globale nelle condizioni di breve termine.

$$R = \frac{N_c \frac{C_u}{\gamma_C} + q_0}{\gamma_R} \quad (4.4)$$

dove  $\gamma_C = 1.4$  e  $\gamma_R = 1.1$  sono dei coefficienti parziali,  $N_c$  è un coefficiente che tiene conto delle dimensioni dello scavo (nel caso in esame  $N_c = 7.15$ ),  $C_u$  è la resistenza non drenata e  $q_0$  è il sovraccarico laterale, ovvero la tensione totale verticale agente in asse allo scavo alla profondità di 12 metri. La resistenza non drenata è stata ricavata attraverso la simulazione numerica di prove triassiali non drenate fatte su provini idealmente prelevati alla profondità di 12 metri: dai risultati, che sono riportati in figura 4.7, si evince che nel caso T1 la resistenza non drenata ( $C_u = 57.5$  kPa) è ben maggiore di quella che si ottiene negli altri due casi, in cui tra l'altro occorre fare distinzione tra la condizione di picco e quella a stato critico. Volendo fare affidamento sulla resistenza massima, per i casi T2 e T3 si ha rispettivamente  $C_u = 44$  kPa e  $C_u = 42$  kPa, ed i conseguenti rapporti tra le resistenze e le azioni, che possono essere visti come dei coefficienti di sicurezza, sono riportati in tabella 4.3.

Nell'ipotesi in cui lo scavo venga effettuato in tempi rapidi rispetto a quelli connessi all'instaurarsi dei fenomeni idrodinamici nel terreno, il terreno stesso risponderà in condizioni non drenate, con conseguente generazione di sovrappressioni interstiziali. Dal momento che lo scavo produce in generale uno scarico tensionale gli elementi di terreno prossimi all'opera tenderebbero ad aumentare di volume e quindi le sovrappressioni che si generano sono negative. L'entità di queste sovrappressioni interstiziali, che indicheremo col termine  $\Delta u$ , dipenderanno in generale dalla zona considerata, nonché dalla rigidità degli elementi strutturali e dal tipo di terreno. Considerando noto il valore della variazione della tensione verticale totale  $\Delta \sigma_v$  che si ha in asse allo scavo, in condizioni non drenate, è utile definire il seguente rapporto:

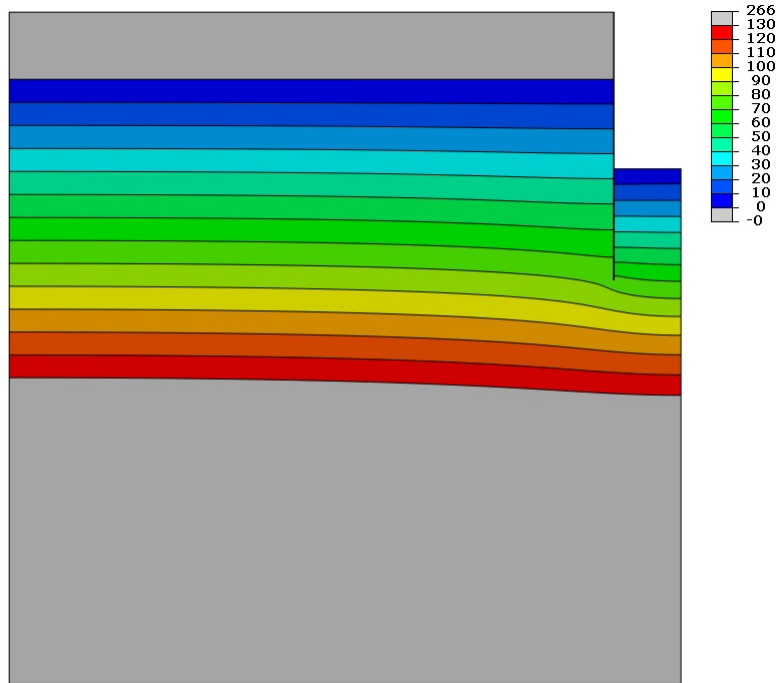


Figura 4.8: Condizione stazionaria di riferimento per lo scavo di figura 4.4 (valori in kPa delle pressioni interstiziali di lungo termine).

$$\alpha = \frac{\Delta u}{\Delta \sigma_v} \quad (4.5)$$

Essendo le quantità  $\Delta \sigma_v$  e  $\Delta u$  entrambe negative, tale rapporto risulterà positivo.

Se al termine dello scavo il terreno avesse modo di consolidare, le sovrappressioni interstiziali tenderebbero a ridursi, fino al raggiungimento di una nuova condizione idraulica stazionaria. Tale condizione non è necessariamente quella idrostatica: ad esempio, se a fondo scavo le pressioni interstiziali fossero mantenute nulle, a lungo termine si avrebbe un moto di filtrazione dal basso verso l'alto come nel caso dello scavo di Lion Yard (Nash et al. 1996). In casi come questo le sovrappressioni indotte in condizioni non drenate non tenderebbero a dissiparsi completamente fino a raggiungere un valore nullo, in quanto dovranno assestarsi al valore a cui corrisponde il raggiungimento della condizione idraulica stazionaria. Nello scavo oggetto del presente studio (figura 4.4), se il fondo scavo viene mantenuto asciutto, la condizione idraulica stazionaria di lungo termine è quella a cui corrisponde un moto di filtrazione piano, e le corrispettive pressioni interstiziali sono distribuite come riportato in figura 4.8.

Solitamente nei cantieri le prime fasi di lavoro sono più lente, in quanto parte del tempo deve essere necessariamente utilizzato per l'organizzazione del cantiere stesso: può quindi avere senso supporre che le prime operazioni di scavo avvengano in condizioni drenate. Nel caso in esame, ipotizzando che l'asportazione del primo metro



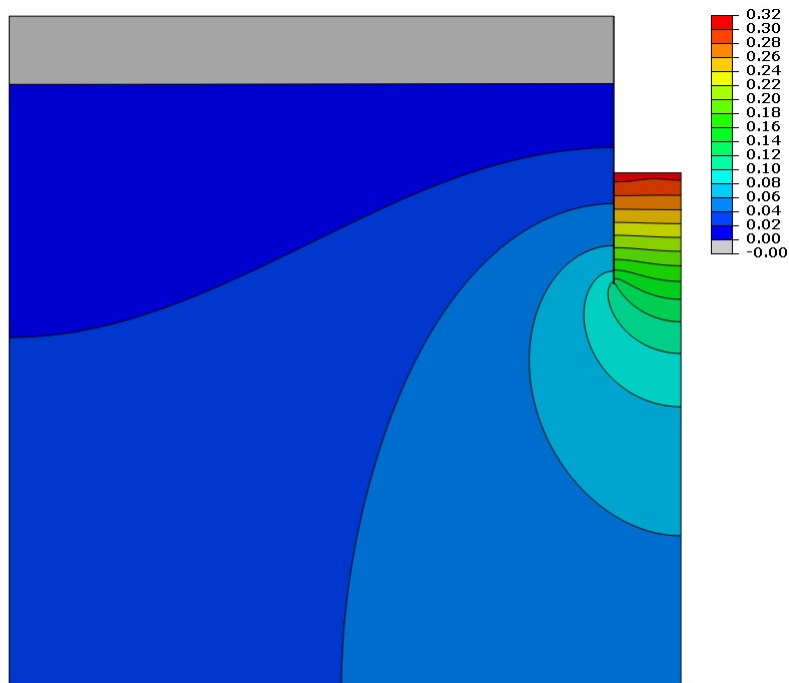


Figura 4.9: Condizione stazionaria di riferimento per lo scavo di figura 4.4 (isolinee del rapporto  $\alpha = \frac{\Delta u}{\Delta \sigma_v}$ ).

avvenga lentamente, e che solo i successivi sei metri vengano scavati effettivamente in condizioni non drenate, la grandezza  $\alpha$  andrebbe calcolata considerando una variazione di tensione verticale pari a  $\Delta \sigma_v = -120$  kPa. La distribuzione del rapporto  $\alpha$  che ne risulterebbe, in riferimento alla condizione stazionaria seguente al mantenimento del fondo scavo asciutto (figura 4.8), è riportata nella figura 4.9: come si può notare, a dissipazione completata, a fondo scavo  $\alpha$  tenderebbe ad un valore non nullo. A partire da una distribuzione come quella di figura 4.9, conoscendo la distribuzione della pressione interstiziale  $u_0$  precedente allo scavo (e conoscendo ovviamente anche la variazione delle tensioni verticali totali alla quale i valori di  $\alpha$  sono riferiti), è facile risalire al valore della pressione interstiziale:

$$u = u_0 + \alpha \Delta \sigma_v \quad (4.6)$$

### Effetto della velocità di destrutturazione in condizioni drenate

Prima di studiare la risposta dello scavo in condizioni non drenate sono state effettuate delle analisi drenate, in cui le fasi di scavo avvengono lentamente. Nelle figure 4.10, 4.11 e 4.12 sono riportate le isolinee degli spostamenti orizzontali che si hanno al raggiungimento del fondo scavo (profondo 7 metri dal piano campagna). Come si può notare, nel caso in cui la velocità di destrutturazione è maggiore (figura 4.12) la resistenza del

terreno viene completamente mobilitata, e si ha l'attivazione di un meccanismo plastico che porta l'opera al collasso. Questo comportamento era atteso, in quanto i risultati ottenuti dalle simulazioni delle prove triassiali fatte in precedenza avevano mostrato che in terreni aventi velocità di destrutturazione maggiore le resistenze disponibili possono ridursi notevolmente. Nel caso T1 invece, essendo la resistenza molto maggiore, si ottengono spostamenti contenuti. In modo del tutto analogo si può osservare che gli spostamenti verticali a fondo scavo, passando dal caso T1 (figura 4.14) al caso T2 (figura 4.15) e poi infine al caso T3 (figura 4.16), aumentano notevolmente.

## **Sovrapressioni interstiziali indotte in condizioni non drenate**

Le analisi numeriche svolte per studiare il comportamento dell'opera in condizioni non drenate prevedono le seguenti fasi:

- scavo fino alla profondità di un metro in condizioni drenate;
- posizionamento del vincolo che impedisce ulteriori spostamenti orizzontali della testa della paratia;
- prosecuzione dello scavo fino alla profondità di sette metri in condizioni non drenate.

Per ogni tipologia di terreno si è ricavata la distribuzione del rapporto  $\alpha = \frac{\Delta u}{\Delta \sigma_v}$ , tenendo in conto la sola riduzione di tensione verticale avvenuta in condizioni non drenate ( $\Delta \sigma_v = -120$  kPa). I risultati, riportati nelle figure 4.17, 4.18 e 4.19, mostrano che nel caso di terreno T1  $\alpha$  raggiunge in prossimità del fondo scavo valori molto prossimi al 95%, e anche nei casi con grado di struttura iniziale  $r = 2$  arriva a valori elevati (80%). Le zone dove le sovrappressioni indotte risultano maggiori sono chiaramente quelle in cui il terreno tenderebbe a rigonfiare maggiormente, ovvero sotto lo scavo. In prossimità del piede della paratia, inoltre, si osserva che nella zona di monte i valori di  $\alpha$  sono maggiori di quelli che si hanno a valle.

Come mostrato dall'entità degli spostamenti orizzontali (figura 4.20), rispetto alla condizione drenata, la condizione di drenaggio impedito ha comportato un considerevole miglioramento della risposta dello scavo soprattutto nel caso T3, cui è associata una velocità di destrutturazione elevata.

## **Effetto combinato della consolidazione e della destrutturazione (terreno T3)**

Nel caso T3, come si è visto, la condizione di drenaggio impedito è decisamente favorevole ai fini della sicurezza dello scavo. Tuttavia l'effetto della dissipazione delle sovrappressioni interstiziali causato dalla consolidazione, che comporta a sua volta una variazione delle tensioni efficaci nel terreno, può portare ad un eccessivo sviluppo di deformazioni plastiche e quindi al collasso dell'opera. In questo caso la velocità di destrutturazione gioca un ruolo importante, in quanto può accelerare il raggiungimento delle condizioni limite.

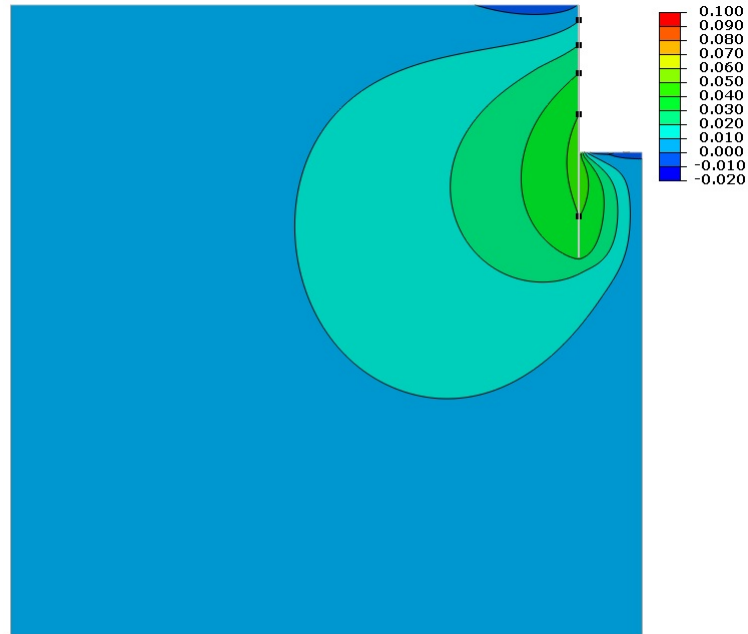


Figura 4.10: Spostamenti orizzontali (m) a fine scavo (analisi drenata con terreno T1).

In figura 4.21, in riferimento al caso T3, è diagrammato lo spostamento orizzontale del piede della paratia in funzione del tempo a partire dal quale ha inizio la consolidazione; inoltre, per tre determinate ascisse temporali, si riportano la deformata dell'opera, la distribuzione di  $\alpha$  e quella del grado di struttura. A seguito della consolidazione si nota un progressivo sviluppo degli spostamenti orizzontali, fino ad una situazione di apparente stabilità, superata la quale si ha una ripresa degli spostamenti che è destinata a non arrestarsi. Mano a mano che le zone poste in prossimità dell'opera raggiungono la completa destrutturazione, per la stabilità dell'opera stessa sarà richiesto il contributo degli elementi di terreno che si trovano a distanze maggiori; quindi la destrutturazione andrà a coinvolgere zone via via maggiori, fino al raggiungimento di una condizione critica che porta al collasso dello scavo.

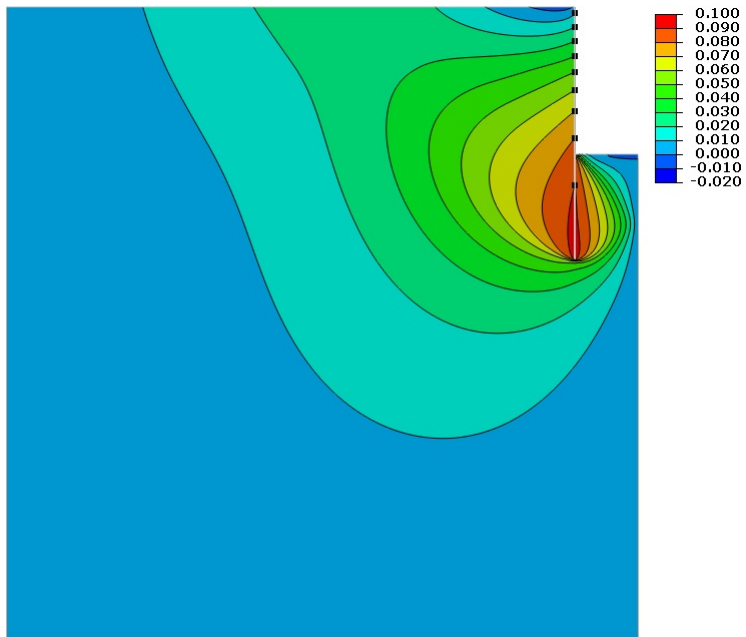


Figura 4.11: Spostamenti orizzontali (m) a fine scavo (analisi drenata con terreno T2).

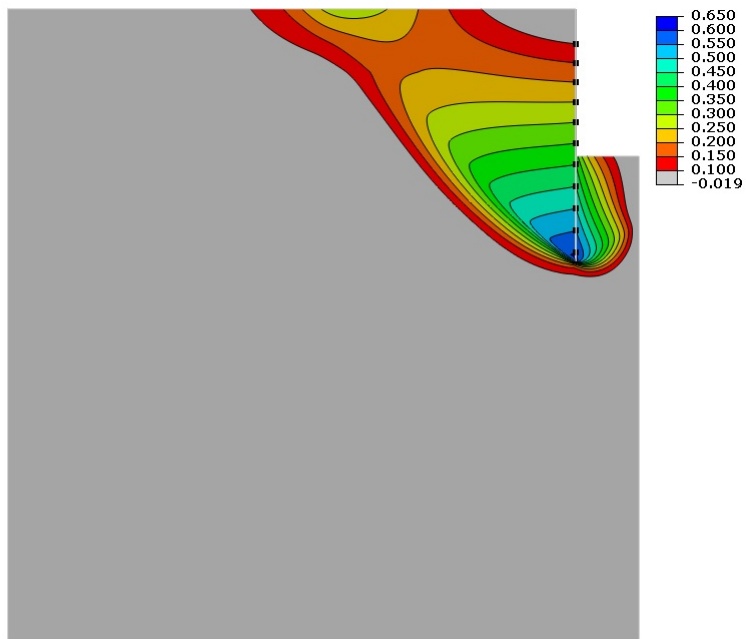


Figura 4.12: Spostamenti orizzontali (m) a fine scavo (analisi drenata con terreno T3).

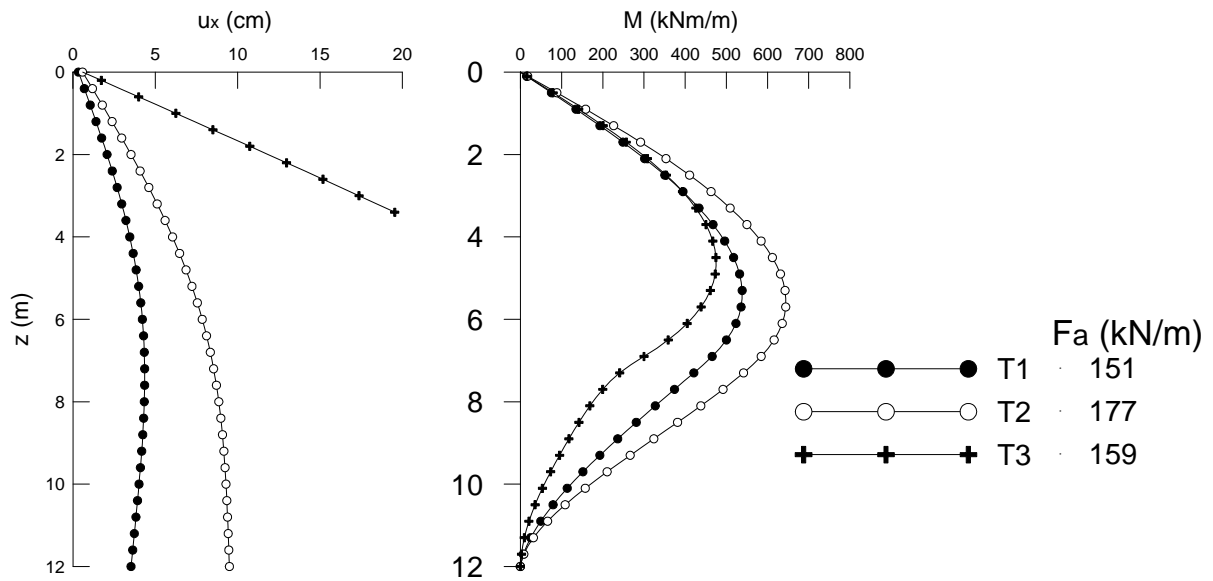


Figura 4.13: Spostamenti orizzontali della paratia e momenti flettenti a fine scavo (analisi drenata).

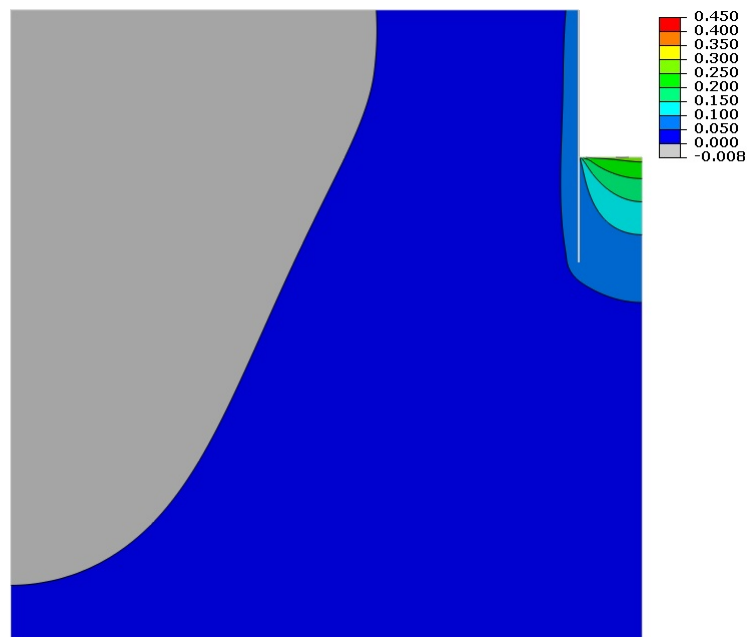


Figura 4.14: Spostamenti verticali (m) a fine scavo (analisi drenata con terreno T1).

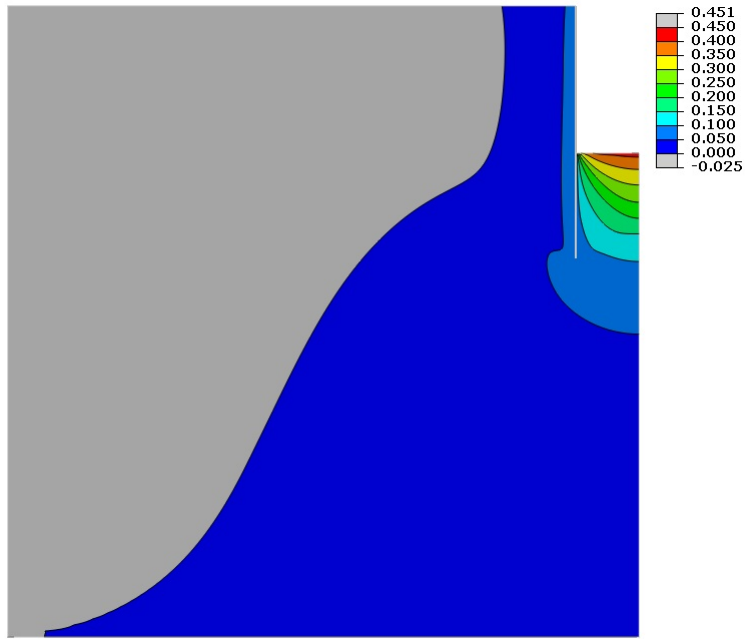


Figura 4.15: Spostamenti verticali (m) a fine scavo (analisi drenata con terreno T2).

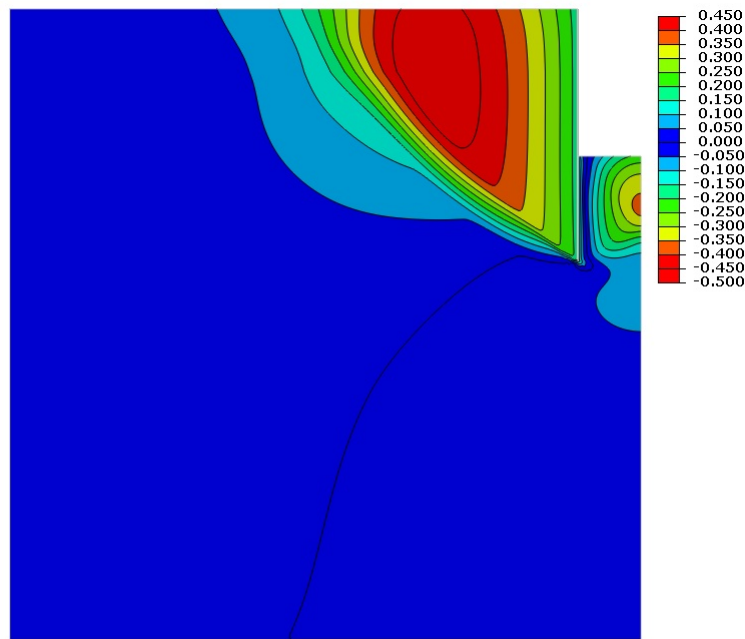


Figura 4.16: Spostamenti verticali (m) a fine scavo (analisi drenata con terreno T3).

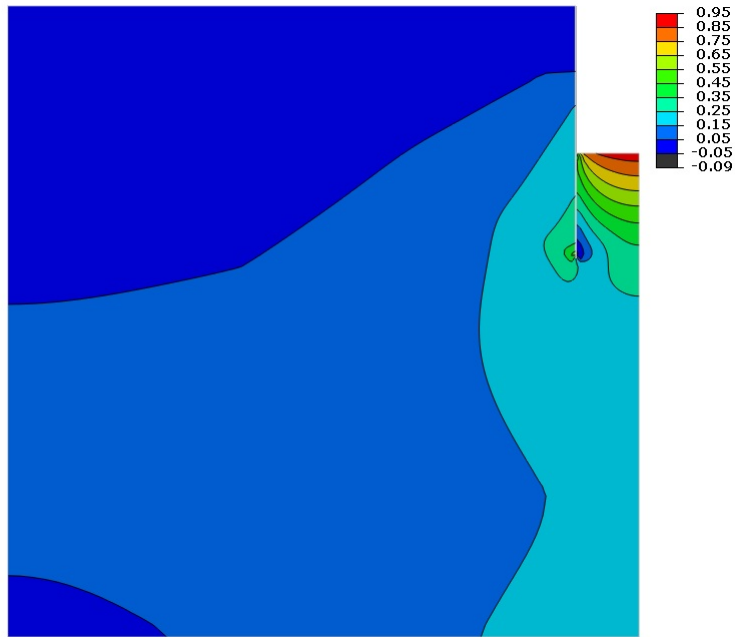


Figura 4.17: Sovrapressioni interstiziali indotte dallo scavo in condizioni non drenate (isolinee di  $\alpha$  per il terreno T1).

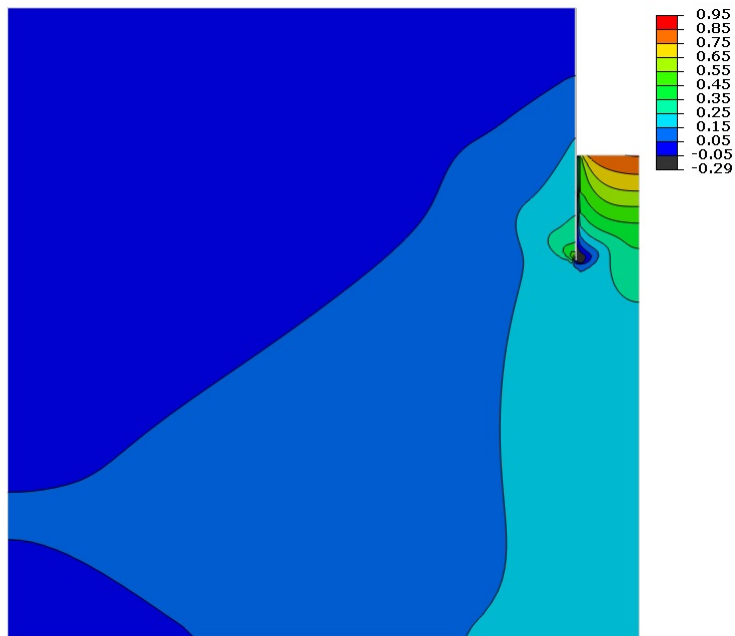


Figura 4.18: Sovrapressioni interstiziali indotte dallo scavo in condizioni non drenate (isolinee di  $\alpha$  per il terreno T2).

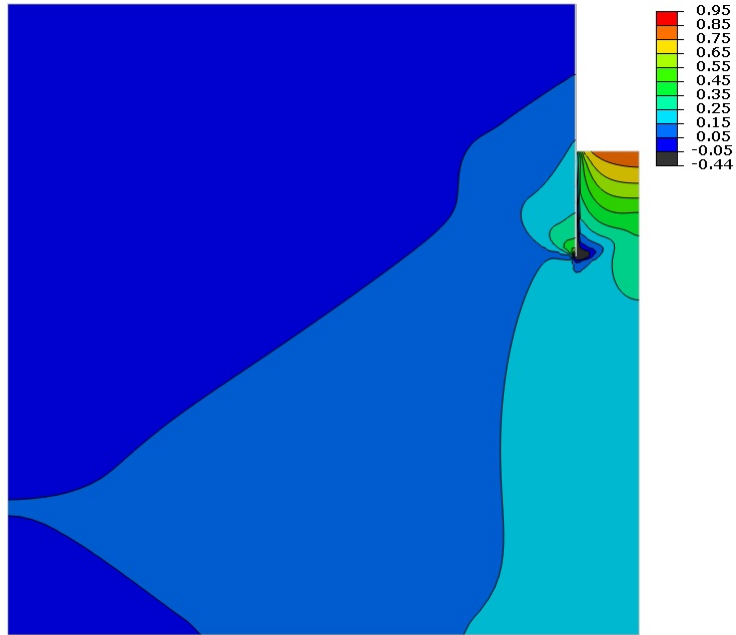


Figura 4.19: Sovrappressioni interstiziali indotte dallo scavo in condizioni non drenate (isolinee di  $\alpha$  per il terreno T3).

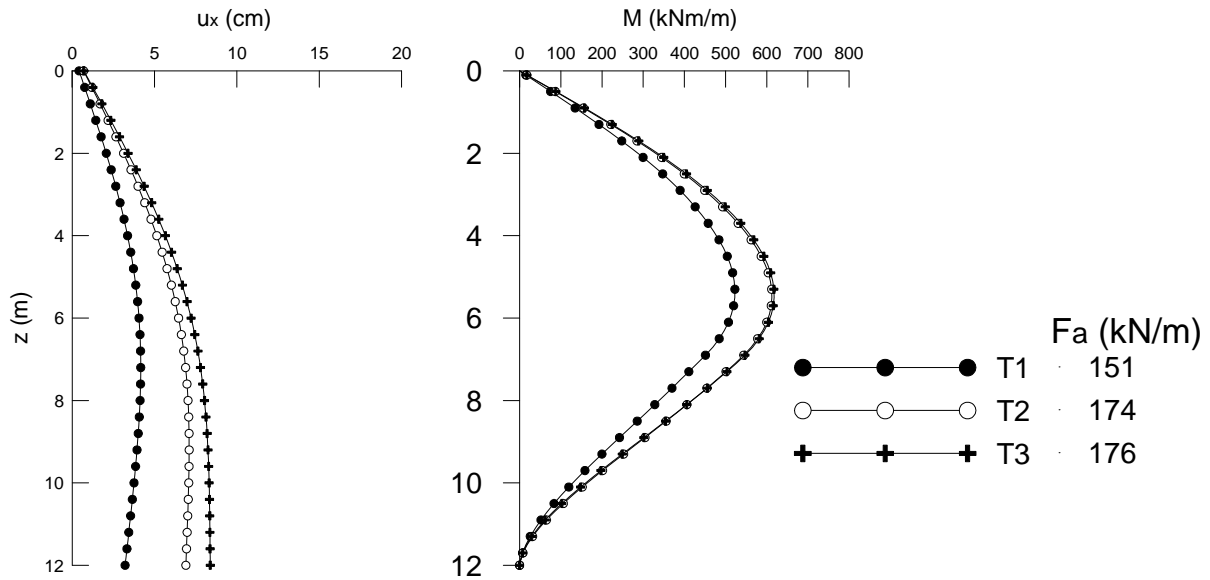


Figura 4.20: Spostamenti orizzontali della paratia e momenti flettenti a fine scavo (analisi non drenata).



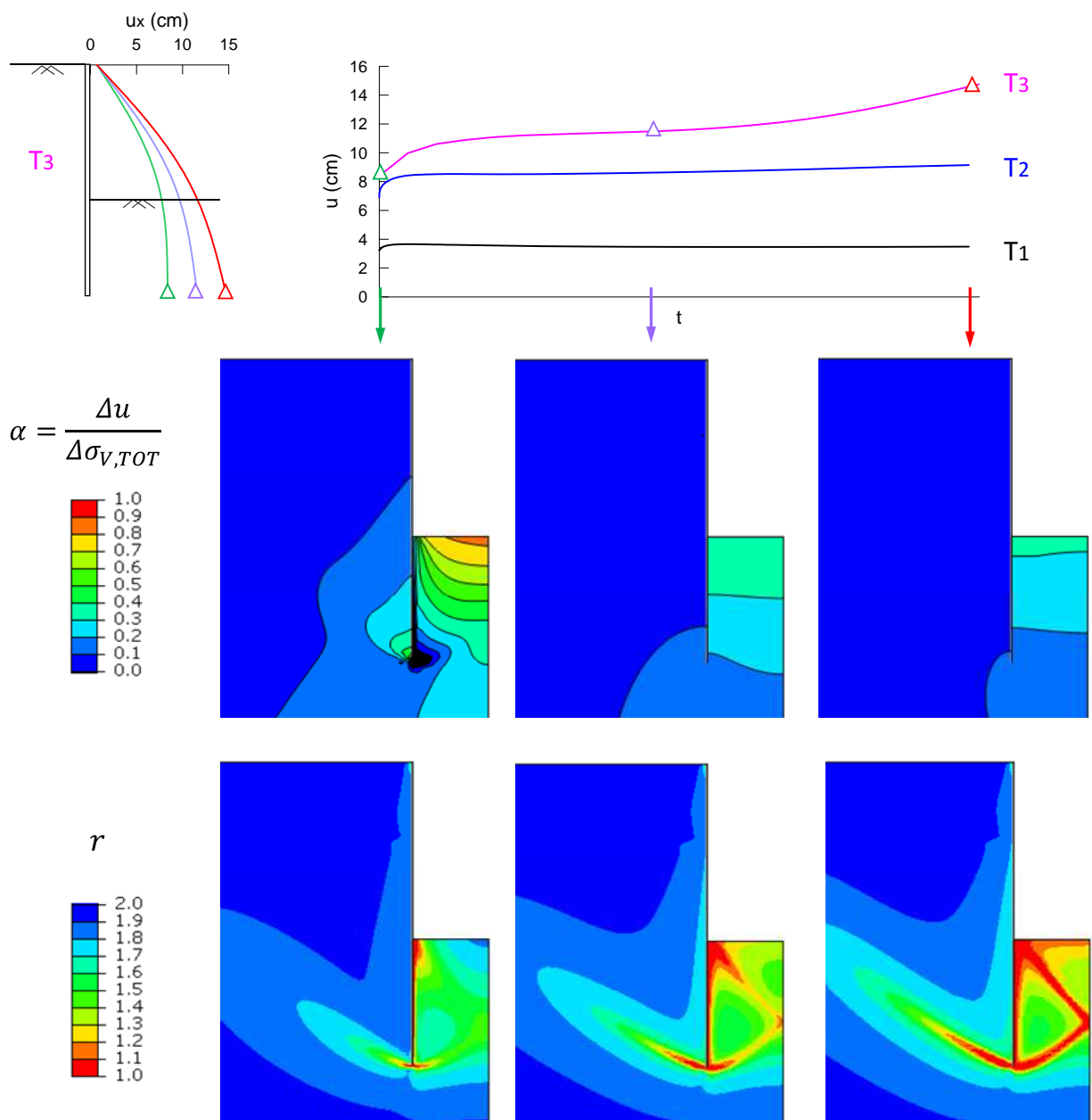


Figura 4.21: Effetto della consolidazione (terreno T3).



## Capitolo 5

# Simulazione dello scavo del Bund IFC

Durante l'ultimo anno di dottorato una parte della ricerca è stata svolta a Shanghai, con lo scopo preciso di studiare e simulare uno scavo profondo in argilla. Durante questo periodo all'estero, durato 12 settimane (dal giorno 8 Aprile fino al 30 Giugno 2015), la ricerca si è svolta prevalentemente alla Tongji University, con la collaborazione del Professore Qian Jiangu e del suo gruppo di ricerca. Tra tutte le università cinesi, la Tongji University è considerata una delle migliori per quanto concerne l'ingegneria civile; essa dispone di molte risorse e può vantare un numero considerevole di ricercatori.

Sebbene il rapido sviluppo della Cina abbia già raggiunto il suo picco, nelle sue città sono ancora molte le opere civili in via di esecuzione. Si pensi ad esempio alla metropolitana di Shanghai: aperta nel 1993, ha subito negli anni un rapido sviluppo, fino a raggiungere una lunghezza complessiva di oltre 500 chilometri e quindi diventare la più lunga al mondo. Nonostante ciò, è attualmente in atto un considerevole ampliamento della rete metropolitana, e si prevede che entro il 2020 (fra cinque anni) la sua lunghezza totale aumenterà di circa 250 chilometri.

La realizzazione delle stazioni della metropolitana di Shanghai ha reso necessario l'esecuzione di numerosi scavi profondi, spesso nei pressi di aree densamente popolate. Al fine di controllare le prestazioni di questi scavi e di osservare il loro effetto sulle strutture adiacenti, molti siti sono stati attentamente monitorati, e in alcuni casi le misurazioni effettuate sono state rese pubbliche e possono essere quindi facilmente consultate (Tan & Li 2011, Liu et al. 2011, Ng et al. 2012, Tan & Wei 2012, Tan et al. 2014, Hong et al. 2015). La stessa cosa vale anche per altre opere civili, come ad esempio la Shanghai Tower (Tan & Wang 2013).

Nonostante la considerevole disponibilità di misure in sito, sono invece poche le pubblicazioni riguardanti la simulazione numerica di questi scavi. Probabilmente ciò è dovuto, in parte, al livello di complessità che oggi ci si attende da un'analisi numerica affinché possa portare a risultati utili alla ricerca. Infatti, così come i computer diventano sempre più performanti, di pari passo cresce anche il livello di dettaglio al quale ambire. Per fare un

esempio, negli ultimi anni lo studio del comportamento delle terre naturali ha portato allo sviluppo di modelli costitutivi sempre più complicati, i quali richiedono molto impegno per la comprensione, per l'implementazione e anche per la scelta dei parametri, che a volte può richiedere prove di laboratorio non convenzionali.

Lo scavo oggetto del presente studio, che verrà illustrato nel successivo paragrafo, è quello relativo allo Shanghai Bund International Financial Centre, un nuovo centro congressi che sorgerà nel centro della città. Le simulazioni numeriche sono state affrontate utilizzando il codice di calcolo agli elementi finiti Abaqus, adottando per il terreno il modello costitutivo implementato nel presente lavoro.

## 5.1 Descrizione del caso di studio

Il Bund International Financial Centre sarà un nuovo centro finanziario di Shanghai; esso verrà realizzato vicino al fiume Hangpu<sup>1</sup>, a sud del Bund, poco lontano dallo Yuyuan Garden (vedi figura 5.1). Il progetto prevede la costruzione di diverse opere civili, tra cui due edifici di circa 40 piani ed altri edifici minori. L'area interessata da questo complesso, la cui estensione è pari a 43000 m<sup>2</sup> circa, è suddivisa principalmente in tre zone: l'area nord (17000 m<sup>2</sup> circa), l'area sud (22000 m<sup>2</sup> circa) e l'area centrale (vedi figura 5.2). Nonostante la forma di quest'area sia piuttosto irregolare, per avere un'idea delle sue dimensioni essa può essere approssimata ad un rettangolo avente lati di 400 metri e 115 metri.

Osservando la figura 5.3, nella quale è rappresentata una panoramica del sito sul quale sorgerà il Bund IFC, ci si rende subito conto dell'eterogeneità delle opere presenti nei pressi dell'area interessata dallo scavo: per esempio ad ovest (lungo Renmin Road) si incontrano in prevalenza piccole abitazioni, mentre a sud (lungo Dongmen Road) sono presenti alcuni edifici di altezza superiore a 80 metri. Oltre alle strutture visibili in superficie, nei pressi del sito sono presenti anche strutture sotterranee: lungo il lato est, al di sotto di Zhongshan East 2nd Road, vi è un tunnel profondo circa 7 metri, ed inoltre in prossimità dei lati nord e nord-est vi sono due strutture profonde fino a 15 metri aventi ognuna due piani interrati.

### Successione stratigrafica

Shanghai si trova a ridosso del delta del fiume Yangtze, uno dei maggiori fiumi al mondo per lunghezza e volume d'acqua. Il sottosuolo della città, come mostrano le evidenze (si veda ad esempio Chai et al. 2004 oppure Ng et al. 2013), è decisamente uniforme. Al di sopra del bedrock, profondo mediamente 300 metri dal piano campagna, vi sono una serie di depositi formatisi prevalentemente nel periodo Quaternario (Wu et al. 2015). Di norma la stratigrafia prevede un sottile strato di riporto seguito da un deposito di argilla limosa di spessore compreso tra 30 e 40 metri, sotto al quale si trova un importante deposito di sabbia limosa comprendente diverse intercalazioni

---

<sup>1</sup>Il fiume Hangpu scorre ad est del sito, e dista da esso 100 metri circa



Figura 5.1: Posizione dello scavo sulla mappa.

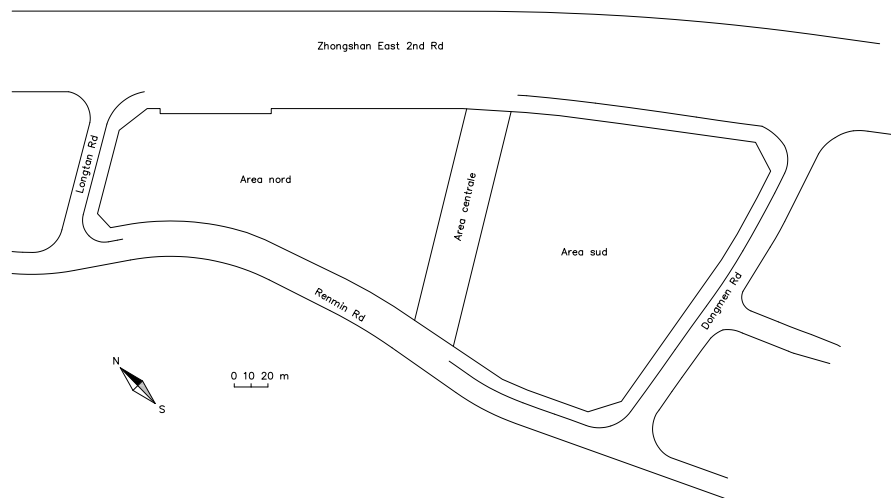


Figura 5.2: Vista in pianta del sito.



Figura 5.3: Vista del sito da Pudong (foto presa dal sito web [www.skyscrapercity.com](http://www.skyscrapercity.com)).

di argilla consistente. La superficie piezometrica si trova approssimativamente 0.5 metri al di sotto del piano campagna.

Gli strati più superficiali, ovvero quelli che principalmente interagiscono con le opere civili, sono convenzionalmente classificati in base alle condizioni di deposizione e alle loro caratteristiche. Lo strato d'argilla, ad esempio, è diviso principalmente in cinque sottostrati, numerati da 2 a 6 (figura 5.4). Il sottostrato 6, il più profondo dei cinque, si è creato per deposizione in un lago nel Tardo Pleistocene, quando tutta l'area cittadina si trovava al di sopra del livello marino, e si trova in condizioni di sovraconsolidazione. I sottostrati dal 5 al 2 si sono invece formati per deposizione in ambiente costiero e marino durante l'Oleocene.

La successione stratigrafica del sito in esame è stata ricavata attraverso l'esecuzione di alcuni sondaggi profondi fino a 66 metri. Dai risultati di tali sondaggi è emerso che il profilo stratigrafico, il quale può essere considerato uniforme su tutta l'area, prevede il succedersi dei seguenti terreni:

- un terreno di riporto spesso 7 metri contenente alcuni detriti provenienti dalla demolizione di vecchi edifici;
- uno strato di argilla limosa spesso 23.5 metri;
- un deposito di sabbia limosa.

Lo strato delle argille comprende quattro sottostrati denominati  $C2$ ,  $C4$ ,  $C5$  e  $C6$ , spessi rispettivamente 7, 3.5, 8 e 4 metri: questi sottostrati, come vedremo in seguito, non hanno proprietà molto dissimili tra loro. Le sabbie limose sono suddivise in due sottostrati di spessore pari a 6 e 30.5 metri, chiamati  $S7_1$  ed  $S7_2$ . La nomenclatura



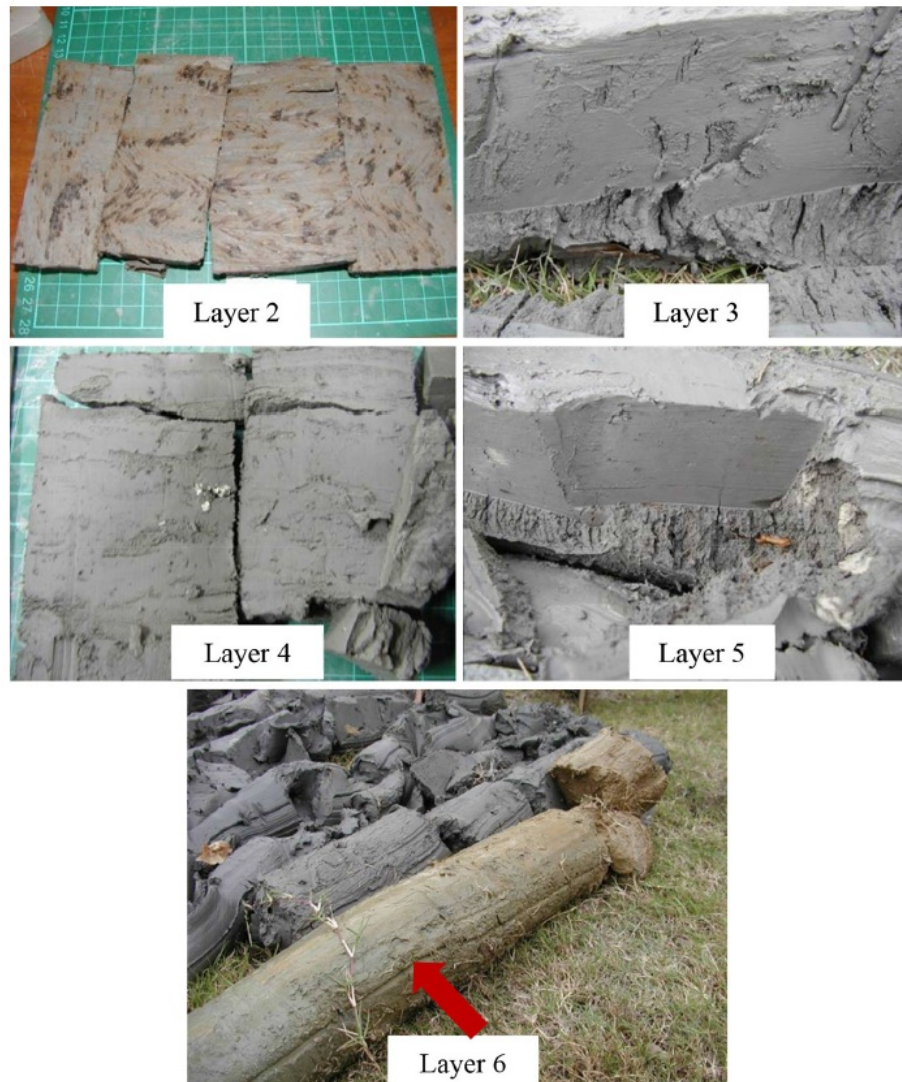


Figura 5.4: Foto dei diversi sottostrati di argilla limosa presenti nel sottosuolo di Shanghai (Wu et al. 2015).

utilizzata non è casuale, bensì rispetta la convenzione, precedentemente accennata, comunemente adottata a Shanghai.

La successione stratigrafica ottenuta attraverso i sondaggi è stata confrontata con quella di zone prossime al sito in esame, e come previsto è stata osservata una buona corrispondenza. Per il confronto sono stati presi come riferimento il sito della Shanghai Tower (Tan & Wang 2013), che si trova dall'altro lato del fiume Hangpu ad una distanza di 1000 metri dal Bund IFC, ed il sito in cui è stata costruita la stazione East Nanjing Road della linea 10 della metropolitana (Tan & Li 2011), che si trova a 1500 metri di distanza dal Bund IFC in direzione nord-ovest. In entrambi i casi vi è uno strato di terreni a grana fine seguito da un deposito molto spesso di sabbie limose (nel caso della Shanghai Tower lo strato di sabbia è spesso oltre 40 metri).

La posizione della superficie piezometrica è variabile in funzione soprattutto delle precipitazioni, solitamente molto numerose nei mesi di giugno, luglio ed agosto. Nel sito oggetto di studio essa si trova mediamente alla profondità di 1.5 metri al di sotto del piano campagna.

## **Dettagli progettuali e fasi costruttive**

I lavori di costruzione possono essere suddivisi in tre parti: nella prima parte sono stati effettuati gli scavi delle aree nord e sud, fino al raggiungimento della quota di fondo scavo (20.5 metri) e alla realizzazione del solettone; nella seconda parte sono stati rimossi i puntoni, sono stati costruiti i piani interrati delle strutture, e sono stati effettuati alcuni scavi nell'area centrale per permettere il collegamento sotterraneo delle aree nord e sud; nella terza parte (tuttora in via d'esecuzione) si sono costruite le strutture in elevazione. Nella tabella 5.1 sono riassunte le principali fasi effettuate nella prima parte dei lavori, ovvero quella riguardante l'esecuzione dello scavo delle aree nord e sud; queste sono le fasi che sono state analizzate in dettaglio nel presente lavoro di tesi, e che sono state simulate per via numerica.

Le paratie a sostegno dello scavo sono costituite da pannelli in calcestruzzo armato di spessore pari ad 1 metro e lunghezza di 49.5 metri. Da entrambi i lati delle paratie, lungo tutto il perimetro esterno, sono stati effettuati dei trattamenti colonnari fino alla profondità di 25.5 metri. Nelle paratie poste a sostegno dell'area centrale i trattamenti colonnari sono stati effettuati solo nei primi 40 metri del lato est, e fino alla profondità di 19 metri. Oltre a ciò, nella gran parte delle zone che si trovano a valle dei diaframmi le caratteristiche del terreno sono state migliorate grazie ad ulteriori trattamenti colonnari che hanno interessato gran parte delle argille: tali trattamenti sono stati effettuati tra le quote di 5.5 e 25.5 metri, con percentuali di cemento maggiori nei 5 metri più profondi. In figura 5.5 è possibile vedere l'ubicazione delle zone trattate e il dettaglio dei trattamenti: al confine fra le pareti e i trattamenti, tra le quote di 5.5 e 25.5 metri, si sono eseguite delle colonne di jet-grouting. Prima di iniziare lo scavo, nelle aree nord e sud sono state realizzate le colonne che serviranno a sostenere i livelli



fase	descrizione
1a	realizzazione dei diaframmi in calcestruzzo armato
1b	esecuzione dei trattamenti nel terreno
2a	scavo delle aree nord e sud fino alla profondità di 1.5 metri
2b	installazione del primo livello di supporto (alla quota di 1 metro)
3a	scavo delle aree nord e sud fino alla profondità di 5.5 metri
3b	installazione del secondo livello di supporto (alla quota di 5 metri)
4a	scavo delle aree nord e sud fino alla profondità di 9.5 metri
4b	installazione del terzo livello di supporto (alla quota di 9 metri)
5a	scavo delle aree nord e sud fino alla profondità di 13.5 metri
5b	installazione del quarto livello di supporto (alla quota di 13 metri)
6a	scavo delle aree nord e sud fino alla profondità di 17.5 metri
6b	installazione del quinto livello di supporto (alla quota di 17 metri)
7a	scavo delle aree nord e sud fino alla profondità di 20.5 metri
7b	esecuzione del solettone a fondo scavo

Tabella 5.1: Fasi di scavo delle aree nord e sud.

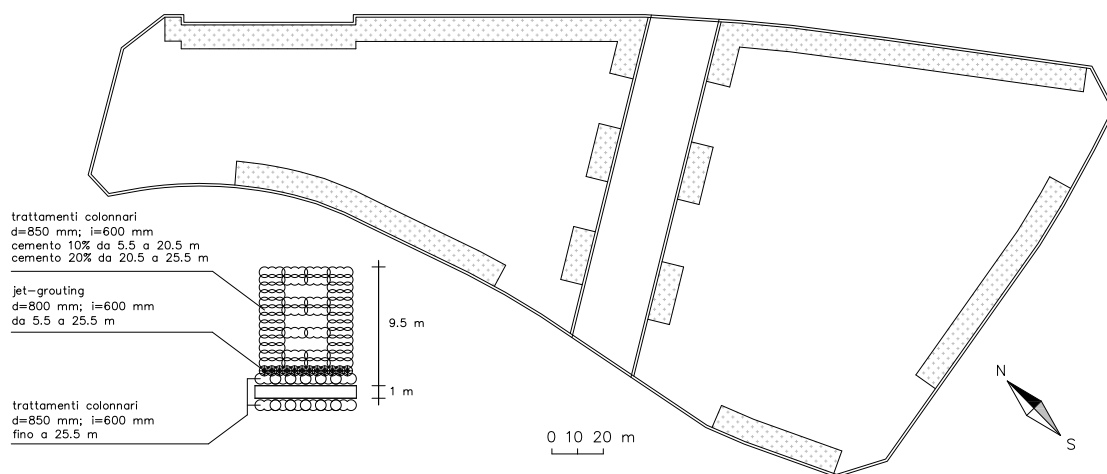


Figura 5.5: Trattamenti di miglioramento del terreno.

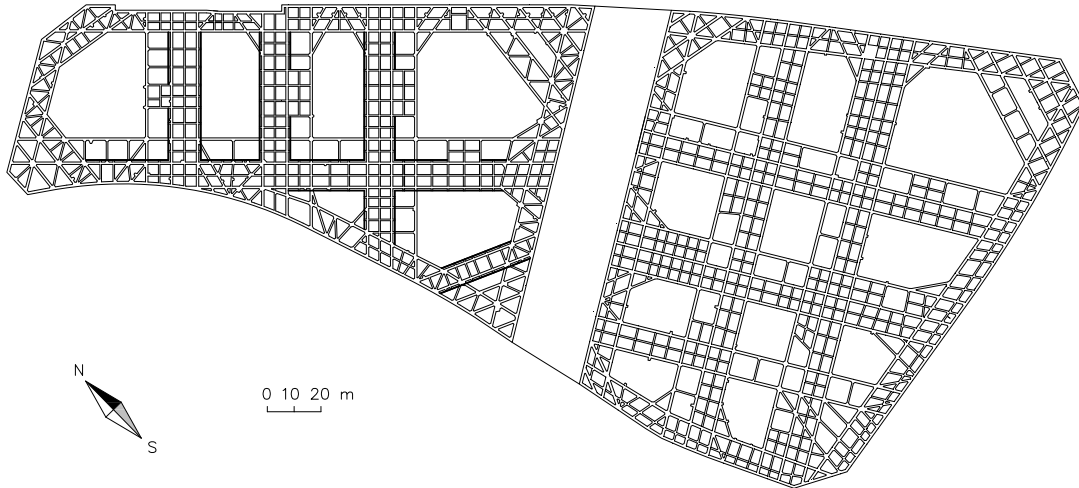


Figura 5.6: Pianta delle travi che costituiscono il supporto orizzontale degli scavi nelle aree nord e sud.

di puntoni. Queste colonne sono poste ad una distanza media di 8 m l'una dall'altra, e sono composte di due parti: superiormente sono formate da colonne d'acciaio di sezione quadrata cava, ed inferiormente (al di sotto della quota di fondo scavo) sono formate da pali in calcestruzzo armato.

Gli scavi delle aree nord e sud sono iniziati in contemporanea, e sono proseguiti sostanzialmente in parallelo. La quota di fondo scavo, pari a 20.5 metri, è stata raggiunta in tempi relativamente brevi (circa cinque mesi a partire dall'esecuzione del primo livello di contrasto). Come riportato in tabella 5.1, l'intero scavo è sostenuto orizzontalmente da cinque livelli di vincolo costituiti da travi reticolari in cemento armato (nella maggior parte dei casi di sezione quadrata con area pari a  $80 \times 80 \text{ cm}^2$ ), a cui si aggiunge infine il solettone di fondo scavo (spesso 1.6 m). In figura 5.6 è riportata la posizione delle travi che costituiscono i livelli di contrasto. Va precisato che nel primo livello, per rendere possibile il passaggio dei mezzi al di sopra delle aree di scavo, alcuni degli spazi formati tra le travi sono stati riempiti di calcestruzzo armato (come si può vedere in figura 5.13).

Data la presenza di un deposito di sabbie al di sotto delle argille, e considerata l'entità dello scavo, è evidente che senza opportuni accorgimenti è sicuro il verificarsi di un fenomeno d'instabilità del fondo scavo. La quota piezometrica nei terreni granulari, ricavata attraverso i sondaggi, si trovava a circa 3 metri dal piano campagna (di poco inferiore alla piezometrica superiore). Considerando uno scavo di 20.5 metri, ed un peso di volume del terreno pari a  $18 \text{ kN m}^{-3}$ , al confine tra argille e sabbie si avrebbero delle tensioni verticali totali pari a:

$$\sigma_v = 18 (29.5 - 20.5) = 162 \text{ kPa} \quad (5.1)$$

e delle pressioni interstiziali pari a:

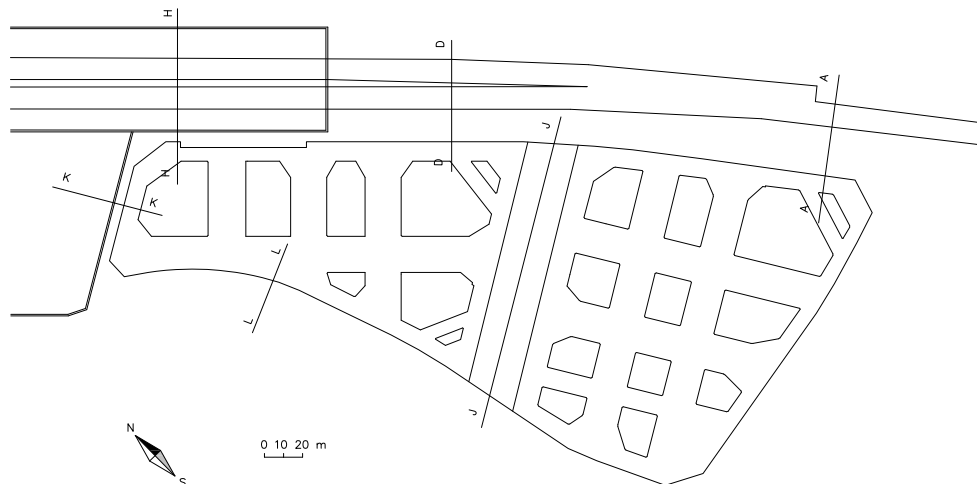


Figura 5.7: Pianta dello scavo con gli ingombri delle vicine strutture sotterranee.

$$u = 10(29.5 - 3) = 265 \text{ kPa} \quad (5.2)$$

col conseguente problema di sollevamento del fondo scavo. Per ovviare a ciò, contestualmente alle fasi di scavo si è provveduto ad emungere acqua dagli strati di sabbia, in modo da ridurre il carico idraulico in essi (si è fatto in modo che la quota piezometrica delle sabbie rimanesse all'incirca mezzo metro al di sotto della quota di scavo corrente). Il pompaggio di acqua è stato reso possibile dall'esecuzione di alcuni pozzi drenanti che sono stati inseriti all'interno delle aree da scavare.

Come già detto in precedenza, a seguito della realizzazione del solettone di fondo sono iniziati i lavori di costruzione dei solai interrati. Per fare ciò si è proceduto smantellando il quinto livello di contrasto, quindi eseguendo il terzo solaio interrato, poi si è smantellato il quarto livello di contrasto, si è eseguito il secondo solaio interrato, poi si sono smantellati i livelli terzo e secondo, e quindi si è costruito il primo solaio interrato. Queste fasi tuttavia non sono state modellate nelle analisi.

Per completezza, in figura 5.7 sono mostrati gli ingombri in pianta delle strutture sotterranee, ed in figura 5.8 è riportata una sezione dello scavo nord (sezione L-L di figura 5.7), completa di stratigrafia, di puntoni e di zone trattate. Si precisa che le zone di terreno trattate sono state completamente scavate fino alla profondità di 20.5 metri.

### Alcune foto del cantiere

Di seguito si riportano alcune foto che mostrano il cantiere nelle diverse fasi di scavo. Le foto sono state gentilmente concesse dall'Ing. Chen HongWei. In figura 5.9 è possibile vedere il cantiere durante l'esecuzione

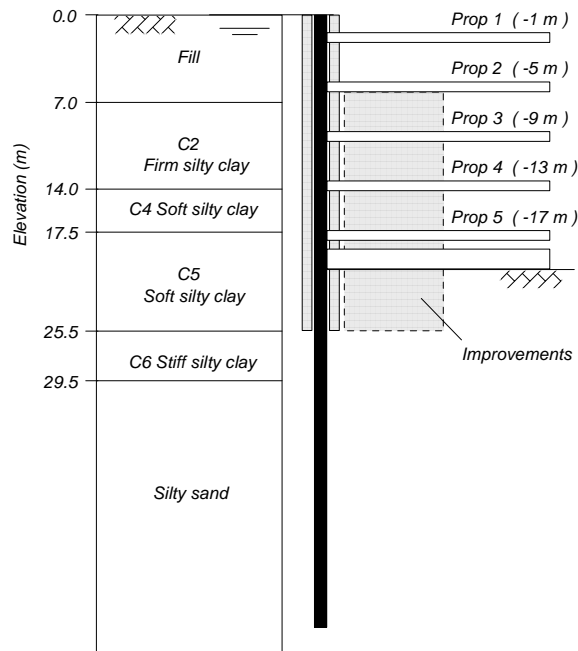


Figura 5.8: Sezione L-L dello scavo nord.

dei diaframmi in calcestruzzo armato. In figura 5.10 è riportata una foto dell'area nord (nella zona prossima all'incrocio tra Longtan Road e Zhongshan East 2nd Road) nella situazione in cui si è raggiunta la prima quota di scavo (1.5 m) e si comincia a costruire il primo livello di supporto. Si notano le colonne d'acciaio che serviranno a sostenere verticalmente i puntoni, la base delle casseforme ed i tubi attraverso i quali verrà pompata l'acqua dalle sabbie. In figura 5.11 si possono osservare gli operai intenti a realizzare il primo livello di contrasto nell'area nord, mentre la foto di figura 5.12 mostra la realizzazione del secondo livello. In figura 5.13 è rappresentato l'intero cantiere in data 02/11/2012: si osserva che nell'area nord è già stato realizzato il quinto livello di contrasto, mentre nell'area sud, sebbene in alcune zone siano già state installate le casseforme, si sta ancora ultimando la fase di scavo n° 6a. Nella stessa figura è possibile notare che nel primo livello di contrasto la maggior parte dei volumi compresi tra le travi sono riempiti di calcestruzzo armato, e quindi per questo motivo tale livello è da considerarsi molto più rigido dei successivi.

## Dati di monitoraggio

Al fine di controllare il comportamento dello scavo e i suoi effetti sulle opere, sono stati installati diversi strumenti di monitoraggio. Tra tutte le misure rilevate vi sono gli spostamenti orizzontali delle opere di sostegno, gli spostamenti verticali di alcuni punti a tergo dello scavo, gli spostamenti degli edifici e delle strutture sotterranee che si trovano nelle vicinanze del sito, ed anche gli stati di sforzo in alcune delle travi che costituiscono i contrasti orizzontali dello scavo.



Figura 5.9: Foto del cantiere durante la realizzazione delle paratie (scattata il 29/12/2011, gentilmente concessa dall'Ing. Chen HongWei).



Figura 5.10: Foto del cantiere nella situazione che precede la costruzione del primo livello di supporto (scattata il 27/06/2012, gentilmente concessa dall'Ing. Chen HongWei).





Figura 5.11: Foto del cantiere nel momento in cui viene realizzato il primo livello di supporto (scattata il 20/07/2012, gentilmente concessa dall'Ing. Chen HongWei).



Figura 5.12: Foto del cantiere nel momento in cui ci si prepara alla realizzazione del secondo livello di supporto (scattata il 17/08/2012, gentilmente concessa dall'Ing. Chen HongWei).





Figura 5.13: Foto del cantiere visto dall'alto (scattata il 02/11/2012, gentilmente concessa dall'Ing. Chen HongWei).



Figura 5.14: Foto del cantiere a scavo quasi ultimato (scattata il 09/11/2012, gentilmente concessa dall'Ing. Chen HongWei).

Nelle figure 5.16, 5.17, 5.18, 5.19, 5.20 e 5.21 si riportano gli spostamenti orizzontali delle paratie poste a sostegno dello scavo nord. Le misure corrispondono alle seguenti date:

- 21/08/12 raggiungimento della quota di scavo di 5.5 metri nell'area nord;
- 16/09/12 raggiungimento della quota di scavo di 9.5 metri nell'area nord;
- 08/10/12 raggiungimento della quota di scavo di 13.5 metri nell'area nord;
- 29/10/12 raggiungimento della quota di scavo di 17.5 metri nell'area nord;
- 16/11/12 raggiungimento della quota di scavo di 20.5 metri nell'area nord;
- 20/11/12 fine della realizzazione del solettone di fondo scavo nell'area nord;
- 06/01/13 data oltre la quale non si hanno più spostamenti orizzontali apprezzabili in corrispondenza della quota di fondo scavo.

Lungo tutte le verticali relative all'area nord lo spostamento massimo si ha nel tratto compreso tra i 15 e i 20 metri di profondità. L'entità di tale spostamento (vedi tabella 5.2) varia da zona a zona: vale mediamente 7 cm, con valori minori in prossimità degli spigoli e in corrispondenza delle zone prossime alle strutture sotterranee (non a caso il valore più basso si ha in CX9). Gli spostamenti orizzontali massimi (circa 8 cm) si hanno in corrispondenza dei pannelli CX17 e CX18, che sono posti a sostegno dell'area centrale: questo risultato potrebbe sembrare strano, dal momento che l'area centrale ha una larghezza ridotta (26 metri) e quindi la spinta del terreno sarà in questo caso minore rispetto a quella agente lungo il lato ovest del sito. Tuttavia va considerato che in corrispondenza dei pannelli CX17, CX18, CX19, CX20, CX21 e CX22 dell'area centrale sono stati effettuati meno trattamenti colonnari rispetto alle altre zone dello scavo, ed inoltre va tenuto presente che l'area centrale è una via di passaggio per i veicoli che servono alle operazioni di cantiere, i quali comportano un carico accidentale aggiuntivo. Un'altra possibile causa potrebbe essere un ritardo nella costruzione del solettone di fondo in prossimità della zona centrale: questa tesi potrebbe essere sostenuta dal fatto che gli incrementi di spostamento che si sono avuti tra le date 20/11/12 e 06/01/13 nei pannelli posti nei pressi dell'area centrale (CX15, CX17, CX18 e CX19) sono maggiori rispetto a quelli degli altri pannelli.

Per completezza, in tabella 5.3 sono riportati gli spostamenti massimi relativi ai pannelli dell'area sud, misurati in data 10/01/13: anche in questo caso i valori maggiori si hanno in corrispondenza dei pannelli posti a sostegno dell'area centrale. Inoltre in figura 5.22 sono rappresentati gli spostamenti verticali misurati a monte delle opere di sostegno: si osserva che i valori massimi sono compresi tra il 50 % e il 70 % dei corrispondenti spostamenti orizzontali.



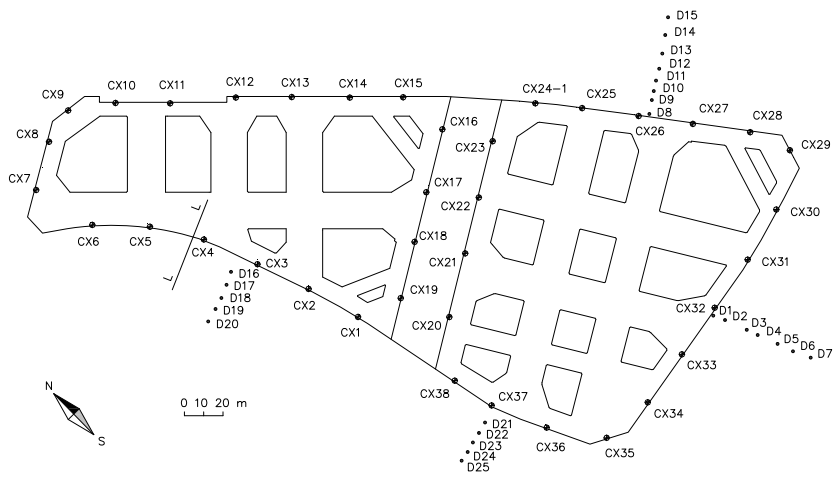


Figura 5.15: Posizione di alcuni punti di monitoraggio.

pannello	s (cm)	pannello	s (cm)	pannello	s (cm)	pannello	s (cm)
CX1	6.7	CX7	6.0	CX12	6.2	CX17	7.8
CX3	7.0	CX8	6.3	CX13	7.2	CX18	7.9
CX4	7.1	CX9	4.9	CX14	6.4	CX19	7.0
CX5	6.7	CX10	6.6	CX15	6.5		
CX6	7.1	CX11	6.5	CX16	5.7		

Tabella 5.2: Massimi spostamenti orizzontali delle paratie nell'area nord (in data 06/01/13).

pannello	s (cm)	pannello	s (cm)	pannello	s (cm)	pannello	s (cm)
CX20	7.9	CX25	6.9	CX30	6.3	CX35	4.4
CX22	8.0	CX26	7.4	CX31	7.0	CX36	7.4
CX23	6.9	CX27	6.4	CX32	7.0	CX37	7.1
CX24	5.8	CX128	5.7	CX33	7.2	CX38	5.9

Tabella 5.3: Massimi spostamenti orizzontali delle paratie nell'area sud (in data 06/01/13).

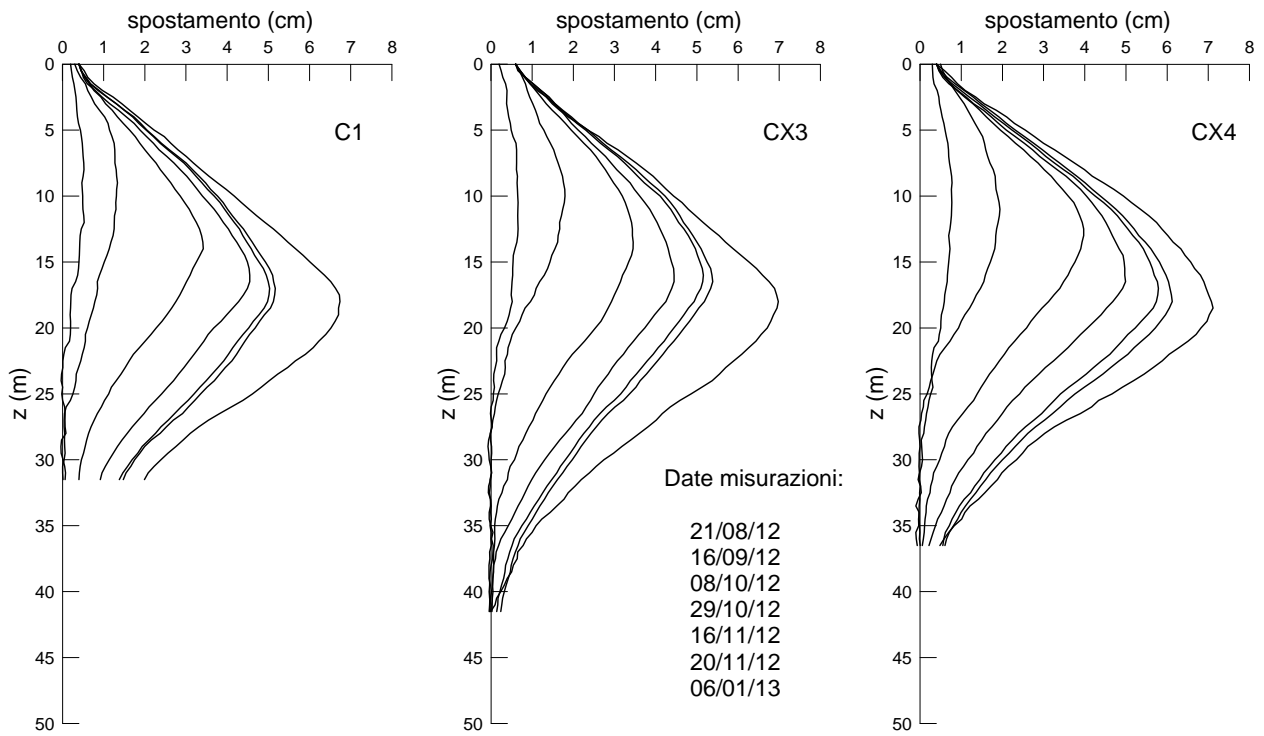


Figura 5.16: Spostamenti orizzontali subiti dalle paratie durante lo scavo.

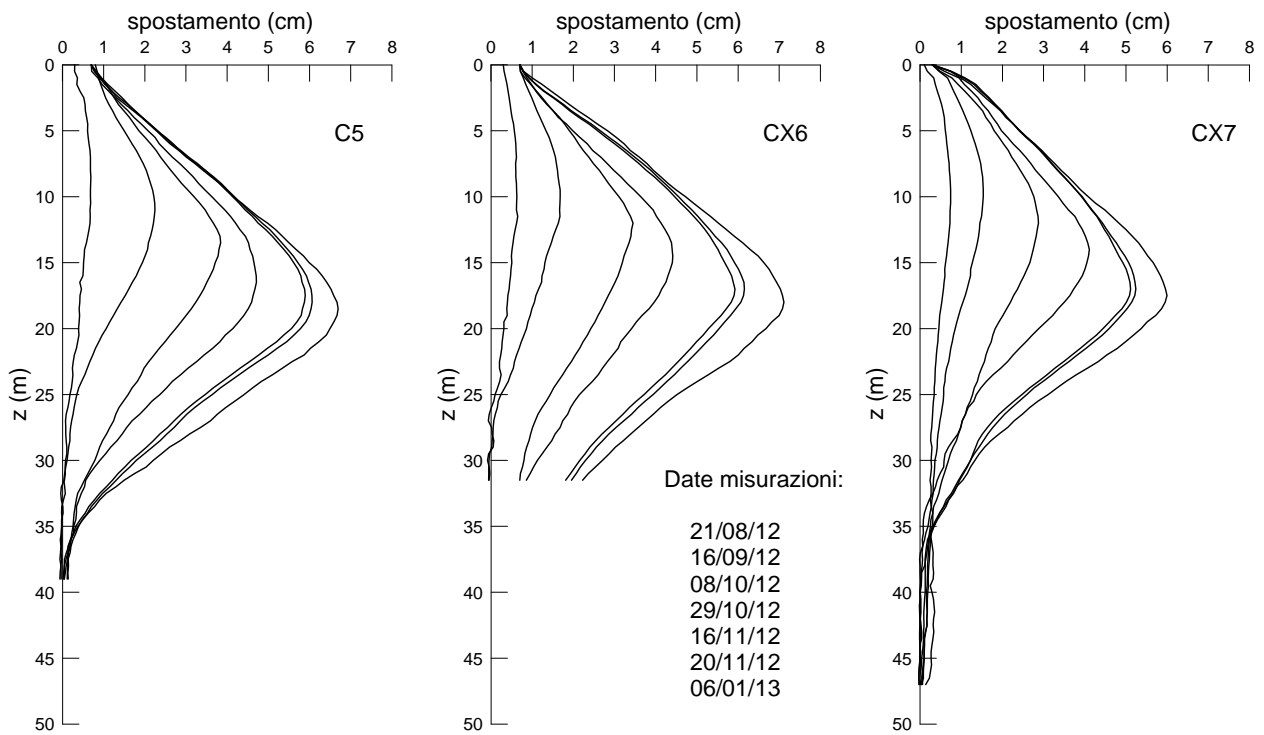


Figura 5.17: Spostamenti orizzontali subiti dalle paratie durante lo scavo.

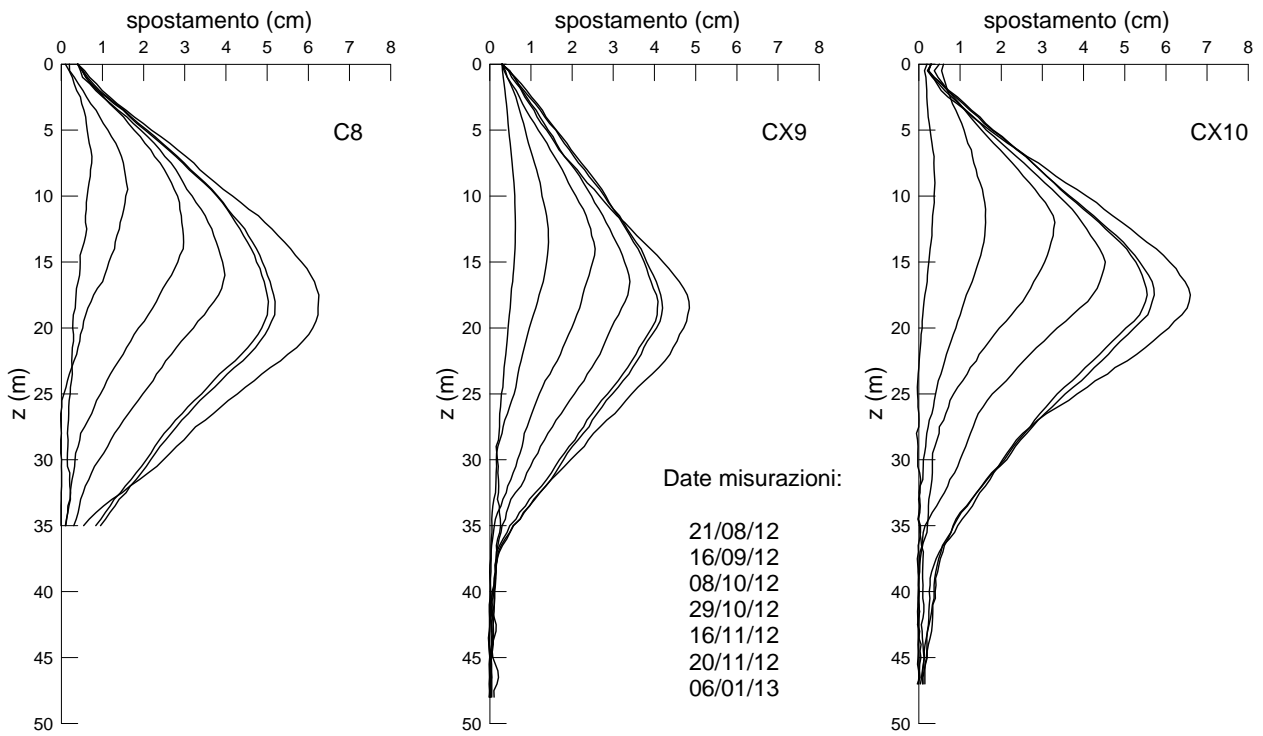


Figura 5.18: Spostamenti orizzontali subiti dalle paratie durante lo scavo.

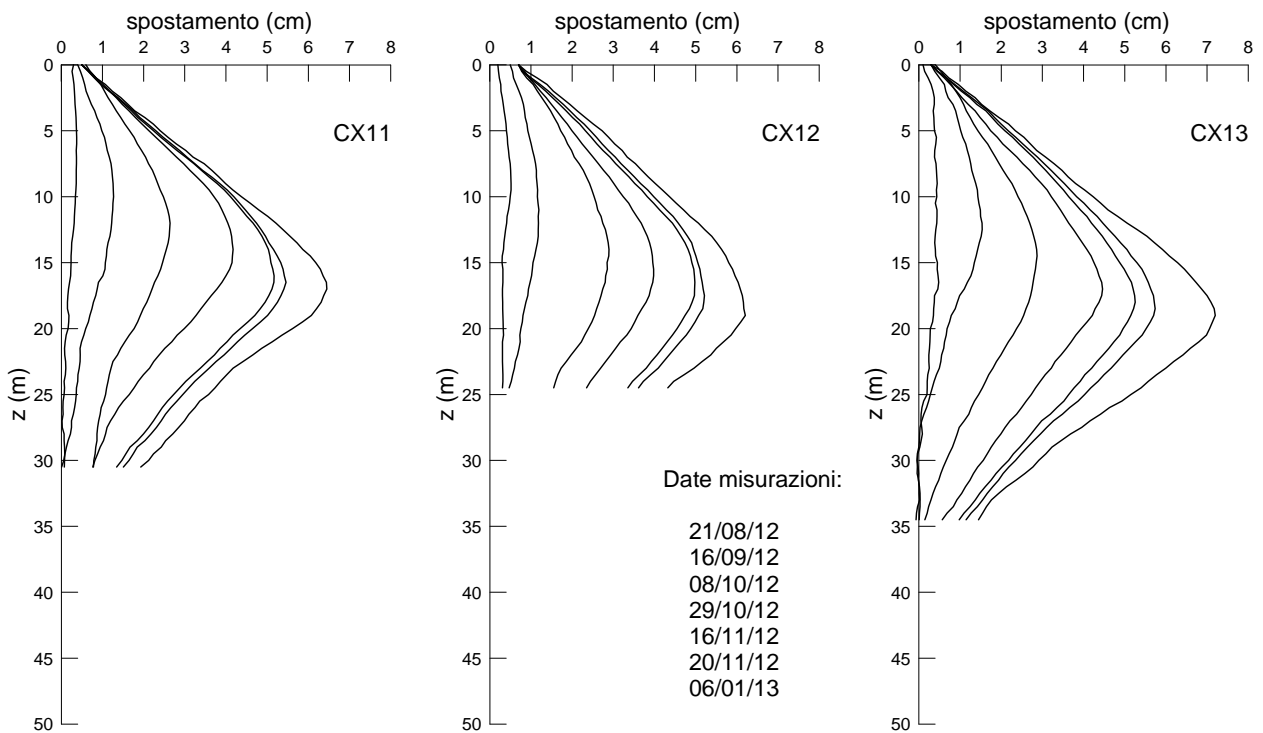


Figura 5.19: Spostamenti orizzontali subiti dalle paratie durante lo scavo.

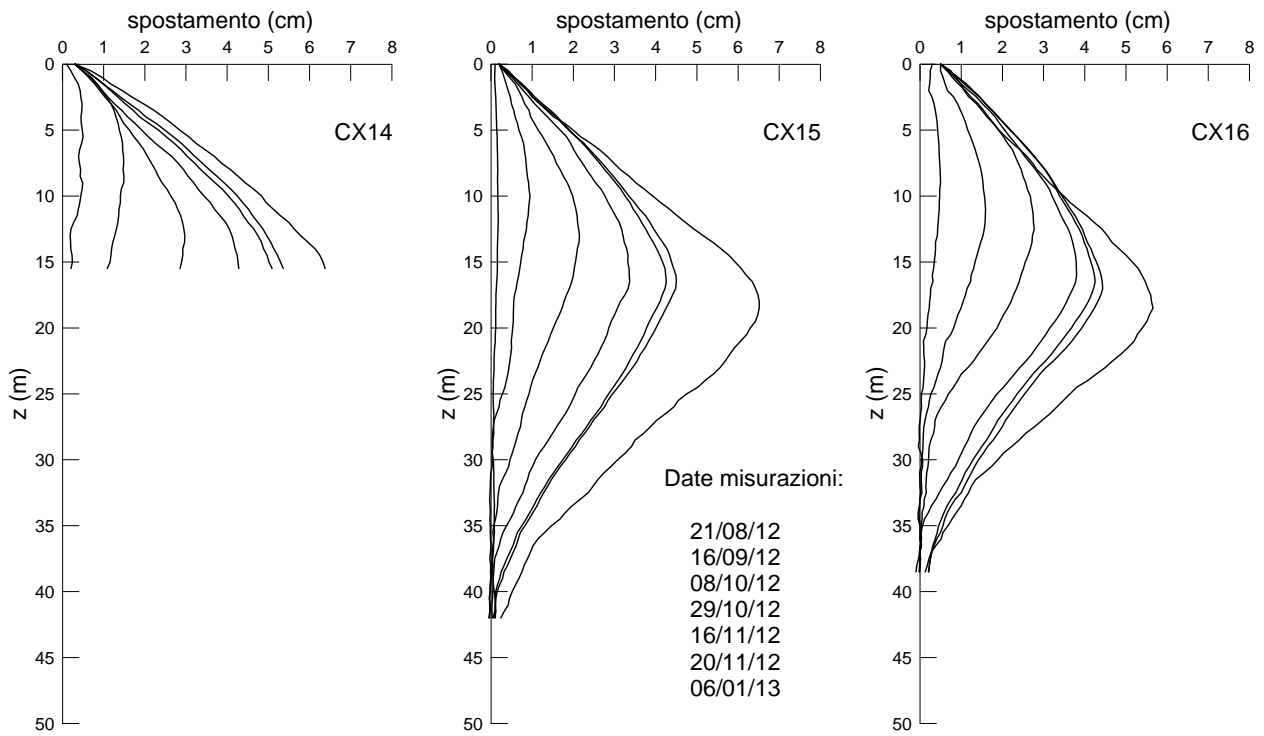


Figura 5.20: Spostamenti orizzontali subiti dalle paratie durante lo scavo.

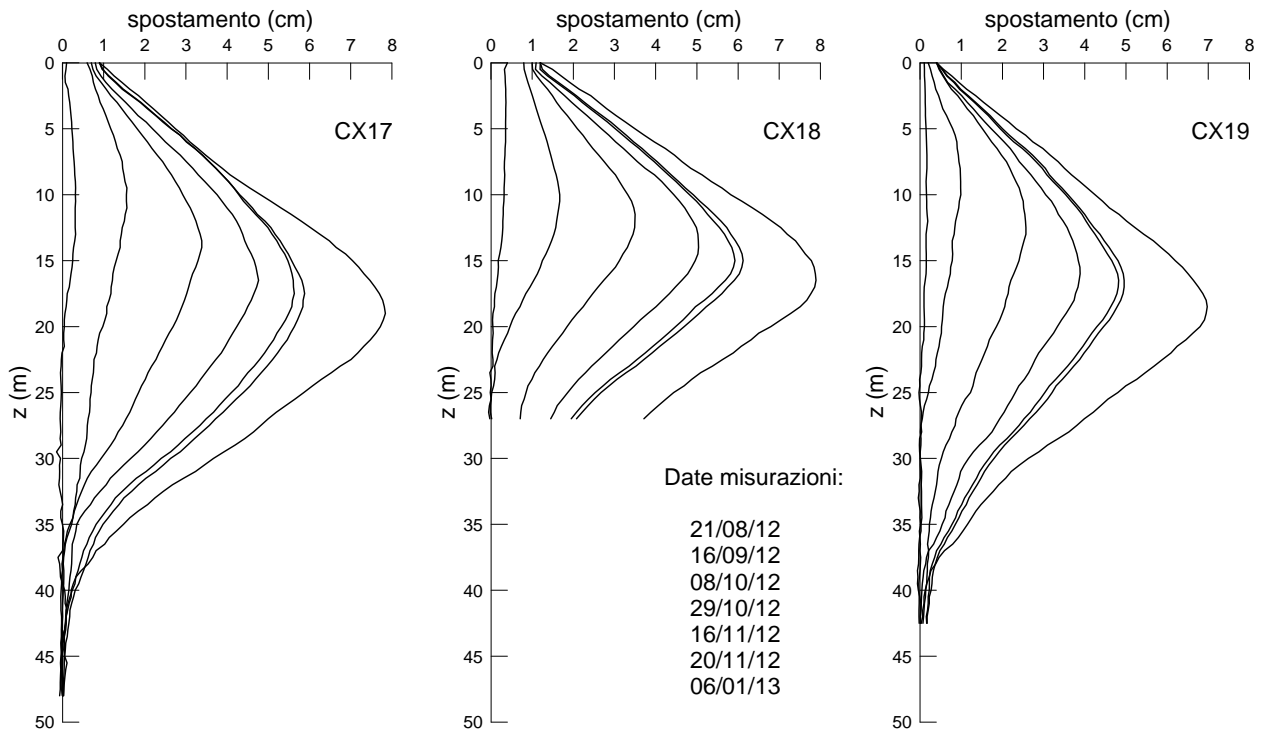


Figura 5.21: Spostamenti orizzontali subiti dalle paratie durante lo scavo.

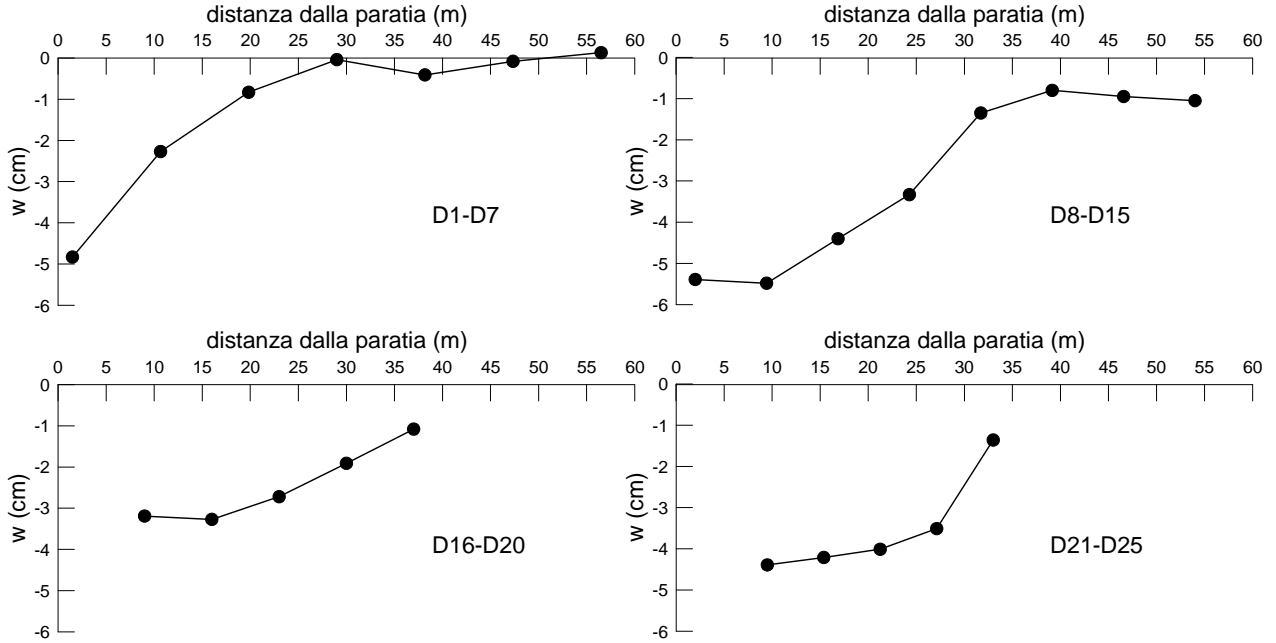


Figura 5.22: Spostamenti verticali a monte delle paratie (in data 06/01/13).

## 5.2 Calibrazione del modello costitutivo

Per la calibrazione del modello costitutivo si è fatto riferimento ai risultati di alcune prove di laboratorio effettuate sull'argilla di Shanghai (Liu 2010, Huang et al. 2011), tra cui: una prova edometrica, alcune prove triassiali CIU, alcune prove triassiali CAU e una prova triassiale CAU in estensione. Tutte le prove sono fatte su provini prelevati alla profondità di dieci metri dal piano campagna: a questa profondità la tensione efficace verticale è valutata come  $\sigma'_v = 68.6$  kPa, mentre la tensione efficace orizzontale, pari a  $\sigma'_h = 41.1$  kPa, è calcolata assumendo un coefficiente di spinta in quiete  $K_0 = 0.6$ ; tale coefficiente è stato ricavato dagli autori attraverso l'esecuzione di particolari prove in cella triassiale.

Tra le grandezze misurate vi sono il contenuto d'acqua  $w = 0.518$ , il limite plastico  $w_P = 0.224$ , il limite liquido  $w_L = 0.442$  e il peso specifico dei grani  $G_s = 2.74$ . Essendo il contenuto d'acqua maggiore del limite liquido, l'indice di consistenza risulta negativo:

$$I_C = \frac{w_L - w}{w_L - w_P} = -0.35 \quad (5.3)$$

e questo può essere visto come un indicatore della presenza di una struttura nella terra.

Assumendo un grado di saturazione unitario è possibile calcolare l'indice dei vuoti come:

$$e_0 = G_s w = 1.42 \quad (5.4)$$

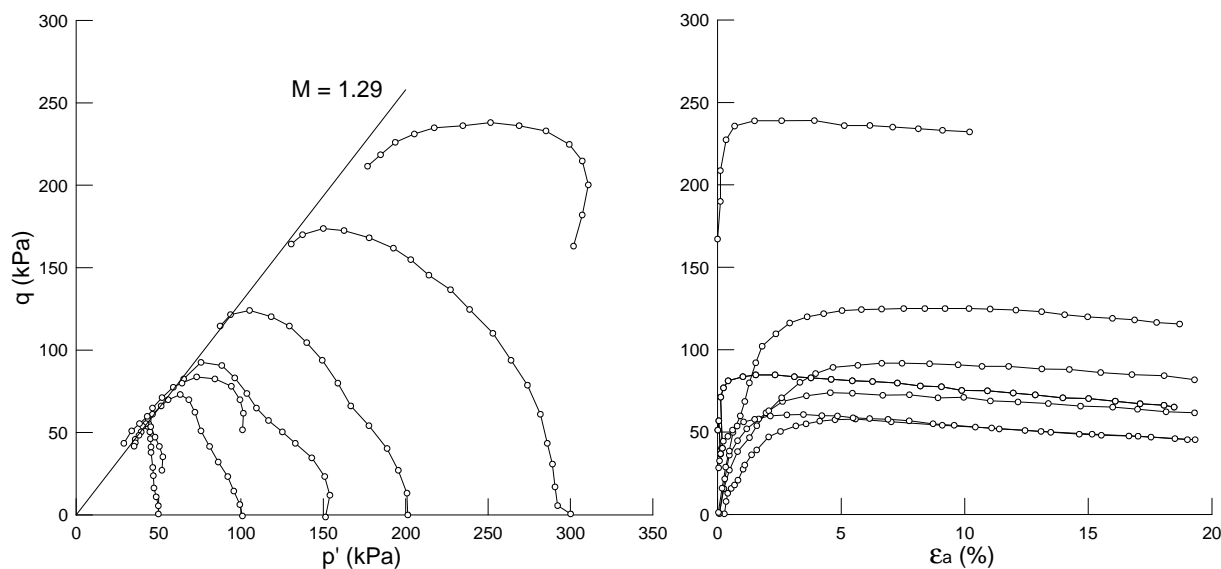


Figura 5.23: Pendenza della retta di stato critico (da prove triassiali CIU).

Sebbene il valore di  $e_0$  così calcolato risulti stranamente maggiore di quello proposto da Huang et al. (2011), esso sarà preso come valore di riferimento per la condizione in sito e sarà di conseguenza usato per il calcolo delle deformazioni.

Il parametro più semplice da ottenere è la pendenza  $M$  della retta di stato critico, che può essere ricavata dai risultati delle prove triassiali (riportati in figura 5.23): assumendo  $M = 1.29$ , a cui corrisponde un angolo  $\varphi'_{cs} \simeq 32^\circ$ , si ottiene una buona interpolazione dei punti corrispondenti al tratto finale dei percorsi tensionali. Si fa presente che il valore del coefficiente di spinta in quiete ricavato dagli autori non è in accordo con la relazione di Jaky (1944), dalla quale si otterrebbe  $K_0 = 0.47$ .

La curva di compressibilità edometrica può essere utilizzata per avere una stima del parametro  $\lambda^*$  e delle variabili di stato  $p_c$  ed  $r$ . Osservando l'andamento iniziale della curva (figura 5.24) si nota una riduzione dell'indice dei vuoti anche per valori di tensione efficace verticale molto inferiori a quelli litostatici: ciò porta inevitabilmente a pensare che il provino sia stato fatto rigonfiare prima dell'esecuzione della prova. Per questo motivo la curva di compressibilità è stata rielaborata, tenendo ovviamente conto del valore dell'indice dei vuoti iniziale precedentemente calcolato ( $e_0 = 1.42$ ), e supponendo che il rigonfiamento abbia comportato un aumento di indice dei vuoti  $\Delta e = 0.1$ . Inoltre, assumendo un rapporto  $\frac{\sigma'_h}{\sigma'_v} = 0.6$  (supposto costante durante la prova), la curva è stata riprodotta anche sul piano  $\ln p - \varepsilon_p^2$ .

<sup>2</sup>Durante una prova edometrica il rapporto tra le tensioni efficaci orizzontali e verticali non si mantiene costante, soprattutto durante i percorsi di scarico e ricarico; tuttavia è ragionevole supporre che in carico, superata una certa soglia, esso si mantenga costante e pari al coefficiente di spinta in quiete. Dal momento che il parametro  $\lambda^*$  ed il grado di struttura  $r$  vengono ricavati dai risultati della prova edometrica prendendo in considerazione i valori di tensione verticale e di deformazione assiale corrispondenti a punti che hanno sicuramente superato questa soglia, l'assunzione che il rapporto tra le tensioni efficaci orizzontali e verticali rimanga invariato durante tutta la prova non comporta alcun errore nella loro valutazione.

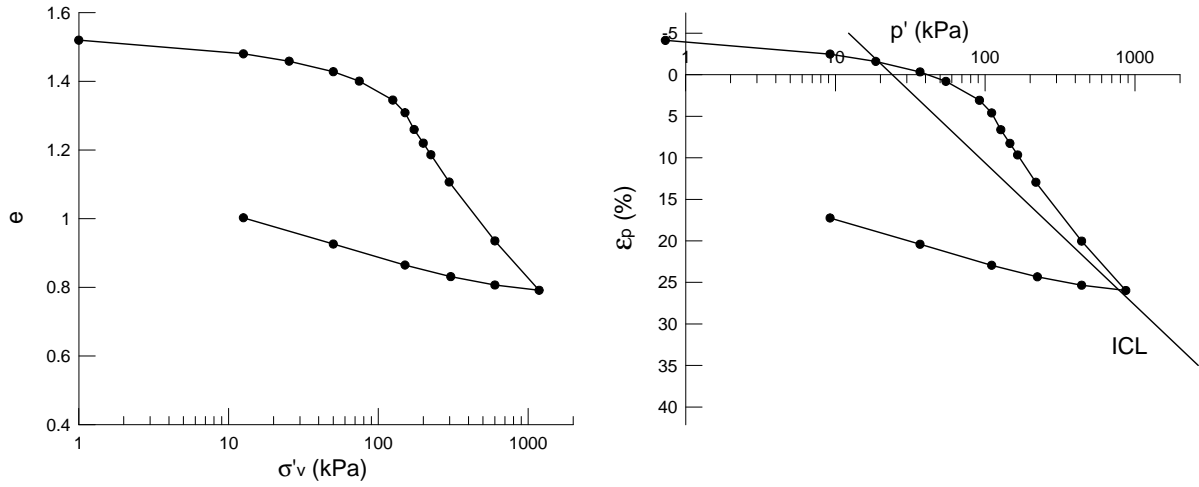


Figura 5.24: Curva di compressibilità edometrica (rielaborata da Huang et al. 2011).

Prendendo il punto a cui corrisponde l'ultimo incremento di tensione verticale, ovvero quello per cui si ha una tensione  $\sigma'_v$  pari a circa 1000 kPa, può essere ricavata la pendenza della curva sul piano  $\log \sigma'_v$ - $e$ :

$$C_1 = \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'_v} = 0.49 \quad (5.5)$$

e conseguentemente si può calcolare la corrispondente pendenza sul piano  $\ln p$ - $\varepsilon_p$ :

$$\lambda_1^* = \frac{C_1}{(1 + e_0) \ln 10} = \frac{0.49}{2.42 \ln 10} = 0.087 \quad (5.6)$$

Siccome è ragionevole supporre che in corrispondenza di una tensione efficace verticale di 1000 kPa la ICL non sia stata ancora raggiunta, è lecito pensare che il parametro  $\lambda^*$  sia minore del valore di  $\lambda_1^*$  appena ricavato. A partire dai risultati delle simulazioni di prove edometriche riportati nel paragrafo 3.3, considerando il caso in cui si è tenuto conto del rigonfiamento, per una velocità di destrutturazione  $k = 1$  si osserva che il rapporto tra  $\lambda^*$  e la pendenza  $\frac{\Delta \varepsilon_p}{\Delta \ln p}$  che si ha in corrispondenza di una tensione efficace verticale di 1000 kPa vale circa 0.85. Assumendo in prima approssimazione che tale rapporto sia valido anche nel caso in questione, si ottiene:

$$\lambda^* = 0.85 \lambda_1^* = 0.074 \quad (5.7)$$

A questo punto, tracciando sul piano  $\ln p$ - $\varepsilon_p$  una retta con pendenza  $\lambda^*$ , e posizionando tale retta in modo che la curva di compressibilità tenda asintoticamente ad essa (vedi figura 5.24), si può ricavare  $p_c = \frac{p_{ICL}}{2} = 12$  kPa. Infine per ricavare il grado di struttura iniziale si può considerare un valore  $r_0 \frac{p_c}{p_f} = 2.4$  (preso dalla tabella 3.7), che nel caso in esame porta a:

$\nu$	$\kappa^*$	$\lambda^*$	$m$	$M$	$R$	$k$	$A_d$	$B$	$\psi$	$\eta_0$	$\alpha$	$\psi_2$
0.25	0.007	0.074	0.8	1.29	0.05	1.0	0.5	1.0	1.0	<b>0.0</b>	1.0	1.0

$p_c$ (kPa)	$r$	$\bar{\alpha}_1$ (kPa)	$\bar{\alpha}_2$ (kPa)	$\bar{\alpha}_3$ (kPa)	$\sigma_1$ (kPa)	$\sigma_2$ (kPa)	$\sigma_3$ (kPa)
12.0	5.96	-41.1	-41.1	-70.0	-41.1	-41.1	-70.0

Tabella 5.4: Parametri e condizioni iniziali di primo tentativo (par01).

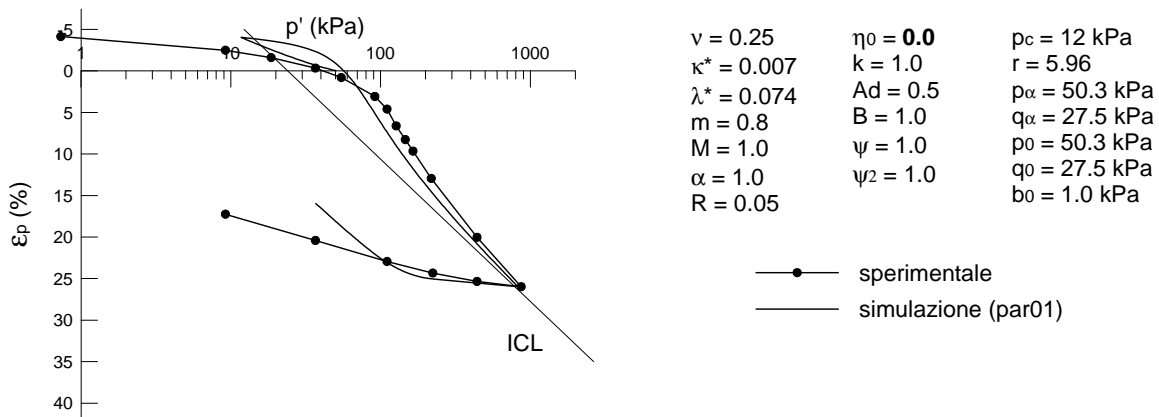


Figura 5.25: Curva di compressibilità edometrica ottenuta nella simulazione fatta coi parametri di primo tentativo.

$$r_0 = 2.4 \frac{110}{44.5} = 5.96 \quad (5.8)$$

Finora sono stati ricavati i parametri  $M = 1.29$  e  $\lambda^* = 0.074$  e i valori iniziali delle variabili di stato  $p_c = 12$  kPa ed  $r = 5.96$ . Ipotizzando che la posizione iniziale del centro della superficie di snervamento sia coincidente con lo stato tensionale litostatico ( $\sigma'_v = 68.6$  kPa,  $\sigma'_h = 41.1$  kPa), e assumendo per i rimanenti parametri i valori riportati in tabella 5.4, si è simulata la prova edometrica. Nella simulazione, il cui risultato è rappresentato in figura 5.25, si è tenuto conto degli effetti del campionamento e del rigonfiamento iniziale (a cui è convenzionalmente fatto corrispondere un aumento di volume del 4%): il confronto con la curva sperimentale potrebbe sembrare poco soddisfacente, ma va tenuto conto del fatto che il modello costitutivo non riesce a riprodurre bene il comportamento del materiale nella fase di scarico edometrico.

Con gli stessi parametri riportati in tabella 5.4 è stata simulata la prova triassiale non drenata consolidata a 100 kPa: il risultato, riportato in figura 5.26, non coglie adeguatamente il picco e mostra un decadimento della rigidità troppo rapido. Riducendo il parametro che regola la dipendenza della destrutturazione dalle defor-



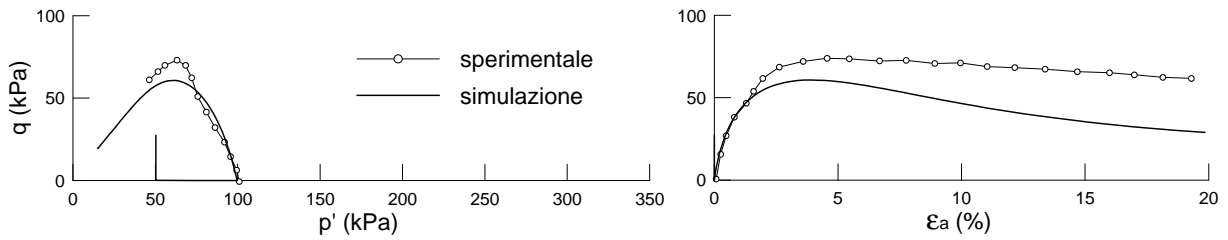


Figura 5.26: Simulazione della prova triassiale CIU consolidata a 100 kPa fatta coi parametri di primo tentativo.

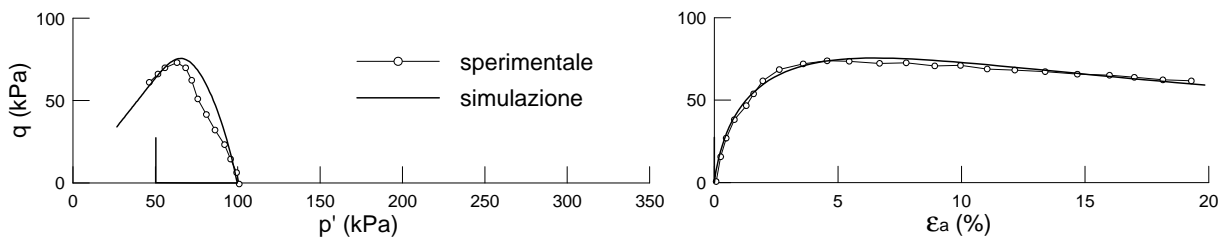


Figura 5.27: Simulazione della prova triassiale CIU consolidata a 100 kPa fatta coi parametri di secondo tentativo.

mazioni volumetriche e deviatoriche, ovvero ponendo  $A_d = 0.05$ , si ottiene un risultato molto più soddisfacente (vedi figura 5.27). Si ricorda che  $A_d$  non ha un effetto rilevante sulla curva di compressibilità edometrica.

Coi nuovi parametri, riportati in tabella 5.5, sono state simulate tutte le prove triassiali non drenate riportate in Huang et al. (2011). La prova che viene riprodotta meglio è quella consolidata isotropicamente a 100 kPa, in cui si coglie bene sia la rigidezza che il percorso tensionale, e quindi anche le sovrappressioni indotte. Nelle prove consolidate isotropicamente a 150 e 200 kPa si riesce a riprodurre fedelmente il percorso tensionale, ma la rigidezza iniziale viene sovrastimata. Nella prova consolidata anisotropicamente a 100 kPa (figura 5.31) invece la rigidezza viene sottostimata. Osservando le prove consolidate a valori più bassi (figure 5.29 e 5.30), nelle simulazioni si nota una sovrastima del picco: questo può significare che il grado di struttura è inferiore a quello assunto, oppure che i provini sottoposti alla prova hanno subito un forte disturbo tensionale. Infine, dai risultati della prova in estensione (figura 5.32), si osserva che il picco viene colto adeguatamente, mentre la rigidezza viene leggermente sovrastimata.

$\nu$	$\kappa^*$	$\lambda^*$	$m$	$M$	$R$	$k$	$A_d$	$B$	$\psi$	$\eta_0$	$\alpha$	$\psi_2$
0.25	0.007	0.074	0.8	1.29	0.05	1.0	0.05	1.0	1.0	<b>0.0</b>	1.0	1.0

$p_c$ (kPa)	$r$	$\bar{\alpha}_1$ (kPa)	$\bar{\alpha}_2$ (kPa)	$\bar{\alpha}_3$ (kPa)	$\sigma_1$ (kPa)	$\sigma_2$ (kPa)	$\sigma_3$ (kPa)
12.0	5.96	-41.1	-41.1	-70.0	-41.1	-41.1	-70.0

Tabella 5.5: Parametri e condizioni iniziali di secondo tentativo (par02).

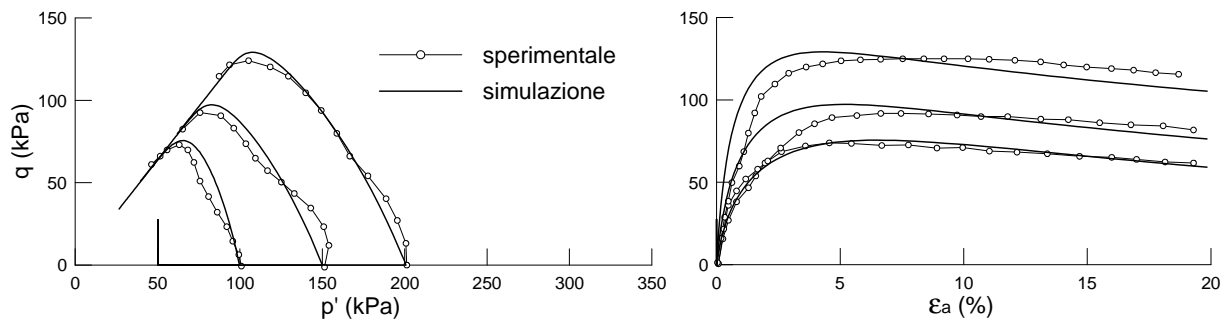


Figura 5.28: Simulazioni delle prove triassiali CIU fatte coi parametri di secondo tentativo.

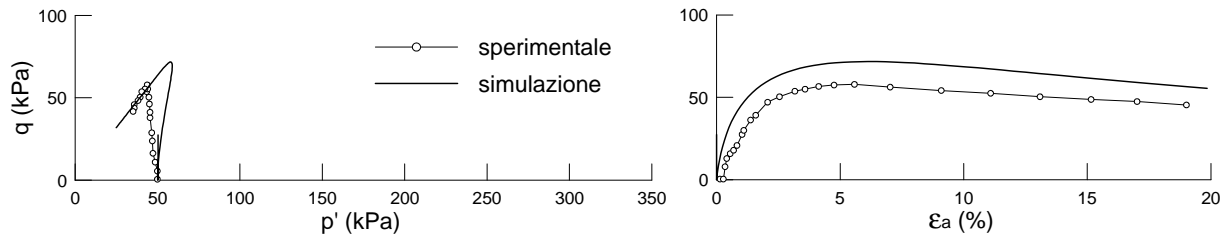


Figura 5.29: Simulazione della prova triassiale CIU consolidata a 50 kPa fatta coi parametri di secondo tentativo.

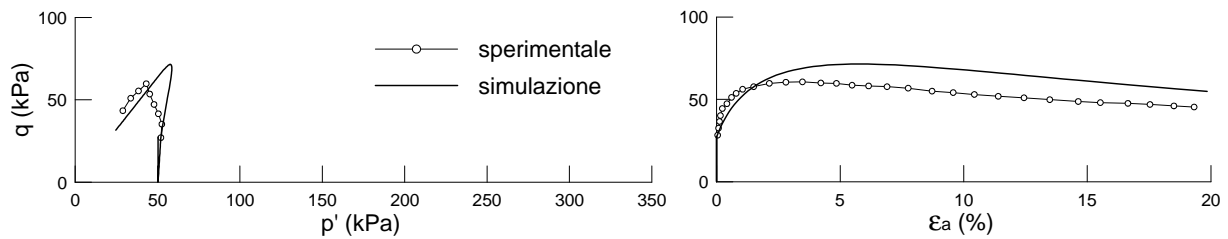


Figura 5.30: Simulazione della prova triassiale CAU consolidata a 50 kPa fatta coi parametri di secondo tentativo.

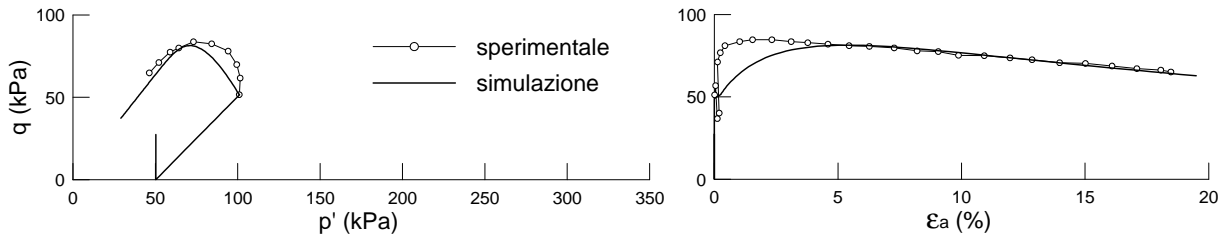


Figura 5.31: Simulazione della prova triassiale CAU consolidata a 100 kPa fatta coi parametri di secondo tentativo.

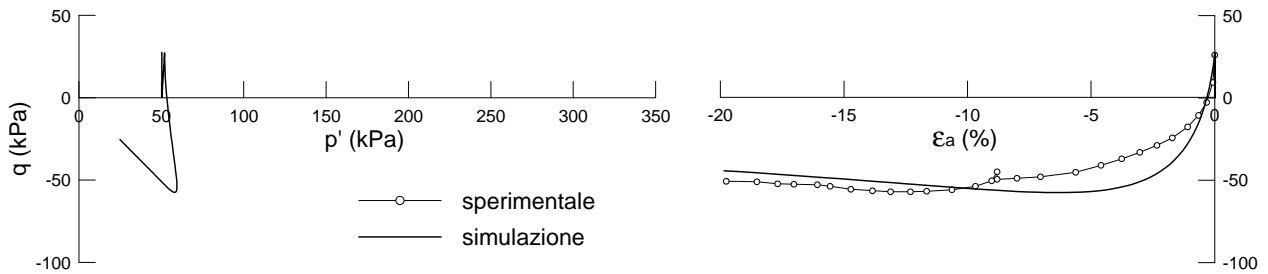


Figura 5.32: Simulazione della prova triassiale CAU in estensione consolidata a 50 kPa fatta coi parametri di secondo tentativo.

### 5.3 Modellazione e risultati

In riferimento alla sezione L-L dell'area nord (figura 5.7), la quale è schematicamente riportata in figura 5.8, è stata effettuata una simulazione numerica delle fasi di scavo. L'analisi è svolta in Abaqus Standard in condizioni di deformazione piana, ipotesi che in prima approssimazione può ritenersi valida nella sezione considerata. In figura 5.33 è mostrato il reticolo utilizzato: il dominio è rettangolare, largo 100 metri e alto 66 metri, ed è vincolato lateralmente e alla base con vincoli di carrelli e cerniere; le linee rossa e blu indicano rispettivamente la posizione della paratia e del fondo scavo. Gli elementi finiti utilizzati per il terreno (CPE8RP) sono elementi quadrilateri porosi ad otto nodi e ad integrazione ridotta, ovvero aventi quattro punti di Gauss ciascuno. La dimensione minima degli elementi utilizzati è di 0.5 metri (di lato).

La paratia è modellata con elementi beam (B21) di lunghezza pari a 0.5 metri, vincolati rigidamente agli adiacenti elementi di terreno. Ad essi (agli elementi B21) è stato attribuito un comportamento elastico lineare, con modulo di Young pari a 30 GPa. I momenti d'inerzia assegnati sono corrispondenti a quelli di una trave a sezione quadrata di lato pari ad 1 m.

Ogni puntone è modellato attraverso due molle orizzontali poste ad un dislivello di 0.5 metri tra loro, in modo tale da tener conto della reale dimensione delle travi (se si utilizzasse una sola molla, la paratia sarebbe troppo

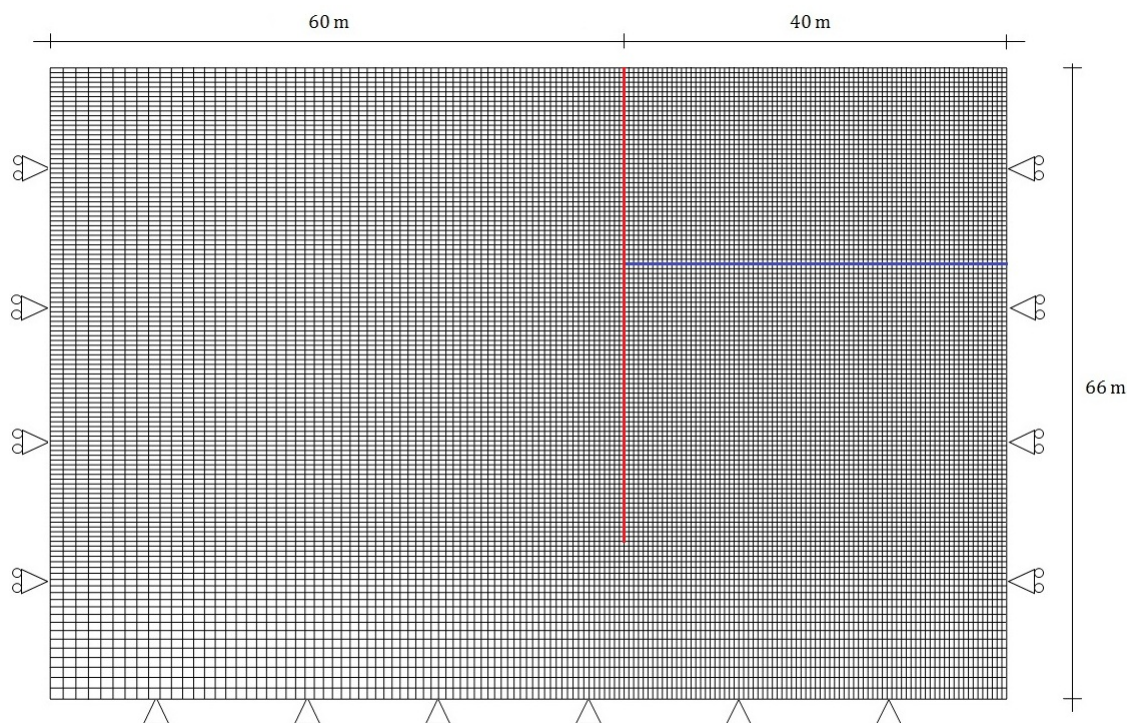


Figura 5.33: Reticolo del modello in Abaqus.

poco vincolata rispetto alla rotazione attorno al punto di applicazione del vincolo). La rigidità di ciascuna singola molla è stata calcolata considerando la componente parallela alla sezione presa in esame, ed è posta pari a  $K = 8000000 \text{ kN/m}$  per il primo livello di contrasto e  $K = 1500000 \text{ kN/m}$  per quelli successivi (il livello superiore è molto più rigido in quanto, come si nota nella foto di figura 5.13, molte delle zone comprese tra le travi sono riempite di calcestruzzo).

Per gli elementi di terreno si sono utilizzati i seguenti legami:

- per gli elementi facenti parte delle zone trattate e per quelli appartenenti agli strati di sabbia si è usato un legame elastico lineare isotropo, con criterio di resistenza di Mohr-Coulomb;
- per gli altri elementi si è utilizzato il legame elastoplastico fornito dal modello di Rouainia & Muir Wood (2000).

Come detto in precedenza, la stratigrafia è composta da un terreno di riporto a cui segue un deposito a grana fine (suddiviso nei quattro sottostrati C2, C4, C5 e C6) e poi uno a grana grossa (suddiviso nei due sottostrati S7-1 e S7-2). Le caratteristiche fisiche dei diversi sottostrati sono state determinate sulla base dei risultati dei sondaggi effettuati nel sito in esame, e sono state poi comparate con quelle rilevate da indagini fatte nei vicini siti. In tabella 5.6, per ogni terreno, sono riportati i valori medi di: contenuto d'acqua, indice dei vuoti, peso di volume, coefficiente di spinta in quiete, limite liquido, indice di plasticità, indice di consistenza e coefficiente

strato	descrizione	spessore (m)	$w$ (%)	$e$	$\gamma$ (kNm <sup>-3</sup> )	$K_0$	$w_L$ (%)	$I_P$ (%)	$I_C$	$k_v$ (m s <sup>-1</sup> )
1	riporto	7.0		(0.95)	(18.7)	(0.8)				(1e-6)
C2	argilla lim.	7.0	35	0.95	18.7	0.6	38	14	0.21	1e-6
C4	argilla lim.	3.5	50	1.35	17.2	0.6	44	22	-0.27	7e-8
C5	argilla lim.	8.0	40	1.08	18.2	0.6	42	16	0.12	1e-8
C6	argilla lim.	4.0	24	0.65	20.3	0.6	37	15	0.87	1e-8
S7-1	sabbia lim.	6.0		0.80	19.0	0.5				3e-6
S7-2	sabbia lim.	30.5		0.80	19.5	0.47				3e-6

Tabella 5.6: Caratteristiche fisiche dei terreni.

di permeabilità nella direzione verticale. Ai fini delle analisi numeriche, di tutte queste quantità quelle che possono influire sui risultati sono il peso di volume, il coefficiente  $K_0$  (che servono per l'inizializzazione dello stato tensionale geostatico), e la permeabilità (che entra in gioco nelle analisi di consolidazione). Allo strato di riporto, del quale purtroppo non si dispone di misure fatte in sito, si è deciso di assegnare proprietà simili a quelle dello strato C2.

In qualsiasi problema al finito, l'assegnazione dei parametri costitutivi e delle variabili di stato (laddove presenti) non è mai di facile esecuzione. Oltre alle difficoltà legate all'interpretazione delle singole prove vi sono quelle legate alla scarsa disponibilità di sondaggi, e spesso si rende necessario fare alcune ipotesi sul tipo di terreni presenti nelle zone non investigate. La calibrazione che è riportata nel precedente paragrafo fa riferimento a campioni provenienti dal sottostrato C4; per i sottostrati C2, C5 e C6 sono state prese in considerazione ulteriori prove di laboratorio eseguite su campioni prelevati a diverse profondità (Sheng 2012), tra cui prove edometriche e prove triassiali CID e CIU. Dall'elaborazione delle prove edometriche si sono ricavati il valore del parametro  $\lambda^*$  (tabella 5.7) ed il valore iniziale della variabile di stato  $p_c$ , e in tutti i casi si è notato che quest'ultima è legata alla pressione media efficace litostatica attraverso la relazione:

$$p_c \simeq \frac{p}{4} \quad (5.9)$$

Tenendo presente ciò, assumendo  $\kappa^* = \frac{\lambda^*}{10}$ , ponendo un grado di struttura iniziale  $r = 6$ , ed assegnando ai rimanenti parametri i valori derivanti dalla calibrazione fatta per lo strato C4, si sono simulate le prove triassiali

strato	descrizione	$\lambda^*$
C2	argilla limosa	0.056
C4	argilla limosa	0.074
C5	argilla limosa	0.098
C6	argilla limosa	0.053

Tabella 5.7: Parametri ottenuti dall'elaborazione delle prove edometriche.

per i rimanenti strati, osservando una buona corrispondenza coi risultati sperimentali.

Lo stato tensionale geostatico è stato assegnato in tutto il dominio attraverso la seguente procedura:

- si è assunta una distribuzione delle pressioni interstiziali idrostatica con superficie piezometrica posta a 1.5 metri dal piano campagna;
- dati i valori di peso di volume e di coefficiente di spinta in quiete riportati in tabella 5.6, si sono ricavate le tensioni efficaci litostatiche.

Per il riporto si è assunto un valore di coefficiente  $K_0 = 0.8$  per tener conto della sovraconsolidazione causata dalla rimozione dei vecchi edifici.

Per gli elementi a cui è stato assegnato il modello RW<sup>3</sup>, in riferimento allo strato di riporto e agli strati argillosi, l'assegnazione dei parametri e delle variabili di stato iniziali è avvenuta rispettando la seguente procedura:

- le variabili di stato che individuano il centro della superficie interna sono prese coincidenti con lo stato tensionale litostatico;
- la variabile di stato che individua il grado di struttura è posta pari ad  $r = 6$ ;
- la variabile di stato che individua il centro della superficie di riferimento è posta pari al 25% della pressione media efficace litostatica;
- ai parametri del modello sono assegnati i valori derivanti dalla calibrazione e dalla simulazione delle prove di laboratorio;
- allo strato di riporto si sono assegnati gli stessi parametri del terreno C2, ma per tener conto della sovraconsolidazione si è assunto un valore iniziale di  $p_c$  costante pari a 14.7 kPa.

Negli strati di sabbia limosa il comportamento assegnato è di tipo elastoplastico perfetto, con legame elastico lineare isotropo e criterio di resistenza di Mohr-Coulomb. Ai parametri sono assegnati i seguenti valori: coesione

<sup>3</sup>Col termine RW ci si riferisce al modello discusso nel capitolo 2.

nulla, angolo di resistenza al taglio  $\varphi' = 32^\circ$ , coefficiente di Poisson  $\nu = 0.25$ , modulo di Young variabile con la profondità nello strato 7.1 (con valori compresi tra 50000 kPa e 200000 kPa) e costante nello strato più profondo (pari a 250000 kPa).

Negli elementi situati in corrispondenza delle zone trattate si è adottato un elgame elastoplastico perfetto. Per la scelta dei parametri si è fatto riferimento al lavoro pubblicato da Rampello & Callisto (2003), in cui vengono date delle indicazioni per quantificare l'entità degli incrementi di rigidezza e di resistenza dovuti ai trattamenti. Il procedimento adottato è il seguente:

- le zone trattate sono state suddivise in strati orizzontali;
- per ognuno di questi strati, prendendo come riferimento un punto situato al centro dello strato, è stata simulata numericamente una prova triassiale non drenata non consolidata;
- dai risultati delle simulazioni è stata ricavata la resistenza non drenata  $C_{u(s)}$  e il modulo di rigidezza tangenziale  $G_{(s)}$  (il modulo è stato preso in corrispondenza di una deformazione assiale pari al 5 %);
- assumendo un coefficiente di Poisson  $\nu = 0.25$ , in funzione di  $G_{(s)}$  è stato ricavato il modulo di Young  $E_{(s)}$ ;
- in base al rapporto  $\frac{A_{(col)}}{A}$ , che esprime la percentuale di area effettivamente trattata rispetto all'area totale considerata, sono state ricavate la rigidezza  $E_{eq}$  e la resistenza non drenata  $C_{u,eq}$  del terreno trattato;
- ad ogni elemento è stato assegnato un coefficiente di Poisson  $\nu = 0.25$  e un modulo di Young  $E = E_{eq}$ ;
- ad ogni elemento è stato assegnato un angolo di resistenza al taglio  $\varphi' = 32^\circ$  ed una coesione efficace calcolata sulla base del valore di  $C_{u,eq}$  precedentemente ricavato.

I valori di  $C_{u(s)}$  e di  $G_{(s)}$  ricavati dalle simulazioni sono riportati in tabella 5.8. Per il calcolo della rigidezza e della resistenza equivalenti si sono utilizzate le relazioni:

$$E_{eq} = E_{(s)} \left[ 1 + \left( \frac{C_{u(col)}}{C_{u(s)}} - 1 \right) \frac{A_{(col)}}{A} \right] \quad (5.10)$$

$$C_{u,eq} = C_{u(s)} \left[ 1 + \left( \frac{C_{u(col)}}{C_{u(s)}} - 1 \right) \frac{A_{(col)}}{A} \right] \quad (5.11)$$

dove il rapporto  $\frac{A_{(col)}}{A}$  (pari al 70 %) è stato ricavato dai dati di progetto (vedi figura 5.5), mentre il rapporto  $\frac{C_{u(col)}}{C_{u(s)}}$  è posto pari a 10 nelle zone dove la percentuale di cemento è del 10 % e pari a 15 nei cinque metri più profondi, dove la percentuale di cemento è del 20 %.

Considerando la stratigrafia e la geometria del problema, al pompaggio di acqua dagli strati profondi è associabile un moto di filtrazione nelle sabbie in direzione prevalentemente verticale. Nella simulazione questa particolare

strato	quota sup. (m)	quota inf. (m)	$C_{u(s)}$ (kPa)	$G_{(s)}$ (kPa)	$\frac{A_{(col)}}{A}$	$\frac{C_{u(col)}}{C_{u(s)}}$	$E_{eq}$ (kPa)	$C_{u,eq}$ (kPa)	$c'$ (kPa)
1	5.5	7	37.5	554.3	0.7	10	10117	274	151.7
C2	7	14	47.5	893.0	0.7	10	16297	347	192.2
C4	14	17.5	67.5	1261.7	0.7	10	23025	493	273.1
C5	17.5	20.5	77.5	1404.7	0.7	10	25635	566	313.6
C5	20.5	25.5	80	1502.7	0.7	15	40572	864	478.9

Tabella 5.8: Parametri adottati nelle zone trattate.

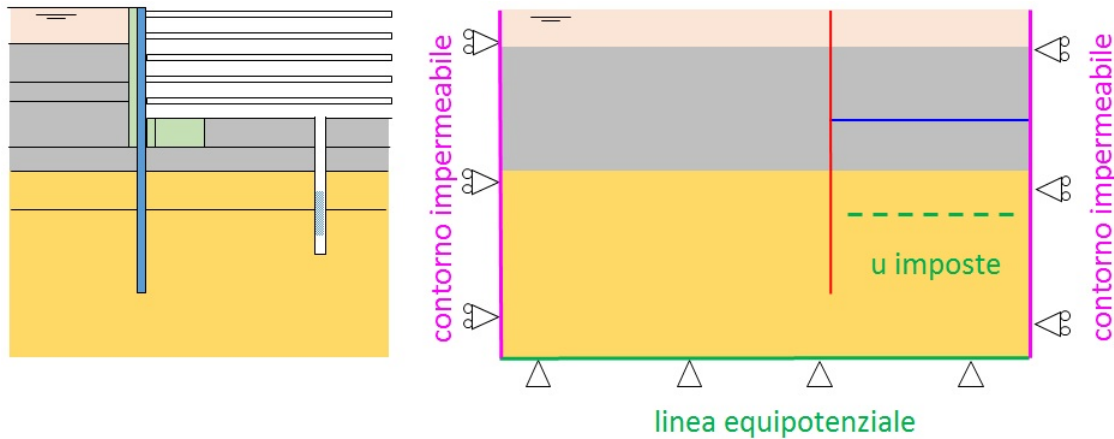


Figura 5.34: Condizioni idrauliche al contorno.

condizione idraulica è stata modellata assegnando un fissato valore alle pressioni interstiziali in alcuni punti del dominio posti al di sotto dello scavo e appartenenti allo strato delle sabbie, ed assegnando le condizioni al contorno riportate in figura 5.34.

Le fasi di calcolo eseguite nell'analisi numerica sono riportate in tabella 5.9. L'installazione delle paratie non è simulata e le stesse sono presenti fin dall'inizio dell'analisi. Dati i tempi relativamente rapidi in cui è stato effettuato lo scavo, l'analisi è svolta in condizioni non drenate. Durante le fasi di scavo, nei punti appartenenti alla linea tratteggiata di figura 5.34 (alla quota di 22 metri al di sotto del fondo scavo) le pressioni interstiziali sono fatte variare con continuità in modo che al loro valore corrisponda una quota piezometrica che si trovi 1 metro sotto l'attuale quota di fondo scavo. Lo stato tensionale, le pressioni interstiziali e le variabili di stato sono state inizializzate tramite l'uso delle subroutine UPOREP, SIGINI e SDVINI.

In riferimento all'ultima fase, ovvero dopo il raggiungimento della quota di fondo scavo, si mostrano le isolinee di: pressioni interstiziali (figura 5.35), spostamenti orizzontali (figura 5.36) e spostamenti verticali (figura 5.37). Nei



fase	descrizione
A	inizializzazione dello stato tensionale geostatico
B	scavo fino alla profondità di 1.5 metri
C	installazione del primo livello di supporto e scavo fino alla profondità di 5.5 metri
D	installazione del secondo livello di supporto e scavo fino alla profondità di 9.5 metri
E	installazione del terzo livello di supporto e scavo fino alla profondità di 13.5 metri
F	installazione del quarto livello di supporto e scavo fino alla profondità di 17.5 metri
G	installazione del quinto livello di supporto e scavo fino alla profondità di 20.5 metri

Tabella 5.9: Fasi eseguite nelle analisi numeriche.

terreni a grana fine, sotto il fondo scavo, si raggiungono pressioni interstiziali negative comprese tra  $-100$  kPa e  $-200$  kPa. Nelle figure 5.38 e 5.39 viene fatto un confronto tra i risultati dell'analisi e i dati di monitoraggio, in termini di spostamenti della paratia: si osserva che il modello sovrastima gli spostamenti fin dalle prime fasi di scavo, e nell'ultima fase lo spostamento massimo ottenuto dall'analisi è maggiore di quello misurato del 18 %. In particolare si osserva che gli spostamenti relativi alla fase B (2 cm in testa all'opera) sono troppo elevati se si considera la modesta entità dello scavo (1.5 m). Un'altro effetto che non ha riscontro nelle misure è lo spostamento del piede della paratia, che a fine scavo raggiunge un valore di 1.5 cm.

In figura 5.40, in riferimento all'ultima fase di scavo, si riporta il confronto tra i risultati dell'analisi e le misure derivanti dal monitoraggio in termini di spostamenti orizzontali dell'opera e cedimenti del piano campagna. In particolare sono mostrati i cedimenti misurati nei punti D1-D25 (vedi figura 5.15) in data 16/11/12, ovvero in corrispondenza al raggiungimento del fondo scavo nell'area nord. I cedimenti ottenuti per via numerica risultano maggiori di quelli misurati, e la loro tendenza a propagarsi è troppo pronunciata, tanto che a 50 metri dall'opera si ha un cedimento maggiore di 2 cm. Questo problema può essere dovuto al fatto che si è impedito il drenaggio nelle sabbie, e potrebbe essere risolto effettuando un'analisi che tenga conto dei reali tempi di scavo e delle reali condizioni di drenaggio.

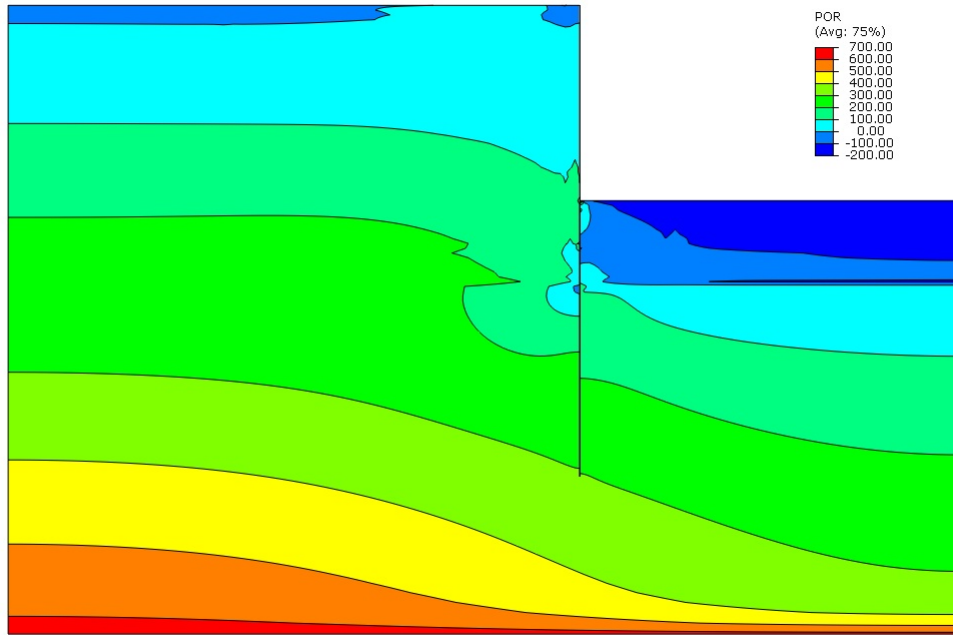


Figura 5.35: Risultati dell'analisi numerica: pressioni interstiziali a fine scavo.

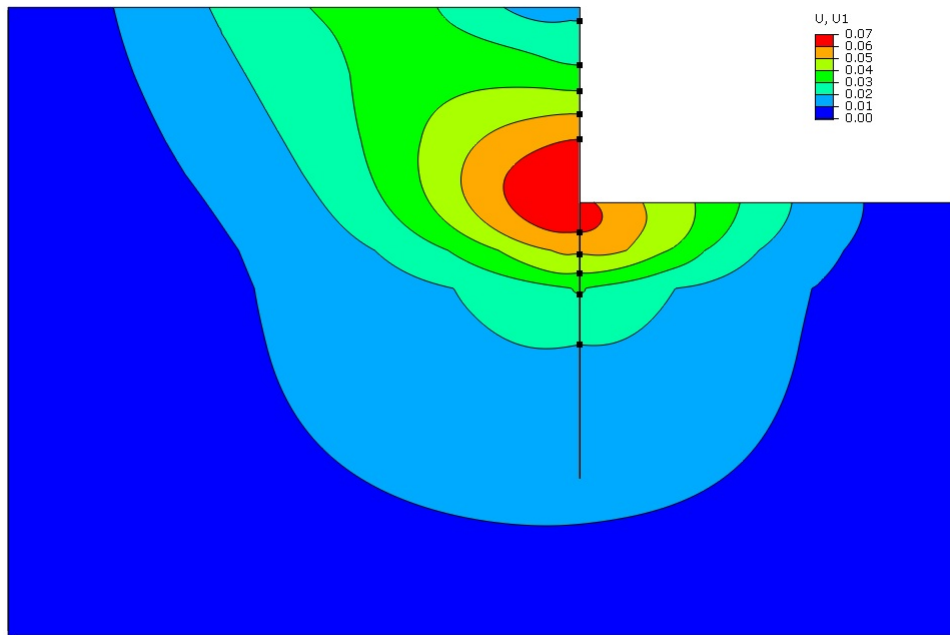


Figura 5.36: Risultati dell'analisi numerica: spostamenti orizzontali a fine scavo.

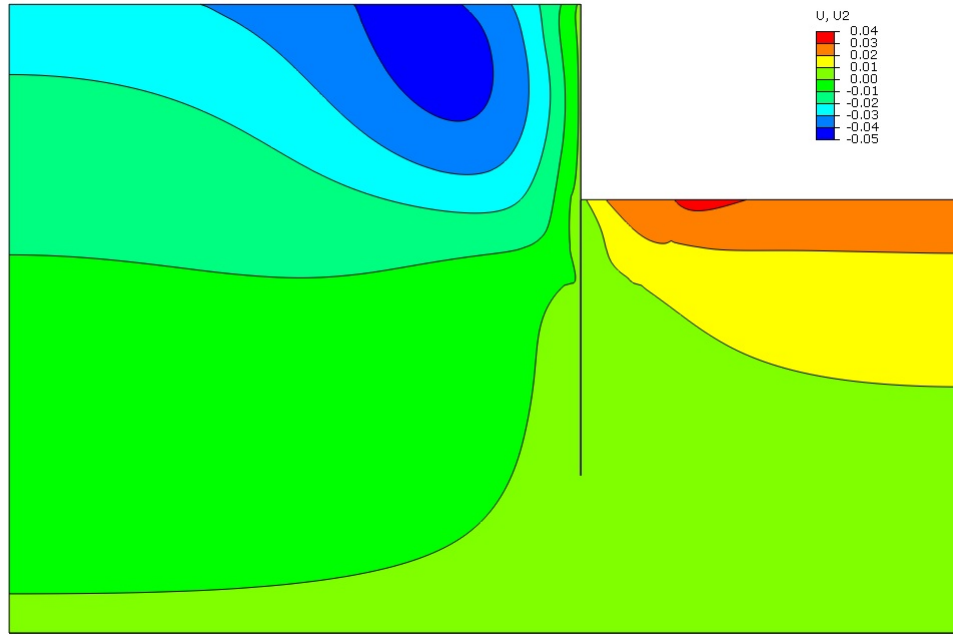


Figura 5.37: Risultati dell'analisi numerica: spostamenti verticali a fine scavo.

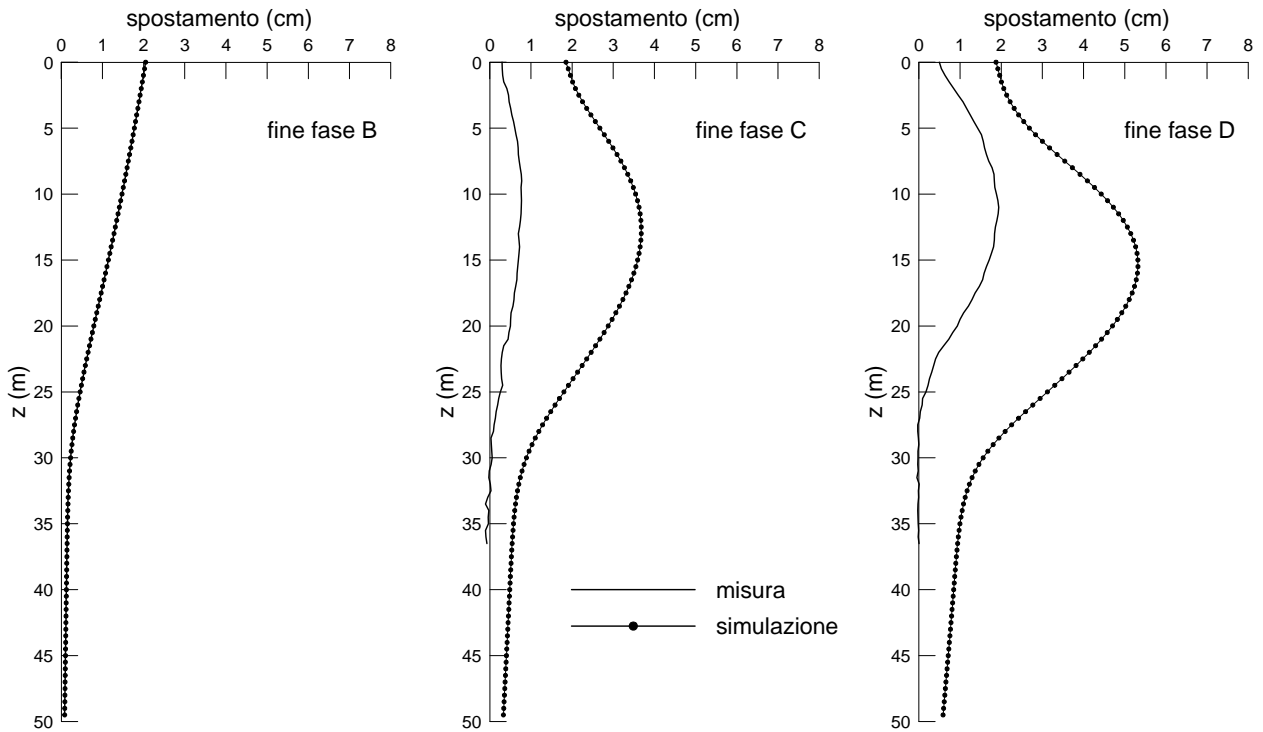


Figura 5.38: Spostamenti orizzontali della paratia (fasi B, C e D).

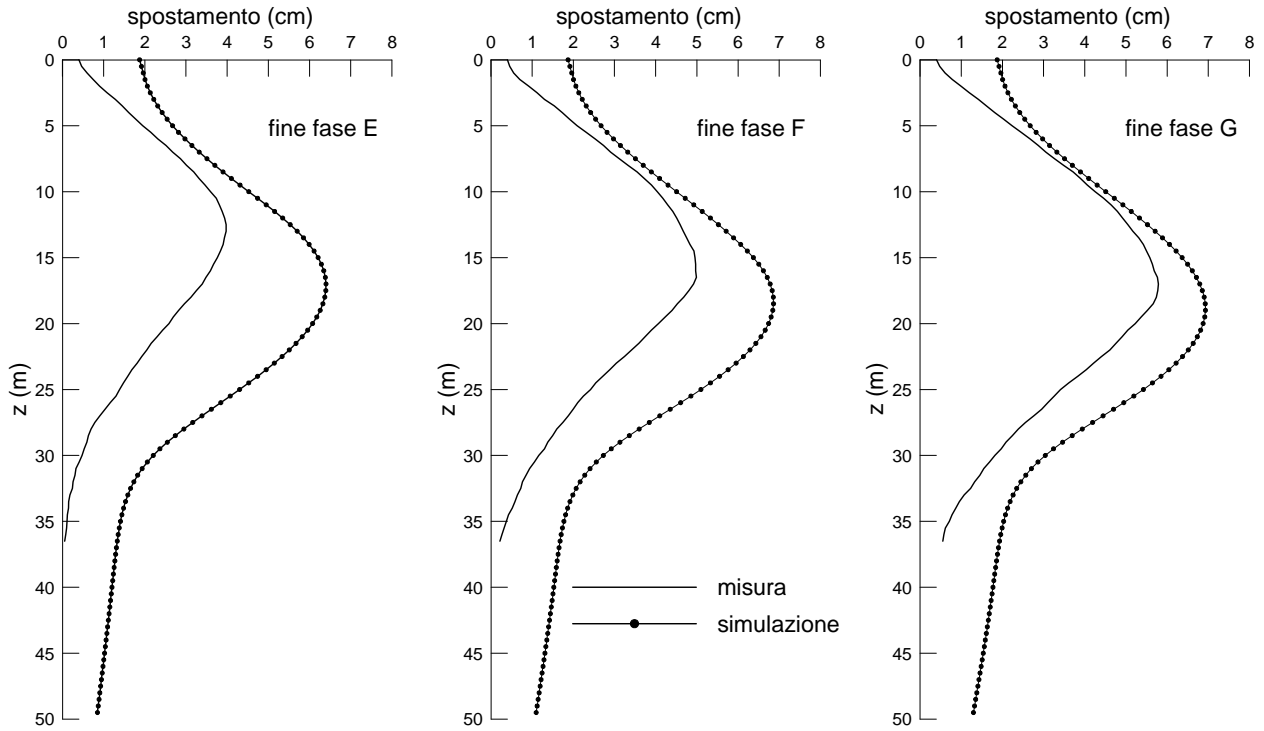


Figura 5.39: Spostamenti orizzontali della paratia (fasi E, F e G).

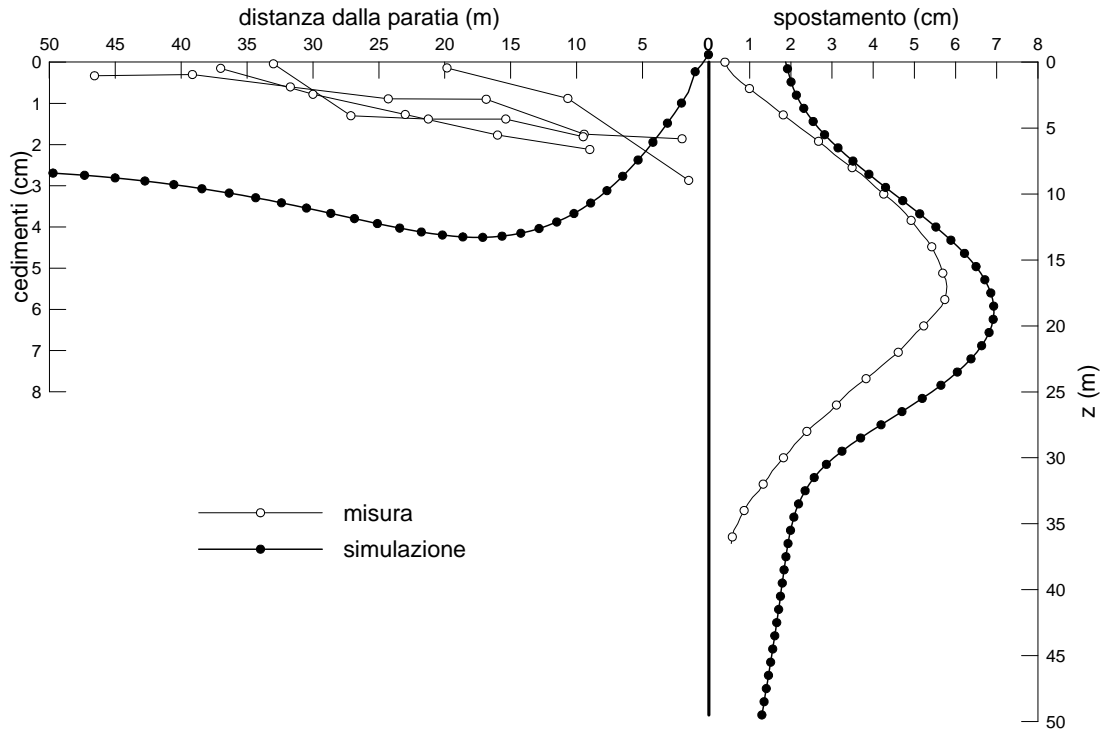


Figura 5.40: Confronto tra i risultati dell'analisi e i dati di monitoraggio in termini di spostamenti laterali della paratia e cedimenti a piano campagna.

## Capitolo 6

# Conclusioni

Il comportamento delle argille naturali è complesso ed è dipendente da molteplici caratteri, quali ad esempio la storia di carico, il processo di formazione del deposito o la presenza di particolari legami interparticellari. Nell'esame di molti problemi applicativi, come ad esempio quello riguardante lo studio del comportamento degli scavi in terreni a grana fine, è necessario tener conto di questi aspetti, in quanto essi influenzano fortemente la risposta del sistema geotecnico e delle strutture che interagiscono col terreno.

Il modello costitutivo presentato nel capitolo 2 descrive alcuni aspetti fondamentali del comportamento dei terreni naturali, quali ad esempio l'evoluzione della rigidità alle piccole deformazioni, l'esistenza di uno stato critico e la possibile perdita di struttura legata allo sviluppo di deformazioni plastiche. Rispetto alla sua formulazione originale, in questo lavoro si è ritenuto necessario apportare alcune modifiche a questo legame costitutivo, quale ad esempio l'introduzione di una variabile aggiuntiva attraverso la quale è possibile ottenere una continuità di rigidità nel passaggio da stati elastici a stati elasto-plastici.

Il modello costitutivo è stato implementato in linguaggio Fortran ed è stata sviluppata una subroutine UMAT che può essere utilizzata all'interno del programma di calcolo agli elementi finiti Abaqus/Standard. L'integrazione delle leggi costitutive, di tipo esplicito, è svolta seguendo lo schema di Eulero in avanti modificato, in cui la suddivisione in incrementi è automatica e tiene conto del grado di nonlinearità del legame elasto-plastico.

Raramente in letteratura sono disponibili linee guida per la calibrazione dei modelli costitutivi avanzati, e questo è forse uno dei principali motivi per cui tali modelli vengono utilizzati poco nella pratica professionale. Nella presente tesi, un approfondito studio parametrico sulla risposta dell'elemento di volume ha permesso di ricavare delle utili informazioni sul significato fisico dei parametri e soprattutto sulle procedure da utilizzare per la scelta delle costanti e delle variabili di stato, disponendo dei risultati di comuni prove di laboratorio. Tale studio parametrico ha altresì messo in luce l'importanza di disporre di prove di laboratorio di buona qualità.

Lo studio a posteriori del comportamento di uno scavo profondo realizzato a Shanghai, descritto nel capitolo 5,

ha messo in luce le complessità legate all'uso di legami costitutivi avanzati in casi reali. La modellazione dei terreni è stata effettuata adoperando il modello costitutivo implementato; i parametri sono stati calibrati sui risultati di prove di laboratorio disponibili in letteratura, e le variabili di stato sono state inizializzate prendendo in considerazione i risultati di alcune prove edometriche svolte su campioni prelevati alle diverse profondità; tale elaborazione ha permesso infatti di ricavare, per il sito in esame, una relazione tra la variabile di stato che rappresenta la pressione media efficace di riferimento e lo stato tensionale litostatico. La presenza di trattamenti è stata presa in considerazione incrementando la rigidezza e la resistenza dei terreni trattati in proporzione alla percentuale di legante utilizzato, sulla base di alcuni risultati disponibili in letteratura. Attraverso l'assegnazione dei valori delle pressioni interstiziali in alcuni opportuni punti del dominio si è inoltre potuto tener conto delle particolari condizioni di drenaggio, che prevedono un sistema di pompaggio di acqua dallo strato delle sabbie limose al di sotto dello scavo.

I risultati delle analisi numeriche dello scavo di Shanghai, condotte in condizioni non drenate, mostrano una certa sovrastima degli spostamenti orizzontali dell'opera di sostegno e del cedimento del piano campagna, soprattutto nelle prime fasi di scavo. Ciò sembra essere legato alle incertezze sulla permeabilità delle sabbie limose che si trovano al di sotto del deposito delle argille.

Infine, l'utilizzo del modello costitutivo per lo studio di uno scavo ideale in un terreno a grana fine ha permesso di analizzare l'influenza delle condizioni di drenaggio e delle caratteristiche costitutive sulla risposta complessiva dell'opera. In particolare si è visto che uno scavo che risulti stabile nelle condizioni di breve termine, nel caso in cui sia effettuato in argille aventi un importante grado di struttura e una elevata velocità di destrutturazione, può arrivare progressivamente al collasso a causa di un effetto combinato della consolidazione e della perdita di struttura nel terreno.

# Capitolo 7

## Appendice

### 7.1 Definizioni e notazioni

Nella presente appendice si richiamano brevemente le operazioni tra tensori che sono state utilizzate nel capitolo 2. Per uno studio più approfondito di tutte le possibili operazioni tra tensori si rimanda a de Souza Neto et al. (2008).

Per definizione un tensore del secondo ordine è un operatore lineare che trasforma un vettore in un altro vettore di uguale dimensione (in linguaggio tecnico un endomorfismo). Un vettore è un tensore del primo ordine, e sarà rappresentato da una lettera minuscola in grassetto. I tensori del secondo ordine, che in seguito indicheremo brevemente col termine tensori, saranno rappresentati da lettere maiuscole in grassetto. Nella rappresentazione matriciale un tensore  $\mathbf{T}$  può essere scritto come una matrice quadrata:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

mentre un tensore del primo ordine può essere scritto come una matrice colonna:

$$\mathbf{t}^T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Il prodotto scalare di due vettori (o prodotto interno) viene rappresentato con il simbolo  $\cdot$  (punto); esso gode della proprietà commutativa e dà come risultato uno scalare:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{t} = \sum_k s_k b_k \quad (7.3)$$

$$\mathbf{t}^T \mathbf{s} = \mathbf{s}^T \mathbf{t} = \sum_k s_k b_k \quad (7.4)$$

Il prodotto scalare di due tensori (detto anche doppio prodotto interno) viene rappresentato con il simbolo : (due punti); anch'esso è commutativo e dà come risultato uno scalare:

$$\mathbf{T} : \mathbf{S} = \mathbf{S} : \mathbf{T} = \sum_i \sum_j s_{ij} t_{ij} \quad (7.5)$$

L'operazione che in inglese viene definita come *single contraction of vector and tensor* può essere vista come il prodotto tra due tensori di ordine  $r_1$  ed  $r_2$  che dà come risultato un tensore di ordine  $r = r_1 + r_2 - 2$ ; tale operazione viene generalmente indicata col simbolo  $\cdot$  (punto), che può essere omesso nei casi in cui sono coinvolti un vettore ed un tensore del secondo ordine oppure due tensori del secondo ordine. Il prodotto tra tensori del secondo ordine è a sua volta un tensore:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{TS} = \mathbf{Q} \quad (7.6)$$

$$q_{ij} = \sum_k t_{ik} s_{kj} \quad (7.7)$$

In questo caso il prodotto non è commutativo, ma se  $\mathbf{T}$  ed  $\mathbf{S}$  sono simmetrici gode della seguente proprietà:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{Q}^T \quad (7.8)$$

Il prodotto di un tensore per un vettore è invece un vettore:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{Ts} = \mathbf{q} \quad (7.9)$$

$$q_i = \sum_k t_{ik} s_k \quad (7.10)$$

Anche in questo caso il prodotto non è commutativo, ma se  $\mathbf{T}$  è simmetrica vale la seguente proprietà:

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{s}^T \mathbf{T} = \mathbf{q}^T \quad (7.11)$$



## 7.2 Variabili tensionali e deformative

Dato un corpo nello spazio e fissata una terna di assi ortogonali  $x_1, x_2, x_3$ , lo stato tensionale in un punto del corpo è noto se si conoscono le nove componenti speciali di tensione  $\sigma_{ij}$ , con  $i, j = 1, 2, 3$  (Luongo & Paolone, 2005). Tale stato tensionale può essere rappresentato dal tensore del secondo ordine  $\mathbf{T}$ , detto tensore della tensione. Per la proprietà di reciprocità le componenti con indici misti sono tra loro uguali, per cui delle nove componenti solo sei sono indipendenti:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Di grande interesse ingegneristico sono gli invarianti della tensione, i quali non dipendono dalla base in cui sono espressi. Facendo uso del tensore identità  $\mathbf{I}$  e dei prodotti precedentemente definiti, essi possono essere scritti in forma compatta utilizzando la notazione tensoriale:

$$I_1 = \mathbf{T} : \mathbf{I} = \text{tr } \mathbf{T} \quad (7.13)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{T} : \mathbf{T} - I_1^2) \quad (7.14)$$

$$I_3 = \frac{1}{3} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} : \mathbf{T} - I_1^3) - I_1 I_2 = \det \mathbf{T} \quad (7.15)$$

Il tensore deviatorico della tensione  $\mathbf{S}$ , che si ottiene sottraendo a  $\mathbf{T}$  la sua parte idrostatica, descrive lo scostamento dello stato attuale da quello sferico:

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

È facile dimostrare che  $s_{12} = \tau_{12}$ ,  $s_{13} = \tau_{13}$  e  $s_{23} = \tau_{23}$ . Inoltre, siccome le componenti di  $\mathbf{S}$  che si trovano sulla diagonale principale sono linearmente dipendenti tra loro (ad esempio si può scrivere  $s_{11} = -s_{22} - s_{33}$ ), di tutte le  $s_{ij}$  solo cinque sono indipendenti.

Anche per il tensore deviatorico è possibile calcolare gli invarianti, che possono essere chiamati *invarianti deviatorici*:

$$J_1 = 0 \quad (7.17)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} \quad (7.18)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} : \mathbf{S} = \det \mathbf{S} \quad (7.19)$$

Può essere conveniente esprimere  $J_2$  e  $J_3$  in funzione di  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ :

$$J_2 = I_2 + \frac{1}{3}I_1^2 \quad (7.20)$$

$$J_3 = I_3 + \frac{1}{3}I_1I_2 + \frac{2}{27}I_1^3 \quad (7.21)$$

In ambito geotecnico usualmente si fa riferimento ad altre quantità invarianti, ovvero la tensione normale media  $p$ , la tensione deviatorica  $q$  e l'angolo di Lode  $\theta$ , che sono così definite:

$$p = -\frac{1}{3}I_1 \quad (7.22)$$

$$q = \sqrt{3J_2} \quad (7.23)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (7.24)$$

Facendo riferimento alla notazione di Scienza delle Costruzioni, in cui a valori positivi delle componenti normali di tensione si associano stati di trazione, il segno della tensione normale media va definito opposto a quello del primo invariante (questo perchè la tensione normale media è definita positiva per stati tensionali in cui la componente idrostatica è di compressione). L'angolo di Lode può assumere valori compresi tra  $-\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{\pi}{6}$ , a cui corrispondono rispettivamente stati tensionali di compressione ed estensione.

Individuata una terna di autovettori di  $\mathbf{T}$ , e quindi una base principale, si può rappresentare il tensore della tensione in riferimento a questa base. In questo modo  $\mathbf{T}$  si diagonalizza e le sue componenti non nulle sono le tensioni principali  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  e  $\sigma_{III}$ . Nello spazio a tre dimensioni delle tensioni principali lo stato tensionale è individuato dal vettore  $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_I & \sigma_{II} & \sigma_{III} \end{bmatrix}^T$ . Di tale vettore è rilevante considerare le due componenti  $\sigma_n$  e  $\tau_n$ , che sono rispettivamente la normale e la tangenziale al piano deviatorico (o piano II):

$$\sigma_n = \|\boldsymbol{\sigma}_n\| = -\sqrt{3}p \quad (7.25)$$

$$\tau_n = \|\boldsymbol{\tau}_n\| = \sqrt{\frac{2}{3}}q \quad (7.26)$$

In figura 7.1 si può osservare la rappresentazione di un generico stato tensionale nello spazio delle tensioni principali. Si deduce che  $\sigma_n$  individua la distanza, lungo l'asse idrostatico, del piano deviatorico corrente rispetto all'origine; questa quantità non è da confondere con la tensione normale al piano ottaedrico  $\sigma_{ott} = -p$ . Allo stesso modo  $\tau_n$ , che quantifica la minima distanza del punto rappresentativo dello stato tensionale dall'asse idrostatico, non va confusa con la tensione tangenziale ottaedrica  $\tau_{ott} = \frac{\sqrt{2}}{3}q$ . In figura è rappresentato anche l'angolo di Lode sul piano deviatorico.

Nonostante possa sembrare banale va ricordato che per individuare un punto nello spazio  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$  non sono

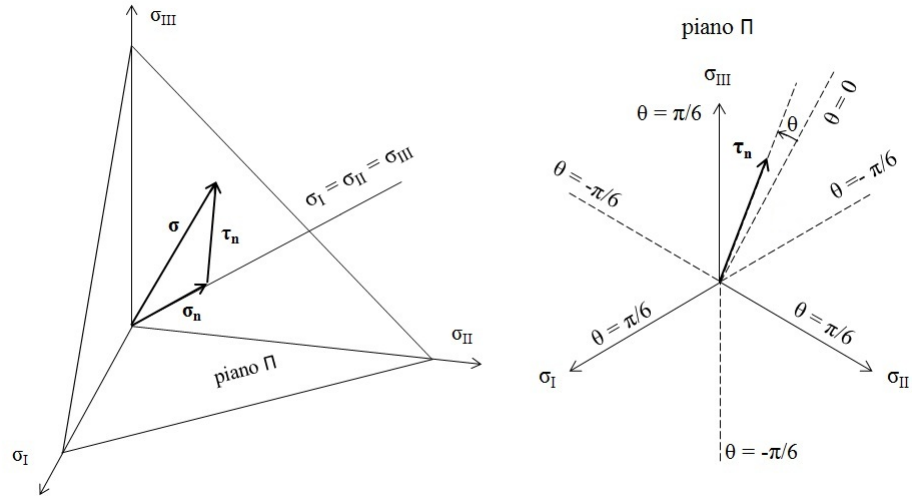


Figura 7.1: Spazio delle tensioni principali e piano deviatorico.

sufficienti le tre quantità  $p$ ,  $q$  e  $\theta$ . Inoltre per definire lo stato tensionale in un punto non bastano le sole tensioni principali, ma servono anche le rispettive giaciture nello spazio fisico.

L'analisi della deformazione in un punto, in modo analogo a quella della tensione, permette di definire il tensore della deformazione infinitesima:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

Per la reciprocità deve essere  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ .

Definendo gli invarianti della deformazione allo stesso modo in cui è stato fatto per quelli della tensione:

$$I_1 = \mathbf{E} : \mathbf{I} \quad (7.28)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{E} : \mathbf{E} - I_1^2) \quad (7.29)$$

$$I_3 = \frac{1}{3} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} : \mathbf{E} - I_1^3) - I_1 I_2 \quad (7.30)$$

e ricavando l'espressione del tensore deviatorico di deformazione:

$$\mathbf{E}_S = \mathbf{E} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{I} \quad (7.31)$$

possono essere introdotti i due invarianti della deformazione maggiormente impiegati in Geotecnica, ovvero la

deformazione volumetrica  $\varepsilon_p$  e la deformazione deviatorica  $\varepsilon_q$ :

$$\varepsilon_p = -\mathbf{E} : \mathbf{I} \quad (7.32)$$

$$\varepsilon_q = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{E}_S : \mathbf{E}_S} \quad (7.33)$$

### 7.3 Derivate del modello costitutivo

Per l'implementazione del modello costitutivo è necessario calcolare le derivate tensionali della funzione di snervamento  $\bar{y} = f(\bar{\mathbf{T}}) - F(\bar{\kappa})^1$ . Dal momento che  $F(\bar{\kappa})$  non dipende da  $\mathbf{T}$ , le derivate tensionali della funzione  $\bar{y}$  coincidono con quelle della funzione  $\bar{f} = f(\bar{\mathbf{T}})$ , e quindi le componenti del versore normale alla superficie di snervamento possono essere scritte come:

$$\bar{\mathbf{N}} = \frac{\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\mathbf{T}}}}{\left\| \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\mathbf{T}}} \right\|} \quad (7.34)$$

La funzione di snervamento utilizzata nella presente tesi è esprimibile come:

$$\bar{f} = \frac{3\bar{J}_2}{M^2} + \bar{p}^2 \quad (7.35)$$

dove:

$$\bar{M} = Mm \left[ \frac{2}{(1 + m^\alpha) + (1 - m^\alpha) \sin(3\bar{\theta})} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (7.36)$$

Le derivate tensionali sono quindi date da:

$$\partial \bar{f} = \frac{3}{M^2} \partial \bar{J}_2 - \frac{6\bar{J}_2}{M^3} \partial \bar{M} + 2\bar{p} \partial \bar{p} \quad (7.37)$$

dove per semplicità si è scritto  $\partial \bar{f}$  in luogo di  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{\mathbf{T}}}$ .

Per il calcolo di  $\partial \bar{f}$ , volendo procedere con ordine, conviene dapprima ottenere le derivate<sup>2</sup> degli invarianti di  $\bar{\mathbf{T}}$ :

$$\partial \bar{I}_1 = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

<sup>1</sup>Si ricorda che nel nostro caso, siccome la legge di flusso è associata, la funzione di snervamento ed il potenziale di flusso plastico hanno la stessa espressione.

<sup>2</sup>Col termine generico derivata qui si intende la matrice contenente le derivate tensionali.

$$\boldsymbol{\partial}\bar{I}_2 = \bar{\mathbf{T}} - \bar{I}_1\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -(\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_3) & \bar{\tau}_{12} & \bar{\tau}_{13} \\ \bar{\tau}_{21} & -(\bar{\sigma}_3 + \bar{\sigma}_1) & \bar{\tau}_{23} \\ \bar{\tau}_{31} & \bar{\tau}_{32} & -(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_1) \end{bmatrix} \quad (7.39)$$

$$\boldsymbol{\partial}\bar{I}_3 = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3 - \bar{\tau}_{23}\bar{\tau}_{32} & \bar{\tau}_{23}\bar{\tau}_{31} - \bar{\sigma}_3\bar{\tau}_{21} & \bar{\tau}_{32}\bar{\tau}_{21} - \bar{\sigma}_2\bar{\tau}_{31} \\ \bar{\tau}_{13}\bar{\tau}_{32} - \bar{\sigma}_3\bar{\tau}_{12} & \bar{\sigma}_3\bar{\sigma}_1 - \bar{\tau}_{31}\bar{\tau}_{13} & \bar{\tau}_{31}\bar{\tau}_{12} - \bar{\sigma}_1\bar{\tau}_{32} \\ \bar{\tau}_{12}\bar{\tau}_{23} - \bar{\sigma}_2\bar{\tau}_{13} & \bar{\tau}_{21}\bar{\tau}_{13} - \bar{\sigma}_1\bar{\tau}_{23} & \bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2 - \bar{\tau}_{12}\bar{\tau}_{21} \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

$$\frac{\partial\bar{I}_3}{\partial\sigma_{ij}} = (-1)^{i+j} \bar{\sigma}_{i,j} \quad (7.41)$$

Poi le derivate del secondo e del terzo invariante deviatorico di  $\bar{\mathbf{T}}$ :

$$\boldsymbol{\partial}\bar{J}_2 = \boldsymbol{\partial}\bar{I}_2 + \frac{2}{3}\bar{I}_1\boldsymbol{\partial}\bar{I}_1 = \bar{\mathbf{S}} \quad (7.42)$$

$$\boldsymbol{\partial}\bar{J}_3 = \boldsymbol{\partial}\bar{I}_3 + \frac{1}{3}\bar{I}_1\bar{\mathbf{S}} + \frac{1}{3}\bar{I}_2\mathbf{I} \quad (7.43)$$

Infine le derivate di  $\bar{p}$  ed  $\bar{M}$ :

$$\boldsymbol{\partial}\bar{p} = -\frac{1}{3}\boldsymbol{\partial}\bar{I}_1 \quad (7.44)$$

$$\boldsymbol{\partial}\bar{M} = -\frac{\bar{M}}{2\alpha} \left( \frac{\bar{M}}{Mm} \right)^\alpha (1 - m^\alpha) \frac{\sin(3\theta)}{\bar{J}_3} \left( \boldsymbol{\partial}\bar{J}_3 - \frac{3}{2} \frac{\bar{J}_3}{\bar{J}_2} \boldsymbol{\partial}\bar{J}_2 \right) \quad (7.45)$$

Si possono quindi fare le seguenti considerazioni:

- la derivata del primo invariante è la matrice identità;
- la derivata di  $\bar{I}_2$  è uguale alla matrice che si ottiene da  $\bar{\mathbf{T}}$  sottraendo il primo invariante agli elementi che si trovano sulla diagonale principale;
- la derivata di  $\bar{I}_3$ , fatta rispetto alla generica componente tensoriale  $\sigma_{ij}$ , è pari al complemento algebrico del minore  $\bar{\sigma}_{i,j}$  (si ricorda che il minore  $\bar{\sigma}_{i,j}$  è il determinante della matrice che si ottiene da  $\bar{\mathbf{T}}$  sopprimendo l'i-esima riga e la j-esima colonna);
- la derivata di  $\bar{J}_2$  è pari al tensore deviatorico  $\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{T}} - \frac{1}{3}\bar{I}_1\mathbf{I}$ .



# Bibliografia

- [1] Abbo A. J. (1997). *Finite element algorithms for elastoplasticity and consolidation*. Tesi di Dottorato, University of Newcastle.
- [2] Al-Tabbaa A. & Muir Wood D. (1989). An experimentally based “bubble” model for clay. *Numerical Models in Geomechanics NUMOG III*, 91-99.
- [3] Amorosi A., Callisto L. & Rampello S. (1999). Observed behaviour of reconstituted clay along stress paths typical of excavations. *2nd International Symposium on Pre-failure characteristics of geomaterials*, Torino.
- [4] Bing N. (2007). *Implementation of a bubble model in FLAC and its application in dynamic analysis*. Tesi di Dottorato, The University of Auckland.
- [5] Bjerrum L. & Eide O. (1956). Stability of strutted excavation in clay. *Géotechnique* **6**, No. 1, 32-47.
- [6] Burghignoli A., Cocciuti M., Miliziano S. & Soccodato F. M. (2003). Evaluation of advanced constitutive modelling for cemented clayey soils: a case history. *Mathematical and Computer Modelling* **37**, No. 5/6, 631-640.
- [7] Burland J. B. & Fourie A. (1985). The testing of soils under conditions of passive stress relief. *Géotechnique* **35**, No. 2, 193-198.
- [8] Burland J. B. (1990). On the compressibility and shear strength of natural clays. *Géotechnique* **40**, No. 3, 329-378.
- [9] Calabresi G., Callisto L. & Rampello S. (2002). Il ruolo delle pressioni interstiziali nella previsione del comportamento di uno scavo profondo. *Atti del XXI Convegno Nazionale di Geotecnica*, L'Aquila.
- [10] Callisto L. (1996). *Studio sperimentale su un'argilla naturale: il comportamento meccanico dell'argilla di Pisa*. Tesi di Dottorato, Sapienza Università di Roma.

- [11] Callisto L. & Calabresi G. (1998). Mechanical behaviour of a natural soft clay. *Géotechnique* **48**, No. 4, 495-513.
- [12] Callisto L., Gajo A. & Muir Wood D. (2002). Simulation of triaxial and true triaxial tests on natural and reconstituted Pisa clay. *Géotechnique* **52**, No. 9, 649-666.
- [13] Callisto L. & Rampello S. (2004). An interpretation of structural degradation for three natural clays. *Canadian Geotechnical Journal* **41**, No. 3, 392-407.
- [14] Callisto L. (2011). Diaframmi a sostegno di scavi profondi in terreni a grana fine. *Atti delle XXIII Conferenze Geotecniche di Torino*.
- [15] Callisto L., Maltese F. & Bertoldo F. (2014). design of deep excavations in fine-grained soils accounting for changes in pore water pressures. *Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Ground*, 161-166, Korean Geotechnical Society, Seoul.
- [16] Chai J. C., Shen S. L., Zhu H. H. & Zhang X. L. (2004). Land subsidence due to groundwater drawdown in Shanghai. *Géotechnique* **54**, No. 2, 143-147.
- [17] Cocciuti M. (1999). *Modellazione del comportamento delle argille cementate in un problema al finito*. Tesi di Laurea, Sapienza Università di Roma.
- [18] Cotecchia F. & Chandler R. J. (2000). A general framework for the mechanical behaviour of clays. *Géotechnique* **50**, No. 4, 431-447.
- [19] Dafalias Y. F. (1986). Bounding surface plasticity. I: mathematical foundation and hypoplasticity. *Journal of Engineering Mechanics* **112**, No.9, 966-987.
- [20] de Souza Neto E. A., Perić D. & Owen D. R. J. (2008). *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. John Wiley & Sons Ltd.
- [21] Dowell M. & Jarratt P. (1972). The “Pegasus” method for computing the root of an equation. *BIT Numerical Mathematics* **12**, No. 4, 503-508.
- [22] Fourie A. B. & Potts D. M. (1991). A numerical and experimental study of London Clay subjected to passive stress relief. *Géotechnique* **41**, No. 1, 1-15.
- [23] Grammatikopoulou A., Zdravkovic L. & Potts D. M. (2006). General formulation of two kinematic hardening constitutive models with a smooth elastoplastic transition. *International Journal of Geomechanics* **6**, No. 5, 291-302.



- [24] Hashash M. A. & Whittle A. J. (2002). Mechanism of load transfer and arching for braced excavations in clay. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* **128**, No. 3, 187-197.
- [25] Hashiguchi K. (1988). A mathematical modification of two surface model formulation in plasticity. *International Journal of Solids and Structures* **24**, No. 10, 987-1001.
- [26] Hong Y., Ng C. W. W., Liu G. B. & Liu T. (2015). Three-dimensional deformation behaviour of a multi-propped excavation at a “greenfield” site at Shanghai soft clay. *Tunnelling and Underground Space Technology* **45**, 249-259.
- [27] Hu C. & Liu H. (2014). Implicit and explicit integration schemes in the anisotropic bounding surface plasticity model for cyclic behaviours of saturated clay. *Computers and Geotechnics* **55**, 27-41.
- [28] Huang M. S., Liu Y. H. & Sheng D. C. (2011). Simulation of yielding and stress-stain behavior of shanghai soft clay. *Computers and Geotechnics* **38**, No. 3, 341-353.
- [29] Jaky J. (1944). The coefficient of earth pressure at rest. *Journal of Society of Hungarian Architects and Engineers*, 355-358.
- [30] Kavvas M. & Amorosi A. (2000). A constitutive model for structured soils. *Géotechnique* **50**, No. 3, 263-273.
- [31] Koutsoftas C., Frobenius P., Wu C. L., Meyersohn D. & Kulesza R. (2000). Deformations during cut-and-cover construction of Muni Metro turnback project. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* **126**, No. 4, 344-359.
- [32] Kung G. T. C., Ou C. Y. & Juang C. H. (2009). Modeling small-strain behavior of Taipei clays for finite element analysis of braced excavations. *Computers and Geotechnics* **36**, No. 1, 304-319.
- [33] Lim A., Ou C. Y. & Hsieh P. G. (2010). Evaluation of clay constitutive models for analysis of deep excavations under undrained conditions. *Journal of GeoEngineering* **5**, No.1, 9-18.
- [34] Liu G. B., Ng C. W. W. & Wang Z. W. (2005). Observed performance of a deep multistrutted excavation in Shanghai soft clays. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* **131**, No. 8, 1004-1013.
- [35] Liu G. B., Jiang R. J., Ng C. W. W. & Hong Y. (2011). Deformation characteristics of a 38 m deep excavation in soft clay. *Canadian Geotechnical Journal* **48**, No. 12, 1817-1828.
- [36] Liu Y. H. (2010). *On yielding characteristics and principal stress rotation in natural soft clay*. Tesi di Dottorato, Tongji University.

- [37] Luongo A. & Paolone A. (2005). *Scienza delle Costruzioni Volume 1: Il continuo di Cauchy*. Casa Editrice Ambrosiana, Milano.
- [38] Maltese F. (2013). *Progetto di scavi profondi in terreni a grana fine*. Tesi di Laurea, Sapienza Università di Roma.
- [39] Nash D. F. T., Lings M. L. & Ng C. W. W. (1996). Observed heave and swelling beneath a deep excavation in Gault clay. *Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Ground*, 191-196, Balkema, Rotterdam.
- [40] Ng C. W. W. (1998). Observed performance of multipropped excavation in stiff clay. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* **124**, No. 9, 889-905.
- [41] Ng C. W. W. (1999). Stress paths in relation to deep excavations. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* **125**, No. 5, 357-363.
- [42] Ng C. W. W., Hong Y., Liu G. B. & Liu T. (2012). Ground deformations and soil-structure interaction of a multi-propped excavation in Shanghai soft clays. *Géotechnique* **62**, No. 10, 907-921.
- [43] Ng C. W. W., Liu G. B. & Li Q. (2013). Investigation of the long-term tunnel settlement mechanism of the first metro line in Shanghai. *Canadian Geotechnical Journal* **50**, No. 6, 674-684.
- [44] Ou C. Y., Liao J. T. & Lin H. D. (1998). Performance of diaphragm wall constructed using top-down method. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* **124**, No. 9, 798-808.
- [45] Ou C. Y., Liao J. T. & Cheng W. L. (2000). Building response and ground movements induced by a deep excavation. *Géotechnique* **50**, No. 3, 209-220.
- [46] Potts D. M. & Ganendra D. (1994). An evaluation of substepping and implicit stress point algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **119**, No. 3/4, 341-354.
- [47] Rampello S. & Callisto L. (2003). Predicted and observed performance of an oil tank founded on soil-cement columns in clayey soils. *Soils and Foundations* **43**, No. 4, 229-240.
- [48] Rouainia M. & Muir Wood D. (2000). A kinematic hardening constitutive model for natural clays with loss of structure. *Géotechnique* **50**, No. 2, 153-164.
- [49] Sheng J. R. (2012). *Laboratory tests and constitutive modeling on the mechanical behavior of Shanghai clays*. Tesi di Master, Jiao Tong University.

- [50] Sloan S. W., Abbo A. J. & Sheng D. (2001). Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control. *Engineering Computations* **18**, No. 1/2, 121-154.
- [51] Som N. N. & Gupta A. K. (1994). Time effect on ground settlement due to braced excavation in soft clay. *Underground Construction in Soft Ground*, 143-146, Balkema, Rotterdam.
- [52] Stallebrass S. E. & Taylor R. N. (1997). The development and evaluation of a constitutive model for the prediction of ground movements in overconsolidated clay. *Géotechnique* **47**, No. 2, 235-253.
- [53] Symons I. F. & Tedd P. (1989). Behaviour of a propped embedded retaining wall at Bell Common Tunnel in the longer term. *Géotechnique* **39**, No. 4, 701-710.
- [54] Tan Y. & Li M. W. (2011). Measured performance of a 26 m deep top-down excavation in downtown Shanghai. *Canadian Geotechnical Journal* **48**, No. 5, 704-719.
- [55] Tan Y. & Wang D. L. (2013). Characteristics of a large-scale deep foundation pit excavated by the central-island technique in Shanghai soft clay. I: bottom-up construction of the central cylindrical shaft. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* **139**, No. 11, 1875-1893.
- [56] Tan Y. & Wei B. (2012). Observed behaviors of a long and deep excavation constructed by cut-and-cover technique in Shanghai soft clay. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* **138**, No. 1, 69-88.
- [57] Tan Y., Wei B., Diao Y. P. & Zhou X. (2014). Spatial corner effects of long and narrow multipropped deep excavations in Shanghai soft clay. *Journal of Performance of Constructed Facilities* **28**, No. 4.
- [58] Tedd P., Chard B. M., Charles J. A. & Symons I. F. (1984). Behaviour of a propped embedded retaining wall in stiff clay at Bell Common Tunnel. *Géotechnique* **34**, No. 4, 513-532.
- [59] Tedd P. & Charles J. A. (1985). The strength of London Clay in relation to the design of embedded retaining walls. *Géotechnique* **35**, No. 2, 199-204.
- [60] Wu C. J., Ye G. L., Zhang L. L., Bishop D. & Wang J. H. (2015). Depositional environment and geotechnical properties of Shanghai clay: a comparison with Ariake and Bangkok clays. *Bulletin of Engineering Geology and the Environments* **74**, No. 3, 717-732.
- [61] Zhao J., Sheng D., Rouainia M. & Sloan S. W. (2005). Explicit stress integration of complex soil models. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* **29**, No. 12, 1209-1229.