



Leonardo Baglioni

La discretizzazione delle superfici continue

Tesi di Dottorato di Ricerca D.P.R. 11/7/1980 - Ciclo XXI - Dicembre 2008



Abstract

La riduzione di un sistema continuo in uno discreto prende il nome di tassellazione. Affrontando le problematiche geometriche, matematiche e storiche del tema, si definisce il filo conduttore che lega insieme i significati del termine, nei diversi settori scientifici in cui esso è applicato. A partire dall'osservazione di alcuni caratteri dell'architettura contemporanea, l'indagine si sofferma sulle proprietà matematiche e geometriche del ricoprimento del piano euclideo.

L'analisi di un'opera significativa dell'artista olandese M.C. Escher, Circle Limit III, diviene l'occasione per studiare dal punto di vista storico i principi rivoluzionari delle geometrie non euclidee, ma anche per indagarne a fondo le caratteristiche geometriche e matematiche. Il percorso prosegue affrontando lo studio della discretizzazione della superficie sferica, nel grande tema che conduce dai poliedri alle strutture geodetiche. L'ultima parte della ricerca è una ricognizione dei metodi di programmazione informatica, attraverso i quali vengono generate le superfici poliedriche chiamate mesh. La metodologia con cui si è condotto l'intero studio, è caratterizzata da due aspetti principali: il primo riguarda gli strumenti informatici oggi a disposizione del ricercatore, che offrono la possibilità di privilegiare la descrizione sintetica di un fenomeno rispetto a quella simbolica, in modo del tutto originale; il secondo, è relativo alle potenzialità della ricerca interdisciplinare, che si evidenzia nelle collaborazioni condotte con esperti di altri settori del sapere scientifico.

In copertina elaborazione digitale dell'autore

a Caterina

Scuola Nazionale di Dottorato in *Scienze della Rappresentazione e del Rilievo*

I ciclo - 2005/2008

Sede centrale di coordinamento

Università degli Studi di Firenze

Direttore

Emma Mandelli

Sedi consorziate

Politecnico di Bari

Università di Catania - Siracusa

Università degli studi "G. D'Annunzio" Chieti - Pescara

Università degli Studi di Firenze

Università degli Studi di Palermo

Università Mediterranea di Reggio Calabria

SAPIENZA Università di Roma

SAPIENZA Università di Roma

Dottorato di Ricerca in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo

XXI Ciclo - Settore disciplinare ICAR 17

Coordinatore

Laura De Carlo

Collegio del Dottorato (2008)

Piero Albisinni, Carlo Bianchini, Laura Carnevali, Marco Carpiceci, Carlo Carreras,

Antonio Catizzone, Emanuela Chiavoni, Luigi Corvaja, Cesare Cundari, Roberto De Rubertis,

Mario Docci, Marco Fasolo, Antonino Gurgone, Maria Martone, Riccardo Migliari, Lia Maria Papa,

Leonardo Paris, Paola Quattrini, Fabio Quici, Biagio Roma, Giorgio Stockel, Graziano Mario Valenti.

<i>Dottorando</i> Leonardo Baglioni
<i>Coordinatore del Dottorato</i> Laura De Carlo
<i>Tutors</i> Laura De Carlo, Riccardo Migliari

SAPIENZA Università di Roma - Dipartimento di Rilievo Analisi Disegno dell'Ambiente e dell'Architettura
Dottorato di ricerca in *Scienze della Rappresentazione e del Rilievo* - ICAR 17

Tesi di Dottorato di Ricerca D.P.R. 382 del 11/7/1980
Ciclo XXI - Dicembre 2008

Leonardo Baglioni

La discretizzazione delle superfici continue

tutors:

Laura De Carlo, Riccardo Migliari

Dove non diversamente specificato tutte le immagini sono elaborazioni grafiche dell'autore da modellazione digitale.

Indice

Introduzione

I. La riduzione delle superfici continue dell'architettura contemporanea in superfici discrete

Due diversi approcci al problema della realizzazione delle superfici <i>free-form</i> dell'architettura contemporanea	11
La discretizzazione delle superfici continue nelle strutture in vetro e acciaio	13
L'ottimizzazione morfologica attraverso gli algoritmi genetici	18

II. La tassellazione del piano euclideo

La tassellazione: storia e scienza	23
Definizioni	25
Simmetria ed isometria	27
Le tassellazioni con poligoni regolari	34
Le tassellazioni non periodiche di Penrose	38

III. La tassellazione delle geometrie non euclidee

L'opera artistica di M.C.Escher e la matematica	43
La divisione del piano nei lavori di M.C.Escher	45
Le geometrie non euclidee	48
L'inversione circolare e il modello di Poincarè	62
La tassellazione regolare del piano iperbolico, nel modello del disco di Poincarè	66
La costruzione con riga e compasso di una tassellazione regolare del piano iperbolico	67
La simmetria non euclidea in <i>Circle Limit III</i> di M.C.Escher	71

IV. Dai poliedri alle strutture reticolari

Breve storia dei poliedri	79
Proprietà geometriche dei poliedri	90
I poliedri semiregolari	105
I duali dei poliedri semiregolari: i poliedri catalani	115
La tassellazione dello spazio	117
I poliedri e le bolle di sapone	128
Discretizzazione delle superfici continue per mezzo di superfici poliedriche	137
La discretizzazione della sfera: le cupole geodetiche	143
Considerazioni di carattere geometrico e strutturale	161
Le <i>NURBS</i> e la discretizzazione delle superfici <i>free-form</i>	166

V. Gli algoritmi informatici di meshing

La generazione delle <i>mesh</i>	179
Gli algoritmi informatici di <i>meshing</i>	180
Generatori di <i>mesh</i> triangolari e tetraedriche	181
Generatori di <i>mesh</i> quadrilatere ed esaedriche	188
Il <i>surface meshing</i>	189
Post produzione delle <i>mesh</i>	191
Metodi di tassellazione delle superfici parametriche nei modellatori informatici	193

Bibliografia	201
Appendice	207
Abstract	226

Introduzione

Il processo di riduzione di un sistema continuo in un sistema discreto, prende il nome di *tassellazione* e sarà oggetto della nostra indagine di carattere storico geometrica. Cercheremo di definire il *fil rouge* che lega insieme il significato originario del termine, così come viene interpretato in matematica e geometria, con quello utilizzato in computer grafica, per poterne poi apprezzare le ricadute non solo in campo architettonico (le *gridshell* ne sono un esempio) ma anche in campo informatico con le tecniche di programmazione chiamate *meshing*. La rilettura del problema storico con gli strumenti informatici oggi a disposizione, offre la possibilità di indagare le caratteristiche geometriche che definiscono le operazioni di tassellazione piana e spaziale, divenendo anche un'ottima occasione per mettere alla prova il potenziale sperimentale della rappresentazione matematica. Una moderna concezione della geometria descrittiva pone la rappresentazione matematica tra i tradizionali metodi grafici. Con il termine rappresentazione matematica si intende quella che si ottiene implementando le tecniche di rappresentazione e modellazione geometrica in un programma informatico. Si farà ricorso ai modellatori matematici poiché essi sono in grado di realizzare operazioni tipiche della geometria descrittiva, quali ad esempio quelle di proiezione e sezione, oppure operazioni di ribaltamento o raddrizzamento. Gli stessi modellatori matematici consentono inoltre il controllo metrico delle entità generate, in cui l'unico limite è costituito dai problemi di tolleranza¹ che necessariamente il calcolatore introduce. Limiti questi, che devono essere sempre tenuti in considerazione per dare luogo ad una sperimentazione consapevole e valida; solo in questo modo infatti, si rende legittimo l'uso dei modellatori matematici per lo studio

della geometria descrittiva. Si farà anche ricorso al secondo metodo di modellazione informatica e cioè alla modellazione numerica. La rappresentazione numerica (nota anche con il nome di modellazione poligonale) utilizza il poligono (e le superfici poliedriche che da esso ne derivano) come oggetto di elaborazione. La finalità principale di questi software è il controllo formale degli oggetti. Per rendere possibile il calcolo del chiaroscuro, con algoritmi di interpolazione come il *Phong Shading* (di cui avremo modo di parlare), i modellatori numerici devono appoggiarsi ad una superficie discreta.

Anche in questo caso, il termine che descrive la semplificazione di una superficie matematica in una poliedrica è *tassellazione*, e rientra in una delle accezioni che tale termine include e che analizzeremo. Un altro dei motivi per cui si farà ricorso anche ai modellatori numerici, risiede nella loro natura di descrivere esattamente le entità composte da facce piane. Verranno quindi utilizzati in alcune operazioni sui poliedri, soprattutto per la rapidità con cui è possibile rappresentarli con questo tipo di software. Inoltre, non va dimenticato che la trasformazione di un modello numerico in geometrie di tipo NURBS è sempre possibile e corretta, quando le entità sono composte da facce piane. Infatti, poiché i modellatori numerici sono in grado di descrivere accuratamente solo le superfici poliedriche, è possibile trasformarle in polisuperfici a facce piane di tipo NURBS, senza dover ricorrere ad approssimazioni di alcun tipo. Questo ci consentirà di condurre analisi di tipo metrico (in ambiente matematico), sugli oggetti modellati numericamente.

La rappresentazione sintetica di geometrie complesse costituisce spunti di riflessione interessanti: si riuscirà non solo a comprendere l'essenza formale dei procedimenti di

tassellazione (dalle proprietà delle simmetrie a quelle dei poliedri) finora espressi solo da un linguaggio simbolico, ma anche a rispondere in modo esaustivo alla questione della visualizzazione grafica. Le immagini sono un elemento fondamentale della ricerca soprattutto per il ruolo che esse giocano nella descrizione di un fenomeno. Si è deciso dunque di dedicare particolare cura ed attenzione al tema della comunicazione visiva di questi argomenti, così da utilizzare, nel modo più efficace possibile, le potenzialità grafiche messe a disposizione dalle tecnologie informatiche. Ciò vuole dire che la rappresentazione si caratterizza dall'uso che se ne vuole fare, tendendo ad esprimere uno o diversi aspetti di ciò che si sta analizzando. Si incontreranno quindi rappresentazioni di carattere grafico, che si concretizzano cioè con un disegno, lì dove occorre mettere in luce il controllo metrico oppure un passaggio costruttivo; si farà uso di rappresentazioni con un trattamento di "semplice"² chiaroscuro per descrivere in modo esaustivo il rapporto volumetrico tra le parti di un oggetto; rappresentazioni ibride, che fondono cioè un carattere grafico con uno più materico, per rappresentare elementi importanti (ad esempio gli spigoli di una *mesh*) altrimenti non visualizzabili. Infine, si ricorrerà a rappresentazioni di carattere più spiccatamente realistico, quando si riterrà utile sia mettere in evidenza il valore estetico dell'argomento trattato, sia la sua potenzialità di divenire oggetto di ricerca progettuale (come ad esempio l'applicazione in campo architettonico della tassellazione di Voronoi che è attualmente visibile nei progetti di numerosi architetti contemporanei). Questi sono aspetti fondamentali della comunicazione, dove per comunicazione si intende il significato etimologico di legare insieme (*cum-munire*), estetica dell'immagine³ (non più fine a sé stessa), e contenuti di una disciplina (quelli della geometria descrittiva) ricca di una rinata vitalità. Non va altresì dimenticato che la descrizione sintetica di un fenomeno può produrre risultati inattesi e sorprendenti tali da anticipare scoperte che solo in seguito acquistano una formulazione di tipo analitica. A tale proposito, è interessante sottolineare il commento del matematico Coxeter circa l'incisione *Circle Limit III* di Escher: "In effetti Escher ha anticipato di cinque anni la mia scoperta ...". I rapporti arte e scienza trovano nel computer

una nuova possibilità di sviluppo: ad esempio, la simmetria non-euclidea presente nelle ultime opere di Escher può essere analizzata e definita attraverso l'uso del calcolatore.

Una delle fonti primarie che si è accostata in modo vantaggioso e proficuo alle tradizionali fonti bibliografiche, è stata l'enorme mole di informazioni reperibili via Internet. La necessità di utilizzare questo potentissimo strumento di indagine, è da ritrovarsi nella attualità che l'oggetto della ricerca possiede. Attualità in una duplice accezione: da una parte gli strumenti informatici rendono possibile uno sviluppo repentino di questi temi, andandoli ad analizzare in modo del tutto nuovo; dall'altra è sempre più evidente una ricaduta di tali tematiche nelle attività svolte dalla nuova figura del progettista. La rete (con i dovuti accorgimenti) è caratterizzata da un forte spirito di condivisione e scambio incondizionato che accelera notevolmente le conquiste dell'indagine scientifica. È possibile entrare in diretto contatto (e abbiamo fatto uso anche di questa possibilità in diverse occasioni) con figure che con diversi approcci e per diverse finalità, hanno studiato problemi legati al tema tassellazione. In tutti questi casi⁴, è stato possibile uno scambio di informazioni altamente stimolante, i cui risultati si riflettono nella opportunità di affrontare aspetti più o meno inerenti il tema della tassellazione, in cui si sono rese necessarie competenze specialistiche.

Inoltre, ricorreremo spesso ad uno strumento che contiene in sé sia l'aspetto simbolico sia l'aspetto sintetico, e cioè lo *scripting*. Si tratta di una sorta di linguaggio di programmazione che potendo usare come ambiente, proprio quello dei software NURBS, ne sfrutta la capacità di visualizzare i risultati e soprattutto ne amplifica le potenzialità. È possibile creare strumenti *ad hoc* grazie al controllo di parametri (anche di tipo matematico) definiti dall'utente e, non ultimo, reiterare una certa operazione in casi diversi e più numerosi. Una volta acquisita questa proprietà si deve definire il problema da un punto di vista geometrico e matematico. La difficoltà è proprio in questo passaggio: definire un problema per poter dare alla macchina la possibilità di risolverlo. La macchina non è altro che un calcolatore in grado di effettuare in pochissime frazioni di secondo calcoli complessi. Per mettere

in condizione il calcolatore di risolvere il problema occorre sia conoscerne la natura geometrico-matematica, sia comunicarla tramite una sintassi per lui valida (il *Visual Basic*).

La storia della scienza, ci insegna che i matematici per poter ragionare sulle proprie argomentazioni, hanno bisogno di poterle *vedere*, nella propria mente, anche attraverso dei modelli fisici. Ed è proprio in questo delicato divario tra mondo reale e quello ideale della geometria (rappresentato dal linguaggio simbolico della matematica), che si definisce il contributo che la rappresentazione matematica può fornire oggi alla ricerca scientifica. Non solo nella possibilità di visualizzare concetti e pensieri accessibili fino a ieri a menti brillanti ed intuitive, (ne incontreremo molte durante il nostro cammino), ma nella possibilità di rileggere con nuovi strumenti, più efficaci ed affidabili di quanto non fosse in passato, argomenti della geometria, che spesso sono stati dimenticati. Riusciremo grazie a questi strumenti a rileggere, e ad estendere, lo studio dei poliedri, non solo verificandone (proprio come in un laboratorio virtuale) le proprietà geometriche, ma anche andando a descrivere le caratteristiche di recenti poliedri. Tra questi i *saddle polyhedra*, studiati a partire dagli anni '70, oppure i due solidi di Wearie e Phelan scoperti solo nel 1993. Spesso il punto di partenza sarà la trattazione condotta dai matematici della quale si analizzeranno i principi (a volte, come già detto, avvalendosi della collaborazione degli stessi matematici), e della quale sarà possibile fare una rilettura con il modellatore matematico. Questo tipo di esperienza lega in un *continuum* diversi settori del sapere scientifico (matematica, fisica, cristallografia, informatica) che trovano nella geometria il loro punto d'incontro.

Il nostro cammino partirà dall'osservazione di alcuni caratteri salienti dell'architettura contemporanea fortemente condizionata dagli strumenti oggi a disposizione dei progettisti. La questione del problema costruttivo-strutturale delle superfici *free-form*, trova la sua soluzione attraverso due approcci: il primo, di natura geometrica, consiste nella riduzione ad elementi discreti delle superfici, spesso create in ambiente matematico; il secondo approccio è di tipo formale, e consiste nell'introduzione di algoritmi genetici nel processo iterativo di ottimizzazione morfologica.

Per comprendere i principi fondativi della discretizzazione di una qualsiasi superficie, è necessario cominciare dall'analisi delle principali teorie che sono alla base dei problemi di tassellazione del piano euclideo. Considerata la vastità e il continuo crescere di nuovi elementi oggetti di studio della tassellazione del piano, si è ritenuto opportuno affrontare le principali caratteristiche geometriche di questo argomento. Si passerà quindi allo studio della tassellazione nelle geometrie cosiddette non euclidee, partendo dall'analisi di un'opera di un'artista olandese che forse ha molto più in comune con i matematici che con i pittori: Maurits Cornelis Escher. Avremo dunque occasione di parlare dello sviluppo di queste geometrie dal punto di vista storico, a cominciare da quella iperbolica, e di indagare su alcune interessantissime proprietà geometriche dei modelli che le descrivono (ad esempio il modello della pseudosfera di Beltrami oppure l'inversione circolare e il modello del disco del piano di Poincaré). La trattazione del problema della tassellazione dell'altra geometria non euclidea, e cioè quella sferica (o ellittica), sarà l'occasione per introdurre lo studio dei poliedri come punto d'incontro tra due grandi temi: da una parte la riduzione di una superficie continua (la sfera) in una discreta, e dall'altra le limitate possibilità di scomporre la superficie sferica in poligoni (sferici) uguali. La trattazione dei poliedri proseguirà con l'estensione allo studio dei poliedri stellati, delle cupole geodetiche e alla definizione di alcuni poliedri irregolari (anche questi oggetto di recenti ricerche matematiche) che hanno la proprietà di tassellare lo spazio tridimensionale. L'ultima parte dello studio si propone di esaminare gli algoritmi che sono alla base della creazione di superfici (o volumi) poliedrici, a partire da nuvole di punti o superfici espresse da una matematica di tipo NURBS, finalizzate a diversi scopi. Tale tecnica di programmazione informatica prende il nome di *meshing*. Vedremo inoltre, come esista una corrispondenza diretta tra la formazione di superfici poliedriche di tipo strutturato, con le nuove tecniche di discretizzazione usate nell'architettura contemporanea, per la realizzazione delle superfici *free-form*.

La presente tesi ha un carattere spiccatamente scientifico e come tale contiene in sé diversi aspetti che sono parte integrante di questa definizione. Innanzi tutto si oc-

cupa di un *oggetto* (qui non inteso con un significato fisico) riconoscibile a tutti, quale è il problema della tassellazione. Per renderlo riconoscibile ed individuabile a tutti, è necessario definire l'oggetto attraverso delle regole (espresse in questo caso dai matematici) che porremo come punto di partenza. L'originalità del lavoro è da ritrovarsi nell'ottica nuova con cui vengono rilette certe argomentazioni. Possiamo dire infatti, che la presente tesi è scientificamente utile in quanto collega in modo organico le trattazioni (svolte in ambiti disciplinari del tutto eterogenei) già svolte sullo stesso argomento. Un ultimo e fondamentale requisito che la tesi si propone di soddisfare, è la presenza di tutti quegli elementi utili alla verifica (o falsifica) dei ragionamenti condotti. In questo modo si ha anche la garanzia che questo lavoro possa prevedere degli sviluppi, lì dove la vastità (e talvolta la difficoltà) degli argomenti ha posto grandi limiti di trattazione. La presente tesi di ricerca, non presenta quindi un carattere di completezza. Questo è dovuto a diversi fattori. In primo luogo, come già detto la vastità dei temi legati al concetto di tassellazione che sono sempre attuali proprio per merito dei nuovi strumenti informatici, con cui condurre le diverse analisi. In secondo luogo, il fatto che la ricerca se non fosse in continuo divenire non costituirebbe più quella linfa vitale, che, oggi più che mai, alimenta con rinnovato vigore la geometria descrittiva.

Note

1. Nel campo della modellazione NURBS, una considerazione importante, riguarda il concetto di tolleranza assoluta, che influisce notevolmente sul risultato delle analisi metriche condotte (misurazioni angoli, tangenze di superfici...). Per i modellatori NURBS, la tolleranza assoluta è la massima distanza che due oggetti o elementi possono avere, per poter essere ancora considerati contigui e perciò congiungibili. Questo parametro interviene molte volte durante la modellazione, in operazioni che si basano su approssimazioni che adattano talune entità ad altre. Questi comandi sono quelli che fanno uso di intersezioni tra

curve e superfici come ad es. il taglia, seziona, suddividi, proietta, sweep etc. Diminuire il valore della tolleranza (che di base è impostato a 0.01 unità di misura), per cercare di ottenere un risultato più "preciso" in realtà è un'operazione a volte controproducente, in quanto genera soprattutto una matematica più stressata (con un numero di parametri in sovrabbondanza rispetto il necessario) che è di più difficile controllo, e richiede alla macchina maggior tempo di calcolo. Dall'altro lato, un aumento della tolleranza, ha il vantaggio di ridurre i tempi di calcolo a discapito, però, di una maggiore precisione. A volte lavorare con dimensioni di unità di misura molto grandi, permette di lasciare un valore abbastanza elevato da poter consentire una snellezza delle operazioni. Tuttavia, l'esperienza è l'unico sistema in grado di stabilire quale sia l'ottimizzazione migliore per stabilire il valore della tolleranza da utilizzare.

2. In realtà, gli algoritmi che sono alla base di una buona illuminazione di una scena, sono molto sofisticati. Mi riferisco ad esempio a tutti quegli elementi che la modellazione informatica (a differenza di quella grafica) riesce a gestire accuratamente, come la penombra, i riflessi e la luce diffusa.

3. Una delle possibilità messe a disposizione dai modellatori informatici, è quella di poter visualizzare già nell'ambiente di lavoro le proprietà degli oggetti. Per proprietà si intende l'insieme dei parametri che descrivono le qualità di visualizzazione di un'entità. Per chi si occupa di geometria, i vantaggi di questa metodologia sono molteplici. Da un lato la scena acquista una grande componente di leggibilità rendendo il flusso di lavoro più spedito, meno soggetto ad errori di interpretazione e permette la formulazione di nuove congetture. Dall'altro la scena così impostata è già di per sé idonea alla fase di comunicazione che ne può conseguire, senza necessità di ricorrere ad onerosi (in termini di tempo) e non sempre efficaci (ad esempio il tipo di linea e lo spessore di una linea non possono essere renderizzati) calcoli di rendering.

4. Desidero ringraziare per la disponibilità, la cortesia e spesso la pazienza: il Prof. Jess Maertterer del *Rensselaer Polytechnic Institute of New York* per il contributo riguardo il controllo dello *scripting* in *Rhinoceros* che spesso verrà utilizzato nel corso della tesi; il fisico Paolo Sirtoli curatore di numerosi articoli di divulgazione scientifica, per la parte sulle curvature dello spazio iperbolico; Luca Lussardi, ricercatore in Analisi Matematica presso il Politecnico di Torino, per l'originale contributo sul modello dello spazio-tempo di Minkowski; infine l'architetto Alberto Pugnale, del Dipartimento di Progettazione Architettonica e di Disegno Industriale del Politecnico di Torino, per la spiegazione del funzionamento degli algoritmi genetici applicati all'ottimizzazione delle forme libere.

La riduzione delle superfici continue dell'architettura contemporanea in superfici discrete

Due diversi approcci al problema della realizzazione delle superfici free-form dell'architettura contemporanea

Negli ultimi anni abbiamo assistito (e stiamo ancora assistendo) ad una rapida crescita di architetture caratterizzate da forme sempre più lontane dalle geometrie analiticamente note (cilindri, cupole sferiche etc.), tanto che alcuni critici parlano di una *architettura digitale*. Il contributo più profondo viene dalle opere di progettisti come Eisenman, Gehry, Grimshaw, che utilizzano il computer non solo in fase di controllo metrico e formale del progetto, ma già durante la fase creativa. È cambiata sostanzialmente l'idea di forma architettonica come integrazione di aspetti geometrici e tecnologici; fino ad oggi (salvo eccezioni importanti come Nervi, Musmeci, Candela, Isler, Torroja ed altri ancora) erano aspetti che viaggiavano spesso su piani distinti che si incontravano solo nella fase esecutiva. La tecnologia digitale ha quindi influenzato l'architettura principalmente in tre diversi aspetti: il primo, l'integrazione di diverse discipline che intervengono nel processo di progettazione; il secondo, la possibilità di controllo metrico e formale che questi strumenti, sempre più intuitivi, mettono a disposizione del progettista; ed infine, come già accennato in precedenza, l'introduzione di una funzione generativa ed evolutiva¹ che interviene già nella fase creativa. Possiamo dire che sempre di più la programmazione dell'informazione precede la creazione dell'oggetto. Stiamo assistendo ad uno slittamento dall'oggetto (architettonico) all'informazione (digitale) che non solo sfida il tradizionale ruolo dell'architetto, ma anche le sue relazioni con le diverse discipline.

La ricerca morfologica, sulla spinta dei nuovi strumenti oggi a disposizione dei progettisti, ha portato all'affermazione di superfici sempre più organiche e plastiche: le superfici *free form*. La progettazione delle superfici *free form* va interpretata non solo come la caratteristica formale di esprimersi con superfici libere e curve, che non possono essere rappresentate analiticamente e/o geometricamente, ma anche dall'intero processo mentale e materico che essa comporta. La dualità *forma* (geometrico-matematica) e *processi* (di generazione e realizzazione) definisce l'area entro cui si muove la nuova architettura digitale. Esempi come Gehry Associates, sono significativi del nuovo modo interdisciplinare di fare architettura. L'intero processo comprende il controllo topologico delle nuove forme, la redazione del progetto, la computazione strutturale ed estimativa, non in modo sequenziale ma in un continuo ed iterativo scambio di informazioni digitali, che terminano solo quando si ritiene raggiunto il massimo livello possibile nei diversi aspetti. Questo carattere di dinamismo, di metamorfosi e di trasformazioni continue, si rispecchia dal punto di vista linguistico, nelle superfici libere dell'architettura contemporanea. A tale proposito è interessante l'intervento di Kurt Forster², curatore della Mostra internazionale dell'architettura di Venezia del 2004, che nel catalogo della mostra scrive "*I recenti edifici fondati sulle superfici continue manifestano chiaramente la loro dipendenza, per quanto riguarda ideazione e realizzazione, dall'uso della tecnologia informatica. Le infinite tra-sformazioni e gli scambi tra i metodi tradizionali e il software hanno moltiplicato e modificato il processo di elaborazione e di realizzazione dei progetti. Non esiste, o quasi, metodo che non possa essere integrato nel*

circuito dei calcoli numerici, ma ancor più ricca di conseguenze della flessibilità di elaborazione e del costante andirivieni tra immagine e oggetto è la migrazione dell'architettura verso la sfera del virtuale e del simulato [...]. Quello che interessa evidentemente a Gehry è il processo, nel senso del processo dinamico utilizzato per arrivare al risultato strutturale ed estetico". Il digitale consente ciò che fino a qualche anno fa era considerata pura utopia³, andando a ritrovare rapporti espliciti soprattutto con la matematica, ed in particolare con la scienza delle trasformazioni e delle invarianti: la topologia. La topologia è quella branca della matematica, sviluppatasi nella seconda metà dell'Ottocento soprattutto grazie all'opera del matematico Jules Henri Poincaré (del quale avremo modo di parlare in seguito), che permette la conoscenza delle proprietà qualitative delle superfici, indipendentemente dal numero di dimensioni dello spazio in cui esse sono immerse. Tali proprietà rimangono invariate anche se le figure geometriche vengono sottoposte a deformazioni profonde che ne fanno perdere tutte le proprietà metriche e proiettive, come ad esempio le forma e le dimensioni. Ma la topologia, è la naturale conseguenza di una grande scoperta e rivoluzione del pensiero scientifico: le geometrie non euclidee. Per la prima volta dopo millenni, e non senza grandi contrasti con il pensiero scientifico dell'epoca, la geometria non ha più il senso di verità assoluta, così come veniva intesa nell'assiomatizzazione euclidea. Nella seconda metà dell'Ottocento si svilupparono due teorie in cui non era verificato il V postulato di Euclide (anche di questo avremo modo di parlare diffusamente più avanti nella tesi). Queste geometrie furono considerate teorie matematicamente valide e accettate dalla comunità scientifica come parte integrante della matematica, solo dopo le concezioni generali di Bernhard Riemann. Nel suo primo testo filosofico, che raccoglie quasi tutti i suoi articoli scritti tra il 1894 e il 1904, Poincaré affermava⁴ "Gli assiomi geometrici non sono, dunque, né giudizi sintetici a priori né fatti sperimentali. Sono convenzioni: la nostra scelta, fra tutte le convenzioni possibili, è guidata da fatti sperimentali, ma resta libera e non è limitata dalla necessità di eliminare ogni contraddizione. È così che i postulati possono restare rigorosamente veri,

anche se le leggi sperimentali che hanno determinato la loro adozione non sono che approssimative. In altri termini, gli assiomi della geometria non sono che definizioni travestite. Pertanto che pensare della domanda: è vera la geometria euclidea? Essa non ha alcun senso. Così come non ha senso domandarsi se il sistema metrico sia vero e siano falsi i vecchi sistemi di misura; o se le coordinate cartesiane siano vere, e false quelle polari. Una geometria non può esser più vera di un'altra; può solo essere più comoda. La geometria euclidea è, e resterà sempre, la più comoda [...] Perché è la più semplice [...] perché si accorda sufficientemente con le proprietà dei solidi naturali [...] con cui realizziamo i nostri strumenti di misura". Quindi la topologia delle superfici di Gehry, oggi ha trovato uno strumento di controllo ed analisi nei modellatori informatici di tipo NURBS, cambiando profondamente la nostra idea di spazio e arricchendo con nuove parole il linguaggio dell'architettura. Le superfici *free-form*, sono superfici spiccatamente bidimensionali, in cui il parametro più significativo è il rapporto tra spessore e raggio medio di curvatura. Nei gusci moderni tale parametro raggiunge valori intorno allo 1:1000. Il comportamento strutturale è quasi unicamente demandato alla resistenza per forma. Le sollecitazioni sono dette *membranali* in quanto avvengono quasi esclusivamente sulla superficie del guscio; esse sono solo di compressione, trazione e scorrimento. In un elemento a guscio è evidente che il rapporto tra forma e comportamento meccanico globale è strettamente connesso. In questi casi dunque, la progettazione della forma ed il suo controllo geometrico, vanno di pari passo con la verifica del suo comportamento strutturale in un continuo scambio di informazioni tra aspetti architettonici ed aspetti ingegneristici. La forma ottimale si raggiunge attraverso un continuo avanti e indietro tra proposta e verifica strutturale. Ed è proprio la ricerca di un comportamento quanto più membranale possibile, ad essere il primo obiettivo di quel processo che prende il nome di *ottimizzazione della forma del guscio*. Attualmente si stanno sviluppando numerose iniziative⁵ e ricerche tese a definire algoritmi che rendano, il più efficiente possibile, lo scambio tra le diverse figure professionali che partecipano alla progettazione. Gli approcci al problema

della ricerca morfologica dei gusci sono sostanzialmente di due tipi: il primo (che interessa più da vicino la nostra trattazione) è la riduzione ad elementi discreti della geometria continua, ben rappresentata dalle superfici NURBS (fig.1.1); il secondo, chiamato ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) introduce sistemi di modelli matematici di tipo genetico (fig.1.2).

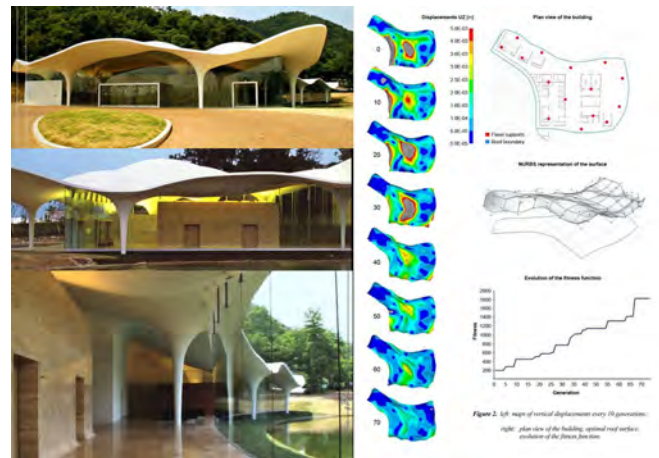
La discretizzazione delle superfici continue nelle strutture in vetro e acciaio

Una delle applicazioni più diffuse del tema della discretizzazione delle superfici continue, è la realizzazione delle strutture in acciaio e vetro⁶ nelle architetture contemporanee. Le implicazioni di natura geometrica di questo delicato passaggio dal virtuale al reale, saranno descritte nel proseguo della nostra trattazione. Si ritiene però opportuno indicare attraverso l'analisi di tre esempi significativi, le problematiche di natura costruttiva che derivano dalla riduzione delle superfici continue in superfici poliedriche.

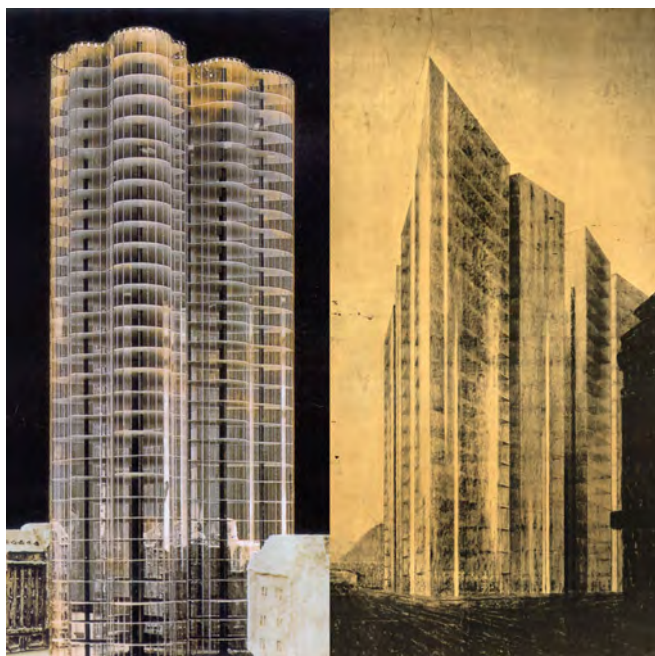
Il vetro è divenuto nell'architettura contemporanea un elemento fondamentale e ricorrente dal punto di vista progettuale per merito delle sue caratteristiche di trasparenza (notevolmente superiori ai materiali plastici come il Plexiglas o il policarbonato), durabilità e basso impatto ambientale grazie alla sua possibilità di essere riciclato. Inoltre, se correttamente utilizzato, è considerato un ottimo materiale per ciò che riguarda l'efficienza energetica degli edifici. I limiti più grandi di questo materiale riguardano il suo peso (soprattutto in confronto ai materiali plastici) e la facilità di rottura (fragilità)⁷. Le nuove tecnologie di lavorazione, come ad esempio il vetro temperato o il vetro laminato, ne migliorano le caratteristiche di resistenza⁸. Un altro espediente costruttivo (che non è applicato a livello dell'elemento) utilizzato per superare il limite della fragilità del vetro, è quello definito *redundancy* (ridondanza) che consiste nel raddoppiare gli elementi principali, in modo da avere un elemento pronto ad intervenire nel caso di rottura dell'altro. Per poter essere parte di un edificio, il vetro deve necessariamente avere un carattere strutturale, ossia, per motivi di sicurezza, deve essere in grado di auto portarsi



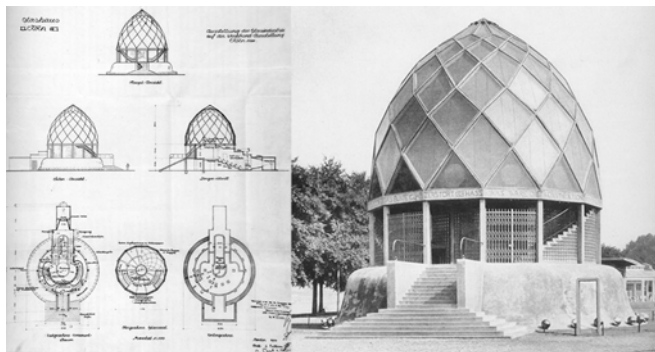
I.1/ Molte architetture di Foster fanno uso della riduzione ad elementi discreti delle superfici.



I.2/ Toyo Ito & Associates, Meiso No Mori Municipal Funeral Hall, Kakamigahara, Gifu, Japan, 2005.



I.3/ Ludwig Mies Van Der Rohe, progetti di due grattacieli per la città di Berlino, 1921 e 1922.



I.4/ Bruno Taut, padiglione in cemento armato e vetro per l'esposizione del Werkbund di Colonia, 1914.

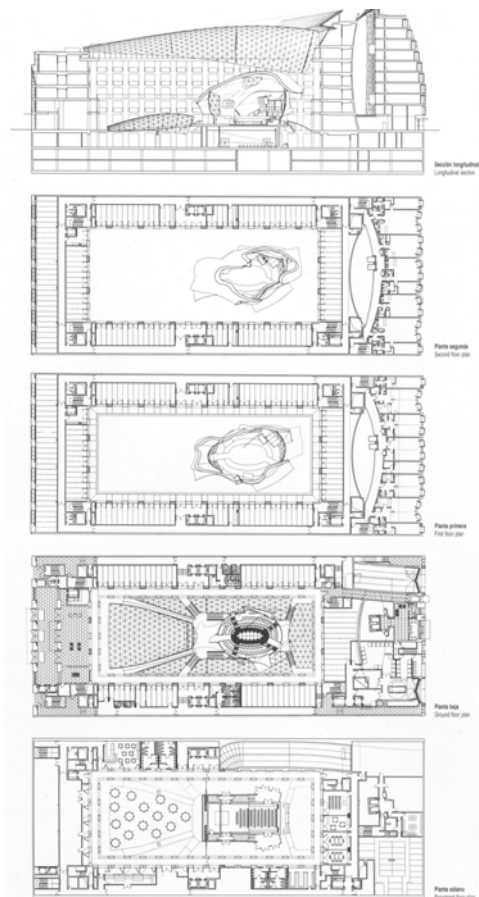
e di sostenere ulteriori carichi esterni come il vento e la neve. Per vetro strutturale però si intende oggi, un particolare tipo di fissaggio degli elementi trasparenti, senza la necessità di telai di supporto (*frameless*). Supporto garantito dalla giustapposizione degli elementi, sorretti solo da morsetti disposti negli angoli. Solitamente è installato sotto forma di lastre sottili; in questo modo i costi risultano notevolmente ridotti.

Senza entrare nel merito della storia dell'uso del vetro in architettura, iniziata già 3500 anni fa, e rimandando alla bibliografia⁹ la sua trattazione¹⁰, va ricordato che i primi progetti che interpretarono in senso moderno questo materiale, furono i progetti di due grattacieli a Berlino, ad opera di Mies Van Der Rohe (*fig.I.3*), caratterizzati da una parete perimetrale continua (e varia) completamente realizzata in vetro. Ancora più interessante per le nostre finalità è l'opera del 1914 di Bruno Taut per il padiglione in cemento armato e vetro dell'esposizione del Werkbund di Colonia (*fig.I.4*), in quanto propone il problema della riduzione di una superficie continua (il modello geometrico ideale della cupola come superficie di rotazione) in superficie poliedrica (per consentire l'adeguato posizionamento delle lastre di vetro). Le tipologie strutturali con cui è possibile classificare le coperture in vetro ed acciaio possono essere così definite:

Struttura tradizionale: è composta da travi con un ottimo comportamento di resistenza a flessione; ha il limite di non permettere una elevata trasparenza proprio per le dimensioni degli elementi portanti; viene utilizzata per piccole luci.

Struttura reticolare spaziale: è composta da elementi reticolari spaziali con una notevole capacità di creare coperture leggere per ampie superfici; l'altezza degli elementi reticolari ne limita la luminosità.

Tensostruttura: in questo particolare tipo di strutture vengono eliminati tutti gli elementi che lavorano per resistere a sforzi di flessione e compressione, lasciando l'assorbimento della tensione a dei cavi che vengono tesi in direzioni opposte per aumentarne la stabilità (ecco il perché della diffusa geometria a paraboloide iperbolico in questo tipo di realizzazione); con queste strutture si ottiene il massimo della leggerezza e della trasparenza



I.5-6/ F.O.Gehry e J.Schlaich, copertura del cortile interno della DG Bank di Berlino, 1998.

possibili; hanno il grande limite di essere molto deformabili e quindi poco adatte ad un materiale rigido e fragile come il vetro.

Volta sottile (grid shell): si definiscono le strutture che al contrario delle tensostrutture, lavorano esclusivamente a compressione e sono resistenti per forma; vengono utilizzate per la loro possibilità di adattarsi ad un grande varietà di forme geometriche comprese le *free-form* e sono idonee ad appoggiarsi ad eventuali preesistenze (a differenza delle tensostrutture che creano forti sollecitazioni nei punti di ancoraggio). Anche in questo caso il limite maggiore è relativo alle instabilità locali e globali che vanno analizzate in fase di calcolo strutturale.

Uno degli esempi più significativi dell'uso delle volte

sottili per una copertura in vetro e acciaio, è il progetto del 1998, di F.O.Gehry e J.Schlaich per la *DG Bank di Berlino* (fig.I.5 e fig. I.6). Si tratta di una copertura del cortile interno della sede bancaria, caratterizzata da una superficie del tipo *free-form*. Tale superficie è simmetrica rispetto l'asse maggiore del cortile e presenta una variazione di curvatura molto lenta nella sezione longitudinale, ma molto accentuata in quella trasversale. La superficie *free-form* è ridotta ad una superficie poliedrica secondo una maglia di tipo triangolare realizzata con aste di 40x60mm di sezione, su cui sono poggiate le lastre in vetro. Le aste sono realizzate in acciaio anodizzato (che conferisce a tutta la copertura un elevato valore estetico insieme ad un carattere di durabilità) e si incontrano (per



I.7/ Massimiliano Fuksas, copertura della nuova Fiera di Milano, 2002-2005.

la natura della geometria triangolare) a gruppi di sei intorno ad ogni vertice. Gli elementi angolari sono di ben 826 tipi diversi, e sono stati realizzati per mezzo di macchine a controllo numerico. Inoltre nella progettazione della maglia strutturale si è cercata una divisione triangolare con angoli quanto più possibile prossimi ai 60° , sia per ragioni di carattere estetico che di ottimizzazione della distribuzione dei carichi.

Tra il 2002-2005 Massimiliano Fuksas realizza la “Vela” della nuova Fiera di Milano (fig.I.7). Si tratta di un’enorme copertura sempre in vetro e acciaio lunga 1.3 km (è attualmente la più grande superficie vetrata d’Europa), caratterizzata da un’interessantissima topologia. Sostanzialmente l’impianto è rettangolare, ma la superficie che avvolge gli edifici dei servizi della fiera, presenta numerose variazioni di curvatura in entrambe le direzioni e zone con dei fori che la collegano con il basamento. L’intera copertura è sostenuta da 180 pilastri in acciaio, che fungono anche da discendenti per le acque piovane. La maglia strutturale ha due impianti geometrici: il primo, esteso alle zone orizzontali, è di matrice quadrata, costituita da aste con sezione a “T” che le conferiscono una forte resistenza a flessione; la seconda maglia si estende nelle parti *free-form* della superficie ed è caratterizzata da un impianto di tipo triangolare. L’aspetto più interessante di quest’ultimo reticolo, è che in realtà è composto da aste a T tessute in modo quadrangolare, che vengono poi divise in due triangoli da un’ulteriore asta diagonale (che risponde solo a carichi assiali, cioè di compressione e trazione) più snella di quelle perimetrali. Questo consente, oltre all’evidente compito di sostenere il terzo lato delle aste di vetro, da un lato di ridurre al minimo gli elementi che devono rispondere alle sollecitazioni di flessione (le aste a T), con una ricaduta sugli abbattimenti dei costi, e dall’altro di aumentare la trasparenza dell’intera copertura. Anche i nodi risultano in questo modo semplificati dovendo provvedere all’incastro (per mezzo di due bulloni) delle sole aste a T.

Altro esempio di copertura vetrata interessante dal punto di vista geometrico strutturale, è la copertura della corte interna di un museo ad Amburgo realizzata nel 1989 dagli architetti Von Gerkan, Marg and Partner (fig.I.8). Il

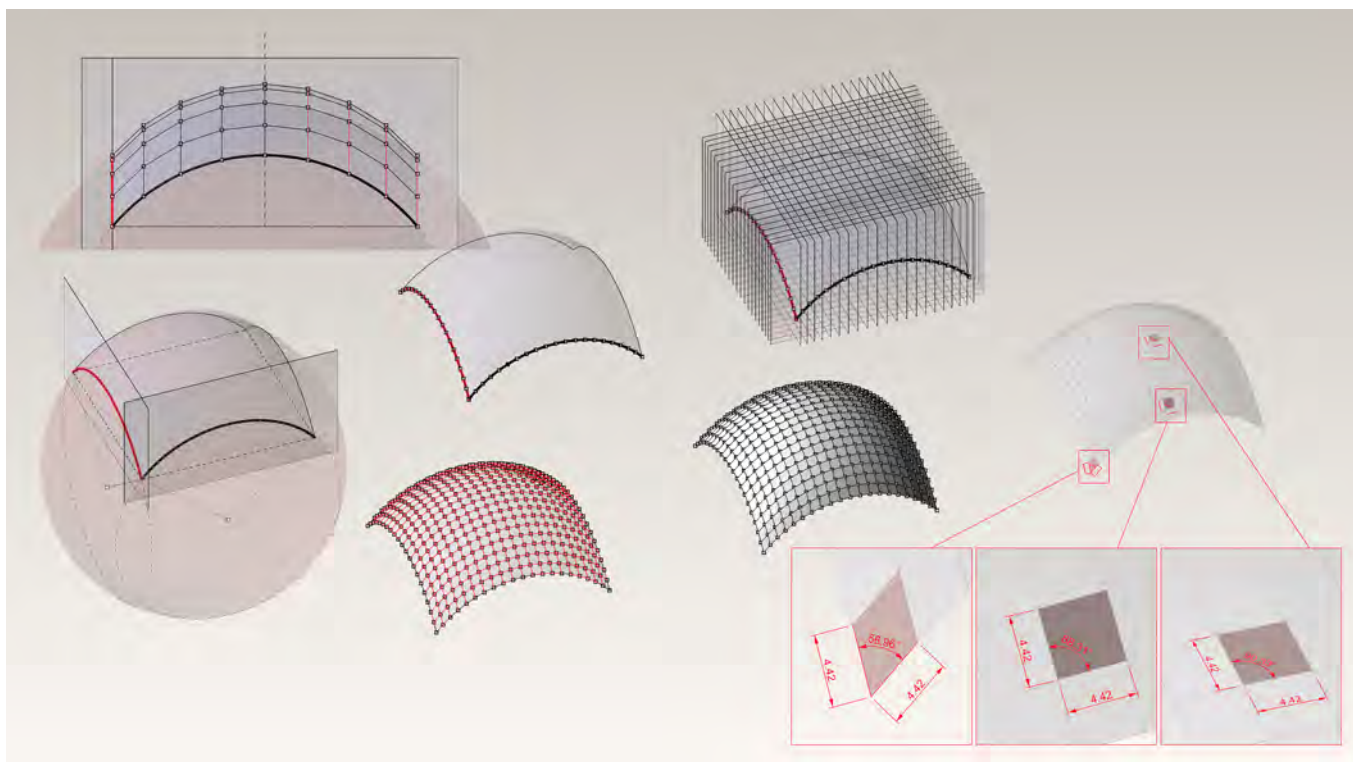
cortile interno del Museo Storico della città di Amburgo (edificio costruito nel 1914-1926 da Fritz Schumacher) ha una forma ad L, e per motivi di tutela, aveva bisogno di una copertura con struttura molto leggera. La sua geometria è composta da due volte a botte che si incontrano in una cupola, nell'angolo della corte. Le superfici cilindriche sono state ottimizzate attraverso una struttura a guscio su impianto quadrato, soggetta ai soli sforzi di compressione. Questa maglia è stata progettata in modo da garantire una fluidità di collegamenti strutturale nei punti d'incontro tra le tre parti. L'aspetto più interessante della soluzione tecnologica riguarda le maglie quadrangolari che la costituiscono. Infatti sono collegate insieme da un unico bullone posto nei vertici del quadrilatero, che garantisce una deformazione rombica dell'elemento rettangolare (*fig.I.9*). Inoltre tale impianto consente un uso di aste tutte uguali con un vantaggio non indifferente in termini di costo. Dal punto di vista geometrico, abbiamo visto che negli esempi precedenti di Fuksas e Gerhy, è stata utilizzata una maglia triangolare che individua, per sua natura, le diverse giaciture degli elementi vetrati. Nel caso di Amburgo invece, i quattro vertici della maglia quadrangolare possono non appartenere tutti allo stesso piano, possono cioè essere sghembi. Questo fenomeno si presenta nella parte angolare della corte dove è presente una cupola, che dal punto di vista geometrico non è una superficie sviluppabile. Sviluppabili sono invece le due superfici cilindriche che formano le ali della corte. Quando le maglie non individuano un piano, i pannelli vetrati dovrebbero seguire l'andamento del paraboloido iperbolico che esse individuano. Ma è assurdo pensare che le lastre possano essere svergolte in opera, per i notevoli costi che tale lavorazione comporterebbe. Il problema è stato risolto considerando che la superficie della cupola è stata generata dalla traslazione di una curva (generatrice) lungo una direttrice anch'essa curva. Ciò consente di individuare elementi quadrangolari con lati paralleli a due a due che saranno pertanto piani. Consideriamo infatti, due linee grafiche piane appartenenti a due piani ortogonali tra loro (*fig.I.10*) e facciamone scorrere una sull'altra in modo da mantenere inalterata la giacitura iniziale. Abbiamo ottenuto in questo modo una superficie di traslazione *free-form*. Ora,

dividiamo in m ed n parti uguali la direttrice e la generatrice. Intersechiamo la superficie con i piani direttori delle due curve, individuando così un reticolo. La caratteristica principale di questo reticolo risiede nel fatto che i quadrilateri che esso genera, sono tutti piani. Possiamo verificarne la veridicità andando ad esaminare le proprietà delle singole superfici (nel nostro caso per $m=10$ ed $n=10$ si costituirà un reticolo di 100 elementi) e constatare che esse sono superfici piane.

Per quanto riguarda invece il problema della deformabilità della maglia quadrangolare con vertici incernierati (la maglia triangolare è indeformabile per geometria, quella quadrangolare è labile), si è fatta una scelta che



I.8/ Von Gerkan, Marg and Partner, copertura della corte del Museo di Storia della Città di Amburgo, 1989.



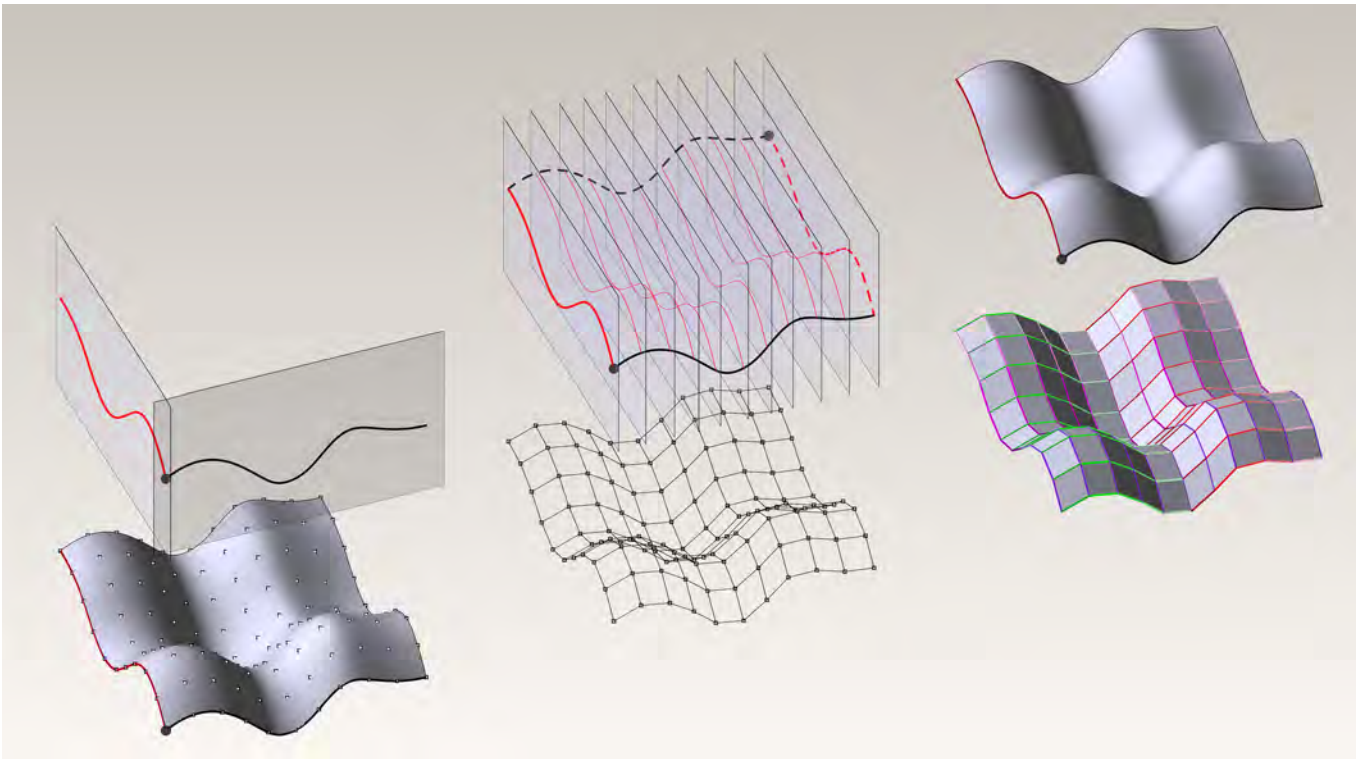
I.9/ Genesi geometrica della pseudovela e discretizzazione con elementi quadrangolari.

consentisse la massima trasparenza possibile. Visto che per motivi di sicurezza il vetro non può essere utilizzato come elemento di irrigidimento delle maglie quadrangolari (come avviene invece in molte costruzioni ottocentesche) sono stati utilizzati cavi di acciaio con sezione molto sottile, disposti lungo le diagonali delle maglie quadrangolari. Ulteriori irrigidimenti dell'intera copertura sono inseriti nelle zone di transizione, con raggiere di cavi pretesi che garantiscono un comportamento a volta sottile anche nelle parti cilindriche.

L'ottimizzazione morfologica attraverso gli algoritmi genetici

Un'interessante metodologia di ricerca per l'ottimizzazione delle superfici *free-form*, è costituita dall'uso di modelli matematici di tipo genetico, applicati alle rappresentazioni di tipo NURBS. L'uso di questi algoritmi evolutivisti è relativamente¹¹ recente¹² e si adatta a

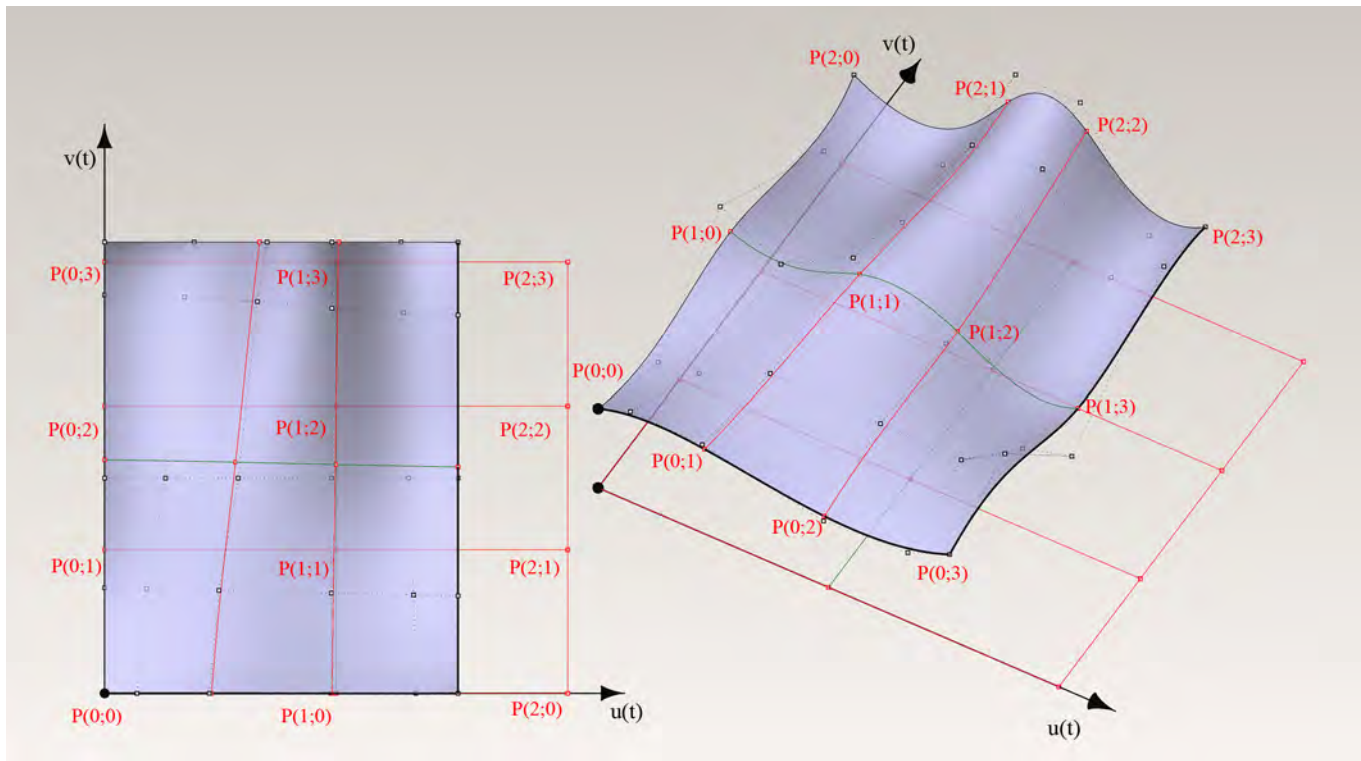
finalità sia di studio del comportamento strutturale (ESO *Evolutionary Structural Optimization*) sia di ottimizzazione della topologia per la tessitura delle maglie strutturali¹³. Gli algoritmi genetici hanno molteplici campi di applicazione, dalla biologia alla chimica, e furono introdotti nella progettazione architettonica, a partire dagli anni '70 con il contributo fondamentale di John Frazer¹⁴. Lo scopo principale di questo approccio è la gestione di problemi complessi, in cui la soluzione migliore è il punto d'incontro tra diversi requisiti come quelli strutturali, costruttivi, economici, funzionali ed estetici. Per quanto riguarda l'applicazione degli algoritmi genetici alla ricerca morfologica in funzione del comportamento strutturale, la metodologia si basa su alcuni passaggi precisi. Le superfici NURBS (in modo del tutto analogo alle curve NURBS) sono definite da un poliedro di controllo (*fig.I.11*) (i cui vertici sono chiamati punti di controllo), dalle funzioni di base e dal loro grado, ed infine dai nodi. Con questi elementi abbiamo quindi la possibilità di con-



I.10/ Verifica sperimentale della discretizzazione ad elementi piani, di una superficie di traslazione.

trollare globalmente e localmente la forma della superficie. Come fanno notare Mario Sassone e Alberto Pugnale¹⁵, del Dipartimento di Ingegneria Strutturale del Politecnico di Torino, in questo tipo di geometria, una forma complessa a curvatura gaussiana variabile, anche con punti di auto intersezione, può essere definita parametricamente da un insieme di numeri reali. È possibile codificare in vari modi, le coordinate dei punti di controllo della superficie, così da definire un patrimonio “cromosomico” di un “individuo”. Se ad esempio, la superficie (cioè l’individuo) ha n punti di controllo, ognuno con 3 coordinate spaziali, codificandolo secondo un sistema binario a 8-bit, si ottiene un cromosoma rappresentato da un vettore binario di $n \times 3 \times 8$ bits. Il passo successivo è quello di mettere in corrispondenza i singoli individui (e quindi il proprio cromosoma) con un valore di idoneità relativa al comportamento strutturale, misurato attraverso un modello ad elementi finiti (FEM) generato automaticamente. Il terzo passaggio è la strate-

gia evolutiva che seleziona le soluzioni migliori, ne ricombina il cromosoma, e genera una nuova “popolazione” di elementi NURBS. Quest’ultimo passaggio è il cuore centrale dell’intero algoritmo visto che possono essere adottate svariate tecniche di computazione per la creazione dei nuovi individui (*crossover procedure, elitism method, random mutation*). Una calibrazione non corretta di queste tecniche potrebbe causare un arresto dell’evoluzione, un tempo eccessivo per il calcolo della soluzione ottimale, oppure il mancato raggiungimento della soluzione ottimale. Inoltre è importante che anche il dominio delle possibili soluzioni sia ben calibrato. Infatti, se da un punto di vista computazionale, la sua eccessiva grandezza comporterebbe un allungamento dei tempi e delle possibilità di raggiungere la soluzione migliore (ce ne sarebbero troppe), da un punto di vista progettuale, si rischierebbe di arrivare a soluzioni morfologiche troppo distanti da quelle iniziali. In pratica vengono definite tre fasi: la descrizione di una



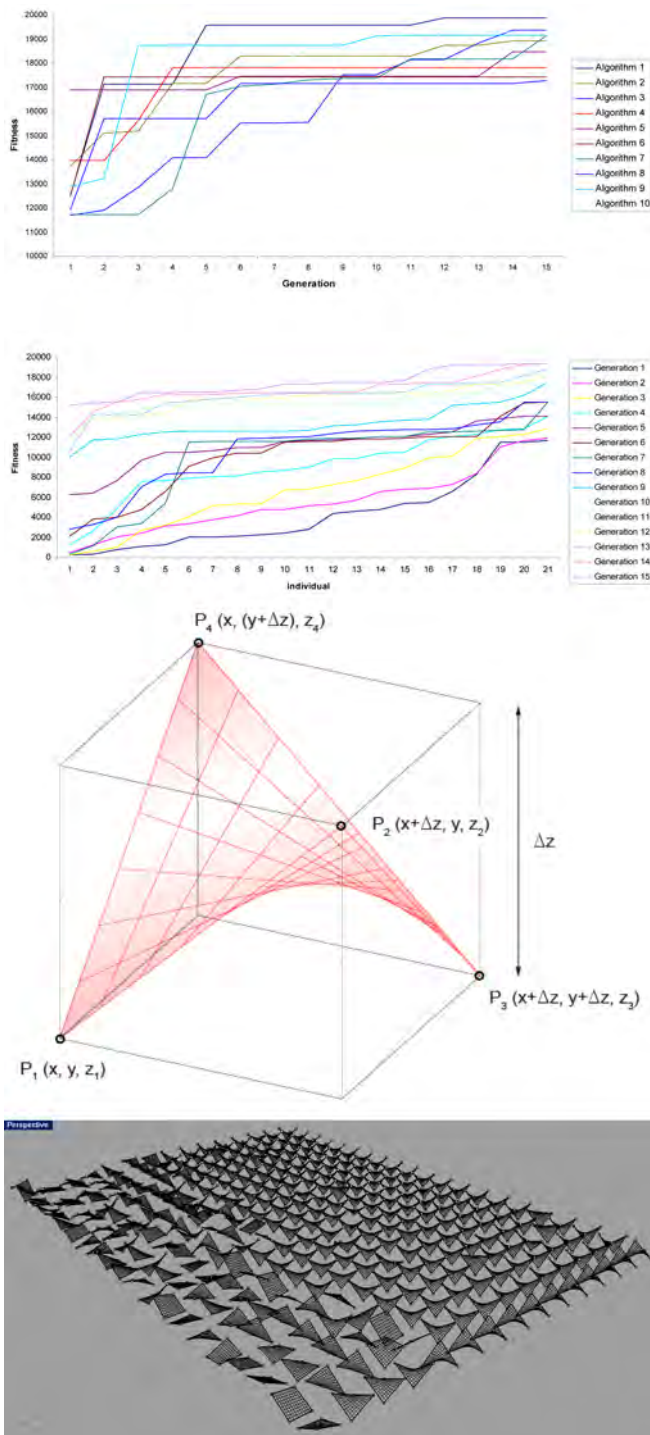
I.11/ Punti di controllo e dominio di una superficie NURBS.

forma omogenea di tipo NURBS, un modello strutturale in elementi finiti (metodo ad elementi finiti, FEM) con cui fare le verifiche strutturali, la codifica per l’algoritmo evolutivo. Si accosta quindi il processo di ottimizzazione di una forma, ad un principio di carattere euristico, dove la continua sperimentazione e la verifica delle proposte definiscono la soluzione finale. In figura sono rappresentate alcuni risultati dell’uso di questa metodologia (che costituisce una variante della ESO), applicata ad una forma semplice composta da un quadrato, in cui le possibili variazioni riguardano le quote che possono essere assunte dai vertici. Poiché in questo caso, la forma ottimale dal punto di vista statico sappiamo essere rappresentata da un paraboloide, la prova diventa un modo efficace per verificare l’attendibilità del processo genetico (fig.I.12).

Un altro interessante caso di studio, riguarda l’applicazione di questi modelli alla ricerca della forma in funzione della tessitura delle maglie strutturali.

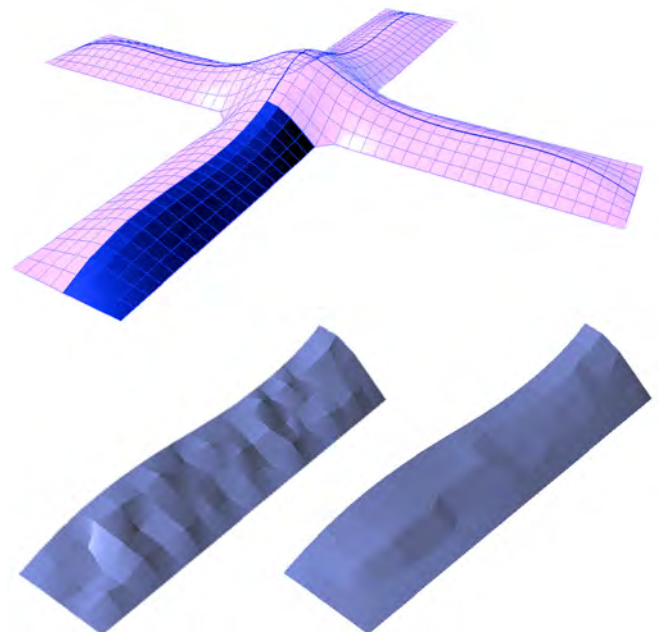
Immaginiamo una superficie simile a quella vista per il Museo di Amburgo in cui la maglia strutturale era composta da elementi quadrangolari. In casi come questo è necessario arrivare a definire una superficie che possa essere scandita secondo una maglia piana, per evidenti motivi di economia. Abbiamo anche detto che nel caso di Amburgo la particolare genesi geometrica della superficie (una superficie di traslazione), garantisce questa possibilità. Dunque esso costituisce un ottimo riferimento per la valutazione dell’efficacia degli algoritmi genetici applicati¹⁶ alla ricerca di superfici riducibili in facce piane e con dimensioni regolari. In questo caso la forma della *grid shell*, è rappresentata da una matrice bidimensionale in cui sono immesse le coordinate x, y e z dei nodi della griglia, ancora espressi da numeri reali. La non planarità di ciascun elemento, è definita dalla distanza del quarto vertice dal piano individuato dai primi tre.

Il vettore che esprime questo valore rappresenta la dif-



I.12/ Mario Sassone e Alberto Pugnale, algoritmi genetici per l'ottimizzazione della forma di un quadrilatero sghembo.

ferenza tra la soluzione attuale e quella ideale e quindi verrà utilizzata come riferimento per la valutazione dell'idoneità (*fitness*) di una configurazione (esattamente come avveniva per l'analisi strutturale del caso precedente). Come si può constatare dalla figura però (fig. I.13), assumere come variabili tutte le coordinate dei nodi, produce un elevato numero di soluzioni ottimali possibili (dominio), alcune troppo irregolari per essere considerate accettabili dal punto di vista progettuale (anche se mantengono la proprietà di essere tutte planari). Di sicuro la ricerca degli algoritmi di ottimizzazione genetica tenderà a curare l'efficienza dei metodi di computazione su cui si fonda. Abbiamo infatti visto, come in casi molto complessi si possano presentare difficoltà tali da compromettere il raggiungimento della soluzione. Ma non va dimenticata la sua notevole caratteristica di riuscire a combinare insieme in un'unica soluzione, requisiti complessi come il comportamento strutturale, geometrico e compositivo.



I.13/ Mario Sassone e Alberto Pugnale, ottimizzazione di una struttura grid-shell ad elementi quadrangolari piani.

Note

1. A. Bogart, *Tuba Kocaturk, Free Form design as the digital "Zeitgeist"*, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, 2007.

2. K.W.Forster, a cura di, *Metamorph: Focus*, catalogo, *La Biennale di Venezia*, Marsilio ed., 2004.

3. M. Emmer, *L'idea di spazio da Escher all'architettura virtuale*, in L. De Carlo, a cura di, *Informatica e fondamenti scientifici della rappresentazione*, Gangemi editore, 2007.

4. J.H.Poincaré, *La scienza e l'ipotesi*, Edizioni Dedalo, 1989.

5. The International Association for Shell and Spatial Structures, è un'associazione fondata nel 1959 da Eduardo Torroja, che ha come obiettivo principale lo sviluppo delle teorie alla base della progettazione delle strutture leggere, attraverso lo scambio di ricerche ed idee tra diversi settori scientifici: architettura, ingegneria ed informatica.

6. Alan Holgate, *The Art of Structural Engineering: The Work of Jorg Schlaich and his Team*, Edition Axel Menges, 1997.

7. Nonostante il valore teorico della resistenza a trazione del vetro sia molto alto (14000 MPa) i difetti presenti sulle superfici, rendono imprevedibile il suo comportamento.

8. Gabriele Del Guerra (candidato) Prof.Ing. Maurizio Froli (relatore), *Progettazione strutturale di volte sottili in vetro e acciaio irrigidite da reti di funi*, Università degli studi di Pisa, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, 2004-2005.

9. AA.VV., *Atlante del vetro*, UTET, 2002.

10. M.Wigginton, *Glass in Architecture*, Phaidon Press, paper-

back edition, London 2002.

11. O. Baverel, H. Nooshin, Y. Kuroiwa, Y. Parke, G.A.R., *International Journal of Space Structures*, Vol 15, No. 2, 2000.

12. N.V. Banichuk, M. Serra, A. Sinitsyn, *Shape optimization of quasi-brittle axisymmetric shells by genetic algorithm*, in *Computers and Structures*, Vol. 84, No.29, 2006.

13. V. Togan, A. Daloglu, *Optimization of 3d trusses with adaptive approach in genetic algorithms*, *Engineering Structures*, Vol. 28, No. 7, 2006.

14. J. Frazer, *An Evolutionary Architecture*, Architectural Association Publications, 1995.

15. M. Sassone e A. Pugnale, *Evolutionary Structural Optimization in Shell Design*, nei *Proceedings of Special Workshop: Advanced Numerical Analysis of Shell-like Structures held in Zagerb*, Croatia, September 26-28, 2007 edito da Jurica Sorić Institute of Applied Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb (Croatia) Friedrich Gruttmann Institut für Werkstoffe und Mechanik im Bauwesen, TU Darmstadt (Germany) Werner Wagner Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH) (Germany).

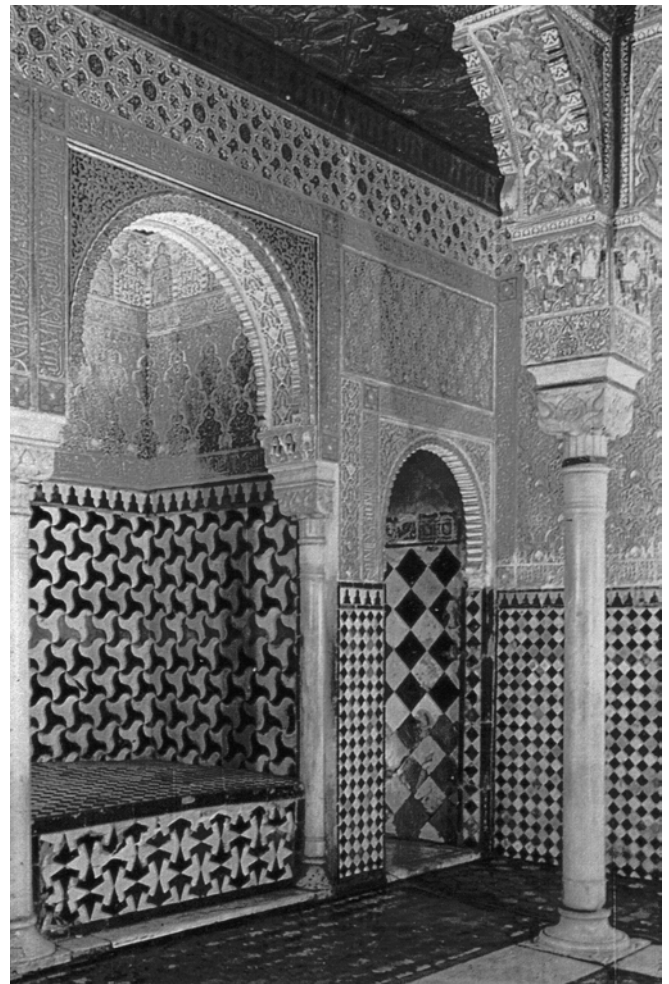
16. M. Sassone e A. Pugnale, *Optimal design of glass grid shells with quadrilateral elements by means of a genetic algorithm*, nei *Proceedings of the 6th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures IASS-IACM 2008: "Spanning Nano to Mega" 28-31 May 2008*, Cornell University, Ithaca, NY, USA John F. ABEL and J. Robert COOKE (eds.)

La tassellazione del piano euclideo

La tassellazione: storia e scienza

L'arte di riempire un piano con uno schema ripetuto raggiunse il suo massimo sviluppo nella Spagna del tredicesimo secolo, dove i Mori usarono tutti i diciassette gruppi di simmetria nelle loro intricate decorazioni dell'Alhambra. La loro preferenza per gli schemi astratti era dovuta alla stretta osservanza del precetto del Corano: "Tu non disegnerai alcuna figura...". H.S.M. Coxeter

L'arte della tassellazione ha origini antichissime, da quando l'uomo, costruendo le proprie abitazioni, cominciò ad utilizzare pietre di diverso colore e forma per rivestire i pavimenti e le pareti. Ogni civiltà si è confrontata con questa operazione, ognuna però dandole connotati e caratteristiche diverse. Ad esempio i romani ed altre culture dell'area del Mediterraneo, per rappresentare figure umane ed animali utilizzavano forme complesse di mosaico formato da *tessere*, ossia tavolette di quattro lati; l'etimologia del termine tassellazione (o tassellatura) risiede proprio nella parola tessera. I mori e gli arabi invece preferivano, per precetti di natura religiosa, utilizzare motivi astratti con uno spiccato carattere geometrico. Il punto più alto dell'arte del riempimento del piano, fu raggiunto nel XIII secolo in Spagna, dove proprio i Mori usarono tutti i 17 *gruppi della carta da parati*, per decorare le superfici dell'Alhambra (fig. II.1). Non deve sorprendere il fatto di trovare numerosi punti in comune tra i motivi utilizzati nelle diverse culture; come vedremo più avanti, la ragione di queste somiglianze è dovuta a precise motivazioni di carattere geometrico. L'evoluzione dell'arte della tassellazione concerne soprattutto due caratteristiche: la ricerca



II.1/ Mosaici arabi, Alhambra, Granada, XIV secolo.



II.2/ Lo studio delle tassellazioni cosiddette casuali, ha una notevole importanza per le ricadute in molti campi della scienza (fotografie di Stephen Levitus e Luc Viatour).

morfologica della tessera, e con la sua potenzialità di aggregazione, e l'uso del colore come elemento distintivo. Di questo e di altri aspetti, non riusciremo a dare una trattazione, in quanto il campo di analisi risulta talmente vasto da renderlo poco proficuo per le finalità che la presente ricerca si propone. A noi basterà analizzare da un punto di vista geometrico (e talvolta matematico) le nozioni di base comuni a tutti i tipi di tassellazione.

Un primo significato generale che possiamo attribuire al termine tassellazione, che ben si adatta agli esempi sopra riportati, è quello di ricoprimento di piani o superfici, attraverso la giustapposizione di tessere di diverso materiale, in modo tale da non lasciare spazi vuoti evidenti tra le parti. In quest'ottica possiamo capire l'importanza e l'attualità che questo tema possiede in campi di applicazione come l'architettura e l'ingegneria. Ad esempio in campo architettonico, semplificare una superficie continua utilizzando forme accostate tra loro senza distacchi è evidentemente più economico e anche più idoneo ai fini del comportamento strutturale. Un'estensione del concetto di tassellazione è utile per ulteriori considerazioni. Se intendiamo infatti la tassellazione come suddivisione del piano in regioni (cioè le tessere) senza considerare il modo in cui tale suddivisione è realizzata, allora ci rendiamo che le tassellazioni che ci circondano sono numerosissime ed includono non solo quelle create dall'uomo ma anche quelle create dalla natura: le tele di un ragno, le celle di un alveare, le crepe che si formano negli oggetti di ceramica o in un terreno arido e così via (fig. II.2). Lo studio di queste tassellazioni definite *casuali*, ha una notevole importanza per le diverse ricadute che esse hanno in campi della scienza, del tutto eterogenei: la metallurgia e la geologia (per ciò che riguarda la struttura dei cristalli), la biologia (per la disposizione delle cellule nelle membrane di piante ed animali) e perfino nelle telecomunicazioni (per il miglioramento del segnale dei trasmissioni e per le strategie di pianificazione). Le tassellazioni casuali possono essere generate in diversi modi a seconda del campo di applicazione, ma un metodo molto diffuso nasce da una distribuzione casuale di punti nel piano (o nello spazio), da cui si costruisce la tassellazione di Dirichlet, meglio conosciuta con il nome di diagramma di Voronoi (ne daremo una trattazione nel Capitolo V).

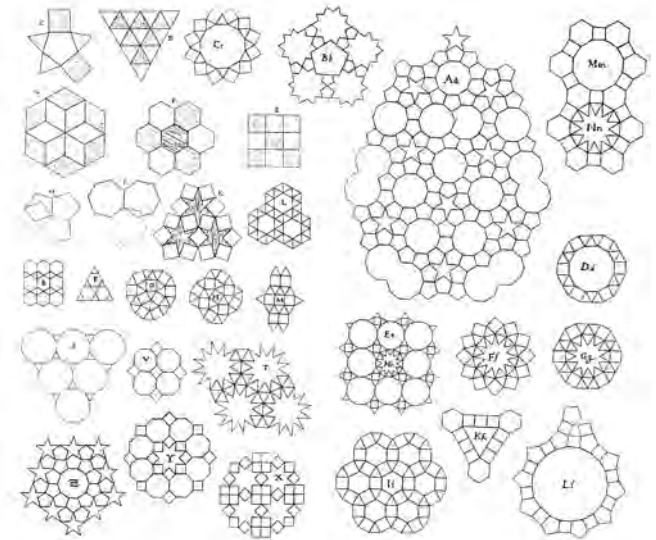
Se, come abbiamo detto, l'arte della tassellazione ha origini antichissime, la scienza della tassellazione, con cui si intende lo studio delle sue proprietà geometriche (e matematiche) è relativamente recente e presenta molti punti del tutto inesplorati. Il primo lavoro sistematico degli aspetti geometrici della tassellazione fu condotto da Keplero nel 1619 con il libro *Harmonices Mundi* (fig. II.3). È sorprendente notare che tale libro fu dimenticato fino ai primi anni del Novecento, segnale questo, che in letteratura sia stato assente per molto tempo un testo di riferimento che consentisse una classificazione completa e un'analisi matematica del problema della tassellazione. Solo nel 1987 tale proposito viene perseguito da due professori di matematica delle università di Washington e dell'East Anglia, Branko Grunbaum e G.C. Shephard, che sono riusciti a racchiudere in un libro voluminoso l'analisi delle proprietà geometriche e matematiche, delle tipologie di tassellazioni e motivi fino ad allora conosciute. Per avere un'idea delle tipologie di tassellazioni possibili, ecco un indice degli argomenti affrontati nel testo:

- tassellazioni di poligoni regolari e stellati
- topologia delle tassellazioni
- i *pattern* (motivi)
- classificazione delle tassellazioni con proprietà transitiva
- classificazione rispetto le simmetrie
- i *pattern* e le tassellazioni colorate
- le tassellazioni di poligoni generici
- le tassellazioni aperiodiche
- le tassellazioni di Wang
- le tassellazioni inusuali

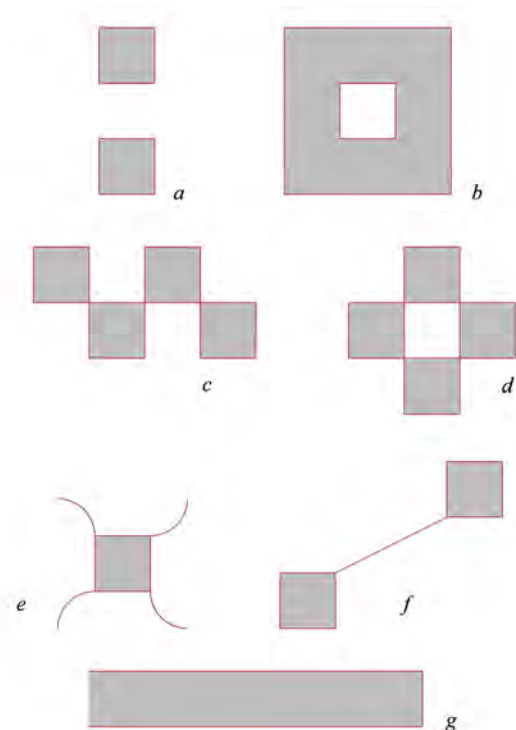
Questo testo dal titolo "*Tilings and Patterns*"¹, sarà il nostro testo di riferimento per affrontare lo studio dei principi che sono alla base delle tassellazioni. Come vedremo, tale studio oltre costituire l'elemento di partenza della nostra indagine, segnerà anche il punto d'incontro tra una serie di argomenti apparentemente distanti tra loro.

Definizioni

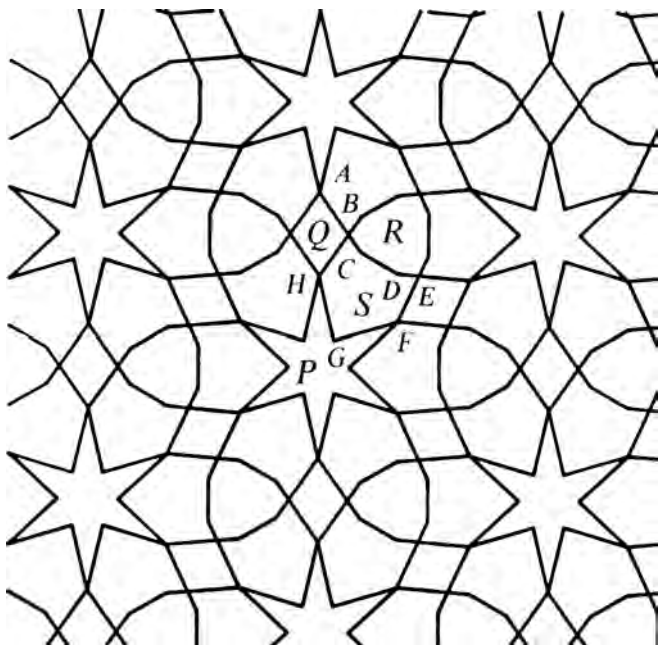
Da un punto di vista geometrico, *tassellazione* significa ricoprire con una o più figure, un piano infinito (sia esso euclideo che non euclideo), in modo da non avere



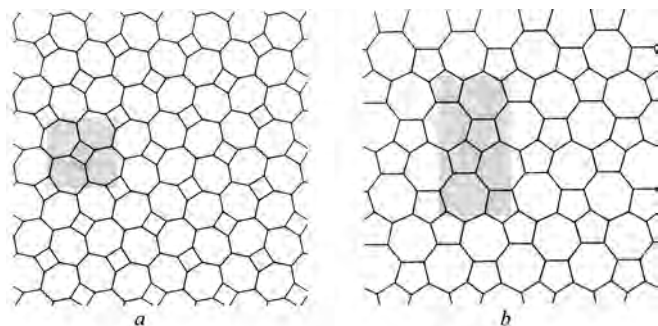
II.3/ Riproduzione eseguita da Grunbaum e Shephard, dei disegni di Johannes Keplero sulle tassellazioni del piano, da *Harmonices Mundi*, Libro II, 1619.



II.4/ Esempi di tessere non assimilabili a dischi topologici chiusi.



II.5/ Grunbaum e Shephard, adattamento di un disegno di Holiday, 1978, in cui sono individuati gli elementi che definiscono una tassellazione (spigoli e vertici) ed una tessera (lati ed angoli).



II.6/ Tassellazioni diedriche disegnate da (a) Blum e Bertaut nel 1954, e da (b) Smith, Johnson e Nordine, nel 1965.

sovrapposizioni e non lasciare vuoti²; detto in termini matematici diremo che la tassellazione T di un piano, è un insieme di figure chiuse che ricoprono il piano senza lasciare vuoti o sovrapposizioni, e si indica con:

$$T = \{T_1, T_2, \dots\}$$

Dove T_1, T_2 sono le tessere di T . Va specificato che ogni figura deve essere chiusa cioè delimitata da una linea chiusa; per eliminare le forme che possono contenere sovrapposizioni o incroci di linee si dice che le figure della tassellazione sono assimilabili a *dischi topologici chiusi*. In figura (fig. II.4) sono rappresentate alcune tessere che non rientrano in questa classificazione, e che quindi non verranno considerate nella nostra trattazione³.

Si tratta di:

- a. tessere non collegate, e quindi sono due o più pezzi separati;
- b. tessera che possiede almeno un buco;
- c. d. tessere che sono disconnesse;
- e. f. tessere che contengono linee o archi o altri elementi ad area zero;
- g. tessera che non ha un perimetro chiuso;

Come detto, la nostra indagine riguarderà solamente tessere paragonabili a dischi topologicamente chiusi, che è come dire che il loro contorno è una curva *semplice e chiusa*, dove con *chiusa* si intende una linea le cui estremità si uniscono a formare un anello, e con *semplice* si intende che non siano presenti incroci o rami. Quindi nei casi (a) e (b) della figura non abbiamo il contorno e non è una linea singola, i casi (c) (d) (e) (f) non sono semplici perché hanno ramificazioni o incroci, ed in (g) non abbiamo un contorno chiuso.

Per quanto riguarda i criteri che deve seguire la tassellazione per essere considerata valida, possiamo indicare che l'unione delle figure non deve lasciare vuoti, cioè, secondo il linguaggio matematico:

$$\{T_1 \cup T_2 \dots \cup T_n\} = \text{piano intero}$$

inoltre non deve avere sovrapposizioni, e cioè:

$$\{\text{elemento di } T_1 \cap \text{elemento di } T_2\} = 0$$

Infine, vanno escluse le figure che non hanno area, come ad esempio i segmenti e i punti, poiché darebbero luogo ad una tassellazione in cui non si riuscirebbero a distinguere gli spazi vuoti.

Altre definizioni che riguardano le parti della tassellazione sono:

spigolo: confine che separa due tessere

vertice: estremità di uno spigolo

Invece per le parti della tessera che genera la tassellazione definiamo:

lato: spigolo di una tessera (o figura)

angolo: punto d'intersezione tra due lati

Per chiarire meglio le differenze tra le definizioni, consideriamo la figura (fig. II.5) in cui possiamo riconoscere che i punti B,C,D,E rappresentano lo spigolo tra la tessera R e la tessera S; i segmenti BC, CD, DE, EF, FG, GH e HB sono i lati della tessera S. Le tassellazioni realizzate per mezzo di poligoni, si definiscono spigolo-spigolo se gli angoli e i lati dei poligoni coincidono con i vertici e gli spigoli della tassellazione. In caso contrario si dicono non spigolo-spigolo.

Due tessere T_1 e T_2 , si dicono *congruenti* se esiste un movimento rigido del piano che porta a far coincidere T_1 con T_2 . Invece due tassellazioni si dicono *uguali*, se una delle due può essere scalata (ingrandita o rimpicciolita) in modo da divenire congruente con l'altra. Possiamo quindi dire che due tassellazioni per essere congruenti devono avere la stessa dimensione, per essere uguali non è necessario che lo siano.

Come abbiamo detto, noi ci occuperemo soprattutto di tassellazioni generate da tessere topologicamente assimilabili a dischi chiusi, in particolare, con un'ulteriore restrizione, inizieremo con le tassellazioni monoedriche. Una tassellazione si dice *monoedrica* se ogni tessera T_i della tassellazione T è congruente ad un insieme fissato T . In altre parole vuole dire che tutte le tessere hanno la stessa forma e dimensione; l'insieme T è chiamato *prototessera* (in inglese *prototile*) di T . Definiamo invece *diedrica*, *triedrica*, *4-edrica*...*n-edrica*, la tassellazione dove tutte le tessere sono congruenti rispettivamente a 2, 3, ...*n* distinti *prototessere* dell'insieme T (fig. II.6). Apparentemente, le tassellazioni monoedriche sono semplici e quasi insignificanti da un punto di vista matematico; in realtà le cose sono molto più complicate di quanto non sembrino. Basti pensare, infatti, che non esiste ancora (e forse non può esistere) un algoritmo che possa stabilire se un insieme T sia o meno, la prototes-

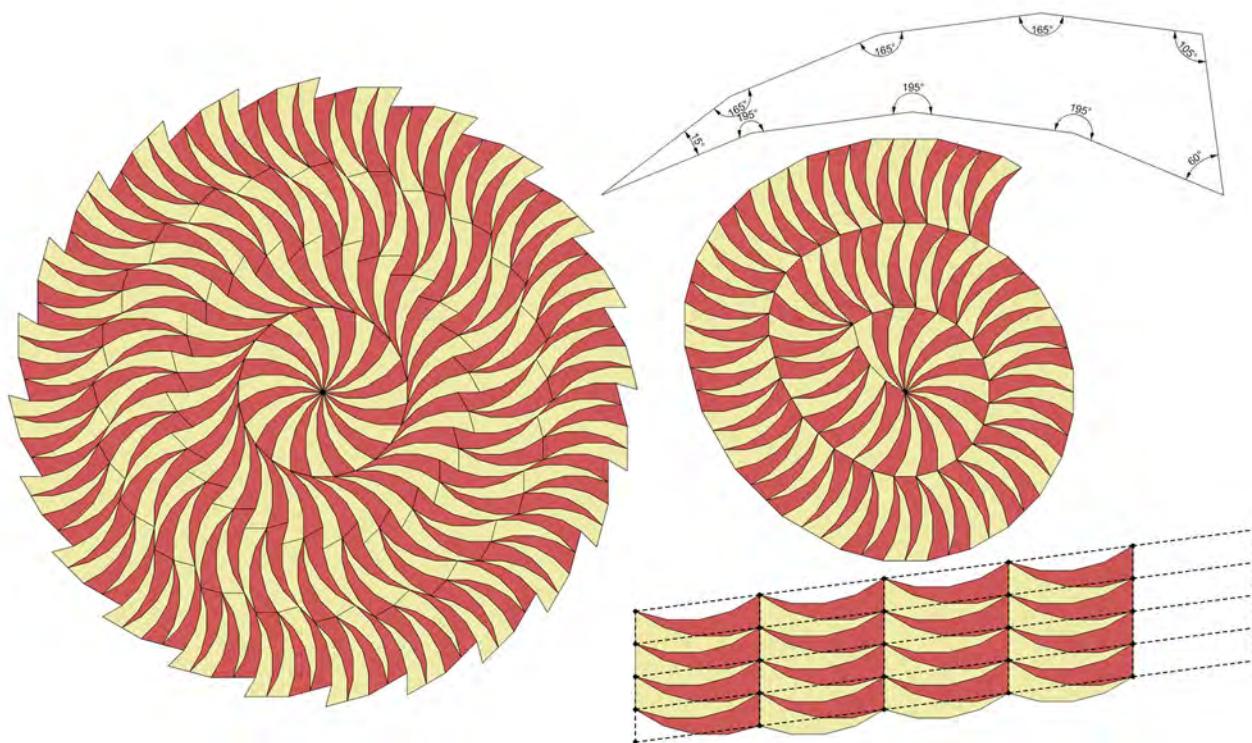
sera di una tassellazione monoedrica. Un altro esempio significativo è il fatto che non si conoscono ancora tutte le forme di pentagoni convessi che possono tassellare il piano monoedricamente. Un esempio dell'interesse di questo problema è offerto dalla prototessera in figura (fig. II.7), che ammette molte altre tassellazioni inusuali (cioè non a spirale).

Simmetria ed isometria

Molte proprietà delle tassellazioni sono legate al concetto di simmetria. Tale concetto è molto difficile da definire poiché è un argomento vasto il cui significato dipende dall'area disciplinare in cui è applicato. Il chimico ungherese Istvan Hargittai, scrive nella prefazione del volume *Symmetry: Unifying Human Understanding*⁴ "Oggi, naturalmente, è usuale considerare che la simmetria non sia solo uno dei concetti fondamentali della scienza ma forse la migliore idea per collegare le diverse branche della scienza, delle arti e di molte altre attività umane. Mentre la simmetria per secoli è stata ritenuta importante soprattutto per il suo fascino estetico, questo secolo è stato testimone di un notevole rilancio nel considerare la simmetria come una pietra miliare nel pensiero scientifico [...]. Questo volume è stato ideato con lo scopo principale di dare un contributo al ruolo di tramite della simmetria. Il progetto consiste nel riunire i più diversi settori, dalla matematica alla psicologia, dalla ricerca spaziale alla musicologia, dalla chimica all'arte popolare, dalla letteratura alla cristallografia, all'estetica, alla fisica moderna, alla filosofia...[...]" La simmetria quindi è il punto d'unione di diverse discipline artistiche e scientifiche, oltre ad essere uno dei concetti base della scienza, visto che i fenomeni principali e le leggi della natura, sono legati ad essa. Il suo significato è notevolmente cambiato nel corso dei secoli. Nello stesso volume è presente un articolo di Harold Osborne, in cui scrive "Nell'antichità classica l'idea della simmetria in stretto legame con quella della proporzione ha dominato la pratica degli artisti e il pensiero dei teorici. Ma il concetto tradizionale era radicalmente diverso da quello che intendiamo oggi per simmetria così diverso che la simmetria non può più essere considerata come

una corretta traduzione della parola greca ΣΙΜΜΕΤΡΙΑ da cui deriva [...]. Per i Greci la parola significava commensurabilità, e due grandezze erano dette commensurabili se esisteva una terza grandezza con la quale era possibile dividerle con un eventuale resto [...]. Questa preferenza per una comprensione di tipo intellettuale della bellezza corrispondeva alla caratteristica fondamentale del temperamento greco, alla sua richiesta di un ordine e una comprensione in ogni cosa e alla sua ripugnanza per ogni cosa che fosse vaga e non ben definita [...]. Le due idee fondamentali dell'estetica classica non sono state messe in discussione al tempo del Rinascimento: la prima, il credere che gli stessi principi di perfezione si applichino in natura e nell'arte; la seconda, che la rappresentazione realistica, che era dichiaratamente lo scopo dell'artista, dovesse

rappresentare non i modelli imperfetti, osservabili in natura, ma l'ideale della simmetria, che poteva essere scoperto matematicamente [...]. La concezione moderna della simmetria è molto differente da quella tramandata dai tempi classici, e poi ripresa nel Rinascimento [...]. La nostra idea della bellezza nell'arte è divenuta più emotiva ed espressiva; l'aspetto di chiarezza intellettuale è divenuto molto meno importante di quanto fosse in passato. Inoltre il pensiero contemporaneo è molto meno convinto che gli stessi principi estetici si applichino nella natura e nell'arte. Rifiutiamo l'idea alla base dell'estetica rinascimentale, l'idea che vi sia una simmetria ideale degli oggetti naturali, sia essa basata sulla sezione aurea, sulla simmetria dinamica o su qualsiasi altra formula matematica". È evidente che le idee sulla simmetria sono molto diverse e come fa notare



II.7/ Esempi di tassellazioni monoedriche generate dalla medesima prototessera disegnata da Grunbaum e Shephard.

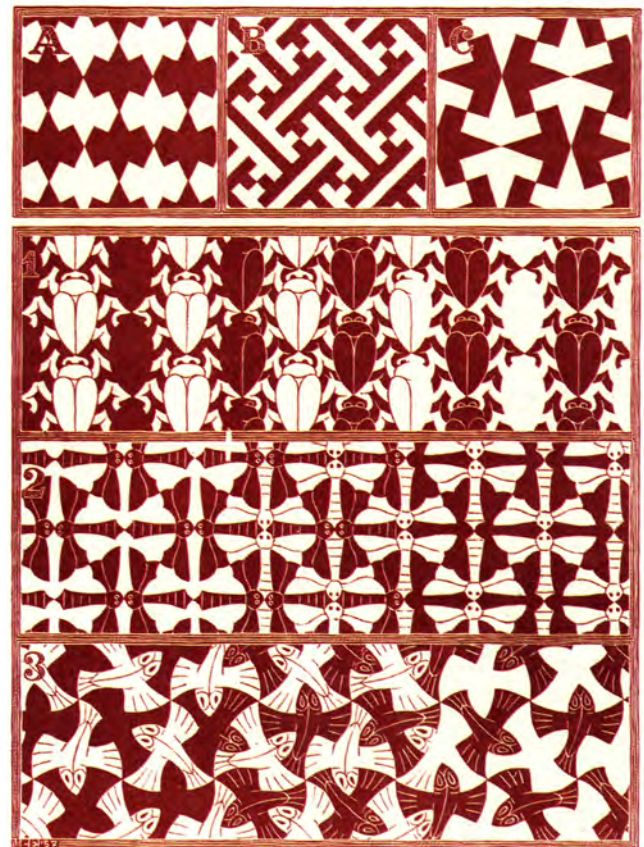
Michele Emmer⁵, nel suo articolo *Simmetria*, che non è “certo a livello della sezione aurea e di una qualsiasi altra formula matematica che gli scienziati cercano di trovare le leggi unificanti nella scienza”.

Un argomento che mette bene in evidenza i rapporti stretti tra arte e matematica, accomunati dall’idea di simmetria, è proprio quello del ricoprimento del piano. In queste pagine abbiamo modo di osservare da vicino quanto le rigide leggi matematiche, vincolino il modo di tassellare il piano. In particolare, utilizzando un solo tipo di tessera, la tassellazione è possibile solo con tessere quadrangolari (parallelogrammi, quadrati, rettangoli rombi), triangolari ed esagonali (escludiamo per ora i casi particolari dei pentagoni convessi). Se disegniamo su queste tessere dei motivi ornamentali (i *patterns*) attraverso l’uso di movimenti rigidi del piano, possiamo estenderle indefinitamente sul piano. Solo agli inizi del Novecento, con lo studio dei cristalli, si è scoperto che le possibili variazioni delle simmetrie sono riconducibili a 17 gruppi (escludiamo l’uso del colore altrimenti il numero aumenterebbe), chiamati gruppi cristallografici (o della carta da parati). Ma in modo empirico gli artisti giunsero allo stesso risultato, come evidenziano le già citate opere dell’Alhambra, in cui compaiono tutti i 17 gruppi cristallografici. Ed anche il grafico olandese Maurits Cornelis Escher (di cui parleremo più avanti nel caso delle tassellazioni del piano iperbolico), arrivò agli stessi risultati (*fig. II.8*). Proprio riferendoci all’attività artistica di Escher, possiamo notare come il “vincolo” imposto dalle regole della matematica, non incida in alcun modo sulle potenzialità estetiche ed espressive raggiunte dai suoi lavori. Un esempio è offerto dall’opera *Fantasma* del 1971 (*fig. II.9*). Una delle caratteristiche più interessanti di quest’opera è il fatto che è generata da una tassellazione monoedrica (cioè composta da una sola tessera), ma non isoedrica (cioè, come spiegheremo meglio nel prossimo paragrafo, i tasselli non hanno la stessa relazione con il resto della tassellazione); non esiste alcuna zona del disegno che possa essere presa per ricoprire tutto il piano (si dice che non è periodica). Il risultato dinamico è davvero sorprendente se si considera che è generato da un solo tipo di tessera che viene usata in diversi modi.

Per poter definire la simmetria in termini più scientifici, dobbiamo introdurre il concetto di *isometria*, o *trasformazione congruente*.

Una *isometria* è una trasformazione del piano euclideo R^2 all’interno di sé stesso, che mantiene le distanze invariate. Allora, chiamata con $\sigma: R^2 \rightarrow R^2$ la trasformazione, e con A e B due punti qualsiasi del piano, la distanza tra le loro immagini $\sigma(A)$ e $\sigma(B)$ è uguale alla distanza tra A e B. Si dimostra che⁶ le possibili isometrie del piano sono solo quattro:

1. *Rotazione attorno un punto O di un dato angolo φ . Il punto O è chiamato centro della rotazione; quando φ assume un valore di 180° , la trasformazione prende il nome di riflessione centrale.*
2. *Traslazione lungo una certa direzione secondo una certa distanza*



II.8/ M.C. Escher, Divisione regolare del piano II, xilografia, 1957.

3. Riflessione rispetto ad una retta

4. Glissoriflessione in cui si combina una riflessione rispetto ad una retta r , con una traslazione di una certa distanza secondo la direzione di r .

Le trasformazioni del tipo (1) e (2) sono chiamate *dirette*, in quanto se ABC sono i vertici di un triangolo disposti in senso orario, le loro immagini in seguito alle isometrie (1) e (2) mantengono lo stesso ordine. Nei casi (3) e (4) le isometrie sono dette *inverse*.

Per ogni isometria σ ed ogni insieme S indichiamo con σS l'immagine di S in seguito all'isometria σ . Per *simmetria* di un insieme S si indica una isometria σ tale da trasformare S in sé stesso, e cioè:

$$\sigma S = S$$

E allora ogni rotazione di un punto qualsiasi di un cer-



II.9/ M.C. Escher, Fantasmi, 1971.

chio attorno al suo centro è una simmetria così come lo è una riflessione rispetto ad una retta passante per il centro; allo stesso modo nel caso del quadrato, le riflessioni rispetto alle diagonali e agli assi centrali sono simmetrie. Sempre nel caso del quadrato, sono anche simmetrie le rotazioni attorno il suo centro di 90° , 180° e 270° . E allora quando una rotazione di $2\pi/n$ è simmetria di un insieme dato, si dice che O è il centro di una *simmetria di rotazione di ordine n*.

Va ricordato che esiste un'isometria che trasforma ogni punto in sé stesso: si tratta dell'identità. Allora tornando al caso del quadrato, possiamo dire che sono possibili 8 simmetrie (4 riflessioni, 3 rotazioni ed 1 identità). Visto che l'insieme delle simmetrie possibili è chiamato *gruppo*, diremo che l'ordine del gruppo di simmetria del quadrato è 8.

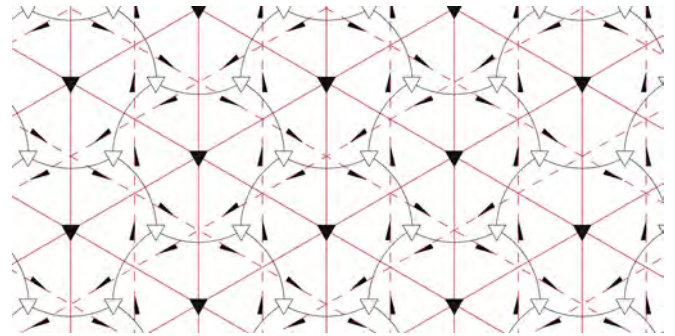
È opportuno introdurre le simbologie con cui vengono definiti i vari gruppi. Con il simbolo **c1** oppure **e**, si indica il gruppo di simmetria composto della sola identità, con il simbolo **cn** ($n \geq 2$) si indica il gruppo composto da rotazioni di angoli $360^\circ j/n$ ($j=0,1,2,\dots,n-1$) attorno un punto fisso; questo gruppo prende il nome di *gruppo ciclico di ordine n*. Infine con il simbolo **dn** (con $n \geq 1$) si indica il gruppo con tutte le isometrie di **cn** insieme alle riflessioni rispetto n rette ugualmente inclinate una rispetto all'altra⁷. Questo gruppo si chiama *gruppo diedrale di ordine 2n*; per $n \geq 3$ rappresenta il gruppo di simmetria dei poligoni regolari.

Se estendiamo il concetto di simmetria al caso delle tassellazioni, diremo che la simmetria di una tassellazione è una isometria che trasforma la tassellazione in sé stessa. Nell'esempio della tassellazione monoedrica della figura (fig. II.10), possiamo riconoscere simmetrie di 4 tipi:

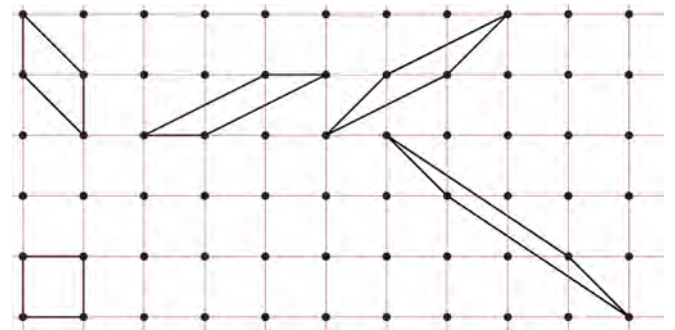
1. rotazioni di $2\pi/3$ o $4\pi/3$ attorno ogni punto rappresentato da un triangolo (vuoto o riempito)
2. traslazioni che spostano ogni triangolo nero in un altro
3. riflessioni rispetto ad ognuna delle linee continue
4. glissoriflessioni composte da riflessioni rispetto le linee tratteggiate, e traslazioni secondo la stessa direzione di metà distanza tra i triangoli neri (sono indicate nella figura con mezze frecce).

Se il gruppo di una tassellazione contiene almeno due traslazioni in direzioni diverse, diremo che la tassellazione è *periodica*. Indicando con \mathbf{a} e \mathbf{b} i vettori di traslazione, avremo che il gruppo di simmetria S della tassellazione (T), contiene tutte le traslazioni $n\mathbf{a}+m\mathbf{b}$ dove m ed n indicano due numeri primi. Quindi iniziando da un punto qualsiasi O , l'insieme delle immagini di O per effetto delle traslazioni $n\mathbf{a}+m\mathbf{b}$, formano una *lattice*. L'esempio più noto è l'insieme dei punti del piano euclideo, che ha per coordinate i numeri primi e prende il nome di *lattice ad unità quadrata* (fig.II.11). Più in generale possiamo dire che il lattice associato ad una tassellazione periodica, coincide con i vertici del parallelogramma di traslazione. Di conseguenza, se noi conosciamo la disposizione delle tessere, degli spigoli e dei vertici di una tassellazione T , contenuta in un parallelogramma periodico, allora possiamo costruire tutta la tassellazione ripetendo il parallelogramma (fig.II.12). Nella figura (fig.II.13) sono presentate tre tassellazioni non periodiche. Nei casi a e b le simmetrie includono rotazioni attorno un punto fisso chiamato *centro* della tassellazione. In particolare la tassellazione a (Goldberg 1955) ha un gruppo di simmetria $c6$, invece la tassellazione b contiene anche delle riflessioni tra le sue simmetrie, quindi appartiene al gruppo $d3$. Il caso c invece ammette solo simmetrie di traslazione secondo una direzione fissa, ed il gruppo di simmetria è infinito.

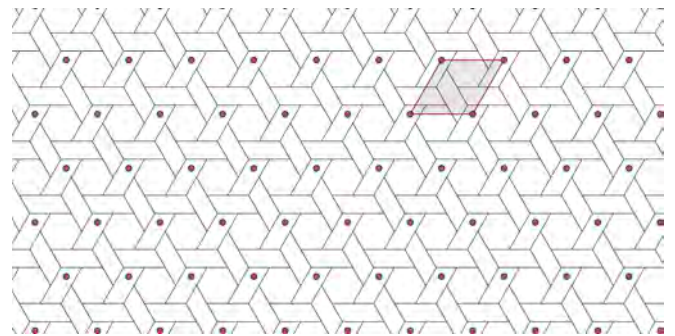
Consideriamo ora una tessera T di una tassellazione T . Allora ogni simmetria di T che trasforma T in sé stessa, è anche una simmetria di T . Il contrario però, non è sempre vero. Infatti, nell'esempio c della figura (fig.II.13), l'unica simmetria di T che trasforma una tessera T in sé stessa, è l'identità (invece, come abbiamo visto in precedenza, il quadrato ha altre 7 simmetrie oltre l'identità). Quindi, dovendo distinguere le due caratteristiche, indicheremo con $S(T)$ il gruppo di simmetria della tessera T , ed invece con $S(T|T)$ il gruppo delle simmetrie della tessera T che sono anche simmetrie della tassellazione T ; quest'ultimo viene anche chiamato *induced tile group*. Un altro esempio in cui $S(T)$ è diverso da $S(T|T)$, è proposto nella figura (fig.II.14): la prototessera ha gruppo di simmetria di ordine 2, invece la simmetria di T che trasforma T in sé stessa è la sola identità.



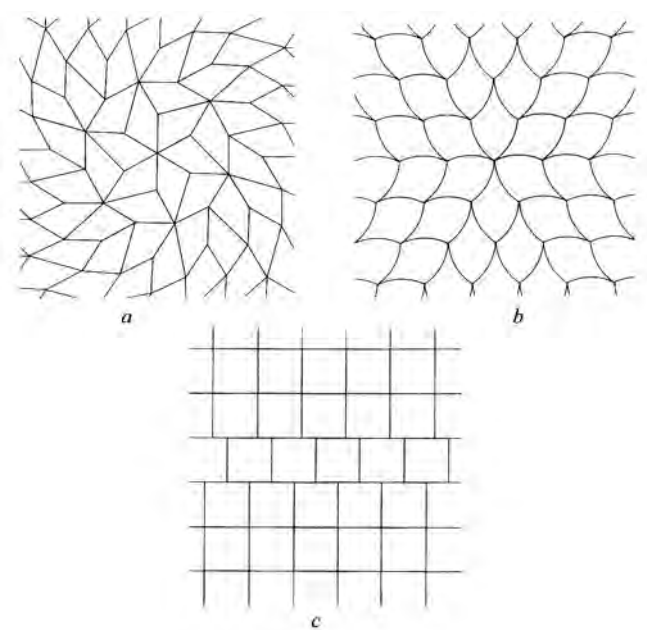
II.10/ Simmetrie di una tassellazione monoedrica.



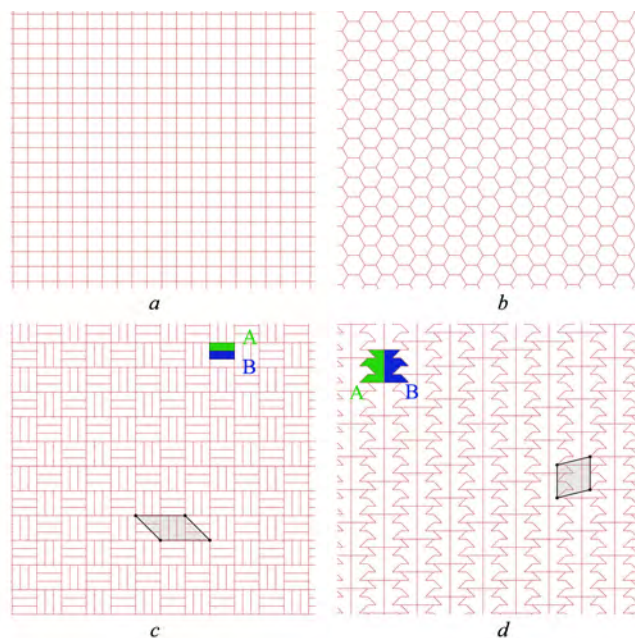
II.11/ Lattice ad unità quadrata con alcuni parallelogrammi di traslazione aventi tutti la medesima area.



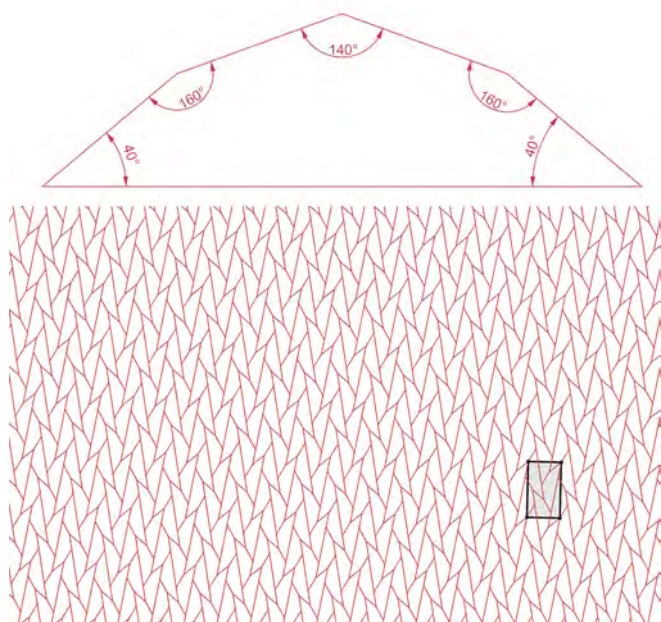
II.12/ Tassellazione periodica diedrica, con evidenziati il lattice ed uno dei possibili parallelogrammi di traslazione. La tassellazione è tratta da un disegno persiano del XVI secolo.



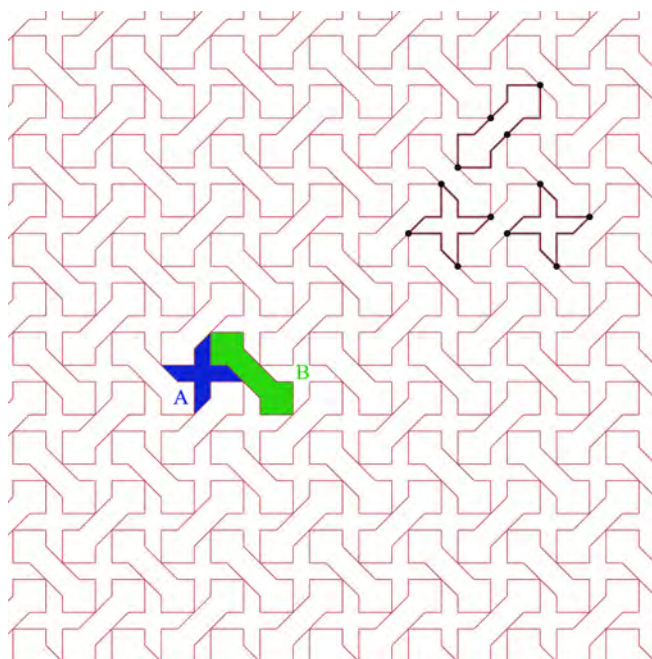
II.13/ Grunbaum e Shephard, esempi di tassellazioni monoedriche ma non periodiche.



II.15/ Esempi di tassellazioni isoedriche (a) e (b), e tassellazioni monoedriche 2-isoedriche (c) e (d).



II.14/ Tassellazione isoedrica derivata da una prototessera con gruppo di simmetria di ordine 2. Si dimostra che non esistono altre tassellazioni monoedriche possibile con questa prototessera.

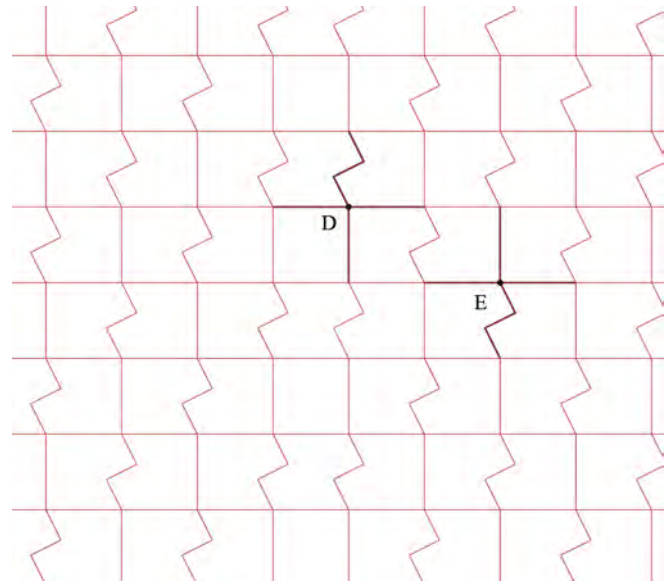


II.16/ Tassellazione diedrica ed isogona disegnata nel XIX secolo dall'artista persiano Mirza Akbar.

Due tessere T_1 e T_2 di una tassellazione T sono dette *equivalenti* se il gruppo di simmetria $S(T)$ contiene un'isometria che trasforma T_1 in T_2 . La classe di tutte le tessere di T equivalenti a T_1 , è chiamata *classe di transitività di T_1* ; in particolare se tutte le tessere di una tassellazione T formano una classe di transitività, allora diremo che T è *isoedrica*. Se T è una tassellazione con k classi di transitività, diremo che T è *k-isoedrica*. Esempi di tassellazione isoedrica e 2-isoedrica sono illustrati in figura (fig.II.15). In particolare nei casi (a) e (b) le tassellazioni sono entrambe monoedriche ed isoedriche; invece nei casi (c) e (d) le tassellazioni sono monoedriche ma non isoedriche. Questo si spiega con il fatto che non esiste alcuna simmetria di T che possa trasformare la tessera A nella tessera B. Infatti, nel caso c si può trasformare la tessera A nella tessera B traslando verso il basso di una unità o semplicemente facendo una riflessione; ma si può facilmente constatare che queste trasformazioni non sono simmetrie dell'intera tassellazione. Analogamente, nel caso d possiamo trasformare A in B per mezzo di una riflessione, ma a questa non corrisponde nessuna simmetria della tassellazione. Brevemente, possiamo dire che una tassellazione isoedrica implica la condizione monoedrica, ma non è vero il contrario.

Riferendo gli stessi concetti ai vertici di una tassellazione, introduciamo due ulteriori definizioni: *monogona* ed *isogona*. Se il gruppo di simmetria $S(T)$ della tassellazione T , contiene le operazioni che trasformano ogni vertice di T in qualsiasi altro vertice, allora diremo che la tassellazione è isogona. Possiamo anche dire che i vertici di una tassellazione isogona formano una classe di transitività. Ad esempio la tassellazione della figura (fig.II.16) è isogona e diedrica (sono indicate le due tessere A e B, e gli spigoli ed i vertici della tassellazione). Analogamente a quanto detto in precedenza, una tassellazione è *k-isogona* se i suoi vertici formano k classi di transitività.

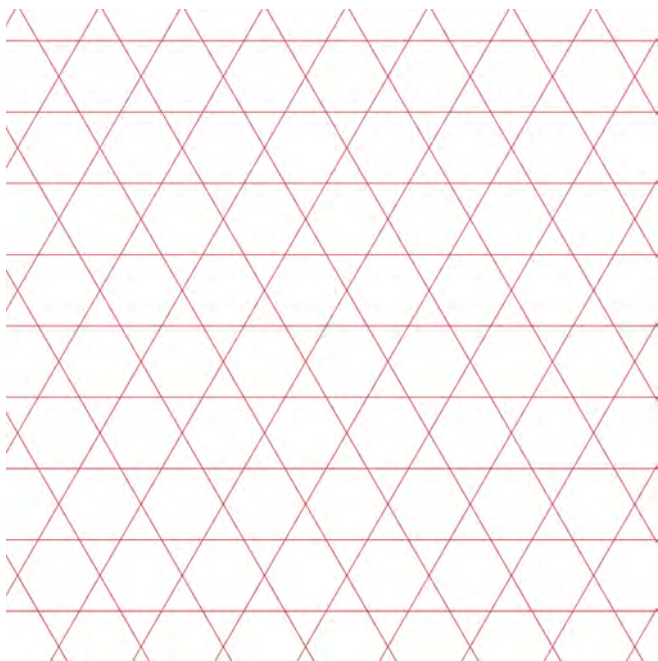
Diremo invece che una tassellazione è *monogona* se ogni suo vertice, con i relativi spigoli in esso incidenti, è congruente con qualsiasi altro vertice della tassellazione. Anche in questo caso una tassellazione isogona è necessariamente monogona ma non è detto il contrario. Nel caso della figura (fig.II.17) notare che le traslazioni ver-



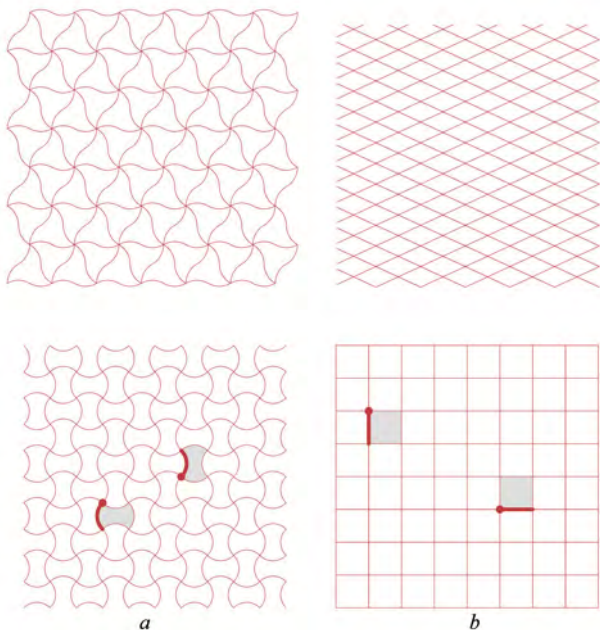
II.17/ Esempio di tassellazione monogona ma non isogona.

ticali sono le uniche simmetrie possibili, quindi il vertice **D** non può essere trasformato mediante un'isometria $S(T)$, nel vertice **E**. La distinzione tra tassellazione monogona ed isogona è dunque analoga a quella che abbiamo visto tra monoedrica ed isoedrica.

Estendendo ancora una volta la definizione di monoedrico ed isoedrico all'ultimo degli elementi che caratterizzano le tassellazioni, e cioè gli spigoli, introduciamo i concetti di *isotoxal* e *monotoxal*. E allora una tassellazione si dice *isotoxal* se ogni suo spigolo è trasformabile in qualsiasi altro spigolo, per mezzo di una simmetria della tassellazione; ossia gli spigoli formano una classe di transitività. Per *monotoxal* si intende che gli spigoli sono congruenti, cioè della stessa lunghezza. La tassellazione della figura (fig.II.18) è sia *monotoxal* che *isotoxal* in quanto gli spigoli sono della stessa lunghezza e formano una classe di transitività con i relativi spigoli. Osservando le tassellazioni della figura (fig.II.19) ci risulta evidente un elevato grado di "regolarità". Ma per dare una definizione più precisa di regolarità, dobbiamo riutilizzare il concetto di transitività, ma in modo più restrittivo. Con il termine *bandiera* di una tassellazione,



II.18/ Esempio di tassellazione monotoxal ed isotoxal.



II.19/ Esempi di tassellazioni isoedriche, isogone ed isotoxal in cui solo la (b) è anche regolare.

chiamiamo una tre parametri (V,E,T) composta da un vertice V , uno spigolo E ed una tessera T , che sono mutuamente incidenti, come evidenziato in figura. E allora diciamo che una tassellazione T è regolare se il suo gruppo di simmetria $S(T)$ è transitivo rispetto la bandiera di T . Osservando ancora la figura, ci accorgiamo che nella tassellazione b le due bandiere evidenziate sono equivalenti per effetto di una simmetria $S(T)$, ed è estendibile a tutte le bandiere della tassellazione. Per la tassellazione a invece, non c'è alcuna simmetria che possa trasformare una bandiera nell'altra evidenziata. Si può dimostrare che le tessere di una tassellazione regolare sono necessariamente poligoni regolari, ma esistono molte tassellazioni di poligoni regolari che invece non sono uniformi. Infatti esistono solo tre tassellazioni regolari.

Le tassellazioni con poligoni regolari

Le tassellazioni per mezzo di poligoni regolari, furono il primo oggetto di studio da parte della ricerca matematica. La loro importanza risiede soprattutto nel fatto che esse costituiscono la base per la costruzione dei motivi nelle decorazioni di tipo sacro. Non va dimenticato inoltre, che esse sono presenti spesso in natura nelle strutture cellulari e in quelle dei cristalli.

Ci occuperemo delle tassellazioni spigolo-spigolo in cui le tessere sono dei poligoni regolari di n -angoli ed n -lati uguali; indicheremo il poligono con il simbolo $\{n\}$.

Iniziamo enunciando il seguente Teorema:

Le uniche tassellazioni spigolo-spigolo, monoedriche sono⁸ (3^6) , (4^4) e (6^3) . Consistono in tassellazioni regolari composte da triangoli equilateri, quadrati ed esagoni.

Per dimostrarlo, consideriamo un piano che deve essere ricoperto con poligoni regolari, senza lasciare spazi e senza avere sovrapposizioni. Se n indica il numero dei lati di ciascun poligono, avremo che gli angoli interni ad ogni vertice del poligono risulteranno:

$$(n-2)180^\circ/n$$

Infatti ogni poligono può essere diviso in un numero di triangoli $n-2$, la cui somma degli angoli interni di ciascuno di essi, misura 180° . Allora, ad ogni vertice della tassellazione, avremo che:

$$360/[(n-2)180/n]=2n/(n-2)=2+4/(n-2)$$

Affinché si abbia un numero intero per $n > 2$, i valori per n possono essere solo 3, 4 oppure 6, che rappresentano proprio il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono. Consideriamo ora un vertice che sia circondato da più di un tipo di poligono. Per quanto detto sopra, attorno ad ogni vertice non ci possono essere meno di tre poligoni (da 6 lati) e non più di 6 poligoni (da 3 lati). Inoltre i tipi di poligono possono essere minori o uguali a 4; infatti, basta considerare che se prendiamo in esame i primi quattro poligoni con gli angoli al vertice più piccoli (il triangolo equilatero con 60° , il quadrato con 90° , il pentagono con 108° ed infine l'esagono con 120°), e li sommiamo, otteniamo un valore di 378° che è maggiore di un angolo giro.

Esaminando caso per caso le possibili configurazioni di poligoni attorno ad un vertice, abbiamo che:

A. Tre poligoni attorno ad ogni vertice

In questo caso $[(n_1-2)/n_1+(n_2-2)/n_2+(n_3-2)/n_3]180^\circ$ deve essere uguale a 360° , che semplificato diventa

$$1/n_1+1/n_2+1/n_3=1/2$$

Quindi le uniche soluzioni che soddisfano tale requisito sono:

- 1) 3.7.42
- 2) 3.8.24
- 3) 3.9.18
- 4) 3.10.15
- 5) 3.12.12
- 6) 4.5.20
- 7) 4.6.12
- 8) 4.8.8
- 9) 5.5.10
- 10) 6.6.6 (questo è il caso della tassellazione con soli esagoni regolari)

B. Quattro poligoni attorno ad ogni vertice

In questo caso abbiamo che:

$$1/n_1+1/n_2+1/n_3+1/n_4=1$$

E quindi le soluzioni che la soddisfano sono:

- 11) 3.3.4.12 ed anche 3.4.3.12
- 12) 3.3.6.6 ed anche 3.6.3.6
- 13) 3.4.4.6 ed anche 3.4.6.4
- 14) 4.4.4.4 (questo è il caso della tassellazione con soli quadrati)

C. Cinque poligoni attorno ad ogni vertice

In questo caso abbiamo che:

$$1/n_1+1/n_2+1/n_3+1/n_4+1/n_5=3/2$$

E quindi le soluzioni che la soddisfano sono:

- 15) 3.3.3.3.6
- 16) 3.3.3.4.4 ed anche 3.3.4.3.4

D. Sei poligoni attorno ad ogni vertice

In questo caso abbiamo che:

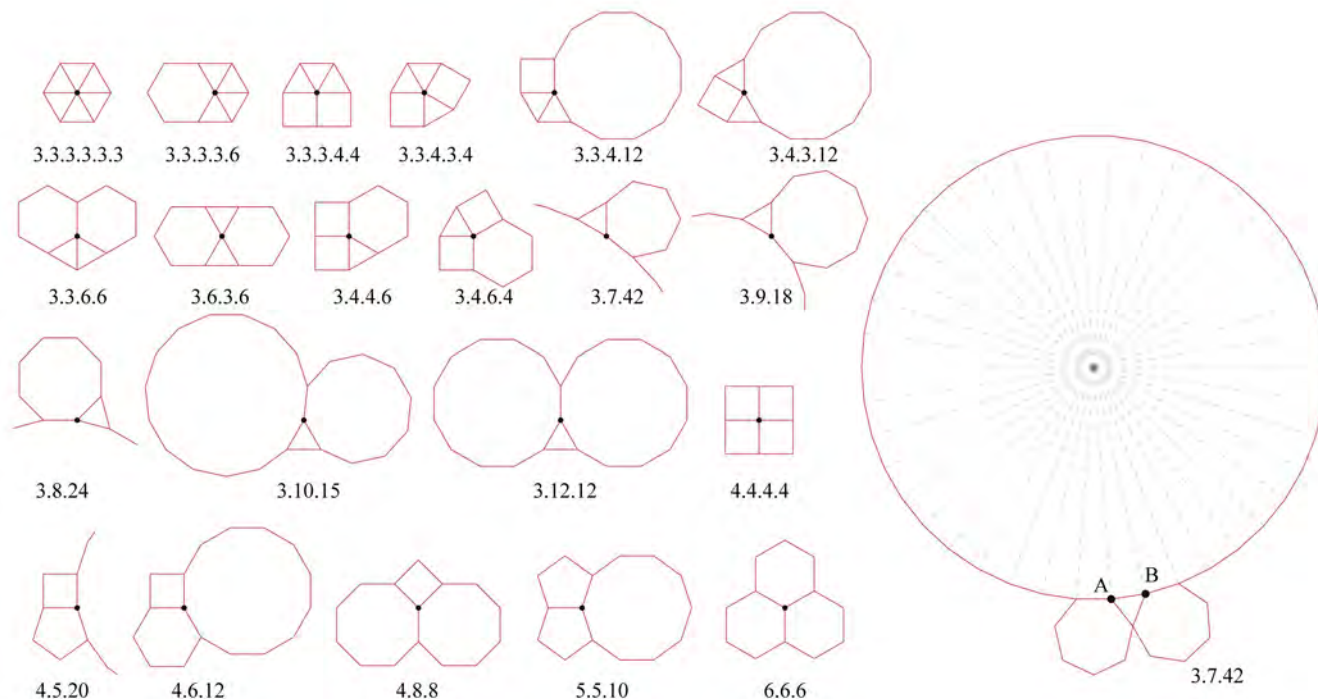
$$1/n_1+1/n_2+1/n_3+1/n_4+1/n_5+1/n_6=2$$

E quindi la soluzione che la soddisfa è:

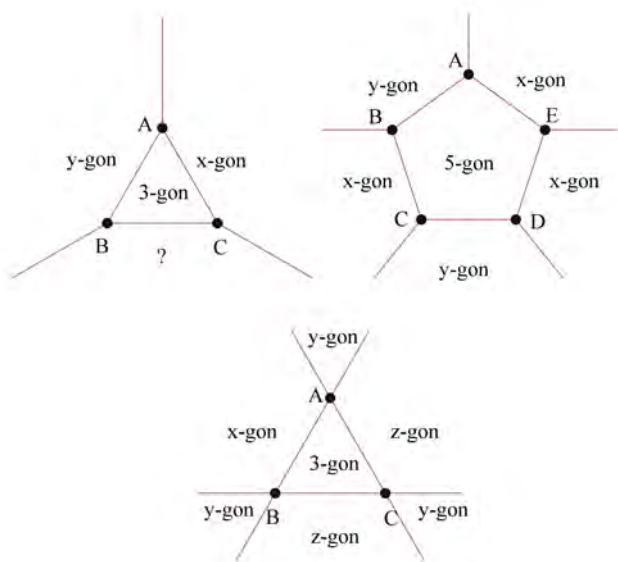
- 17) 3.3.3.3.3.3 (questo è il caso della tassellazione con i soli triangoli equilateri)

Abbiamo quindi visto che per circondare un vertice con dei poligoni regolari, senza avere sovrapposizioni o distacchi abbiamo solo 17 soluzioni possibili. Ognuna di queste soluzioni è chiamata *specie* del vertice. Prendiamo ad esempio la soluzione (12) di specie (3.3.6.6) e (3.6.3.6); entrambe le configurazioni appartengono alla stessa *specie* del vertice, ma in realtà sono diverse. Infatti nella (3.3.6.6) i triangoli sono adiacenti gli uni agli altri, così come gli esagoni. Invece per il tipo (3.6.3.6) i triangoli sono opposti gli uni agli altri, così come gli esagoni. Il parametro che descrive tale proprietà si chiama *tipo* del vertice; in particolare si dice che un vertice è di tipo $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$ se è circondato in senso circolare da poligoni di ordine $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$. Abbiamo visto che per le soluzioni (11), (12), (13) e (16) ci sono due differenti tipi di vertice, quindi le specie possibili di un vertice circondato da una serie di poligoni regolari diventano 21 (*fig. II.20*). Bisogna precisare che non tutte le soluzioni che abbiamo determinate risultano idonee al ricoprimento dell'intero piano. Consideriamo infatti la specie (3.7.42) come in figura. Ebbene, per rispettare tale configurazione, dovremmo avere un triangolo, un eptagono ed un 42-gono attorno ad ogni vertice. Ma se in due vertici **A** e **B** di un triangolo possiamo verificare tale condizione, non è possibile ottenere la stessa verifica per il vertice **C**, in quanto in esso sono già convergenti due eptagoni ed un triangolo; dunque il motivo (3.7.42) non può essere utilizzato per una tassellazione del piano euclideo.

Consideriamo un vertice del tipo $3.x.y$ con $x \leq y$ come mostrato in figura (*fig. II.21*). Nel vertice **A**, abbiamo la

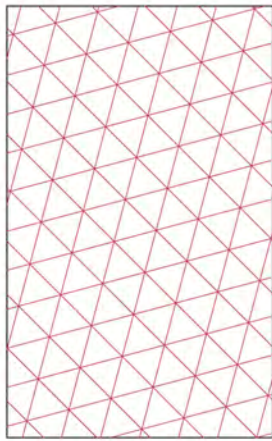


II.20/ Le 21 configurazioni con cui è possibile circondare un punto con una serie di poligoni regolari.

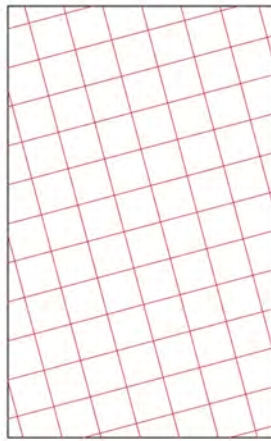


II.21/ Dimostrazione sintetica per selezionare le soluzioni con cui non è possibile ricoprire il piano.

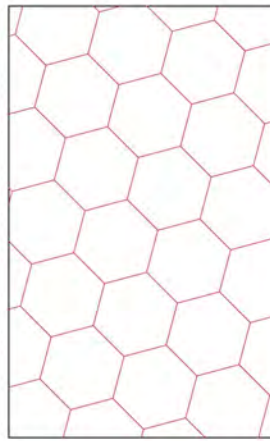
configurazione $3.x.y$; invece nel vertice **B** si incontrano un triangolo e un poligono di y -lati così il poligono indicato con (?) deve avere x lati. Però nel vertice **C** c'è già un triangolo e un poligono di x -lati, quindi il poligono (?) dovrebbe avere y -lati. Ciò vuol dire che non possiamo avere una configurazione della forma $3.x.y$ se $x \neq y$, infatti è possibile solo se $x=y$. E allora possiamo dire che le soluzioni (1),(2),(3),(4) non sono utilizzabili per generare una tassellazione del piano. Con un procedimento analogo analizziamo un vertice del tipo $x.5.y$ con $x \leq 5$; è evidente che il vertice **E** sarebbe costretto ad avere due poligoni adiacenti di x -lati. Allora la configurazione $x.5.y$ è possibile solo se x ed y sono uguali; quindi possiamo scartare i vertici del tipo (6) e (9). Per ultimo consideriamo il caso $3.x.y.z$; con un procedimento analogo a quelli precedenti possiamo dimostrare che è possibile solo se $x=y$. Scartiamo allora i vertici di tipo (11) per entrambi i casi, (12) per entrambi i casi, ed il primo caso della specie (13). In conclusione abbiamo 11 tipi di vertice che possono essere utilizzati nella tassellazione del



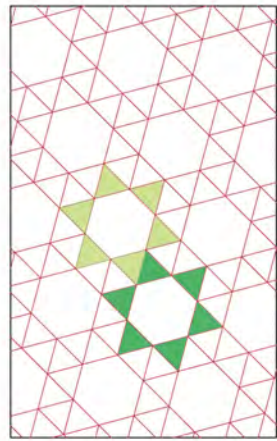
3.3.3.3.3.3



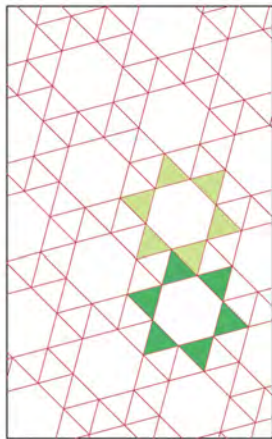
4.4.4.4



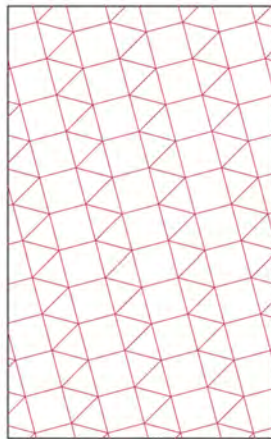
6.6.6



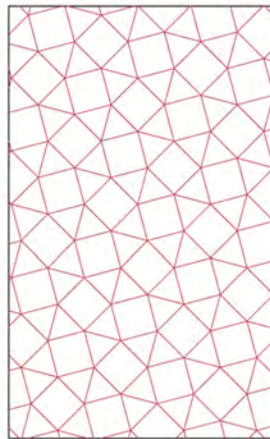
3.3.3.3.6



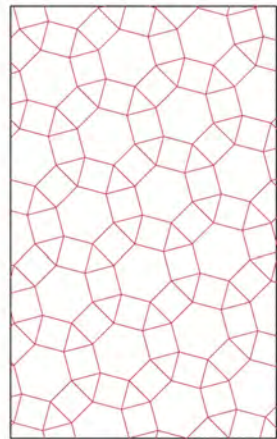
3.3.3.3.6



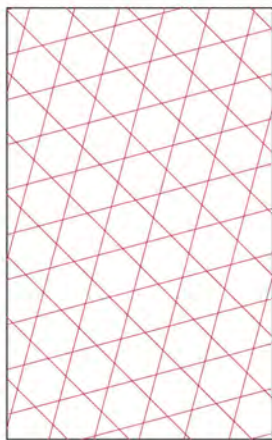
3.3.3.4.4



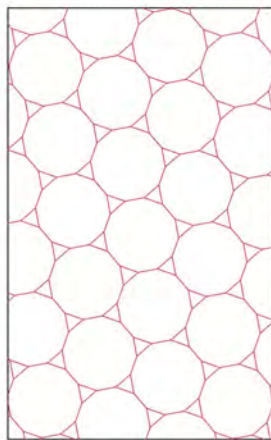
3.3.4.3.4



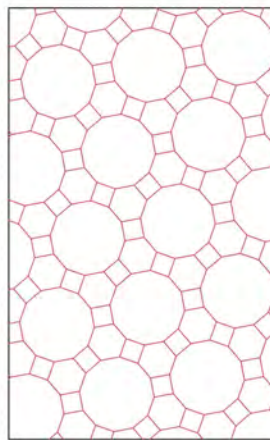
3.4.6.4



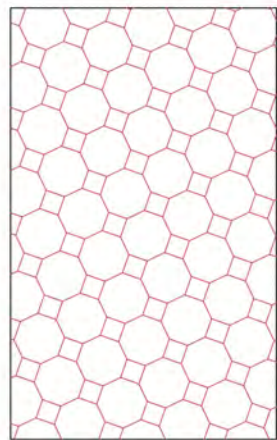
3.6.3.6



3.12.12



4.6.12



4.8.8

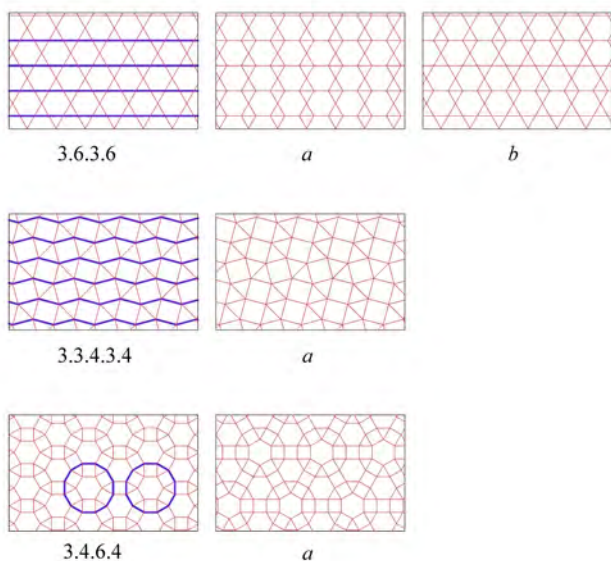
II.22/ Le tassellazioni semiregolari o di Archimede.

piano. Queste prendono il nome di *tassellazioni di Archimede* o tassellazioni semiregolari (fig. II.22).

Una delle caratteristiche più interessanti delle tassellazioni archimedee è il fatto che sono isogone, perciò anche uniformi. Inoltre tutte le tassellazioni semiregolari sono monogone, che significa che nelle immediate vicinanze due altri vertici “sembrano uguali”; invece con il termine *uniforme*, si fa riferimento all’aspetto più forte di isogonalità.

Una considerazione interessante, proposta nel 1887 da Robin, riguarda le tassellazioni spigolo-spigolo che non tengono conto del tipo dei vertici ma solo della loro specie. Consideriamo l’esempio della tassellazione uniforme del tipo (3.6.3.6) (fig. II.23). Noi la possiamo tagliare secondo strisce parallele in modo da poterle far scorrere indipendentemente l’una sull’altra, così da ottenere un’infinità di tassellazioni nelle quali i vertici hanno sempre la stessa specie (3.6.3.6) e (3.3.6.6).

Nella tassellazione uniforme (3.3.4.3.4) sono evidenti



II.23/ Da alcune tassellazioni semiregolari è possibile generare un’infinità di tassellazioni in cui i vertici mantengono sempre la stessa specie.

degli spigoli spezzati, che possono essere utilizzati per riflettere una metà della tassellazione. Anche in questo caso le differenti tassellazioni che si vengono a creare, hanno tutti i vertici della stessa specie (3.3.4.3.4) e (3.3.3.4.4). E ancora nella tassellazione uniforme (3.4.6.4) possiamo individuare dei “dischi” composti da un esagono e i suoi poligoni vicini. Ciascuno di questi dischi può essere ruotato di 30° senza modificare la specie dei vertici.

Le tassellazioni non periodiche di Penrose

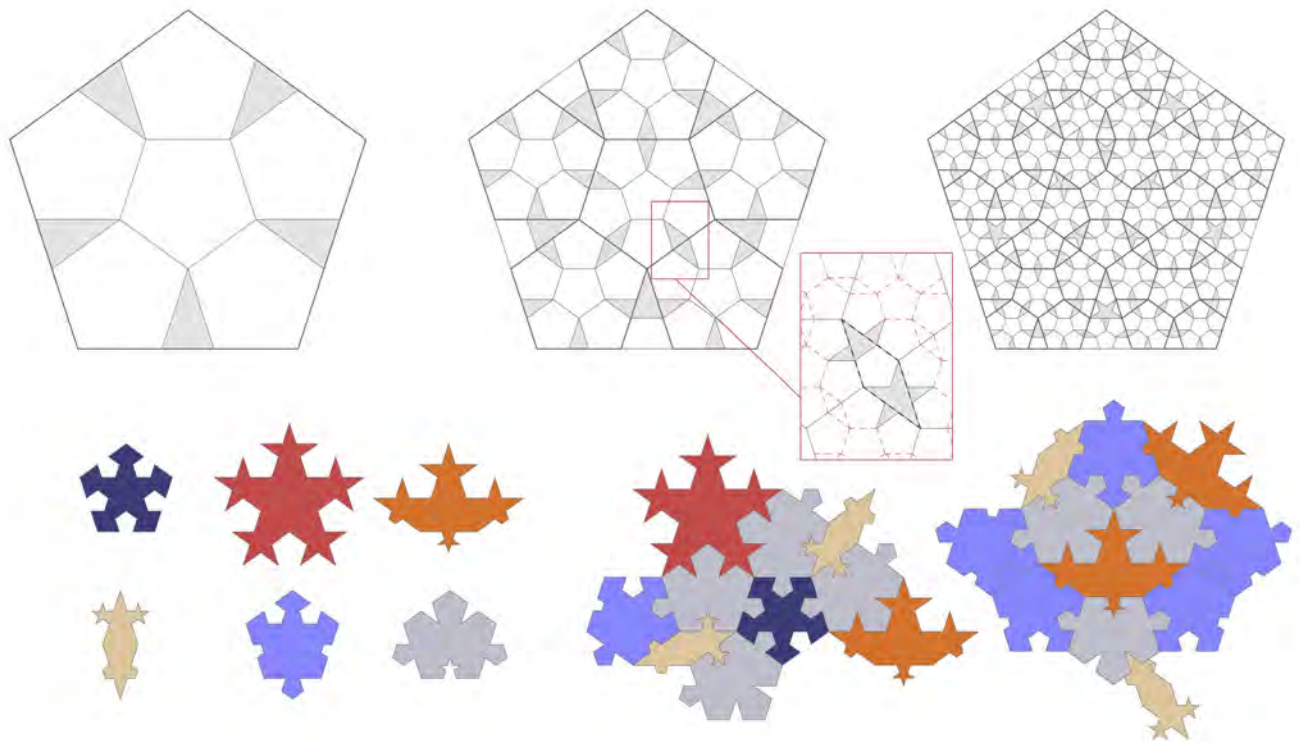
Parlando delle tassellazioni del piano, non possiamo non accennare ad una delle ricerche matematiche più importanti condotte in questo campo: le tassellazioni non periodiche di Roger Penrose⁹. L’importanza scientifica di questa ricerca risiede nel fatto che essa ha messo in crisi uno dei principi basilari su cui si fondava la cristallografia: se un materiale omogeneo è nello stato cristallino, esso non può avere una simmetria icosaedrica, cioè di tipo pentagonale. La trattazione sul piano teorico dell’esistenza di tassellazioni non “ammesse” dalla cristallografia, si sviluppò a partire dagli anni ’60 da Hao Wang, nel 1971 da Raphael Robinson ed infine, intorno al 1979, da Roger Penrose. La cosa più sorprendente è il fatto che queste ricerche puramente teoriche, nate quasi come un gioco di logica matematica, hanno trovato conferme nella realtà grazie ad alcune osservazioni effettuate nel 1984 da Schechtman, Blech, Gratias e Cahn, e pubblicate sulla rivista *Physical Review Letters*¹⁰. In queste osservazioni un materiale metallico omogeneo, attraversato da un fascio di raggi X, ha prodotto macchie di diffrazione distribuite, in alcune zone, secondo una simmetria pentagonale. Una struttura che fino ad allora era ritenuta impossibile. Il nome *quasi-crystal*, fa riferimento proprio all’aspetto di “impossibilità” di esistenza di questi cristalli. Ebbene, Penrose scoprì alcune tessere che avevano la proprietà di avere simmetrie pentagonali e che non ricoprivano in modo periodico il piano. Lo stesso Penrose commenta con queste parole la sua ricerca “è forse notevole che una tale area della matematica apparentemente banale, simile in apparenza ad un gioco per bambini (come quello di ricoprire il piano con forme con-

gruenti) faccia parte in realtà della matematica non ricorsiva. Di fatto in quest'area ci sono molti problemi difficili ed insoluti. Non si sa, per esempio, se esista un sistema aperiodico formato da una singola tessera”.

Ricordiamo che una tassellazione è periodica se è possibile individuare un parallelogramma, che, ripetuto lungo le direzioni dei suoi lati, riproduce il motivo della tassellazione. Un esempio di tassellazione non periodica è quello presentato nella figura (fig. II.7), la cui tessera è definita *versatile* perché è in grado di generare sia ricoprimenti periodici che non periodici. La domanda che i matematici si posero a partire dagli anni '60 è se esistono singole tessere, o insiemi di tessere, che tassellano il piano solo in modo aperiodico. Come detto, attualmente non si conoscono tessere singole che ricoprono il piano solamente in modo aperiodico, ma uno degli insiemi più interessanti, composto da sole due tessere, fu proprio quello scoperto da Penrose nel 1979¹¹.

La ricerca del fisico e matematico inglese, ebbe inizio

con alcune osservazioni fatte sul pentagono regolare. Questo poligono può essere suddiviso in sei pentagoni più piccoli, lasciando dei vuoti triangolari (fig. II.24). Proseguendo questo tipo di divisione al secondo livello, tra i pentagoni appaiono degli spazi vuoti a forma di *diamante* (cioè a forma di rombo). Ad un terzo livello di divisione ai diamanti crescono delle punte (*spikes*). All'interno della forma così ottenuta è possibile individuare un pentagono, una *barchetta* ed una *stella*, che la suddividono ulteriormente. Al quarto livello di suddivisione anche alla barchetta e alla stella continuano a crescere delle punte, ma nella composizione non vengono introdotte nuove figure. Quindi con le tessere a forma di barchetta, diamante, stella e pentagono, e reiterando il processo di suddivisione, è possibile creare un ricoprimento del piano. Le stesse figure però, possono generare dei ricoprimenti “non corretti”, che sono evitabili utilizzando delle opportune regole d'incastro. Si vengono a creare quindi, delle vere e proprie *tessere puzzle*,



II.24/ Suddivisione del pentagono per la generazione delle tessere-puzzle di Penrose.

che generano soltanto tassellazioni non periodiche, quindi senza parallelogramma periodico.

Attraverso una serie di aggiustamenti e di tagli, Penrose riuscì a ridurre il numero di tessere, che da sei arrivarono a due: i *kites* (aquiloni) e i *darts* (dardi) (fig. II.25). Queste due tessere sono individuabili all'interno di un pentagono regolare e possiedono una regola d'incastro (possono essere congiunti solo gli angoli contraddistinti da un piccolo arco) che evita di creare parallelogrammi periodici durante la tassellazione. Consideriamo ora un aquilone k ed il suo simmetrico rispetto ad uno dei suoi lati maggiori; se aggiungiamo un dardo d otteniamo un aquilone K più grande di quello iniziale; quindi possiamo scrivere che:

$$K=2k+1d$$

Se invece consideriamo un dardo d ed il suo simmetrico rispetto ad un asse parallelo al lato maggiore, ne prendiamo due metà, ed aggiungiamo un aquilone k , si veri-

fica che:

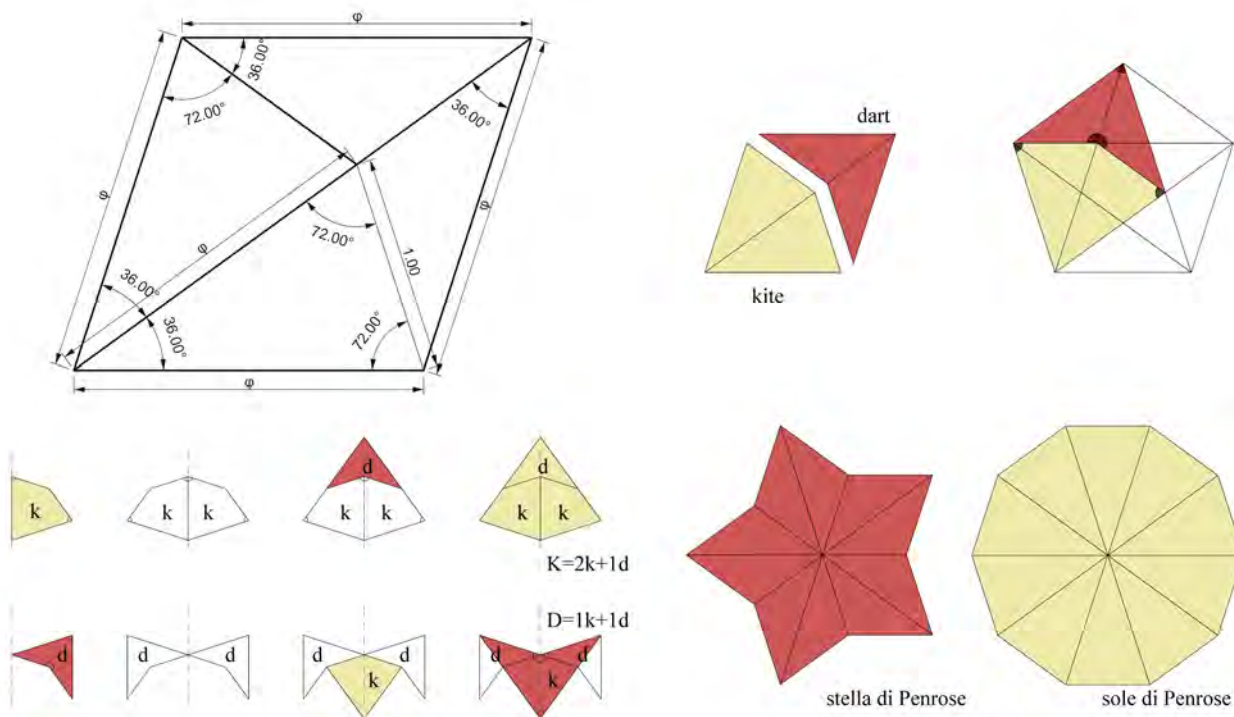
$$D=1k+1d$$

Questa relazione che si instaura tra le tessere (è possibile rintracciarla in molte zone del ricoprimento del piano), si chiama *proprietà di gonfiamento* e può essere utilizzata per dimostrare la non periodicità della tassellazione (fig. II.26). Infatti, se prendiamo una regione molto ampia, in cui il processo di gonfiamento si è ripetuto molte volte, e chiamiamo con $x=k/d$ il rapporto tra le tessere, avremo che:

$$x = \left(\frac{1 + 2x}{1 + x} \right)$$

Ciò vuole dire che la relazione precedente, per aree infinitamente estese, tende a:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$



II.25/ Le tessere chiamate kites (aquiloni) e darts (dardi) scoperte da Penrose, con cui è possibile generare solamente tassellazioni non periodiche.

e cioè la proporzione aurea. In altre parole la densità relativa di aquiloni e dardi è di tipo irrazionale, cosa impossibile nel caso in cui il ricoprimento sia di tipo periodico.

Note

1. B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W.H. Freeman and Company, New York, 1987

2. È possibile scindere queste caratteristiche in due condizioni separate. E allora diremo che una distribuzione di figure senza sovrapposizioni si chiama *impacchettamento*, ed invece una distribuzione di figure senza distacchi si definisce *ricoprimento*.

3. Ciò non vuol dire che tali tessere non vengano utilizzate in particolari tipi di tassellazioni.

4. I. Hargittai, *Symmetry: Unifying Human Understanding*, Pergamon Press, Oxford 1986.

5. M. Emmer, *Simmetria*, in M. Emmer, a cura di, *L'occhio di Horus. Itinerari nell'immaginario matematico*, Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani S.p.a., 1989.

6. H.S.M. Coxeter, *Introduction to geometry*, John Wiley & Sons Inc, New York 1969.

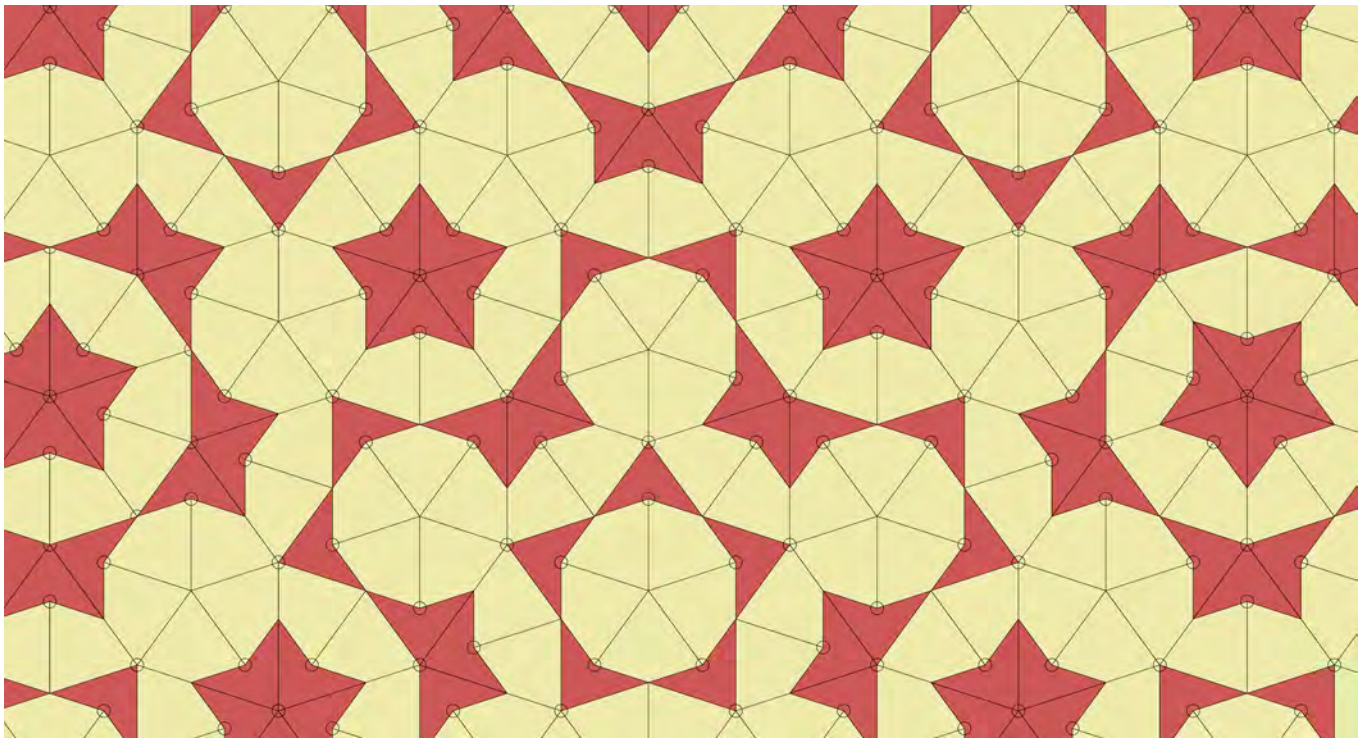
7. In altre parole, l'angolo tra due rette di riflessione qualsiasi, è costante.

8. La dicitura (3^6) , indica che la tessera è composta da un poligono di 3 lati e che in ogni vertice se ne incontrano 6.

9. R. Penrose, *La mente nuova dell'imperatore*, Biblioteca Universale Rizzoli, Milano, 1997.

10. D. Schechtman, I. Blech, O. Gratias, J.W. Cahn, *Metallic Phase with Long Range Orientational Order and no Translational Symmetry*, Physical Review Letters, Vol. 53, 1984.

11. R. Penrose, *Pentaplexity. Una famiglia di ricoprimenti non-periodici del piano*, in M. Emmer, a cura di, *L'occhio di Horus. Itinerari nell'immaginario matematico*, a cura di M. Emmer, Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani S.p.A., 1989.



II.26/ In virtù della proprietà di gonfiamento delle tessere, la densità relativa tra kites e darts in una tassellazione di Penrose, è di tipo irrazionale.

La tassellazione delle geometrie non euclidee

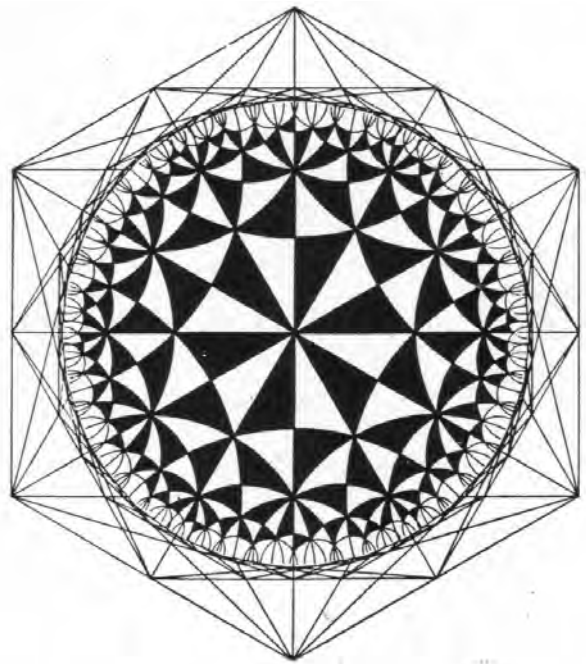
L'opera artistica di M.C. Escher e la matematica

«Dall'analisi degli enigmi che ci circondano e dalle considerazioni e dalle osservazioni che ho fatto, sono arrivato nel campo della matematica. Sebbene sia completamente digiuno di conoscenze e di esperienze nel campo delle scienze esatte, mi rendo spesso conto di avere più in comune con i matematici che con gli altri artisti».

Escher (la frase è tratta dall'introduzione del suo libro *The Graphic Work of M. C. Escher*, del 1961) è stata una figura importante per la sua capacità di coniugare insieme discipline apparentemente distanti tra loro, come la matematica, l'arte (intesa qui con l'accezione di pittura e scultura) la cristallografia, la fisica e la geometria. Nonostante la sua non profonda conoscenza per la matematica egli riuscì a rintracciare nelle leggi che la governano, un inaspettato valore estetico visibile in tutte le sue opere. Questa sensibilità e passione verso la matematica lo spinsero ad avere un continuo contatto con i grandi matematici della seconda metà del '900. Due in particolare: Roger Penrose e H.S.M.Coxeter. Del primo abbiamo già avuto modo di parlare a proposito dei suoi studi sulle tassellazioni non ricorsive del piano, ma non vanno dimenticati alcuni suoi contributi alla produzione artistica di Escher, attraverso l'ideazione e formulazione dei cosiddetti oggetti impossibili. Molto più profondo e produttivo invece, il rapporto epistolare che ha legato per molti anni l'artista olandese con quello che da molti è definito il più grande studioso di geometria del secolo, H.S.M. Coxeter (scomparso nel 2003).

Il primo incontro tra i due avvenne nel 1954 durante l'International Congress of Mathematicians tenutosi ad Am-

sterdam, ma Coxeter già conosceva i lavori di tassellazione di Escher. La cosa che più lo colpiva era la forma che l'artista riusciva a dare alle unità fondamentali (per esempio un pesce, un rettile, un uccello) a cui applicava non solo la traslazione, ma anche le altre trasformazioni isometriche: rotazione, riflessione e glisso riflessione¹. Il risultato era sempre una tassellazione corretta, in cui non esistevano sovrapposizioni e non venivano lasciati interstizi.



III.1/ H. S. M. Coxeter, tassellazione regolare del piano iperbolico con gruppo di simmetria $(6,4,2)$, in cui è visibile l'intelaiatura utilizzata per la costruzione, 1957.

“Potrò mai ringraziarla per avermi mandato [...] A Symposium on Symmetry? Sono stato così contento di questo libretto e così orgoglioso delle due riproduzioni dei miei patterns piani! Benché il testo del suo articolo su Crystal Symmetry and its Generalizations sia troppo erudito per un uomo semplice ed autodidatta come sono io per i patterns piani, alcune illustrazioni del testo, ed in particolare la figura 7 a pagina 11 (fig. III.1), mi hanno profondamente colpito. Da molto tempo sono interessato ai patterns con ‘motivi’ che diventano sempre più piccoli fino a raggiungere il limite della piccolezza infinita. La questione è relativamente semplice se il limite è un punto al centro di un pattern. Anche una linea limite non è un’idea nuova per me, ma non sono mai stato capace di creare un pattern in cui ogni macchia diventa gradualmente più piccola a partire da un centro verso il cerchio-limite esterno, come mostra la sua figura. Ho provato a scoprire come questa figura sia stata geometricamente costruita, ma sono riuscito soltanto a trovare i centri e i raggi dei cerchi interni più grandi. Se mi potesse fornire una spiegazione su come costruire i

cerchi i cui centri si avvicinano gradualmente dall’esterno sino a raggiungere il limite, sarei immensamente contento e le sarei eternamente grato! Esistono altri metodi oltre a questo per arrivare ad un cerchio limite? Tuttavia ho usato il suo modello per una grande xilografia (di cui ho realizzato solo un settore di 120° in legno, che è stato poi stampato 3 volte). Gliene mando una copia [...]”.

Si riferiva alla sua opera Circle Limit I (fig. III.2) di cui scrisse anche “Le figure animali più grandi sono poste al centro e il limite degli infinitamente tanti e degli infinitamente piccoli viene raggiunto sul bordo circolare. Lo schema della configurazione, a prescindere dalle tre rette che passano per il centro, consiste semplicemente di archi con raggi che diventano sempre più corti via via che si avvicinano al bordo limite. Inoltre, tutti gli archi intersecano la circonferenza limite secondo angoli retti. Questa incisione Circle Limit I, essendo un primo tentativo (è del 1958) evidenzia ogni sorta di difetti. Non solo la forma dei pesci, sviluppata rigidamente a partire da astrazioni rettilinee in animali rudimentali, ma anche la



III.2/ M. C. Escher, Circle Limit I, 1958.



III.3/ M. C. Escher, Circle Limit III, incisione su legno, 1959.

disposizione e la loro rispettiva posizione, lasciano molto a desiderare [...] Non vi è continuità, né fluidità di movimento, né unità di colore in ogni fila”.

La risposta di Coxeter spiegò che la figura a cui si riferiva era uno dei tanti modi di tassellare lo spazio iperbolico mediante triangoli bianchi e neri, ognuno avente angoli di ampiezza

$\pi/p, \pi/q, \pi/r$

ai tre vertici (π sta per 180°). Un vertice è circondato da p triangoli neri e p triangoli bianchi, un altro da q e q , il terzo da r e r . È interessante sottolineare quello che Coxeter scrive ad un certo punto nel suo articolo dal titolo *La simmetria non euclidea in Circle Limit III* (fig. III.3) di M.C.Escher “In effetti Escher ha anticipato di cinque anni la mia scoperta”. Per poter capire approfonditamente il contributo che Escher ha fornito alla ricerca geometrica e matematica di Coxeter, e definire la questione della tassellazione nel caso del piano non euclideo, dobbiamo parlare delle geometrie non euclidee non senza aver inquadrato la figura dell’artista olandese.

La divisione del piano nei lavori di M.C.Escher

Il soggetto che più interessò Escher (come disse lui stesso), fu la divisione del piano cioè la tassellazione. “Non so immaginare che cosa sarebbe stata la mia vita senza questo problema. Mi ci imbattei molto tempo fa, durante le mie peregrinazioni; vidi un alto muro e, come per la premonizione di un enigma, di qualcosa che esso potesse nascondere, lo scalai con qualche difficoltà. Dall’altro lato, però, mi ritrovai in una giungla: dopo essermi aperta la via con grande sforzo giunsi alla porta aperta della matematica, da cui si dipartivano cammini in ogni direzione. A volte penso di averli percorsi tutti, ammirandone le vedute; e poi improvvisamente scopro un nuovo cammino, e sperimento una nuova delizia”². Nel 1957 fu incaricato di scrivere un saggio sulla divisione regolare di un piano, dalla casa editrice De Roos Foundation. Escher aveva già trattato il tema della tassellazione durante i suoi viaggi e soprattutto durante una visita all’Alhambra di Granada, dove era raccolto un vasto repertorio di figure geometriche che ricoprivano il piano. Infatti, gli artisti arabi non poterono usare altro



III.4/ Tassellazione di Koloman Moser.

che motivi geometrici astratti a causa della proibizione religiosa di rappresentare figure viventi. In realtà, sembra che tale divieto non fosse esplicito nel Corano e derivi invece da una tradizione islamica. Inoltre l’interesse della divisione del piano sembra più antico e risalire ai tempi degli antichi egizi come testimoniato dagli affreschi rinvenuti nelle Tombe della Valle dei Re. Il primo che però si svincolò dalla restrizione delle figure geometriche, fu l’artista viennese Koloman Moser (fig. III.4) (1869-1918), che nella sua attività nel campo delle arti applicate (fu anche uno dei fondatori della Secessione viennese) propose una rilettura del tema, attraverso l’uso di figure animate. Le varie possibilità con cui è possibile ricoprire il piano e lo spazio è stato oggetto di studio della cristallografia per raggiungere l’obiettivo di capire in quanti diversi modi il piano e lo spazio potevano essere ricoperti dalla stessa figura senza lasciare vuoti e ammettere sovrapposizioni. In particolare il più importante contributo fu offerto dalla ricerca di tre cristallografi: Fedorov, Schoenflies e Barlow nel 1891 basandosi sulla teoria dei gruppi elaborata nel 1832 dal giovane matematico Evariste Galois (1811-1832)³.

che chiamiamo spazio è colmabile con forme uguali, o divisibile in elementi primordiali, non a piacere, ma solo partendo da determinate forme. Sembra che sia lo spazio stesso ad essere soggetto ad una legge che controlla e governa la sua struttura.

L'articolo prosegue con un accostamento tra la tassellazione intesa come ricerca di riempimento di *spazi vuoti* con uno dei testi di filosofia più importanti della cultura occidentale, *Della Natura* di Parmenide⁵ di Elea. Si fa riferimento al passo in cui Parmenide scrive: "... *l'essere all'essere accosto*", frase di difficile interpretazione e quindi oggetto di studio di numerosi filosofi. Parmenide si interessa dell'essere, cioè di cosa sia il mondo e di come esso sia. La percezione sensoriale ci dà un'idea della risposta, dicendoci che esso è un'alternanza di corpi e di vuoti dove il movimento ne è la prova più evidente. Ma secondo Parmenide i sensi non possono rivelarci la verità; essa è raggiungibile solo attraverso la ragione secondo un cammino fatto di deduzioni. È evidente nel suo pensiero l'influenza della scuola pitagorica che distingueva tra realtà rilevata dall'apparenza e rilevata dalla ragione. Pitagora era convinto che ogni grandezza potesse essere espressa in forma numerica come rapporto tra numeri, considerati l'*archè* di tutte le cose. Ma lo stesso Pitagora nel tentativo di trovare il rapporto numerico che lega il lato con la diagonale del quadrato, si rese conto della contraddizione con il suo stesso pensiero: non esiste alcun rapporto tra numeri interi che possa esprimere la relazione che lega il lato di un quadrato con la sua diagonale⁶. La scoperta dei numeri irrazionali, non doveva circolare al di fuori della scuola dei pitagorici, per non far crollare la certezza della corrispondenza tra il mondo della ragione e quello dei sensi. Proprio dalla considerazione che questi mondi non necessariamente debbano coincidere che Parmenide rivide la questione, secondo un ragionamento così riproposto da Karl Popper⁷:

- i. *Se il non essere non è, ciò comporta che*
- ii. *il nulla non può esistere. Se il nulla non esiste, ciò comporta che*
- iii. *il vuoto non esiste. Se il vuoto non esiste, ciò comporta che*
- iv. *il mondo è pieno. Se il mondo è pieno, ciò comporta che*

v. *non vi è spazio per il movimento e per il mutamento (considerato una forma di movimento). La conclusione è che*

vi. *il movimento e il mutamento sono impossibili.*

Quella di Parmenide è considerata in ambito filosofico una vera e propria rivoluzione copernicana: i nostri sensi ci danno una visione del mondo ingannevole; il mondo è uno spazio pieno, immobile e senza tempo. La frase "... *l'essere all'essere accosto*" si legge quindi come il mondo non ha spazi vuoti. Ma questa ricerca continua di riempire il piano o lo spazio è esattamente la stessa indagine che Escher porta avanti con le sue incisioni. Parmenide ed Escher sono quindi accomunati da una comune ricerca dei rapporti tra mondo apparente e mondo *a priori*, condotta però con strumenti differenti: la ragione per il primo e la geometria per il secondo. La scuola di Elea continuò la sua attività alla continua ricerca di ulteriori contraddizioni tra i due mondi. Il più famoso fu il paradosso di Zenone, discepolo di Parmenide, della freccia e dell'arco⁸ che cercava di dimostrare l'illusorietà del movimento. Per dare una risposta a paradossi come questo appena citato, altri filosofi della tradizione eleatica, proposero il concetto di *atomo*⁹ (*atomo* dal greco *ατομιοσ* che vuole dire taglio, divisione, con l'aggiunta però della a- privativa) come elemento indivisibile. Il mondo quindi è uno spazio pieno, composto di atomi disposti in modo limitato, ed è esattamente come viene rappresentato nelle opere di Escher. In più l'artista olandese suggerisce nei capolavori *Metamorfosi* un mondo pieno (quindi parmenideo), senza vuoti ma in continua mutazione. Il tempo è rappresentato come ulteriore coordinata spaziale; lo spazio a tre dimensioni ne conquista una nuova esattamente come proposto dalla teoria della relatività di Einstein dove lo spazio-tempo sono un *continuum* (di questo avremo modo di parlare più avanti quando affronteremo lo studio del modello dello spazio-tempo proposto da Minkowski). Lo spazio è composto da atomi quadridimensionali che lo tassellano completamente: un corpo non si muove nello spazio ma rappresenta una traiettoria nella struttura spazio-tempo, come se ogni istante fosse già presente. In questo senso anche Einstein può considerarsi parmenideo. E fu lui stesso a confermarlo

durante un colloquio con Karl Popper con il quale condivise la seguente affermazione “*che il mondo fosse un universo chiuso a quattro dimensioni, nel quale il cambiamento era un’illusione umana, o qualcosa di molto simile*”¹⁰.

Le radici di un’opera artistica come *Circle Limit* affondano nella filosofia, nell’arte, nella cristallografia, nella matematica e nella fisica e trovano un filo conduttore proprio nella geometria, in particolare quella non euclidea della quale ci proponiamo di rintracciare, storicamente e analiticamente, i caratteri essenziali.

Le geometrie non euclidee

La scoperta delle geometrie non euclidee, che cominciarono a delinearsi agli inizi del XIX secolo, ha avuto un’importanza notevole nello sviluppo di concezioni e teorie di numerose discipline, a partire come è ovvio, dalla matematica e dalla geometria per arrivare ad avere ricadute considerevoli nella filosofia, nella fisica e più in generale nel pensiero scientifico. Per poterne definire i caratteri, occorre capire le origini della teoria euclidea a cui esse si riferivano, mettendone in discussione alcuni principi fondativi. È interessante notare come il pensiero del matematico Roger Penrose¹¹, riconduca la geometria euclidea ad una teoria fisica di cui essa rappresenta una delle poche ad avere la qualifica di *superba*. Con questo termine Penrose definisce quelle teorie che descrivono un fenomeno non solo con una notevolissima precisione, ma anche quelle che possono essere trattate da un linguaggio matematico preciso e dettagliato. Va da sé che non può esistere nessuna teoria in una scienza, che non sia la fisica, che possa rientrare in questa categoria¹². La prima delle teorie *superbe* che Penrose riconosce, è proprio la geometria euclidea in quanto la più antica. Ma perché viene considerata teoria appartenente alla fisica e non come branca della matematica? La risposta risiede nel fatto (alquanto ironico) che oggi sappiamo che la geometria euclidea non “*è del tutto esatta come descrizione dello spazio fisico in cui viviamo*”. La relatività generale di Einstein ci dice che lo spazio-tempo in presenza di un campo gravitazionale è in realtà curvo quindi non esattamente euclideo. Ma questo fatto non impedisce di

considerare superba la geometria euclidea in quanto “*alla scala quotidiana dell’ordine del metro, le deviazioni derivanti dal trattare la geometria come euclidea ammontano a meno del diametro di un atomo di idrogeno!*”. È proprio il fatto di descrivere così bene il nostro mondo alla scala in cui lo viviamo, che ha indotto i nostri predecessori a credere che noi “*abbiamo una comprensione intuitiva a priori innata del fatto che la geometria di Euclide deve applicarsi al mondo in cui viviamo*”¹³. Solo con la relatività generale di Einstein si ebbe la rottura definitiva con la geometria euclidea nata molto tempo prima. “*Il fatto che la geometria euclidea si applichi così esattamente alla struttura del nostro spazio fisico, lungi dall’essere una necessità logica, è un fatto empirico d’osservazione!*”. Ecco dunque il perché la geometria euclidea può essere considerata a tutti gli effetti, fin dalla sua origine, una teoria fisica oltre “*che una parte elegante e logica della matematica pura*”. Rimandiamo per ora la questione della validità o meno di una geometria, questione alla quale Penrose faceva riferimento soprattutto da un punto di vista fisico.

La base sulla quale erano fondati *Gli elementi*¹⁴ di Euclide, era il metodo ipotetico-deduttivo che nasceva dalle proprietà evidenti dello spazio chiamate *concetti primitivi* e dalle proposizioni primitive dette *assiomi*. Gli assiomi erano divisi in due gruppi, i *postulati*, che erano proprietà chiare degli oggetti della teoria e le *nozioni comuni* che avevano un valenza più generale. Questo insieme di concetti non ha bisogno di dimostrazione e vengono accettati così come sono. Da qui vengono introdotti le nuove proposizioni della teoria, che prendono il nome di *teoremi* rese legittime dalle *dimostrazioni* nelle quali si assumono come ipotesi solo assiomi o proposizioni già dimostrate.

Nel trattato di tredici libri *Gli elementi* (scritti intorno al 300 a.C.), Euclide raccoglie e organizza tutti i risultati raggiunti fino a quel tempo dalla matematica, intesa nel senso più ampio del significato, comprendente, cioè, l’algebra, la geometria e l’aritmetica. Il contributo più grande ed innovativo, che consentì al testo di rimanere il punto di riferimento per la disciplina per molti secoli, consiste non solo in un contenuto più ricco, comprendente anche apporti originali di Euclide, ma principal-

mente¹⁵ in un ordinamento del materiale che soddisfaceva all'ideale di rigore matematico e di dimostrazione logica che si era sempre più imposto in questa disciplina e che era stato ribadito dallo stesso Platone. Le proposizioni primitive vengono divise in tre gruppi, all'inizio del primo libro, ed assumono la definizione di *termini*, *postulati* e *assiomi* (o *nozioni comuni*). I *termini* hanno la funzione di definire e di spiegare i concetti geometrici che saranno usati in seguito:

X. *Quando una retta innalzata su un'altra retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata.*

XI. *Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.*

XXIII. *Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non s'incontrano fra loro da nessuna delle due parti.*

I *postulati* sono proposizioni presentate come "richieste" che debbono essere accolte per la loro evidenza intuitiva e sulle quali poi si fonderanno tutte le dimostrazioni:

I. *Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.*

II. *E che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta.*

III. *E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza.*

IV. *E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.*

V. *E che se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.*

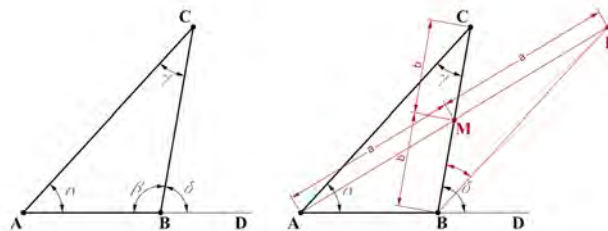
Gli *assiomi* infine, sono dei principi comuni a tutte le scienze (ecco perché furono chiamati anche *nozioni comuni*) e riguardano le proprietà generali dell'eguaglianza e della diseguaglianza, come per esempio "le cose eguali ad una stessa cosa sono anche eguali tra loro", "i doppi di una stessa cosa sono eguali tra loro", "il tutto è maggiore della parte".

La prima considerazione che possiamo fare, è l'aspetto costruttivo dei postulati, comune ai primi quattro. Inol-

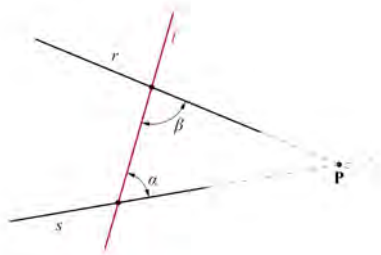
tre, rientrando nella cosiddetta fase dell'assiomatizzazione della teoria matematica, dovrebbe essere presente una spiccata forma di intuibilità e di evidenza che sembra sfuggire al quinto postulato per il carattere di infinito che esso comprende. Per la sua natura poco intuitiva il quinto postulato è stato oggetto di numerose critiche e soprattutto tentativi di dimostrabilità. Anche lo stesso Euclide sembra rendersene conto, tanto che lo propone molto in là nel testo, in particolare non prima della Proposizione 29. Poiché, quindi, le prime 28 proposizioni sono dimostrabili senza l'intervento del quinto postulato, esse vanno a definire quella che viene chiamata *geometria assoluta*, il cui concetto riprenderemo più avanti parlando delle geometrie non euclidee. A questo punto, senza entrare troppo nel merito delle dimostrazioni dei teoremi e rischiare quindi di perdere di vista l'obiettivo, è interessante seguire il percorso logico proposto da Dario Palladino per cercare di fare luce sulle anomalie del quinto postulato, che rappresenta il fulcro fondamentale per capire lo sviluppo delle nuove geometrie non euclidee.

Consideriamo la Proposizione 16 (fig. III.6) in cui si dimostra che *In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti* da cui segue la dimostrazione della Proposizione 17 *in ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti*.

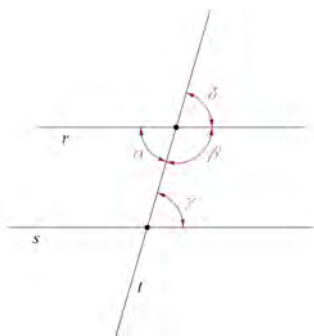
È sorprendente notare che questa proposizione può essere riletta in questo modo: *se due rette tagliate da una terza sono incidenti in un punto, allora la somma degli angoli che formano con tale retta dalla parte del punto d'intersezione, è minore di due angoli retti*. Ma è evidente che messa in questa forma la Proposizione 17 è la forma contraria del V Postulato: *se r e s tagliate dalla trasversale*



III.6/ Euclide, Libro I, Proposizione 16.

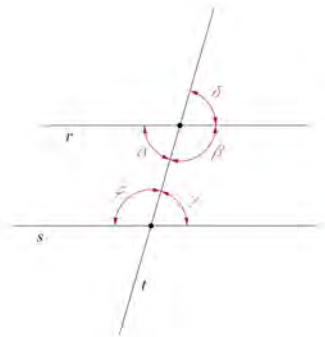


III.7/ Euclide, Libro I, Proposizione 17.



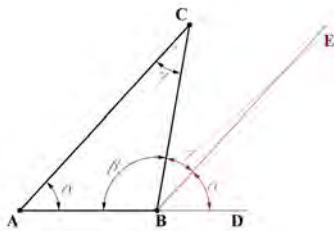
Se:
 $\gamma + \beta = \pi$
 oppure
 $\alpha = \gamma$
 oppure
 $\delta = \gamma$
 Allora r ed s sono
 parallele

III.8/ Euclide, Libro I, Proposizione 27 e 28.



Se r ed s non si incontrano
 allora:
 $\beta + \gamma = \pi$
 e
 $\alpha = \gamma$
 e
 $\delta = \gamma$

III.9/ Euclide, Libro I, Proposizione 29.



III.10/ Euclide, Libro I, Proposizione 32.

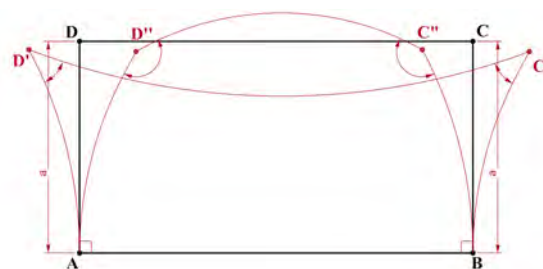
t formano con essa da una stessa parte angoli la cui somma è minore di due retti, allora r e s si incontrano (fig. III.7). Inoltre, dalle Proposizioni 16 e 17 si riesce a ricavare ciò che viene detto nelle Proposizioni 27 e 28 (fig. III.8): se due rette r e s formano con una trasversale t due angoli coniugati interni la cui somma è due retti (oppure angoli alterni interni o angoli corrispondenti uguali¹⁰), allora r e s sono parallele. Invece, il V postulato viene introdotto per dimostrare la Proposizione 29 (fig. III.9) (che può essere considerata l'inverso delle 27 e 28): se r e s sono parallele, allora formano con una trasversale t angoli coniugati interni supplementari, angoli alterni interni e angoli corrispondenti uguali¹⁶. Per la Proposizione 31 (condurre per un punto dato una linea retta parallela ad una retta data) invece, la dimostrazione non necessita del V postulato (si riferisce infatti solo alla Proposizione 27) e quindi appartiene alla geometria assoluta. La proposizione 32 (fig. III.10) è la nota ed importante dimostrazione sulla somma degli angoli interni di un triangolo, per la quale Euclide fa ricorso alla Proposizione 29 (e quindi al V postulato): In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti, e la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti. Ma allora le Proposizioni 16 e 17 diventano superflue poiché se la somma degli angoli interni non adiacenti è uguale all'angolo esterno di un triangolo, allora è maggiore di ciascuno di essi, e se la somma degli angoli interni di un triangolo è due retti, la somma di due angoli interni non può che essere minore di due retti. E dunque come spiegare questa ulteriore anomalia? Si potrebbe pensare che nasca da un'esigenza dell'autore nel mantenere un percorso dal punto di vista didattico, il più chiaro possibile. Ma tale ipotesi non è sufficiente a spiegarla in quanto l'aspetto dell'apprendimento non appare in nessun modo nell'intero trattato. La motivazione, condivisa dalla maggior parte degli studiosi che si sono occupati della questione del V postulato, di tale anomalia è da ritrovarsi nel tentativo perseguito da Euclide di dimostrare il V postulato, e solo dopo averne constatato il fallimento, lo inserì tra i postulati. Insomma, lo stesso Euclide sembra aver avuto dei problemi soprattutto in merito alla mancanza di evidenza che il principio doveva

possedere. Non va dimenticato, inoltre, che il numero di postulati, per mantenere i principi del metodo assiomatico, dovevano essere il minor numero possibile.

Questa analisi condotta su alcuni punti cardine del I libro degli *Elementi*, ha messo in evidenza le anomalie che da sempre hanno accompagnato il V postulato. Sono proprio queste a motivare il nascere delle attenzioni, che per secoli hanno tenuto impegnati i matematici, nel tentativo vano di dimostrare il V postulato di Euclide¹⁷. Ad una attenta analisi si rivela che la storia dei tentativi finiva quasi sempre con una dimostrazione che partiva da una nuova proposizione che, alla fine, equivaleva al V postulato. Un vero cambiamento avvenne nei primi dell'Ottocento periodo in cui cominciò a diffondersi la convinzione che la dimostrazione fosse impossibile nell'ambito della geometria assoluta. Questo significa che la sua negazione dà origine ad una teoria valida e coerente detta *geometria iperbolica*, che viene a costituire una delle due geometrie non euclidee. Prima di analizzarne le caratteristiche, è opportuno accennare ad uno dei tentativi di dimostrazione del V postulato proposto dal gesuita italiano Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733)¹⁸, per l'importanza (involontaria) che ebbe per lo sviluppo delle geometrie non-euclidee. La sua dimostrazione si basa su una forma di *reductio ad absurdum* riferita ad una figura che prende il nome di *quadrilatero di Saccheri* (fig. III.11). Essa consiste in un quadrilatero birettangolo isoscele con due angoli retti e due lati congruenti. Sugli opposti degli angoli retti Saccheri propone tre ipotesi:

- i. *Ipotesi dell'angolo retto: se gli angoli sono entrambi retti, vuol dire dimostrato il V postulato di Euclide*
- ii. *Ipotesi dell'angolo ottuso: se gli angoli sono ottusi vuole dire negare il V postulato*
- iii. *Ipotesi dell'angolo acuto: se gli angoli sono acuti, anche in questo caso significa negare la validità del V postulato.*

Attraverso una serie di passaggi logici si arriva a far equivalere le ipotesi sopra indicate con la seguente forma: ipotesi che la somma degli angoli interni di un triangolo possano essere minori maggiori o uguali a due angoli retti. Ovviamente la dimostrazione di Saccheri voleva evidenziare l'assurdità delle ipotesi di angoli mi-



III.11/ Quadrilatero birettangolo isoscele, meglio conosciuto con il nome di quadrilatero di Saccheri.

nori o maggiori di due angoli retti, accettando le quali si sarebbe arrivati ad una contraddizione, e lasciando quindi dimostrata la sola possibilità enunciata nel V postulato. La terza proposizione della teoria di Saccheri è interessante anche perché secondo Palladino “...*probabilmente, è il primo teorema di geometria non euclidea apparso nella storia della matematica*”. Essa dice che *il lato CD è maggiore, uguale, o minore di AB a seconda che valga l'ipotesi dell'angolo acuto, retto, ottuso*¹⁹. Per rendere visibili le ipotesi sui valori angolari è utile applicare una deformazione sul birettangolo isoscele, che come vedremo in seguito, la fa corrispondere esattamente alle configurazioni nel caso delle geometrie non euclidee. Inoltre, trasformare in quel modo obsoleto la figura di partenza ci fa capire il motivo per cui esse venivano interpretate come logicamente assurde, tanto che lo stesso Saccheri, termina la confutazione dell'ipotesi dell'angolo ottuso dicendo “*L'ipotesi dell'angolo ottuso è completamente falsa, perché distrugge se stessa*”. Per quanto riguarda la confutazione dell'ipotesi dell'angolo acuto, Saccheri descrive le proprietà delle rette relative al caso degli angoli acuti, a cominciare dall'ammissione (sempre coerentemente con la dimostrazione *ad absurdum*) che non essendo valido il V postulato di Euclide, per un punto esterno ad una retta passano almeno due rette che non la intersecano. Ma quello che involontariamente definisce, altro non è che il comportamento delle rette nella geometria iperbolica. Non potendo ammettere a livello di intuizione o principio geometrico tali caratteristiche, Saccheri arriva a dire nella Proposizione 33 “*L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa, perché ripugna alla natura della linea retta*”. E ciò è

molto diverso dal risultato raggiunto nella confutazione dell'angolo ottuso. In quel caso, infatti, egli arriva a dimostrare la contraddittorietà con l'ipotesi di partenza, in questo secondo, invece, proprio non la concepisce dal punto di vista logico. Facendo perno su questa non raggiunta contraddittorietà delle teorie dell'angolo acuto, si svilupparono le prime basi della geometria iperbolica, che da subito lasciò un ampio margine di perplessità dovuta sia al suo carattere aleatorio (non è facile "vedere" le sue proprietà, come infatti non riuscì Saccheri) ma anche alla sua concretezza: a cosa può servire una geometria che non rispecchi il carattere dello spazio in cui siamo?

Dalla seconda metà dell'Ottocento, il problema della dimostrazione del V postulato era noto a tutti i matematici ma la difficoltà incontrata nei numerosi tentativi, portò a maturare l'idea che, posto in quei termini, il V postulato era indimostrabile. Sembra che il primo studio che propose l'indimostrabilità del V postulato fu condotto da uno studente di nome G.S. Klugel (1739-1812) dell'Università di Gottinga, che nella sua dissertazione del 1763 *Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio*, analizzò 28 tentativi di dimostrazione, mettendone in luce l'aspetto non soddisfacente. Tra l'altro fu uno dei pochi studiosi a prendere in considerazione la dimostrazione di Saccheri, che invece fu quasi dimenticata dagli altri matematici, tanto da far nascere la questione (tuttora aperta) se l'opera di Saccheri sia stata conosciuta dai suoi successori²⁰. Un esempio significativo della difficoltà di accettare geometrie diverse da quella euclidea, fu quello di Luigi Lagrange (1736-1813), il quale, nonostante avesse intuito la possibilità di esistenza di geometrie non euclidee, non ebbe il coraggio di renderla nota, per il timore dell'opinione pubblica. Non va dimenticato infatti, che il quadro sociale in cui si trovavano a lavorare questi studiosi era fortemente condizionato dal peso intellettuale della geometria euclidea, che era stata considerata fino ad allora, l'unica vera. Inoltre, ricordiamo che era il periodo in cui anche la filosofia kantiana si basava sul carattere di intuizione pura *a priori* che apparteneva allo spazio, che quindi non poteva essere concepito in modo arbitrario. Insomma, la direzione che stavano prendendo gli studi sul V postulato, entravano fortemente in conflitto con il

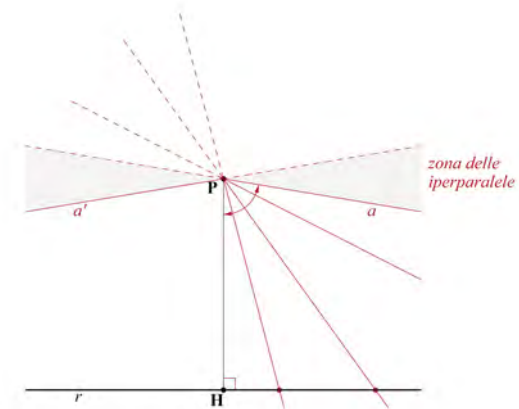
pensiero scientifico del tempo. Tale direzione portò al nascere di una geometria intesa non come descrittiva di una realtà, ma come sistema assiomatico e non contraddittorio valido di per sé²¹. Quindi era considerata valida (in quanto coerente), una geometria che si basava sui principi della geometria assoluta e sulla negazione del V postulato. Il primo grande contributo a questa vera e propria rivoluzione di pensiero, venne dal matematico Karl Friedrich Gauss (1777-1855) che impostò una prima geometria indipendente dal V postulato e con i caratteri di non contraddittorietà logica che essa doveva contenere. In particolare la sua attenzione si concentrò su una delle conseguenze del V postulato, e cioè che la somma degli angoli interni di un triangolo è di due angoli retti. Gauss era convinto che lo spazio fisico in cui ci troviamo non era sufficiente a verificarlo, cioè che tale caratteristica non fosse presente nel caso di un triangolo di grandi dimensioni. Propose quindi, un vero e proprio esperimento fisico per dimostrarlo: considerando valida la rappresentazione di una retta attraverso un raggio di luce, pensò di costruire un enorme triangolo che avesse i vertici nelle cime di tre montagne. Ciò che voleva dimostrare sperimentalmente era che per dimensioni così grandi, la somma degli angoli interni di un triangolo fosse diversa da due angoli retti. In realtà i risultati furono disattesi per gli evidenti problemi di accuratezza degli strumenti dell'epoca, e ciò costrinse lo stesso Gauss a non pubblicare mai le sue ricerche²² poiché, come scrisse in una lettera inviata a Friedrich Wilhelm Bessel il 27 gennaio 1829, "... *temo le strida dei beoti, qualora volessi completamente esprimere le mie vedute...*". Qualche anno dopo, ci furono le prime pubblicazioni riguardo scoperte di geometrie non euclidee, che sorprendentemente si manifestarono contemporaneamente²³ attraverso l'opera di due matematici: il primo il russo Nicolai Ivanovich Lobachewsky (1793-1856), il secondo l'ungherese János Bolyai (1802-1860). Lobachewsky scriveva nella introduzione ai *Nuovi principi della geometria* "I vani sforzi compiuti dai tempi di Euclide, per il corso di duemila anni, mi spinsero a sospettare che nei concetti stessi della geometria non si racchiuda ancora quella verità che si voleva dimostrare, e che può essere controllata, in modo simile alle altre

leggi della fisica, soltanto da esperienze, quali, ad esempio, le osservazioni astronomiche”.

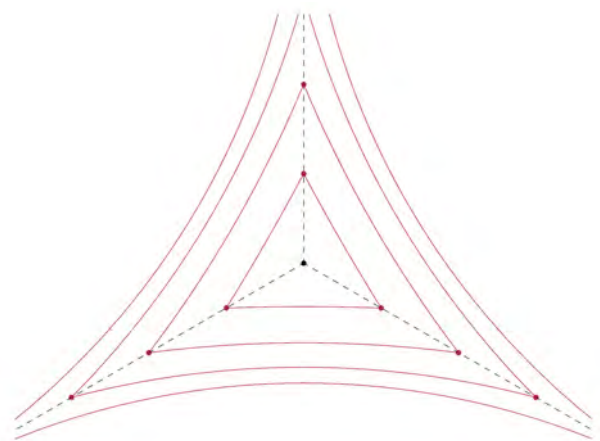
Appare chiaro che il matematico russo abbia attribuito allo spazio fisico delle caratteristiche diverse da quello euclideo che era fondato su enti ideali, in modo da considerare veri solo quei principi che possono trovare una verifica sperimentale. E proprio in questa direzione nega il V postulato di Euclide esponendo queste considerazioni: su un foglio di carta di dimensioni qualsiasi, disegniamo una retta r (fig. III.12) ed un punto P esterno ad essa e conduciamo la perpendicolare PH alla retta r ; infine, sempre da P , tracciamo una retta a che formi un angolo con PH che differisca dall'angolo retto “per pochissimo”. La retta a non incontrerà la retta r ad una distanza “ragionevolmente vicina”, ma potrebbe incontrarla ad una distanza notevolmente al di fuori della nostra percezione, e forse, proprio per questo motivo, potrebbe non incontrarla affatto. Se riteniamo valida questa ipotesi, per il punto P esterno ad r , passeranno delle rette che incontreranno la retta e delle altre che non la incontreranno; le rette a e a' che separano le secanti dalle non secanti vengono chiamate rette parallele ad r , pur senza mantenere l'equidistanza in ogni punto rispetto ad r .

Quindi il V postulato va riletto secondo la teoria di Lobachewsky, in questo modo: *per un punto passano due rette parallele ad una retta data*. Anche Bolyai giunse alla stessa reinterpretazione del V postulato: la geometria non euclidea stava divenendo una teoria matematica legittima e ricca di quel carattere di “verità” comune alle discipline matematiche. Gli angoli acuti (ricordiamo l'analogia con la dimostrazione di Saccheri) che le rette a e a' formano in P , sono detti angoli di parallelismo e tendono all'angolo retto quando P tende ad H . Questo vuole dire che per “piccoli” valori di α la geometria iperbolica²⁴ tende a coincidere con la geometria euclidea, ecco quindi emergere l'aspetto fisico a cui faceva riferimento Lobachewsky (e che motivava la definizione di teoria fisica data da Roger Penrose): nelle figure della nostra scala quotidiana, sembrano validi gli enunciati della geometria euclidea, ma forse è meglio dire che essa è un'ottima approssimazione, visto che sperimentalmente non è possibile registrare alcuna differenza tra le due²⁵. Una delle caratteristiche più interessanti dei trian-

goli della geometria iperbolica (fig. III.13), è il fatto di avere la somma degli angoli interni minore di due retti, e soprattutto essa varia da triangolo a triangolo. Infatti per triangoli molto piccoli, visto il tendere a coincidere con la geometria euclidea, la somma tende a due angoli retti, ma più il lato aumenta più l'angolo ad ogni vertice diminuisce, tendendo a zero. Inoltre in geometria iperbolica non esistono triangoli simili a meno che non siano congruenti. Tutto questo porta, come è ovvio, a delle ricadute interessanti sulle proprietà dei poligoni, come ad esempio che in un quadrato iperbolico, il rapporto tra la



III.12/ Negazione del V postulato di Euclide, secondo la geometria iperbolica di Lobachewsky e Bolyai.



III.13/ Nella geometria iperbolica, la somma degli angoli di un triangolo è sempre minore di 180° , e varia da triangolo a triangolo.

diagonale e il lato tende alla radice di 2 quando il lato tende a 0 (per piccole dimensioni si comporta esattamente come nel caso euclideo), e ad 1 quando il lato tende all'infinito (in questo caso infatti gli angoli del quadrato tendono a zero).

A questo punto però, vista la difficoltà di accettare una geometria non “visibile”, ed obsoleta in cui alcuni comportamenti delle figure geometriche, era necessaria una “prova” della coerenza di questa teoria e della sua attendibilità. La risposta risiede nel metodo dei modelli, ossia una rappresentazione di un fenomeno con l'obiettivo di verificarne la validità. Nel caso in esame, l'obiettivo era quello di verificare la correttezza e la coerenza²⁶ degli assiomi della geometria iperbolica. In particolare, poiché per la geometria iperbolica vengono proposti modelli in ambiente euclideo, si parla di *modelli euclidei della geometria iperbolica*. Il primo modello proposto fu quello di Eugenio Beltrami (1836-1900), e, in quanto tale, fu il primo a convincere gli studiosi della validità della geometria euclidea. Il modello è rappresentato da una superficie di rivoluzione, detta pseudosfera (chiamata così perché esattamente come la sfera ha curvatura²⁷ costante, ma il segno è negativo anziché positivo), che ha come generatrice una curva piana che prende il nome di *trattrice*²⁸, e come asse di rotazione l'asintoto della curva stessa. In questo tipo di superficie (in cui la rappresentazione dei punti iperbolici è costituita dai punti che appartengono alla superficie stessa e la rappresentazione della retta iperbolica passante tra due punti è la linea geodetica, cioè la linea di minima distanza, che li unisce) risultano verificati gli assiomi della geometria iperbolica: per un punto esterno ad una retta (cioè una geodetica della pseudo sfera) passano infinite rette parallele a quella data, e la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre inferiore a due angoli retti. In particolare se chiamiamo α , β , γ i tre angoli, risulta verificata la seguente²⁹ relazione scoperta da Johann Heinrich Lambert (1728-1777):

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = C \Delta$$

dove Δ è l'area del triangolo e C è una costante. Questa costante dipende dalle unità scelte per la misura della lunghezza e dell'area e quindi possiamo assumere che essa sia $C=1$. È da sottolineare la semplicità con cui nella

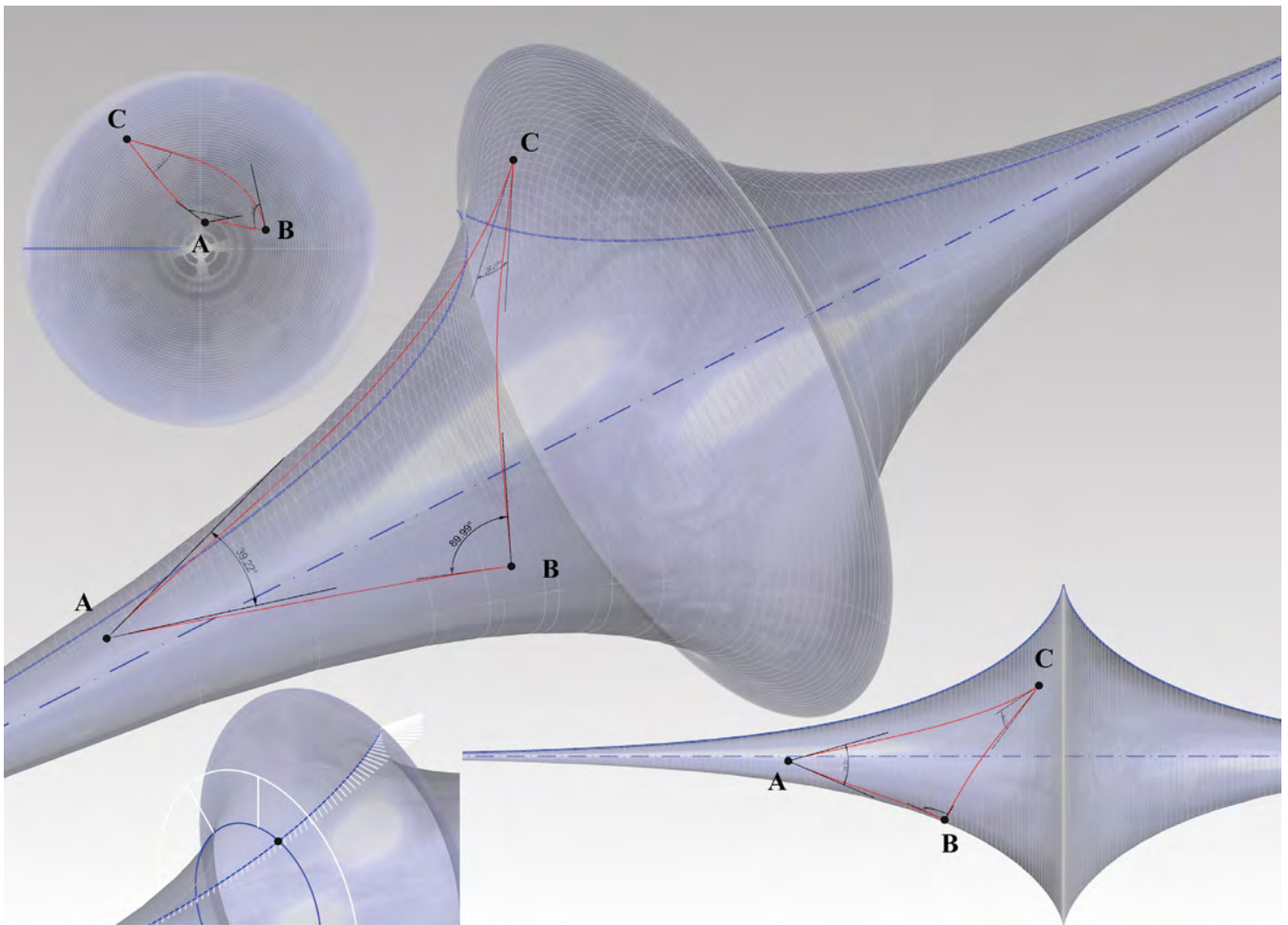
geometria iperbolica sia possibile esprimere l'area di un triangolo solo in relazione ai suoi angoli.

Il modellatore matematico, offre l'occasione di verificare sperimentalmente tali caratteristiche. La matematica di tipo NURBS³⁰ consente di creare modelli, cioè rappresentazioni molto accurate (a meno dei limiti della tolleranza con cui vengono generati) di curve e superfici, finora accessibili soltanto con un linguaggio analitico. In particolare nel caso del modello della pseudosfera, è stata utilizzata una pregevole applicazione sviluppata da Jess Maertter²² con cui è possibile rappresentare una curva o una superficie a partire dalle loro equazioni parametriche. Il controllo attraverso le equazioni parametriche della curva, consente una rappresentazione immediata e più accurata, il cui grado di precisione dipende dal numero dei punti di controllo attraverso cui viene interpolata. In sostanza lavora come una sorta di “traduttore” tra le equazioni parametriche e quelle di tipo NURBS; infatti nell'input dei dati, occorre indicare il numero dei punti di controllo per cui verranno calcolati i valori delle equazioni e che verranno utilizzati per definire l'entità (questa volta di tipo NURBS) attraverso una loro interpolazione. In questo sistema quindi, è stata inserita l'equazione parametrica della trattrice che risulta essere:

$$x(t) = t - \tanh(t)$$

$$y(t) = \operatorname{sech}(t)$$

con il parametro t variabile nell'intervallo -3π e 3π (dove π indica l'angolo piatto) e con 500 punti di controllo interpolati dalla curva NURBS di terzo grado. La trattrice, definita da queste equazioni parametriche, tende asintoticamente all'asse X del sistema di riferimento. È proprio quest'ultimo ad essere utilizzato come asse di rivoluzione per generare la pseudosfera (fig. III.14). Il primo tipo di verifica sperimentale, è stato quello relativo alla curvatura gaussiana della superficie che risulta essere negativo per qualsiasi punto della superficie che non appartenga al cerchio generato dal punto di cuspidale della trattrice. La rivoluzione di tale punto genera un luogo geometrico di punti singolari in cui non è possibile verificare la negatività della curvatura della superficie. Proprio questo è uno dei limiti del modello di Beltrami, e cioè il fatto di non essere valido globalmente ma solo localmente. Uno strumento molto utile ci viene



III.14/ La pseudosfera di Beltrami, è una superficie generata dalla rivoluzione della trattrice attorno al proprio asintoto. In essa sono verificati gli assiomi della geometria iperbolica.

offerto dal modellatore per tracciare in modo immediato le linee geodetiche di una superficie NURBS qualunque. Presi tre punti qualsiasi è possibile quindi definire una retta iperbolica che ne unisce due, e constatare che per il terzo (esterno alla retta) passano infinite rette ad essa parallele (ossia che non la incontrano), verificando così la negazione del V postulato come indicato dalla geometria iperbolica. Un'ulteriore verifica sperimentale consiste nell'analisi angolare del triangolo definito dai tre punti (ricordiamo che gli assiomi della geometria assoluta rimangono validi in quella iperbolica, quindi per due punti passa una sola retta) e verificare che gli angoli for-

mati nei vertici del triangolo iperbolico, dalle tangenti alle geodetiche uscenti da essi (i lati del triangolo iperbolico, sono dal punto di vista euclideo, linee sghembe), diano come somma un angolo inferiore a due angoli retti. Sull'importanza del contributo del modellatore informatico avremo modo di parlarne in seguito, per ora è sufficiente mettere in evidenza il carattere sperimentale che esso può offrire, divenendo un vero e proprio laboratorio virtuale con cui analizzare questioni rilevanti della geometria.

Abbiamo quindi accennato al limite del modello di Beltrami che non può rappresentare interamente il piano

iperbolico, ma va sottolineata la sua importanza soprattutto di carattere storico, per essere stato il primo a convincere gli studiosi della validità della geometria iperbolica.

Le ricerche condotte sulle teorie delle geometrie non euclidee non si esaurirono con la definizione della geometria iperbolica. Lo studio della geometria differenziale portò Gauss a considerare una qualsiasi superficie bidimensionale (come ad esempio la sfera) non necessariamente immersa in uno spazio tridimensionale (quindi estrinseco). Per definire la sua geometria sono sufficienti le misurazioni fatte sulla superficie (quindi da un punto di vista intrinseco). La proprietà intrinseca che meglio descrive una superficie è quella che viene chiamata curvatura gaussiana. Per determinarla occorre individuare per un punto qualsiasi P della superficie, la normale alla superficie stessa, e considerare gli infiniti piani che passano per essa e che individueranno un'infinità di curve intersezione. Il grande matematico e fisico Leonhard Euler (1707-1783), dimostrò con un noto teorema³¹ che il valore massimo e minimo della curvatura³² (tali valori prendono il nome di *curvature principali*) delle curve intersezione, è individuato da una coppia di curve che giace su due piani perpendicolari tra loro. Gauss definì la curvatura gaussiana il prodotto delle curvature principali. La più importante applicazione del concetto di curvatura gaussiana, risiede nel fatto che essa è una caratteristica intrinseca alla superficie stessa: possiamo, cioè, definire se la superficie è curva o piana rimanendo sulla superficie, senza aver bisogno di uno spazio esterno in cui essa è immersa. In base a questa proprietà, possiamo classificare le superfici in base al valore della loro curvatura (minore, uguale o maggiore di zero). Inoltre, con il teorema definito *egregium*, egli arrivò a dimostrare che solo se due superfici hanno la stessa curvatura possono essere sovrapponibili. Questo vuole dire ad esempio che la rappresentazione piana della superficie terrestre è impossibile in quanto il piano ha curvatura nulla, mentre la terra ha in ogni suo punto curvatura positiva. Ed ancora, Gauss dimostrò che solo se una superficie ha curvatura costante, le figure geometriche che appartengono ad essa, sono congruenti. In queste superfici è possibile cioè, *spostare* una figura da una regione

ad un'altra, ed avere una sovrapposizione perfetta in merito alle dimensioni, prima e dopo lo spostamento; non ci sono quindi problemi di deformazione delle misure. Le superfici a curvatura costante sono la sfera (costante positiva) la pseudosfera (costante negativa) il piano (costante nulla) e il cilindro. Un'ultima e importante conseguenza degli studi di Gauss fu la definizione dei primi elementi di geometria delle superfici che porta all'estensione del concetto di retta, in linea geodetica che è la linea che unisce due punti di una superficie con la distanza più breve. Nel caso della sfera ad esempio, la geodetica che unisce due punti è la circonferenza massima che passa per essi.

È opportuno accennare al pensiero innovativo proposto nel 1854 da Bernard Riemann che nel suo scritto *Sulle ipotesi che sono di fondamento della Geometria*, sviluppò gli studi della geometria condotti da Gauss. In primo luogo Riemann fu il primo a distinguere il significato tra *illimitatezza* dello spazio e *infinità*³³: con il primo termine ci si riferisce al concetto di estensione (un'accezione più qualitativa), mentre con il secondo ci si riferisce a quello di misura (con un'accezione quantitativa). Si poteva quindi ipotizzare uno *spazio*³⁴ al tempo stesso illimitato e finito, come può essere considerata ad esempio, una linea chiusa. Riemann, sviluppando le teorie della geometria differenziale condotte dal suo professore Gauss, elabora una nuova nozione fondamentale per la geometria: la *varietà* (non solo per le ricadute che essa avrà nella matematica dando origine allo sviluppo di nuove branche come la topologia, ma anche in discipline come la fisica portando alla formulazione della relatività einsteiniana), che poi sarà conosciuta con il nome di *varietà riemanniana*. Il concetto è quello di creare dei modelli per gli spazi a n dimensioni, anche curvi, che da un punto di vista infinitesimale hanno il carattere dello spazio euclideo ma da un punto di vista globale possono avere forme qualsiasi. Per evitare i possibili equivoci indotti dalle proprie percezioni durante le dimostrazioni geometriche, Riemann affronta lo studio dello spazio fisico attraverso l'analisi matematica, l'unico strumento in grado di indagare il comportamento locale di un fenomeno. L'obiettivo esplicito era di dimostrare che i postulati di Euclide erano verità empiriche (dimostrabili

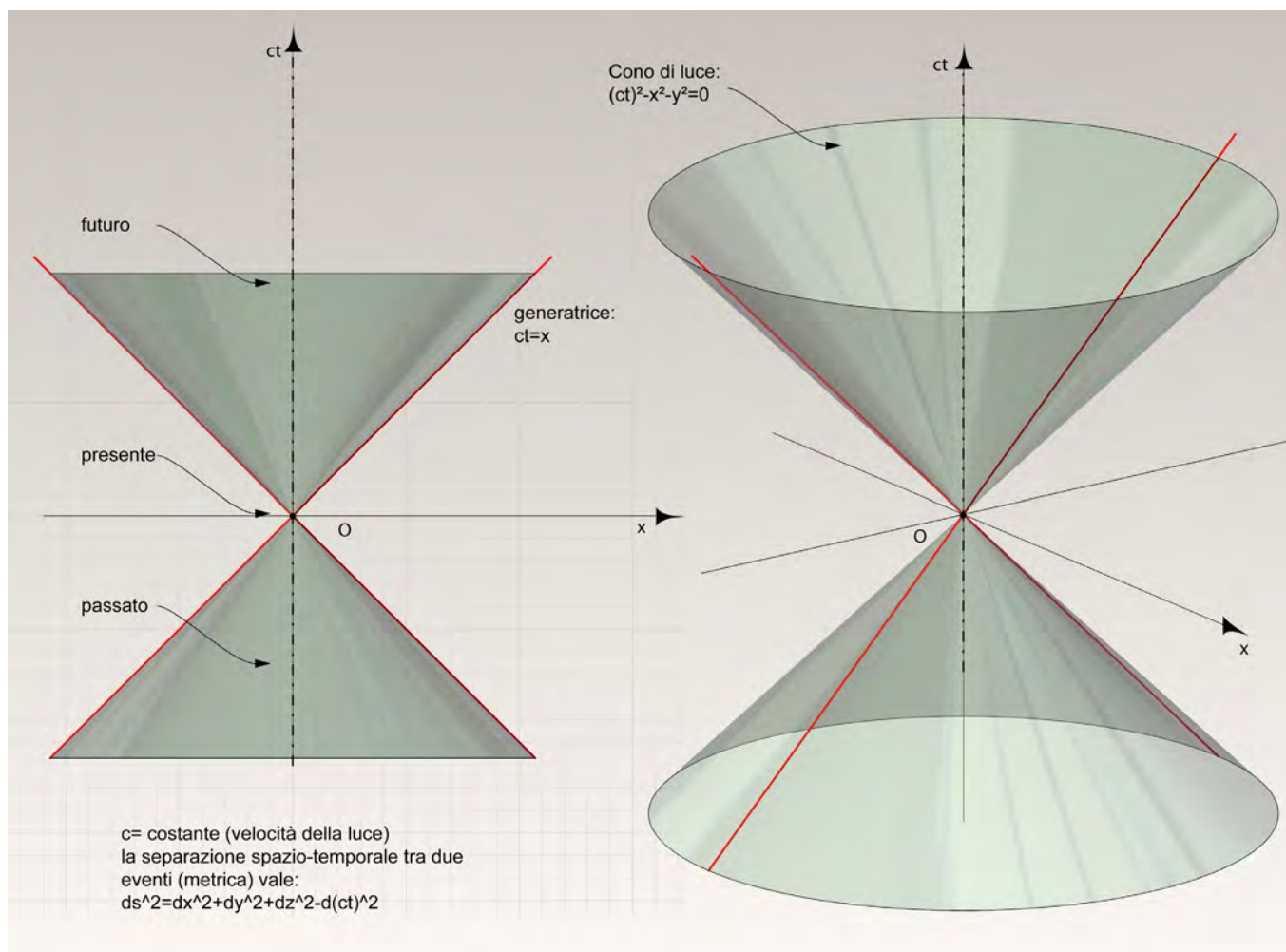
solo con l'analisi) e non verità a priori. Nella sua teoria, Riemann fece uso di un modello di superficie a curvatura costante, il cui valore differenziava i tre tipi di geometria:

- *curvatura negativa (geometria iperbolica)*
- *curvatura nulla (geometria euclidea)*
- *curvatura positiva (geometria ellittica o di Riemann)*

Il modello proposto da Riemann per lo studio della geometria ellittica è quello di una superficie sferica in cui i punti sono punti della sfera, e le rette sono i cerchi massimi della sfera. Con queste premesse, è evidente che in questo modello si ha la negazione dell'*esistenza* (e non la negazione dell'*unicità* come avveniva per la geometria iperbolica) del V postulato di Euclide in quanto non esistono rette parallele ad una data passante per un punto esterno ad essa il che equivale a dire che tutte le coppie di rette si intersecano (tale enunciato prende il nome di assioma di Riemann).

Ci sono però degli assiomi della geometria assoluta che sono in contraddizione con alcune proprietà della geometria sferica: le rette sono linee chiuse (in quanto cerchi massimi) e per due punti, se essi sono diametrali, passano infinite rette. Sono quindi violati quelli che vengono definiti gli *assiomi di ordinamento*. Tra i teoremi che invece il modello sferico rappresenta fedelmente c'è che tutte le rette hanno la stessa lunghezza finita; il piano ha area finita; tutte le perpendicolari ad una stessa retta si incontrano in due punti; in zone piccole del piano sferico vale la geometria euclidea (esattamente come abbiamo visto per la geometria iperbolica); se due triangoli hanno uguali angoli, allora sono uguali (anche questo in comune con la geometria iperbolica). Per conservare allora, l'assioma della unicità della retta per due punti, nella geometria ellittica viene introdotto un modello che considera una semisfera (eliminando quindi i punti diametralmente opposti) e viene considerato come medesimo punto, la coppia di punti diametralmente opposti, che appartiene alla circonferenza che delimita la semisfera. Continua ad essere valido l'assioma di Riemann, ma a differenza della geometria sferica e di quella iperbolica, ogni retta non divide il piano in due semipiani. Abbiamo visto come, intorno la seconda metà dell'Ottocento, si siano sviluppate teorie assiomatiche coerenti

se considerate singolarmente (cioè da un punto di vista intrinseco), ma per alcuni versi in contrasto tra loro. È lecito infatti domandarsi quale sia la *vera* somma degli angoli interni di un triangolo, dal momento che le tre geometrie ne danno descrizioni così diverse dello stesso fenomeno. A ben vedere questa domanda è mal posta. Infatti, sempre verso la fine dell'Ottocento, si è affermata la visione moderna dell'assiomatica che tende a stabilire che le teorie matematiche sono dei *sistemi ipotetico deduttivi*. Ciò significa che non è più necessario un collegamento preliminare ad enti esterni, ossia non ha più senso dire se un assioma sia di per sé *vero* o *falso*: essi sono solo il punto di partenza da cui sviluppare, secondo le regole della logica matematica, le proposizioni seguenti. Inoltre, l'unico requisito che necessita una teoria matematica per essere considerata valida, è quello della coerenza tra gli assiomi. Ad esempio, in merito alla geometria iperbolica, abbiamo interpretato i suoi assiomi per mezzo di un modello (come quello di Beltrami o di Poincaré di cui parleremo tra poco) ed abbiamo visto che essi divengono proposizioni vere in quell'ambiente; non ci siamo interrogati sulla validità degli assiomi in partenza. Abbiamo comunque dimostrato, che la geometria iperbolica è una teoria assiomatica coerente. In merito al fatto che le teorie così definite non necessitino di un'applicazione, Palladino distingue due livelli di lettura: il piano *sintattico*, in cui si svolgono le dimostrazioni, e il piano *semantico*, in cui "*si interpretano i concetti primitivi e si definiscono i modelli delle teorie, che sono gli ambiti di realtà, concreta o astratta, nei quali esse sono vere*". Ed ancora "*ciò non vuol dire che il matematico crei le teorie in modo svincolato dalla realtà, scrivendo liste di assiomi e preoccupandosi solo della loro coerenza. In genere una teoria viene costruita avendo in mente una sua applicazione: nel dimostrarne i teoremi tale applicazione non è strettamente necessaria, anzi la teoria può poi avere altri "modelli" che ne estendono l'applicabilità ad altri settori della matematica stessa o di altre discipline. Comunque, nella storia della matematica sono frequenti anche esempi di teorie che hanno trovato applicazioni utili nella scienza molto tempo dopo essere state studiate dal punto di vista matematico*".



III.15/ Il modello di Minkowski dello spazio tempo, ridotto della coordinata spaziale z.

Nel caso della geometria però, sembra che le cose debbano andare diversamente dalla pura teoria matematica, in quanto essa sembra possedere un connotato più *oggettivo* che deriva dal fatto di essere condizionata ed intimamente collegata all'ambiente fisico in cui opera. Per capire meglio il problema, prendiamo come esempio il caso della teoria della relatività generale di Einstein: è giusto affermare che egli abbia scoperto che la geometria dello spazio è non euclidea? Analizzando il pensiero di Einstein, ci accorgiamo che egli scoprì che i raggi di luce si incurvano (possiamo dire che non si comportano come rette euclidee) se in presenza di masse. Possiamo rileg-

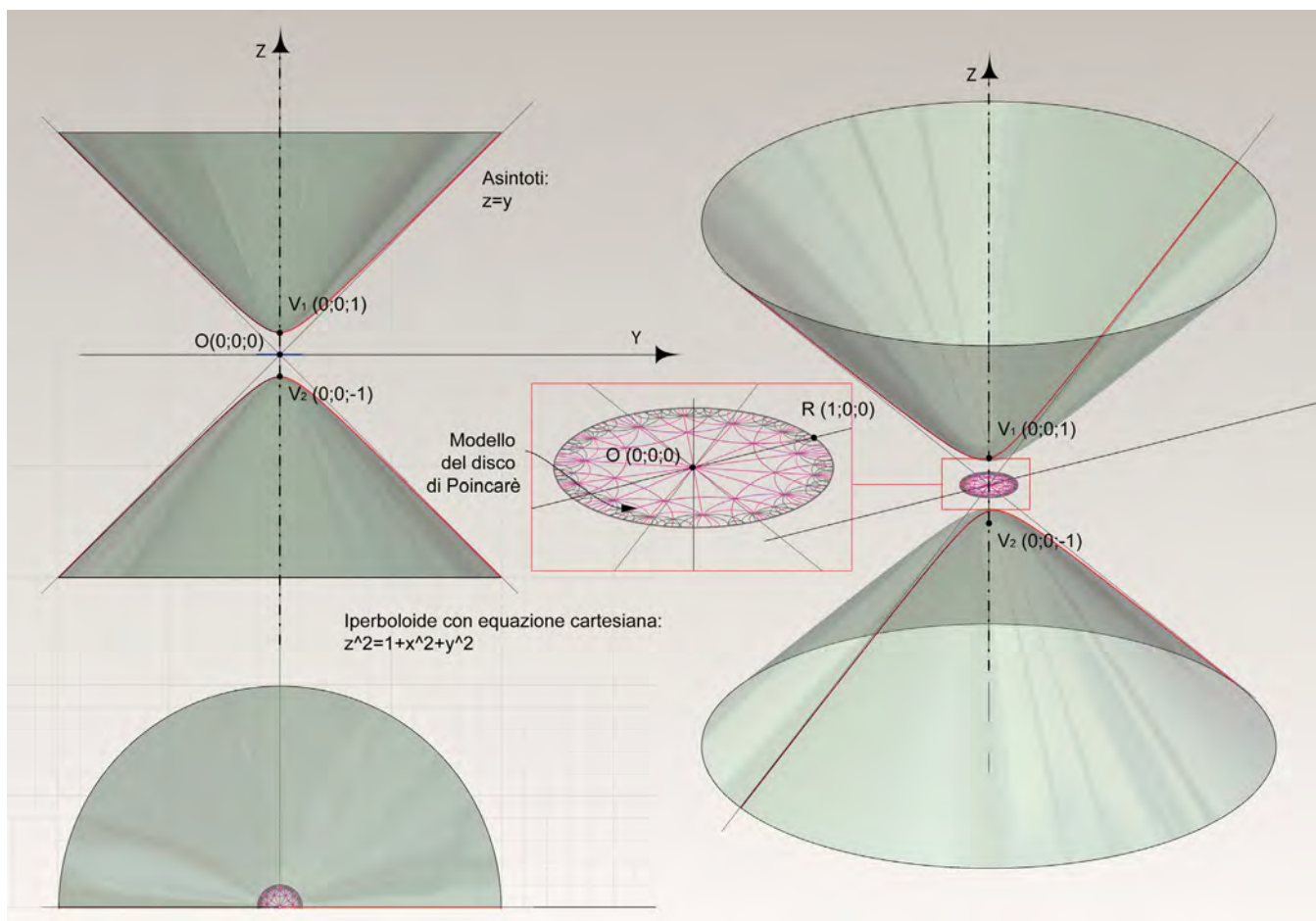
gere lo stesso fenomeno in questo modo: Einstein scoprì che i raggi luminosi viaggiano secondo linee rette di una geometria ellittica, opportunamente definita dalle influenze delle masse sui raggi stessi. Vista in quest'ottica, l'affermazione che Einstein ha scoperto che la geometria dello spazio è curva, è falsa. È corretto invece dire che Einstein ha scoperto che la geometria ellittica meglio descrive (in quanto le leggi geometriche e fisiche semplificano notevolmente il problema) la teoria della relatività generale.

Vale la pena accennare brevemente ad un modello di geometria iperbolica introdotto nel 1908 dal matematico

Minkowski che riesce a descrivere in modo esaustivo ed efficace la teoria della relatività definita da Einstein tre anni prima e che vedeva lo spazio e il tempo fusi in un'unica entità³⁵. Tale modello è interessante per le nostre finalità, in quanto sancisce in modo definitivo la piena validità e utilità della geometria iperbolica ed inoltre perché mette in evidenza i rapporti di tipo proiettivo che legano tra loro i modelli di geometria iperbolica visti finora. È stato possibile condurre questa analisi, grazie alla collaborazione con il matematico Luca Lussardi, del Dipartimento di Matematica del Politecnico di Torino, che è risultata molto proficua (nell'Appendice al capitolo III, è proposta la descrizione simbolica svolta da Lussardi).

Una delle difficoltà più grandi nella descrizione del modello di Minkowski è il fatto che essa possiede un carattere quadridimensionale e quindi è necessario ricorrere all'intuizione per poterla apprezzare. Senza entrare troppo nel merito della teoria della relatività possiamo indicare due aspetti fondamentali che essa introduce: il primo è che la velocità della luce è una grandezza costante che non dipende dal sistema di riferimento utilizzato; il secondo è che la "distanza" che lega due eventi (chiamata metrica) vale $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - d(ct)^2$, dove x , y e z indicano le coordinate spaziali di un evento, e ct indica la coordinata temporale moltiplicata per la velocità della luce c . Quindi abbiamo un'espressione molto simile a quella che nello spazio euclideo esprime la distanza tra due punti secondo il teorema di Pitagora, e cioè $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, ma con una segnatura diversa del tipo (+ + + -). La "lunghezza" minkowskiana rappresenta l'intervallo di tempo sperimentato dalla particella fra gli eventi **O** e **P**. Ma la cosa più sorprendente (perché in disaccordo con la misura del tempo del senso comune) è il fatto che secondo la misura del tempo relativistica di Minkowski (espressa dalla formula precedente) la quantità s è sempre un po' minore di t non appena la particella si muove con un moto qualsiasi; il moto cioè, tenderà a far rallentare la misura del tempo t esattamente come espresso nella teoria della relatività speciale di Einstein³⁶. Per rappresentare la geometria di Minkowski occorre semplificarla di una dimensione spaziale (non possiamo rappresentare quattro dimensioni nello spazio euclideo) ed introdurre la coordinata temporale ct (fig.

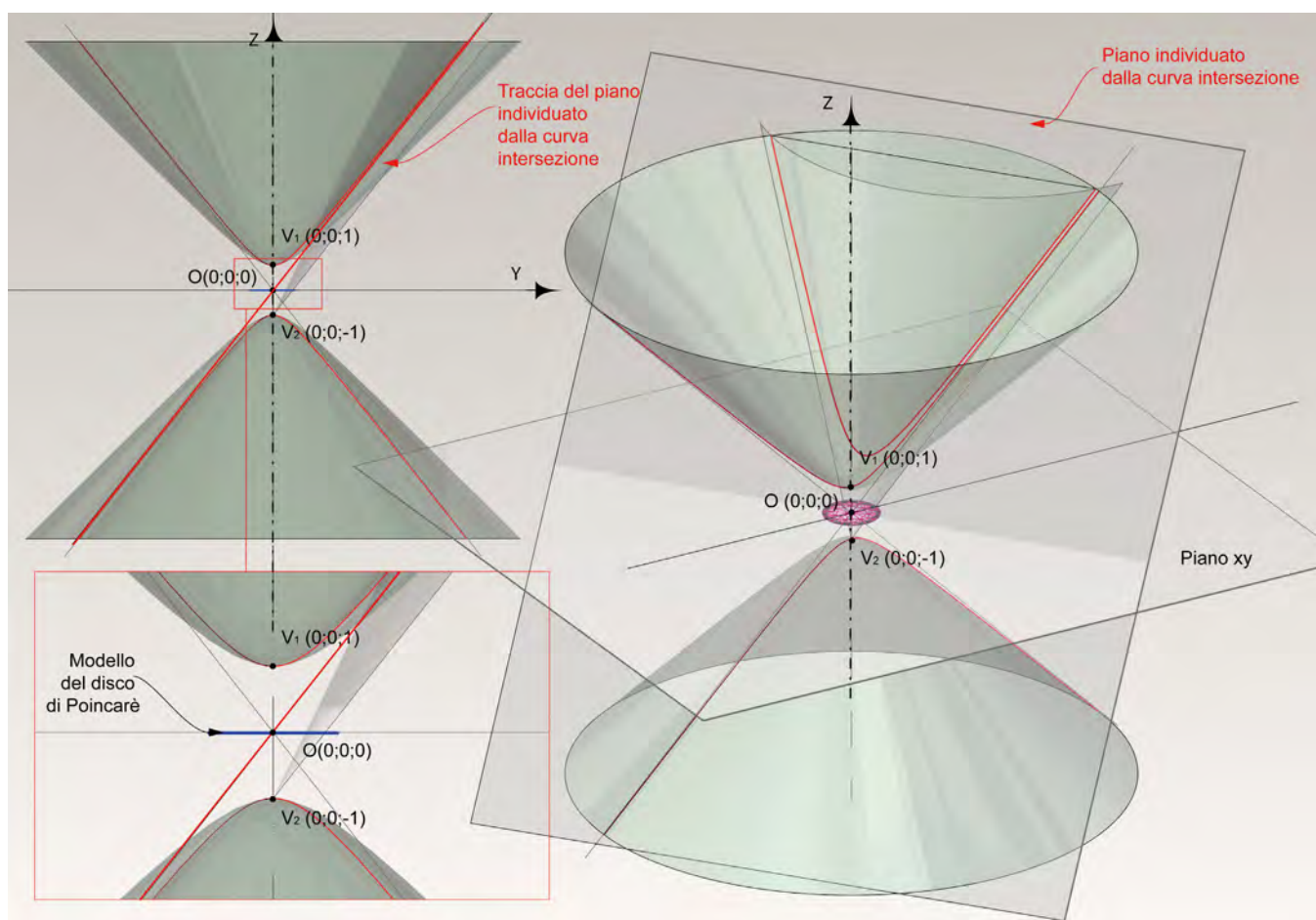
III.15). In questo tipo di diagramma spazio-temporale, ogni punto rappresenta un evento, cioè un punto di esistenza istantanea; viene rappresentata cioè, la storia passata, presente e futura. Una particella che persiste nel tempo sarà rappresentata da una linea (chiamata *linea oraria*). In particolare, ogni punto che si muove con velocità costante descrive una retta, se invece subisce un'accelerazione, descrive una linea curva. Il fatto di moltiplicare per c la coordinata temporale ci consente di rappresentare con una linea inclinata a 45° i raggi luminosi che partono dall'origine del sistema di riferimento con velocità c costante. Questi raggi nelle tre dimensioni che abbiamo utilizzate, descriveranno un cono, e visto che per la teoria della relatività la velocità massima raggiungibile da una particella di materia è quella della luce, tutte le linee orarie delle particelle saranno interne al cono di luce. Nella geometria euclidea, sappiamo che il luogo dei punti equidistanti una unità, dall'origine del sistema di riferimento è una sfera di raggio unitario. Visto che nella geometria di Minkowski la distanza non è più data dalla somma dei quadrati delle coordinate, ma dal loro intervallo, possiamo dire che l'analogo della sfera è un iperboloide a due falde generato dalla rotazione dell'iperbole equilatera che ha per asintoti le bisettrici degli assi cartesiani e quindi il cono di luce. In particolare l'equazione dell'iperboloide è del tipo $(ct)^2 - x^2 - y^2 = 1$ e ha i vertici nei punti $(0;0;1)$ e $(0;0;-1)$ (fig. III.16). Immaginiamo di collocare il modello del disco di Poincaré con raggio unitario nel piano $z=0$. Ecco la connessione che lega i due modelli di geometria iperbolica (quello di Poincaré e quello di Minkowski): facendo la proiezione stereografica dal punto $(0;0;-1)$ delle geodetiche iperboliche del disco di Poincaré, otteniamo le geodetiche iperboliche del modello di Minkowski. Di questa relazione, di cui finora si trovano solo descrizioni simboliche e mai sintetiche, è possibile fare una verifica sperimentale con il modellatore informatico. È possibile infatti, rappresentare l'iperbole equilatera passante per l'origine del sistema di riferimento i cui asintoti, inclinati a 45° , rappresentano le generatrici del cono di luce. L'iperbole così definita (i cui vertici saranno i punti di coordinate $(0;0;1)$ e $(0;0;-1)$), se sottoposta a rivoluzione rispetto l'asse longitudinale genera un iperboloide a due



III.16/ Relazione tra il modello di Minkowski e il modello del disco di Poincarè.

falde il cui centro è l'origine O del sistema di riferimento. Collochiamo il disco di Poincarè (di cui tra poco daremo i dettagli della relativa costruzione) in modo da far coincidere il suo centro con il centro O dell'iperbole, e proiettiamo stereograficamente da $(0;0;-1)$ le sue geodetiche (cioè gli archi di circonferenza ortogonali al cerchio limite) (fig. III.17). L'intersezione tra l'iperboloide e il cono proiettivo appena generato darà luogo ad una curva la cui natura può essere indagata andando a verificare che il piano che essa individua passi per il centro dell'iperboloide. Infatti da un punto di vista iperbolico si dimostra che la geodetica di un iperboloide è la curva d'intersezione tra la superficie ed un piano bidimensionale pas-

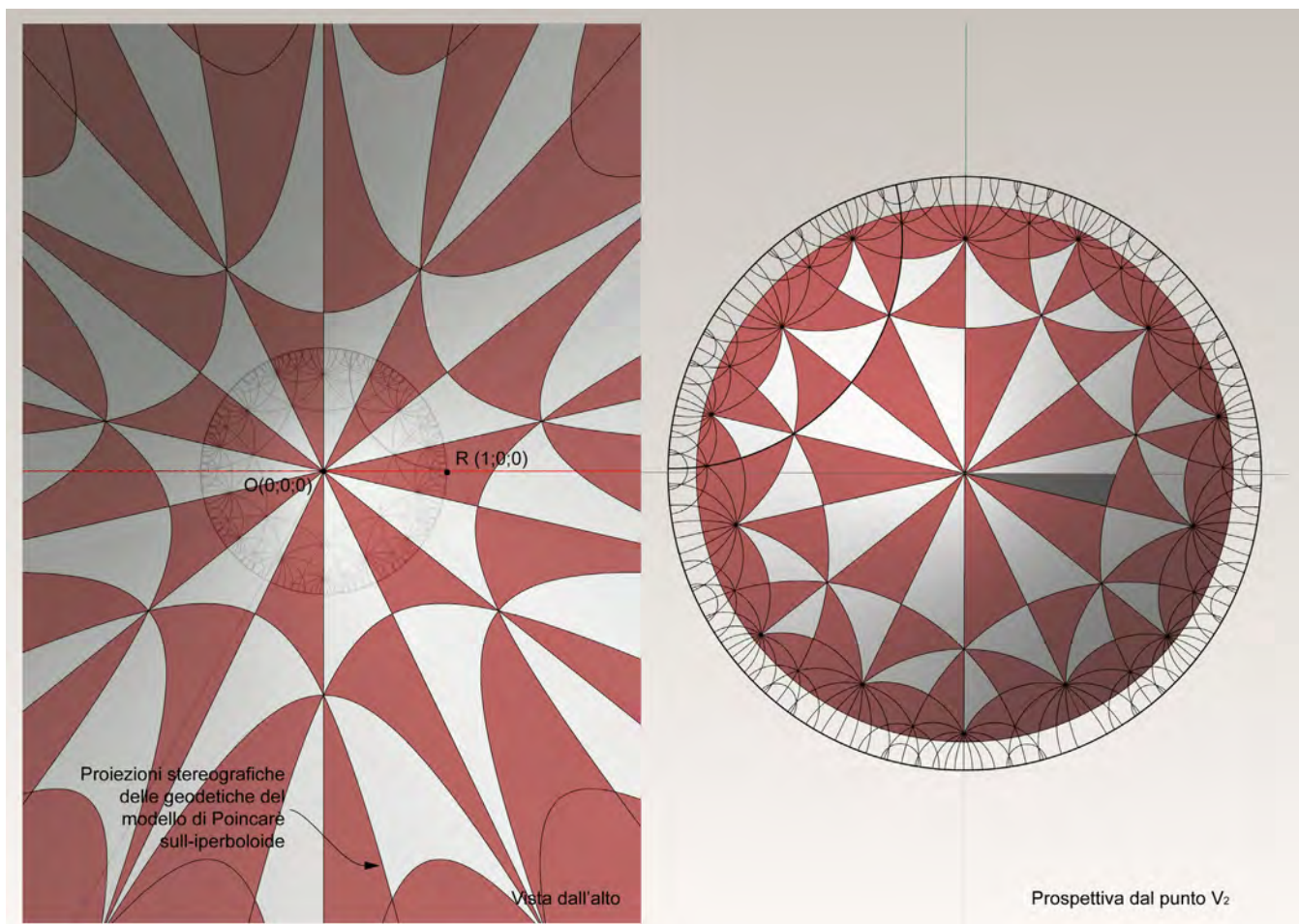
sante per il suo centro. L'ultimo passaggio è quello di visualizzare la sovrapposibilità delle tassellazioni tra i due modelli (di Minkowski e Poincarè), istituendo una prospettiva che ha come centro di proiezione il vertice negativo dell'iperboloide e come piano di quadro il piano xy (fig. III.18). Come è possibile notare dall'immagine che ne scaturisce la relazione proiettiva tra i due modelli risulta soddisfatta. Inoltre, viene messa in evidenza un'ulteriore caratteristica che accomuna i due modelli: il cerchio limite del modello del disco di Poincarè, corrisponde esattamente al cerchio limite a cui tende asintoticamente l'iperboloide. Come già detto, la trattazione del modello minkowskiano esula dalle nostre competenze. Il suo inte-



III.17/ In geometria iperbolica, la geodetica di un iperboloide è la curva d'intersezione tra la superficie ed un piano bidimensionale passante per il suo centro.

resse, risiede però nel fatto di ritrovare un concetto di unità affascinante che lega in un *continuum* i più importanti modelli di geometria iperbolica. Oggi gli strumenti informatici, in particolare attraverso i modellatori matematici, ci offrono la possibilità di investigare certi fenomeni, che fino ad oggi erano visibili solo alle menti brillanti di alcuni matematici. Per gli scienziati è sufficiente una descrizione simbolica di un fenomeno³⁷, magari accompagnata da un piccolo schizzo a mano libera, che per loro quasi è superfluo. Certo, abbiamo parlato di un modello geometrico assai complesso e spesso sfuggente al nostro senso comune di natura euclidea, ma abbiamo potuto apprezzare la potenza che tali strumenti mettono a disposizione degli

studiosi. E queste potenzialità vanno rintracciate in due aspetti principali: da una parte riuscendo a dare una descrizione sintetica in grado di poter visualizzare accuratamente un fenomeno, dall'altra utilizzando tale descrizione come possibilità di analisi e verifica del fenomeno stesso. Ciò vuole dire che non si tratta di semplici "illustrazioni" di una complessa dimostrazione matematica. Otteniamo una descrizione di un fenomeno con due linguaggi diversi: quello sintetico e quello simbolico. Inoltre quest'esperienza dimostra come la collaborazione tra matematica e geometria, essendo due facce della stessa medaglia, può portare a risultati interessanti e il computer costituisce il punto d'incontro tra due mondi che non possono, e non



III.18/ Impostando una prospettiva dal vertice del ramo negativo dell'iperboloide, osserviamo che le geodetiche iperboliche del disco di Poincaré, coincidono con le geodetiche iperboliche del modello di Minkowski.

devono, viaggiare separatamente. Un'ultima considerazione vuole specificare che l'esperienza non ha raggiunto traguardi impossibili o ha scoperto qualcosa di sconvolgente. Ha messo in luce (forse questo, in modo originale) alcune interessanti proprietà divenendo, secondo la mia opinione (condivisa peraltro da Lussardi), uno stimolo davvero interessante e forse inaspettato che fa ben sperare per il futuro della ricerca.

L'inversione circolare e il modello di Poincaré

Per poter rappresentare secondo un linguaggio sintetico e coerente con gli enti della geometria euclidea, gli as-

siomi della teoria della geometria iperbolica utilizzando il modello definito da Jules Henry Poincaré (1854-1912), abbiamo bisogno di introdurre uno strumento di lavoro: l'inversione circolare. Si tratta di una trasformazione geometrica di tipo *involutoria*³⁸, del piano euclideo privato di un punto (il centro dell'inversione), definita in questo modo: consideriamo una circonferenza (*fig. III.19*) ω di centro O e raggio r ; dato un punto P , diverso da O , individuiamo il punto P' della semiretta OP in modo da verificare la seguente relazione³⁹:

$$OP \cdot r = r \cdot OP'$$

Che può essere riscritta nella forma:

$$OP \cdot OP' = r^2$$

Definiamo P' l'inverso di P (e viceversa), r^2 la potenza dell'inversione, ω il cerchio dell'inversione ed infine il punto O centro dell'inversione. Da queste premesse, possiamo immediatamente notare che se il punto P si allontana sempre di più dalla circonferenza, il suo inverso P' tende a raggiungere il punto O . Possiamo quindi dire che il punto O è l'inverso del punto all'infinito del piano. Per la costruzione grafica dell'inversione circolare di un punto P rispetto al cerchio di inversione ω , occorre tracciare da O la perpendicolare alla retta OP ; tale retta incontrerà in A e C la circonferenza ω ; dal punto C si conduce un segmento che lo collega con il punto B diametralmente opposto ad A , individuando, così, l'inverso P' di P . Questa costruzione permette di individuare l'inverso di un punto sia esso esterno oppure interno al cerchio d'inversione.

È opportuno sottolineare alcune proprietà importanti dell'inversione circolare:

- ogni retta che passa per il centro si dice *anallagmatica*, ossia una curva che è invariante sotto l'inversione. Le sue proprietà vennero per primo discusse da Moutard nel 1864. Anche il cerchio d'inversione è una curva *anallagmatica*.
- ogni retta che non passa per il centro viene trasformata in una circonferenza passante per il centro (escludendo l'origine)
- ogni circonferenza passante per il centro si trasforma in una retta non passante per il centro
- ogni circonferenza non passante per il centro si trasforma in una circonferenza non passante per il centro
- se due curve (fig. III.20) incidenti in un punto formano un angolo α , anche le tangenti alle curve trasformate⁴⁰, formano il medesimo angolo α

Se una circonferenza passa per un punto P e per il suo inverso P' , allora essa è *anallagmatica* (fig. III.21). Infatti se consideriamo una delle infinite circonferenze γ passanti per P e P' , la potenza di O rispetto a γ rimane costante in virtù del fatto che:

$$OP \cdot OP' = OT^2$$

dove OT rappresenta il raggio del cerchio d'inversione. Inoltre, chiamati con R ed S i punti di intersezione della retta CO con il cerchio γ , possiamo scrivere la seguente

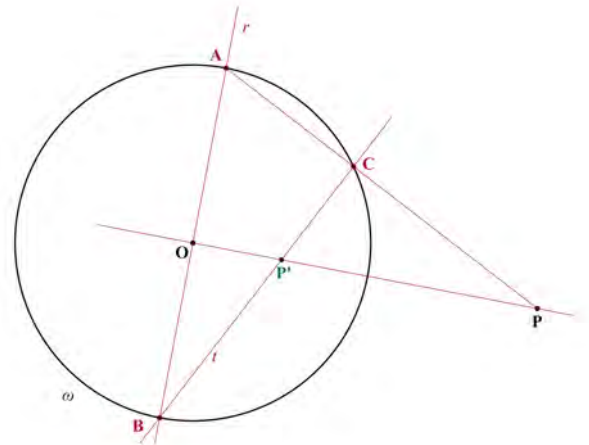
relazione:

$$r^2 = OP \cdot OP' = OR \cdot OS = (OC - r) \cdot (OC + r) = OC^2 - r^2$$

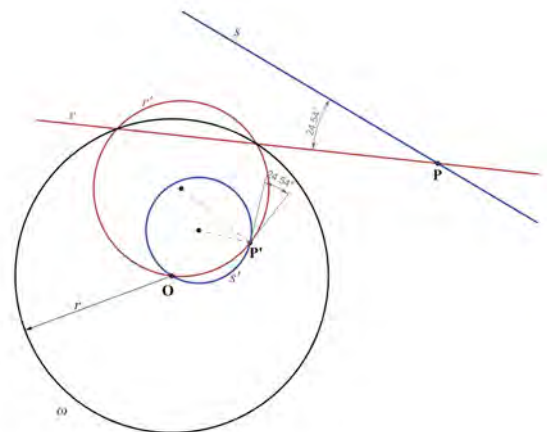
da cui segue:

$$r^2 + r'^2 = OC^2$$

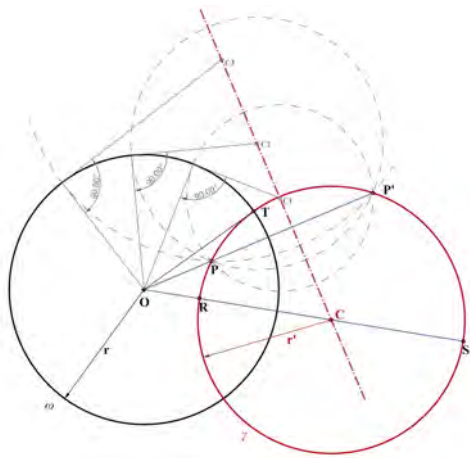
che vuole dire, per il teorema di Pitagora, che le circonferenze ω e γ sono ortogonali⁴¹ tra di loro. Possiamo dunque dire che l'infinità delle circonferenze passanti per un punto ed il suo inverso, sono tutte ortogonali al cerchio d'inversione. Inoltre, i punti P e P' individuano



III.19/ Costruzione grafica dell'inversione circolare di un punto P rispetto al cerchio d'inversione ω .



III.20/ Se due curve incidenti in un punto P formano un angolo a , anche le tangenti alle curve trasformate, formeranno il medesimo angolo a .

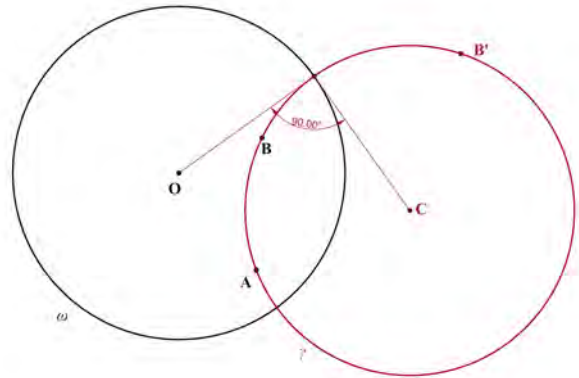


III.21/ Se una circonferenza passa per un punto P e per il suo inverso P' , allora essa è anallagmatica.

una retta (allineata con il centro del cerchio d’inversione) che è anche il luogo geometrico dei punti del piano dai quali possono essere condotti agli infiniti cerchi, segmenti tangenti eguali; tale retta prende il nome di *asse radicale* ed è ortogonale alla retta che è luogo geometrico dei centri del fascio di circonferenze. A questa proprietà segue l’importantissimo teorema:

data una circonferenza ω e due punti A e B interni ad essa e non allineati con il centro O della circonferenza, esiste una ed una sola circonferenza γ passante per i due punti e ortogonale alla circonferenza ω . Chiamiamo A e B (fig. III.22) i punti interni a ω e non allineati con O . Costruiamo l’inverso B' del punto B ; i tre punti A, B e B' individuano un’unica circonferenza γ che è ortogonale a ω . Nel caso in cui i punti A e B fossero stati allineati con l’origine O di ω , anche i loro inversi sarebbero stati contenuti nella stessa retta O, A e B , e quindi la circonferenza (degenere nella stessa retta O, A e B) avrebbe comunque mantenuto l’ortogonalità con ω .

Vediamo ora, le caratteristiche del modello del disco di Poincaré ed utilizziamolo per verificare gli assiomi della geometria iperbolica. Nel suo modello Poincaré assume che il piano iperbolico sia formato dalla regione interna di una circonferenza Ω che chiameremo orizzonte. I punti interni ad Ω sono la rappresentazione dei punti

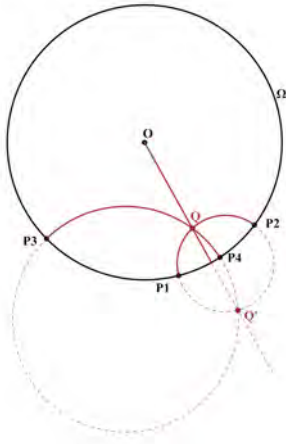


III.22/ Data una circonferenza ω e due punti A e B interni ad essa e non allineati con il centro O della circonferenza, esiste una ed una sola circonferenza γ passante per i due punti e ortogonale alla circonferenza ω .

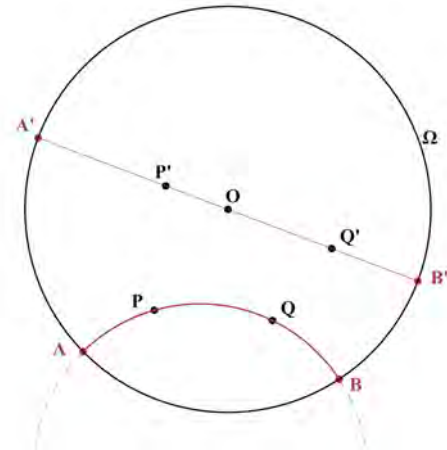
iperbolici e la circonferenza definisce il limite del piano. È possibile definire due tipi di rette, che hanno entrambi la caratteristica comune di essere ortogonali ad Ω : le *rette del primo tipo* sono i diametri “euclidei” del cerchio Ω , invece tutti gli archi di circonferenza ortogonali ad Ω e aventi su di essa gli estremi⁴², sono chiamate *rette del secondo tipo* (fig. III.23). Gli elementi definiti in questo modo, sono coerenti con gli assiomi della teoria iperbolica. Un primo assioma afferma che per due distinti punti passa una ed una sola retta, e questo è verificato per quanto detto a proposito dei teoremi sull’inversione circolare. Un secondo assioma afferma che ogni segmento può essere prolungato. La sua verifica risiede nel fatto che le rette del modello di Poincaré, sono topologicamente aperte, per cui ogni punto appartenente ad esso può avvicinarsi all’orizzonte Ω senza però giacere su di esso. Presi due punti distinti P e Q , essi individuano una retta iperbolica che, al limite, interseca Ω in due punti euclidei A e B (fig. III.24). Se chiamiamo PA, PB, QA e QB le distanze euclidee tra i vari punti, si definisce⁴³ la distanza iperbolica tra i punti P e Q :

$$d(PQ) = \ln \left(\frac{PA \cdot PB \cdot QB}{QA} \right)$$

Dunque nel modello di Poincaré, le distanze non si mantengono coerenti con quelle euclidee: due segmenti congruenti dal punto di vista euclideo non sono più

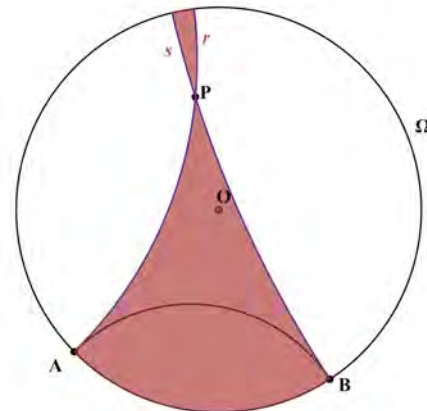


III.23/ Modello del disco di Poincarè in cui le rette iperboliche sono archi di circonferenze euclidee ortogonali all'orizzonte Ω .



III.24/ Due punti distinti P e Q , individuano un'unica retta iperbolica che toccano all'infinito, nei punti A e B , l'orizzonte Ω .

congruenti dal punto di vista iperbolico, e viceversa. Invece l'ampiezza degli angoli iperbolici coincide con l'ampiezza euclidea degli angoli formati dalle tangenti alle curve iperboliche nel loro punto di contatto. Vediamo il comportamento del modello di Poincarè in relazione al V postulato di Euclide, che sappiamo non essere valido nella teoria della geometria iperbolica. Se consideriamo una retta iperbolica passante per due punti A e B ed un terzo punto P esterno alla retta data, notiamo che per esso passano infinite rette che non toccano la retta AB . Nel fascio di rette passanti per P , le rette r ed s separano il piano iperbolico in due aree: una in cui giacciono le rette incidenti la retta AB (indicata in rosso nella figura) e l'altra in cui giacciono le rette che non la intersecano (fig. III.25). Va ricordato che le rette r ed s toccano all'infinito (cioè in A e B) la retta data e sono quindi parallele ad essa. Tutte le infinite rette che invece non giacciono nella zona interna ad r ed s sono dette *iperparallele*. Riassumendo, nella geometria iperbolica data una retta ed un punto esterno ad essa, passano per quel punto solo due rette parallele ed infinite iperparallele alla retta data. Con il modello di Poincarè gli assiomi della geometria iperbolica divengono proposizioni euclidee dimostrabili.



III.25/ Dati un punto P e la retta AB esterna ad esso, le rette r ed s separano il piano iperbolico in due aree: in una giacciono le rette passanti per P incidenti la retta AB (indicata in rosso) e l'altra in cui giacciono le rette che non la intersecano, cioè le parallele.

La tassellazione regolare del piano iperbolico nel modello del disco di Poincaré

Affronteremo ora il problema della tassellazione regolare del piano iperbolico⁴⁴ del tipo $[p,q]$, cioè composta da poligoni regolari di p -lati che si incontrano q -volte ai vertici. A differenti valori di $[p,q]$, si ottengono composizioni diverse che nascono dalla stessa tessera (o poligono), ed è esattamente questa variazione che distingue molti dei lavori di Escher. Abbiamo visto che la rappresentazione del piano iperbolico non è possibile nello spazio euclideo, senza ammettere delle distorsioni; ricordiamo che nel modello del disco di Poincaré le distorsioni riguardano la misura delle lunghezze delle figure ma non di quelle angolari (è un modello *conforme*). Nella tassellazione regolare di tipo $[p,q]$, i valori dei parametri p e q , determinano il tipo di geometria: ellittica (facendo riferimento a quella sferica), euclidea o iperbolica. In particolare la tassellazione $[p,q]$, è ellittica, euclidea oppure iperbolica a seconda che $1/q+1/p$ è maggiore, uguale o minore di $1/2$. Infatti, per una tassellazione $[p,q]$, ci sono q poligoni regolari ad ogni vertice. Quindi ogni angolo al vertice misura $2\pi/q$. Poiché ogni poligono regolare di p lati, ha anche p angoli uguali, abbiamo che la somma degli angoli interni deve essere $p \cdot 2\pi/q$. Ora, sappiamo che nel caso euclideo la somma degli angoli interni di un triangolo è di π , minore nel

caso iperbolico e maggiore nel caso sferico. Scomponendo un poligono di p angoli in triangoli, riusciamo a conoscere la somma dei suoi angoli interni che sarà uguale a $(p-2) \cdot \pi$ nel caso euclideo, minore nel caso iperbolico e maggiore nel caso sferico. Allora ragionando nel piano euclideo dovrà essere eguagliata la relazione:

$$p \cdot 2\pi/q = (p-2) \cdot \pi$$

che divisa per $2p\pi$ diviene:

$$1/q = 1/2 - 1/p$$

possiamo quindi dire che:

se $1/q+1/p=1/2$ la tassellazione è possibile nel piano euclideo

se $1/q+1/p < 1/2$ la tassellazione è possibile nel piano iperbolico

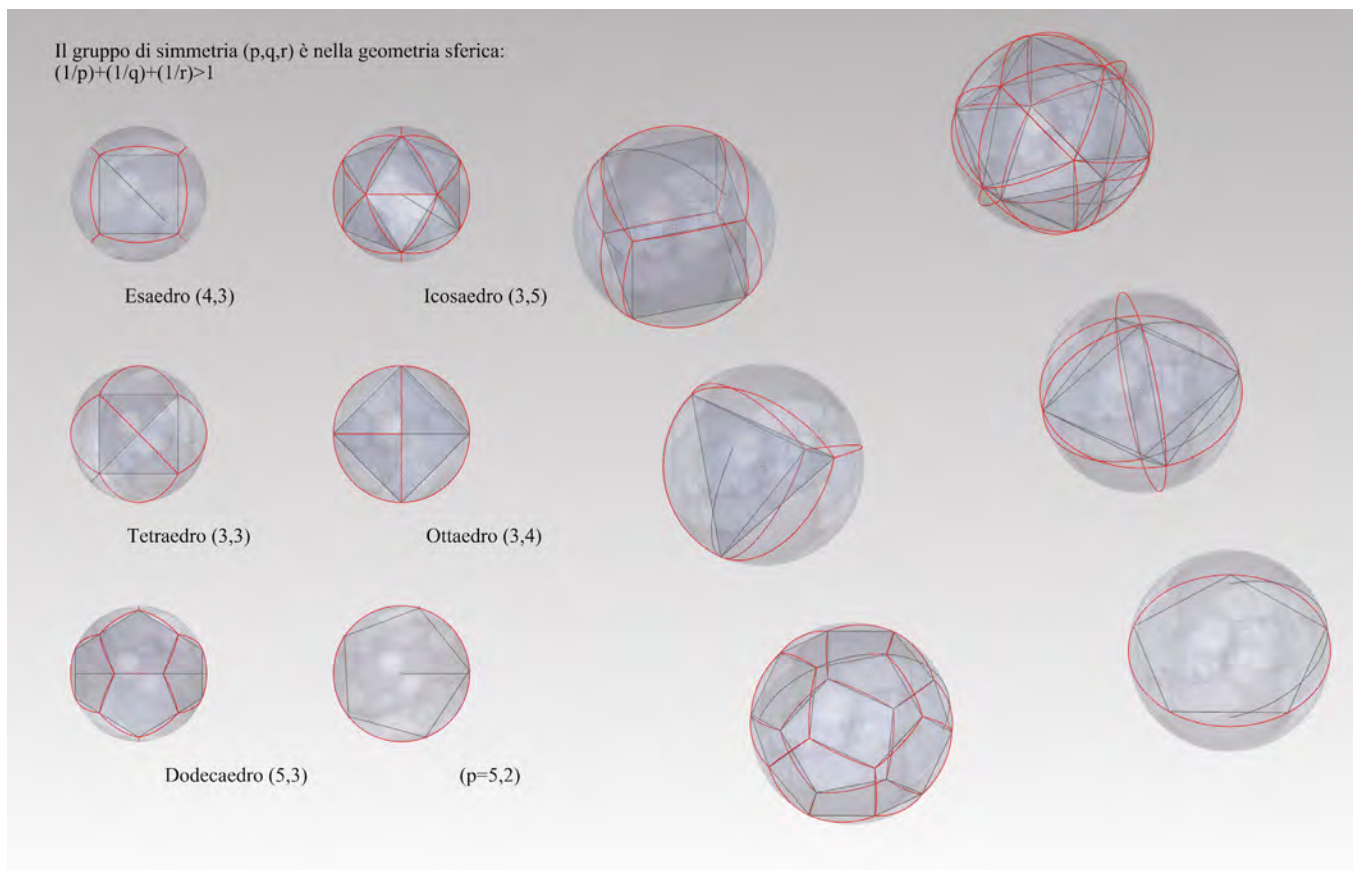
se $1/q+1/p > 1/2$ la tassellazione è possibile nel piano ellittico

La tabella III.1 riassume i tipi di tassellazioni possibili nelle tre differenti geometrie.

In essa sono indicate con E le tassellazioni euclidee, con S le tassellazioni sferiche di tipo *platonico*, con s le tassellazioni sferiche con $p=2$ oppure $q=2$, ed infine con H le tassellazioni iperboliche. Nella geometria sferica le uniche tassellazioni possibili sono la $[3,3]$, $[3,4]$, $[3,5]$, $[4,3]$ e la $[5,3]$ e corrispondono alle versioni platoniche dei solidi regolari (fig. III.26) (tetraedro, ottaedro, icosaedro, esaedro e dodecaedro), proiettati sulla superficie della sfera che li circoscrive. Le tassellazioni del tipo $[p,2]$ (indi-

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$	$p=8$	$p=9$	$p=10$	$p=11$	$p=12$
$q=1$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$q=2$	-	s	S	S	S	S	S	S	S	S	.	.
$q=3$	-	s	S	S	S	E	H	H	H	H	.	.
$q=4$	-	s	S	E	H	H	H	H	H	H	.	.
$q=5$	-	s	S	H	H	H	H	H	H	H	.	.
$q=6$	-	s	E	H	H	H	H	H	H	H	.	.
$q=7$	-	s	H	H	H	H	H	H	H	H	.	.
$q=8$	-	s	H	H	H	H	H	H	H	H	.	.
$q=9$	-	s	H	H	H	H	H	H	H	H	.	.
$q=10$	-	s	H	H	H	H	H	H	H	H	.	.
$q=11$	-
$q=12$	-

tabella III.1

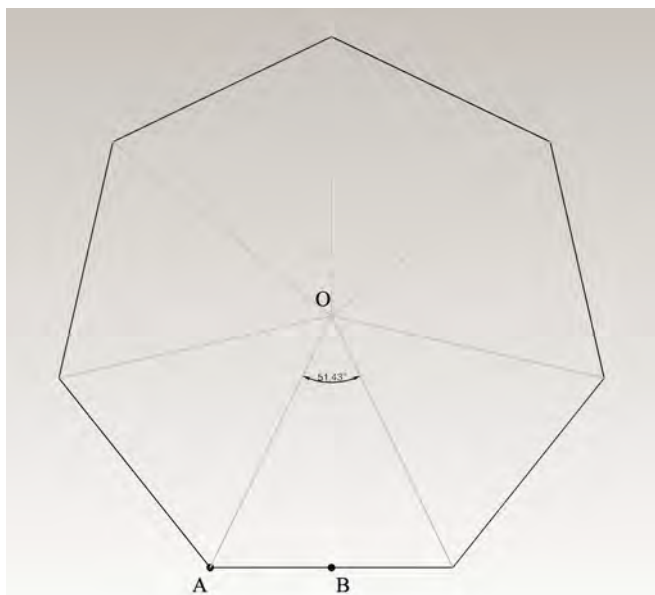


III.26/ Nella geometria sferica le uniche tassellazioni regolari possibili corrispondono alle versioni platoniche dei solidi regolari proiettati sulla superficie della sfera che li circoscrive.

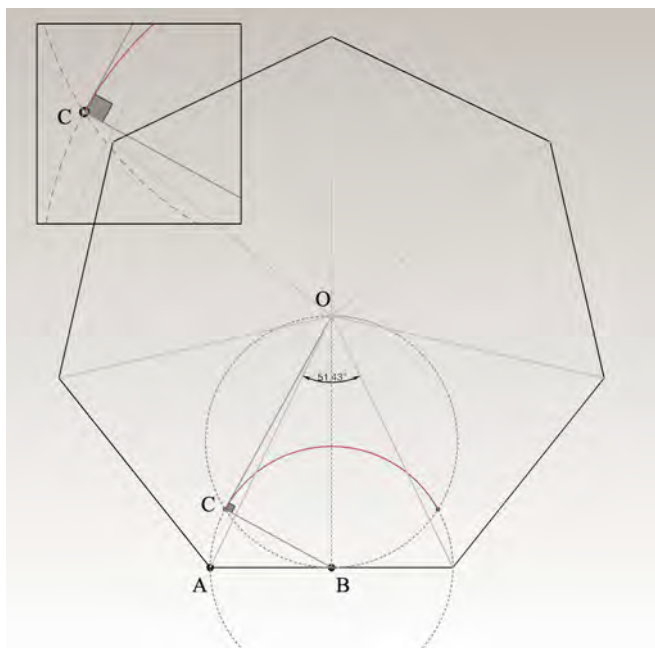
cate nella tabella con il simbolo s), possono essere lette come due emisferi separati dalla linea dell'equatore che va interpretata come la proiezione (sempre dal centro della sfera), di un poligono di lati p sulla superficie sferica; in questo modo qualunque sia il numero dei lati (con la condizione necessaria che $p \geq 2$) del poligono otteniamo sempre la medesima proiezione, e cioè l'equatore della sfera. In modo del tutto analogo possiamo interpretare la tassellazione sferica del tipo $[2,q]$, con q che indica il numero di settori uguali che suddividono la sfera. Per quanto riguarda le tassellazioni del piano euclideo riconosciamo facilmente le uniche tipologie possibili $[3,6]$, $[4,4]$ e $[6,3]$ che rappresentano le tassellazioni regolari ottenute con i triangoli equilateri, quadrati, e gli esagoni regolari.

La costruzione con riga e compasso di una tassellazione regolare del piano iperbolico

Costruiamo, adesso, una delle infinite tassellazioni con cui è possibile dividere il piano iperbolico, in modo da definire un algoritmo valido ed estendibile ad altre combinazioni di p e q . La prima è relativa alla tassellazione di tipo $[7,4,2]$ che evidentemente non è possibile applicare nel piano euclideo (un eptagono euclideo ha infatti angoli interni $\approx 129^\circ$ e quindi non divide in un numero intero l'angolo giro). Il fatto di procedere con un eptagono non ha nessuna motivazione precisa se non quella di dimostrare che la costruzione è valida in un'infinità di casi anche non ammessi dalla geometria euclidea. L'algoritmo è diviso in due fasi: la prima è la costruzione

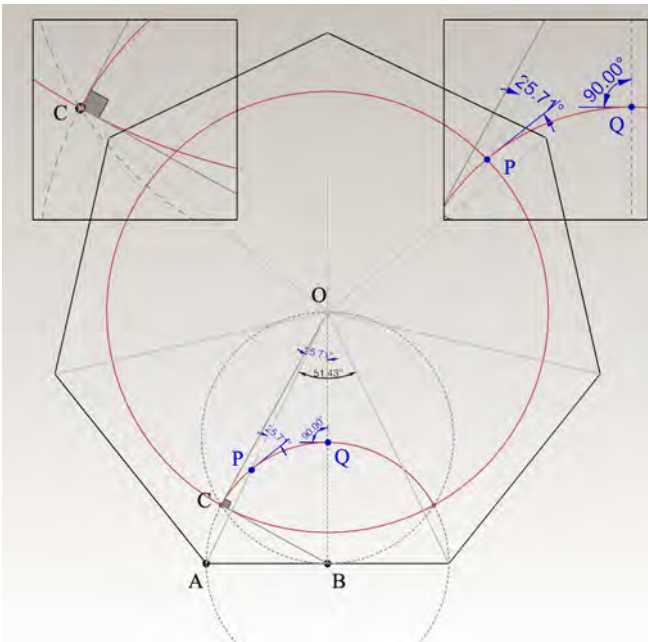


III.27/ Costruzione della tassellazione regolare del piano iperbolico, secondo il gruppo di simmetria (7,4,2).

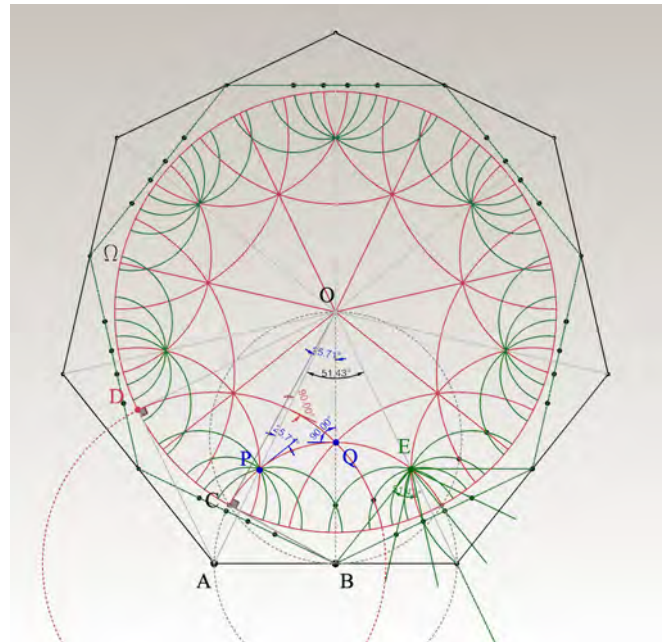


III.28/ Determinazione del raggio euclideo OC, che rappresenta l'orizzonte iperbolico Ω .

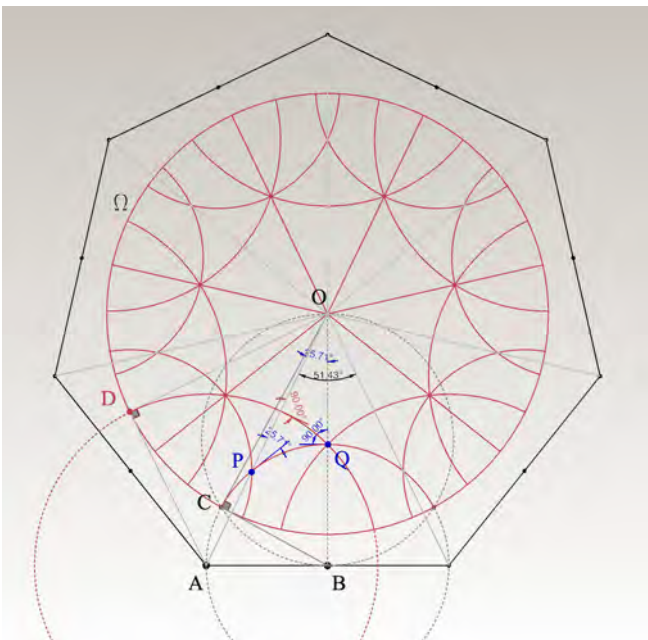
del poligono iperbolico di p lati; la seconda prevede la tassellazione *percepibile*⁴⁵ del piano iperbolico⁴⁶. Immaginiamo di non avere problemi per la rappresentazione dell'eptagono euclideo iniziale⁴⁷, affidandoci in questo caso alla precisione degli strumenti informatici a nostra disposizione, che rappresentano con la stessa accuratezza tanto un triangolo equilatero quanto un eptagono regolare. Costruito l'eptagono regolare (fig. III.27) di centro O e angoli al centro di $2\pi/7$, da un punto medio B di un suo lato tracciamo una circonferenza γ di raggio BA (fig. III.28), in cui andiamo ad individuare un punto C tale che l'angolo OCB sia retto. L'arco di circonferenza γ (fig. III.29) sarà la nostra prima geodetica in relazione all'orizzonte Ω passante per C ; infatti notiamo non solo che tale arco è ortogonale alla circonferenza Ω (come deve essere per quanto previsto nel modello del disco di Poincaré) ma notiamo anche che la retta AO (chiamata retta del primo tipo) incontra la circonferenza γ secondo un angolo di $\pi/7$; chiamiamo P e Q l'intersezioni con γ e risulta così definito un triangolo iperbolico OPQ di angoli $\pi/7$, $\pi/7$ e $\pi/2$. Tracciamo ora la geodetica passante per Q e che ha AO come asse di simmetria e che incontrerà OB nel punto R secondo un angolo di $\pi/4$ e la retta AO nel punto S secondo un angolo di $\pi/2$. Il triangolo iperbolico PQR avrà angoli interni di $\pi/7$, $\pi/4$, $\pi/2$. Operando delle isometrie di riflessione rispetto alle rette OA e OB , otteniamo la scansione dell'eptagono iperbolico, secondo dei settori triangolari, ognuno dei quali è diviso in due metà (fig. III.30). L'analisi angolare che i software di modellazione matematica mettono a disposizione, ci consentono di verificare che l'eptagono regolare che abbiamo costruito nella geometria iperbolica, ha angoli al vertice di $\pi/2$ (gli angoli al vertice di un eptagono regolare nella geometria euclidea abbiamo detto essere di $\approx 129^\circ$) e angoli al centro di $2\pi/7$ (come avviene in quella euclidea). In altre parole abbiamo costruito tra le infinità⁴⁸ di eptagoni ammesse dalla geometria iperbolica, quell'eptagono che ci consente una tassellazione che vede una disposizione di altri quattro eptagoni attorno ad ogni vertice. A questo punto per proseguire la tassellazione del piano iperbolico, dobbiamo aggiungere delle geodetiche a partire dai vertice dell'eptagono appena descritto, ruotando le geodetiche



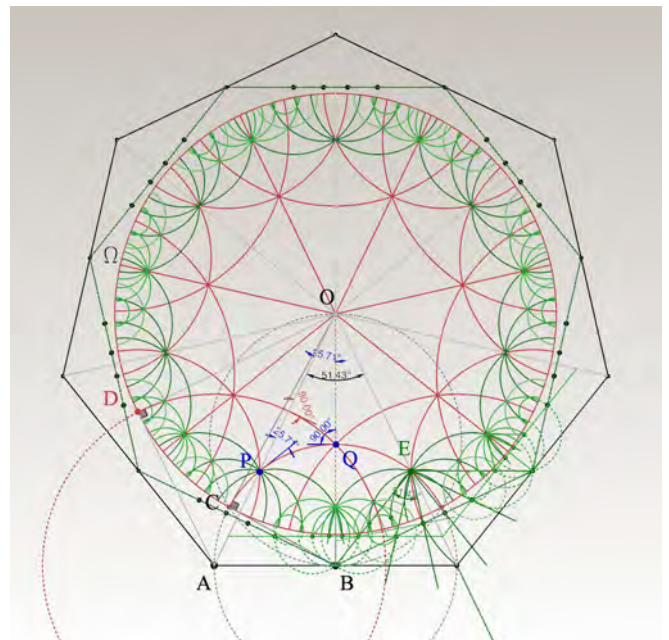
III.29/ Individuazione del triangolo iperbolico OPQ di angoli $\pi/7$, $\pi/7$ e $\pi/2$.



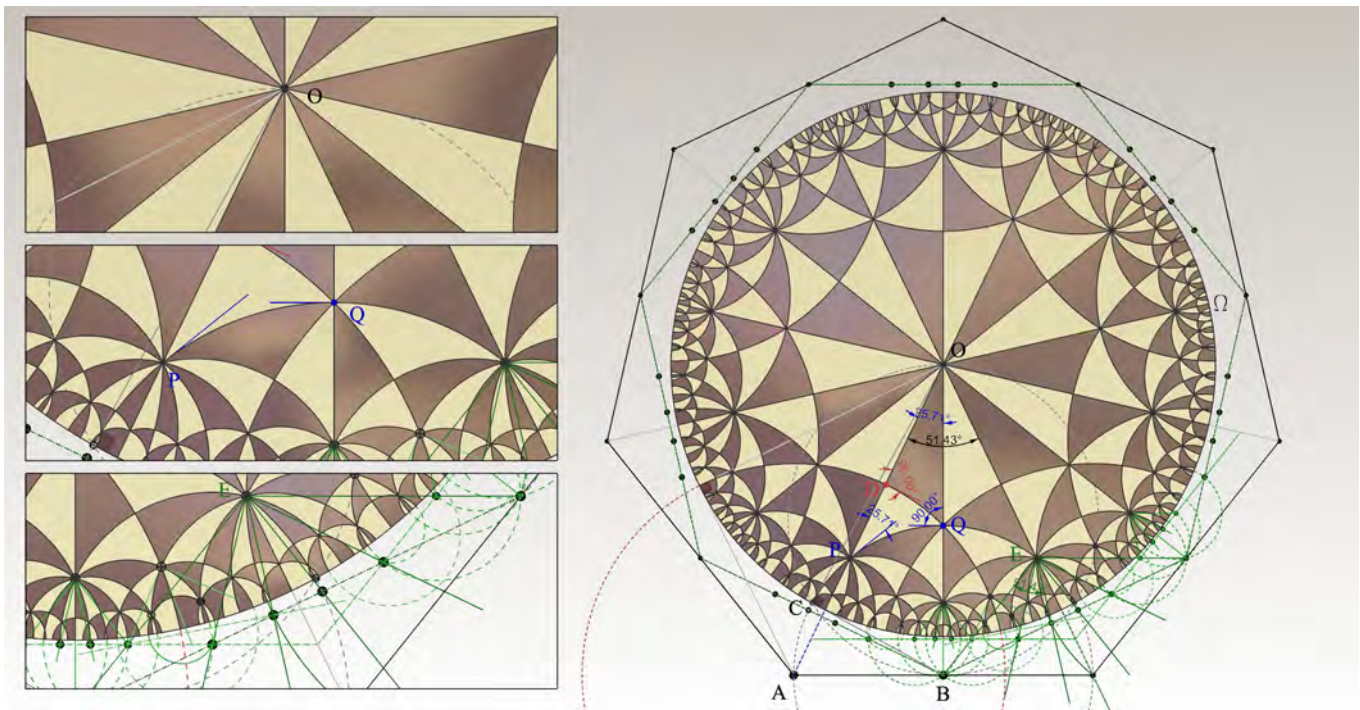
III.31/ Per determinare il centro della circonferenza euclidea ortogonale ad Ω , si ruota il raggio di un angolo $\pi/7$.



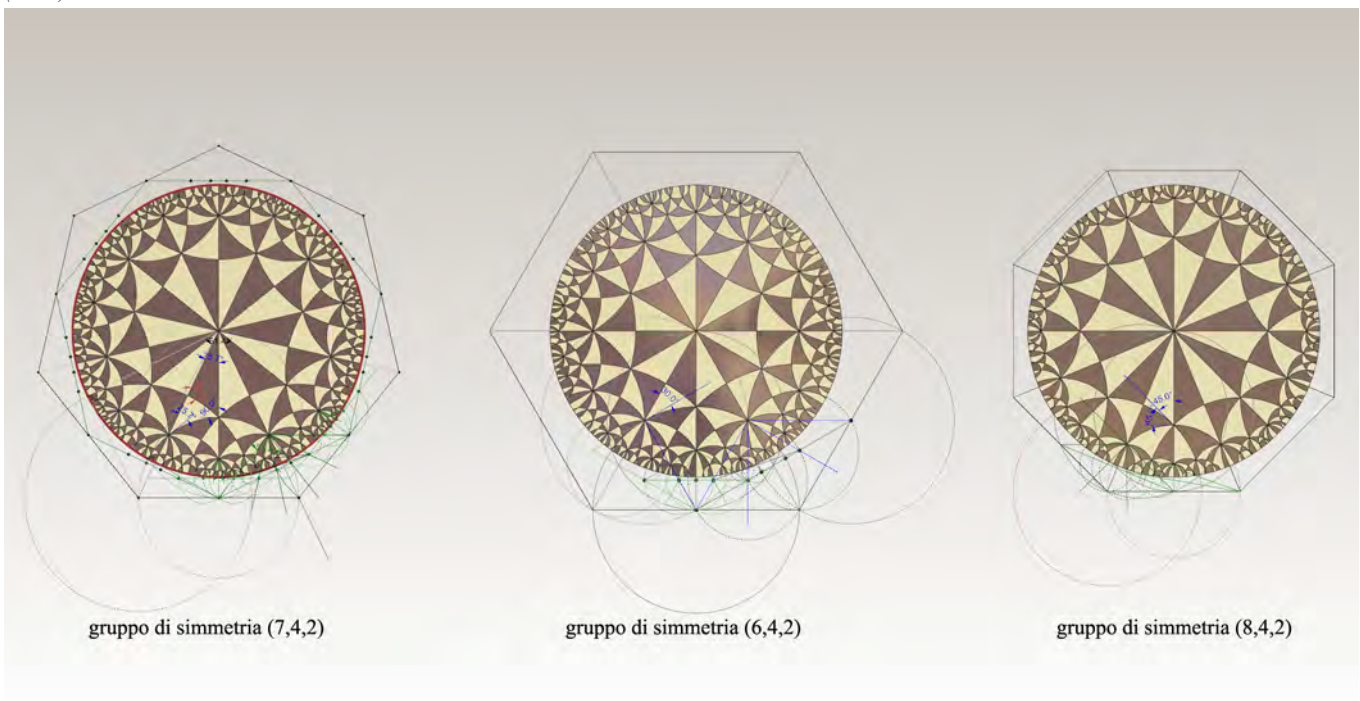
III.30/ Ogni volta che tre o più linee iperboliche passano per un punto, le corrispondenti circonferenze ortogonali a Ω hanno un secondo punto in comune esterno a Ω ; esse sono coassiali e pertanto i loro centri giacciono su una linea euclidea.



III.32/ Determinazione di un nuovo livello di suddivisione.



III.33/ Telaio geometrico finale, utilizzato per la costruzione della tassellazione regolare del piano iperbolico secondo il gruppo di simmetria (7,4,2).



III.34/ Tassellazioni iperboliche (7,4,2), (6,4,2) e (8,4,2), ottenute utilizzando il medesimo algoritmo.

già passanti per i vertici, secondo un angolo $\pi/7$. Per le proprietà già viste nell'inversione circolare⁴⁹, ogni volta che tre o più linee iperboliche passano per un punto, le corrispondenti circonferenze ortogonali a Ω hanno un secondo punto in comune esterno a Ω ; esse sono coassiali e pertanto i loro centri giacciono su una linea euclidea (da *fig. III.31 a fig.III.33*). Così per determinare il centro della circonferenza euclidea ortogonale ad Ω , è sufficiente ruotare il raggio di una delle circonferenze che rappresentano i lati iperboliche del poligono, secondo un angolo $\pi/7$ proprio attorno al vertice **E**. Il punto d'intersezione con la retta **BF** (dove **F** è il punto medio del lato dell'eptagono esterno ad Ω) è il centro euclideo della circonferenza ortogonale ad Ω . Questo algoritmo come abbiamo detto è estendibile ad altri casi di tassellazione regolare del piano iperbolico, come illustrato nella figura (*fig. III.34*).

La simmetria non euclidea in Circle Limit III di M.C. Escher

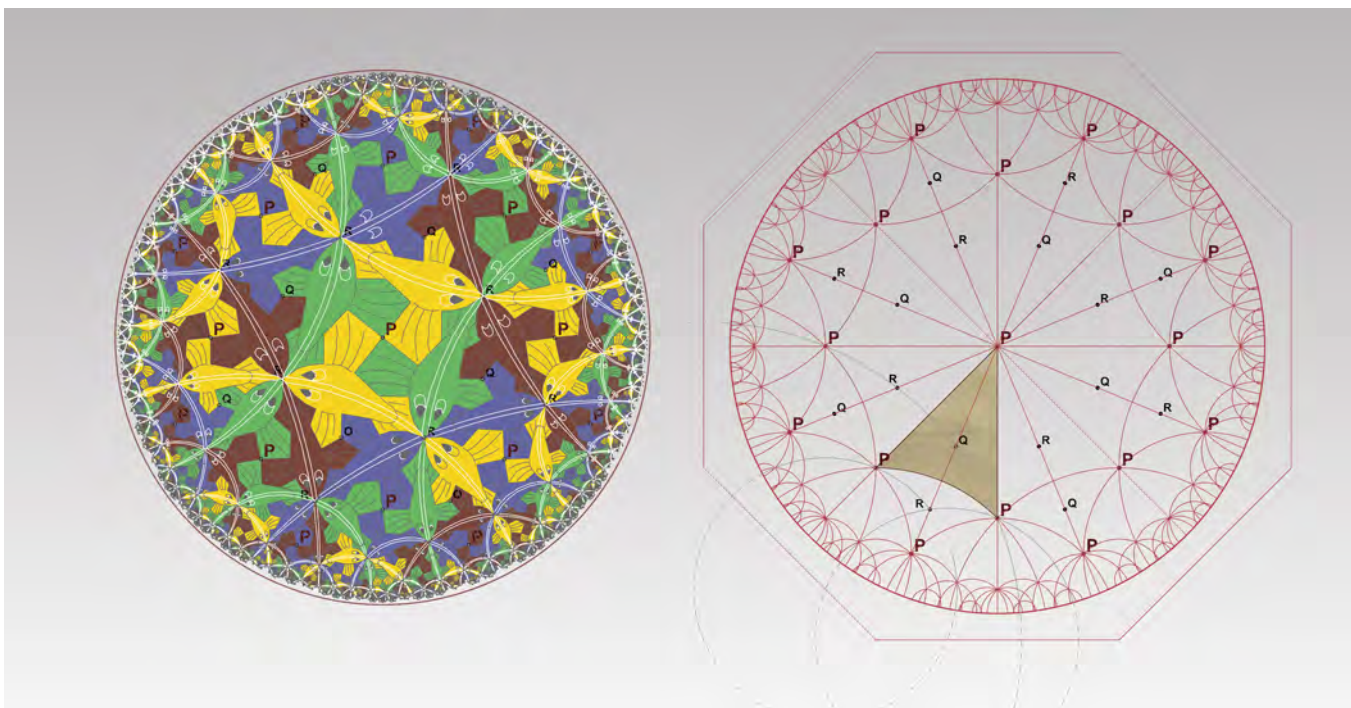
A questo punto abbiamo gli strumenti necessari per analizzare l'opera di Escher *Circle Limit III*⁵⁰, considerata dallo stesso autore la migliore della serie dei *Circle Limit*. Nella sua critica al *Circle Limit I*, Escher scriveva “*Le figure animali più grandi sono poste al centro e il limite degli infinitamente tanti e degli infinitamente piccoli viene raggiunto sul bordo circolare. Lo schema della configurazione, a prescindere dalle tre rette che passano per il centro, consiste semplicemente di archi con raggi che diventano sempre più corti via via che si avvicinano al bordo limite. Inoltre, tutti gli archi intersecano la circonferenza limite secondo angoli retti. Questa incisione Circle Limit I, essendo un primo tentativo*⁵¹ *evidenzia ogni sorta di difetti. Non solo la forma dei pesci, sviluppata rigidamente a partire da astrazioni rettilinee in animali rudimentali, ma anche la disposizione e la loro rispettiva posizione, lasciano molto a desiderare [...] Non vi è continuità, né fluidità di movimento, né unità di colore in ogni fila*”. E poi aggiunge “*Nella xilografia a colori Circle Limit III quasi tutti i difetti sono stati eliminati. Abbiamo qui solo sequenze di flussi di movimento da parte a parte: tutti i pesci*

della stessa sequenza hanno eguale colore e nuotano uno dietro l'altro, testa contro coda, lungo un arco circolare che va da bordo a bordo. Man mano che si avvicinano al centro diventano più grandi. Per ogni settore sono stati necessari quattro colori in modo che vi fosse un netto contrasto con le parti vicine. Dato che tutte queste file di pesci guizzano come razzi dall'infinitamente lontano, perpendicolarmente al bordo, e ritornano da dove sono venuti, non un singolo pesce raggiunge mai il bordo. All'esterno vi è il nulla assoluto. E tuttavia questo mondo circolare non può esistere senza il vuoto intorno, non solo perché un dentro presuppone un fuori, ma anche perché è proprio là nel nulla che ha origine l'impalcatura che determina con geometrica precisione i centri degli archi di circonferenza che formano lo scheletro”. Effettivamente il *Circle Limit III* è la migliore delle opere della serie, in cui ci sono le rette iperboliche che toccano secondo angoli di 90° la circonferenza esterna, ma anche altre linee che la toccano secondo un angolo costante di 80° . Escher riuscì, basandosi solo sull'intuizione, a fare una costruzione geometricamente perfetta della cosiddette *curve di equidistanza*.

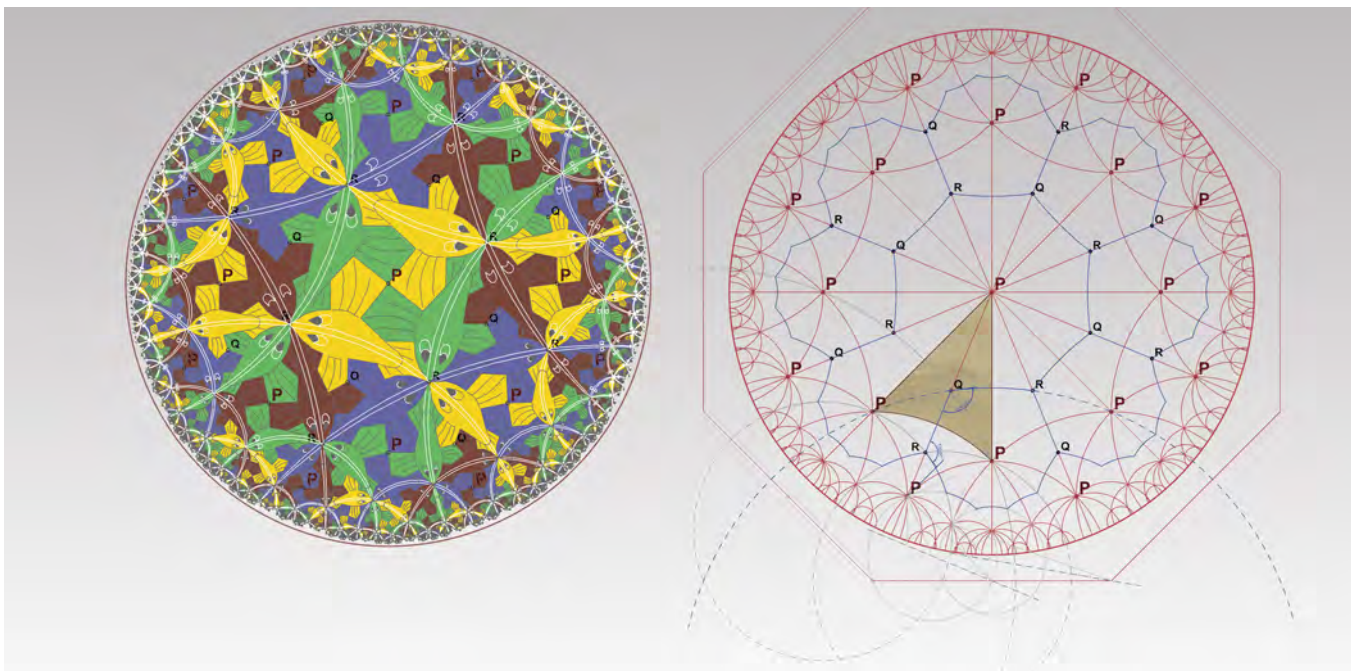
Osservando *Circle Limit III*, ci si accorge che ci sono tre gruppi di punti significativi (*fig. III.35*):

- **P** (dove si incontrano le pinne destre dei pesci) sono i vertici dei triangoli che da un punto di vista iperbolico sono equilateri e congruenti (hanno gli angoli di 45°)
- **Q** (dove si incontrano le pinne sinistre dei pesci), al centro dei triangoli equilateri
- **R** (dove le bocche di tre pesci toccano le code di altri tre), di nuovo al centro dei triangoli equilateri

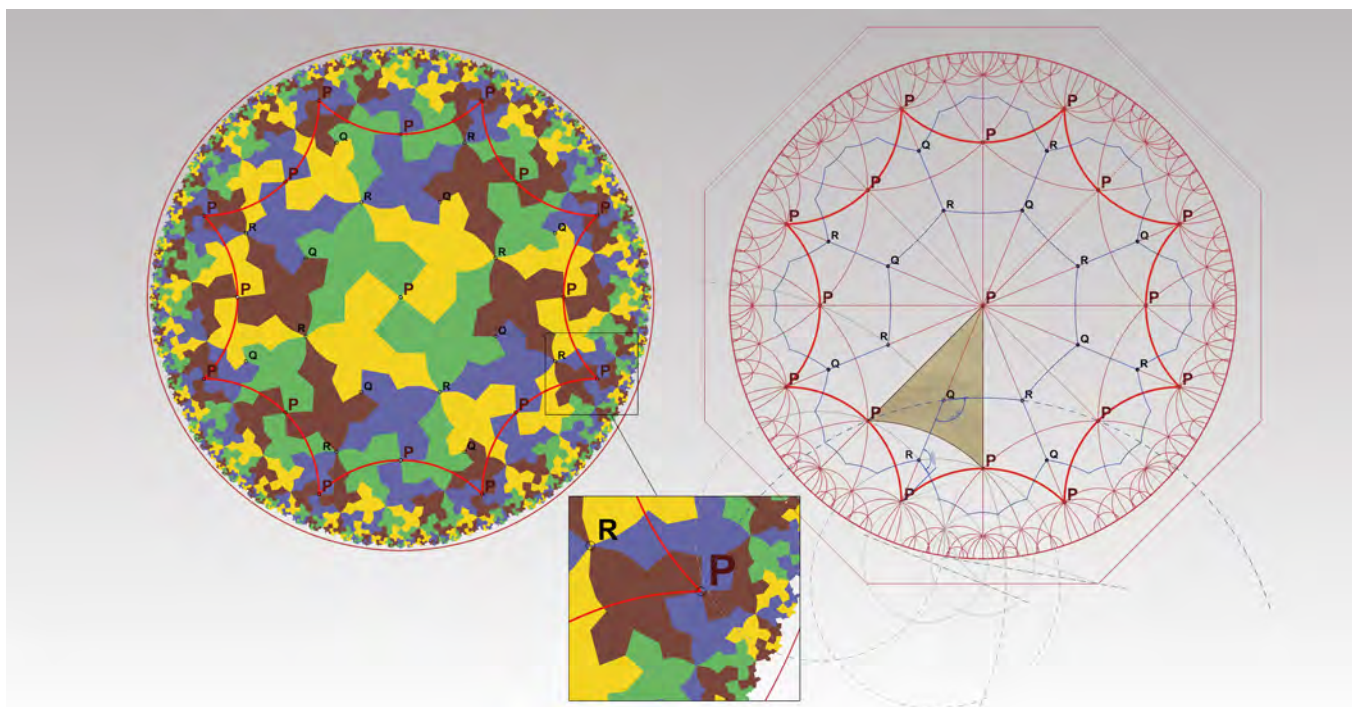
I vertici **P** appartengono ognuno a 8 triangoli equilateri creando così un tassellazione del tipo [3,8]: gli angoli al vertice di 45° consentono una divisione in otto parti dell'angolo giro. I punti **Q** ed **R**, essendo i centri dei triangoli, diventano i vertici di poligoni ottagonali (*fig. III.36*) che si incontrano tre volte in ogni punto; sono cioè, i vertici della tassellazione duale [8,3]. Inoltre, l'uso di 4 colori diversi (il giallo, il verde, il blu ed il marrone), dà vita a sei combinazioni possibili, che si presentano tutte con la stessa frequenza (*fig. III.37*). Infatti se andiamo ad isolare tutti i punti **P** che presentano la stessa combinazione di colore ad es. blu e marrone, essi



III.35/ Individuazione dei punti caratteristici P, Q ed R , della tassellazione iperbolica di Circle Limit III, di M. C. Escher.



III.36/ I punti Q ed R , sono anche i vertici di poligoni ottagonali che si incontrano tre volte in ogni punto; sono cioè, i vertici della tassellazione duale $(8,3)$.



III.37/ I punti P che presentano la stessa combinazione di colore, sono i vertici di ottagoni con angoli al vertice di 45° , che consentono quindi una tassellazione del tipo $(8,8)$.

sono i vertici di ottagoni con angoli al vertice di 45° , che consentono quindi una tassellazione del tipo $[8,8]$. Tutto questo genera una tassellazione del tipo *compound* (ovvero composta), che è definita dalla sovrapposizione delle otto (2 dovute alla scansione di base e 6 dovute alla scansione per colori) tassellazioni possibili:

$[3,8] \{6[8,8]\} [8,3]$

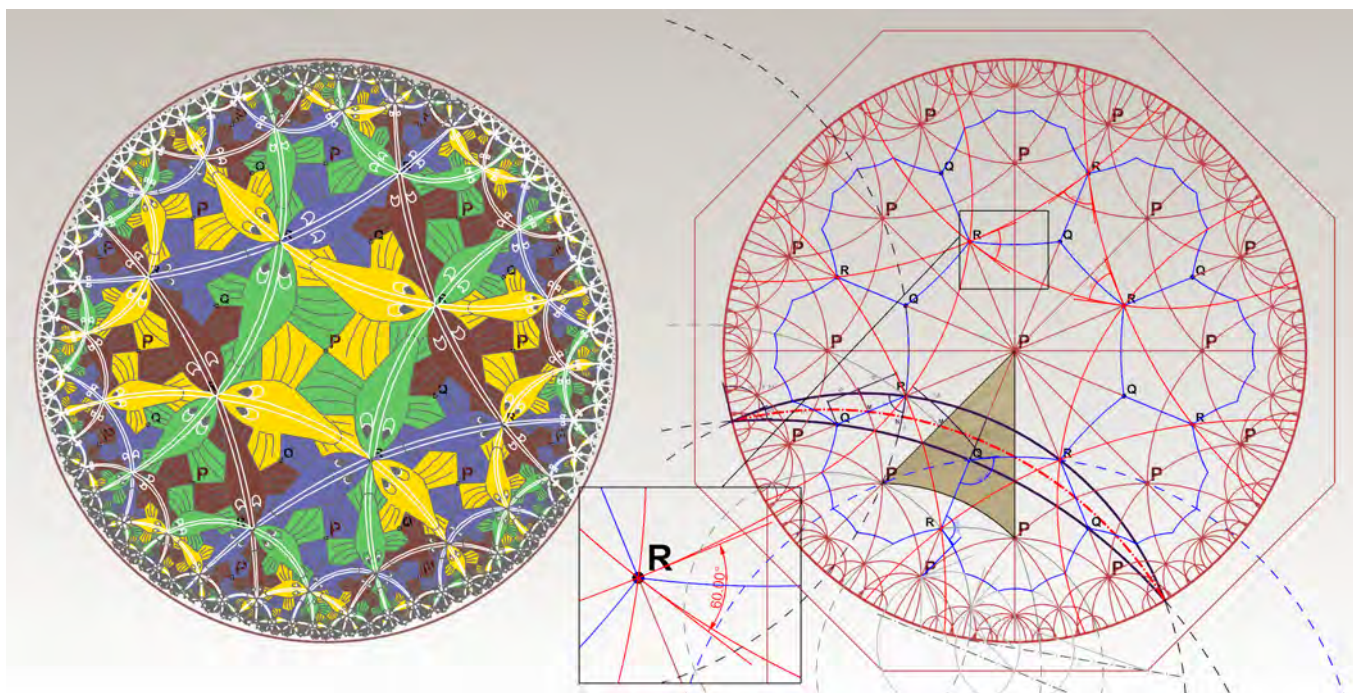
È significativa la frase con cui Coxeter prosegue la sua analisi geometrica dell'opera "Quindi, in effetti, Escher ha anticipato di cinque anni la mia scoperta⁵² di questa tassellazione composta iperbolica, che è analoga a quella che corrisponde alla Stella Octangula di Keplero: la tassellazione composta finita

$[4, 3] \{2 [3, 3]\} \{3, 4\}$

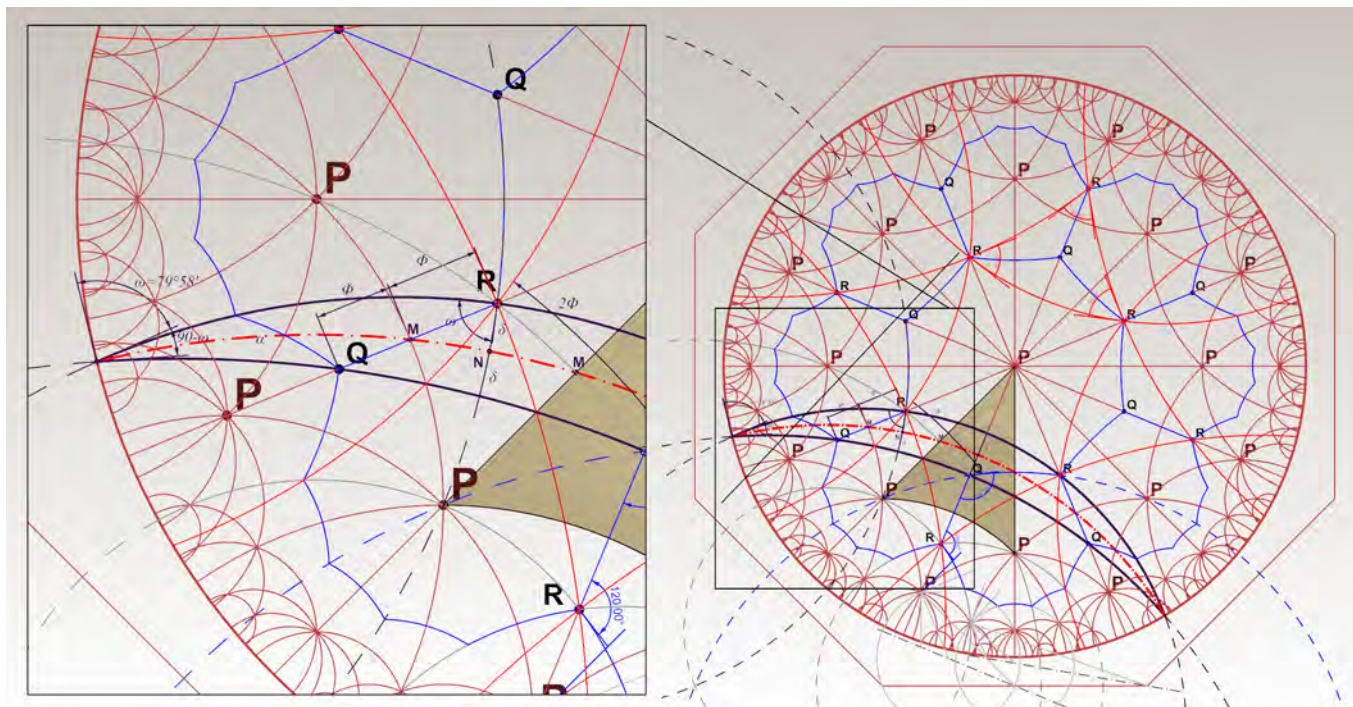
di due tetraedri $[3, 3]$ i cui 8 vertici coincidono con quelli di un cubo $[4, 3]$ mentre le loro facce giacciono nello stesso piano delle facce dell'ottaedro reciproco $[3, 4]$ ".

Ad una prima lettura dell'opera (fig. III.38), le linee bianche sembrano formare una tassellazione semiregolare costituita da triangoli equilateri e quadrangoli. Ma

ciò è assurdo, visto che i triangoli così definiti hanno angoli uguali di 60° che non sono ammessi nella geometria iperbolica. Allora cosa sono queste linee bianche che toccano la circonferenza limite, secondo un angolo di circa 80° ? Osserviamo che (fig. III.39) esse uniscono i punti R , e osserviamo anche, che se uniamo con un'altra linea i punti Q , la coppia di linee RRR e QQQ racchiudono una spezzata iperbolica costituita dai lati degli ottagoni individuati prima. Poiché tali ottagoni sono regolari dal punto di vista iperbolico, i relativi lati hanno una lunghezza costante che chiamiamo 2Φ . Per ragioni di simmetria, se uniamo i punti medi dei lati degli ottagoni, otteniamo una retta iperbolica α , che è equidistante dalle linee RRR e QQQ . Perciò tale coppia di rette è definita come il luogo dei punti del piano iperbolico distanti una stessa lunghezza δ da α , ed è chiamata *curva equidistante* con asse α e altitudine δ . La linea spezzata formata dai lati degli ottagoni è il *poligono di Petrie*: ogni coppia consecutiva di spigoli appartiene ad una faccia, mentre tre non appartengono mai alla stessa



III.38/ Le linee bianche sembrano formare una tassellazione semiregolare costituita da triangoli equilateri e quadrangoli. Ma ciò è assurdo, visto che i triangoli così definiti hanno angoli uguali di 60° che non sono ammessi nella geometria iperbolica.



III.39/ La coppia di archi RRR e QQQ , è chiamata curva-equidistante con asse a ed altitudine δ .

faccia. La curva equidistante ha due rami congruenti (come avviene per l'iperbole euclidea) di cui Escher rappresenta solo quello passante per i punti **R**. Chiamiamo ω l'angolo con cui l'arco **RRR** taglia l'orizzonte Ω ; tale angolo è chiamato secondo la teoria di Lobacewskji angolo di parallelismo per la distanza $RN=\delta$, e vale:

$$\omega = \pi(\delta) = 2 \text{ArcTan} \cdot e^{-2}$$

Con una serie di passaggi matematici, Coxeter arriva a dimostrare che in *Circle Limit III* il valore di w deve essere $\approx 79^\circ 58'$, cioè esattamente⁵³ come appare nell'opera di Escher.

Note

1. H.S.M. Coxeter, *La simmetria non-euclidea in Circle Limit III di M.C. Escher*, in M. Emmer, a cura di, *L'occhio di Horus. Itinerari nell'immaginario matematico*, Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani S.p.A., 1989.

2. F. Bool J.L. Locher, *M.C. Escher: his life and complete graphic work*, 1981

3. Sembra che il giovane e matematico fosse di carattere piuttosto focoso. Più volte arrestato ed espulso dall'Ecole Normale, morì durante un duello. La notte precedente (avendo intuito che sarebbe morto durante quel duello) cercò di sistemare tutti i suoi lavori matematici e completò la teoria algebrica dei gruppi, definendoli come permutazioni che descrivono le radici di un dato polinomio.

4. Nel 1611 il navigatore Walter Raleigh, organizzatore delle spedizioni dalle quali nacque l'impero coloniale inglese, propose al matematico Thomas Harriot il seguente problema, di evidente interesse pratico: qual è il miglior modo di impilare palle di cannone? Il metodo più ovvio è quello che si usa anche per accatastare le arance sui banchi del mercato: si dispone anzitutto una fila di arance; la seconda fila si dispone sfalsata, in modo da porre le arance negli avvallamenti della prima fila, e così via; una volta disposto un primo strato, si dispone un secondo strato sfalsato nello stesso modo, e si continua fino a costruire una piramide. In alcune fortezze rimangono ancora cataste di palle di cannone disposte così. Niente però assicura che, soltanto perché questa è la maniera intuitiva di disporre le arance o le palle di cannone, essa sia anche la migliore possibile, e proprio di questo Raleigh voleva sincerarsi. Harriot non seppe risolvere il problema, e lo passò all'astronomo Keplero, che gli diede questa forma: determinare quale configurazione di sfere nello spazio abbia la mas-

sima densità. Un analogo problema si pone per i cerchi nel piano, nel qual caso il problema si può illustrare chiedendo quale sia la più efficiente disposizione di monete su un tavolo. Keplero effettuò alcuni calcoli, per entrambi i casi, ma dovette limitarsi a congetturare che le disposizioni ovvie sono effettivamente le migliori. Il primo progresso si ebbe nel 1831 grazie al principe dei matematici Karl Gauss. Egli dimostrò che, nel caso dei cerchi, la configurazione ovvia è la migliore fra tutte quelle reticolari, tali cioè che i centri dei cerchi formino un reticolo planare, cioè una configurazione simmetrica di parallelogrammi. Anche per lo spazio Gauss dimostrò che la configurazione ovvia è la migliore fra tutte quelle reticolari, tali cioè che i centri delle sfere formino un reticolo spaziale, cioè una configurazione simmetrica di parallelepipedi. Il caso generale rimase però aperto, e andò a costituire la seconda parte del diciottesimo problema della famosa lista di Hilbert. Molti dei problemi di Hilbert sono stati risolti, ma quello mutuato da Keplero resisteva finché il 9 agosto del 1998 Thomas Hales, dell'Università del Michigan, ha annunciato di aver concluso la ricerca e risolto il problema: la dimostrazione richiede 250 pagine e un programma di computer da 3 gigabytes, ed è esposta nel sito Internet di Hales. Quando il numero di dimensioni sale, la cosa diventa ancora più interessante. Il problema della miglior configurazione fra tutte quelle reticolari è stato risolto fino alla dimensione 8. Ma non sempre le configurazioni reticolari offrono la migliore densità. Il problema della configurazione di sfere a massima densità in spazi multidimensionali riveste oggi una grande importanza nella teoria dei codici di correzione d'errore per la trasmissione di messaggi. Proprio in queste applicazioni sta l'importanza del problema di Keplero e della sua recente soluzione.

5. Parmenide è un filosofo presocratico di Elea, colonia greca situata sulla costa della Campania. Secondo la testimonianza di Platone, Parmenide nacque tra il 515 e il 510 a.C.; discepolo della scuola pitagorica, è considerato il fondatore della scuola di Elea che annoverò tra i suoi discepoli Zenone. Il suo pensiero è esposto in un poema didascalico in versi che la tradizione ha intitolato *Intorno alla Natura*.

6. Comunque si suddivida in parti uguali sia la diagonale che il lato di un quadrato, non si giungerà mai ad un segmento di lunghezza definita, in modo tale che sia la diagonale che il quadrato ne rappresentino dei numeri interi.

7. Karl Popper (1902-1994) epistemologo viennese è considerato uno dei più influenti filosofi della scienza del Novecento. *L'elenchus* è tratto dall'articolo di Popper "Come la luna può rischiare le due vie di Parmenide".

8. Il paradosso è legato alla divisione all'infinito dello spazio. In-

fatti, la freccia per colpire il bersaglio, dovrà percorrere la metà della distanza, ad ancora la metà della metà e poi ancora la metà dello spazio rimanente, proseguendo così in una regressione all'infinitamente piccolo, per cui alla fine non raggiungerà mai il bersaglio.

9. L'atomo nella concezione della fisica moderna venne introdotto nel 1808 da John Dalton che lo chiamò così perché si pensava fosse la parte più piccola della materia. Ora definisce la più piccola parte di ogni elemento esistente in natura che ne conserva le proprietà chimiche.

10. K. Popper, *La ricerca non ha fine. Autobiografia intellettuale*, a cura di D. Antiseri, Armando Editore, 2002.

11. Penrose, *La mente nuova dell'imperatore*, pp. 201-203.

12. Penrose identifica nella teoria della selezione naturale una delle teorie più vicine alla definizione di superba, ma rimane di livello secondario rispetto a quelle fisiche che vi rientrano.

13. Tesi sostenuta anche dal filosofo Immanuel Kant (1724-1804) per mezzo del *giudizio analitico a priori* (perché pronunciato prima ed indipendentemente da ogni esperienza), così chiamato perché risulta dall'analisi del soggetto. Si tratta di un'affermazione formulata *a priori* di validità universale e quindi non necessita della verifica sperimentale.

14. Euclide, *Gli elementi*, a cura di Frajese A., Maccioni M., Ed. UTET, 1996.

15. E. Agazzi, D. Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare*, La Scuola, Brescia, 1998.

16. Infatti, se per assurdo, una delle due coppie degli angoli coniugati interni fosse minore di due angoli retti, per il V postulato, r ed s si incontrerebbero con di t (a destra o a sinistra a seconda della coppia considerata), contro l'ipotesi che r ed s siano parallele; se invece la stessa coppia di coniugati interni fosse maggiore di due angoli retti allora, poiché la somma delle due coppie di coniugati interni deve essere 4 angoli retti, avremmo che l'altra coppia di coniugati interni sarebbe minore di due angoli retti, quindi sempre per il V postulato r ed s si incontrerebbero con t e quindi andrebbero contro l'ipotesi che r ed s siano parallele.

17. Proclo (410-485 a.C.) scrive a proposito del V postulato nel *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*: "Anche questo deve essere assolutamente cancellato dai postulati perché è un teorema..."

18. Girolamo Saccheri, *Euclide ab omni naevo vindicatus*, 1773.

19. Infatti, come scrive Palladino: "Si vuole dimostrare che $DC > AB$. A tal fine dimostriamo, per assurdo, che non può essere né DC

$= AB$, né $DC < AB$. Se fosse $DC = AB$, sarebbe anche $DM = AN$ e quindi, per quanto già dimostrato, il quadrilatero $ANMD$ risulterebbe birettangolo isoscele sulla base MN , per cui gli angoli in A e in D sarebbero uguali. Ma ciò è assurdo perché A è retto per costruzione e D , per ipotesi, è acuto. Se fosse $DC < AB$, sarebbe anche $MD < AN$. Preso su AN il punto E tale che $NE = MD$, il quadrilatero $DMNE$ risulterebbe birettangolo isoscele sulla base MN , per cui l'angolo $MDE = DEN$. Ma ciò è assurdo perché l'angolo MDE , essendo parte dell'angolo acuto $MD^{\wedge}A$, è acuto e l'angolo $DE^{\wedge}N$, essendo esterno al triangolo rettangolo DAE , per la Proposizione 16 di Euclide è maggiore dell'angolo retto $DA^{\wedge}N$, e quindi ottuso".

20. Sembra assurdo che il grande matematico Gauss, insegnando a Gottinga, non fosse a conoscenza del lavoro di G.S. Klugel, che, come detto, era presente nella biblioteca della stessa università di Gottinga. Solo Eugenio Beltrami, nella seconda metà dell'Ottocento, riuscì a mettere in risalto il valore che Saccheri ha avuto nella storia della matematica.

21. Nello studio di un qualsiasi sistema assiomatico è implicita l'assunzione che i suoi assiomi siano coerenti, cioè che da questi è impossibile dedurre una contraddizione, altrimenti sarebbe violata ogni legge base della logica e di conseguenza il sistema assiomatico sarebbe inconsistente.

22. Ciò che sappiamo a proposito delle ricerche di Gauss sulle geometrie non euclidee, lo si è ricavato dalla corrispondenza epistolare che teneva con i suoi amici e da alcune note trovate tra le sue carte dopo la morte.

23. È interessante riportare uno stralcio della lettera che il padre di Janos Bolyai (il matematico e amico di Gauss, Wolfgang Farkas Bolyai) scrive al figlio, a proposito della questione della contemporaneità delle scoperte nel mondo scientifico "... se la cosa è perfettamente riuscita, è conveniente affrettarsi a renderla di pubblica ragione per due motivi: primo perché le idee passano facilmente da uno all'altro, che in seguito le può pubblicare prima; in secondo luogo, perché c'è anche qualche verità in questo fatto, che parecchie cose hanno un'epoca, nella quale esse sono trovate nello stesso tempo in più luoghi, precisamente come in primavera le violette da ogni parte vengono alla luce ...".

24. Nome dato nel 1871 dal matematico Felix Klein (1849-1860) per indicare il numero elevato delle parallele ad una retta data passanti in un punto esterno ad essa. Deriva dal greco *hyperbolé*, che vuole dire eccesso.

25. Infatti, come spiega Palladino "Quando tracciamo un quadrilatero birettangolo isoscele, i due angoli non retti per ipotesi ci appa-

iono anch'essi retti. Ma è chiaro che non possiamo percepire o misurare una differenza di, ad esempio, un milionesimo di grado. In altri termini, tali angoli potrebbero essere acuti, ma indistinguibili sperimentalmente da angoli retti. Il punto è che l'espressione "zone piccole" non è quantificabile in base a considerazioni geometriche... Queste considerazioni ... dovrebbero comunque essere sufficienti per convincere che non si può liquidare la geometria iperbolica sulla base della sua "inapplicabilità": come a livello atomico valgono leggi fisiche diverse da quelle classiche, così la geometria delle grandi distanze potrebbe essere diversa da quella che ci appare nelle piccole"

26. Come ci fa notare Palladino "Il problema della coerenza è "nuovo" poiché, secondo la concezione classica dell'assiomatica, gli assiomi dovevano essere "veri di per sé": deducendo logicamente da proposizioni vere si ottengono sempre proposizioni vere, e quindi non si può ottenere una contraddizione (che è una proposizione falsa)".

27. Riprenderemo più avanti il concetto fondamentale di curvatura gaussiana.

28. La tratrice è definita come il luogo dei punti del piano tali che i segmenti di tangente compresi tra essa e una retta fissa (che è asintoto della tratrice) hanno lunghezza costante.

29. R. Penrose, *The Road to Reality- A Complete Guide to the Law of the Universe*, Jonathan Cape, 2004.

30. Le NURBS (acronimo per Non-Uniform Rational B-Splines) sono delle rappresentazioni matematiche della geometria 3D, le quali definiscono accuratamente qualunque forma: da una semplice linea, ad un cerchio, un arco o una curva, fino al più complesso solido o superficie a forma libera o organica 3D.

31. J. McCleary, *Geometry from a differentiable Viewpoint*, Cambridge University Press, NY, 1994.

32. La curvatura di una linea in un suo punto, si definisce come l'inverso del raggio del cerchio osculatore, ovvero, quel cerchio che meglio approssima la curva nel punto considerato. Anche se esso esprime una grandezza geometrica e dunque positiva, ma il verso della concavità rispetto al sistema di riferimento, ne definisce il segno.

33. Da una conferenza di Riemann del 1854, presso l'Università di Gottinga "[...] Quando le costruzioni nello spazio vengono estese nell'incommensurabilmente grande, bisogna distinguere l'illimitato dall'infinito; l'uno appartiene alle relazioni di estensione, l'altro a quelle metriche. [...] L'illimitatezza dello spazio ha quindi maggiore certezza empirica di qualsiasi esperienza del mondo esterno. Da questo carattere, tuttavia, non consegue in alcun modo l'infinitezza; al contrario, se si assume che i corpi siano indipendenti dalla loro posizione e si attribuisce quindi allo spazio una misura di curvatura

costante, esso verrebbe a essere necessariamente finito non appena questa misura di curvatura avesse sia pure il più piccolo valore positivo. Se si prolungassero in linee di minimo percorso le direzioni iniziali, giacenti su una superficie, si otterrebbe una superficie illimitata con valore di curvatura positiva e costante, cioè una superficie che in una varietà piana triplamente estesa assumerebbe la forma di una superficie sferica, e dunque finita".

34. Con il termine spazio, in matematica si usa definire un ambiente geometrico che può avere una, due, tre ... n dimensioni. Una retta, quindi, può essere considerata uno spazio ad una dimensione.

35. Penrose, *La mente nuova dell'imperatore*, pp.251-260.

36. A tale proposito, Roger Penrose aggiunge che "Se la velocità di questo moto è piccola rispetto a c , allora s e t saranno quasi identici, cosa che spiega perché non siamo direttamente consapevoli del fatto che gli orologi in movimento rallentano. All'altro estremo quando la velocità è uguale a quella della luce, P si trova sul cono di luce; e noi troviamo che $s=0$. Il cono di luce è precisamente l'insieme dei punti la cui distanza minkowskiana (cioè il "tempo") da O è in realtà zero. Così un fotone non sperimenterebbe il passare del tempo! (Non è invece permesso, neppure per ipotesi che P si muova all'esterno del cono, giacché questa evenienze condurrebbe ad un s immaginario – la radice quadrata di un numero negativo – e violerebbe la regola che le particelle materiali o fotoni non possono muoversi ad una velocità superiore a quella della luce."

37. La descrizione simbolica della relazione proiettive tra i due modelli di geometria iperbolica, proposta da Luca Lussardi, è riportata nell'Appendice al Capitolo III.

38. Significa che è inversa di se stessa: se viene applicata due volte si ottiene l'identità.

39. Per il teorema di Euclide III,36, preso un punto O qualsiasi esterno ad un cerchio e condotte due rette una OT tangente (e sia T il punto di contatto) e una OPP' secante il cerchio (e siano P e P' i punti intersezione), il rettangolo $OP \cdot OP'$ è uguale al quadrato costruito su OT . La retta OPP' può passare o meno per il centro del cerchio. Iniziamo con il considerare il caso in cui passi per il centro C del cerchio. Le rette OT e TC sono ortogonali (Euclide III,18). Poiché PP' ha come punto medio C , e OP è aggiunto ad esso, vale la relazione (Euclide II,6) $OP' \cdot OP + PC^2 = OC^2$. Però PC è uguale a TC , quindi $OP' \cdot OP + TC^2 = OC^2$. Inoltre, si ha che $OT^2 + TC^2 = OC^2$, quindi l'espressione precedente può essere riscritta $OP' \cdot OP + TC^2 = OT^2 + TC^2$ che semplificata diviene $OP' \cdot OP = OT^2$. Analizziamo ora il caso in cui la retta secante non passi per il centro C della circonferenza. Poiché la retta ortogonale ad una secante non passante per il

centro, la taglia secondo il punto medio abbiamo $PM=P'M$ (Euclide III,3). Inoltre, poiché il segmento PP' è bisecato nel punto M e il segmento OP è aggiunto ad esso, vale nuovamente la relazione (Euclide II,6) $OP' \cdot OP + MP^2 = MO^2$. Se aggiungiamo MC^2 alla relazione, otteniamo $OP' \cdot OP + MP^2 + MC^2 = MO^2 + MC^2$. Però nei triangoli CPM e OCM valgono le seguenti relazioni $CP^2 = MP^2 + MC^2$ e $CO^2 = MO^2 + MC^2$, quindi andando a sostituire nella precedente espressione, abbiamo $OP' \cdot OP + CT^2 = CO^2$. Ricordando però che $CO^2 = CT^2 + OT^2$, otteniamo che $OP' \cdot OP + CT^2 = CT^2 + OT^2$ che semplificata diviene $OP' \cdot OP = OT^2$

40. Tale proprietà è utile per risolvere il problema di Apollonio attraverso l'inversione circolare.

41. Due circonferenze si dicono ortogonali quando le tangenti alle due curve nei punti di contatto, sono ortogonali tra di loro.

42. Gli estremi di una retta iperbolica non sono punti del piano iperbolico in quanto appartengono al suo orizzonte.

43. E.E. Moise. *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, Addison-Wesley, Reading, MA (1974).

44. C. Goodman-Strauss, *Compass and Straightedge in the Poincaré Disk*, The mathematical Association of America, Monthly 108, January 2001.

45. Si è utilizzato il termine *percepibile*, in quanto, come si è visto, nel modello del disco di Poincaré la circonferenza limite, rappresenta l'orizzonte del piano stesso. In altri termini, la tassellazione potrebbe essere estesa all'infinito.

46. È interessante notare che Escher per la realizzazione dei suoi lavori *Circle Limit I-IV*, avesse chiesto a Coxeter un aiuto per la rappresentazione di tipo sintetico della tassellazione iperbolica senza ottenere sufficienti spiegazioni in merito. La sensibilità dell'artista lo condussero tuttavia a realizzare le opere di questo soggetto, in modo estremamente accurato.

47. Il problema di dividere in n parti uguali una circonferenza, ovvero di costruire un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza, con l'uso della riga e del compasso, portò nel 1796 Gauss a definire tale teorema: un poligono regolare di n lati può essere costruito con riga e compasso se e solo se n è un numero del tipo: $n=2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$, dove k è un intero ≥ 0 e p_1, p_2, \dots sono numeri primi di Fermat.

48. Ricordiamo che in geometria iperbolica, la somma degli angoli interni di un poligono regolare può assumere valori diversi, in quanto non esistono poligoni simili che non siano anche uguali.

49. Coxeter, *Introduction to geometry*, pp. 77-83.

50. Emmer, *L'occhio di Horus- Itinerari nell'immaginario matematico*, pp. 98-104.

51. L'opera è del 1958.

52. H.S.M. Coxeter, *Regular Compound Tessellations in Hyperbolic Plane*, Proc. Royal Soc., 1964.

53. Va ricordato però, che Escher arriva alla rappresentazione della curva di equidistanza in modo del tutto involontario; infatti egli riteneva che l'angolo d'incidenza con Ω dovesse essere di 90° .

Dai poliedri alle strutture reticolari

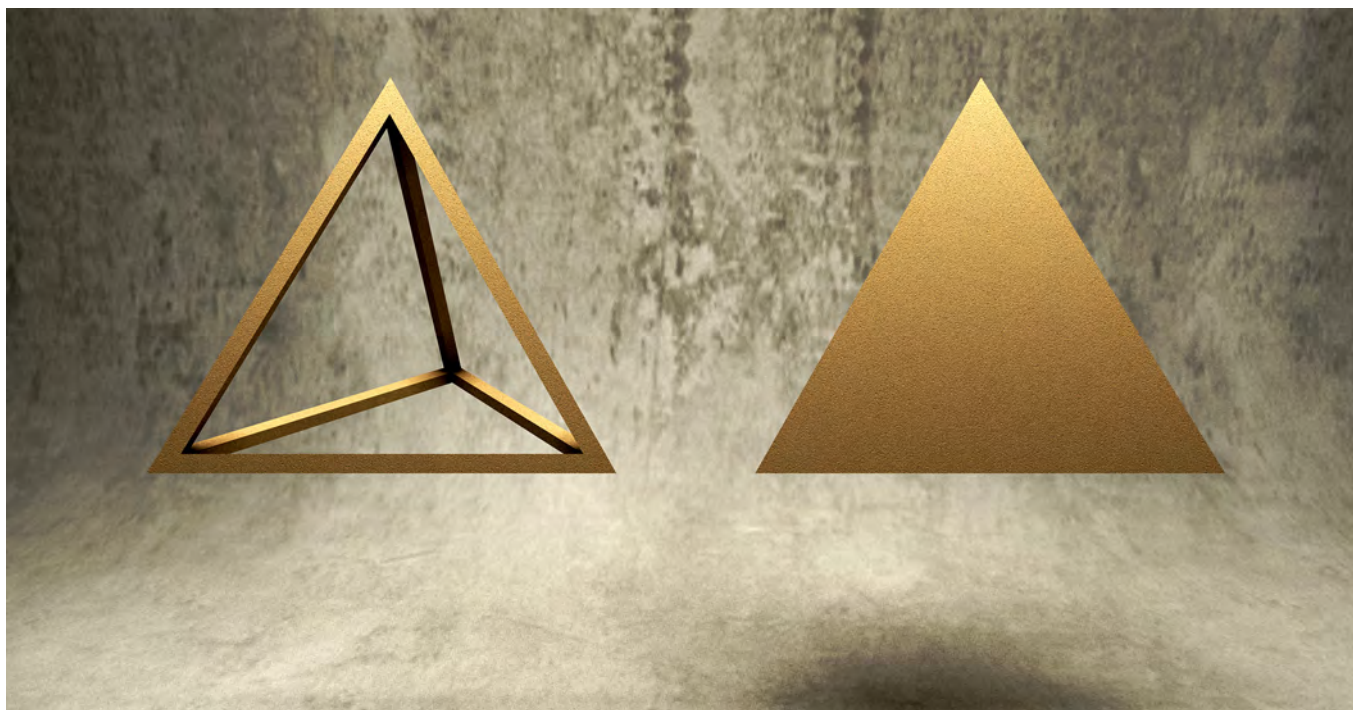
Breve storia dei poliedri

I solidi platonici hanno occupato, e continuano ad occupare, una parte importante della storia della matematica. Sulle origini della scoperta dei cinque poliedri regolari (le cui caratteristiche geometriche verranno analizzate in seguito) la questione è ancora dibattuta e probabilmente non troverà mai una risposta. Sembra che la conoscenza di queste figure geometriche si possa far risalire al VI sec. a.C., quindi contemporaneamente alla scuola pitagorica¹. A riprova di ciò, nel *Commento al primo libro degli Elementi* di Euclide, Proclo (410-485 d.C.) scrive “*Pitagora trasformò questo studio in una forma di insegnamento liberale, investigando dall’alto i suoi principi, e indagando i teoremi astrattamente e intellettualmente, egli scoprì il fatto degli irrazionali e la costruzione delle figure cosmiche (cioè i poliedri)*”. Inoltre, ritrovamenti archeologici di urne a forma di dodecaedro, sono stati rinvenuti in alcuni siti del mediterraneo e sono databili proprio attorno al VI sec. a.C.. Anche Carl Boyer² scrive nel suo libro “*Lo scoliasta Suida riferisce che Teeto, l’amico di Platone nato verso il 414 a.C., fu il primo a scrivere intorno ad essi. Sembra verosimile che Teeto abbia studiato più a fondo di ogni altro matematico i cinque solidi regolari*”. Del resto, non va dimenticato che la struttura cristallina di numerosi minerali, come ad esempio la pirite, rende legittima l’ipotesi che i solidi fossero già conosciuti prima di Platone³. Uno degli aspetti più importanti dei solidi platonici risiede nel fatto che, a differenza dei poligoni regolari (il cui numero è infinito), i poliedri regolari possono essere solo cinque.

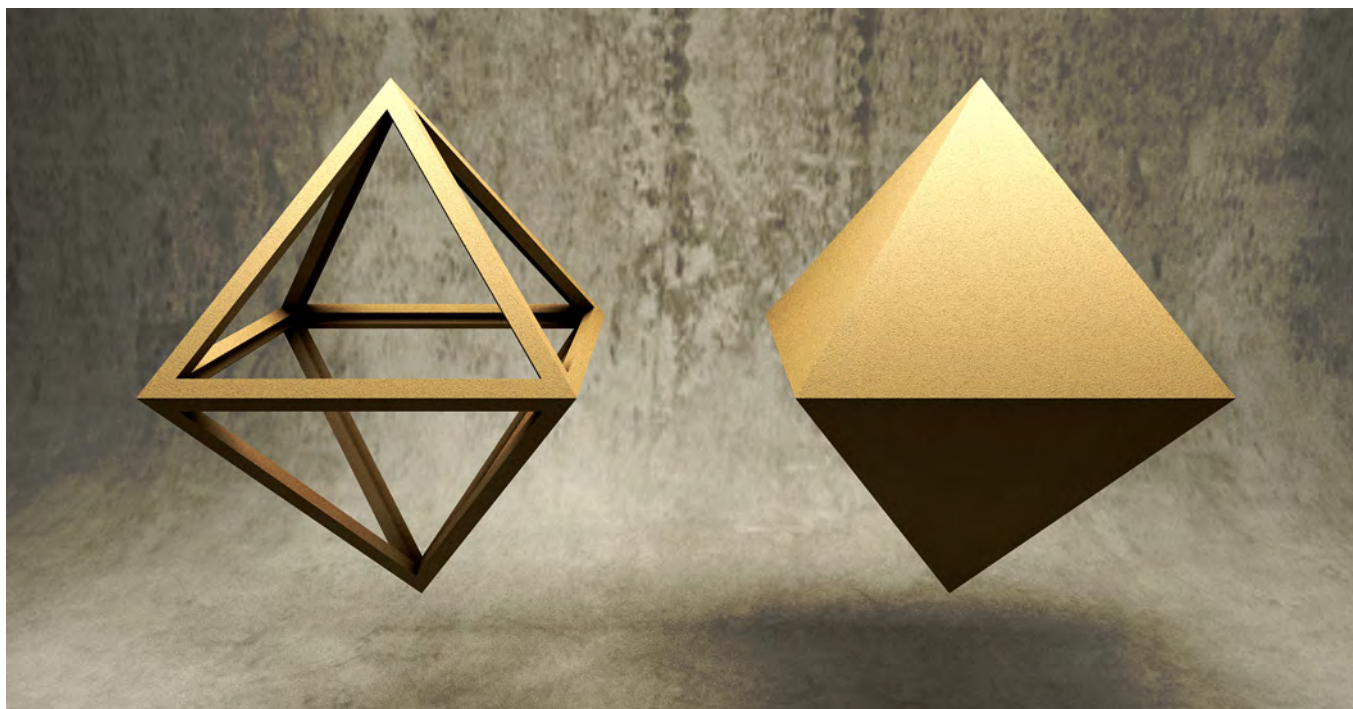
La prima testimonianza scritta sulla trattazione dei po-

lledri regolari è il *Timeo* di Platone⁴, che risale al 360 a.C.. Nel dialogo platonico vengono approfonditi il problema dell’origine dell’universo (cosmologico), quello della sua struttura materiale (fisico) e quello della natura umana (escatologico). La notevole importanza dell’opera risiede nel contributo che essa portò nella filosofia e nella scienza elaborata dallo stesso Platone. Per la prima volta, infatti, le figure geometriche e i numeri vengono messe a fondamento del cosmo.

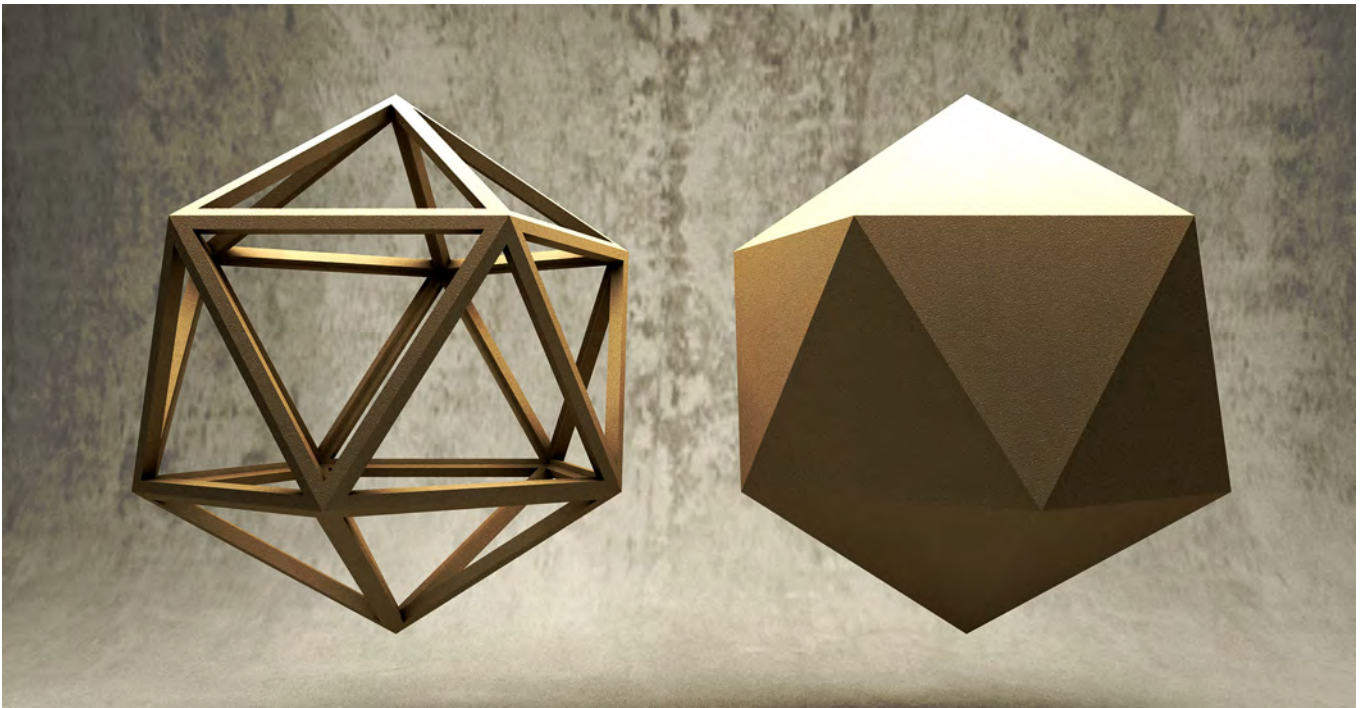
“E allora che preso ebbe Iddio a comporre l’universo, fuoco e acqua e terra e aria, che aveano pure certi vestigi di loro forme, giacevan così proprio come convien giacere a ogni cosa dalla quale Iddio sia lontano: e così stando essi naturalmente, da prima Iddio affigurole di forme e di numeri; e che le compose in modo bellissimo e bonissimo il più ch’egli potesse, doveché eran scomposte, ciò universalmente si dica pure da noi ogni volta. Ora mostrerò a voi con ragionamento inusato l’ordinamento e generazione di ciascuna di queste specie; e certo voi, non nuovi delle vie della scienza per le quali necessità è andare per veder chiaro le dette cose, mi seguirete [...] In prima, che fuoco, terra, acqua, aria, siano corpi, ciò manifesto è ad ogni uomo. [...] Adunque è a dire quali siano i corpi bellissimi, dissimiglianti fra loro, de’ quali alcuni sono possenti, sciogliendosi, di rigenerarsi gli uni dagli altri. Ci vien fatto questo? e noi avremo il vero della generazione della terra, del fuoco e di quelli corpi i quali secondo proporzione tengono il mezzo; e a nessuno non consentiremo che ci siano altri più belli corpi a vedere, considerati essi singolarmente nel genere loro. Procacciamo adunque di comporre questi quattro generi di corpi insigni in bellezza, e così diremo avere noi inteso la natura loro sufficientemente” (Timeo, XX).



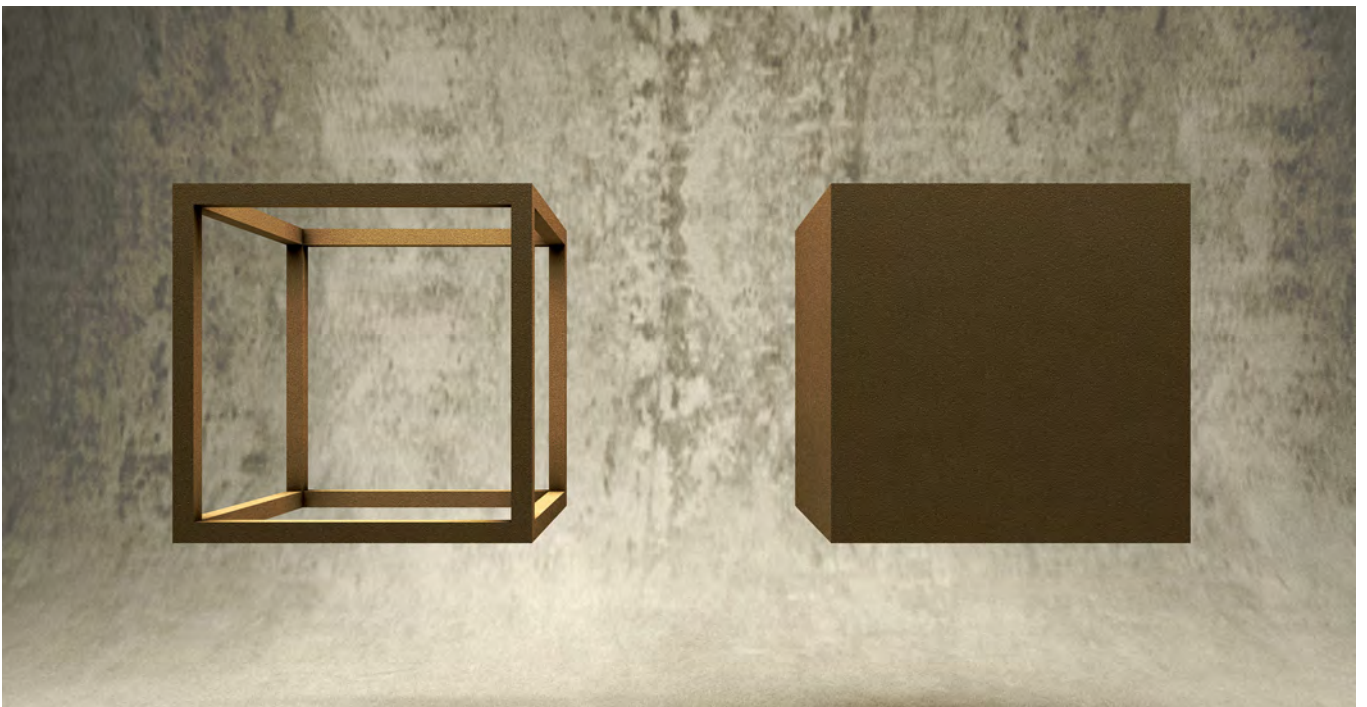
IV.1/ Tetraedro e Tetraedro Vacuo.



IV.2/ Ottaedro ed Ottaedro Vacuo.



IV.3/ Icosaedro ed Icosaedro Vacuo.

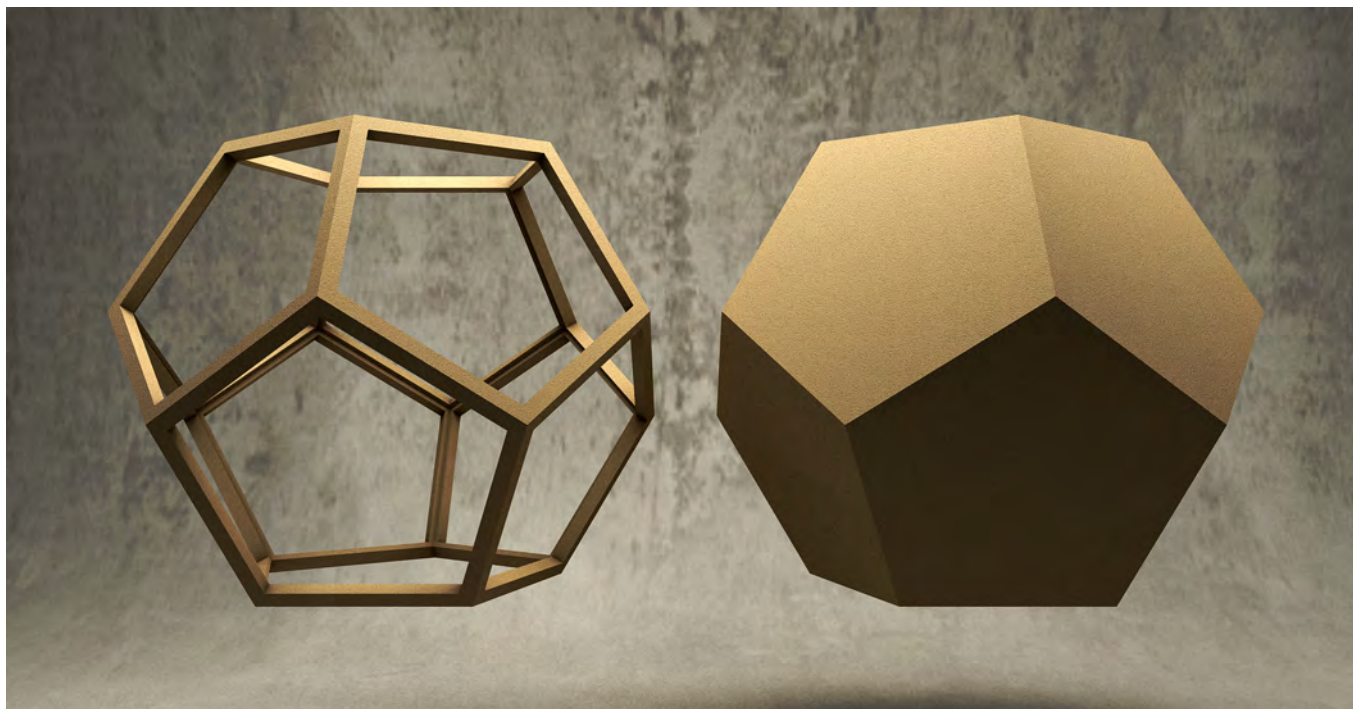


IV.4/ Esaedro o Cubo.

Platone basa la costruzione di quattro solidi regolari sul triangolo rettangolo scaleno con un cateto lungo la metà dell'ipotenusa (in questo modo, la riflessione rispetto al cateto più lungo genera un triangolo equilatero) e sul triangolo rettangolo isoscele (tale che la sua riflessione rispetto l'ipotenusa genera un quadrato).

“Poniamo dunque de' molti triangoli il bellissimo, lasciando gli altri, cioè quello del quale due compongono un terzo triangolo con uguali lati [...] Componendosi poi insieme quattro equilateri triangoli, sì che ogni unione loro ternaria faccia un angolo solido il quale tosto segua il più ottuso angolo piano; e compiuti quattro di cotali angoli solidi, fatta è la prima solida specie, per mezzo della quale può essere compartita una sfera in parti simili e uguali”. La prima specie è dunque il tetraedro (fig. IV.1). “La seconda specie si fa degli stessi elementari triangoli così legati insieme in otto triangoli equilateri, che da ogni accostamento di quattro angoli piani si compia un solo angolo solido: e, compiuti sei di cotali angoli solidi, fatta è la figura del secondo corpo”. Il secondo

solido è l'ottaedro (fig. IV.2). “Il terzo corpo, il quale ha venti facce triangolari e equilateri, si genera di due volte sessanta dei detti elementari triangoli, commessi così fra loro, che facciano dodici angoli solidi, ciascun de' quali è compreso da cinque triangoli piani di uguali lati”, quindi il terzo poliedro è l'icosaedro (fig. IV.3). Il quarto solido è l'esaedro (fig. IV.4) “Il triangolo poi da' due lati uguali generò così il quarto corpo: ripetendo sé quattro volte, e i diritti angoli suoi appuntando nel centro, ebbe fatto un tetragono equilatero; e, commessi poi insieme sei cotali tetragoni, fatti sono otto solidi angoli, ciascuno dei quali composto è di tre piani angoli e diritti: e così è nata una figura di corpo, che è il cubo, il quale ha sei piane basi tetragone e equilateri”. Dei quattro solidi appena descritti, Platone aggiunge “Sia adunque secondo verisimile e diritta ragione la figura solida della piramide or generata, elemento e seme del fuoco; e la seconda per nascimento, dell'aria; e la terza, dell'acqua”. Infine “Rimanendo ancora una forma di composizione, che è la quinta, di quella si fu giovato Iddio

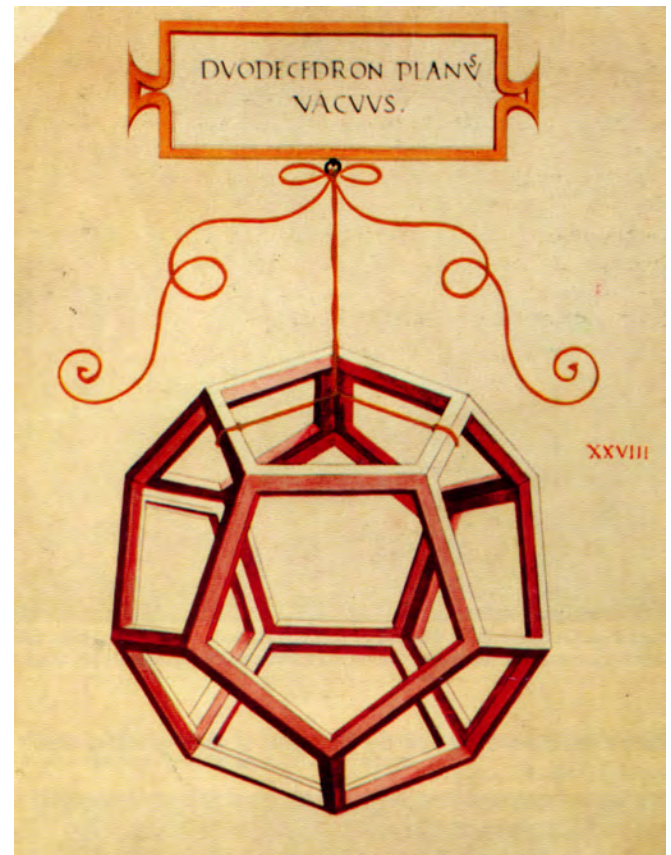


IV.5/ Dodecaedro e Dodecaedro Vacuo.

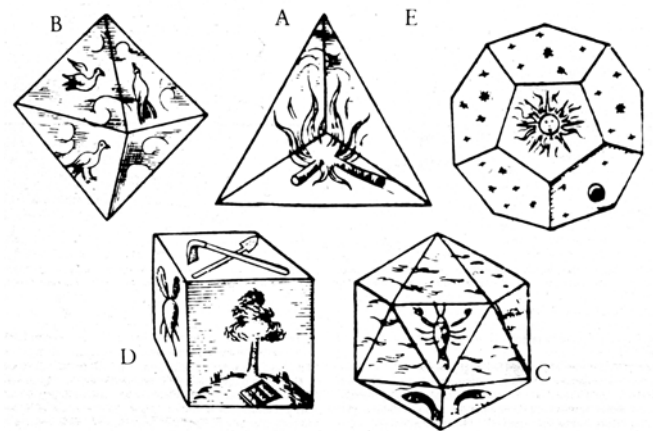
per lo disegno dell'universo". Boyer non esclude che l'accostamento fatto da Platone del dodecaedro (fig. IV.5) con l'universo, potesse derivare dal culto pitagorico proprio verso questa figura.

La riscoperta della matematica greca sviluppata nel Medio Evo, soprattutto rivolta verso lo studio degli *Elementi* (scritti circa sessanta anni dopo Platone) di Euclide (in cui nelle Proposizioni finali vennero trattate alcune proprietà dei solidi platonici), portò intorno al 1480 Piero della Francesca (con il suo trattato *De Quinque Corporibus Regularibus*) a definire il rapporto aureo che lega le diagonali del pentagono⁵. Questo trattato fu poi ripreso nel 1509, nell'opera *De Divina Proportione*, dal matematico, nonché allievo di Piero della Francesca, Luca Pacioli (1445-1514). Sembra che le illustrazioni originali del trattato siano state eseguite da Leonardo da Vinci (fig. IV.6), il quale si riferì a dei modelli lignei, forse perché la rappresentazione dei poliedri in assonometria era troppo complessa. Questo lo si può evincere confrontando le facce in primo e in secondo piano del poliedro, notando così che si tratta di una rappresentazione prospettica. Nel *Divina Proportione*, Luca Pacioli descrive alcune proprietà dei poliedri regolari, che sono sia interessanti da un punto di vista geometrico matematico, sia utili strumenti nella costruzione dei solidi stessi. Viene ad esempio indicato il principio di dualità che lega tra di loro i cinque solidi platonici, oppure la proprietà che lega la diagonale del cubo con lo spigolo del tetraedro ad esso inscritto, ed anche la diagonale delle facce del dodecaedro con lo spigolo del cubo. Luca Pacioli individua anche la relazione aurea che lega lo spigolo di un cubo con quello di due icosaedri inscritti in esso (anche questa proprietà verrà meglio analizzata in seguito).

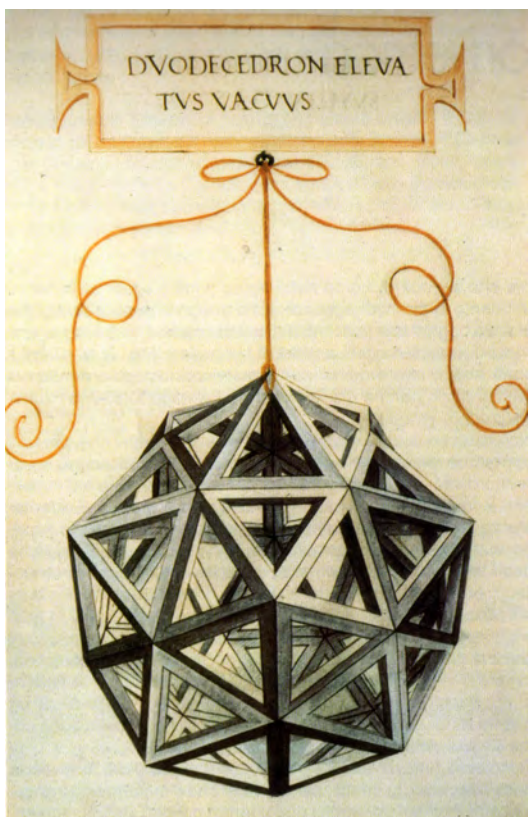
Del tutto particolare, invece, è la scoperta dei poliedri stellati la cui storia è stata ben delineata da Lucio Saffaro in un suo articolo dal titolo *Anticipazioni e mutamenti nel pensiero geometrico*, scritto nel 1989. L'esistenza dei poligoni stellati era già nota ai primi pitagorici, che si resero conto che il pentagono regolare convesso (così come altri poligoni regolari convessi) ammetteva anche una forma concava, che nasceva dal prolungamento dei lati del poligono stesso. Nasceva dunque la prima forma



IV.6/ Leonardo Da Vinci, Duodecedron Planus Vacuus, da *De Divina Proportione* di Luca Pacioli, 1509.



IV.7/ J. Keplero, Senza titolo, da *Harmonices Mundi*, 1619.



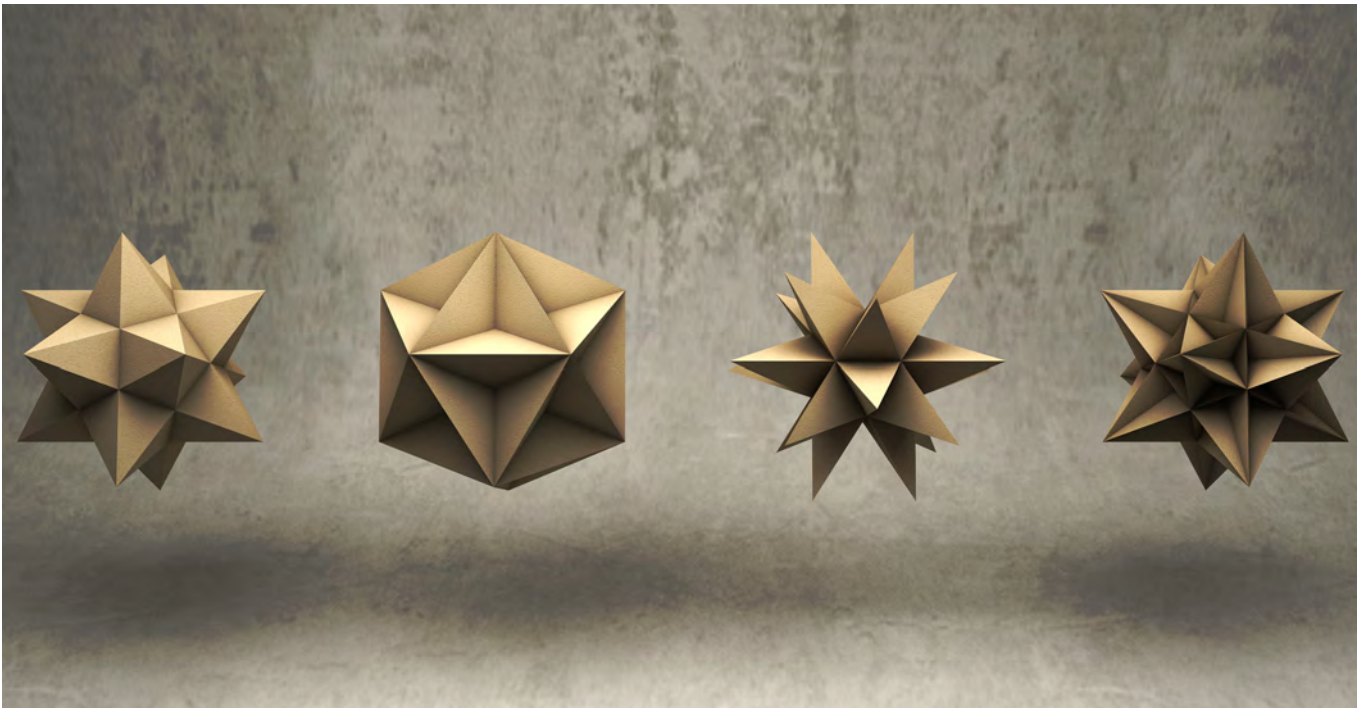
IV.8/ Leonardo Da Vinci, Duodecedron Elevatus Vacuus.



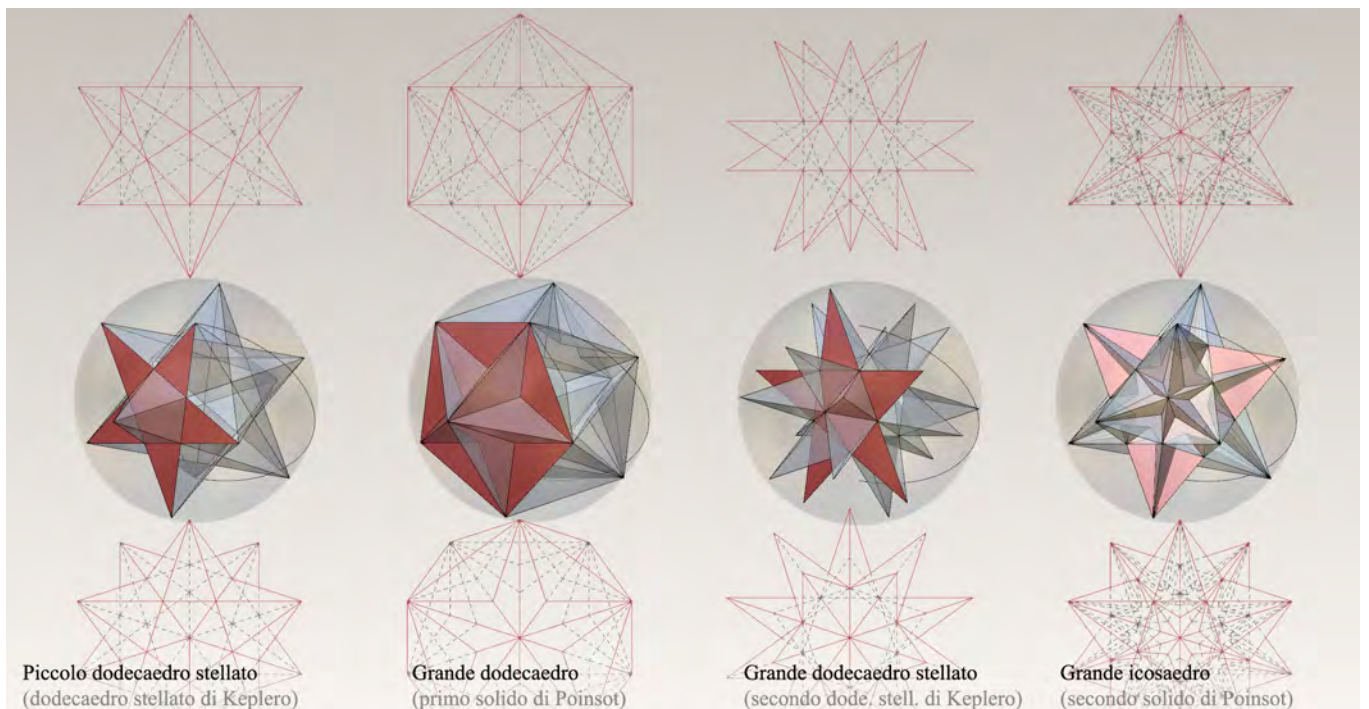
IV.9/ Lampadario in vetro e metallo fotografato da Lucio Saffaro.

di poligono autointersecantesi, chiamata pentagramma, la cui scoperta costituì una conquista davvero rivoluzionaria del pensiero scientifico, tanto da divenire il segno di riconoscimento tra gli stessi Pitagorici. L'estensione delle forme concave dal piano allo spazio dovette attendere molti secoli prima di essere definita in modo esauritivo. Il primo testo che descrive le proprietà di due solidi concavi fu, ancora una volta, l'opera fondamentale di Keplero⁶, *Harmonices Mundi* (che ricordiamo fu scritta nel 1619) (fig. IV.7). I due poliedri in questione sono il *piccolo dodecaedro stellato* e il *grande dodecaedro stellato*, conosciuti anche con il nome di primo e secondo poliedro di Keplero. Fa notare Saffaro che, anche nel trattato di Luca Pacioli compare una figura chiamata *Duodecaedron elevatus vacuus* (fig. IV.8), che è molto simile al primo poliedro stellato di Keplero. Questo solido è costituito da un dodecaedro, in cui sono state aggiunte delle piramidi a base pentagonale per ogni sua faccia. L'altezza di queste piramidi, però, non è sufficiente a generare le facce pentagrammatiche del solido kepleriano. Altre testimonianze che ci sono pervenute (come ad esempio modelli di lampadari (fig. IV.9)) presentano il problema opposto: le piramidi hanno un'altezza eccessiva, così che i pentagrammi risultano ancora una volta con i lati spezzati. Il motivo per cui l'attesa della scoperta dei solidi concavi durò così a lungo è segnale evidente che essa costituiva un'osservazione "superiore, o forse era soltanto contraria, alle concezioni geometriche degli antichi. Per essi non era pensabile che le facce di un poliedro potessero intersecarsi a vicenda. Una volta ammessa questa possibilità, si schiusero imprevisi orizzonti, tanto che fu possibile costruire un gran numero di poliedri concavi. Per questo ci sembra che la scoperta kepleriana dei due dodecaedri stellati, ovvero la decisione di abbandonare la convessità per accedere al più vasto panorama del concavo-convesso, rappresenti un evento fondamentale nella storia dei poliedri, e possa porsi come l'inizio della geometria moderna".

Da un punto di vista geometrico, il piccolo dodecaedro stellato (fig. IV.10) ha come facce 12 pentagoni stellati, 12 vertici (coincidenti con quelli di un icosaedro) e 30 spigoli. La sua costruzione (fig. IV.11) può essere eseguita prolungando gli spigoli di un dodecaedro regolare



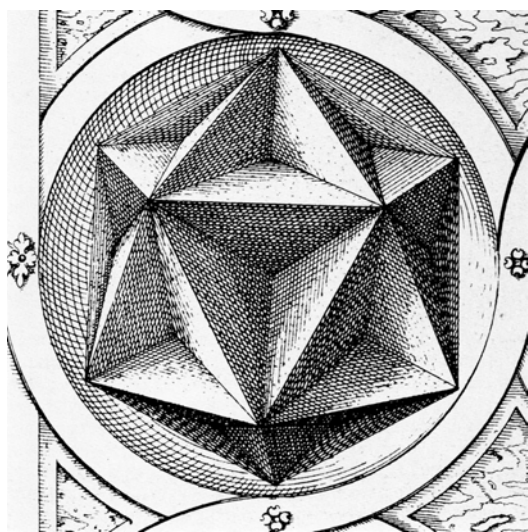
IV.10/ Rappresentazione dei quattro solidi di Keplero e Poincot.



IV.11/ Caratteristiche geometriche dei quattro solidi di Keplero e Poincot.



IV.12/ Paolo Uccello, Dodecaedro stellato, tarsia marmorea del pavimento della Basilica di S. Marco, Venezia, circa 1425-1430.



IV.13/ Wenzel Jamitzer, Icosaedron, 1568.

per ciascuna delle 12 facce del dodecaedro.

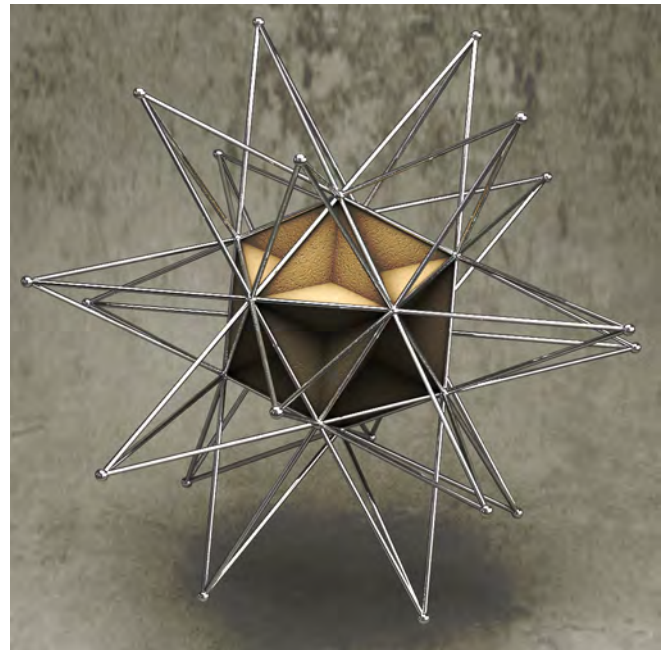
Una via alternativa (utile ad esempio se si vuole realizzare un modello fisico del solido) è quella di costruire delle piramidi a base pentagonale per ogni faccia del dodecaedro. L'altezza di queste piramidi non è, come abbiamo detto, arbitraria; essa è ottenuta considerando che le facce delle piramidi pentagonali sono triangoli aurei, cioè triangoli isosceli con angoli alla base di 72° . Il grande dodecaedro stellato (secondo poliedro di Keplero) nasce dal prolungamento degli spigoli di un icosaedro regolare. Le 12 facce sono anche in questo caso pentagoni stellati, ha 30 spigoli e 20 vertici coincidenti con quelli di un dodecaedro regolare. Analogamente al piccolo dodecaedro stellato, il secondo poliedro di Keplero può essere costruito a partire da un icosaedro regolare oppure andando a posizionare piramidi a base triangolare, su ciascuna faccia dell'icosaedro stesso. Anche in questo caso, le facce delle piramidi sono costituite da triangoli aurei. I due solidi di Keplero, sono solidi regolari ma non convessi; di conseguenza tutte le facce sono regolari ed identiche, hanno spigoli della stessa lunghezza ed hanno lo stesso angolo in ogni vertice; infine entrambi sono inscrivibili in una sfera.

Nel 1970, Saffaro, si accorse dell'esistenza di una tarsia marmorea nel pavimento della Basilica di San Marco a Venezia, che riproduce esattamente (a parte qualche lieve imperfezione dovuta probabilmente ai mosaicisti che la realizzarono) il piccolo dodecaedro stellato (fig. IV.12). Questo manufatto è attribuito dal Muraro a Paolo Uccello (artista interessato alle forme geometriche poliedriche tanto da venire appellato con il nome di disegnatore di mazzocchi⁷), e viene datata intorno al 1425, dunque più di due secoli anteriore alla scoperta di Keplero. Lo stesso Muraro non si rese conto dell'importanza della figura geometrica riprodotta, tanto che egli parlò addirittura di "rombo con elementi geometrici", forse perché il quadrato che inquadra la tarsia appare deformato in rombo da una fotografia obliqua. La situazione sembrerebbe davvero straordinaria: Paolo Uccello avrebbe anticipato la scoperta dei poliedri attribuita invece a Keplero. Il problema della datazione risulta di difficile soluzione per l'assenza di documenti d'archivio, lasciando così ancora aperta la storia dei poliedri.

Per quanto riguarda invece la scoperta degli altri due poliedri stellati (il *grande dodecaedro* e il *grande icosaedro*) alcuni autori, come lo storico tedesco S. Gunther, la attribuirono all'orafo belga Wenzer Jamitzer. Nel 1568 Jamitzer pubblicò la *Perspectiva Corporum Regularium*, in cui vengono rappresentati i cinque solidi platonici con numerose loro variazioni. Tra queste apparve la figura di un icosaedro (fig. IV.13), nelle cui facce venne riproposto il procedimento di Luca Pacioli di elevazione per mezzo di piramidi. In questo caso, però, le piramidi erano rivolte verso l'interno dell'icosaedro, ma non nella quantità giusta che andrebbe ad individuare dei pentagoni piani. Infatti, il poliedro conosciuto con il nome di grande dodecaedro, è un solido concavo e regolare, con facce pentagonali convesse auto intersecantesi.

Nella storia dei poliedri stellati, è curioso il fatto che Keplero abbia mancato l'osservazione della relazione che lega i suoi due poliedri stellati con gli altri due poliedri regolari concavi⁸. Infatti, ricordando che la parte interna di un pentagramma è un pentagono regolare convesso, basta osservare un'immagine del grande dodecaedro stellato di Keplero, per capire che i pentagoni convessi al centro di ogni sua faccia, costituiscono proprio le facce del grande dodecaedro (fig. IV.14). Si domanda giustamente Lucio Saffaro “*Perché, [Keplero] non si è chiesto, domanda che doveva sorgergli spontaneamente, dove si situano i pentagoni centrali dei pentagoni stellati del suo secondo dodecaedro stellato? [...] solo una sorta di blocco psicologico, di rifiuto teorico pregiudiziale può avere di nuovo impedito l'anticipazione di ben due secoli di una grande scoperta*”. A conferma di ciò, Lucio Saffaro ricorda che anche Ludwig Schläfli, scopritore dei politopi esistenti negli spazi a n dimensioni, non volle accettare due dei quattro solidi stellati, perché non soddisfacevano la relazione di Eulero.

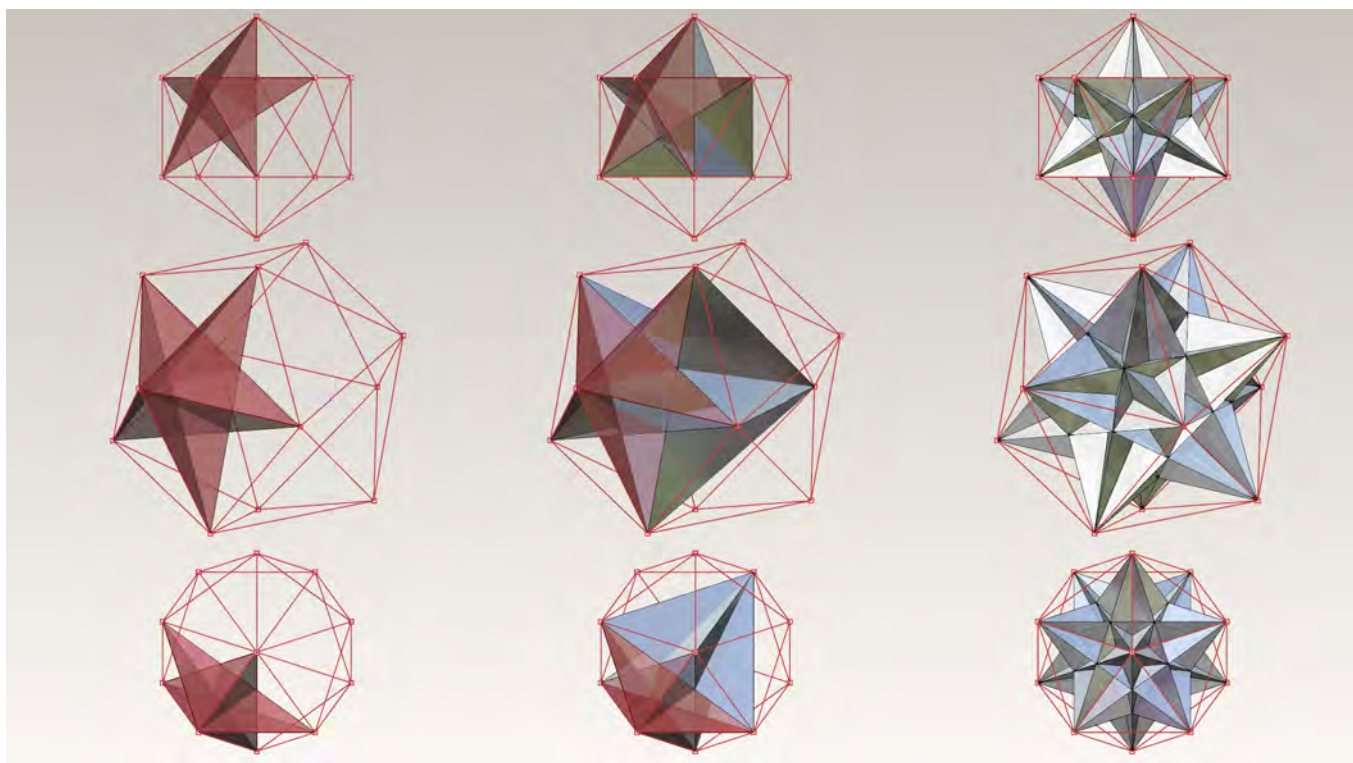
Solo nel 1810 il matematico francese Louis Poinsot presentò i duali dei poliedri stellati di Keplero descrivendone le proprietà geometriche. Il *grande dodecaedro* ha 12 facce pentagonali e 12 vertici coincidenti con quelli di un icosaedro; è regolare, ma non convesso, ed è il duale (la relazione di dualità, o reciprocità, verrà affrontata nel prossimo paragrafo) del grande dodecaedro stellato. L'ultimo dei quattro poliedri regolari concavi è il



IV.14/ I pentagoni convessi al centro di ogni faccia del grande dodecaedro stellato di Keplero, costituiscono le facce del grande dodecaedro di Poinsot.

grande icosaedro descritto sempre dal matematico francese. Esso ha 20 facce triangolari equilateri che si intersecano in più punti, ha 20 vertici che coincidono con quelli del piccolo dodecaedro stellato ed ha come suo duale, il grande dodecaedro stellato. La costruzione del *grande icosaedro* può essere eseguita a partire da un icosaedro (fig. IV.15) in cui per prima cosa vengono individuati tutti i triangoli isosceli che hanno per lati uguali due spigoli dell'icosaedro non appartenenti alla stessa faccia. A questo punto si costruiscono tutti i triangoli equilateri che hanno come lato la base dei triangoli isosceli precedentemente trovati, rivolti internamente all'icosaedro. Alla fine otteniamo 20 triangoli equilateri che costituiscono le facce del grande icosaedro.

Se estendiamo il concetto di poliedro regolare al caso dei poliedri intrecciati (in modo tale che i vertici non siano sempre collegabili da un percorso composto da spigoli) ed estendiamo la definizione di regolare alla condizione grupale, si possono aggiungere sistemi solidi regolari, come quello composto da 5 tetraedri platonici concentrici i cui vertici coincidono con un dodecaedro regolare (fig. IV.16).



IV.15/ Costruzione del grande icosaedro eseguita a partire da un icosaedro.

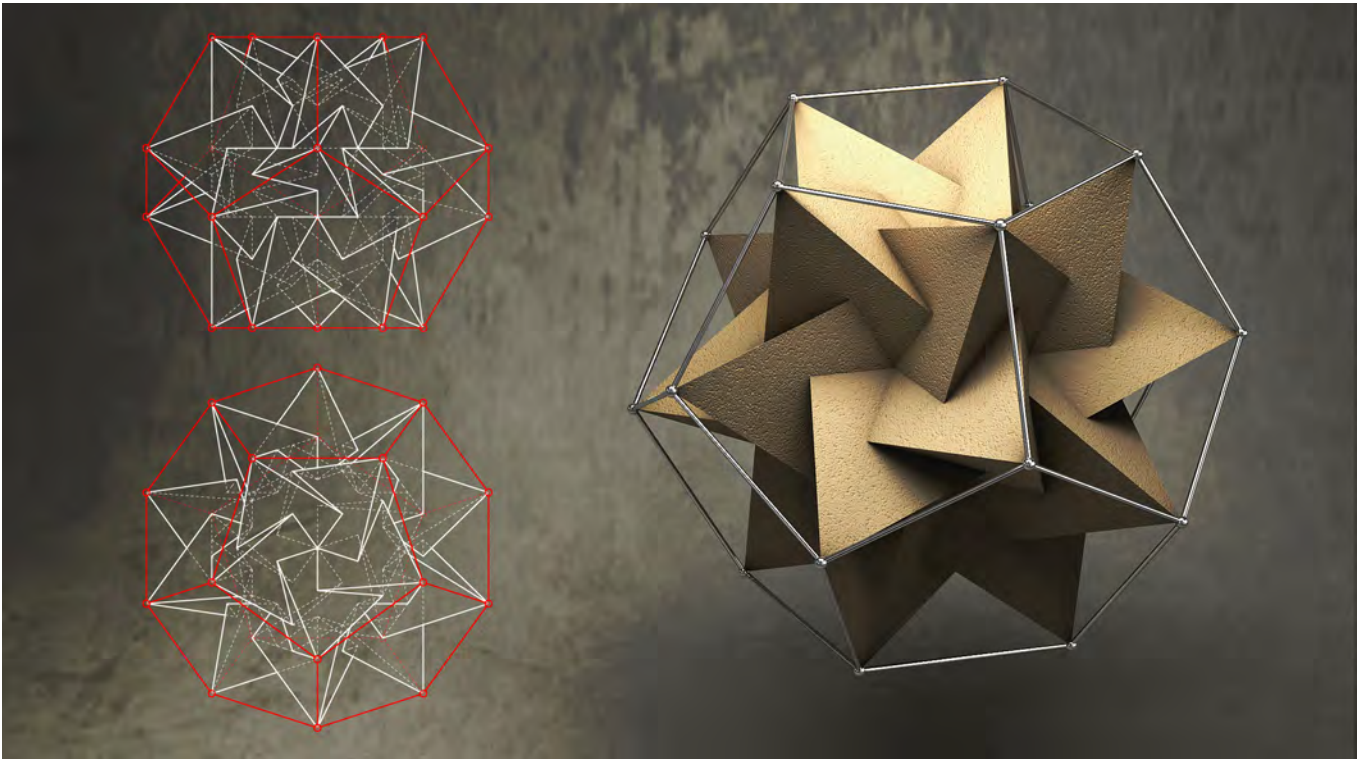
Spingiamoci ora su di uno dei risultati più importanti, dal punto di vista matematico, raggiunti sui poliedri: la nota formula di Eulero⁹. La formula, valida per ogni poliedro semplice, cioè senza buchi, lega insieme spigoli **E**, vertici **V** e facce **F** del solido secondo la relazione:

$$\mathbf{F-E+V=2}$$

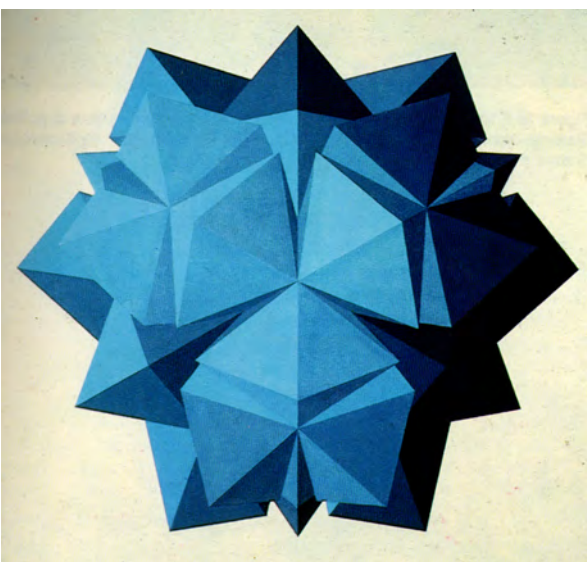
Probabilmente questo traguardo importante fu già raggiunto da Cartesio nel 1619, anche se i suoi calcoli andarono perduti. Comunque fu il matematico Eulero a mettere in risalto l'importanza della formula che in seguito venne estesa a casi di solidi più generali.

Lo studio dei poliedri, sia dal punto di vista scientifico che dal punto di vista artistico continua fino ai giorni nostri. Nell'ultimo secolo il lavoro artistico di autori come Maurits Cornelis Escher non poteva non essere condizionato dal fascino dei solidi spaziali. A proposito dei poliedri regolari Escher afferma “*Essi simbolizzano il desiderio di armonia e di ordine dell'uomo, ma nello*

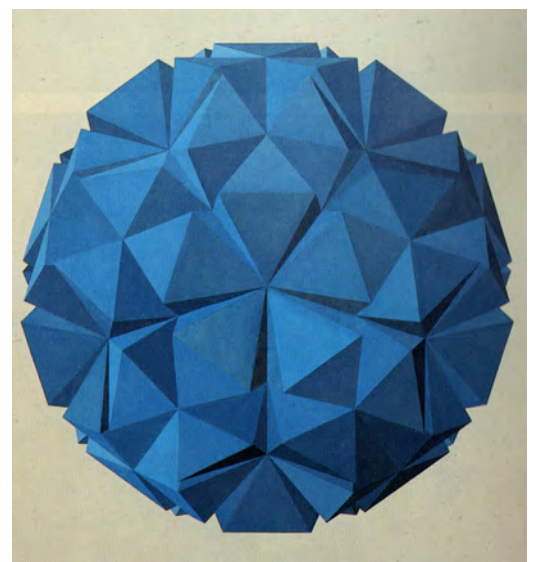
stesso tempo la loro perfezione desta in noi il senso della nostra impotenza. I poliedri regolari non sono invenzioni della mente umana, perché esistevano molto prima che l'uomo comparisse sulla scena...”. Un esempio significativo di questo interesse si ritrova nell'opera di Lucio Saffaro. Per tutta la vita si occupò dei poliedri cercando di allargare le famiglie “a numero chiuso” dei solidi regolari, semiregolari e catalani. Attraverso l'uso del computer (le cui immagini venivano poi rielaborate in quadri ad olio, per renderle più espressive) riuscì a definire nuove interessantissime figure, che altrimenti non sarebbe stato possibile indagare. Esempi della sua opera sono il *Poliedro M₂*, costituito da 240 triangoli equilateri che si incontrano nei vertici a gruppi di 4, di 10 e di 12 (fig. IV.17). Il più grande deltaedro è quello composto da 360 triangoli equilateri che si incontrano nei vertici a gruppi di 4, di 8, di 9 e di 15 (fig. IV.18). Il computer ha quindi allargato gli orizzonti e le possibilità di scoperta



IV.16/ Sistema di solidi regolari, composto da cinque tetraedri platonici concentrici i cui vertici coincidono con un dodecaedro regolare.



IV.17/ Lucio Saffaro, Il Poliedro M_2 , olio, 1985.



IV.18/ Lucio Saffaro, I 360 triangoli, olio, 1986.

di nuovi “*bellissimi corpi*”, rendendo sempre più vivo questo antichissimo tema della geometria. A tale proposito, daremo una breve trattazione di una tipologie di poliedri studiate intorno agli anni sessanta. Lo studio si caratterizza dall'estensione del concetto di poliedro ai cosiddetti poliedri a sella (*saddle-polyhedra*), in cui le facce piane vengono sostituite da superfici minime. L'interesse di questo soggetto era rivolto soprattutto alle proprietà aggregative e quindi costruttive di questi interessanti solidi. Vedremo che la rilettura di questi temi, attraverso l'uso del modellatore matematico, delinea nuove possibili tracce di ricerca, che in questa sede verranno solo accennate.

Proprietà geometriche dei poliedri

I poliedri¹⁰ sono entità spaziali definite da un volume delimitato da facce piane. Per consentire questa delimitazione, il numero di facce (che si possono intersecare in modo tale che tre facce non abbiano nessuna linea in comune ma solo un punto) deve essere maggiore di quattro. Inoltre, si danno le seguenti definizioni:

- una faccia è una porzione di piano delimitata da altri piani, quindi è un poligono;
- lo spigolo è il segmento di retta in comune tra due facce, quindi è un lato di poligoni corrispondenti;
- un vertice è il punto in comune a tre facce.
- gli angoli piani sono gli angoli interni di ogni poligono;
- due piani incidenti formano un angolo diedro;
- tre piani incidenti in un punto formano un angolo triedro;
- più piani incidenti in un punto formano un angoloide o angolo solido;
- un angoloide è convesso quando ogni sua intersezione piana è un poligono convesso.

Le proprietà metriche di un poliedro sono quelle relative alla lunghezza di uno spigolo, ampiezza di un angolo piano, le misure degli angoli diedri e triedri, l'area delle facce e il volume del poliedro e sono legate le une alle altre. Le caratteristiche topologiche sono invece relative al numero delle facce e dei vertici (in particolare il numero delle facce che hanno lo stesso numero di lati), la

convessità o concavità del poliedro, ed infine la presenza o meno, di vuoti. Le relazioni tra questi elementi vengono a definire quelle caratteristiche che sono invarianti se il poliedro è sostituito da un poliedro *isomorfo*, cioè quello che è in corrispondenza biunivoca con il primo: faccia con faccia, vertice con vertice e spigolo con spigolo. Quindi tutti i tetraedri oppure i prismi con lo stesso numero di facce, sono isomorfi.

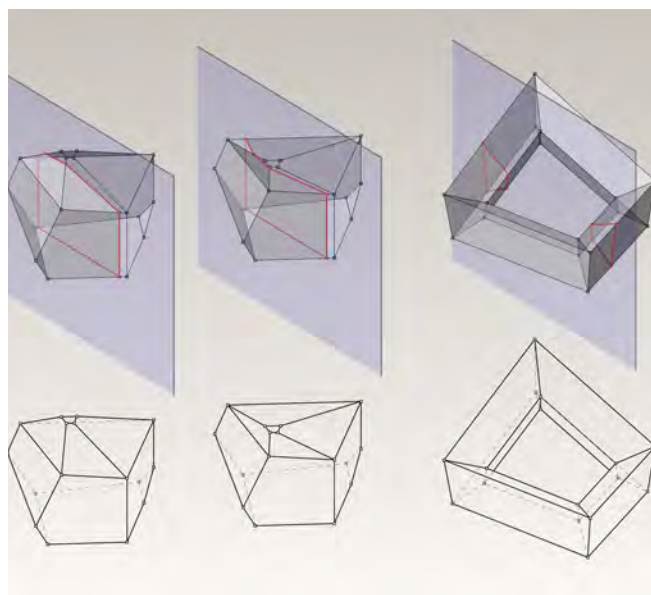
I poliedri convessi sono quelli che giacciono interamente nella parte di semispazio individuata dal piano di ciascuna delle sue facce.

Segue che le facce poligonali e gli angoli solidi di un poliedro convesso, sono anch'esse convesse. Ogni retta che interseca il poliedro convesso lo taglia secondo due punti; invece un piano taglia il poliedro secondo un poligono convesso.

In ogni poliedro convesso di facce **F**, spigoli **E** e vertici **V**, è verificata la seguente formula di Eulero:

$$\mathbf{F-E+V=2}$$

L'estensione ad altri poliedri concavi e senza vuoti ha



IV.19/ Due poliedri isomorfi concavo e convesso appartenente alla famiglia 0, ed un poliedro con il vuoto, appartenente alla famiglia 1.

bisogno dell'introduzione del concetto di *famiglia* di un poliedro. I poliedri di famiglia n , sono quelli in cui è possibile tracciare un massimo di $n+1$ poligoni chiusi in modo da dividere in due superfici poliedriche aperte, il poliedro di partenza. Ad esempio i due poliedri isomorfi concavo e convesso della figura (fig. IV.19), sono separabili ciascuno in due parti dando origine solo ad un poligono chiuso. Essi apparterranno quindi alla *famiglia 0* e per loro è valida la formula di Eulero:

$$12-26+16=2$$

Nel caso del poliedro con il vuoto rappresentato nella stessa figura, invece, è possibile separarlo in due superfici poliedriche aperte, individuando al massimo due poligoni chiusi. Esso apparterrà dunque alla *famiglia 1* e non è conforme alla formula di Eulero, infatti:

$$16-32+16 \neq 2$$

L'estensione della formula di Eulero definita nel seguente modo:

$$F-E+V=2-2n$$

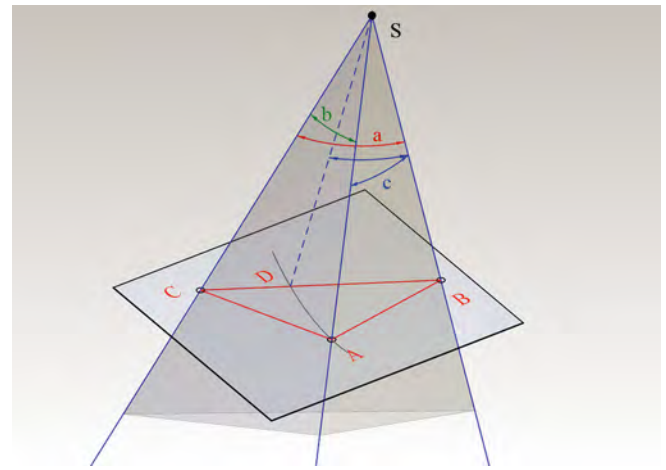
dove n rappresenta la famiglia del poliedro, generalizza la sua validità non solo a tutti i poliedri convessi ma anche a tutti quelli (convessi e non) appartenenti alla famiglia 0. Inoltre si può verificare che la formula di Eulero generalizzata, sia valida per alcuni poliedri della famiglia 1, come quello rappresentato in figura.

I poliedri regolari sono poliedri convessi con facce composte da poligoni regolari uguali, e da angoli solidi anch'essi uguali.

Da qui segue che tutti gli spigoli e gli angoli diedri di un poliedro regolare, sono tutti uguali. Un'altra caratteristica importante è che sono inscrittibili in una sfera e contemporaneamente circoscrivono una sfera concentrica con la prima.

Abbiamo visto nel precedente capitolo che le uniche tassellazioni regolari, possibili in una superficie sferica, sono cinque; ma abbiamo anche detto che esse corrispondono alla proiezione di un poliedro regolare dal centro della sfera sulla sfera stessa. Di conseguenza, possiamo già intuire che il numero massimo di poliedri regolari è proprio cinque.

Uno dei modi più semplici per dimostrare che i poliedri regolari possono essere solo cinque, si basa su due teoremi degli angoli solidi che andiamo a descrivere.



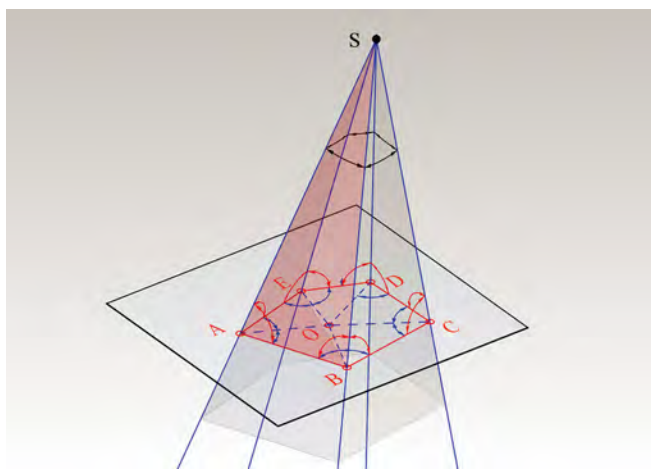
IV.20/ Ciascuna faccia di un triedro è più piccola della somma delle altre due.

Teorema I: ciascuna faccia di un triedro è più piccola della somma delle altre due.

Consideriamo un triedro di vertice S e siano a, b e c le sue tre facce, con a maggiore delle altre due (fig. IV.20). Costruiamo sulla faccia a un angolo pari a c e stacciamo tra i due spigoli, un segmento BC a piacere. Misuriamo sullo spigolo in comune alle facce b e c , un segmento SA uguale a SD ; in questo modo abbiamo definito il piano $ABDC$. I triangoli BSA e BSD sono uguali in quanto hanno uguali due lati (SB ed SA) e l'angolo in S . Si ha quindi che $BD=BA$. Poiché nel triangolo ABC , $BC < BA+AC$, possiamo scrivere che $BD+DC < BD+AC$, ovvero $DC < AC$. Inoltre, i due triangoli CSD e CSA hanno due lati uguali ed il terzo legato dalla relazione $DC < AC$. Di conseguenza anche l'angolo CSD sarà minore di CSA . Quindi possiamo riscrivere nella forma $a-c < b$, e cioè $a < b+c$. Avendo dimostrato che la faccia più grande è minore della somma delle altre due, è evidente che tale proprietà rimane verificata per ciascuna delle altre facce.

Teorema II: la somma delle facce di un angoloide convesso è minore di quattro angoli retti.

Sia S il vertice di un angoloide convesso di cinque facce, sezionato da un piano qualsiasi (fig. IV.21). Chiamiamo



IV.21/ La somma delle facce di un angoloide convesso è minore di quattro angoli retti.

O un punto qualsiasi all'interno del pentagono irregolare **ABCDE** ed uniamolo ai cinque vertici in modo da ottenere una suddivisione del pentagono in cinque triangoli. Per comodità, nominiamo “primo gruppo”, l'insieme dei cinque triangoli appena ottenuti, e nominiamo “secondo gruppo” l'insieme dei triangoli **SBC**, **SDC**, **SDE**, **SAE** ed **SAB**. La somma degli angoli interni dei cinque triangoli di ogni gruppo, vale dieci angoli retti (ricordiamo che la somma degli angoli interni di ogni triangolo equivale a due angoli retti). A questo punto, consideriamo il triedro di vertice **A** e facce **BAS**, **EAS** e **BAE**. Per il teorema precedente si ha che la faccia **AEB** è minore della somma delle altre due. La stessa considerazione è valida per tutti gli altri triedri con vertici in **B**, **C**, **D** ed **E**. Possiamo quindi dire che la somma degli angoli in **A**, **B**, **C**, **D** ed **E** appartenenti ai triangoli del primo gruppo (indicati in blu nella figura) è minore della somma degli angoli in **A**, **B**, **C**, **D** ed **E** appartenenti ai triangoli del secondo gruppo (indicati in rosso nella figura). Affinché sia verificata la condizione che i triangoli di ciascuno dei due gruppi abbia come somma degli angoli interni dieci angoli retti, la somma degli angoli in **S** del secondo gruppo (ovvero le facce dell'angoloide) dovrà essere minore alla somma degli angoli in **O** del primo gruppo, dovrà cioè, essere minore di quattro angoli retti.

Abbiamo quindi ridotto il problema del massimo numero di poliedri regolari alla soluzione di questa diseuguaglianza:

$$n\beta_n < 360^\circ$$

dove n indica il numero di facce (almeno tre) che si incontrano in ciascun vertice del poliedro, e con β_n si indicano gli angoli interni dei poligoni regolari (60° , 90° , 108° , 120° , 128.57° ...). Possiamo quindi scrivere la tabella (Tabella IV.1) in cui si evidenzia che il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro hanno per facce triangoli equilateri che si incontrano in ogni vertice rispettivamente 3, 4 e 5 volte; l'esaedro ha per facce sei quadrati uguali che si incontrano 3 volte in ogni vertice; ed infine il dodecaedro con facce pentagonali che si incontrano 3 volte in ogni vertice.

Un altro modo per dimostrare che ci sono solo cinque poliedri regolari ed è basato sulla formula di Eulero (Tabella IV.2). In accordo con il codice di Schlafli (che abbiamo già incontrato nel II capitolo) la configurazione di un vertice è presa come descrizione caratteristica di un poliedro; il numero indica il numero di lati del poligono regolare che viene ripetuto tante volte quante sono le facce che si incontrano in un vertice. Ad esempio, la sigla (3,3,3) indica il poliedro regolare composto da facce triangolari che si incontrano tre volte in ogni vertice, quindi identifica il tetraedro. Allo stesso modo la simbologia utilizzata per indicare il numero di facce, identifica il numero di facce del solido ed il numero dei lati del relativo poligono regolare: ad esempio $4F_3$ significa che il poliedro è composto da 4 facce di 3 lati, che rappresenta il tetraedro.

Indichiamo ora con m lo spigolo del poliedro, con R il raggio della sfera circoscritta al poliedro, con r il raggio della sfera inscritta ed infine con α l'angolo diedro; possiamo scrivere le relazioni metriche della tabella (Tabella IV.3). Queste relazioni sono utili alla rappresentazione grafica dei poliedri. In particolare se esprimiamo la lunghezza dello spigolo di un poliedro in funzione del cubo che lo inscrive (Tabella IV.4), possiamo costruire il poliedro a partire proprio dalla rappresentazione del cubo. Infatti (fig. IV.22), chiamati con m i punti medi dei lati del cubo, possiamo disegnare gli spigoli **PP** dell'icosaedro (centrati rispetto la faccia del cubo) richiamando il

β_n	n			
	3	4	5	6
60°	Tetraedro	Ottaedro	Icosaedro	-
90°	Esaedro	-	-	-
108°	Dodecaedro	-	-	-
120°	-	-	-	-

Tabella 1V.1

Simbolo	Poliedro	Codice Schläfli	Num. facce	Num. Vertici	Num. Spigoli
T	Tetraedro	(3,3,3)	4F ₃	4	6
C	Esaedro	(4,4,4)	6F ₄	8	12
O	Ottaedro	(3,3,3,3)	8F ₃	6	12
D	Dodecaedro	(5,5,5)	12F ₅	20	30
I	Icosaedro	(3,3,3,3,3)	20F ₃	12	30

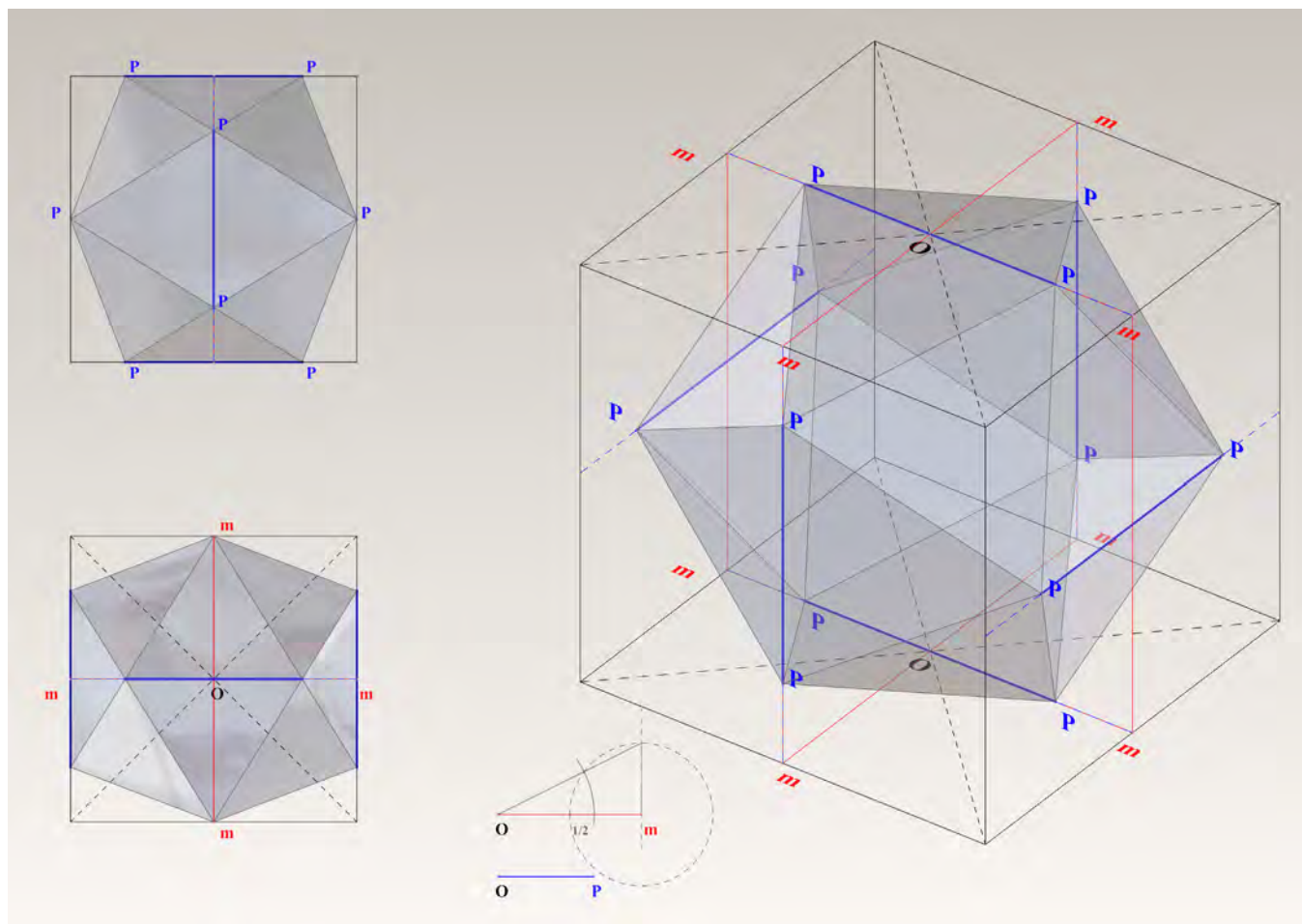
Tabella 1V.2

Tetraedro	$m = \frac{2}{3}R\sqrt{6}$	$r = \frac{1}{3}R$	$\cos \alpha = \frac{1}{3}$
Esaedro	$m = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$	$r = \frac{1}{3}R\sqrt{3}$	$\cos \alpha = 0$
Ottaedro	$m = R\sqrt{2}$	$r = \frac{1}{3}R\sqrt{3}$	$\cos \alpha = -\frac{1}{3}$
Dodecaedro	$m = \frac{1}{3}R(\sqrt{15} - \sqrt{3})$	$r = R\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}$	$\tan \alpha = -2$
Icosaedro	$m = \frac{1}{5}R\sqrt{10(5 - \sqrt{5})}$	$r = R\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}$	$\sin \alpha = \frac{2}{3}$

Tabella 1V.3

Tetraedro	$m_T = m_C\sqrt{2}$
Ottaedro	$m_O = \frac{1}{2}m_C\sqrt{2}$
Dodecaedro	$m_D = \frac{1}{2}m_C(3 - \sqrt{5})$
Icosaedro	$m_I = \frac{1}{2}m_C(-1 + \sqrt{5})$
$\frac{\text{spigolo Cubo}}{\text{spigolo Icosaedro}} = \frac{\text{spigolo Icosaedro}}{\text{spigolo Dodecaedro}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi (1, 618 \dots)$	

Tabella 1V.4



IV.22/ Relazioni metriche tra il cubo e l'icosaedro.

rapporto aureo che lega le due entità, e di cui è possibile fare una costruzione grafica. Una volta individuati gli spigoli dell'icosaedro per ogni faccia del cubo, è possibile disegnare tutte le facce dell'icosaedro.

In modo del tutto analogo (fig. IV.23) si può procedere alla rappresentazione grafica del dodecaedro, sempre a partire dal cubo che lo circoscrive. In questo caso però, il rapporto che lega lato del cubo con il lato del dodecaedro vale φ^2 . La costruzione grafica di questo rapporto consiste nella divisione di un segmento in 5 parti u uguali. Si costruisce poi la diagonale del rettangolo che

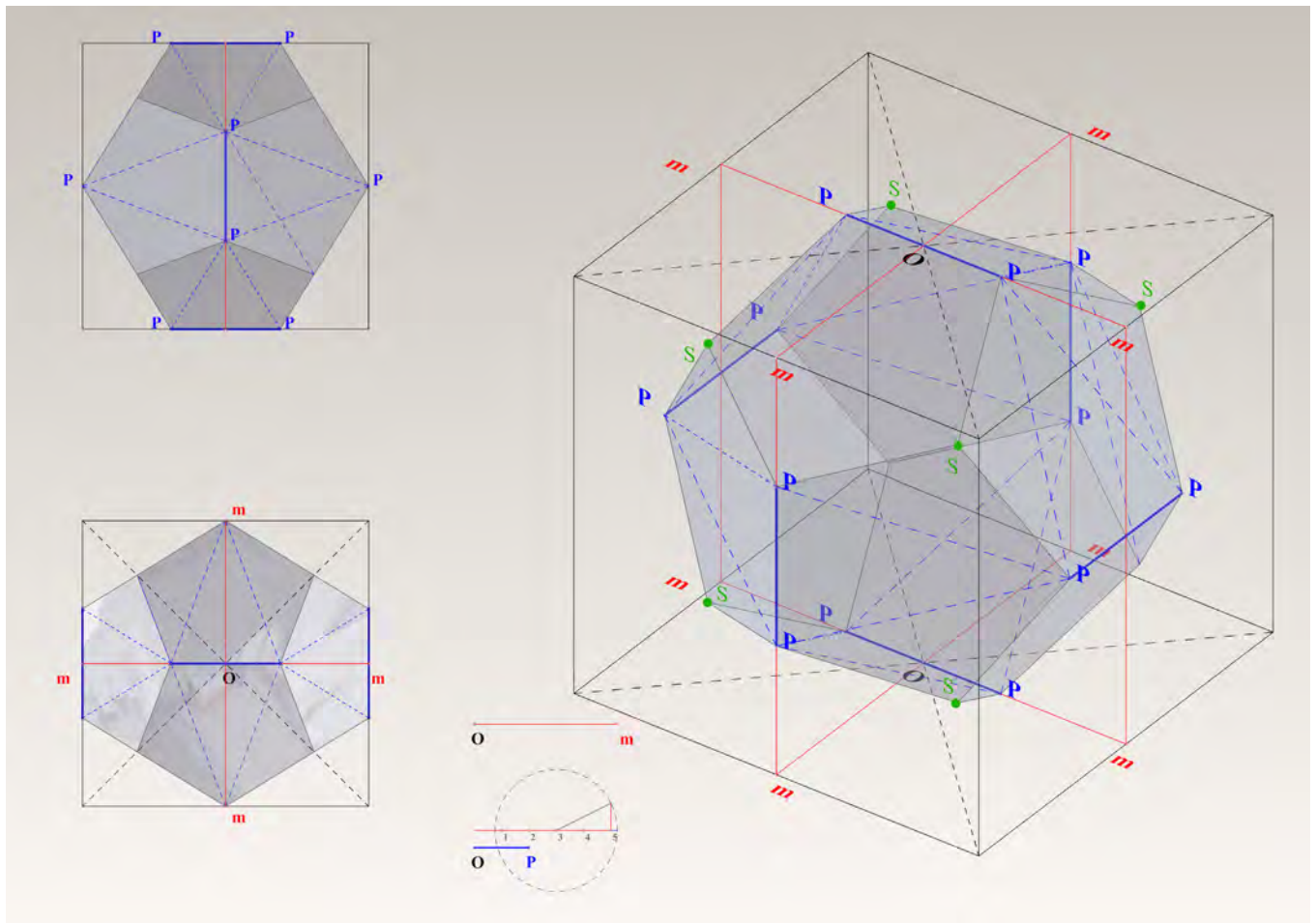
ha per lati $2u$ nella larghezza, ed u nell'altezza. A questo punto sul prolungamento del segmento iniziale si ribalta la lunghezza della diagonale appena trovata e si ottiene la lunghezza del lato del cubo. In termini matematici, supponendo che u sia uguale ad 1, avremo che:

$$m_C = 3 + \sqrt{5}$$

$$m_D = 2$$

e quindi,

$$\frac{m_C}{m_D} = \varphi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$



IV.23/ Relazioni metriche tra il cubo ed il dodecaedro.

Per determinare invece la posizione dei punti **S** del dodecaedro, basta ricordare che in un pentagono le diagonali (che congiungono due punti **P**) sono parallele ad uno dei lati.

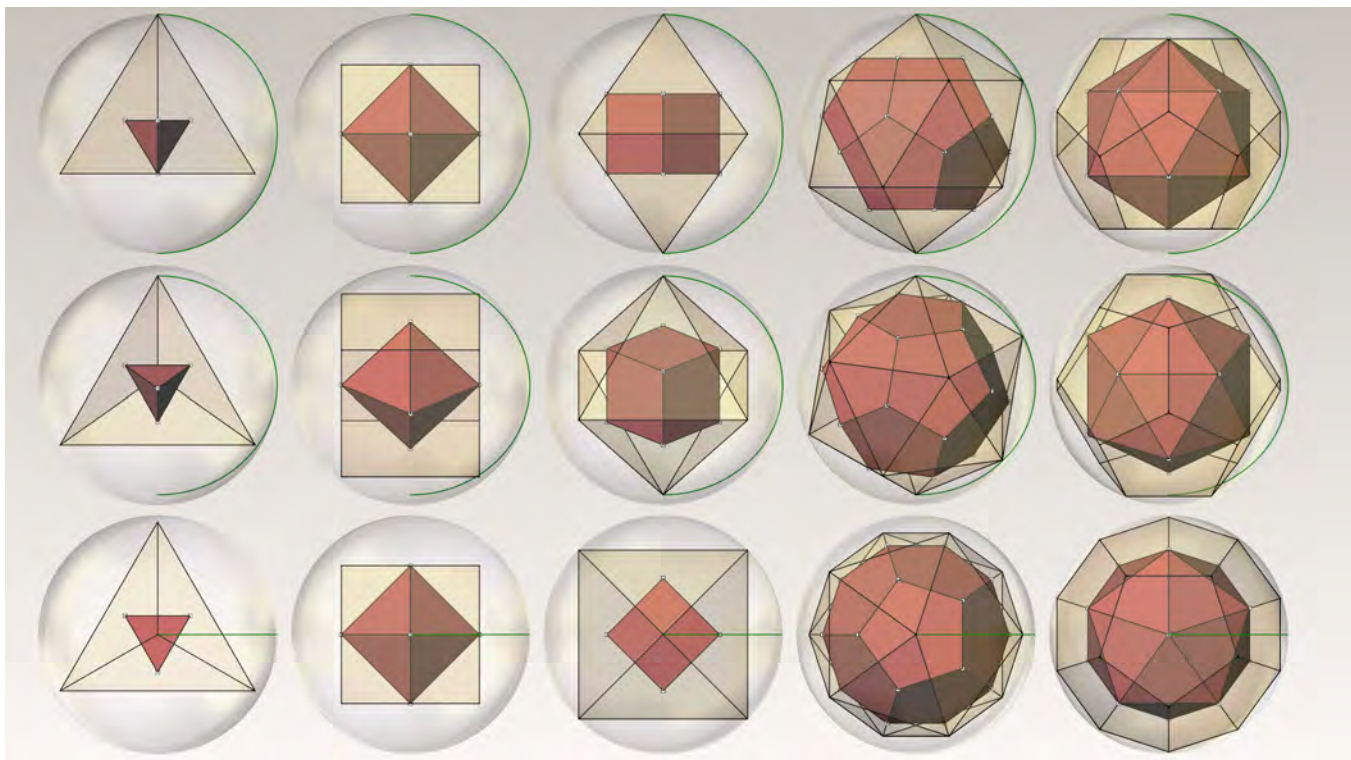
Dalla tabella IV.2 è possibile notare che l'esaedro è composto da 6 facce ed 8 vertici. L'ottaedro invece è composto da 6 vertici ed 8 facce. Quando in due poliedri il numero delle facce del primo corrisponde al numero dei vertici del secondo e quando il numero delle facce del secondo corrisponde al numero dei vertici del primo, si dice che essi formano una coppia *reciproca* o *duale* di poliedri

regolari. Altri rapporti di dualità tra poliedri regolari si instaurano tra il dodecaedro e l'icosaedro e tra il tetraedro con un altro tetraedro (è cioè reciproco di sé stesso).

La proprietà di reciprocità (*fig. IV.24*) tra poliedri ci consente di rappresentare i poliedri a partire da altri. Ad esempio per ottenere l'ottaedro e l'icosaedro, possiamo prendere rispettivamente i baricentri delle facce del cubo (esaedro) e del dodecaedro. Oppure operare all'inverso e cioè determinando i vertici del cubo dai baricentri delle facce dell'ottaedro, ed anche i vertici del dodecaedro, dai baricentri delle facce dell'icosaedro.

A questo punto occorre accennare al teorema di Pohlke ed in particolare ad una sua estensione dovuta al suo allievo Schwartz, che consente di rappresentare qualunque poliedro regolare secondo il metodo dell'assonometria obliqua. Il teorema di Karl Pohlke dice che: *tre segmenti complanari e incidenti in un punto comune T' , tali che non più di due di essi si sovrappongano o che non più di uno sia nullo, possono essere sempre considerati come proiezione parallela di una terna triortogonale di segmenti unitari, di origine T* . La dimostrazione di questo teorema è molto complessa, tuttavia con il modellatore matematico possiamo darne una rappresentazione sintetica seguendo questi passaggi (fig. IV.25). Consideriamo una terna di assi (in rosso, verde e blu nella figura) complanari e incidenti in un punto T' , presi in modo che non più di due siano coincidenti e che al massimo uno abbia come proiezione un punto. Il

primo passaggio è quello di costruire i simmetrici degli assi rispetto il punto di incidenza T' . Si costruiscono le ellissi che hanno per diametri coniugati le tre coppie di segmenti. Si costruisce l'ellisse di involuppo delle tre ellissi appena create. Per determinare quest'ultimo passaggio, è importante notare¹¹ che l'ellisse di involuppo è tangente alle tre ellissi precedentemente costruite, secondo le direzioni $A'T'$, $B'T'$ e $C'T'$. A questo punto si considera quest'ultima ellisse come la proiezione parallela di una sfera che, secondo il teorema di Germinal Pierre Dandelin¹² (1783-1842), tocca il piano dell'ellisse d'involuppo in uno dei suoi fuochi, e che ha per diametro l'asse minore dell'ellisse contorno apparente. Questa sfera circoscrive la terna triortogonale cercata. La direzione di proiezione assonometrica è individuata dal segmento di retta TT' ; diventa quindi agevole, mantenendo la stessa direzione di proiezione, determinare la

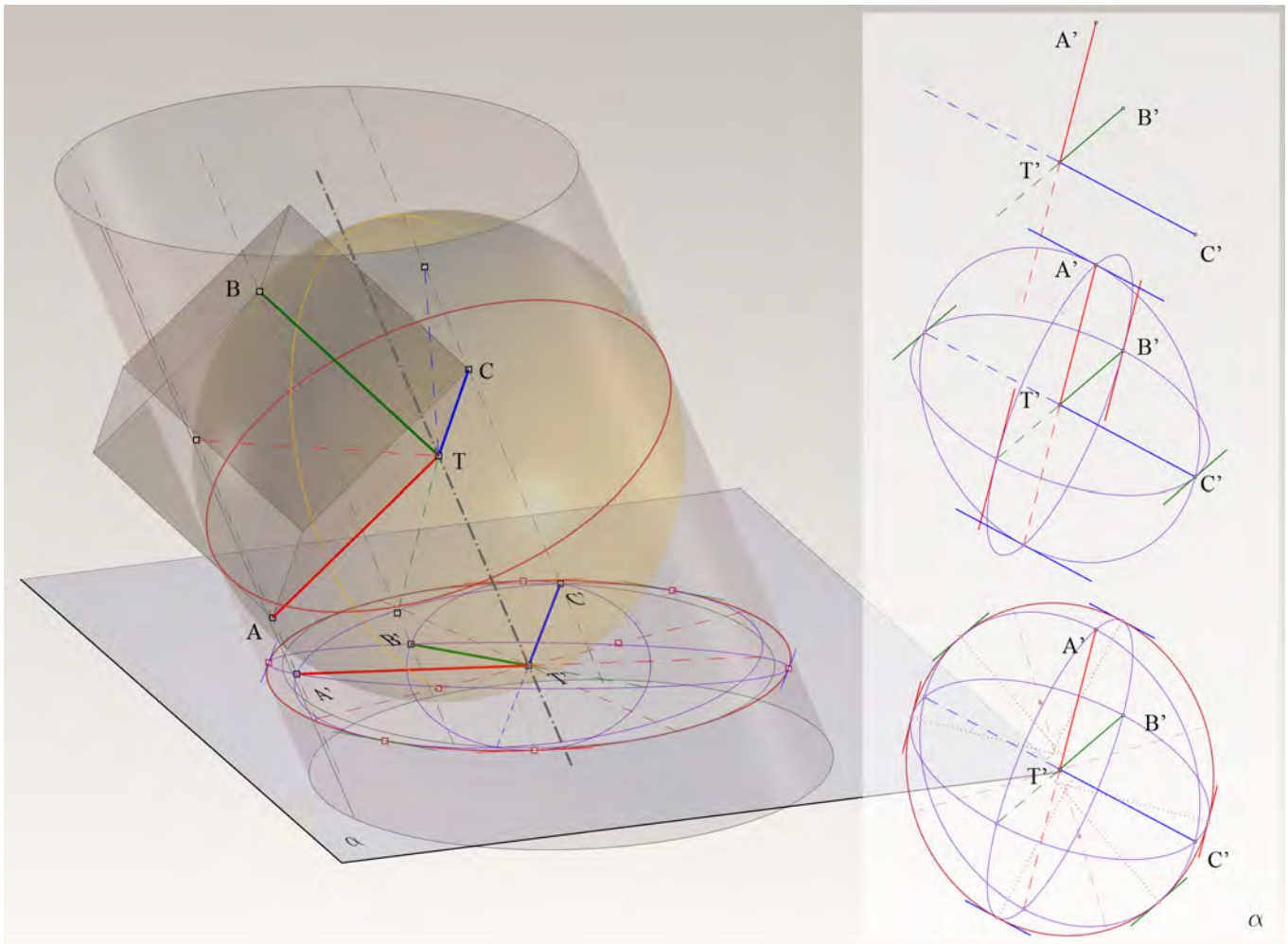


IV.24/ Proprietà di reciprocità tra i solidi regolari.

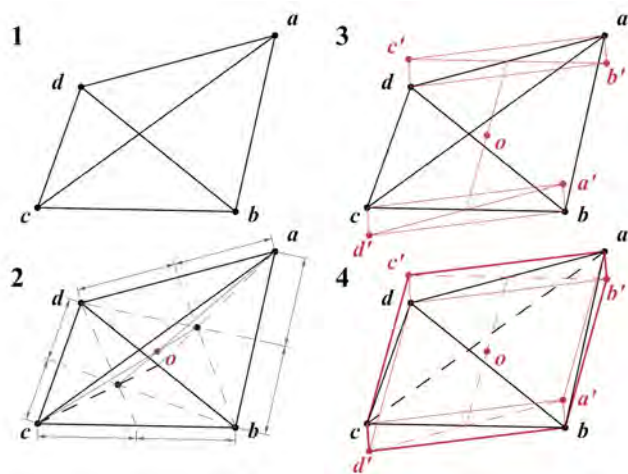
terna triortogonale all'interno della sfera¹³.

L'estensione di questo teorema dovuta a Schwartz, afferma che: *quattro punti, non tutti allineati, dati in un piano, possono essere sempre assunti come proiezioni dei vertici di un tetraedro di data forma*. In altre parole, non è necessario che i tre assi che generano la figura proiettata siano tra loro ortogonali. E allora (fig. IV.26.), presi quattro punti **a**, **b**, **c** e **d**, in un piano, essi possono essere considerati come l'immagine dei vertici di un tetraedro regolare, rappresentati secondo una assonometria obli-

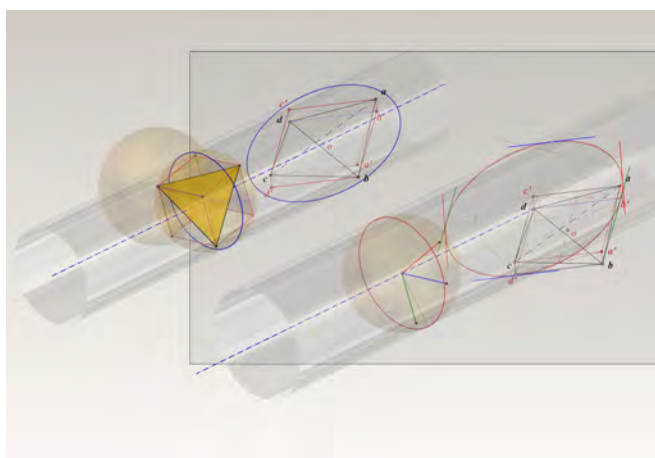
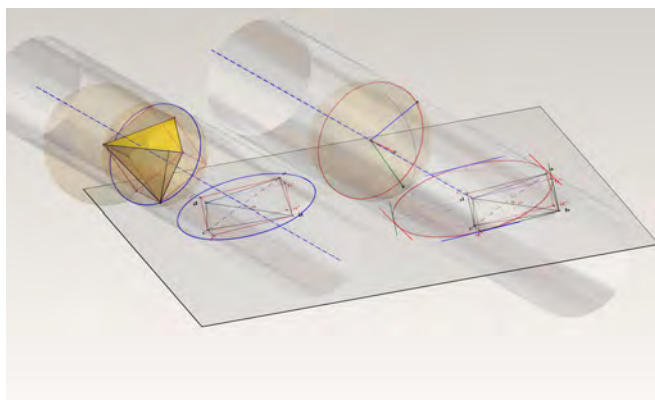
qua. Per verificare sperimentalmente questa condizione, applichiamo il teorema di Pohlke ad una terna qualsiasi dei punti suddetti, ad esempio ai segmenti **db'**, **dc'** e **dd'** (fig. IV.27 e fig. IV.28). In questo modo possiamo costruire nello spazio, seguendo il procedimento già adottato per il teorema di Pohlke, il cubo di spigoli unitari, di cui i punti **d**, **d'**, **c'** e **b'** ne rappresentano una proiezione parallela. Le diagonali delle facce di questo cubo, costituiranno gli spigoli del tetraedro cercato. Infatti la proiezione (secondo la direzione **OO'**), dei vertici del



IV.25/ Dimostrazione sintetica del teorema di Karl Pohlke.



IV.26/ Estensione del teorema di Pohlke eseguita da Schwartz.



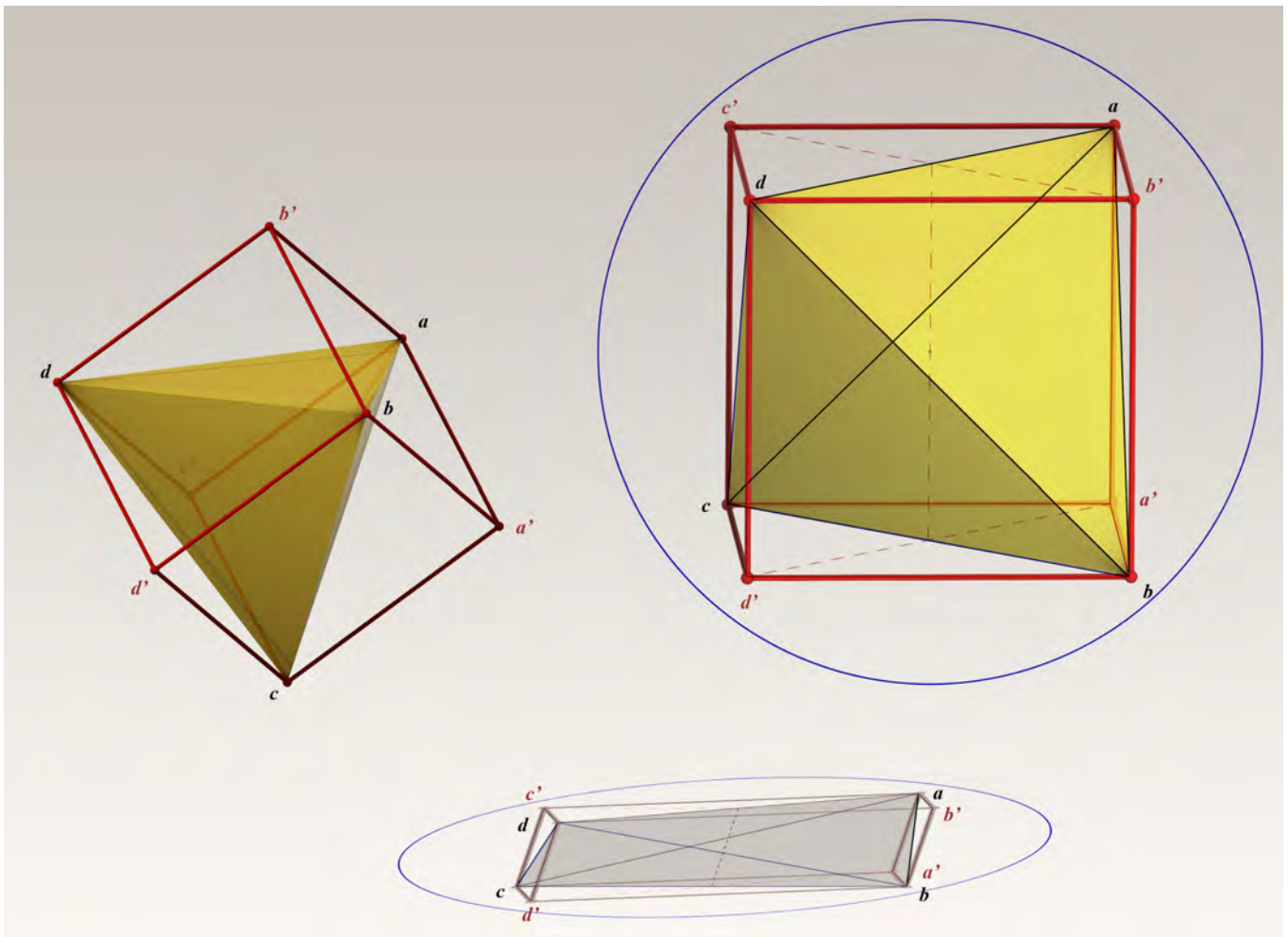
IV.27-28/ Verifica sperimentale dell'estensione del teorema di Pohlke.

tetraedro, coinciderà esattamente i punti **a**, **b**, **c** e **d**, assegnati (fig. IV.29).

L'estensione del teorema di Pohlke, ha una notevole importanza nella costruzione dei modelli grafici di tutti i poliedri regolari. Possiamo, infatti considerare tre segmenti complanari e incidenti in un punto, come proiezione parallela di tre spigoli di un dodecaedro (fig. IV.30). Assegnati tre segmenti di retta **AB**, **AC**, e **AD**, cominciamo a costruire le facce pentagonali del dodecaedro, sfruttando una nota proprietà dei pentagoni regolari: le diagonali del pentagono, si dividono reciprocamente in media ed estrema ragione. In virtù di questa proprietà, possiamo costruire in assonometria obliqua un pentagono regolare a partire da due segmenti complanari **ab** e **bc** incidenti in un punto (fig. IV.31). Basta infatti tracciare dal punto **a** la parallela al lato **bc**, e costruire su di essa una delle costruzioni della sezione aurea. Gli altri lati del pentagono si determinano utilizzando le proprietà di parallelismo tra lati e diagonali, della figura. Procedendo in questo modo, possiamo costruire i primi tre pentagoni del dodecaedro, di lati **AB**, **AC**, e **AD**. Queste tre facce forniranno altre coppie di spigoli del dodecaedro, che verranno utilizzate per costruire altre facce del solido fino alla sua completa definizione.

Il modellatore matematico, ci consente di realizzare le costruzioni nello spazio che definiscono le configurazioni dei solidi platonici. Possiamo cioè rappresentare i poliedri regolari seguendo dei processi di costruzione che divengono così un'alternativa alla rappresentazione che afferisce al linguaggio simbolico della matematica. Gino Loria¹⁴ a tale proposito parla di "costruzione come metodo di dimostrazione esistenziale", che può essere annoverata tra i metodi della matematica. Il disegno come linguaggio sintetico, trova nella geometria un ruolo fondamentale che con i nuovi strumenti informatici viene ancor di più valorizzato.

Cominciamo allora con il costruire il tetraedro a partire da una sua faccia che giace sul primo piano di proiezione (fig. IV.32). Dopo aver disegnato il triangolo equilatero di vertici **A**, **B** e **C**, ne facciamo il simmetrico rispetto ad uno dei suoi lati, ad esempio **BC**. Possiamo interpretare questo secondo triangolo come il ribaltamento di una faccia del triedro sul medesimo piano orizzontale della



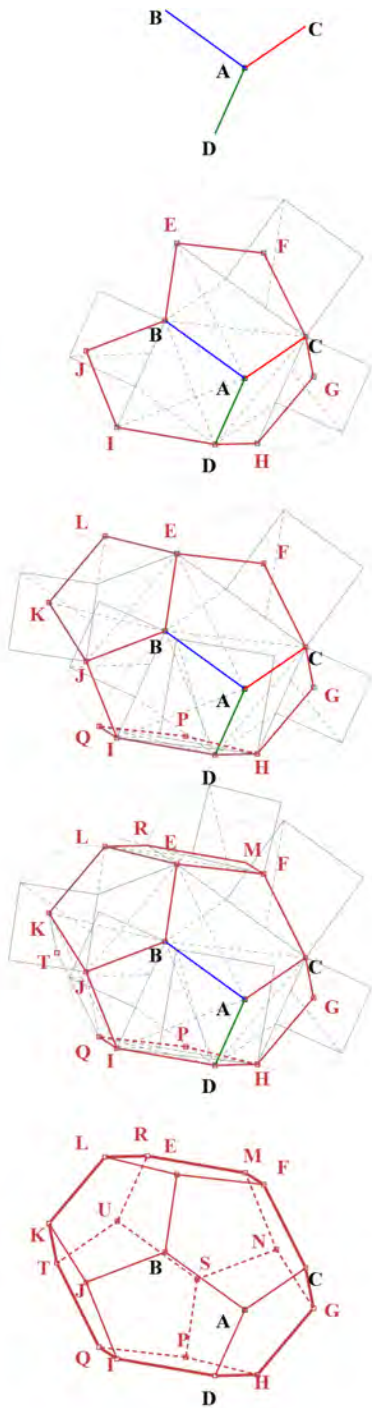
IV.29/ La proiezione parallela dei vertici del tetraedro, coincide con i punti a, b, c e d , assegnati.

base. Eseguiamo quindi l'operazione inversa, cioè il raddrizzamento, in modo tale da portare il punto V^* , sull'asse verticale passante per il baricentro della faccia di base. In questo modo abbiamo individuato il vertice V del tetraedro regolare. Per completarlo, basta sfruttare le proprietà di simmetria della figura.

La costruzione dell'esaedro (*fig. IV.33*) con il modellatore è molto semplice e non necessita di particolari considerazioni.

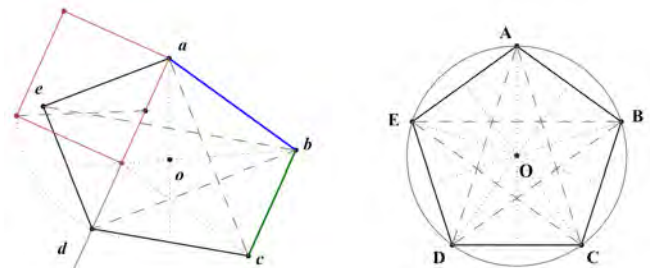
Per l'ottaedro (*fig. IV.34*), possiamo iniziare con il disegnare il quadrato $ABCD$ che giace sul primo piano di proiezione, e che costituirà il piano di simmetria orizzontale del solido. Costruiamo il triangolo equilatero di vertici CDV^* , e consideriamolo come il ribaltamento sul piano orizzontale di una faccia dell'ottaedro. Operiamo il raddrizzamento (utilizzando come asse di rotazione il lato CD) di quest'ultimo triangolo in modo da individuare nel vertice V l'intersezione tra l'arco di circonferenza di raggio HV^* e la perpendicolare condotta dal centro O del quadrato $ABCD$. Sfruttando le proprietà di simmetria della figura, possiamo concludere la rappresentazione dell'ottaedro.

Il primo passaggio per la costruzione del dodecaedro (*fig. IV.35*) è il disegno del pentagono regolare che sarà la base

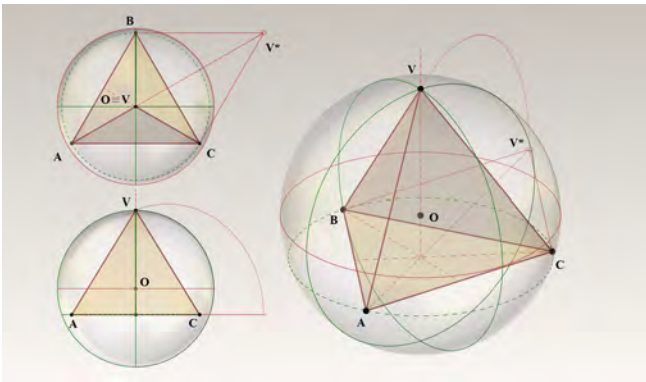


IV.30/ Tre segmenti complanari e incidenti in un punto, possono essere sempre considerati come proiezione parallela di tre spigoli di un dodecaedro.

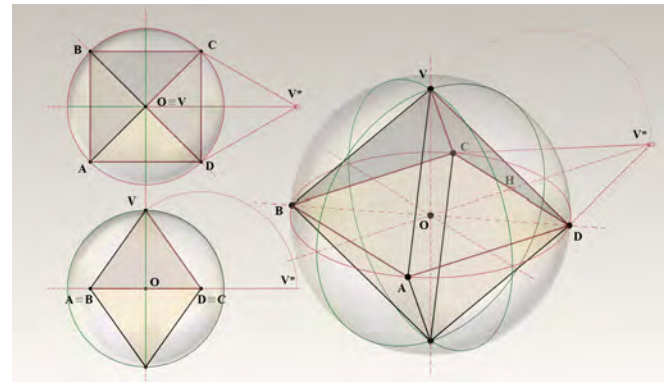
del nostro solido. Si procede poi con la realizzazione di due pentagoni simmetrici rispetto alla base secondo due lati contigui, ad esempio **AE** e **ED**. Questi pentagoni rappresentano il ribaltamento sul piano orizzontale delle facce del dodecaedro. Essi dovranno ruotare rispetto al lato che hanno in comune con il pentagono di base in modo tale che i punti **F*** e **G***, vengano a coincidere. Si noti che quando i due lati si saranno portati in posizione, la loro prima proiezione sarà la bisettrice dell'angolo **F*EG***. Dunque, i punti coincidenti **F** e **G** avranno la prima proiezione sulla stessa bisettrice e proprio grazie a questa caratteristica risultano determinati. A questo punto, si procede eseguendo un'operazione di simmetria rotazionale delle facce del dodecaedro uscenti dalla base, attorno l'asse verticale passante per il baricentro della base stessa. Abbiamo ottenuto così una superficie poliedrica aperta, composta dalla base e da cinque facce, che può essere specchiata secondo un piano di simmetria orizzontale. Dopo una rotazione di 36° rispetto l'asse verticale, si possono portare a fare coincidere le due superfici poliedriche, che verranno a formare il solido chiuso. Alcune caratteristiche interessanti del dodecaedro, analizzate nel 1902 da Gino Fano, possono essere indagate per mezzo del modellatore matematico. Se proiettiamo ortogonalmente al primo piano di proiezione (fig. IV.36), i vertici del dodecaedro che abbiamo costruito, notiamo che quelli del primo e quarto livello, e quelli del secondo e terzo livello, giacciono rispettivamente su due circonferenze di raggio **r** ed **R**. Inoltre, per le proprietà di simmetria del solido, i vertici sono uniformemente ripartiti sulle due circonferenza, divenendo così i vertici di due decagoni re-



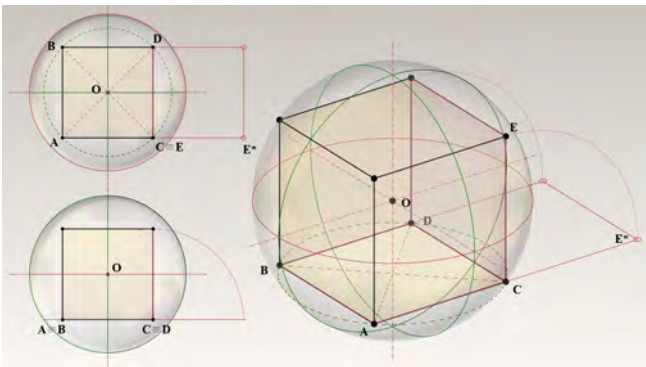
IV.31/ È sempre possibile costruire in assonometria obliqua un pentagono regolare a partire da due segmenti complanari **ab** e **bc**, incidenti in un punto.



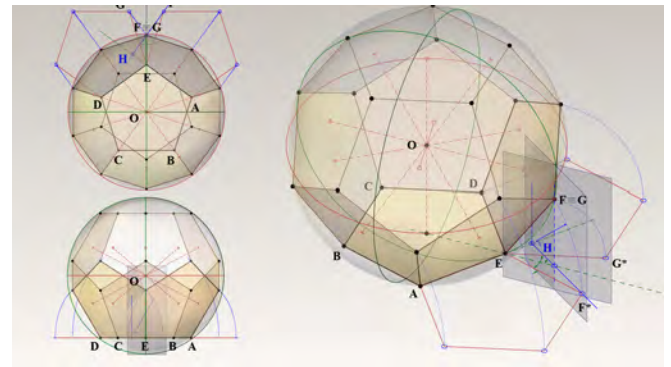
IV.32/ Processo di costruzione del tetraedro.



IV.34/ Processo di costruzione dell'ottaedro.



IV.33/ Processo di costruzione del cubo.

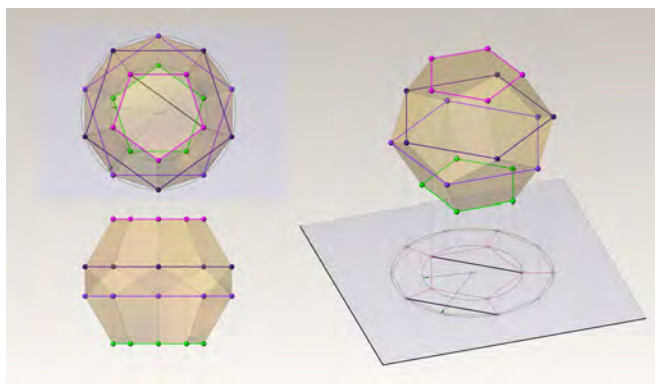


IV.35/ Processo di costruzione del dodecaedro.

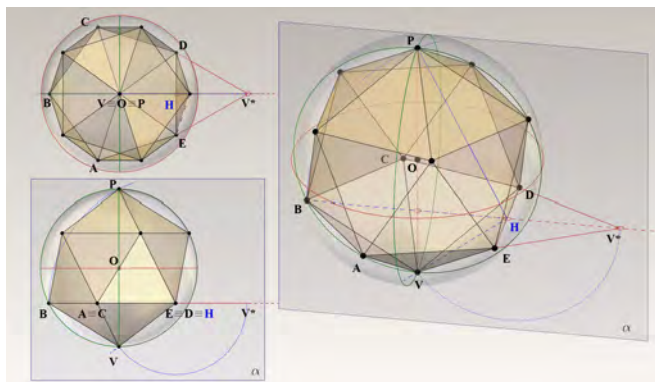
golari concentrici, di cui il più piccolo ha lato d . Il raggio r del decagono più piccolo è in rapporto aureo con il lato d dello stesso pentagono; il lato del decagono più grande è uguale ad $r+d$. La distanza tra il primo e il secondo livello vale r , la distanza tra il primo e il terzo livello vale $r+d$ ed infine il quarto dista dal primo $2r+d$.

La costruzione dell'ultimo dei solidi platonici, l'icosaedro, si basa sulla interpretazione che lo vede formato da due piramidi equilatera a base pentagonale, collegate insieme da dieci facce triangolari, sempre equilatera (fig. IV.37). Dunque iniziamo con il disegnare il pentagono $ABCDE$ sul piano orizzontale, ed un triangolo equilatero con il lato coincidente con uno dei lati del pentagono. Operiamo il raddrizzamento del triangolo EDV^* (utilizzando come cerniere il lato DE), fino ad incontrare in V l'asse verticale passante per il centro del pentagono

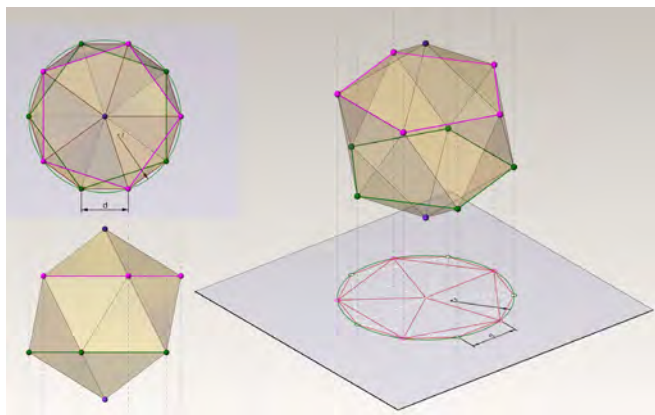
$ABCDE$. In questo modo abbiamo definita la prima piramide di base pentagonale e di facce equilatera. Sul piano verticale α , tracciamo un arco di circonferenza di raggio HB di centro H , che incontrerà nel punto P l'asse verticale dell'icosaedro. Il punto P rappresenta il vertice superiore del solido in quanto, potendo individuare nel dodecaedro dodici piramidi di base pentagonale, esso disterà dal punto H quanto l'altezza stessa del pentagono. Determinato il punto P possiamo completare la costruzione seguendo i due passaggi già utilizzati per la costruzione del dodecaedro, e cioè la simmetria della prima piramide rispetto al piano orizzontale e la rotazione di 36° rispetto l'asse verticale del solido. Per l'icosaedro è possibile fare alcune considerazioni analoghe a quelle fatte per il dodecaedro. Se infatti, proiettiamo i vertici dell'icosaedro che abbiamo costruito, sul primo piano di proiezione, secondo



IV.36/ Se proiettiamo ortogonalmente al primo piano di proiezione i vertici del dodecaedro, quelli del primo e quarto livello, e quelli del secondo e terzo livello, giacciono rispettivamente su due circonferenze di raggio r ed R .



IV.37/ Processo di costruzione dell'icosaedro.

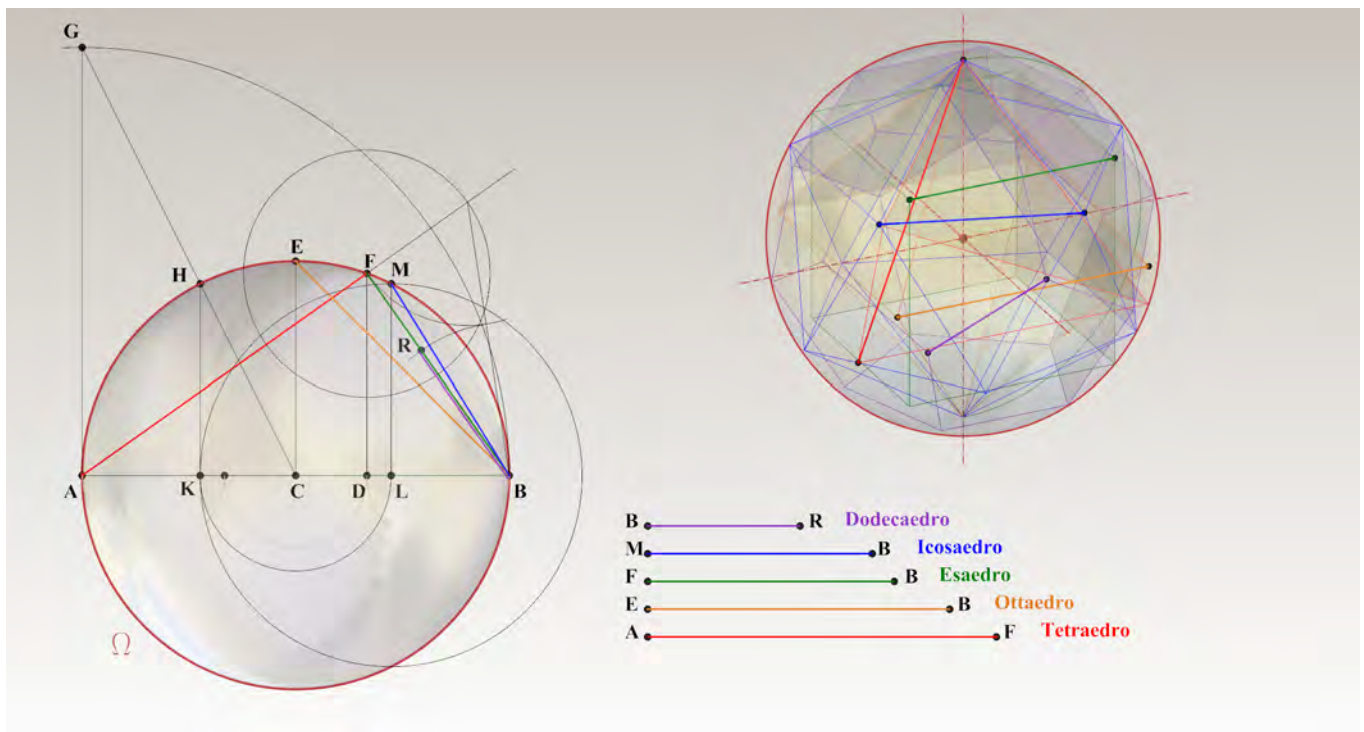


IV.38/ Se proiettiamo i vertici dell'icosaedro ortogonalmente al primo piano di proiezione, i vertici del secondo e terzo livello si distribuiscono uniformemente su di una circonferenza, definendo così un decagono regolare di raggio r e lato d .

una direzione ad esso ortogonale (fig. IV.38), notiamo che anche in questo caso i vertici del secondo e terzo livello si distribuiscono uniformemente su di una circonferenza, definendo così un decagono regolare di raggio r e lato d . La distanza che lega il primo livello (costituito dal solo vertice inferiore dell'icosaedro) con il secondo vale d , la distanza tra il secondo ed il terzo livello vale $d+r$ e la distanza tra il primo ed il quarto livello (anche questo composto dal solo vertice superiore del solido) vale $2d+r$.

Disegniamo per ciascuno dei solidi costruiti, le sfere che li circoscrivono (che passano cioè per tutti i vertici di ogni solido) e che avranno i loro centri nei baricentri dei corrispondenti poliedri. Infine, attraverso un'operazione di ridimensionamento, rendiamo congruenti tra di loro i gruppi delle sfere con i relativi solidi inscritti (fig. IV.39).

Abbiamo a questo punto la rappresentazione matematica dei cinque solidi platonici rapportati ad una medesima sfera. Questa configurazione, ci consente di fare una verifica sperimentale della Proposizione XVIII del Libro XIII, con cui si concludono gli *Elementi*, in cui si dimostra come "trovare gli spigoli delle cinque figure e paragonarli tra loro". Euclide confronta tra di loro gli spigoli dei cinque solidi platonici inscritti in una medesima sfera. Possiamo allora verificare che le costruzioni che noi abbiamo eseguite, siano coerenti con ciò che Euclide scrive intorno al 300 a.C. Gli strumenti di analisi messi a disposizione dai modellatori matematici ci consentono di eseguire questa sperimentazione in modo agevole. La costruzione di Euclide, inizia con il tracciamento di uno dei cerchi massimi Ω della sfera che circoscrive i cinque solidi platonici, il cui diametro è AB . Si divide quest'ultimo in tre parti uguali, e dal punto D che segna i $2/3$ del diametro, si traccia la perpendicolare al diametro stesso. Chiamiamo con F il punto d'intersezione tra la perpendicolare e la circonferenza Ω . Euclide dimostra che AF e FB sono rispettivamente le lunghezze degli spigoli del tetraedro e dell'esaedro. Procediamo con la costruzione di Euclide; se dividiamo secondo la media ragione il segmento FB , in modo da ottenere il punto R , individuamo la lunghezza RB che corrisponde alla lunghezza dello spigolo del dodecaedro. Tracciamo dal centro C della circonferenza Ω la perpendicolare al diametro AB e



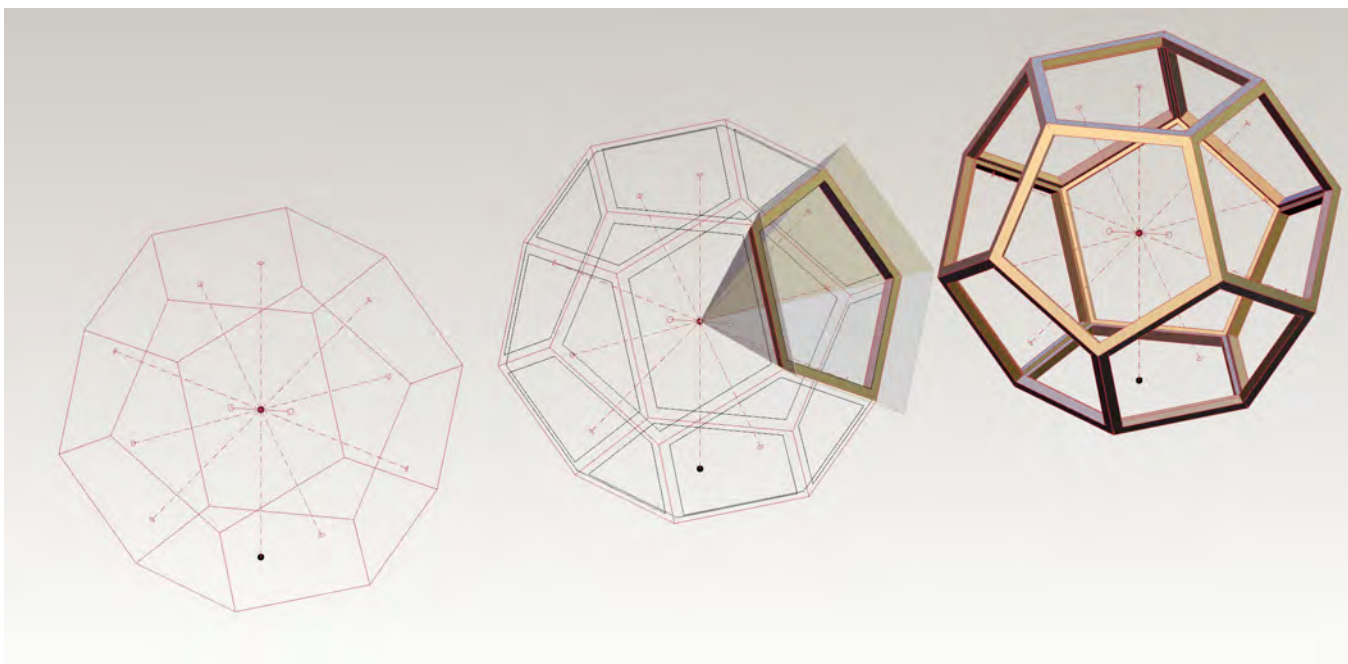
IV.39/ Metodo di Euclide per costruire il lato dei cinque solidi platonici a partire dal cerchio massimo della sfera che li circoscrive.

chiamiamo **E** il punto d'intersezione con la circonferenza stessa; allora il segmento **AB** è la lunghezza dello spigolo dell'ottaedro. Infine, per determinare la costruzione grafica dello spigolo dell'icosaedro, tracciamo il quarto di circonferenza di centro **A** e raggio **AB**, che individua il punto **G**. Uniamo quest'ultimo con il centro **C** e chiamiamo **H** l'intersezione con la circonferenza Ω . Proiettiamo ortogonalmente **H** su **AB** e facciamo il simmetrico del punto **K** così ottenuto, rispetto al centro **C**. La circonferenza di centro **L** e raggio **KL**, taglia la circonferenza Ω nel punto **M**. La distanza **MB** è la lunghezza dello spigolo dell'icosaedro. In tutti i casi descritti il confronto tra le lunghezze dei segmenti ottenuti seguendo la costruzione grafica di Euclide, e i corrispondenti spigoli dei poliedri disegnati "nello spazio" con il modellatore matematico, risulta verificato. In particolare, se la sfera che circoscrive i cinque solidi platonici ha per raggio 1000 unità di misura, si ottengono le seguenti lunghezze degli spigoli:

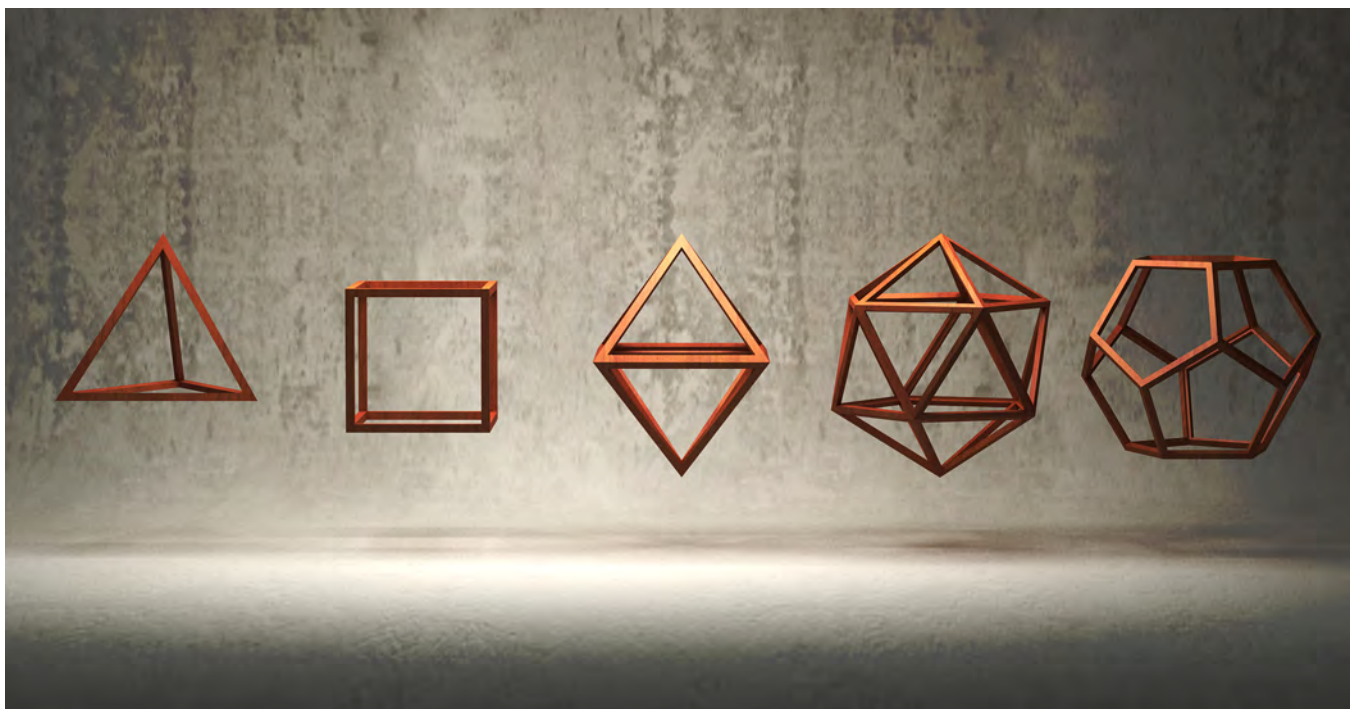
- **Dodecaedro:** 713,644
- **Icosaedro:** 1051,462
- **Esaedro:** 1154,701
- **Ottaedro:** 1414,214
- **Tetraedro:** 1632,993

Si noti che tali valori corrispondono esattamente a quelli espressi in forma aritmetica nella tabella 4.6.

Un'ultima costruzione che risulta molto agevole se effettuata con il modellatore matematico, riguarda la rappresentazione dei poliedri vuoti. Questo tipo di raffigurazione dei poliedri è analoga ai modelli lignei che venivano realizzati per lo studio delle loro proprietà geometriche. La costruzione (*fig. IV.40*) si basa sulla possibilità di creare un telaio per ogni faccia, sagomato esternamente a tronco di piramide il cui vertice coincide con il centro della sfera circoscritta al poliedro. Le caratteristiche di simmetria consentono poi di posizionare il telaio per ogni faccia del solido. Questo tipo di costruzione è applicabile ogni qualvolta sia possibile



IV.40/ Metodo di costruzione per la rappresentazione dei poliedri vuoti.



IV.41/ I cinque solidi platonici vuoti.

circoscrivere (o inscrivere) una sfera al poliedro, in modo da passare in ogni vertice di quest'ultimo. Abbiamo detto che tale caratteristica si verifica in tutti e cinque i poliedri regolari (fig. IV.41), e, come vedremo tra breve, anche in quelli denominati *semiregolari* (o archimedei) con i corrispondenti duali (o catalani).

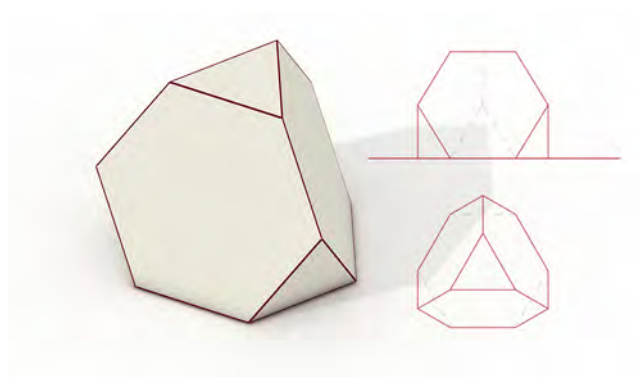
I poliedri semiregolari

I *poliedri di Archimede* sono poliedri convessi, composti da facce di poligoni regolari di diverso tipo ma con spigoli di uguale lunghezza; per questo motivo vengono anche detti poliedri semiregolari. Archimede per primo dimostrò che essi possono essere solo 13 di numero (tabella IV.5) e (da fig. IV.42, a fig. IV.54). Considerando però la proprietà *chirale* degli ultimi due (fig. IV.55), tale che lo stesso poliedro risulta diverso da un suo simmetrico (si riconosce cioè un verso destrorso o levogiro del poliedro stesso) alcuni autori parlano di 15 poliedri di

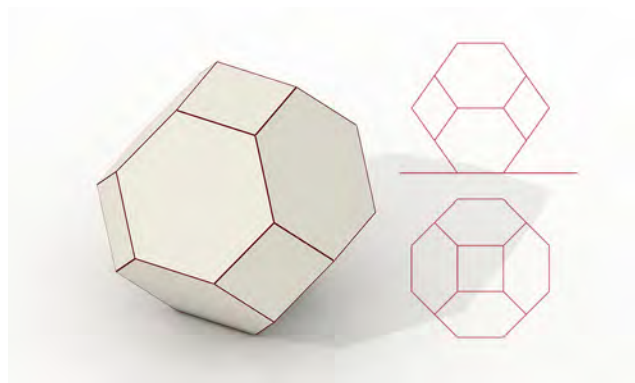
Archimede. La loro caratteristica più importante risiede nel fatto di poter essere iscritti in una sfera che tocca ciascun vertice del solido; invece non è possibile inscrivere al loro interno una sfera concentrica a quella esterna. Inoltre, gli angoli diedri tra le possibili combinazioni delle coppie di poligoni di un poliedro di Archimede, assume sempre lo stesso valore. Ad esempio, consideriamo il poliedro semiregolare della figura (fig. IV.56), che si chiama *icosidodecaedro* ed è composto da facce pentagonali e triangolari equilateri. Le tre combinazioni possibili di coppie di poligoni (pentagono-pentagono, triangolo-triangolo e pentagono-triangolo) misurano uguali angoli diedri. La sigla che utilizzeremo per identificare i singoli solidi archimedei, **A I**, **A II**, **A III**, ... **A XIII**, si riferisce in parte al modo con cui essi possono essere derivati dei poliedri regolari. Infatti attraverso tre tipi di operazioni (tabella IV.6) è possibile ricavare tutti i solidi archimedei (**S.A.**) a partire dai solidi platonici (**S.P.**). Queste operazioni sono di tre tipi:

Simbolo	Poliedro	Codice	Num. facce	Num. Vertici	Num. Spigoli	Derivazione	Riferimento
A I	Tetraedro Troncato	(3,6,6)	$4F_6+4F_3=8$	12	18	T, T	Fig. 29
A II	Cubottaedro	(3,4,3,4)	$6F_4+8F_3=14$	12	24	C, O	Fig. 30
A III	Icosidodecaedro	(3,5,3,5)	$12F_5+20F_3=32$	30	60	D, I	Fig. 31
A IV	Ottaedro Troncato	(4,6,6)	$8F_6+6F_4=14$	24	36	C, O	Fig. 32
A V	Icosaedro Troncato	(5,6,6)	$20F_6+12F_5=32$	60	90	D, I	Fig. 33
A VI	Cubo Troncato	(3,8,8)	$6F_8+8F_3=14$	24	36	C, O	Fig. 34
A VII	Dodecaedro Troncato	(3,10,10)	$12F_{10}+20F_3=32$	60	90	D, I	Fig. 35
A VIII	Rombicubottaedro	(3,4,4,4)	$18F_4+8F_3=26$	24	48	C, O	Fig. 36
A IX	Rombicosidodecaedro	(3,4,5,4)	$12F_5+30F_4+20F_3=62$	60	120	D, I	Fig. 37
A X	Cubottaedro Troncato	(4,6,8)	$6F_8+8F_6+12F_4=26$	48	72	C, O	Fig. 38
A XI	Icosidodecaedro Troncato	(4,6,10)	$12F_{10}+20F_6+30F_4=62$	120	180	D, I	Fig. 39
A XII	Cubo Camuso	(3,3,3,3,4)	$6F_4+32F_3=38$	24	60	C, O	Fig. 40
A XIII	Dodecaedro Camuso	(3,3,3,3,5)	$12F_5+80F_3=92$	60	150	D, I	Fig. 41

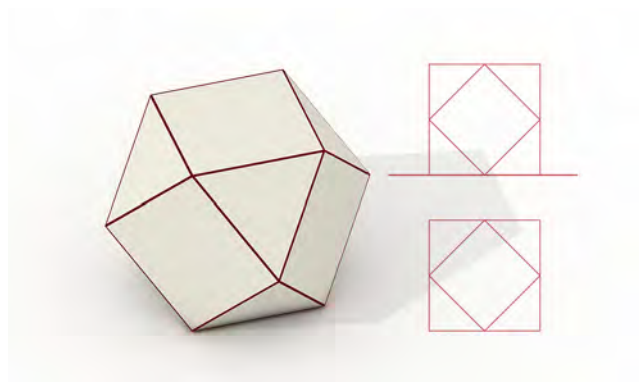
tabella IV.5



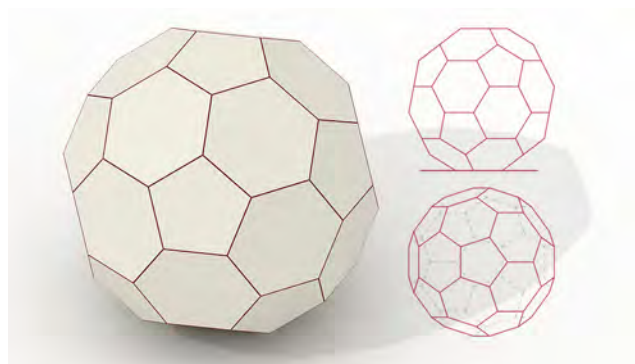
IV.42/ Tetraedro troncato, A I.



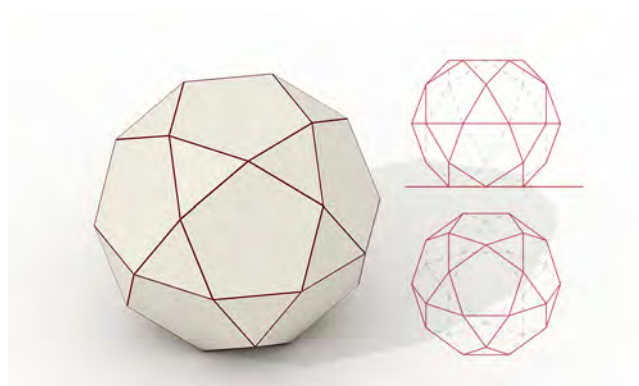
IV.45/ Ottaedro troncato, A IV.



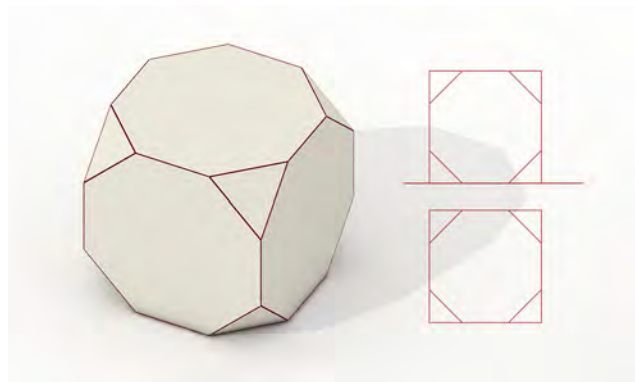
IV.43/ Cubottaedro, A II.



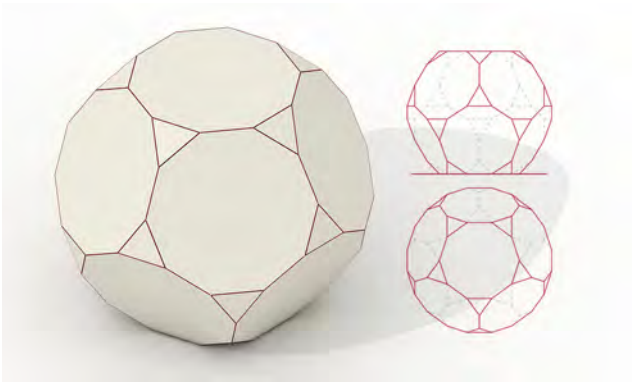
IV.46/ Icosaedro troncato, A V.



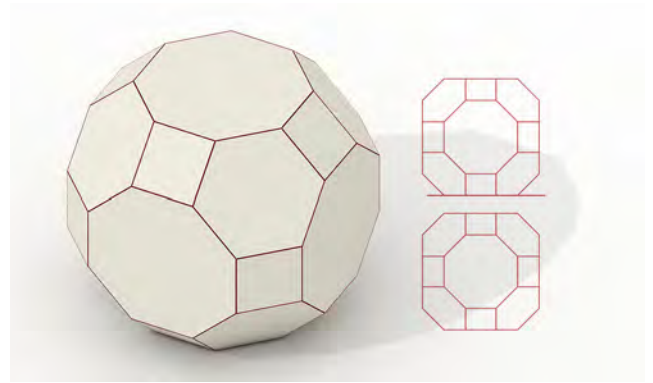
IV.44/ Icosidodecaedro, A III.



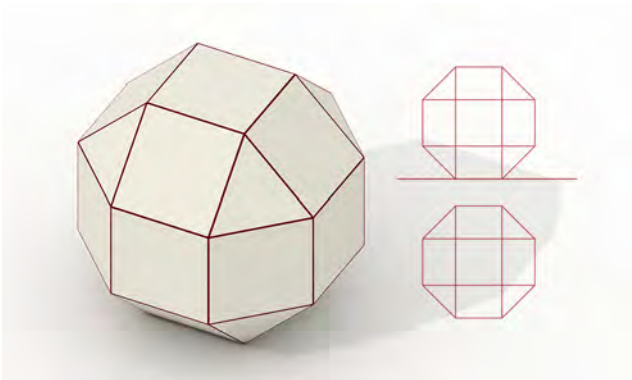
IV.47/ Cubo troncato, A VI.



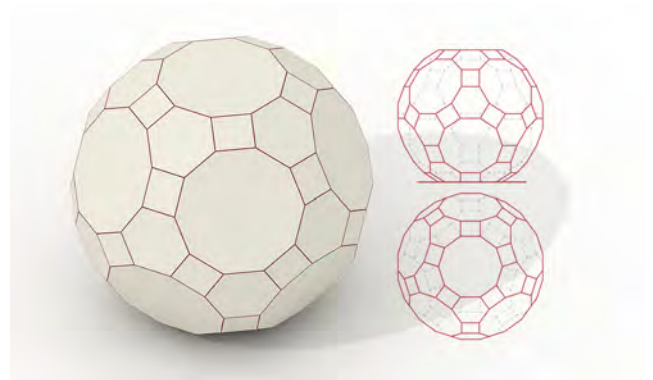
IV.48/ Dodecaedro troncato, A VII.



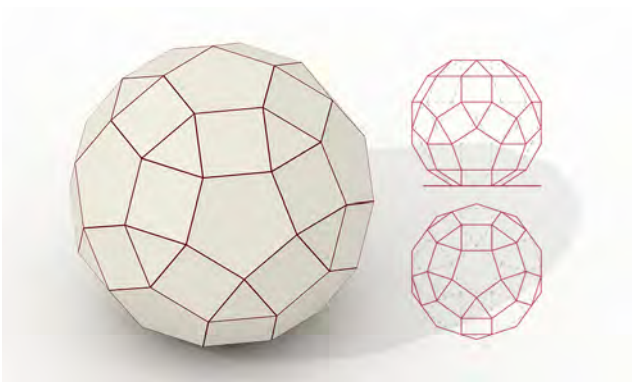
IV.51/ Cubottaedro troncato, A X.



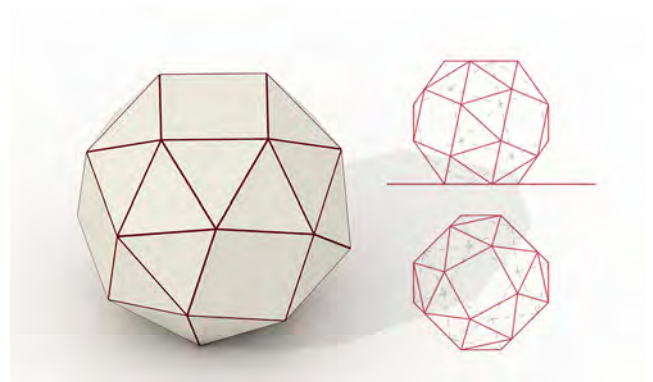
IV.49/ Rombicubottaedro, A VIII.



IV.52/ Icosidodecaedro troncato, A XI.



IV.50/ Rombicosidodecaedro, A IX.



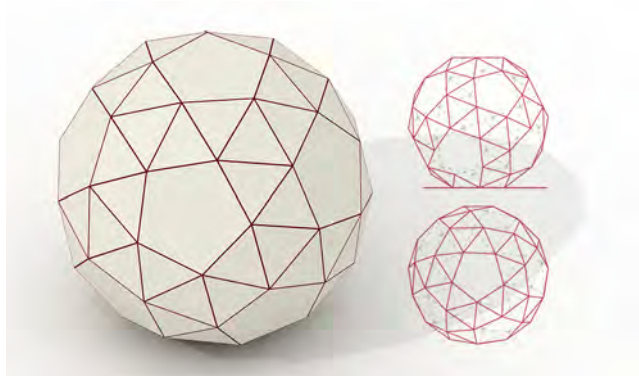
IV.53/ Cubo camuso, A XII.

- sezione piana simmetrica rispetto ai vertici del S.P.. Tale operazione prende il nome di *troncamento*.
- sezione piana condotta parallelamente agli spigoli del S.P.
- individuazione di un poligono con lo stesso numero di lati della faccia del S.P. in cui è inscritto e concentrica ad essa. Tale operazione si utilizza per la creazione degli ultimi due S.A.

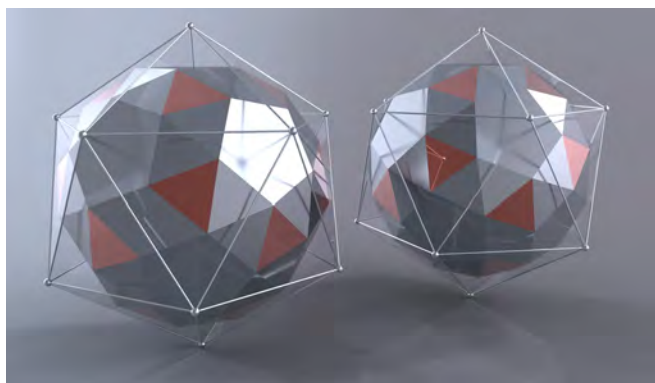
È interessante notare che coppie duali di S.P., se sottoposte ad una medesima operazione, danno origine allo stesso S.A..

Ciò avviene per **A II**, **A VIII**, **A X** e **A XII** come derivati del cubo e dell'ottaedro, e per **A III**, **A IX**, **A XI** e **A XIII** come derivati dal dodecaedro e dall'icosaedro. Inoltre, operazioni differenti condotte sulle stesse coppie duali di S.P. generano il medesimo S.A.. E questo è il caso di **A IV** e **A VI** derivati dalla coppia reciproca cubo e ottaedro, e **A V** e **A VII** derivati dalla coppia reciproca dodecaedro ed icosaedro.

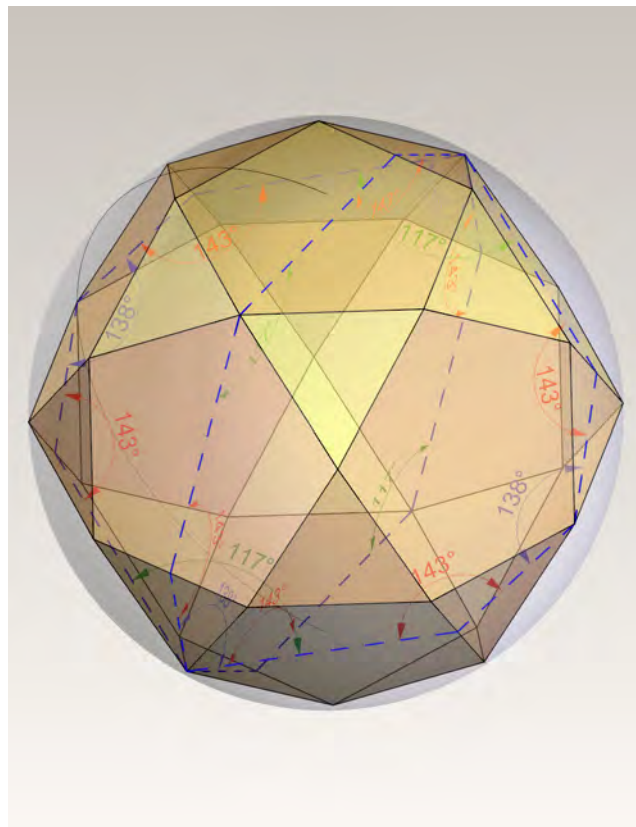
Archimede definì altre due famiglie di solidi: i *prismi ortogonali regolari* e gli *antiprismi regolari*. I primi sono definiti da due basi poligonali regolari, convesse ed uguali di n lati, unite da n facce quadrate. I secondi sono



IV.54/ Dodecaedro camuso, A XIII.



IV.55/ La proprietà chirale fa in modo che lo stesso poliedro, in questo caso un dodecaedro camuso, risulti diverso dal suo simmetrico.



IV.56/ Gli angoli diedri tra le possibili combinazioni di coppie delle facce di un poliedro semiregolare, assumono sempre lo stesso valore.

Operazione	Variante	Derivazione	Riferimento
1. Sezione piana del S.P. simmetrica rispetto ai vertici e...	1.1. ... passante nei punti medi degli spigoli	Ottaedro da Tetraedro	-
		A II da Cubo	Fig. 45
		A II da Ottaedro	Fig. 46
		A III da Dodecaedro	Fig. 47
	1.2. ... passante nelle terze parti degli spigoli	A III da Icosaedro	Fig. 48
		A I da Tetraedro	Fig. 49
		A IV da Ottaedro	Fig. 50
	1.3. ... in modo tale che la parte centrale dello spigolo, unisca due facce del S.A. aventi un numero di lati doppio della faccia del S.P.	A V da Icosaedro	Fig. 51
		A VI da Cubo	Fig. 52
	1.4. ...in modo da generare per ogni faccia del S.P. un poligono concentrico e omotetico alla faccia stessa.	A VII da Dodecaedro	Fig. 53
		A I da Tetraedro	Fig. 54
		A IV da Cubo	Fig. 55
		A VI da Ottaedro	Fig. 56
		A V da Dodecaedro	Fig. 57
2. Sezione parallela agli spigoli del S.P., seguita da una sezione piana simmetrica rispetto ai vertici e...	2.1. ... in modo da generare poligoni omotetici e concentrici alla faccia del S.P. e inscritti nella faccia stessa	A VII da Icosaedro	Fig. 58
		A VIII da Cubo	Fig. 59
		A VIII da Ottaedro	-
		A IX da Dodecaedro	Fig. 60
	2.2. ... in modo da generare poligoni con un numero di lati doppio della faccia del S.P. in cui sono inscritti.	A IX da Icosaedro	-
		A X da Cubo	Fig. 61
		A X da Ottaedro	-
		A XI da Dodecaedro	Fig. 62
3. Individuazione all'interno delle facce del S.P. un poligono con lo stesso numero di lati, ma ruotato di un determinato angolo e con una determinata direzione.		A XI da Icosaedro	-
		A XII da Cubo	-
		A XII da Ottaedro	Fig. 63
		A XIII da Dodecaedro	-
		A XIII da Icosaedro	Fig. 64

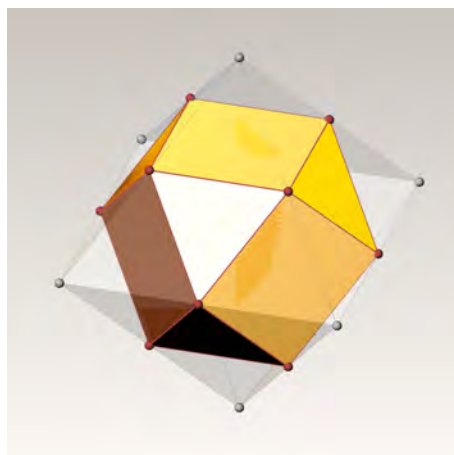
Tabella IV.6

invece caratterizzati da due basi poligonali regolari, convesse ed uguali di n lati, ruotate una rispetto all'altra di $360^\circ/2n$. Sia i prismi che gli antiprismi sono inscrivibili in una sfera, e sono di numero infinito. Proprio per quest'ultima ragione non vengono classificati come solidi semiregolari.

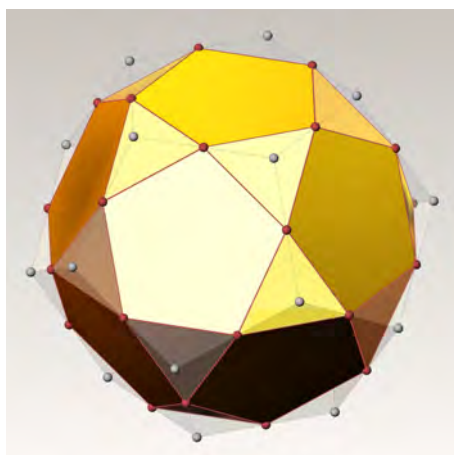
La rappresentazione dei solidi archimedeei, sia essa grafica che informatica, nasce soprattutto da operazioni condotte sui solidi platonici. Se osserviamo la stretta analogia che lega i solidi semiregolari e le tassellazioni semiregolari del piano, non ci risulterà strano che le relazioni metriche dei solidi archimedeei, furono studiate per la prima volta proprio dal grande astronomo Keplero. La prima operazione consiste nella suddivisione degli spigoli dei solidi platonici eseguita in quattro diverse modalità. La prima, e la più semplice, avviene dividendo in due parti eguali gli spigoli dei S.P. Abbiamo che: il tetraedro genera un altro S.P. e cioè l'ottaedro; il cubo e l'ottaedro generano il medesimo solido **A II** (cubottaedro) (*fig. IV.57* e *fig. IV.58*); ed infine la coppia dodecaedro icosaedro genera il medesimo solido **A III** (icosidodecaedro) (*fig. IV.59* e *fig. IV.60*). La seconda variante della prima operazione di troncamento, consiste nella suddivisione degli spigoli dei S.P. in tre parti uguali. Questa variante conduce ad avere: il solido **A I** (tetraedro troncato) dal tetraedro (*fig. IV.61*); il solido **A IV** (ottaedro troncato) dall'ottaedro (*fig. IV.62*) ed infine il solido **A V** (icosaedro troncato) dall'icosaedro¹⁵ (*fig. IV.63*). La terza variante consiste in una suddivisione degli spigoli del S.P. in modo tale che la parte centrale dello spigolo, unisca due facce del S.A. aventi un numero di lati doppio della faccia del S.P.. Nel caso del cubo (*fig. IV.64*), dividiamo gli spigoli secondo il rapporto $1:\sqrt{2}:1$. Ricordando che tale suddivisione è eseguibile anche per mezzo di una costruzione grafica basata sulla diagonale del quadrato, otteniamo il solido **A VI** (cubo troncato) a partire dal cubo. La suddivisione dello spigolo del dodecaedro (*fig. IV.65.*) avviene ruotando rispetto al proprio baricentro, le facce pentagonali del solido, di un angolo 36° . In questo modo si ottiene una tripartizione degli spigoli che individua un decagono regolare per ogni faccia del dodecaedro. Possiamo a questo punto disegnare il solido **A VII** (dodecaedro



IV.57



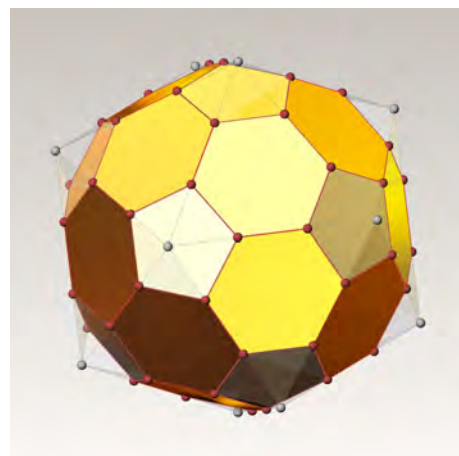
IV.58



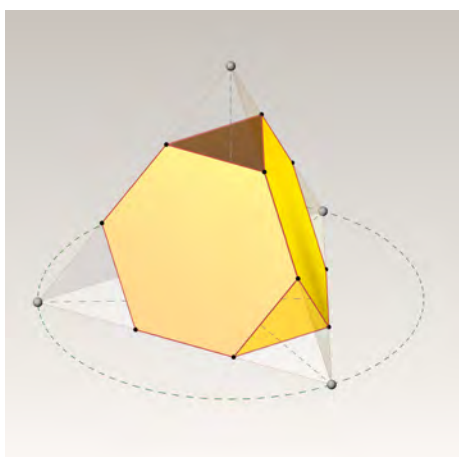
IV.59



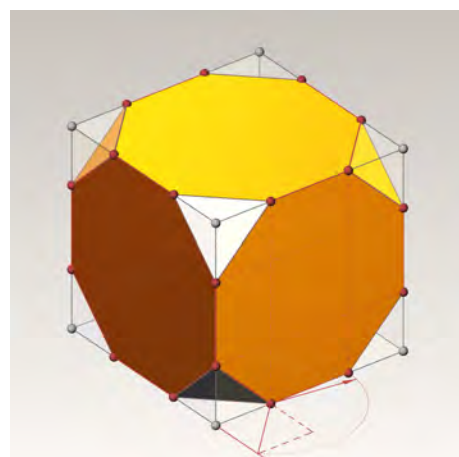
IV.60



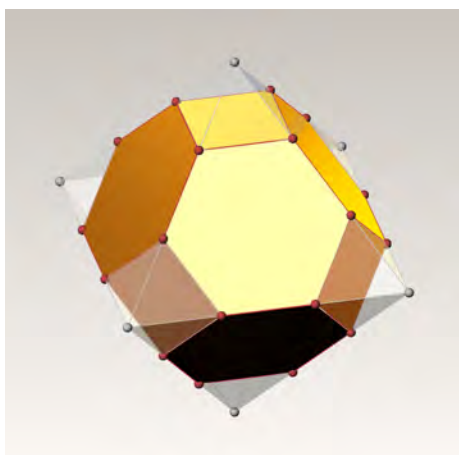
IV.63



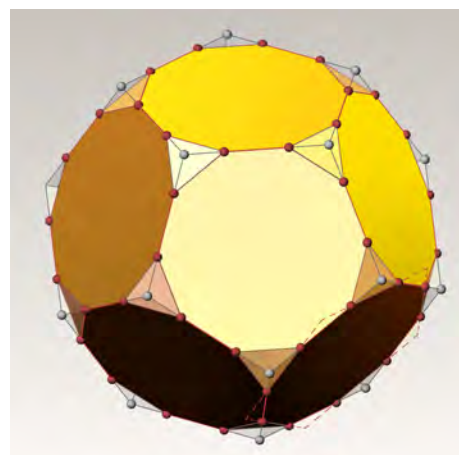
IV.61



IV.64



IV.62



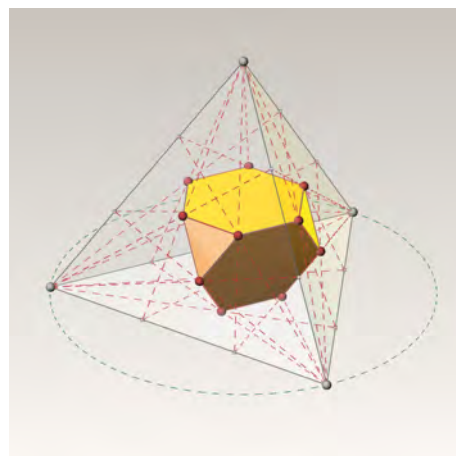
IV.65

troncato) originato dal dodecaedro. La quarta variante suddivide gli spigoli dei S.P. in modo tale da generare all'interno di ciascuna faccia, e mantenendosi concentrici ad esse, poligoni omotetici con precise caratteristiche metriche. Uniamo i vertici del tetraedro con le terze parti degli spigoli opposti. Utilizziamo questo reticolo per individuare all'interno di ciascuna faccia del S.P. il triangolo omotetico e ruotato, che viene a costituire la nuova faccia del solido **A I** (secondo metodo di generazione) (*fig. IV.66*). Il cubo viene suddiviso con dei piani simmetrici rispetto ai vertici e passanti per i tre quarti più lontani (rispetto ciascun vertice) degli spigoli. Tale costruzione (*fig. IV.67*) porta alla rappresentazione del solido **A IV** (secondo metodo di generazione). Il solido **A VI** (secondo metodo di generazione) (*fig. IV.68*) si ottiene dall'ottaedro seguendo un procedimento simile a quello utilizzato nel caso del tetraedro, dividendo però gli spigoli secondo il rapporto $1:\sqrt{2}:1$. Dividendo il dodecaedro con piani simmetrici rispetto ai vertici e passanti per i punti posti a distanza:

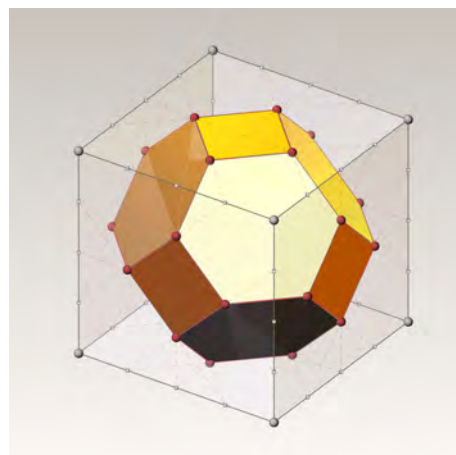
$$\frac{6}{9-\sqrt{5}}$$

dai vertici stessi, si ricava il solido **A V** (secondo metodo di generazione) (*fig. IV.69*). Il solido **A VII** (secondo metodo di generazione) (*fig. IV.70*) è generato dividendo gli spigoli dell'icosaedro, nei punti corrispondenti agli angoli 18° , 36° , 18° rispetto al centro di un pentagono di lato uguale allo spigolo dell'icosaedro. Riassumendo, possiamo dire che la prima operazione di troncamento dei S.P. conduce ai primi sette S.A. dei quali ognuno è ricavabile da due operazioni distinte.

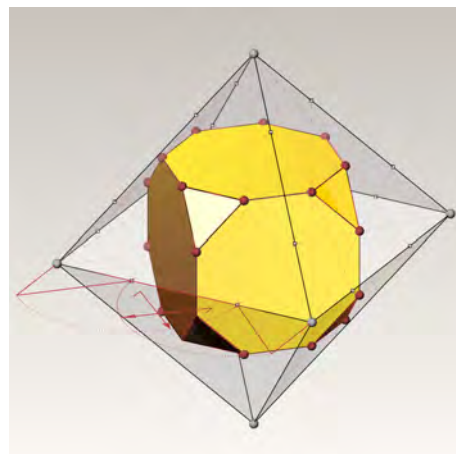
La seconda operazione di generazione dei S.A., consiste in sezioni dei S.P. con piani paralleli agli spigoli (secondo alcune caratteristiche metriche note a priori), seguite da sezioni simmetriche rispetto ai vertici. La prima variante della seconda operazione, genera il solido **A VIII** (rombicubottaedro) (*fig. IV.71*) a partire dal cubo (o dal suo duale, cioè l'ottaedro) ed il solido **A IX** (rombicosidodecaedro) (*fig. IV.72*) a partire da un dodecaedro (o dal suo duale, cioè l'icosaedro). Nel caso del cubo, chiamiamo con x la distanza tra lo spigolo **AB** e le tracce che il piano sezione (parallelo allo spigolo **AB**)



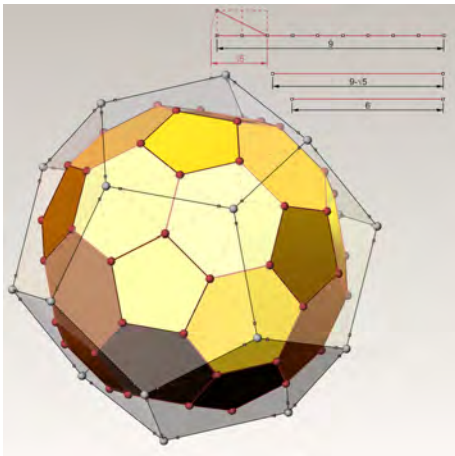
IV.66



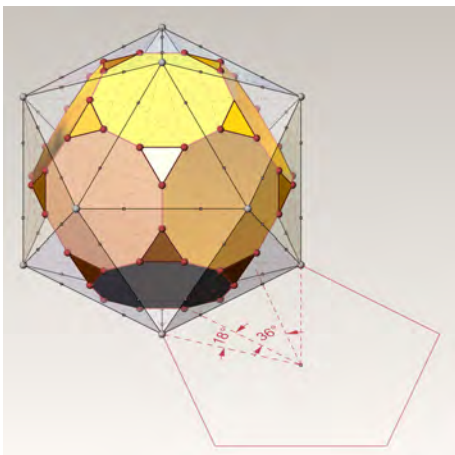
IV.67



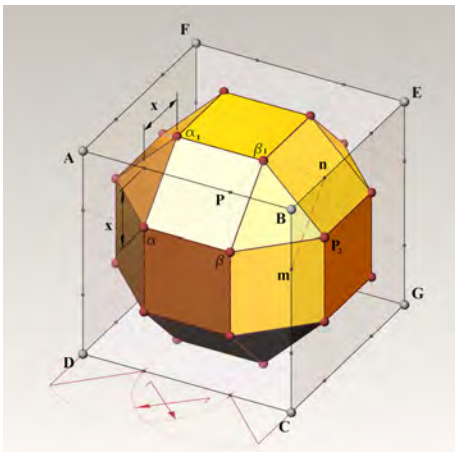
IV.68



IV.69



IV.70



IV.71

forma con le facce **ABCD** e **ABEF**; chiamiamo con **mn** la traccia che lo stesso piano forma con la faccia **BCGE**. Consideriamo anche i piani sezione siffatti messi in corrispondenza con gli spigoli **BE** e **BC**. In questo modo, si vengono ad individuare le diagonali $\beta\beta_1 = \beta_1P_2 = \beta P_2 = x\sqrt{2}$ che rappresentano gli spigoli delle facce del S.A. cercato. Dunque per rappresentare il solido **A VIII**, è sufficiente dividere gli spigoli del cubo secondo il rapporto $1:\sqrt{2}:1$. Consideriamo la faccia **ABCDE** di un dodecaedro. Stacciamo su di essa i punti **m** ed **n** intersezioni delle tracce dei piani sezione paralleli agli spigoli **AB** e **BC**, rispettivamente con **AB** e **BC**. Il pentagono di lato $\alpha\beta$ è omotetico alla faccia del dodecaedro. Affinché tale pentagono costituisca la faccia del solido **A IX**, occorre che:

$$mn = \alpha\beta$$

Allora, chiamando con **r** il raggio del cerchio che circonda il pentagono **ABCDE**, con centro in **O**, ed indicando il segmento **Oα=y**, abbiamo che:

$$\frac{\alpha\beta}{2} = y \cos 54^\circ; \quad \frac{mn}{2} = \frac{r-y}{2} \tan 54^\circ$$

Eguagliando le due quantità, e dopo una serie di passaggi matematici si arriva a:

$$\frac{r}{y} = \frac{OA}{O\alpha} = \frac{6}{1 + \sqrt{5}}$$

A questo punto è sufficiente staccare su di un raggio **OA** della faccia del dodecaedro, un punto α che soddisfi la relazione precedente, in modo da ottenere il pentagono omotetico alla faccia **ABCDE** rispetto al suo centro. Il solido **A IX** è quindi determinato. La seconda variante della seconda operazione è del tutto analoga alla procedura appena eseguita e genera i S.A. **A X** (fig. IV.73) e **A XI** (fig. IV.74). L'unica differenza consiste nel fatto che il poligono omotetico concentrico alla faccia del S.P., deve avere un numero di lati doppio rispetto alla faccia stessa. Vale la pena ricordare che la seconda operazione di costruzione dei S.A., per tutte e due le varianti, consente di ottenere gli stessi solidi **A VIII**, **A IX**, **A X** e **A XI** a partire dai duali del cubo e del dodecaedro (utilizzati a titolo esemplificativo nelle nostre costruzioni),

vale a dire l'ottaedro e l'icosaedro.

La terza ed ultima tipologia di operazione, è utilizzata per la costruzione degli ultimi due S.A.: l'**A XII** (cubo camuso) (fig. IV.75) e l'**A XII** (dodecaedro camuso) (fig. IV.76). Per ottenere il solido **A XII** a partire dall'ottaedro, bisogna per prima cosa individuare la nuova faccia *aaa* triangolare del S.A., che è concentrica rispetto alla faccia del S.P., ma è ruotata di una certa quantità. Questo triangolo *aaa* è individuato dalle rette **Aa₁** che, tracciate nello stesso verso in ogni triangolo **AAA** (faccia del S.P.), tagliano i suoi lati secondo il rapporto:

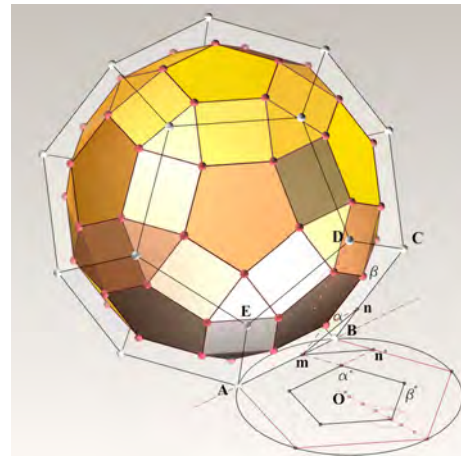
$$\frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

Uguagliando la lunghezza del lato del triangolo *aaa* con quella del lato del quadrato, che costituisce la seconda tipologia di faccia del S.A., Dragomir e Gheorghiu arrivano alla seguente relazione:

$$2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0$$

da cui segue che il valore di α è 0.352... Il problema nella costruzione del modello matematico del solido **A XII** risiede proprio nella approssimazione che il procedimento dei due autori comporta. Se con una costruzione grafica, tale approssimazione, trova una più che sufficiente soluzione, ciò non avviene con la modellazione informatica. Infatti, l'approssimazione è talmente grossolana, se paragonata all'accuratezza del disegno al computer, che alcune proprietà del S.A. così costruito (come ad esempio la possibilità di costruire una sfera circoscritta al poliedro), non vengono verificate. Lo stesso problema si è riscontrato anche nella seconda variante della terza operazione, e cioè quella che ricava il solido **A XIII** a partire dal dodecaedro o dal suo duale. Inoltre va notato, che in tutti i casi precedenti, è sempre stato possibile effettuare una costruzione grafica che consentisse di determinare alcuni rapporti metrici. In quei casi, l'accuratezza dipendeva solo dall'affidabilità degli strumenti con cui esse venivano eseguite. Il risultato per i primi undici S.A. è sempre stato soddisfacente, in quanto venivano verificate tutte le proprietà suddette, dei solidi semiregolari.

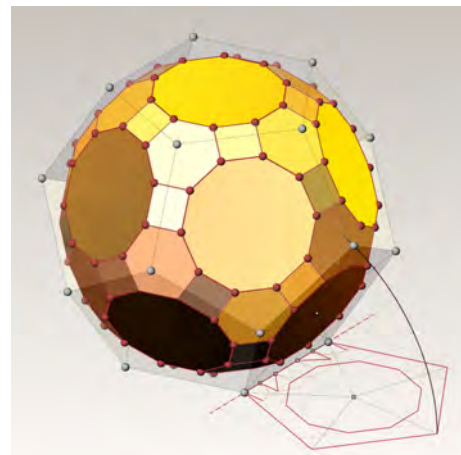
A questo punto si è deciso di percorrere una via alternativa a quella approssimativa (da un punto di vista mate-



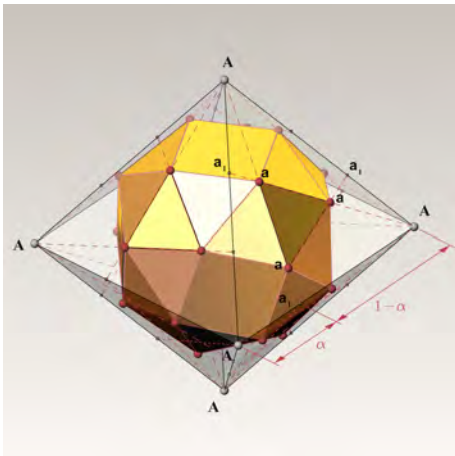
IV.72



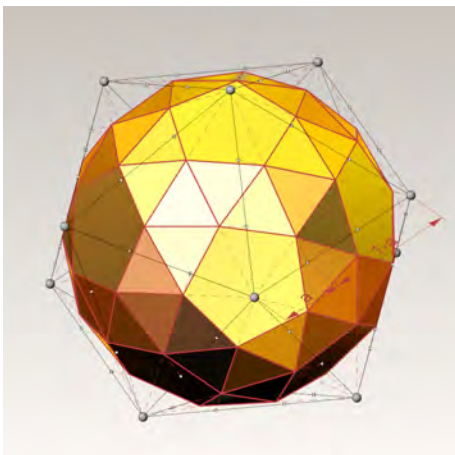
IV.73



IV.74



IV.75



IV.76

matico) di Dragomir Gheorghiu. Si è deciso di analizzare con il modellatore NURBS il risultato delle operazioni condotte in un ambiente di calcolo simbolico e numerico. L'output di questi software (nel nostro caso si è utilizzata la versione 6.0 di Mathematica¹⁶) è solitamente di tipo discreto e quindi poligonale. Nel caso dei poliedri però, non abbiamo nessun bisogno del passaggio di riduzione da un sistema continuo ad uno discreto, per la loro natura di essere definiti da facce piane. In altre parole, possiamo importare ambienti informatici esterni (come ad esempio quello di tipo NURBS) l'output dell'elaborazione, senza alcuna perdita delle caratteristiche metriche e formali delle entità geometriche generate. In

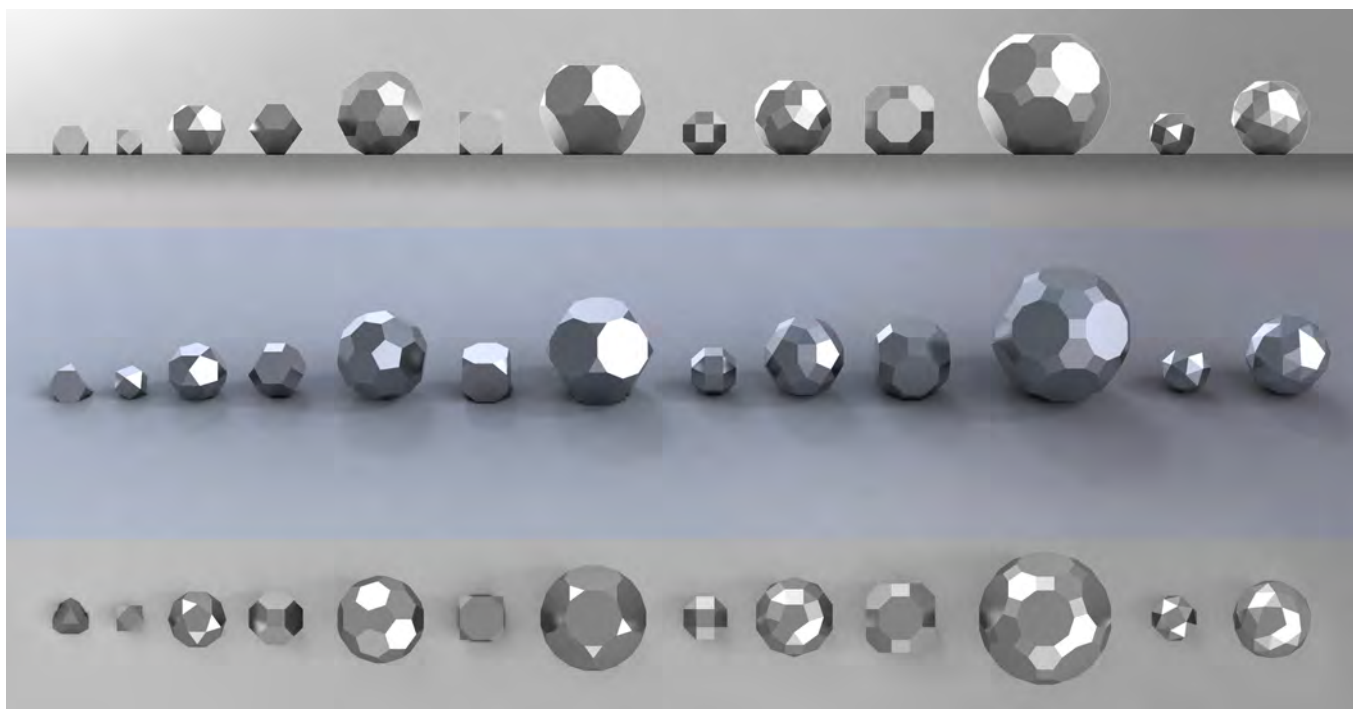
particolare, il software mette a disposizione numerose risorse relative ad alcuni argomenti cardine della matematica, come sono ad esempio, i poliedri regolari e semiregolari. Il tema dei poliedri semiregolari, viene affrontato mettendone in luce, per ciascuno di essi, le caratteristiche metriche degli elementi caratteristici, quali ad esempio:

- lo sviluppo piano delle facce;
- il rapporto metrico tra la lunghezza del raggio della sfera circoscritta e lunghezza dello spigolo del poliedro;
- le misure degli angoli diedri;
- le coordinate spaziali dei vertici del solido;
- le distanze dei baricentri delle facce dal centro della sfera circoscritta;
- le superficie del solido;
- il volume del solido;
- eventuali caratteristiche speciali del solido, come ad esempio la chiralità.

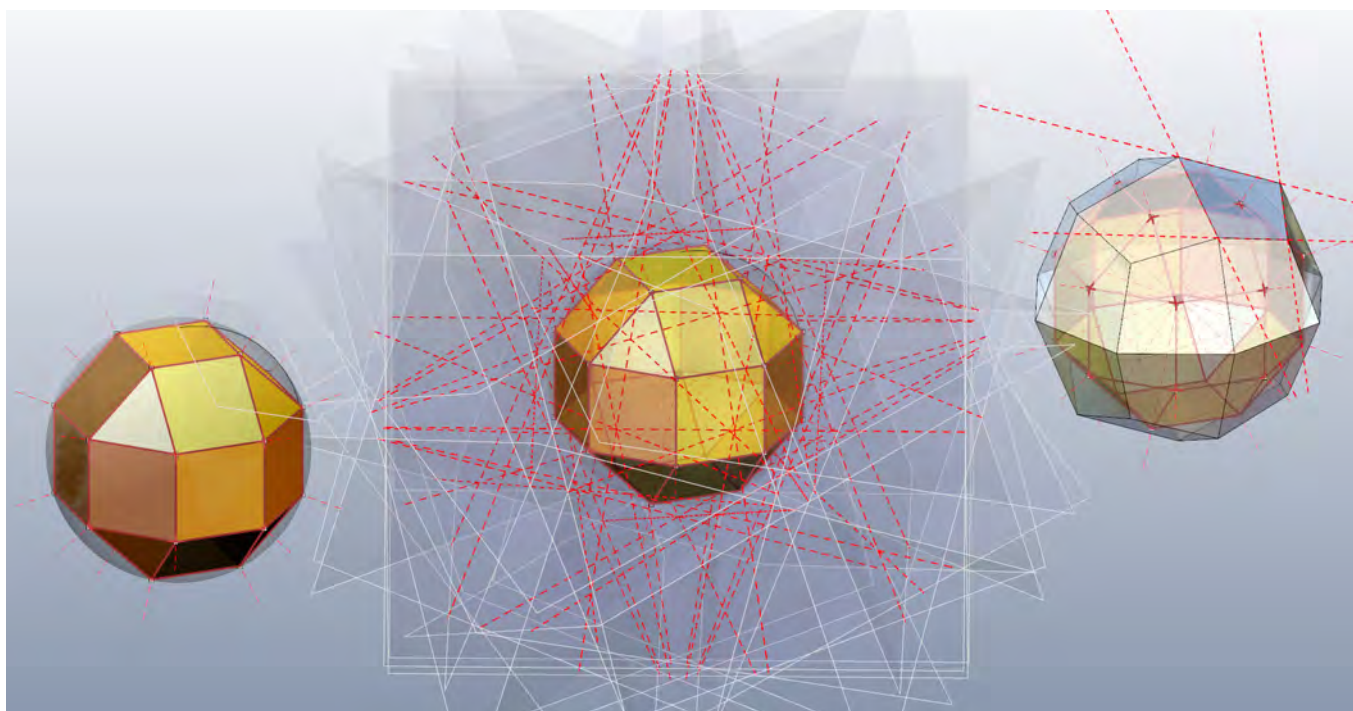
Il risultato di questo metodo alternativo, ha reso possibile una rappresentazione matematica accurata, esattamente come abbiamo visto per i casi in cui si faceva uso, in alcuni passaggi, delle costruzioni grafiche (fig. IV.77.).

I duali dei poliedri semiregolari: i poliedri catalani

Il principio di dualità applicato ai solidi semiregolari non genera altri solidi semiregolari. Abbiamo visto che nel caso dei solidi platonici, la dualità dà origine a solidi ancora una volta regolari. Ciò è dovuto al fatto che nei solidi platonici è sempre possibile individuare due sfere concentriche: una sfera circoscritta (passante cioè per ogni vertice) ed una inscritta (passante cioè al centro di ogni faccia) al solido stesso. Quindi la costruzione coincide con la polarità applicata ad una di queste due sfere dando luogo ad un altro poliedro regolare. Nel caso dei solidi archimedei abbiamo visto che è solo possibile individuare una sfera circoscritta al solido stesso. Il principio di dualità si riconduce quindi, alla determinazione dei piani tangenti alla sfera circoscritta e passanti per ogni vertice. Coerentemente con questa caratteristica, possiamo dire che un reciproco di un solido semiregolare può circoscrivere una sfera e non può essere inscritto in nessuna sfera.



IV.77/ I tredici poliedri semiregolari con la medesima lunghezza degli spigoli



IV.78/ Relazione di dualità tra i solidi di Archimede e i solidi catalani.

Simbolo	Nome	Num. facce	Num. Vertici	Num. Spigoli	Faccia poligonale
A' I	Triacistetraedro	12	8	18	Triangolo isoscele
A' II	Dodecaedro Rombico	12	14	24	Rombo in cui il rapporto alla diagonale vale: $1+\sqrt{2}$
A' III	Triancontraedro Rombico	30	32	60	Rombo in cui il rapporto alla diagonale vale: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
A' IV	Tetracisesaedro	24	14	36	Triangolo isoscele in cui il rapporto base altezza vale: $\frac{4}{\sqrt{5}}$
A' V	Pentacisdodecaedro	60	32	90	Triangolo isoscele
A' VI	Triacisottaedro	24	14	36	Triangolo isoscele in cui il rapporto tra i lati uguale e la base vale: $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$
A' VII	Triacisicosaedro	60	32	90	Triangolo isoscele
A' VIII	Icositetraedro Trapezoidale	24	26	48	Quadrilatero isoscele con tre lati uguali
A' IX	Esacontaedro Trapezoidale	60	62	120	Quadrilatero isoscele con angoli opposti uguali
A' X	Esacisottaedro	48	26	72	Triangolo scaleno
A' XI	Esacisicosaedro	120	62	180	Triangolo scaleno
A' XII	Icositetraedro Pentagonale	24	38	60	Pentagono con quattro angoli uguali
A' XIII	Esacontaedro Pentagonale	60	92	150	Pentagono con quattro angoli uguali

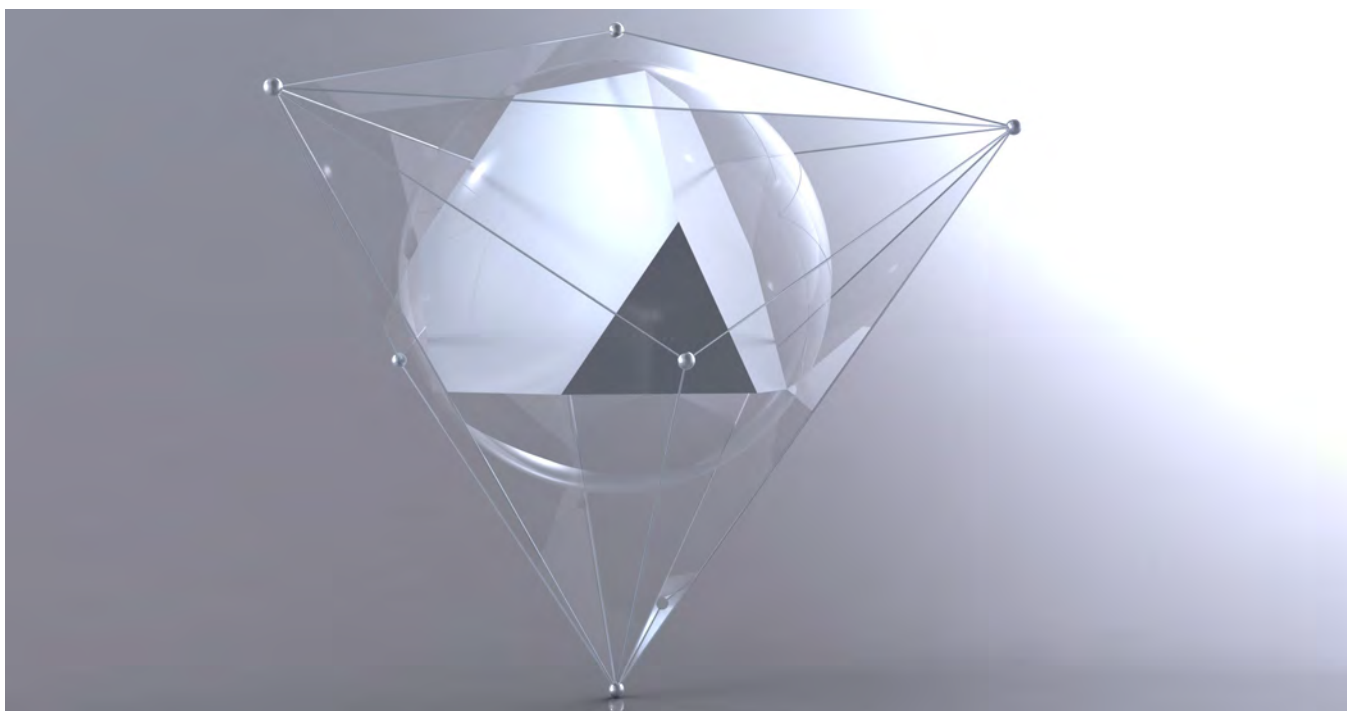
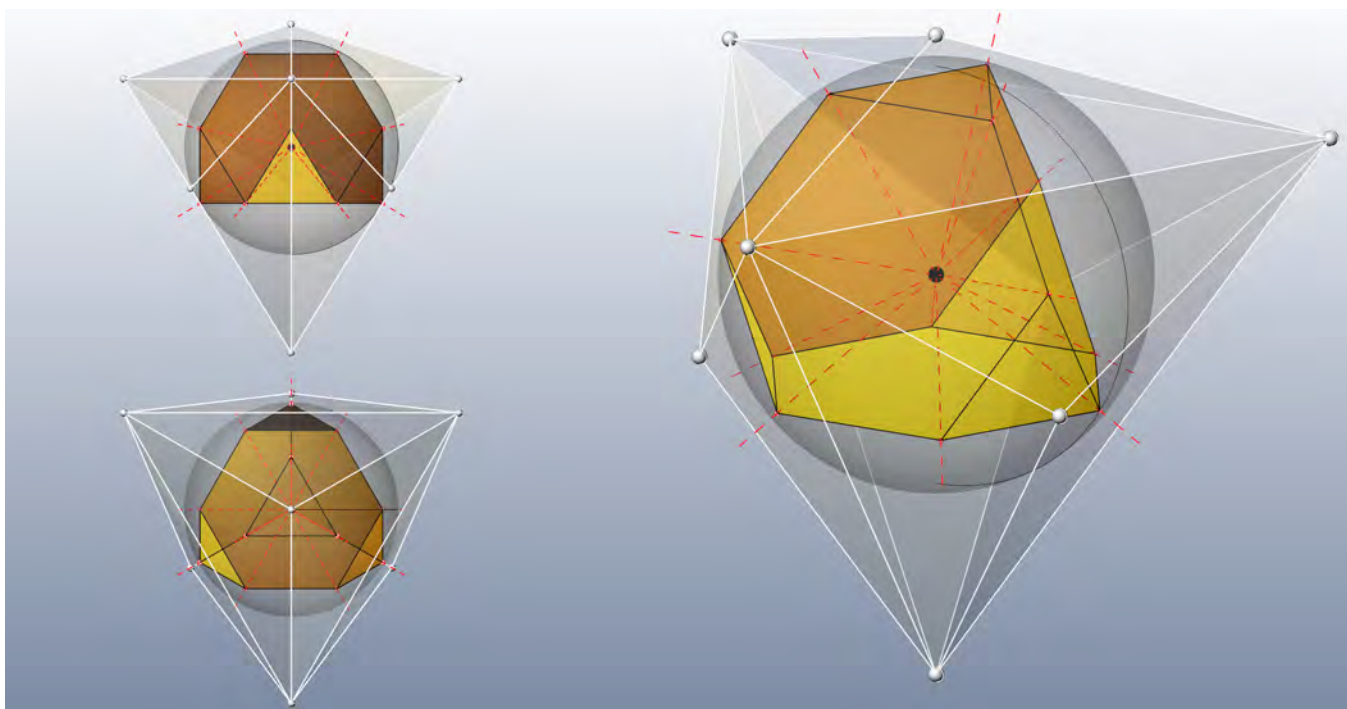
tabella IV.7

I duali dei solidi di Archimede prendono anche il nome di catalani, poiché furono descritti per la prima volta nel 1865 dal matematico belga Eugene Charles Catalan. I solidi catalani sono caratterizzati da facce irregolari, angoli diedri uguali e, per ogni coppia di facce, da una simmetria del solido che trasforma la prima faccia nella seconda. La tabella (tabella IV.7) mette in relazione i tredici solidi archimedeei con i corrispondenti duali.

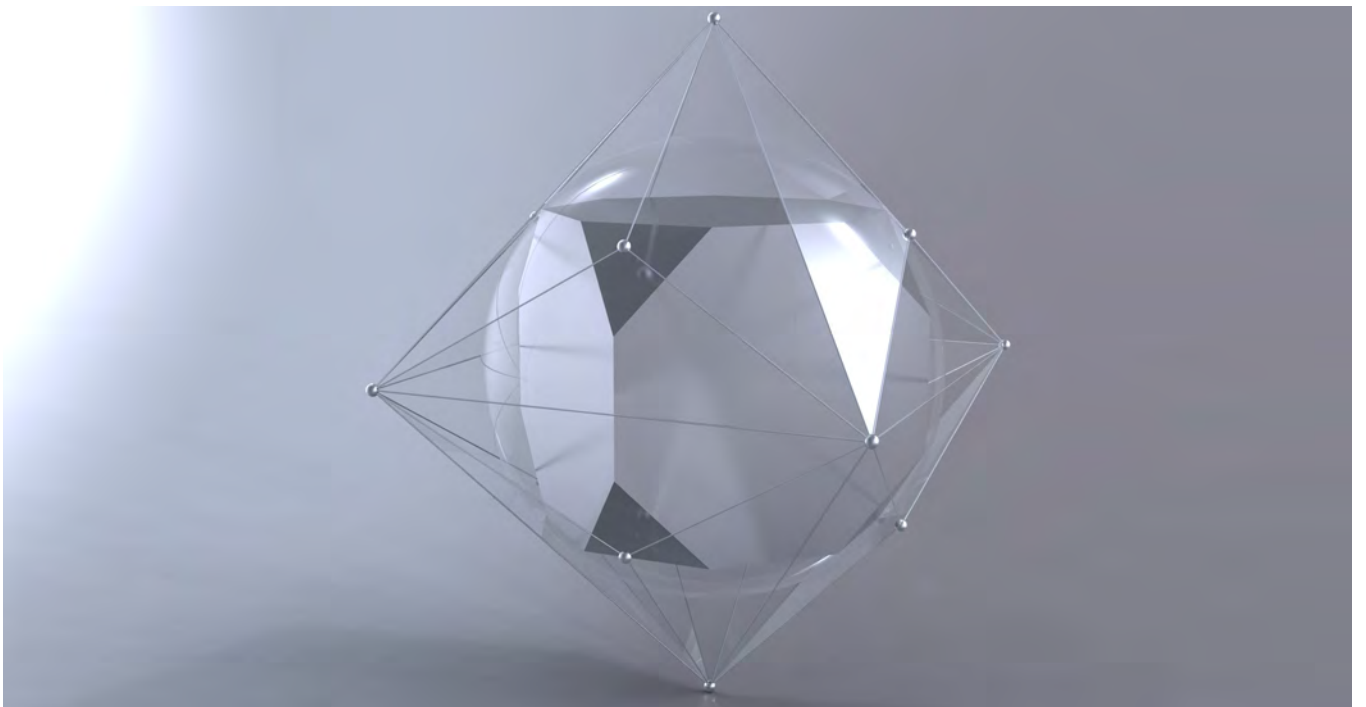
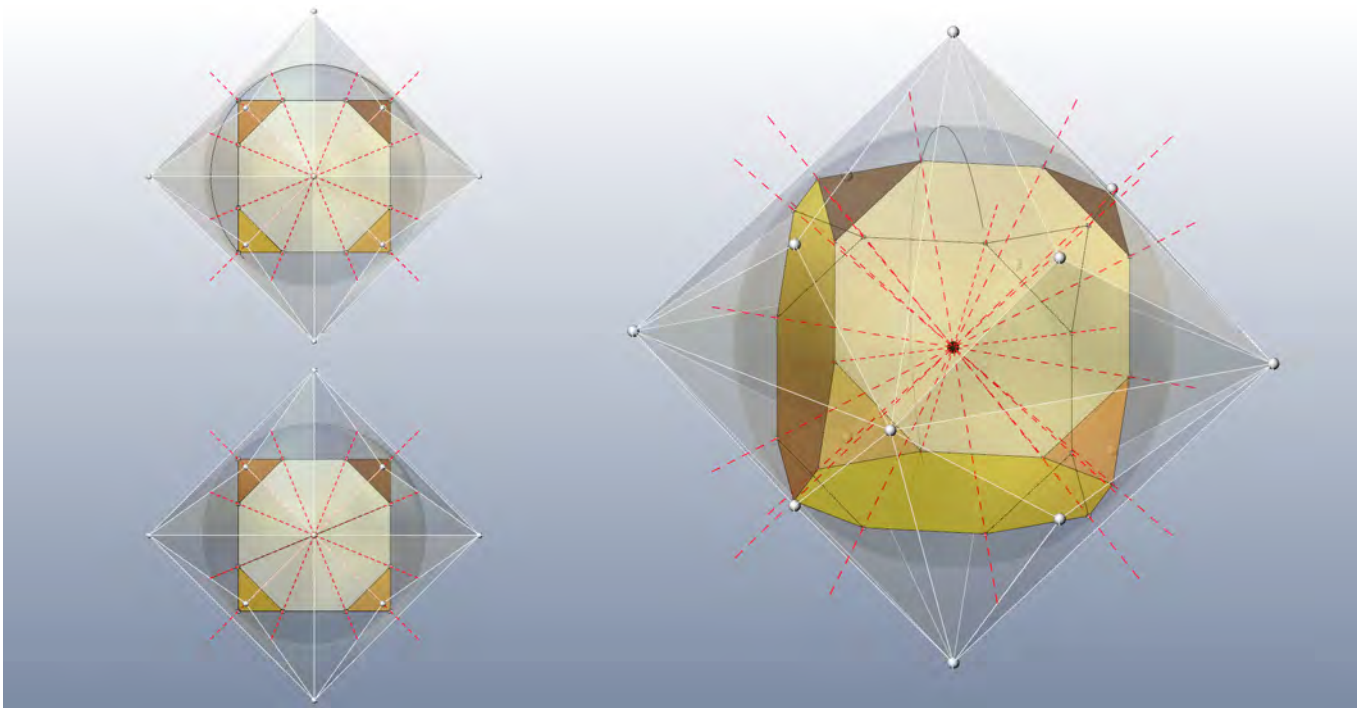
La rappresentazione matematica dei solidi catalani risulta molto agevole per mezzo degli strumenti di controllo delle tangenze, che questi software mettono a disposizione. Infatti, partendo dai solidi archimedeei pre-

cedentemente costruiti, basta tracciare i segmenti radiali che congiungono ogni vertice con il centro della sfera circoscritta, e poi disegnare i piani ortogonali a ciascuno di essi (fig. IV.78).

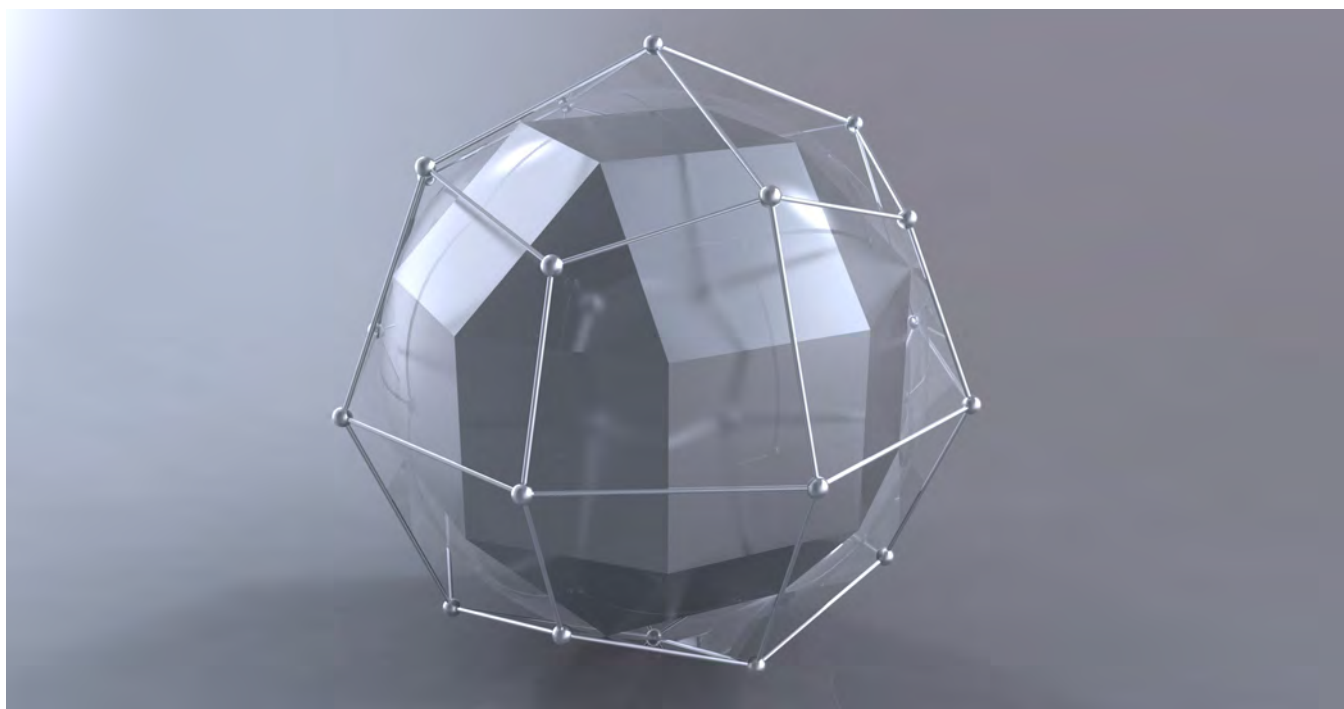
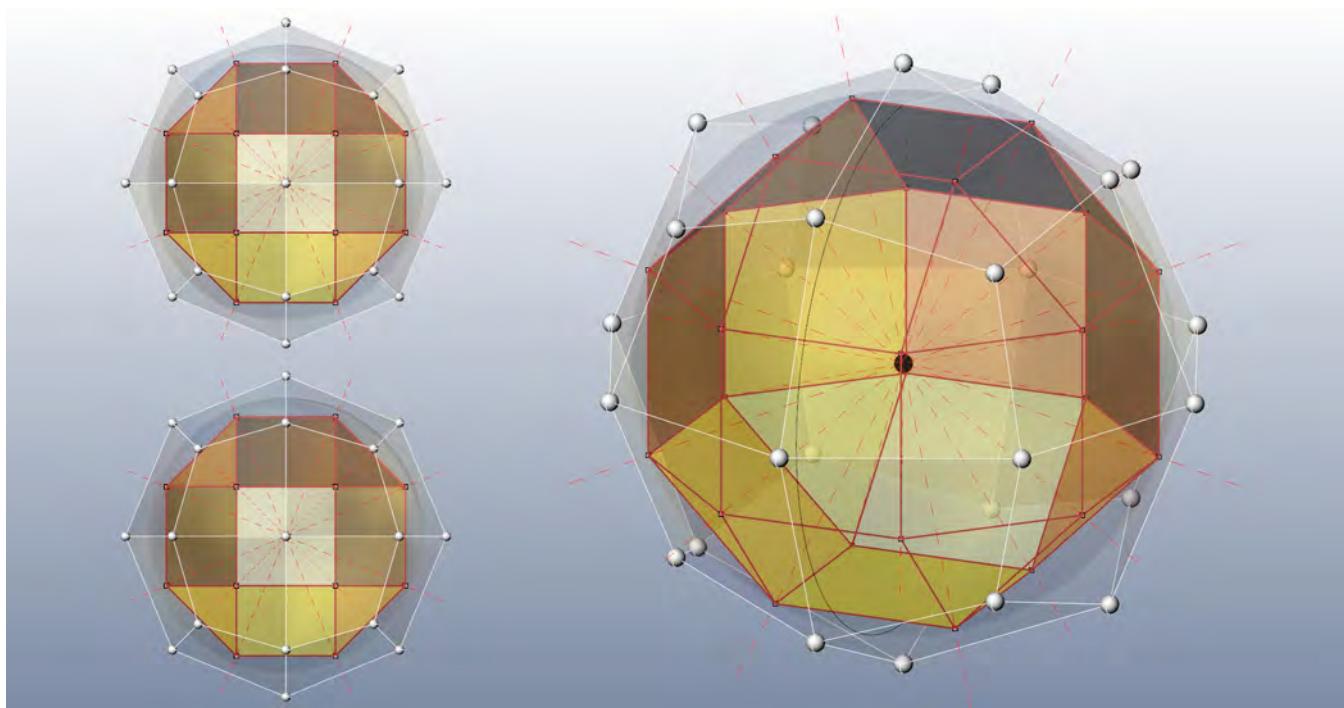
Vista la possibilità di reiterare questo algoritmo a tutti i solidi semiregolari, ottenendo così i reciproci, si è ritenuto opportuno verificarla solo per tre casi. Si tratta del triacistetraedro (duale del tetraedro troncato, **A I**) (fig. IV.79 e fig. IV.80), del triacisottaedro (duale del cubo troncato, **A VI**) (fig. IV.81 e fig. IV.82) ed infine dell'icositetraedro trapezoidale (duale del rombicubottaedro, **A VIII**) (fig. IV.83 e fig. IV.84).



IV.79-80/ Il triacistetraedro duale del tetraedro troncato.



IV.81-82/ Il triacisottaedro duale del cubo troncato.



IV.83-84/ L'icositetraedro trapezoidale duale del rombicubottaedro.

La tassellazione dello spazio

Abbiamo visto nel Capitolo II che le tassellazioni regolari del piano sono possibili solo con i tre poligoni regolari i cui angoli al vertici siano sottomultipli di 360° (triangolo equilatero, quadrato ed esagono regolare). Invece, le tassellazioni semiregolari (composte cioè da diversi tipi di poligoni regolari aventi la stessa lunghezza del lato) sono limitate come numero, anche se in alcuni casi le diverse possibilità di aggregazione possono dare vita ad infinite tassellazioni.

In modo del tutto analogo alle tassellazioni del piano, possiamo definire le *tassellazioni dello spazio* come il ricoprimento dello spazio attraverso poliedri (delle vere e proprie tessere tridimensionali), senza ammettere sovrapposizioni o spazi vuoti. Le tassellazioni spaziali formate dai solidi platonici sono chiamate *tassellazioni spaziali regolari*; se invece sono generate da due tipologie di poliedri (regolari e non, aventi però lo stesso spigolo) oppure soltanto dai poliedri archimedei, vengono chiamate *tassellazioni spaziali semiregolari*. Nel primo caso l'unico poliedro regolare in grado di ricoprire lo spazio, è il cubo (*fig. IV.85*). A prima vista sembrerebbe che anche il tetraedro regolare possa ricoprire lo spazio, ma non è così. Infatti, consideriamo una maglia bidimensionale regolare composta da triangoli equilateri (*fig. IV.86*) e utilizziamola per creare una griglia di tetraedri che hanno una faccia coincidente con essi. Si può verificare sperimentalmente che la configurazione che consente il riempimento completo dello spazio senza lasciare vuoti, utilizzando dei tetraedri, comporta necessariamente l'introduzione di ottaedri regolari. Si tratta dunque di una tassellazione semiregolare composta da due poliedri platonici: il tetraedro e l'ottaedro. Del resto, per poter tassellare lo spazio l'angolo diedro di un tetraedro (che misura $70.528\dots^\circ$) dovrebbe essere un sottomultiplo di 360° . L'angolo diedro del tetraedro (*fig. IV.87*) diventa però supplementare dell'angolo diedro dell'ottaedro ($109.471\dots^\circ$); in questo modo due angoli diedri del tetraedro e due angoli diedro dell'ottaedro individuano l'angolo giro.

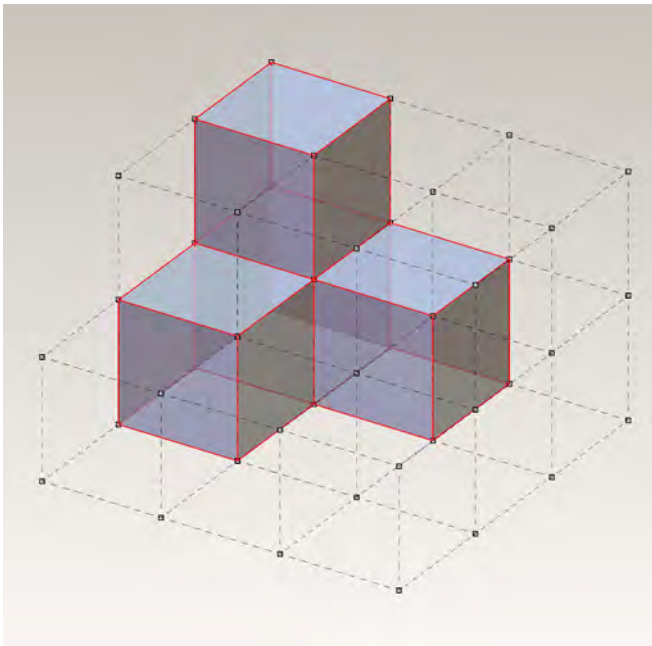
Usando insieme un poliedro platonico ed uno archimedeo, possiamo ottenere un'altra tassellazione dello spa-

zio. A partire da un'aggregazione di cubottaedri inscritti all'interno di una griglia cubica (*fig. IV.88*), è possibile riempire i vuoti lasciati, attraverso l'introduzione di ottaedri regolari. In questa tassellazione, è interessante notare che si viene a creare un particolare tipo di nodo. Se infatti, consideriamo i vertici degli ottaedri ed i baricentri dei cubottaedri, si individua un reticolo spaziale equidistante in 12 direzioni ed uniformemente distribuito nello spazio. Come spiegano Gheorghiu e Dragomir, ciò avviene perché il cubottaedro è l'unico poliedro (tra i regolari e semiregolari) che ha gli spigoli uguali alla lunghezza del raggio della sfera che lo circonda. Dunque esso rappresenta l'analogo dell'esagono (che ha la stessa caratteristica di essere l'unico poligono regolare il cui spigolo misura quanto il raggio della circonferenza che lo circonda) nello spazio e dà luogo a griglie spaziali equivalenti a quelle triangolari equilatera che si generano nel piano. Inoltre, va notato che se disegniamo dei tetraedri coincidenti con le facce triangolari del cubottaedro con i vertici rivolti verso il centro del poliedro, otteniamo di nuovo la configurazione precedente cioè quella composta da tetraedri ed ottaedri. Ciò avviene esattamente come nel piano, dove la tassellazione esagonale può essere derivata da quella triangolare equilatera.

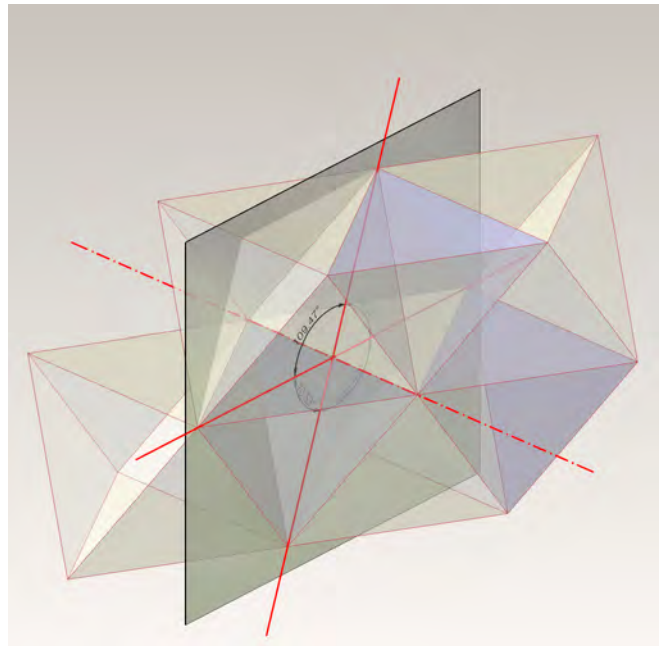
Sempre a partire da una griglia regolare cubica, disegniamo le piramidi di base quadrata (coincidente con le facce dei cubi) i cui vertici giacciono nei baricentri dei cubi stessi (*fig. IV.89*). Insieme ai cubi adiacenti, possiamo individuare il reciproco del cubottaedro, e cioè il solido catalano dodecaedro rombico. La tassellazione spaziale generata da questo poliedro, corrisponde ad una tassellazione del piano composta da tessere rombiche ricavate da una più ampia tassellazione di tessere esagonali. Una sua versione deformata, chiamata dodecaedro allungato, ha ancora la caratteristica di tassellare lo spazio.

Il dodecaedro allungato nasce dal dodecaedro rombico deformato in modo tale che i quattro rombi equatoriali siano allungati in modo da divenire quattro esagoni regolari (*fig. IV.90*).

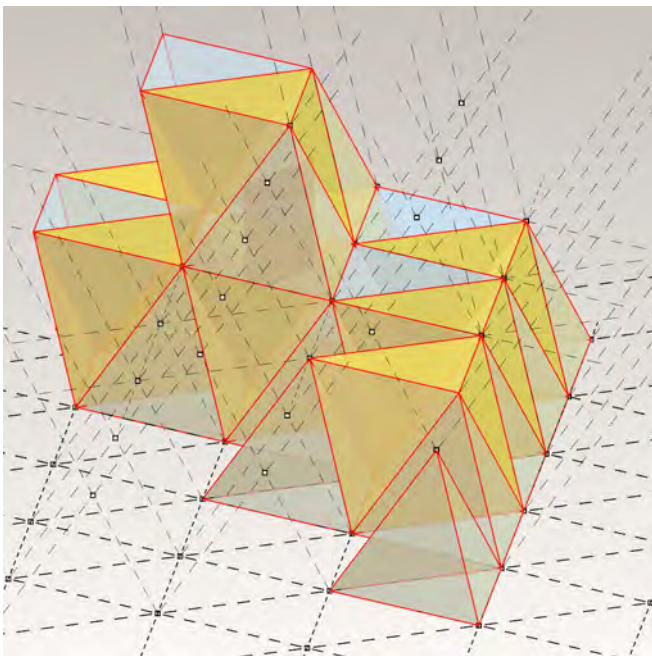
L'avvento del computer, ha reso possibile la scoperta, soprattutto a partire dagli anni '70, di numerosi poliedri



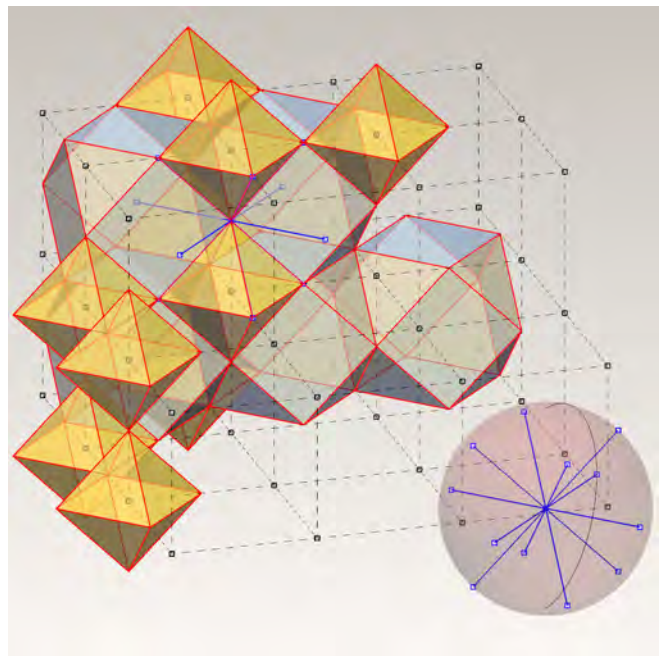
IV.85/ La tassellazione dello spazio per mezzo del cubo.



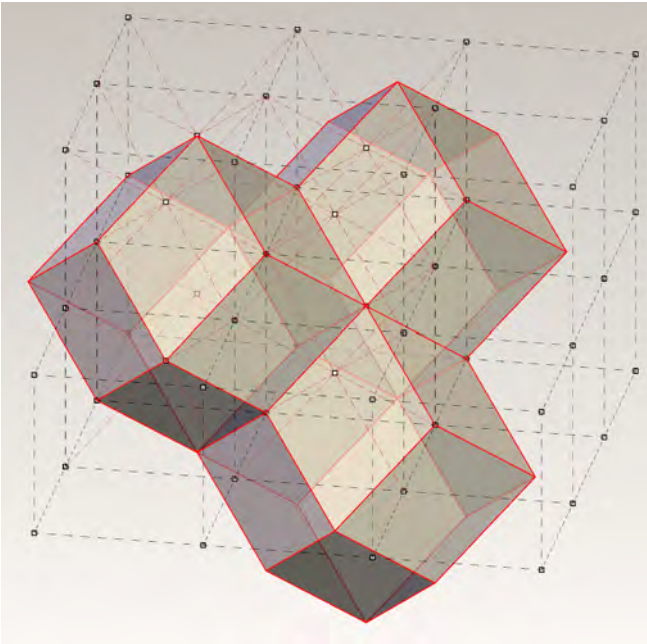
IV.87/ Gli angoli diedri del tetraedro e dell'ottaedro sono supplementari.



IV.86/ La tassellazione dello spazio per mezzo del tetraedro e dell'ottaedro.



IV.88/ La tassellazione dello spazio per mezzo del cubottaedro e dell'ottaedro.

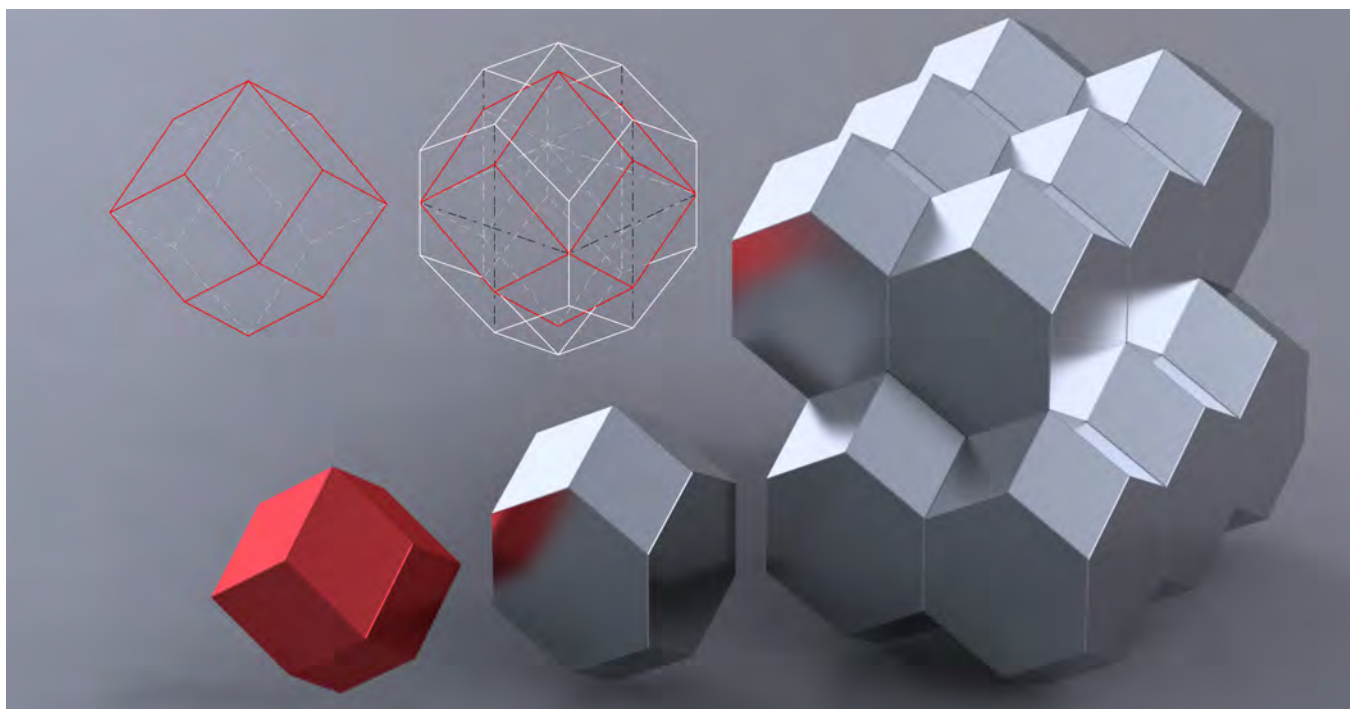


IV.89/ La tassellazione dello spazio per mezzo del solido catalano dodecaedro rombico.

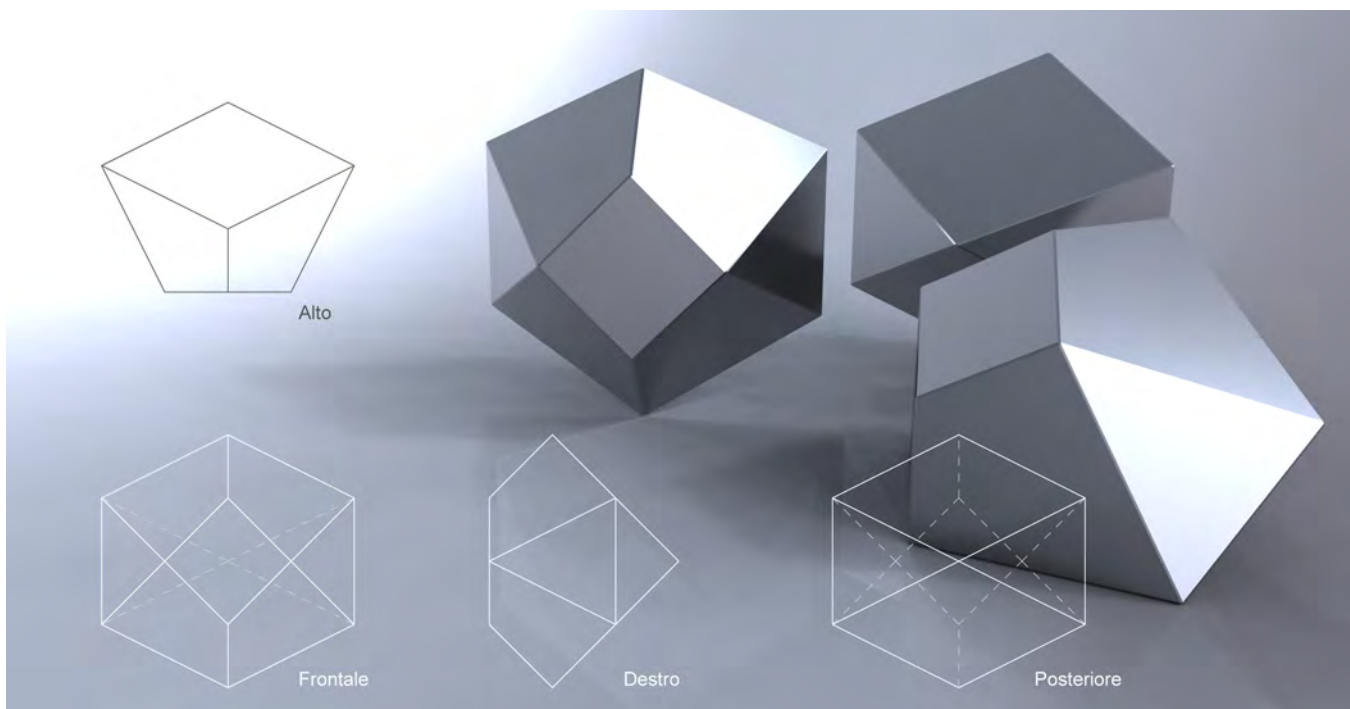
irregolari (definiti però da particolari gruppi di simmetria) che hanno la caratteristica interessante di riempire lo spazio. In questa sede non abbiamo la possibilità di verificarli tutti, anche perché in alcuni casi le informazioni reperibili non sono sufficienti a poterne realizzare un modello informatico. A titolo esemplificativo però, possiamo citare l'*endecaedro bisimmetrico* e l'*endecaedro sfenoide*, definiti da Guy Inchbald nel Novembre del 1996 in *The Mathematical Gazette* n. 80, e poi rivisitato dallo stesso Inchbald nel suo interessantissimo website¹⁷. L'aggettivo bisimmetrico (*fig. IV.91*) si riferisce al fatto che in questo poliedro è possibile individuare due piani di simmetria uno verticale ed uno orizzontale. L'endecaedro bisimmetrico è composto da undici facce e da undici vertici la quale cosa non è molto frequente nei poliedri. Le facce sono: 2 grandi rombi, 1 piccolo rombo (in questo caso un quadrato), 4 triangoli isosceli congruenti che si incontrano lungo gli spigoli ad angoli retti, ed infine 4 facce ad aquilone (forma che abbiamo già incontrato nelle tessere non periodiche di Roger Penrose). La prima aggregazione è creata da 4 endecaedri disposti a formare una sorta di "barchetta" (*fig. IV.92*). Questa

"barchetta" può essere considerata a tutti gli effetti come un'unità di traslazione (senza bisogno di rotazioni o riflessioni), cioè un lattice, per poter riempire lo spazio (*fig. IV.93*). Altra caratteristica interessante è il fatto che l'altezza di questo poliedro è arbitraria. In altre parole è possibile variare questo parametro per ottenere un'infinità di poliedri che hanno comunque la caratteristica di riempire lo spazio (*fig. IV.94*). La costruzione del poliedro è stata realizzata utilizzando le coordinate cartesiane¹⁸ dei suoi vertici e facendo passare per essi i piani che costituiscono le facce dell'endecaedro.

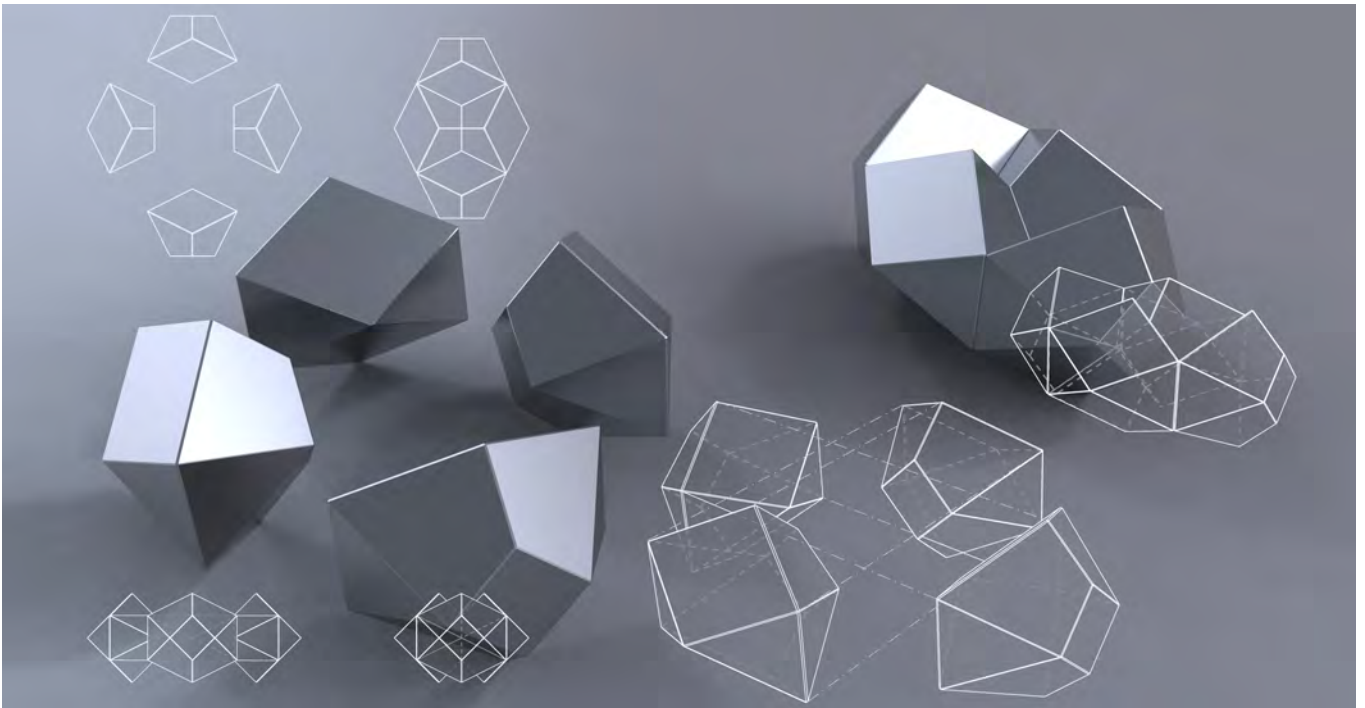
Un altro poliedro irregolare convesso con la proprietà di ricoprire lo spazio, è l'*endecaedro sfenoide* scoperto sempre da Guy Inchbald (*fig. IV.95*). L'aggettivo sfenoide si riferisce alla particolare forma a cuneo, di questo solido. L'endecaedro sfenoide ha 11 vertici¹⁹ e 11 facce, ma possiede un solo piano di simmetria orizzontale. È composto da facce a forma di aquilone in tre differenti grandezze e due tipi di triangoli isosceli. Nell'esempio considerato, una faccia rombica è quadrata. Dal punto di vista topologico l'endecaedro sfenoide è uguale all'endecaedro bisimmetrico, ciò vuole dire che uno può essere trasformato nell'altro con opportune operazioni. Il primo passaggio per l'aggregazione dell'endecaedro sfenoide consiste in una disposizione radiale composta da 6 elementi (*fig. IV.96*). Una seconda "rosetta" nasce dalla riflessione della prima rispetto ad un piano verticale che poi viene allineata (ma ad una quota differente e con una rotazione in pianta di $21.7868...^\circ$) con il centro della prima rosetta. Infine, le "pile" così costruite possono essere aggregate tra di loro per ricoprire il piano orizzontale (*fig. IV.97*). Anche per l'endecaedro sfenoide vale la proprietà secondo cui la deformazione lungo l'asse verticale dà luogo ad una infinità di poliedri che tassellano lo spazio.



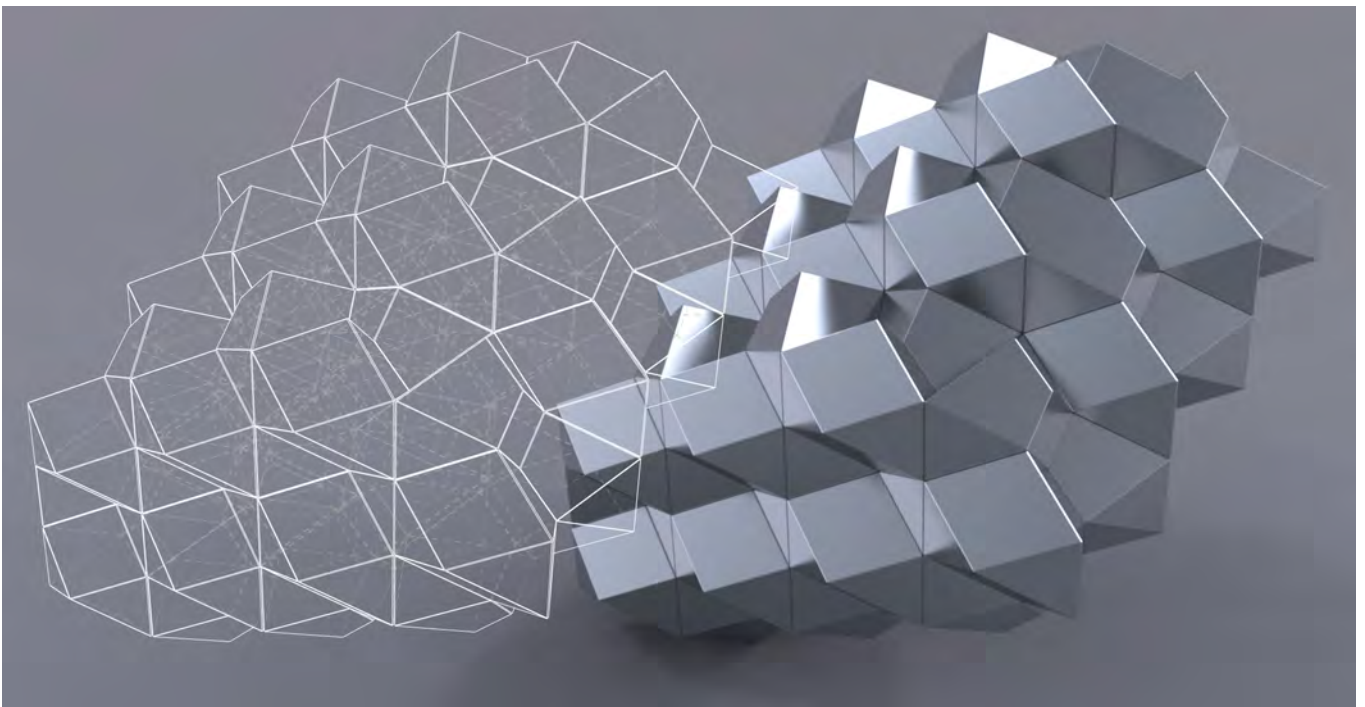
IV.90/ La versione deformata del dodecaedro rombico, chiamata dodecaedro allungato, ha la proprietà di tassellare lo spazio.



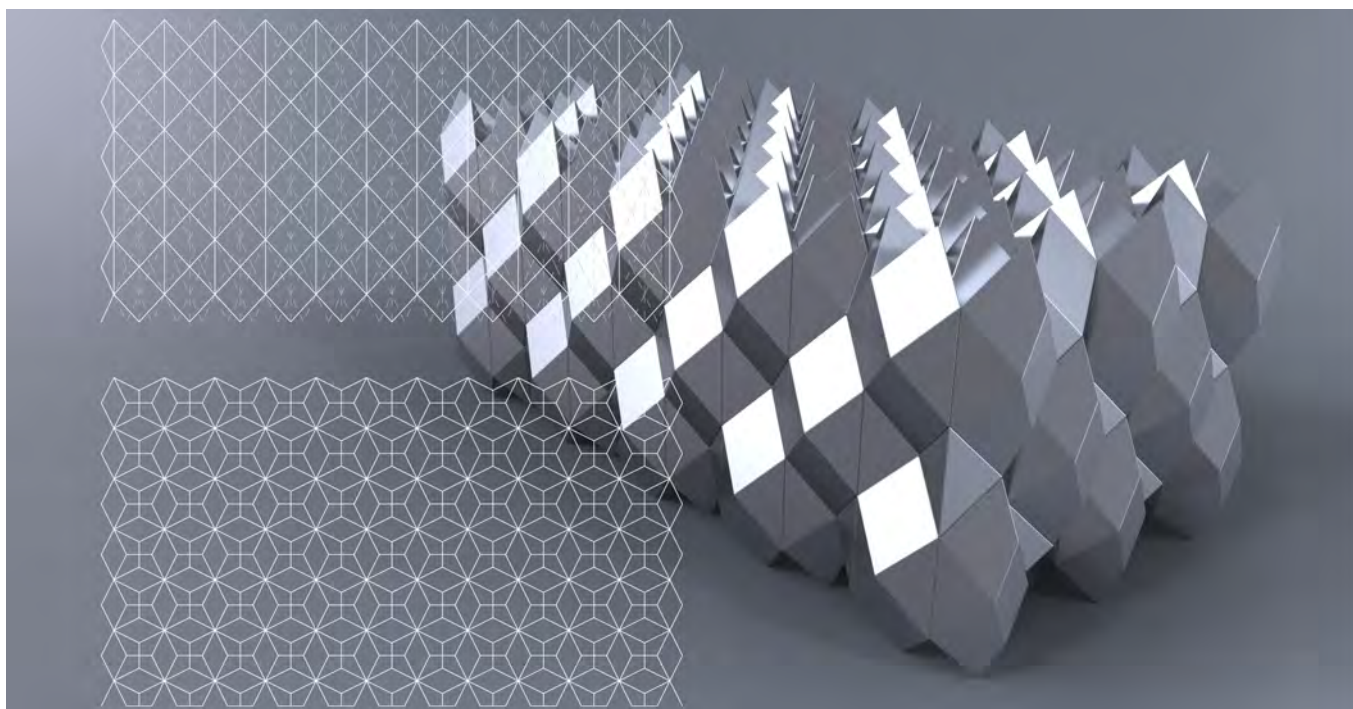
IV.91/ L'endecaedro bisimmetrico scoperto nel 1996 da Guy Inchbald.



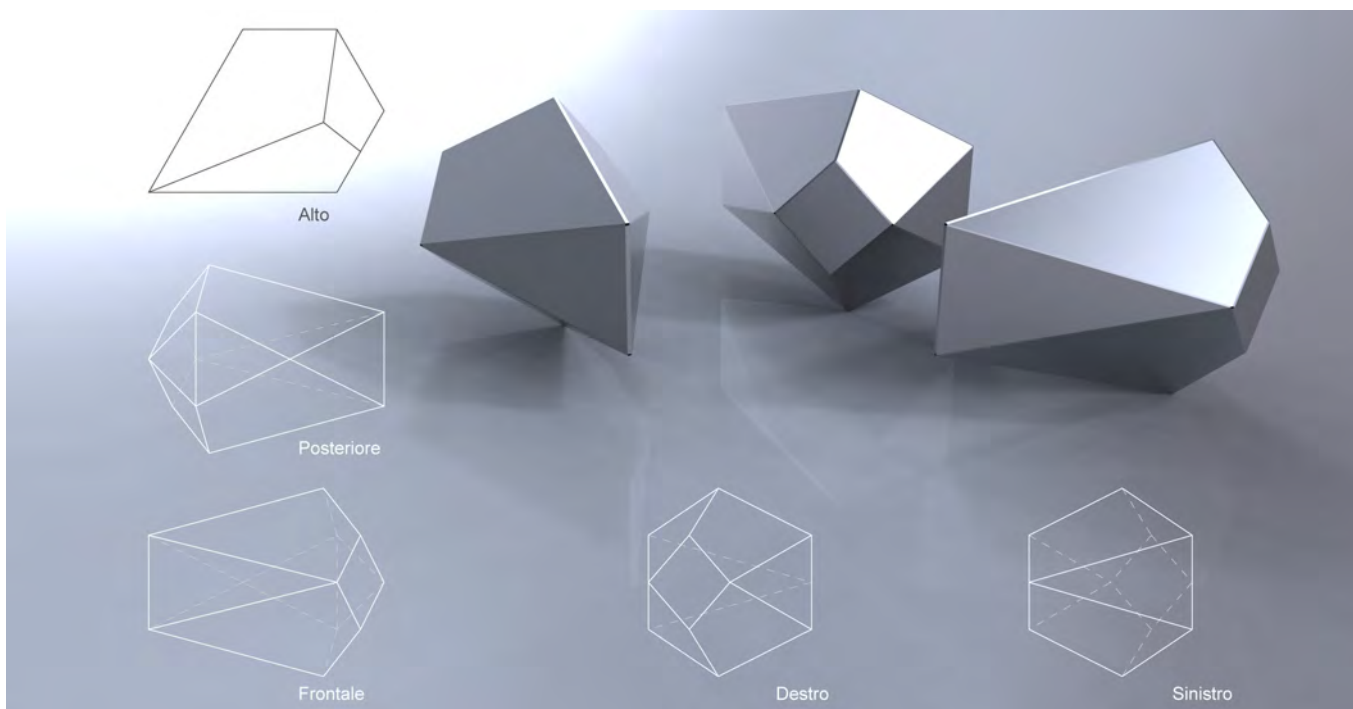
IV.92/ La prima aggregazione dell'endecaedro bisimmetrico, è creata da quattro poliedri disposti a formare una sorta di "barchetta".



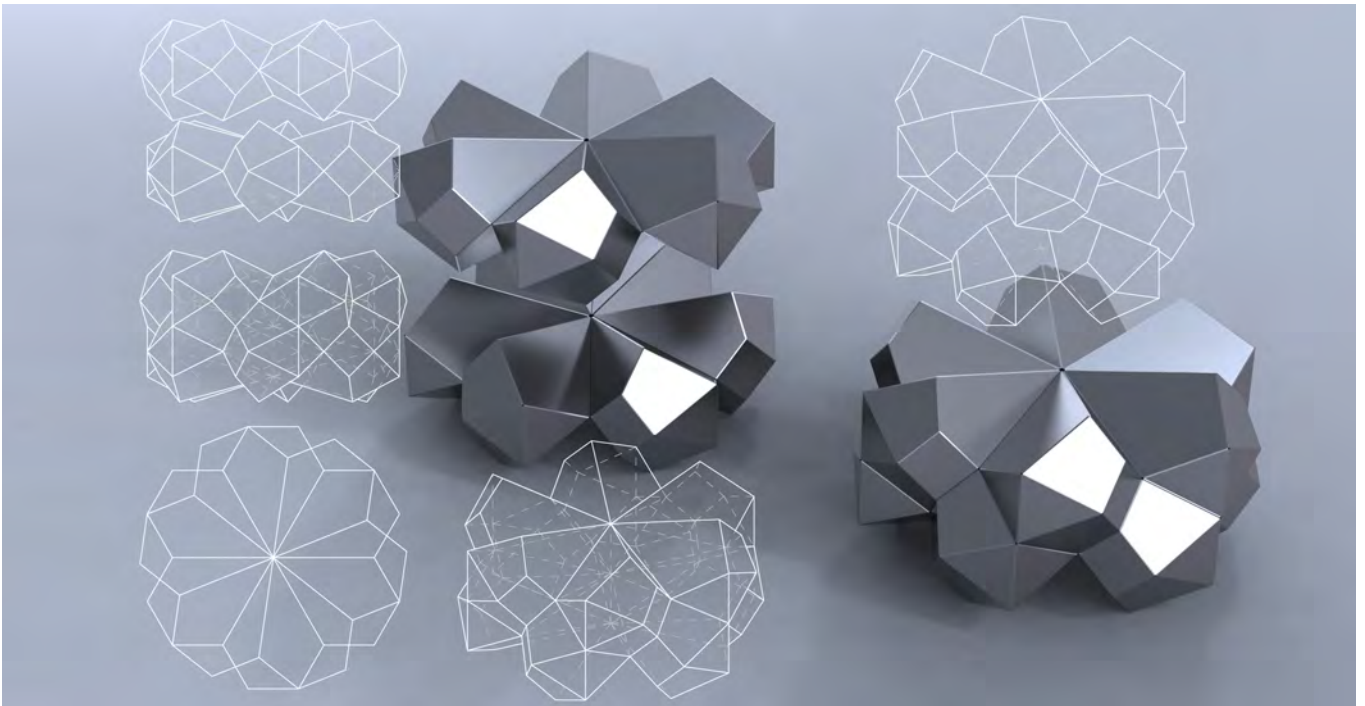
IV.93/ L'unità di traslazione dell'endecaedro bisimmetrico per il ricoprimento dello spazio.



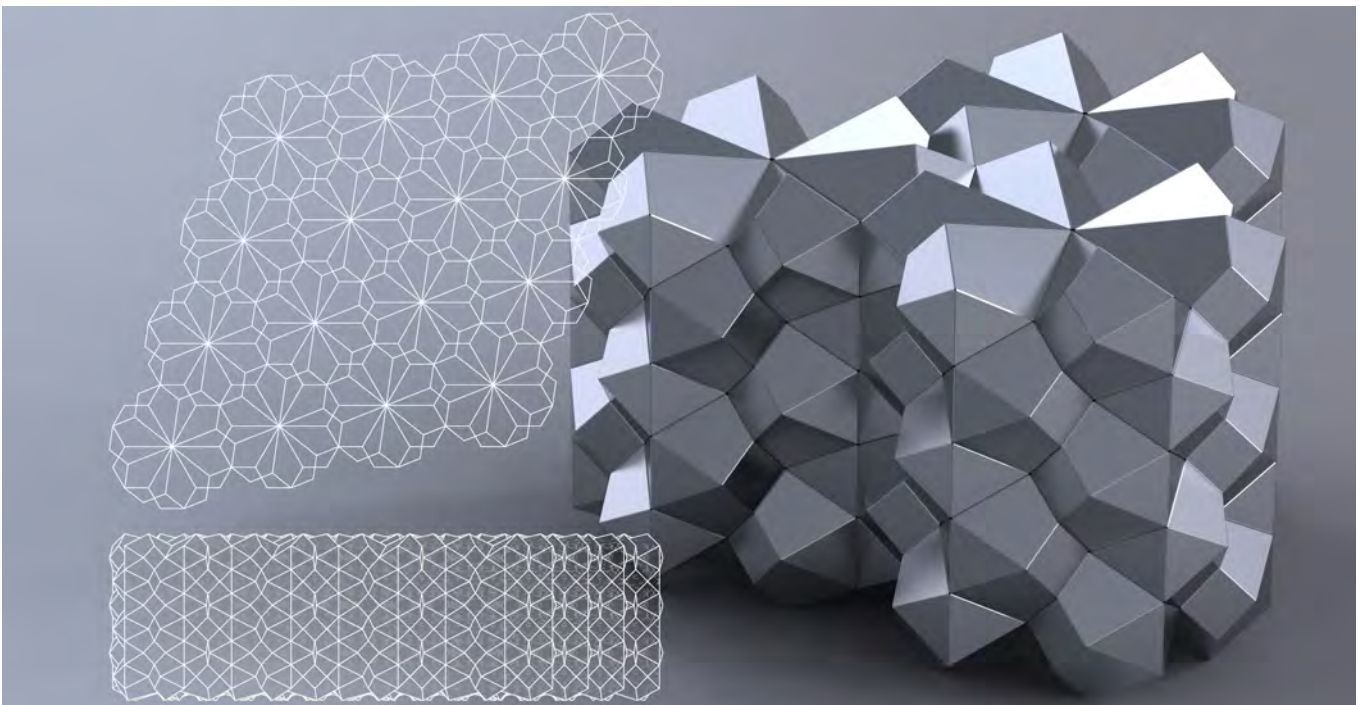
IV.94/ Variando l'altezza dell'endecaedro bisimmetrico è possibile generare un'infinità di poliedri che tassellano lo spazio.



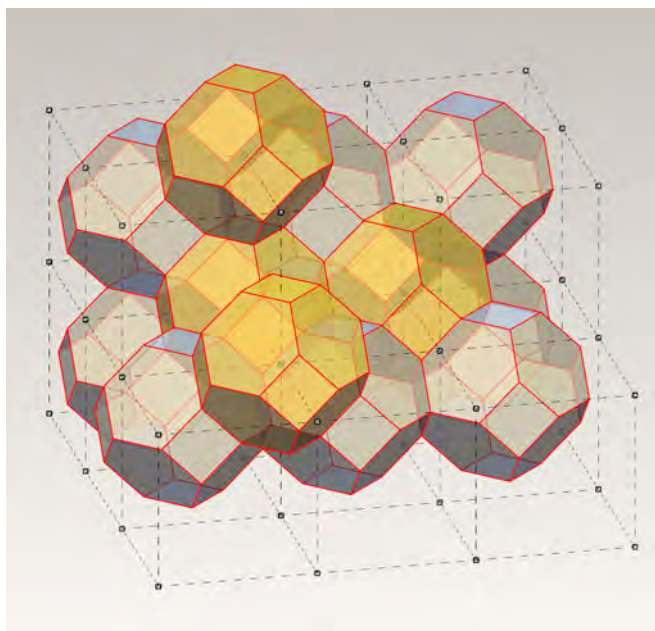
IV.95/ L'endecaedro sfenoide. L'aggettivo sfenoide fa riferimento alla particolare forma a cuneo di questo solido.



IV.96/ Il primo passaggio per l'aggregazione dell'endecaedro sfenoide consiste in una disposizione radiale composta da sei elementi.



IV.97/ Aggregazione di "pile" dell'endecaedro sfenoide.



IV.98/ La tassellazione dello spazio per mezzo dell'ottaedro troncato

I poliedri e le bolle di sapone

Un altro interessante esempio di tassellazione spaziale è quello caratterizzato da un'unica tessera poliedrica: l'ottaedro troncato (fig. IV.98). Questa caratteristica fu messa in luce da Lord Kelvin il quale, verso la fine del 1800, pose il seguente quesito: “*Se proviamo a suddividere lo spazio tridimensionale in compartimenti multipli, ciascuno di ugual volume, che forma avrebbero se l'area delle superfici d'interfaccia fosse minima?*”. Il problema aveva un valore che andava al di là della semplice disquisizione teorica, poiché è un problema di ottimizzazione della forma attraverso il raggiungimento dell'equilibrio delle tensioni. Queste sono caratteristiche geometriche che in natura ricorrono spesso. I problemi di questo tipo vengono chiamati dai matematici *isoperimetrici*; in sostanza si propongono di individuare nel piano quale sia la forma che a parità di perimetro ricopre la maggiore superficie. Nel caso in cui non vi siano vincoli la risposta è evidentemente il cerchio (nello spazio diviene la sfera), ma in presenza di vincoli le cose si complicano.

La soluzione al quesito di Lord Kelvin poteva essere rintracciata in un nuovo campo di osservazione che stava tenendo

occupati i matematici dello stesso periodo: lo studio delle lamine di sapone. Le bolle di sapone che si formano all'interno di un volume dopo essere stato agitato, tendono ad organizzarsi fino al raggiungimento di un sistema stabile. Il loro comportamento è simile alla disposizione che assumono delle sfere poste casualmente all'interno del medesimo volume con la differenza che non sono rigide, ma mutevoli a seconda delle condizioni ambientali: ad esempio se il liquido diminuisce le bolle diventano più grandi e le “sfere” di sapone si trasformano in poliedri che riempiono perfettamente lo spazio. Ma a differenza dei poliedri di una struttura cristallina, i poliedri presenti in una schiuma hanno facce irregolari dai tre ai nove vertici. Il fisico belga Joseph Ferdinand Plateau (1801-1883) nel 1873 pubblicò nel libro “*Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*”²⁰ i risultati delle sue osservazioni durate più di quindici anni, che furono poi le basi della moderna teoria delle superfici minime. Le superfici di area minima, sono caratterizzate da un parametro geometrico ben preciso: in ogni punto della superficie la curvatura media è uguale a zero. Per curvatura media si intende la media aritmetica delle curvature principali. Dunque, la verifica di tale condizione vuole dire che le due curvature principali devono essere uguali di intensità, ma di segno opposto.

Il metodo seguito da Plateau nella sua ricerca era di tipo sperimentale ed arrivò a definire delle leggi che sono tuttora valide: la prima²¹, nota come *Problema di Plateau*, è che assegnato un poligono chiuso piano, o sghembo, (assimilabile ad un telaio chiuso di qualsiasi forma), esiste sempre un sistema di superfici (cioè le lamine di sapone), con la caratteristica di minimizzare l'area, tra tutte le superfici possibili che toccano lo stesso telaio; la seconda è che le bolle di sapone si possono incontrare solo in due modi: o tre superfici che si toccano a 120° , oppure sei superfici che formano quattro curve d'intersezione incidenti in un vertice di circa $109,47^\circ$ (esattamente come è possibile misurare nel baricentro di un tetraedro regolare collegato con i vertici). Uno degli aspetti più interessanti di queste leggi è che rispondono benissimo ai problemi isoperimetrici. Dunque al quesito: nel piano, qual è il tracciato di minima lunghezza che collega un certo numero di punti? La risposta sappiamo essere il segmento di retta se i punti sono due, ma se sono tre l'ottimizzazione è rappresentata da una Y con angoli di 120° . Infatti, sperimentalmente si dimostra che in due lastre parallele, tenute separate da tre distanziatori ed immerse in un liquido saponato, le lamine di

sapone si incontrano proprio a 120° formando una Y. Nel caso di quattro punti la soluzione è in un percorso a doppia Y, e ciò trova conferma nel fatto che le lamine possono incontrarsi solo tre alla volta. Nel caso di cinque punti si generano tre intersezioni ciascuna con tre segmenti uscenti e incidenti a 120° .

Nel 1976 la matematica americana Jean Taylor²² riuscì a dimostrare in modo simbolico ciò che Plateau aveva dimostrato in modo sintetico²³. Da circa venti anni i matematici studiano le proprietà delle superfici minime con un nuovo tipo di sapone: il computer. Grazie a questo strumento si è scoperta l'esistenza di nuove superfici minime finora sconosciute e chiamate *superfici minime complete immerse di genere topologico maggiore di zero*²⁴. Sono superfici infinite che non si autointersecano di cui erano note solo il piano, la catenoide e l'elicoide retto.

La prima soluzione al problema di Kelvin fu proposta da lui stesso basandosi su di un solido di 14 facce di cui 8 esagonali e 6 quadrate chiamato *tetrakaidecaedro*. Quest'ultimo è ben approssimato dall'ottaedro troncato (anche se in realtà le facce del tetrakaidecaedro non sono piane ma leggermente curvate) e ciò spiega perché è conosciuto anche con il nome di poliedro di Kelvin. La soluzione di Kelvin non risponde perfettamente all'angolo ideale di Plateau di $109,47^\circ$ ma è il poliedro che più gli si avvicina e che da solo tassella lo spazio.

Solo nel 1993 due professori irlandesi, Wearie e Phelan, hanno definito una schiuma utilizzando due solidi diversi da cui deriva una tassellazione dello spazio con un'area minore di quella generata dal poliedro di Kelvin. I due poliedri irregolari di Wearie e Phelan (di pari volume ma di forme diverse) (*fig. IV.99*) sono un dodecaedro pentagonale²⁵ e un tetrakaidecaedro²⁶ (chiamato anche poliedro di Goldberg per distinguerlo da quello di Kelvin) che nel rapporto 1:6, formano un'unità di traslazione (un lattice cubico). Anche il dodecaedro è irregolare ed è composto da facce pentagonali con lati diversi e, nell'aggregazione con il tetrakaidecaedro, ha le facce ortogonali con le rette che uniscono i rispettivi baricentri dei solidi (*fig. IV.100*).

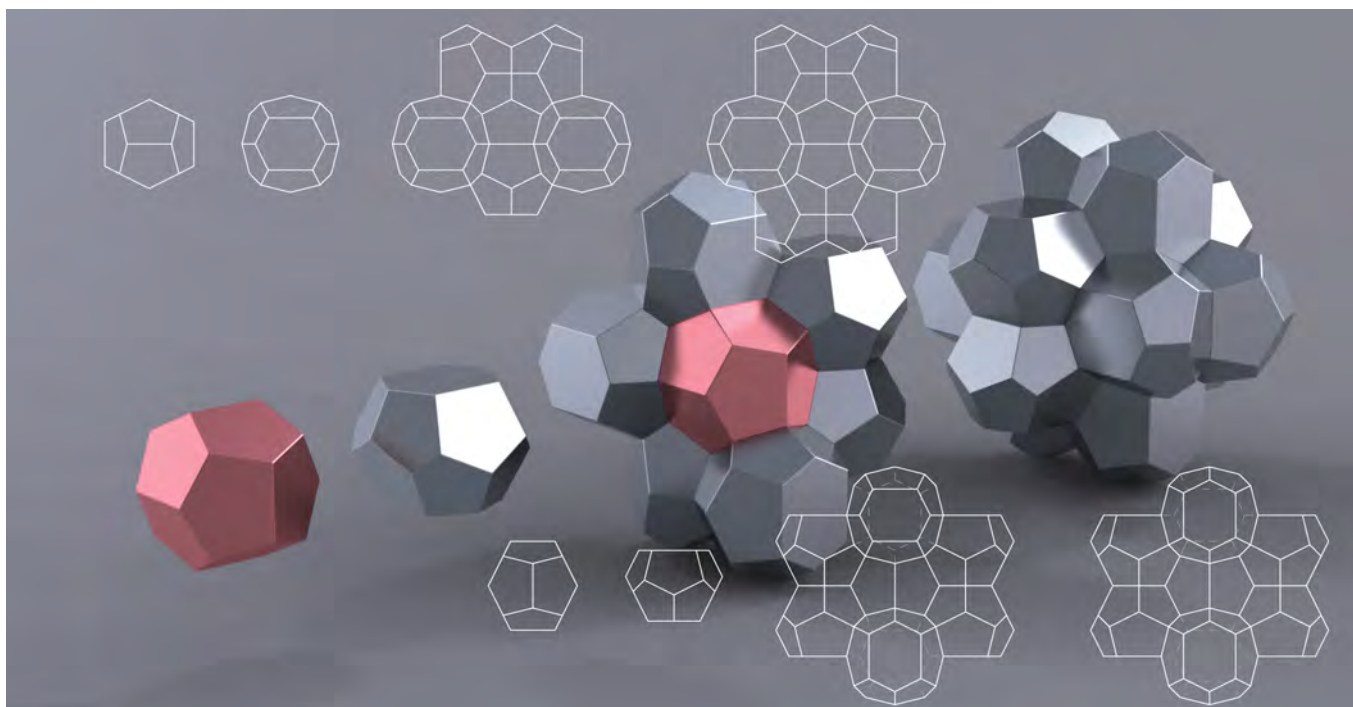
La modellazione matematica ci consente di verificare le caratteristiche appena evidenziate anche se dobbiamo approssimare i poliedri di Wearie e Phelan a poliedri con facce piane. Vista la complessità matematica dei due poliedri, il metodo utilizzato per la loro costruzione si basa sull'immissione diretta delle coordinate cartesiane dei vari vertici. Grazie agli strumenti di analisi messi a disposizione dai modellatori matematici, abbiamo quindi la possibilità di constatare che i due

poliedri hanno volume identici (i vertici di input generano due volumi di 999,9989 unità di misura al cubo) e che l'angolo formato dalla congiungente i due baricentri di due solidi contigui, con la loro interfaccia, misura $90,0004^\circ$, misura questa, perfettamente in linea con l'approssimazione a faccia piana dei modelli. Non ultima è la possibilità di apprezzare le capacità di aggregazione formando degli insiemi di polisuperfici NURBS, topologicamente chiusi (*fig. IV.101*).

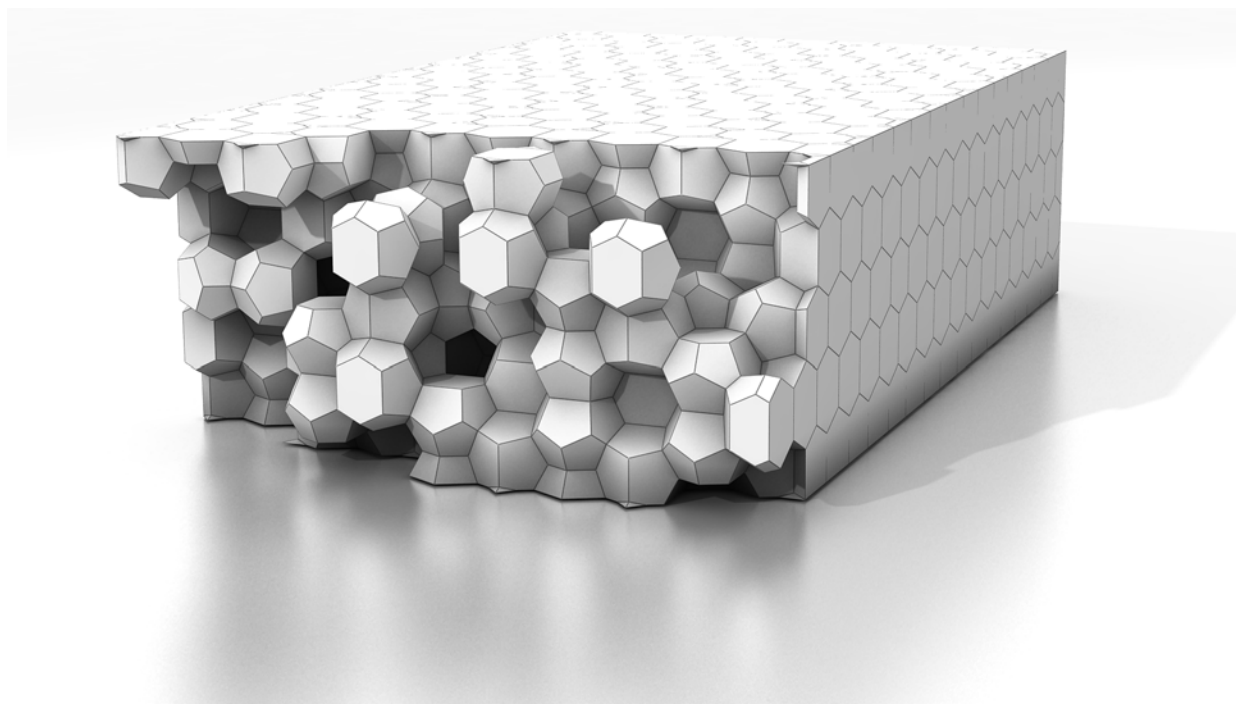
Tornando al caso del solido semiregolare ottaedro troncato, resta valida l'analogia, già accennata con l'esagono, in riferimento al fatto che quest'ultimo è il poligono regolare che ricopre il piano con il minor perimetro possibile. In natura, minor perimetro equivale a dire minor materiale: l'equilibrio degli sforzi nel piano, la stabilità strutturale ed il risparmio di materiale si riflettono nelle forme circolari delle cellule o delle molecole che in seguito alle pressioni uniformi o in seguito alla loro stessa crescita, si trasformano in griglie esagonali. Non è un caso quindi che gli alveari abbiano le celle a forma esagonale: è la figura piana che consente una tassellazione ricoprendo la maggior superficie con il minor perimetro possibile. Gli angoli diedri dell'ottaedro troncato misurano esattamente quanto gli angoli al vertice di un esagono regolare e cioè 120° .

Uno degli esempi più interessanti di architettura contemporanea, che dimostra chiaramente come si possa imparare dalla natura e quanto le nuove tecnologie informatiche possano essere d'aiuto in questo, è il *Centro Nazionale Acquatico di Pechino*, del gruppo PTW Architects, CSCEC, design, ARUP, del 2007, chiamato anche *Watercube*²⁷ (*fig. IV.102*). Imparare dalla natura è molto diverso dal ricopiarla in modo sterile. Vuole dire capirne e riproporne i principi di ottimizzazione delle forme e dei materiali, dell'efficienza energetica, della leggerezza. Questi sono gli stessi principi di ricerca poetica comuni a grandi personaggi dell'architettura recente come Antonio Gaudì, Otto Frei e (come vedremo a breve) Buckminster Fuller. In genere questo coincide anche con elevato valore estetico.

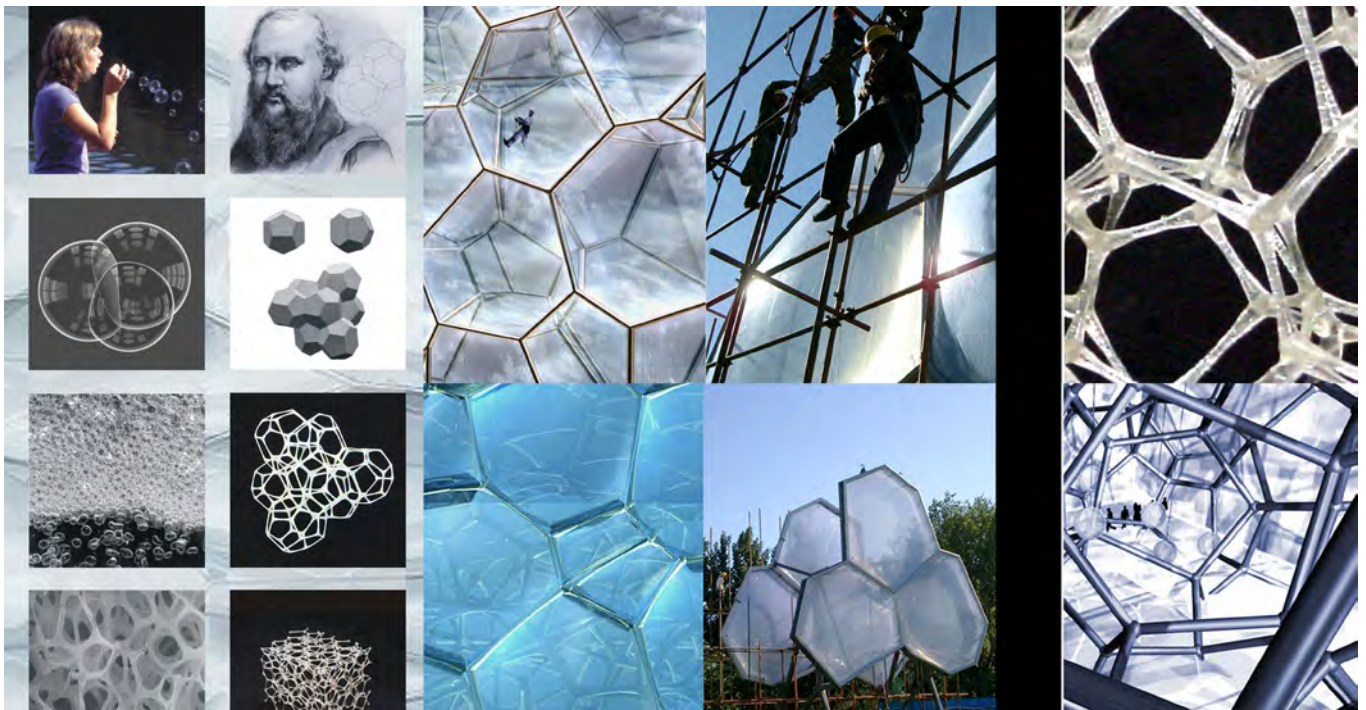
Ecco che allora l'ottimizzazione con cui la schiuma di Wearie e Phelan suddivide lo spazio a tre dimensioni, diventa la genesi strutturale su cui si imposta l'intero Watercube. Scrive l'architetto Chris Bosse dei PTW Architects "*Nonostante la sua apparente complessità e la sua forma organica, l'edificio è costituito utilizzando un elevato grado di ripetibilità.*"



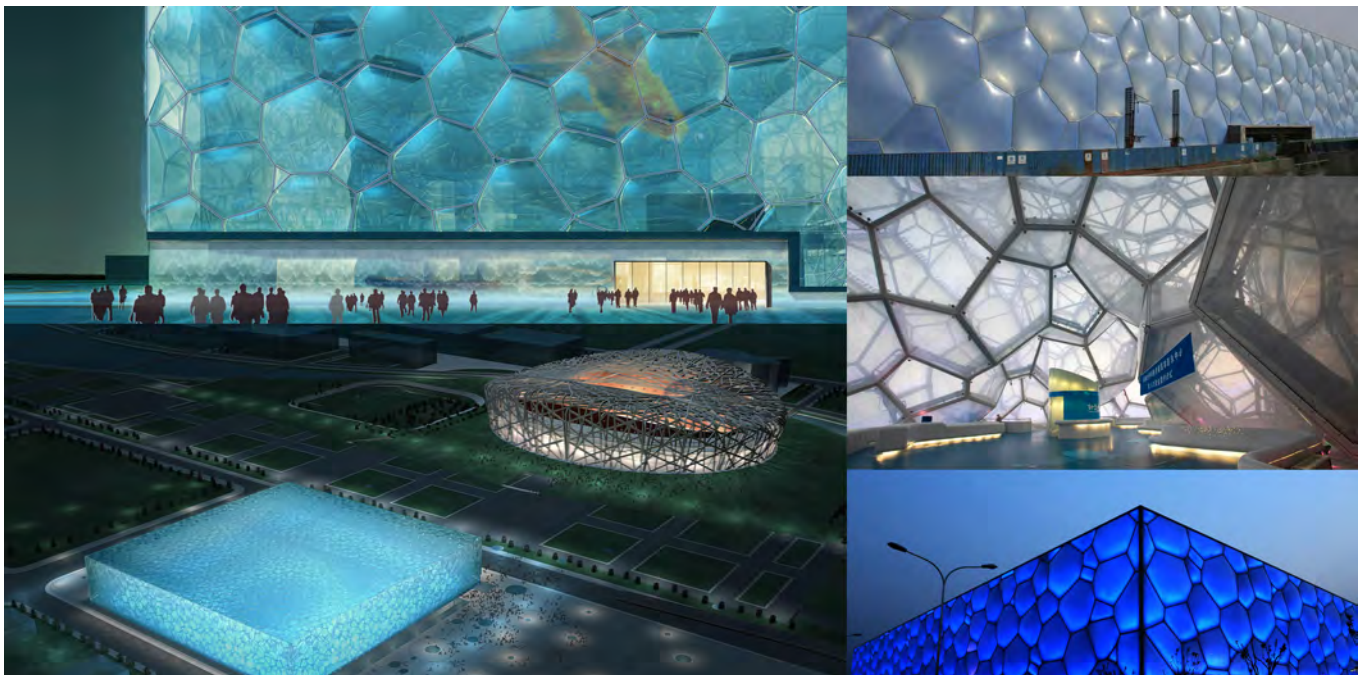
IV.99/ I due poliedri irregolari scoperti nel 1993 da Weaire e Phelan, hanno la proprietà di tassellare lo spazio con la minor superficie possibile.



IV.100/ Nell'aggregazione, i due solidi di Weaire e Phelan, conservano le facce ortogonali alle rette che uniscono i rispettivi baricentri.



IV.101/ La rappresentazione matematica consente la verifica della proprietà di ricoprimento dello spazio(PTW Architects).



IV.102/ Centro Nazionale Acquatico di Pechino, progetto del gruppo PTW Architects, CSCEC design, ARUP, del 2007, chiamato anche Watercube.

Usa soltanto tre facce differenti, quattro spigoli differenti e tre nodi o angoli differenti. Così il Centro Acquatico Nazionale di Pechino può essere facilmente costruito utilizzando, organicamente e in modo ripetitivo, lo spazio basandosi su una soluzione di uno dei quesiti matematici più significativi al mondo, che si ritrova in natura: una soluzione verde, sociale e tecnica”.

Solo in questo modo allora, l’architettura non è celebrazione della tecnologia ma sorgente di nuove qualità spaziali che grazie ad essa possono essere realizzate.

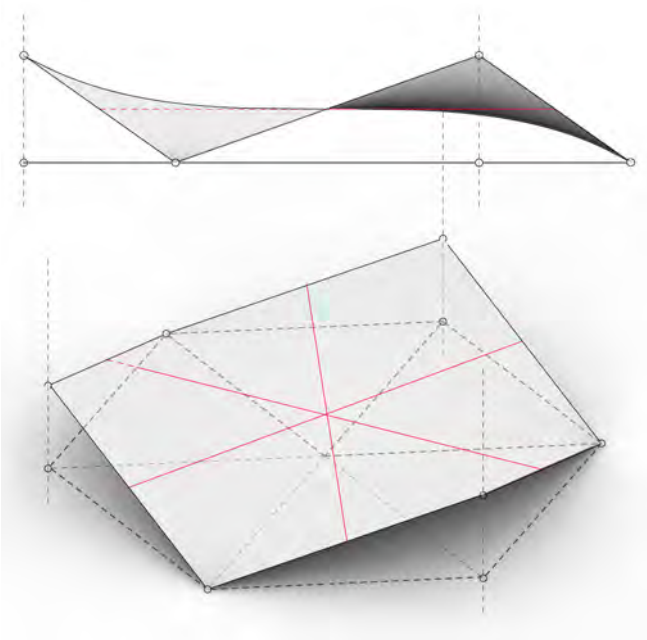
Lo studio delle relazioni tra i poliedri e le superfici minime, cominciò a svilupparsi attorno agli anni ’70, da quando la ricerca della suddivisione dello spazio trovò un punto d’incontro con le griglie spaziali. Uno dei contributi più importanti in questo campo fu quello apportato dalle ricerche di Alan H. Schoen, dell’istituto di ricerca del *National Aeronautics and Space Administration* (NASA), riguardo le *Infinite Periodic Minimal Surface without Self-Intersection* (IPMS)²⁸. Tali studi avevano come oggetto il partizionamento dello spazio euclideo in due labirinti, vicendevolmente penetranti, composti da superfici minime infinitamente estese. Nel 1973 fu pubblicato un interessante articolo nel numero 22 della rivista *Zodiac*²⁹, scritto da Michael Burt. In questo articolo gli studi prettamente teorici di Schoen, trovavano un nuovo campo di applicazione nella progettazione architettonica. Scrive lo stesso Burt “*L’architettura moderna è sempre più debitrice alla conoscenza delle configurazioni naturali multicellulari e alla struttura dei cristalli. Attualmente la maggior parte dei solidi periodici e delle configurazioni architettoniche e di ingegneria sono piane. Finché si tratta di unità cellulari relativamente piccole queste configurazioni sono soddisfacenti, ma quando si tratta di unità maggiori o di maggior luce, l’inferiorità della superficie piana rispetto a quella curva diventa evidente. D’altra parte la tecnica di produzione delle superfici curve è relativamente primitiva. La membrana e la volta, nonostante la loro superiorità rispetto al piano, sono più complicate dal punto di vista della combinazione e dell’assemblaggio in configurazioni spaziali continue...*”.

Il problema della suddivisione dello spazio per mezzo di volumi continui, è analizzato a partire dall’osservazione delle reti tridimensionali. La rete tridimensionale in generale, è realizzata per mezzo di rette che connettono un insieme di punti disposti nello spazio. Se la distribuzione dei punti nello spa-

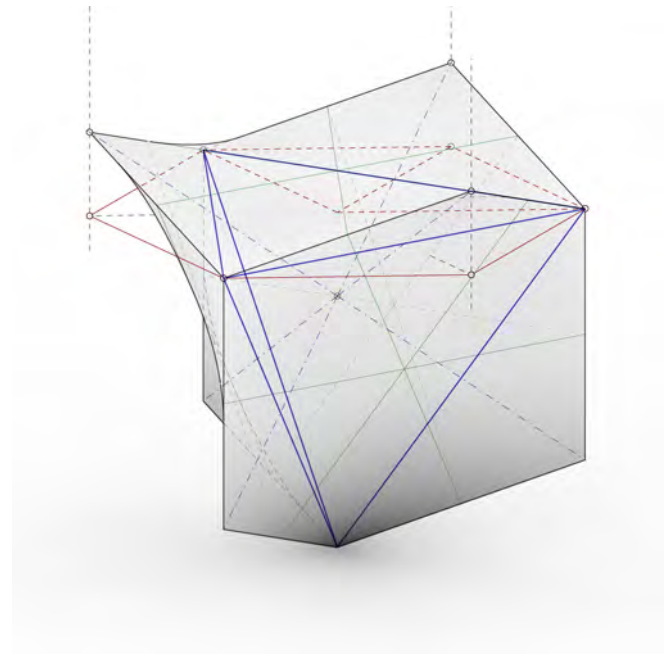
zio è regolare (dove per regolare si intende l’insieme delle sue proprietà simmetriche), anche la rete che se ne ricava sarà regolare. Tra le reti più regolari va annoverata quella della struttura cristallina del diamante (*fig. IV.104*). Questa è definita da esagoni spaziali regolari, con spigoli uguali, che in proiezione ortogonale, danno luogo ad un esagono piano regolare. Ciascun esagono sghembo, individua tre assi di simmetria binaria che passano per i punti medi degli spigoli. Il passo successivo è quello di estendere il concetto di superficie piana che costituisce la faccia di un poliedro, con quello di superficie minima che si sviluppa su di un perimetro sghembo (in fondo, il piano è un particolare caso di superficie minima). Allora, quattro esagoni sghembi della struttura a diamante, possono essere disposti in modo tale da individuare un volume chiuso, mantenendo il gruppo di simmetria del tetraedro (*fig. IV.105*). Abbiamo quindi costituito un poliedro regolare, le cui facce sono superfici minime: i *saddle-polyhedra* (*fig. IV.106*). Nel caso del reticolo spaziale a diamante la regolarità è riferita alla uguaglianza delle facce e al fatto che la perpendicolare al centro di ciascuna faccia, passa per il centro del solido. A differenza dei poliedri a faccia piana, i *saddle-polyhedra* hanno i vertici diversi.

Si delinea dunque, un’estensione della famiglia dei poliedri regolari e semiregolari a faccia piana. La costruzione dei *saddle-polyhedra* nasce dai solidi regolari e semiregolari trasformando il poligono regolare di n -angoli in una faccia, in una superficie minima di $2n$ -angoli. Ad esempio, a partire da un tetraedro regolare, impostiamo sul piano di una sua faccia un esagono regolare piano. Proiettiamo dal centro del tetraedro, il punto medio dello spigolo della sua faccia fino a trovarne l’intersezione con l’ortogonale staccata dai vertici dell’esagono. I punti così individuati, insieme con i vertici della faccia del tetraedro, definiscono l’esagono sghembo. Possiamo dire che il poligono sghembo che abbiamo costruito, si comporta come un telaio spaziale chiuso, che per il problema di Plateau, individua un’unica superficie minima. In modo del tutto analogo si può procedere con la costruzione di un poliedro a sella a partire da un icosaedro (*fig. IV.107*). Anche in questo caso la trasformazione del poligono piano in poligono sghembo, avviene proiettando dal centro dell’icosaedro i punti medi degli spigoli, che incontrano le ortogonali dai vertici degli esagoni, nei nuovi vertici degli esagoni sghembi (*fig. IV.108*).

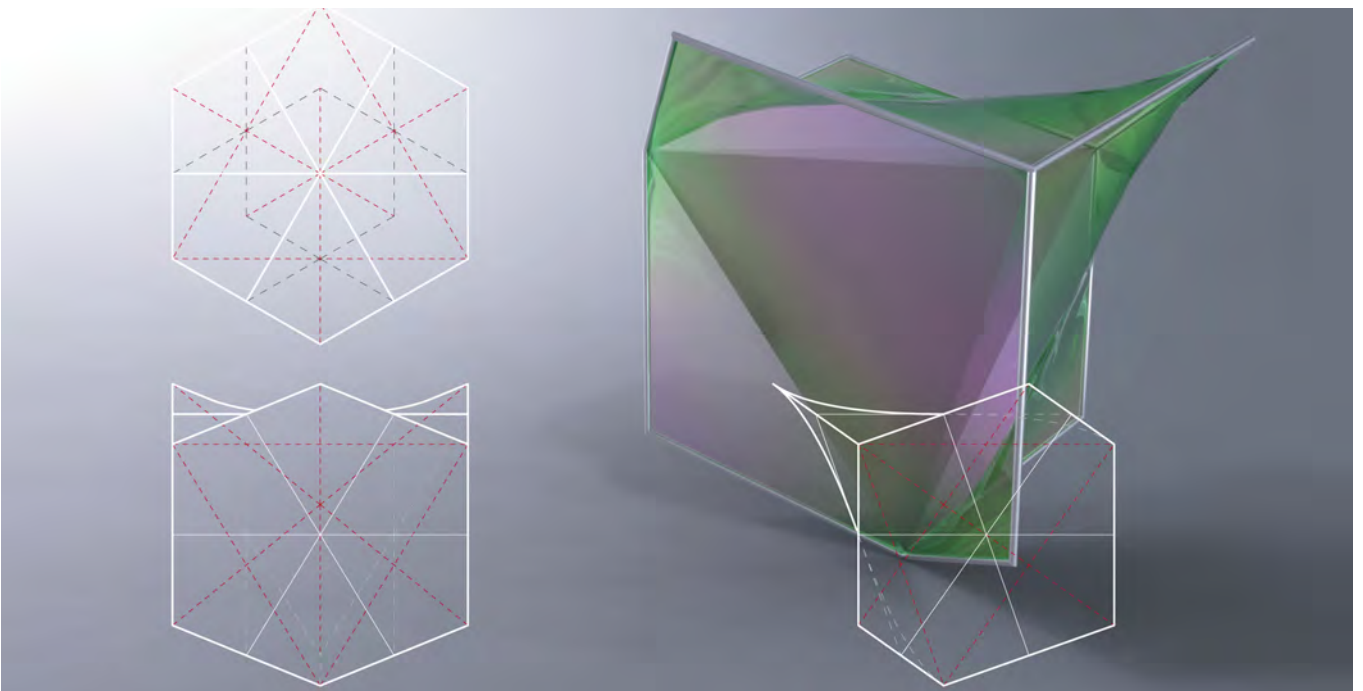
Fino ad oggi l’analisi di queste superfici era condotta soprattutto grazie all’uso di modelli fisici realizzati con le lamine di



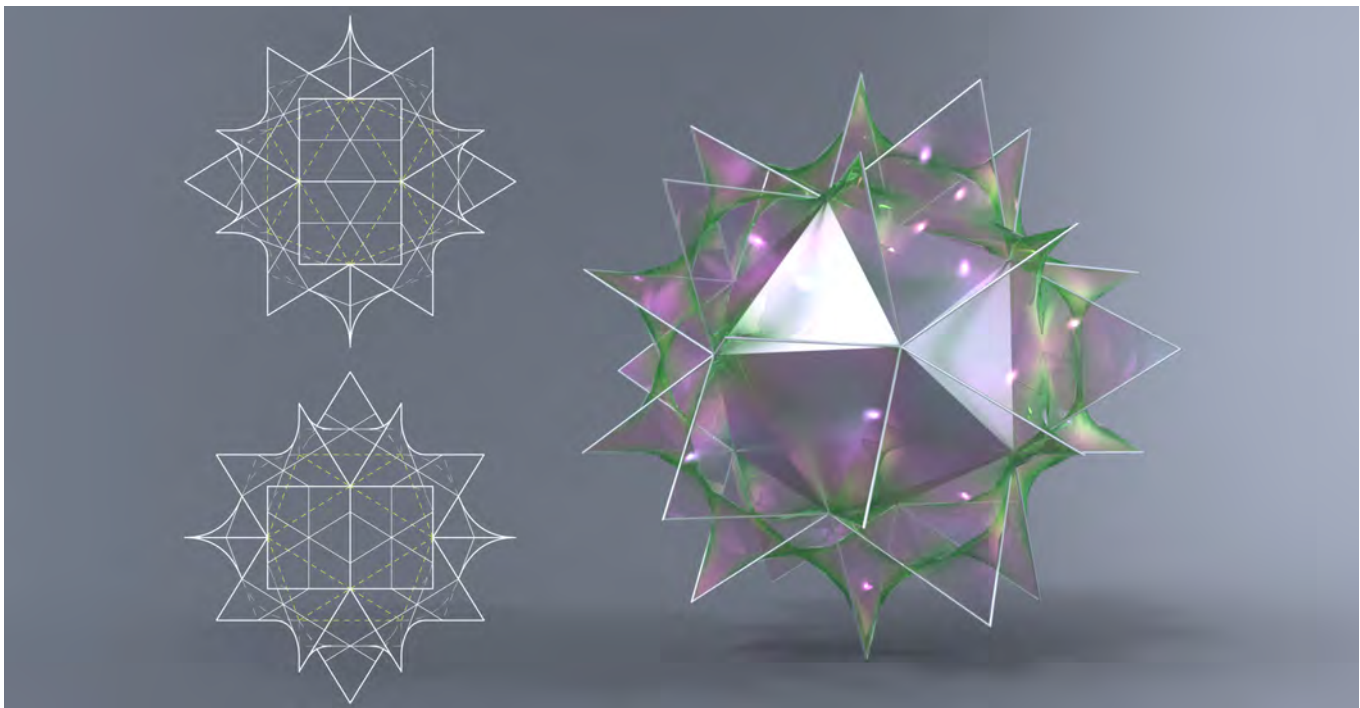
IV.104/ Il reticolo spaziale esagonale del diamante.



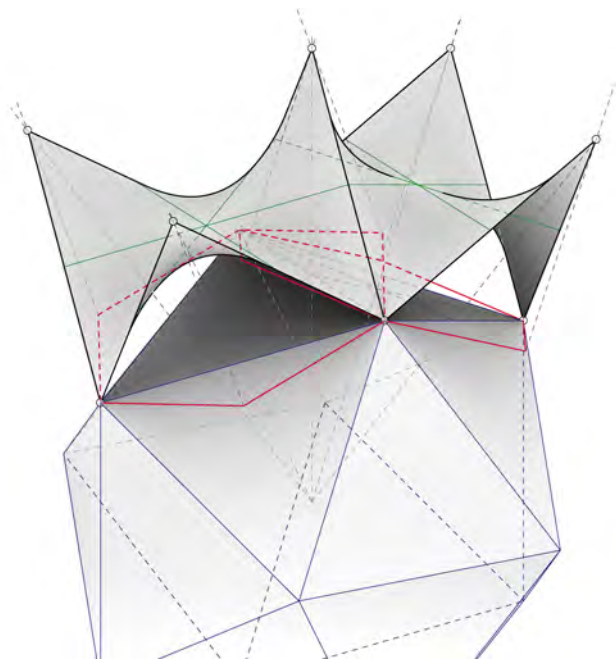
IV.105/ Quattro esagoni sghembi della struttura a diamante, possono essere disposti in modo tale da individuare un volume chiuso.



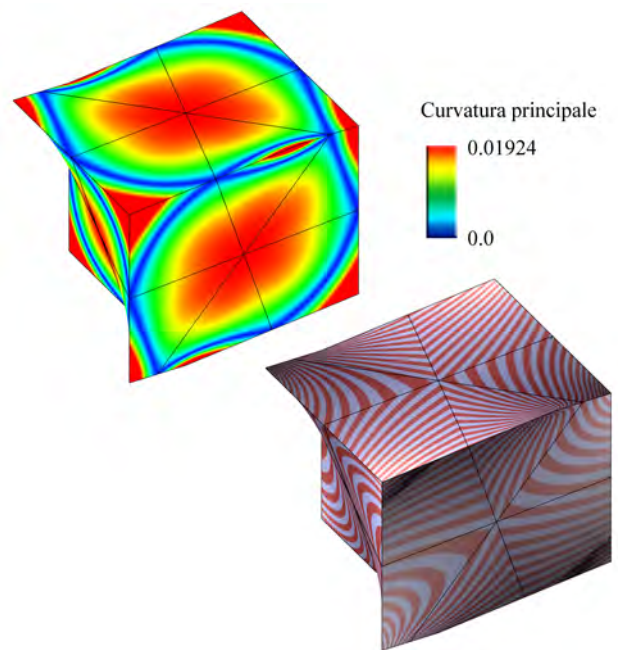
IV.106/ Il saddle-polyhedron impostato su di un tetraedro regolare.



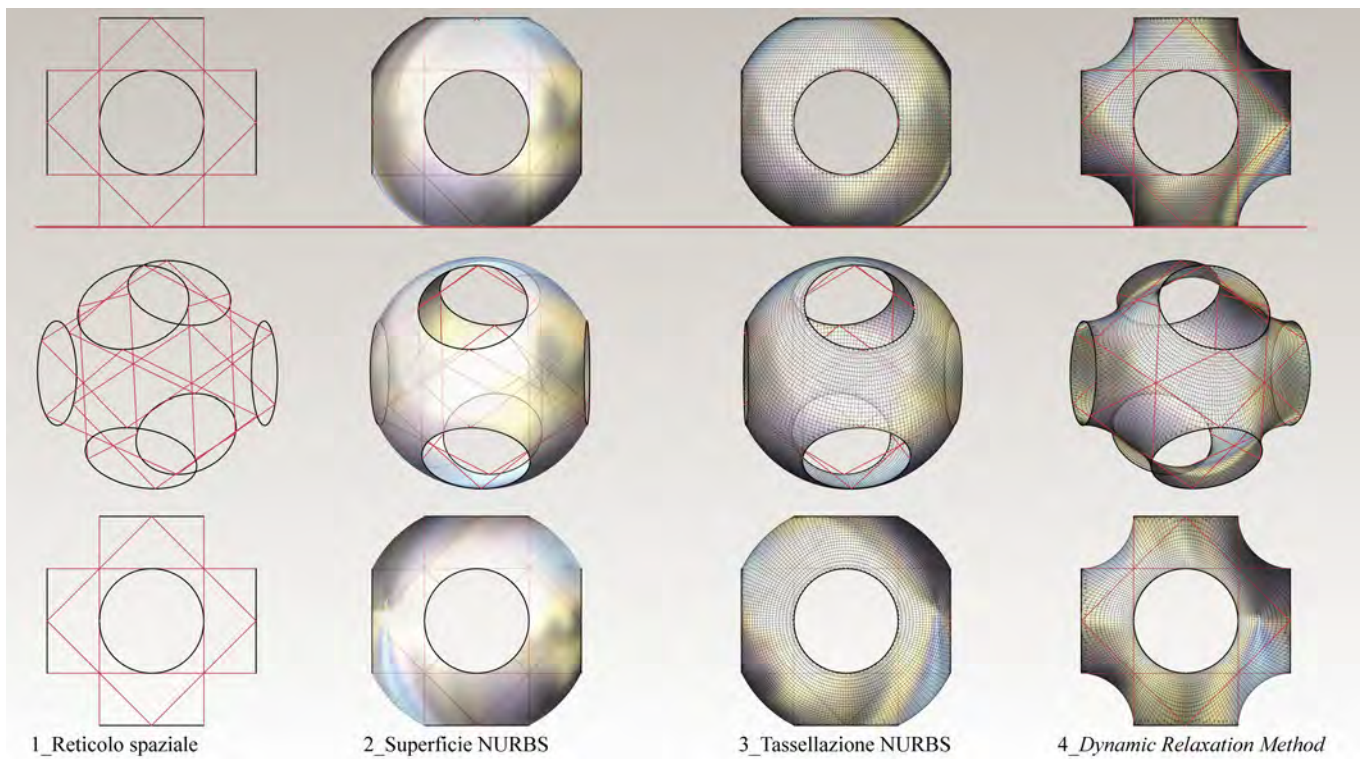
IV.107/ Il saddle-polyhedron impostato su di un icosaedro regolare.



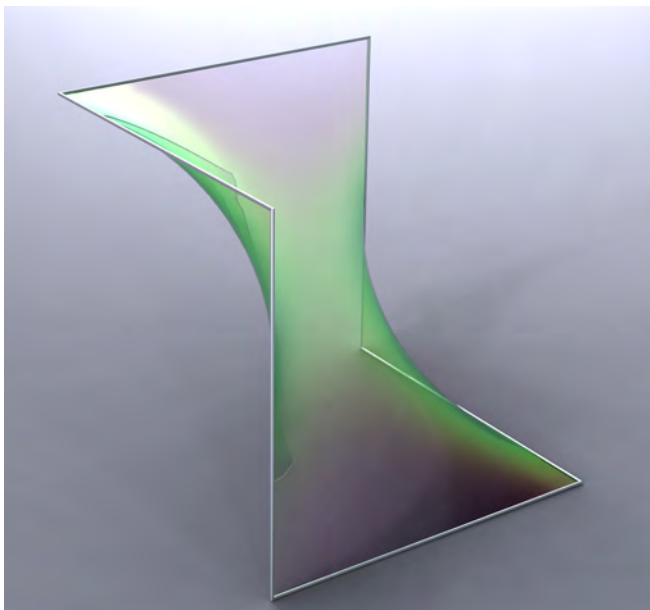
IV.108/ Costruzione geometrica del poligono sghembo a partire da una faccia piana dell'icosaedro.



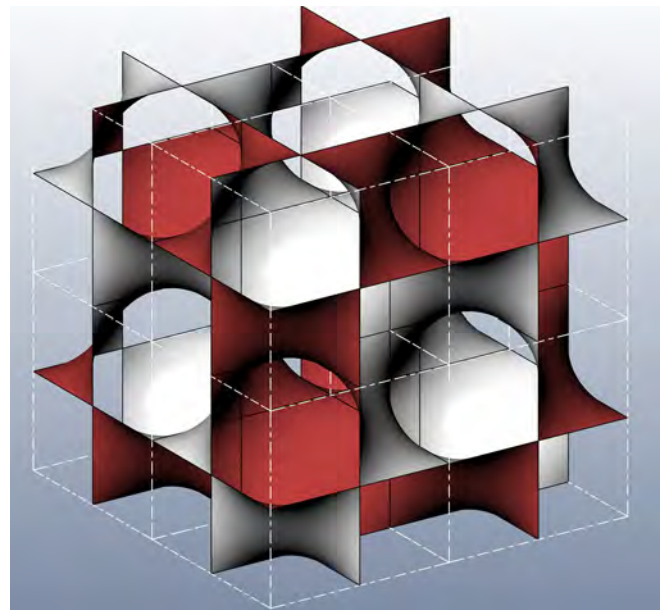
IV.109/ Analisi della curvatura principale e analisi della continuità tra le superfici di un saddle-polyhedron.



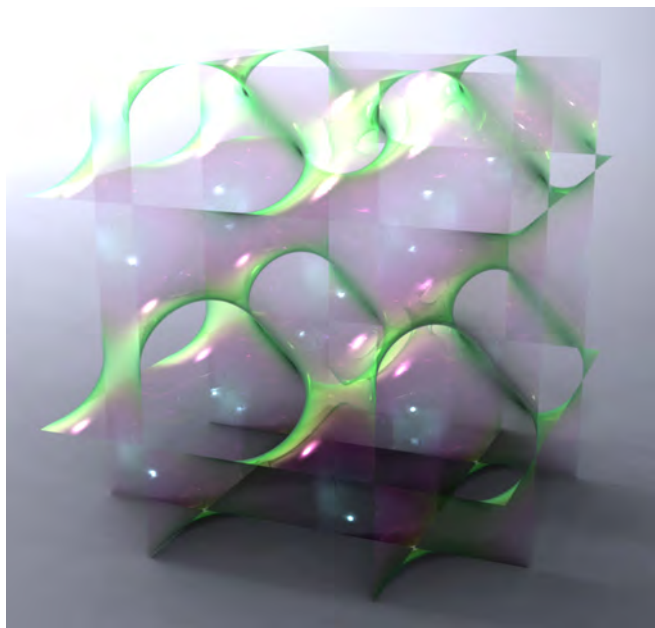
IV.110/ Il metodo del dynamic relaxation per la generazione di superfici minime.



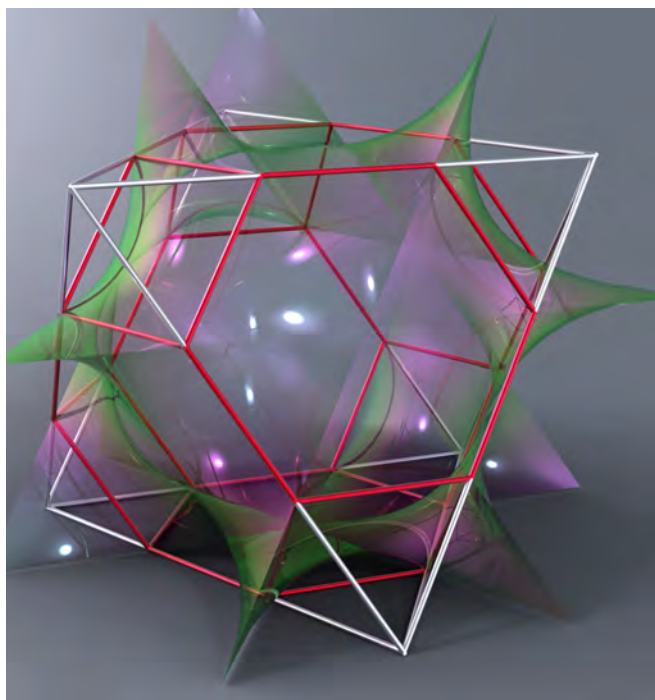
IV.111/ La D-Surface che risolve il problema di Plateau per l'esagono sghembo impostato su sei spigoli di un cubo.



IV.112/ Esempio di Infinite Periodic Minimal Surface without Self-Intersection generata dall'aggregazione di un insieme di D-Surface.



IV.113/ Esempio di Infinite Periodic Minimal Surface without Self-Intersection generati dall'aggregazione di un insieme di D-Surface.



IV.114/ Il saddle-polyhedron impostato sul poliedro semiregolare ottaedro troncato.

sapone, oppure attraverso reticoli di cavi tesi impostati su di un telaio spaziale. Rimaneva però il problema della rappresentazione grafica. Per quanto riguarda i saddle-polyhedra, le forti proprietà di simmetria che essi includono, consentivano di essere approssimati o da un gruppo di superfici rigate o da porzioni di piano. Nel primo caso un esagono sghembo, era suddiviso dai suoi assi di simmetria in sei porzioni superficiali identiche, definite da quadrilateri spaziali i cui angoli³⁰ sono nell'ordine di 109.471° , 90° , 60° , 90° . Ciascuno di questi quadrilateri era utilizzato per generare un paraboloido iperbolico; quindi l'intera faccia del saddle-polyhedron era costituita da sei porzioni di paraboloidi iperbolici contigui ed uguali. L'analisi della curvatura principale, e della continuità tra le superfici, che possono essere facilmente effettuate per mezzo di un modellatore matematico, mettono in evidenza i limiti di questa approssimazione (fig. IV.109). Il primo limite evidente, risiede nel fatto che i paraboloidi iperbolici, non essendo superfici minime, hanno valori di curvatura principale diversi da zero soprattutto nelle zone periferiche. Il secondo limite, si ritrova nella mancanza di continuità tra le sei porzioni di paraboloidi iperbolici, che costituiscono la faccia del saddle-polyhedron.

Il sapone che oggi viene utilizzato nelle analisi di queste superfici, è, come abbiamo detto, il computer. Attualmente le modalità con cui si possono rappresentare le superfici minime, rientrano nel campo della modellazione numerica. Infatti, l'approccio alla risoluzione del *form-finding*, cioè della determinazione della forma geometrica in cui si raggiunge l'equilibrio tensoriale, si basa su metodi di calcolo applicati a superfici poliedriche, cioè le *mesh*. Uno di questi è il *dynamic relaxation method*, che si basa sul secondo principio della dinamica di Newton: i nodi delle mesh vengono considerate delle masse concentrate, su cui agiscono non solo le tensioni superficiali, ma anche le forze d'inerzia e di oscillazione (fig. IV.110). I nodi sono collegati dagli spigoli della mesh che si comportano esattamente come le reti tese dei modelli fisici. La forma della membrana si ottiene con il raggiungimento da parte dei nodi della condizione di equilibrio. Le relazioni tra superfici minime e poliedri possono trovare quindi nel calcolatore uno strumento di analisi davvero efficace.

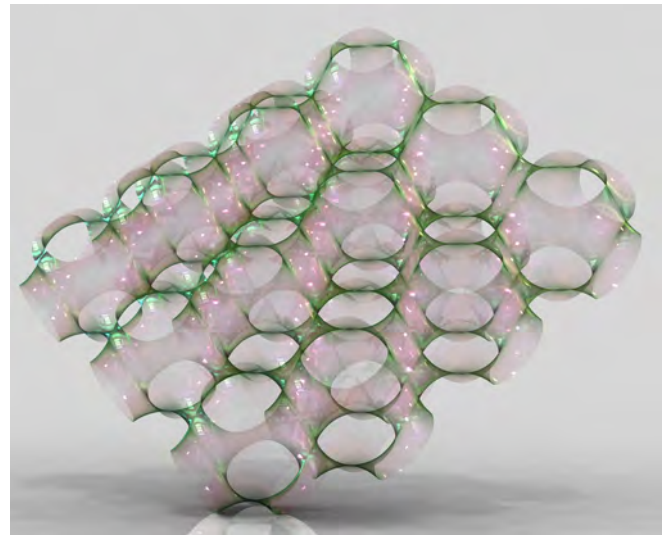
Allora, se da un lato è possibile rappresentare con notevole accuratezza, la superficie a diamante di Schwarz, la cosiddetta *D-surface* (fig. IV.111), con cui nel 1865 venne risolto il problema di Plateau per sei spigoli di un cubo, dall'altro si riesce

a verificare la sua proprietà di aggregazione formando una delle IPMS studiate da Schoen con modelli fisici (fig. IV.112 e fig. IV.113). Ed ancora, la rappresentazione di un ottaedro troncato nella sua forma a sella (fig. IV.114), può essere analizzata in riferimento alla sua possibilità di tassellare lo spazio tridimensionale (fig. IV.115). Analizzando in dettaglio, il tipo di aggregazione tra questi tipi di saddle-polyhedra (fig. IV.116) si ha inoltre la possibilità di verificare sperimentalmente che l'elemento fondamentale della tassellazione è la *P-surface* che sempre Schwarz scoprì nel 1880 (fig. IV.117). Queste sono solo alcune semplici esemplificazioni di come le capacità di indagine, che i nuovi strumenti informatici mettono a disposizione della ricerca scientifica, siano notevolmente amplificate. E tutto ciò si riversa ancora una volta nel più ampio tema del rinnovamento della geometria descrittiva dove, un argomento apparentemente chiuso, come quello dei poliedri, rivive di un inedito vigore.

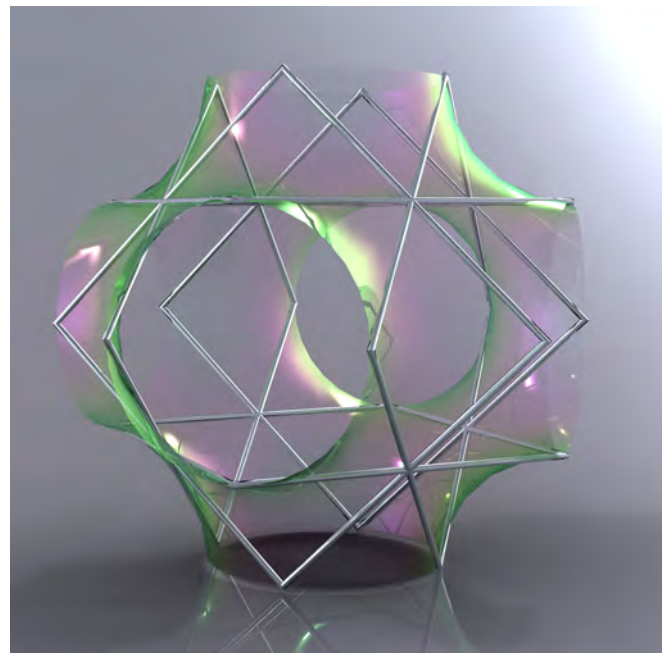
Discretizzazione delle superfici continue per mezzo di superfici poliedriche

Da un punto di vista geometrico, ogni superficie continua³¹ può essere *discretizzata* (cioè approssimata) con una superficie composta da sole facce piane. Il poliedro generato (sia esso aperto che chiuso) avrà i vertici appartenenti alla superficie d'origine e gli spigoli interni oppure esterni alla superficie stessa a seconda della sua topologia. Ai fini di una valida discretizzazione, considerazioni di carattere tecnologico, estetico ed anche economico, rendono necessaria la verifica di due requisiti: il primo, che i vertici siano tra di loro il più vicino possibile; il secondo, che essi siano anche distribuiti uniformemente nello spazio.

Consideriamo una superficie libera qualsiasi (fig. IV.118), anche con variazioni repentine di curvatura. A partire da un suo punto qualsiasi **P** costruiamo una sfera (di raggio sufficientemente piccolo a garantire il primo requisito) con centro proprio in **P**. È possibile suddividere la curva intersezione della sfera con la superficie, attraverso i lati dei triangoli equilateri con un vertice nel punto **P** e con lunghezza pari al raggio della sfera. Il fatto di individuare sei triangoli equilateri garantisce l'isotropia della superficie poliedrica. Da uno dei vertici **Q** dell'esagono sghembo, è possibile ripetere la stessa procedura che può essere estesa



IV.116/ Tassellazione dello spazio per mezzo del saddle-polyhedron ad ottaedro troncato.



IV.117/ L'elemento di connessione nella tassellazione dello spazio eseguita per mezzo di un saddle-polyhedron ad ottaedro troncato, è la *P-surface* di Schwarz.

sull'intera superficie.

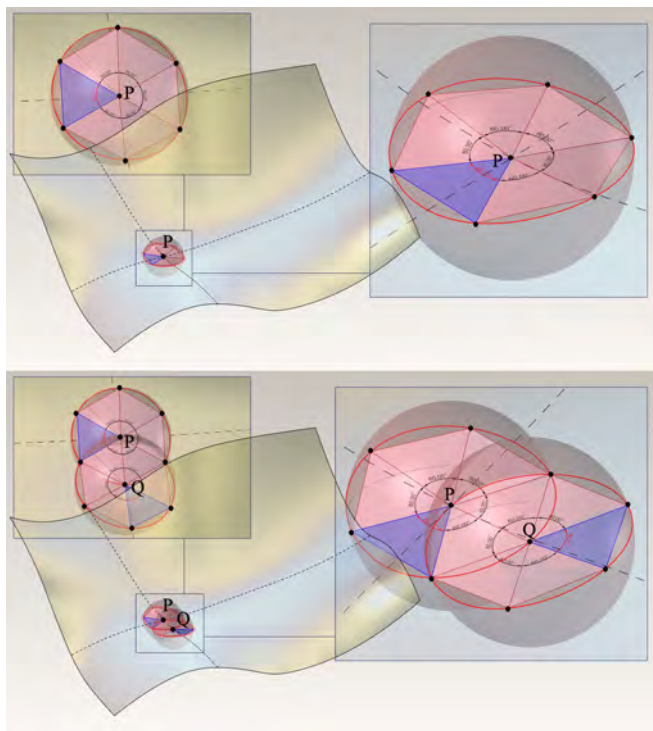
Comunque, la discretizzazione è strettamente legata alle caratteristiche geometriche della superficie di origine. È altresì evidente che minore sarà la lunghezza degli spigoli del poliedro di riduzione e maggiore sarà la regolarità e l'accuratezza con cui verrà approssimata la superficie.

A questo punto è importante fare una precisazione per non incorrere in un equivoco grossolano. A prima vista si può credere che gli unici poliedri composti da sole facce triangolari equilateri tutte uguali, siano i soli tre (dei cinque) solidi platonici noti, e cioè il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro. Ma se si considera la possibilità di ammettere concavità e convessità sulla superficie poliedrica, ecco che si aprono un'infinità di soluzioni possibili. Certo, poiché la sfera ha curvatura costante sempre positiva, risulta chiaro (anche sulla base delle considerazioni fatte sulla tassellazione regolare della geometria ellittica) che gli unici poliedri a facce triangolari equilateri che la approssimano siano solamente i tre solidi platonici. Ma facciamo una verifica sperimentale per capire concretamente

come sia possibile l'esistenza di un esagono sghembo formato da triangoli equilateri. Consideriamo un esagono regolare che giace sul piano orizzontale (*fig. IV.119*); facciamo una rotazione rispetto ad una sua diagonale (l'ampiezza non ha importanza) di una metà dell'esagono (passaggio 2). Dopodiché, operiamo altre due rotazioni, utilizzando come cerniere altre due diagonali dell'esagono, ciascuna limitata a due terzi dell'esagono (passaggio 3). Nel passaggio successivo, generiamo due coppie di coni di rivoluzione che essendo il luogo geometrico delle possibili giaciture dei due triangoli equilateri rimasti separati (quelli cioè che lasciano aperto l'esagono), individuano due punti d'intersezione. Questi ultimi due punti rappresentano le due soluzioni possibili che ci consentono di chiudere il poligono. Abbiamo quindi creato un esagono regolare sghembo con i lati uguali e suddividibile in sei triangoli ciascuno equilatero. Il procedimento dimostra che è possibile generare un'infinità di esagoni sghembi con caratteristiche analoghe. A partire dagli anni '90, l'Ing. Lobel (*fig. IV.120*) sta portando avanti una ricerca tesa ad individuare quali famiglie tra queste infinità, consentono di definire dei volumi chiusi, quindi dei veri e propri poliedri chiusi (non possono essere definiti regolari perché per quanto le facce siano poligoni regolari uguali, gli angoloidi sono diversi); finora ne ha trovate 9 ognuna con numerosissime declinazioni diverse.

A parte le ricadute che questo tipo di strutture possono avere in campo architettonico (probabilmente il limite più grande è costituito dal loro valore estetico) è interessante sottolineare questo lavoro, perché dimostra ancora una volta come un argomento apparentemente "chiuso" come i poliedri possa invece nascondere delle caratteristiche sorprendenti che (forse) solo grazie al computer possono essere indagate.

Ogni tassellazione regolare o semiregolare del piano, può essere trasposta rigorosamente su di una superficie sviluppabile in modo tale da suddividerla secondo gli stessi principi. Infatti, nello sviluppo piano di qualsiasi superficie sviluppabile, le linee geodetiche della superficie vengono trasformate in linee rette. Di conseguenza, è possibile operare una tassellazione del piano di sviluppo, in cui gli spigoli dei poligoni piani ottenuti, verranno a costituire lo sviluppo piano delle geodetiche della superficie. Allora, operando un involuppo della superficie con la tassellazione piana precedentemente eseguita, otteniamo una suddivisione della superficie, in cui le tessere sono definite da segmenti di geodetiche. In particolare, questi

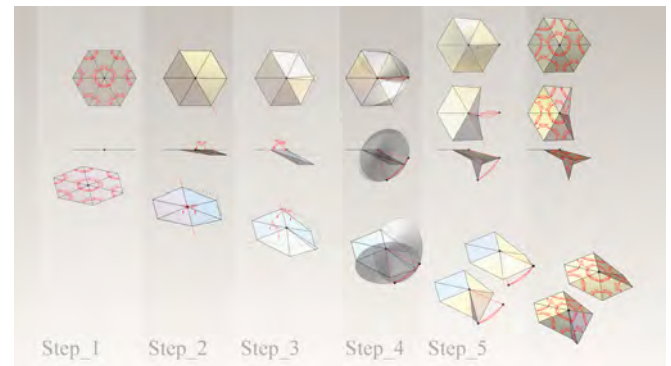


IV.118/ Ogni superficie continua può essere discretizzata con una superficie composta di sole facce piane.

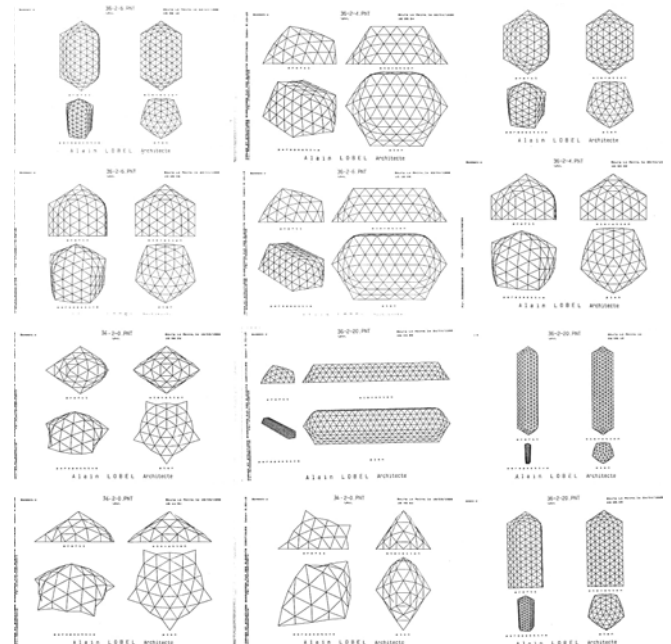
segmenti di geodetiche, non solo avranno tutti la stessa lunghezza, ma tale lunghezza sarà la medesima lunghezza degli spigoli della tassellazione eseguita nello sviluppo piano della superficie (fig. IV.121). È importante notare, che solo nel caso cilindro di rivoluzione (in cui le geodetiche sono le eliche cilindriche caratterizzate da una curvatura costante), la lunghezza delle corde degli spigoli geodetici, si mantiene costante. Il laboratorio virtuale ci consente di verificare sperimentalmente questa caratteristica delle superfici sviluppabili. Dunque, a partire da un cono generico (fig. IV.122), operiamo uno sviluppo piano in cui sarà possibile eseguire una tassellazione (con i metodi descritti nel Capitolo II) del tipo regolare o semiregolare. L'operazione di involuppo della porzione di piano (con la relativa tassellazione che in questo caso è monoedrica triangolare) è, nel modellatore matematico, sensibile al numero dei poli che definisce la superficie da avvolgere. Infatti, nell'operazione di sviluppo la superficie (che nel nostro caso era definita da curve isoparametriche di grado 3 ciascuna avente 33 punti di controllo) viene trasformata in una porzione di superficie piana, avente per il parametro u il grado 1 e 2 punti di controllo, invece per il parametro v , grado 3 e 52 punti di controllo. Dunque, occorre ricostruire la superficie piana, cioè ridefinirne i parametri, aumentando il grado e il numero dei poli per il parametro u rispettivamente a 3 e a 33. Per evitare deformazioni della superficie durante la sua ridefinizione parametrica, si lascia invariato il numero dei poli lungo l'isocurva v . In questo modo i segmenti di geodetiche che si individuano nel cono, misurano in ogni punto della superficie, esattamente³² quanto la lunghezza degli spigoli delle tessere piane.

Anche nel caso del cilindro quadrico retto è possibile applicare una tassellazione regolare composta da quadrati o da triangoli equilateri. Se allineiamo (fig. IV.123) un lato delle tessere, con le generatrici rette del cilindro, otteniamo che nel caso della tassellazione con tessere quadrate il cilindro viene approssimato da un prisma; nel secondo caso invece, gli altri lati della tessera verranno a costituire le corde delle eliche (lossodromie a 60°) che avranno lunghezza costante. Possiamo anche "avvolgere" il cilindro con la tassellazione triangolare disposta in modo che un lato delle tessere sia allineato con la direttrice circolare della superficie (fig. IV.124), così che gli altri lati saranno corde delle eliche lossodromiche a 30° .

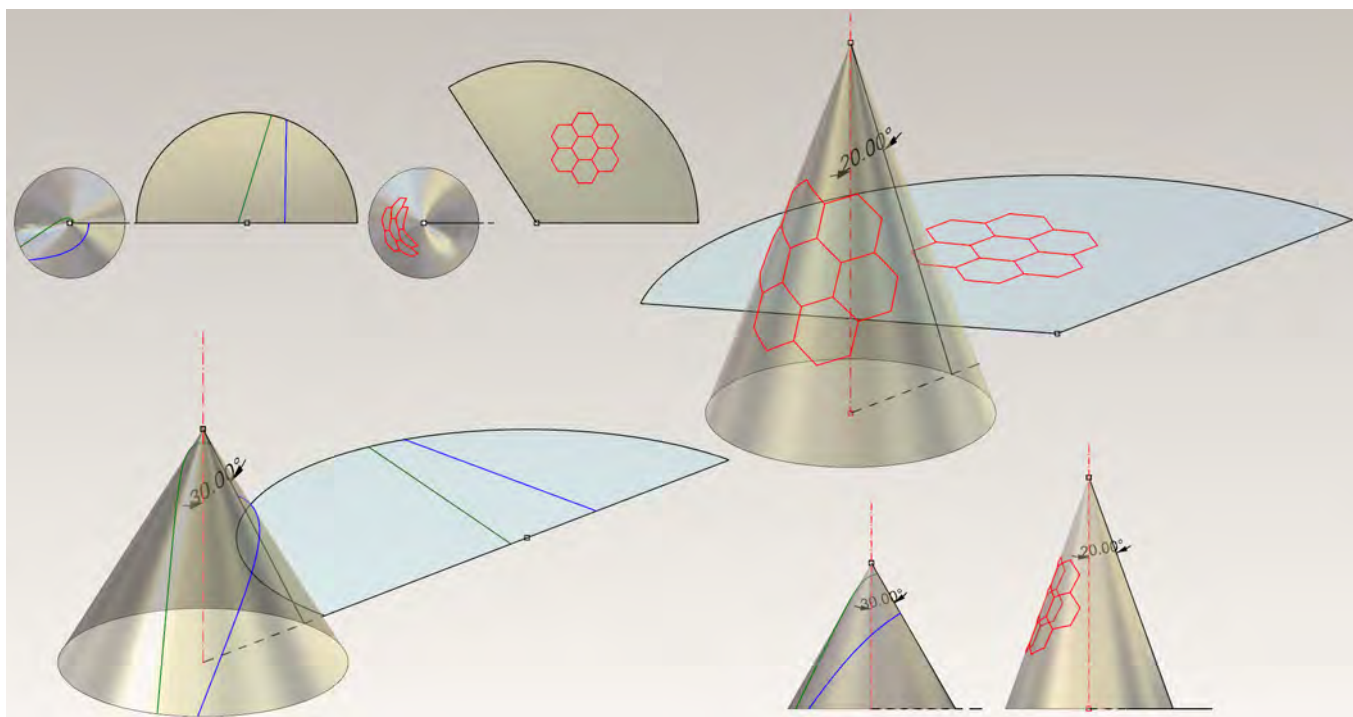
Chiamiamo con R il raggio del cilindro, d il lato del poligono



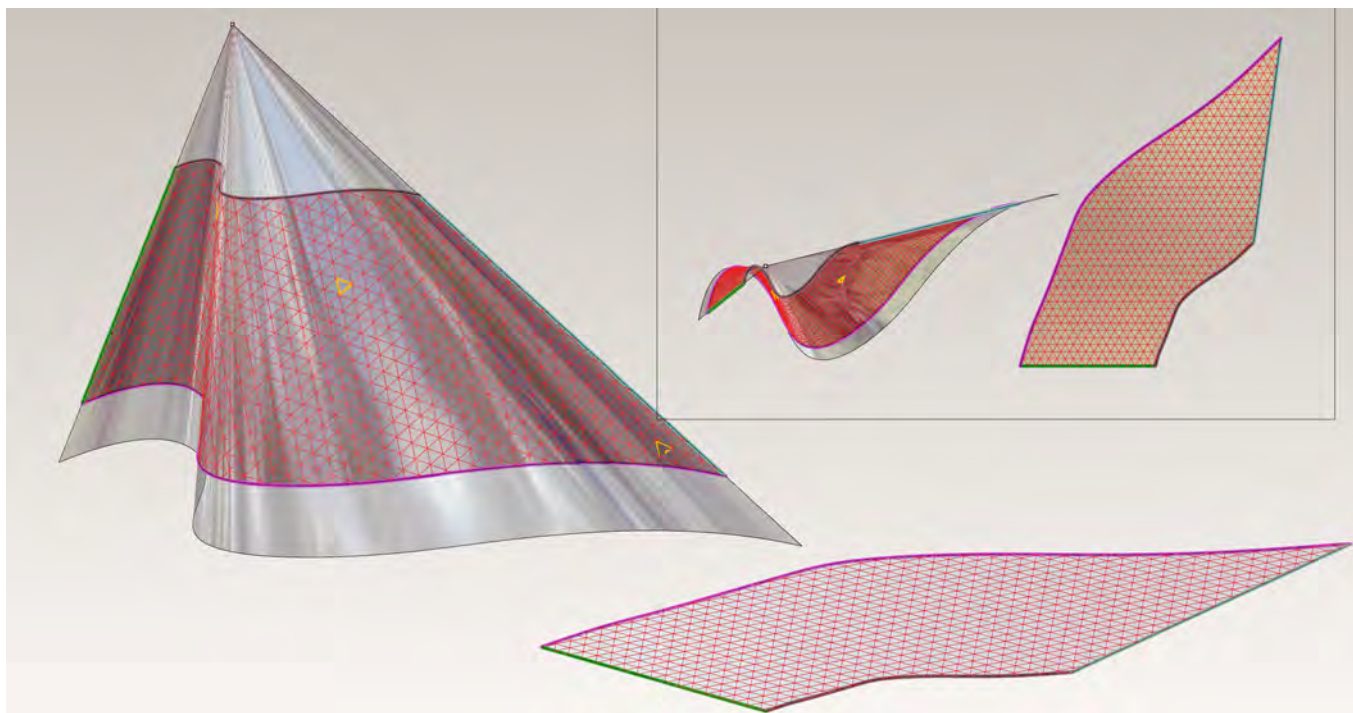
IV.119/ Se ammettiamo l'esistenza di concavità e convessità, è possibile generare un'infinità di superfici poliedriche costituite unicamente da facce triangolari equilateri.



IV.120/ Alain Lobel, brevetti di strutture reticolari composte da elementi triangolari equilateri.



IV.121/ Nello sviluppo piano delle superfici rigate sviluppabili, le geodetiche si trasformano in linee rette.



IV.122/ Tassellazione di un cono generico per mezzo di poligoni curvi costituiti da segmenti di geodetiche.

regolare inscritto in un cerchio direttore e con t la distanza tra le sezioni successive del cilindro (fig. IV.125). Notiamo che i poligoni regolari **AAA**... e **BBB**..., entrambi di lato d , sono

$$\frac{1}{2}A\alpha A = A\alpha B' = A'\beta B$$

Ricordando che
 $AA=BB=AB=d$
 si ha che
 $AB^2=Ab^2+Bb^2$
 ma essendo

$$Bb=B'b'=R - \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}$$

e

$$Ab^2=bb'^2+Ab'^2=t^2+d^2/4$$

avremo che

$$t^2 + \frac{d^2}{4} + \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}\right)^2 = d^2$$

ruotati uno rispetto all'altro di un angolo

da cui si ricava

$$t = \sqrt{-2R^2 + d^2 + R\sqrt{4R^2 - d^2}}$$

che risulta verificata se

$$d \leq R\sqrt{3}$$

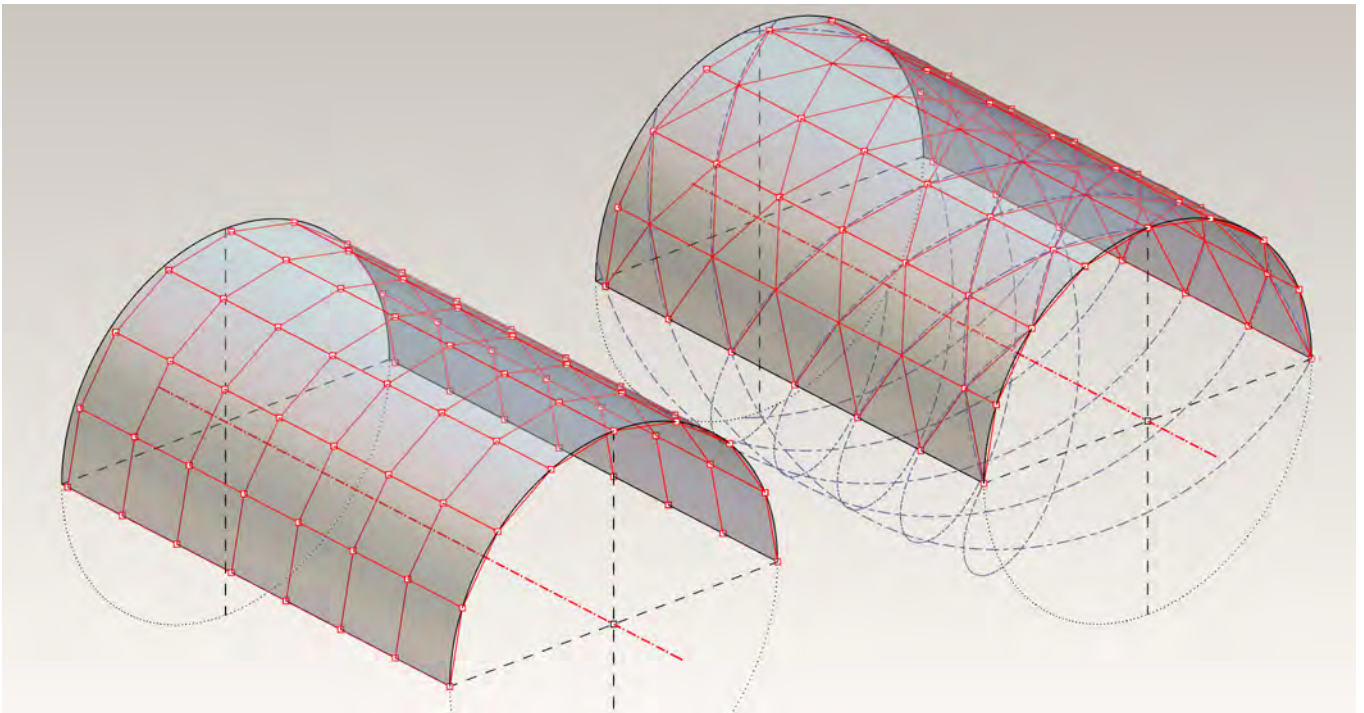
Quest'ultima disuguaglianza, è valida fino al valore che rappresenta il rapporto che lega il lato di un triangolo equilatero con il raggio del cerchio circoscritto; quindi possiamo dire che la costruzione è possibile per qualsiasi poligono regolare, a partire proprio dal triangolo equilatero (fig. IV.126). La costruzione porta ad approssimare il cilindro circolare retto con una successione di antiprismi uguali e con le basi contigue. Inoltre visto che la soluzione

$$d=R\sqrt{3}$$

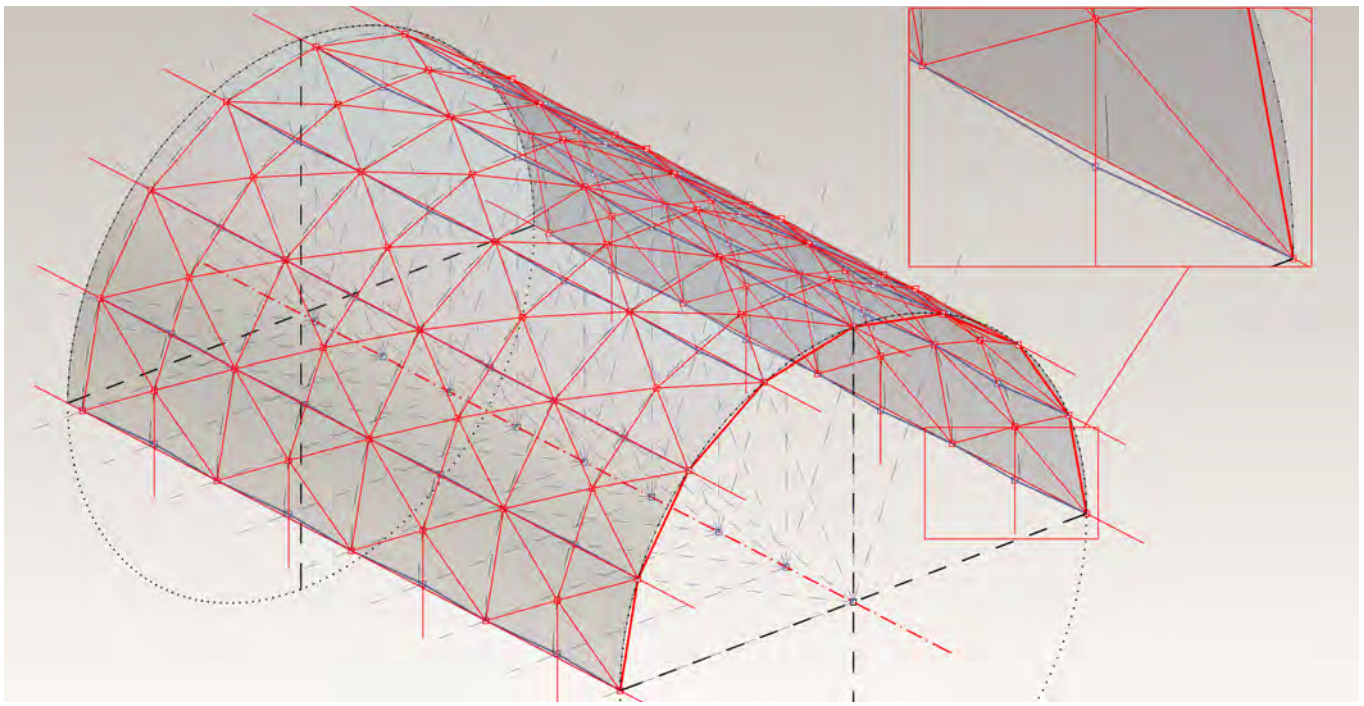
conduce a

$$t=R\sqrt{3}$$

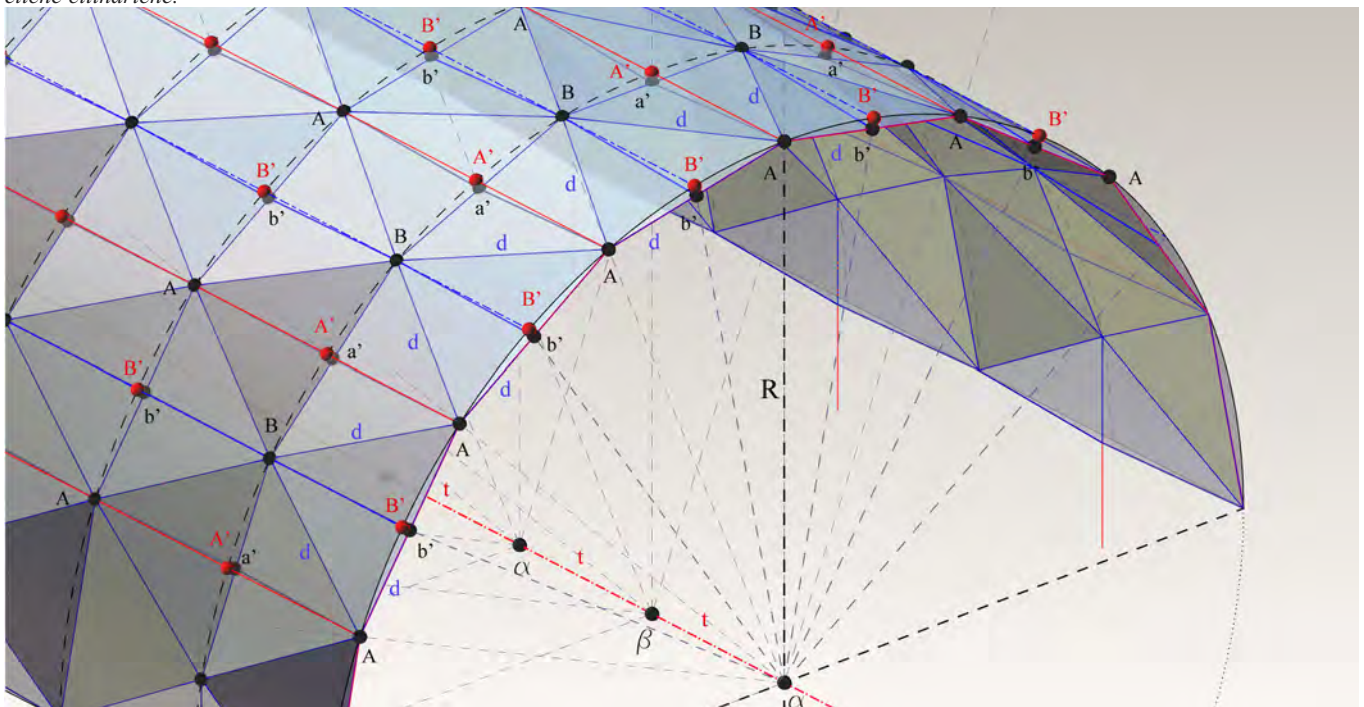
possiamo dire che la prima approssimazione del cilindro di raggio R , avviene attraverso la giustapposizione di ottaedri regolari.



IV.123/ Discretizzazione di un cilindro rotondo per mezzo di poligoni quadrati e triangolari equilateri.



IV.124/ Discretizzazione di un cilindro rotondo per mezzo di una superficie poliedrica triangolare equilatera, con spigoli allineati lungo le eliche cilindriche.



IV.125/ Relazioni metriche tra la superficie cilindrica e la superficie di approssimazione.

La discretizzazione della sfera: le cupole geodetiche

Abbiamo visto che i poliedri convessi platonici e archimedei, derivano dalle tassellazioni regolari e semiregolari del piano le quali possono essere interpretate come il loro sviluppo piano. Inoltre i 5 poliedri regolari e i 13 poliedri di Archimede, possono essere considerati come gli unici modi con cui è possibile ridurre la sfera secondo poligoni regolari con una medesima lunghezza degli spigoli. Comunque per finalità costruttive è importante notare che non tutte le 18 approssimazioni della sfera sono geometricamente e staticamente rigide. Una prima valutazione per constatare la rigidità geometrica di una struttura reticolare (del tutto analoga ad una superficie poliedrica in cui i nodi e le aste corrispondono ai vertici e gli spigoli del poliedro) è quella di verificare la seguente condizione:

$$E=3V-6$$

dove E rappresenta il numero degli spigoli (aste) e V il numero dei vertici (nodi). Tra le 18 equipartizioni sferiche solo il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro (quelle cioè con poligoni triangolari) soddisfano la precedente relazione. I primi studi che misero in relazione il comportamento statico con le equipartizioni spaziali che conducono alla tassellazione dello spazio, furono condotti a partire dai primi anni del '900 dall'architetto Buckminster Fuller (1895-1983) e contemporaneamente dal fisico William Bragg (1890-1971).

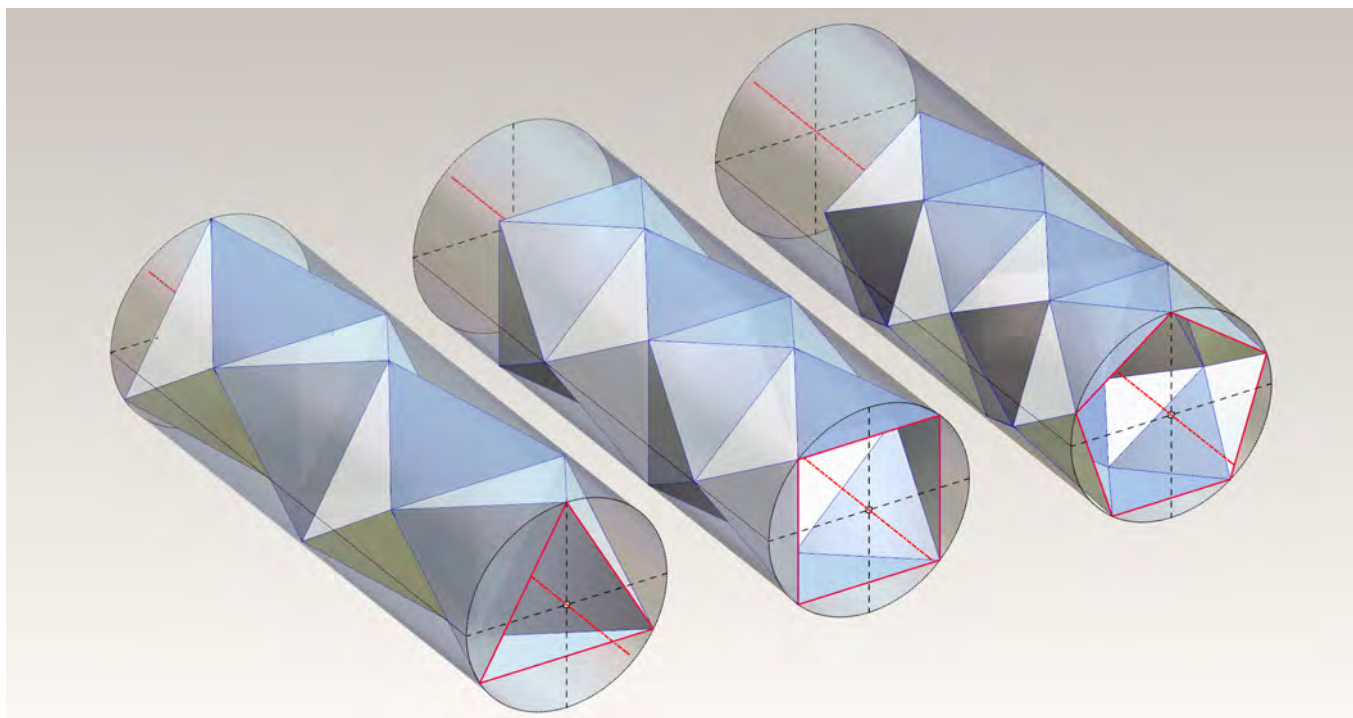
Per prima cosa essi dimostrarono che la tassellazione dello spazio per mezzo del cubo non è isotropa; ciò vuole dire che non è omogenea ed uguale in tutte le direzioni. Come abbiamo già avuto modo di osservare a proposito del ricoprimento dello spazio, le uniche combinazioni di poliedri che conducono all'isotropia sono quella composte da tetraedro ed ottaedro, da ottaedro e cubottaedro ed infine dall'ottaedro troncato (approssimazione del poliedro di Lord Kelvin). In particolare la tassellazione spaziale generata da ottaedro e cubottaedro, forma una griglia spaziale equidistante ed uniformemente distribuita in 12 direzioni. A questo si aggiunga la proprietà del cubottaedro (vedi il paragrafo precedente) di essere l'unico poliedro in cui lo spigolo misura quanto il raggio della sfera circoscritta (è infatti l'analogo dell'esagono regolare), e allora i vertici del cubottaedro vengono a costituire i centri di 12 sfere uguali e mutuamente tangenti, disposte nella configurazione più compatta possibile, che circondano una tredicesima sfera, di eguale raggio, posta al centro. Fuller chiamò questa

configurazione basata sul cubottaedro *dymaxion* (DYNAMIC MAXimum tensiON) (fig. IV.127).

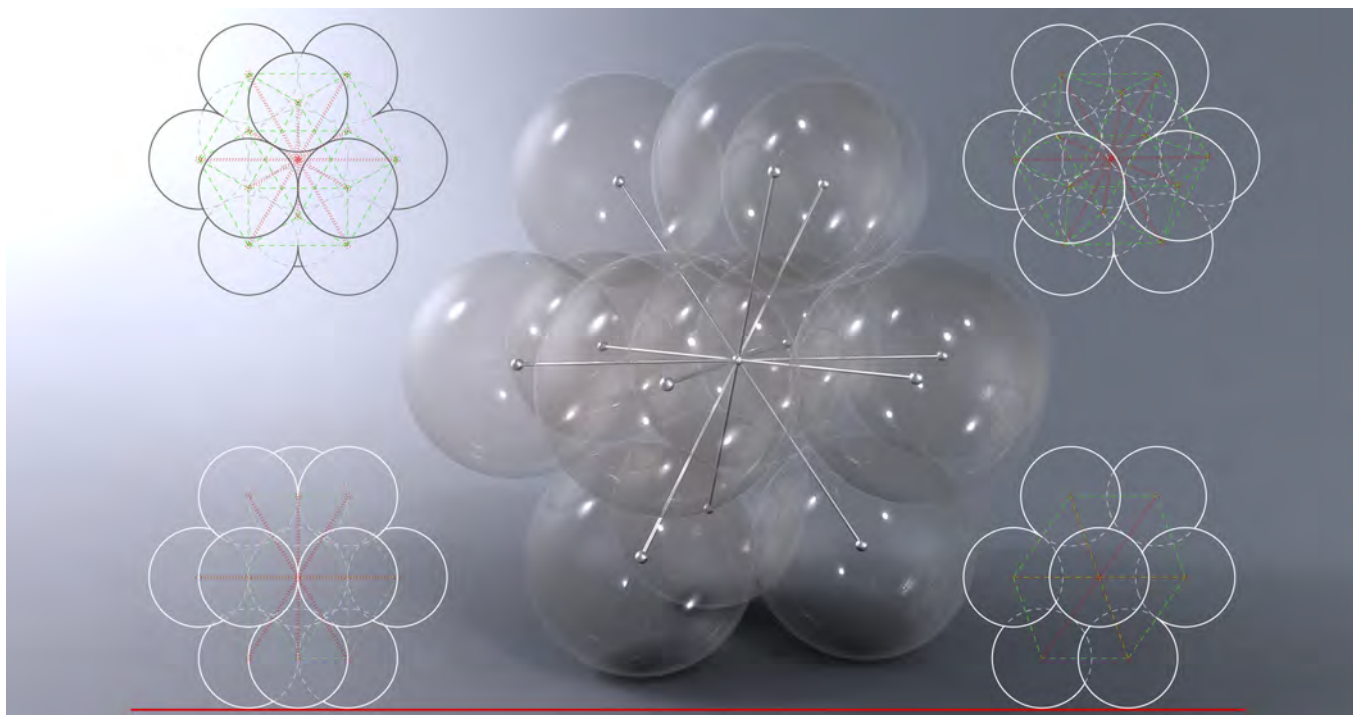
Una considerazione interessante sul contributo di Fuller nella ricerca architettonica, viene espressa da Attilio Marcolli³³ nel suo libro *Teoria del campo 2*. “È nostra convinzione che la grande importanza del nome di Fuller nell'ambito dell'architettura moderna non è tanto nelle cupole geodetiche, nelle sue utopie urbanistiche, e nei contenuti delle sue teorie, quanto invece nell'osservazione scientifica dei processi geometrici, mai vissuti come fatti tecnologici ma come fatti dinamici e psicofisici, nell'ambito dei quali la tecnologia è vissuta solo come una conseguenza operativa, una causa dipendente e non una causa efficiens, con finalità pratiche ma senza attribuirle particolari significati tecnologici”. Marcolli si riferisce alla *geometria energetica e sinergica* elaborata dallo stesso Fuller che metteva in relazione un elenco ordinato di schemi con gli adattamenti e le trasformazioni governati dalle forze, che tendono (tanto nel microcosmo quanto nel macrocosmo) al raggiungimento dell'equilibrio. In quest'ottica il *dymaxion* è, come abbiamo detto, l'impacchettamento (*closepacking*) di sfere nel modo più denso possibile. Fuller³⁴ mette in evidenza l'aspetto dinamico del *dymaxion* andando ad osservare l'interessante sequenza numerica che lega gli strati successivi al primo nucleo: dal primo strato di 12 sfere, possiamo formarne un secondo che sarà composto da 42 sfere (fig. IV.128) e che nuovamente ricrea il cubottaedro; il terzo strato si ottiene con 92 sfere il quarto con 162, il quinto con 252, il sesto con 362 e così via. Se indichiamo con S il numero delle sfere e con s il numero dello strato delle sfere, la relazione che li lega è:

$$S=10 \cdot s^2 + 2$$

Parallelamente a questi studi di Fuller, Bragg scoprì che questa stessa disposizione spaziale si ritrova in alcune strutture atomiche. A parte alcune considerazioni di carattere matematico³⁵ è importante sottolineare l'importanza del risultato a cui pervenne la fisica moderna: quando le sfere vengono accostate nel modo più denso possibile attorno ad un nucleo centrale, compaiono delle regolarità strutturali (di disposizione e distribuzione) che definiscono la geometria quantica vettoriale, che sembra essere la “geometria fondamentale dell'universo”. Sempre Fuller osserva che la prima geometria che si sviluppa storicamente è proprio quella del poliedro a 14 facce in cui le spinte radiali dirette verso l'esterno (il nodo già analizzato che a partire dal centro si orienta verso



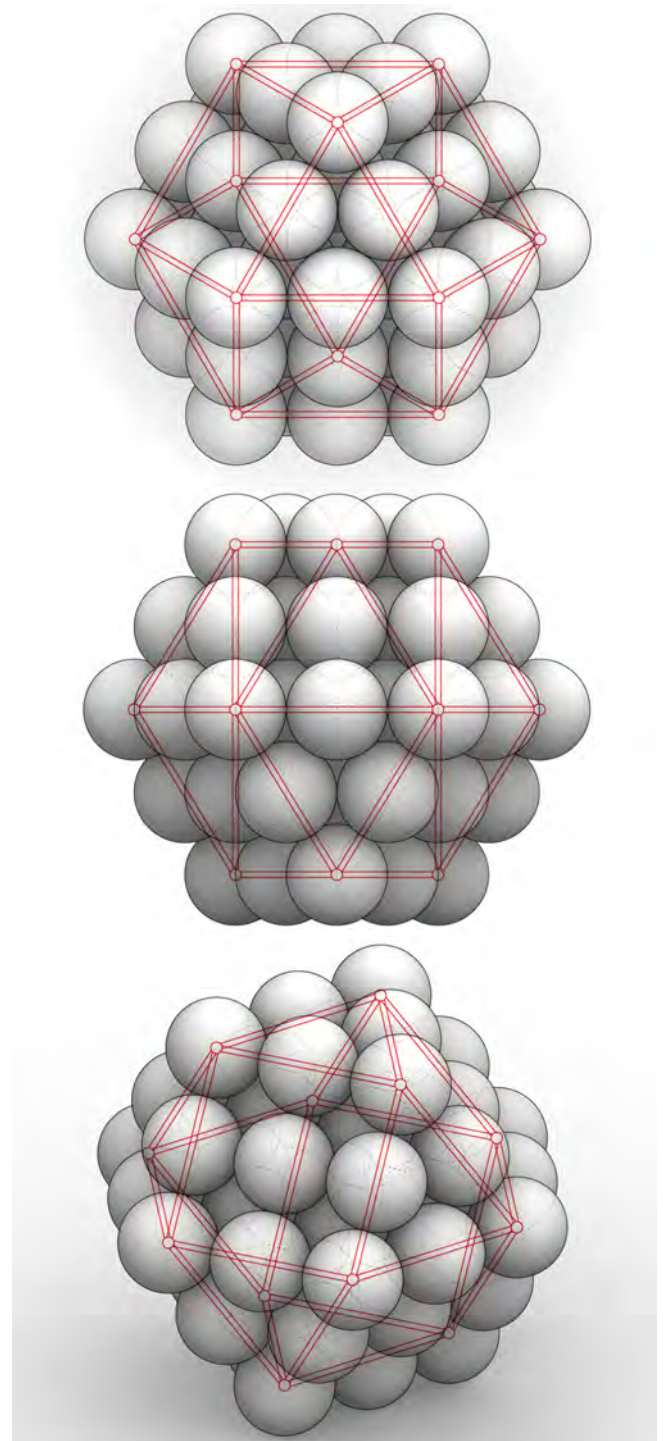
IV.126/ Approssimazione del cilindro retto per mezzo di una successione di antiprismi uguali e con basi contigue.



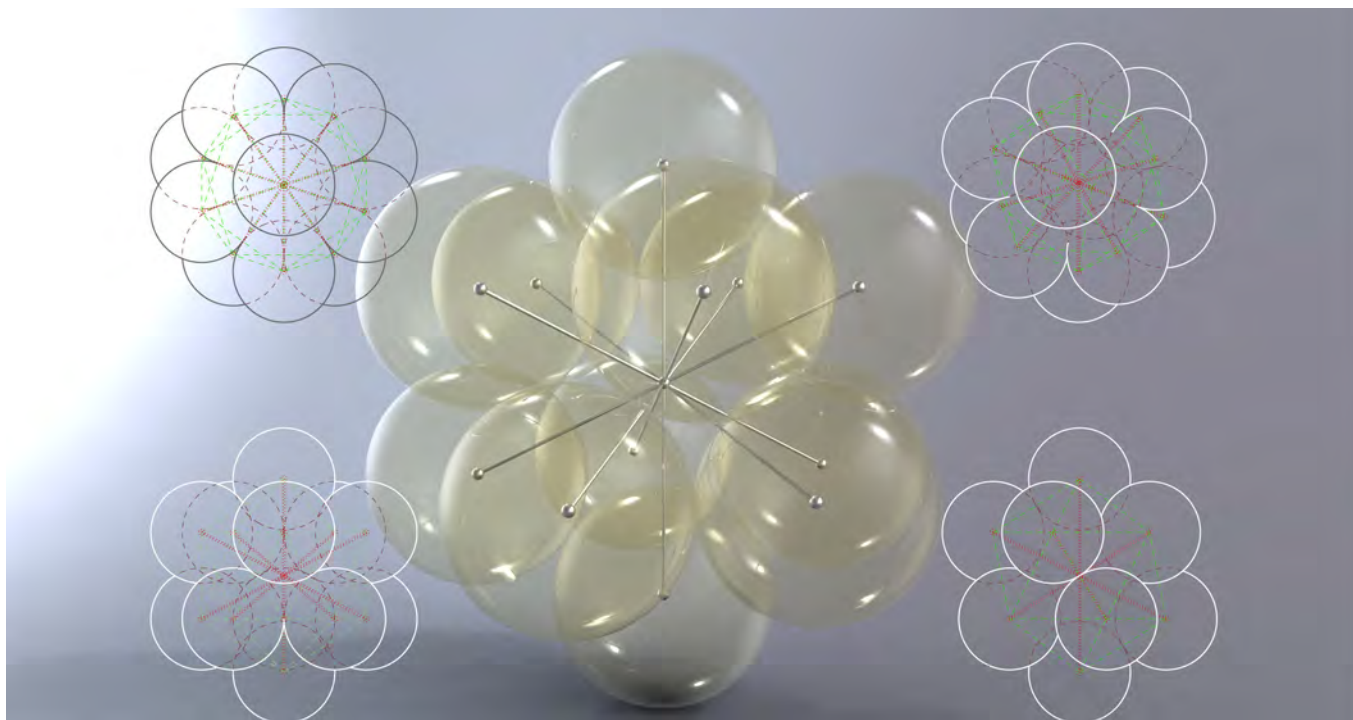
IV.127/ Configurazione compatta di tredici sfere uguali, chiamata da Fuller, dymaxion.

12 direzioni diverse) sono perfettamente equilibrate dalle tensioni di coesione (definite dagli spigoli del cubottaedro). Ecco perché ciò che conosciamo da un punto di vista puramente geometrico, come cubottaedro, è stato rinominato da Fuller da un punto di vista aggregativo *dymaxion*, e da un punto di vista dinamico, *vector equilibrium*.

Se nella configurazione del *dymaxion* viene sottratta la sfera centrale, le 12 sfere che la circondavano si dispongono con i centri nei vertici di un icosaedro (fig. IV.129). Nella ricerca della migliore disposizione di sfere di uguale raggio e mutualmente tangenti attorno ad un vuoto centrale, Fuller si rese conto che esse coincidevano prima con l'icosaedro, poi con l'ottaedro ed infine con il tetraedro. Questi sono i poliedri regolari costituiti da sole facce triangolari equilateri, che è il poligono piano staticamente stabile. Nella sua ricerca sulla geometria energetica-sinergetica, Fuller conclude che così come in una struttura geometrica i carichi vengono distribuiti nel percorso più breve possibile, allo stesso modo i campi energetici triangolano gli spazi geometrici. Dunque le strutture spaziali triangolate, costituiscono le griglie più compatte ed economiche dal punto di vista energetico. Le facce dei tre poliedri regolari possono essere suddivise in triangoli più piccoli i cui vertici vengono proiettati sulla sfera circoscritta dal centro della sfera stessa, dando luogo a poliedri *quasiregolari*. Le strutture così definite furono chiamate da Fuller *geodetiche* e sono caratterizzate da triangoli tutti molto simili tra loro che, essendo rigidi, garantiscono la robustezza locale, mentre le geodetiche formate dai loro lati distribuiscono gli sforzi locali sull'intera struttura. Una delle caratteristiche più interessanti delle cupole geodetiche (cioè emisfere triangolate) è il fatto che tali strutture sono tanto più resistenti e stabili quanti più sono i triangoli che la compongono. In linea con il principio di massima efficienza per minor sforzo (inteso sia dal punto di vista energetico che materiale), è da sottolineare che i principi di generazione delle strutture geodetiche si possono ritrovare nelle capsule proteiche³⁶ che contengono l'acido nucleico dei virus. Queste possono crescere all'infinito aumentando le triangolazioni della forma iniziale di tipo icosaedrico e mantenendo sempre la simmetria dell'icosaedro. Del resto anche le strutture dei poliedri regolari sono chiaramente visibili negli scheletri dei radiolari³⁷, protozoi che vivono in mare la cui cellula è protetta da un guscio rigido e fessurato simile ad una rete. I disegni con cui il darwiniano Ernst Heinrich Haeckel



IV.128/ Secondo livello del *dymaxion* composto da 42 sfere uguali e ancora basato sulla simmetria del cubottaedro.



IV.129/ Se nel dymaxion viene sottratta la sfera centrale, la disposizione delle dodici coincide con la simmetria dell'icosaedro.

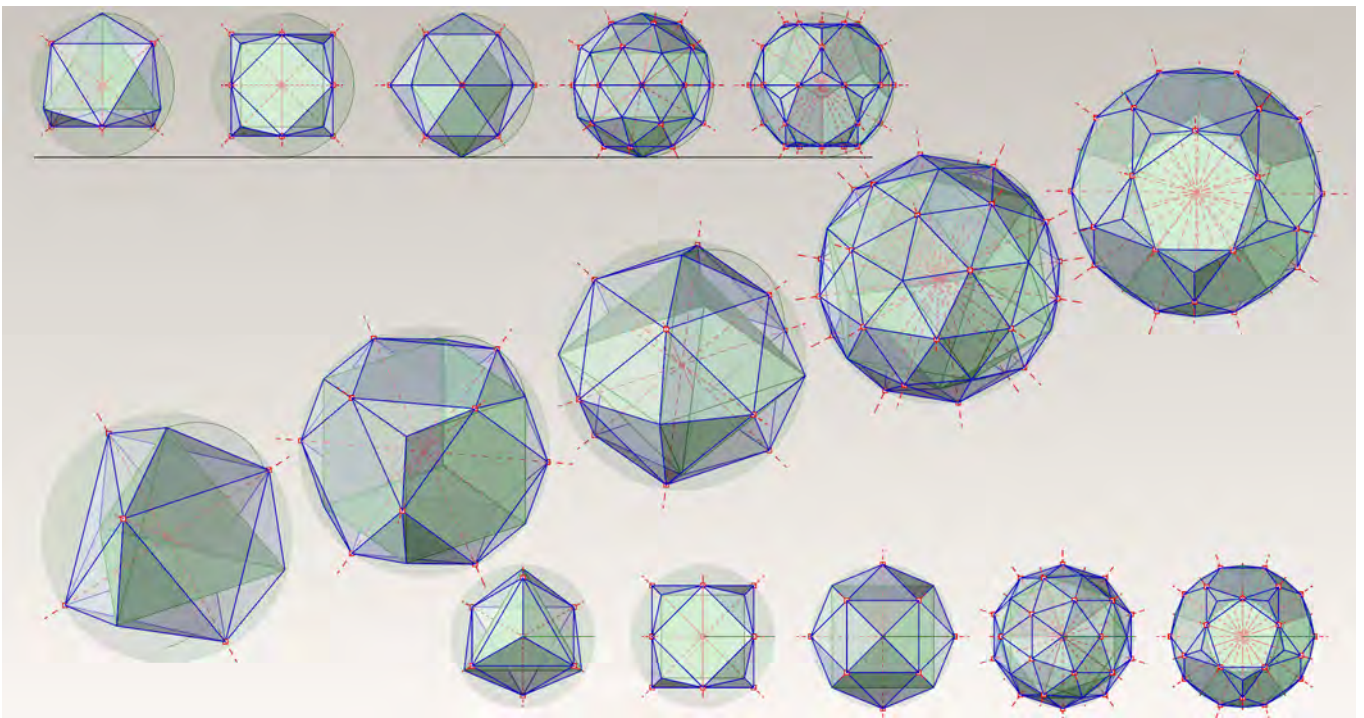
(1834-1919) analizzava le osservazioni fatte al microscopio, vanno riletti al di là della semplice analogia formale. Innanzi tutto questa analogia prescinde dal fattore dimensione: il microcosmo e il macrocosmo sono accomunati dalla stessa esigenza di rispondere a dei requisiti funzionali. In particolare sia i radiolari che le strutture geodetiche sono superfici che tendono a massimizzare il volume in esse compreso, tendono cioè alla sfera³⁸. Inoltre sono strutture autoportanti la cui forma è conseguenza delle azioni delle tensioni superficiali. Le strutture geodetiche sono molto resistenti ai carichi di punta, ma come tutte le strutture reticolari soffrono i carichi eccentrici. Il rimedio è dunque quello di aumentare il numero delle aste (cioè la frequenza di suddivisione) per poterne così diminuire la lunghezza e la relativa sezione. Il problema della progettazione di una cupola geodetica è dunque quello di trovare il giusto equilibrio tra numero di suddivisioni e ricorrenza di aste della stessa lunghezza, ai fini di una economia costruttiva.

L'operazione di generazione delle geodetiche è possibile a partire da tutti i solidi regolari e semiregolari in quanto per essi esiste sempre una sfera che li circonda. Maggiore sarà la frequenza di suddivisione (con la seguente riduzione delle

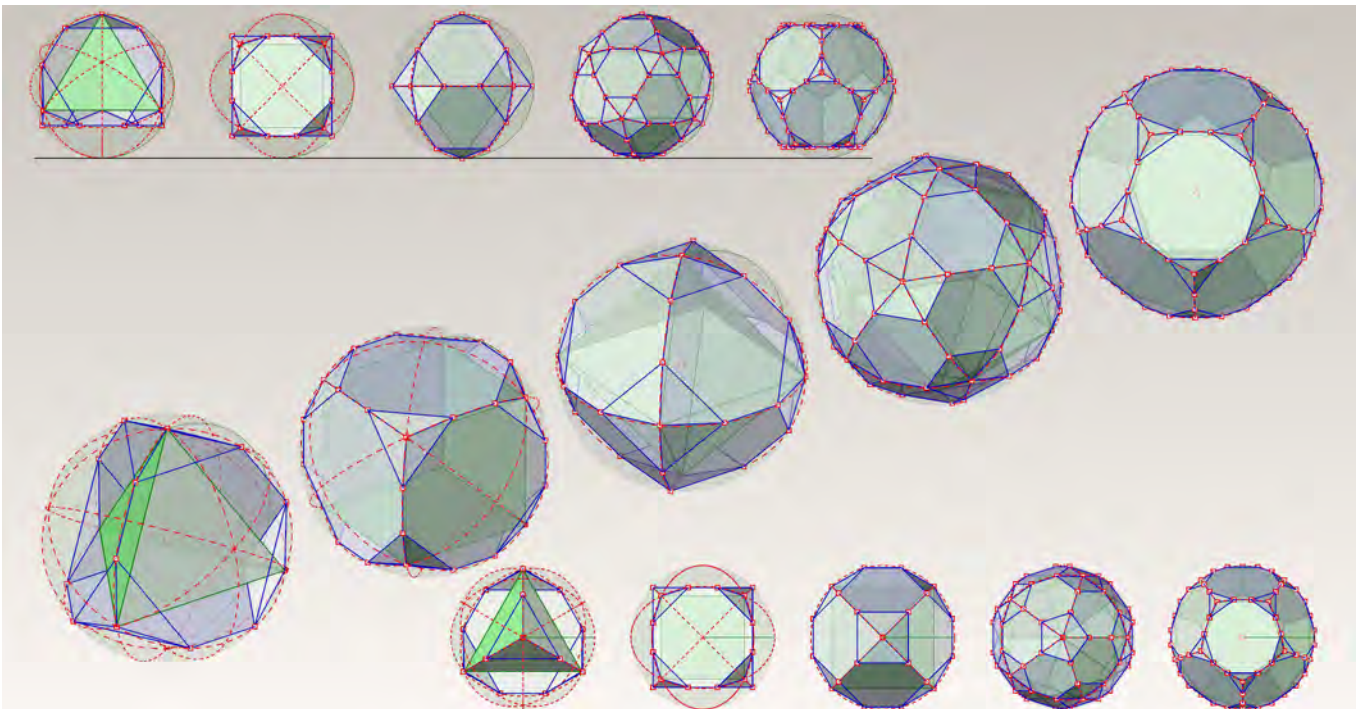
facce del poliedro) e migliore sarà l'approssimazione alla sfera. In generale però, i nuovi poliedri quasiregolari generati non avranno più i vertici allineati sulle ortodromie (cerchi massimi della sfera), quindi non possono essere considerati propriamente geodetici. Comunque l'analisi del diagramma degli sforzi non evidenzia differenze sostanziali nel loro comportamento.

Le modalità con cui è possibile trasformare i poliedri regolari e semiregolari per renderli approssimabili alla superficie sferica sono quattro. Ciascuna di esse genera particolari tipologie di poliedri quasiregolari.

La prima modalità è chiamata *doubling* (fig. IV.130), e consiste nella proiezione del punto medio degli spigoli del poliedro di origine, dal centro della sfera che lo circonda sulla sfera stessa. Questa procedura si indica con il simbolo del poliedro di origine seguito da 2^n dove n indica l'ordine dell'operazione. L'operazione *doubling* applicata una volta ai solidi platonici genera i solidi quasiregolari T_{21} , C_{21} , O_{21} , I_{21} , D_{21} . Indicando con V, E ed F rispettivamente i vertici, gli spigoli e le facce del solido, risultano verificate le seguenti relazioni:



IV.130/ Il doubling consiste nella proiezione dal centro della sfera, del punto medio degli spigoli del poliedro di origine.



IV.131/ La divisione consiste nella divisione in n parti del cerchio massimo della sfera circoscritta, sotteso allo spigolo del poliedro di origine.

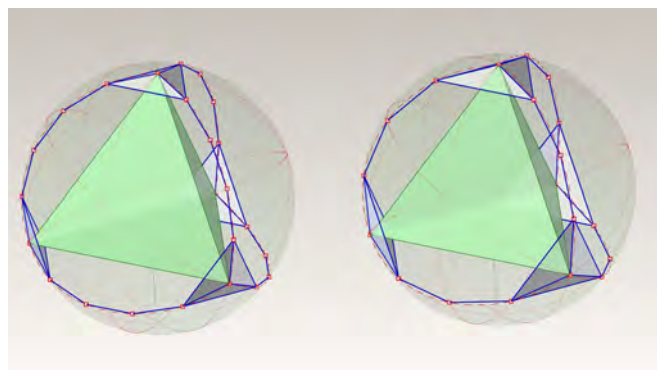
$$V_2 1 = V + E$$

$$E_2 1 = 2E + kV$$

$$F_2 1 = F + kV$$

dove k rappresenta il numero delle facce che si incontrano nei vertici del poliedro regolare di origine. In generale, a prescindere dal tipo di poliedro di origine e a prescindere dall'ordine dell'operazione, il poliedro generato avrà lo stesso numero di facce regolari di quello sorgente. Inoltre, i vertici invarianti (quelli cioè che nel solido di origine appartengono alla sfera circoscritta) continuano ad avere lo stesso numero spigoli del solido iniziale; in quelli generati dal doubling invece, si incontreranno sei nuovi spigoli. Contemporaneamente a questi nuovi spigoli nel poliedro quasiregolare vengono introdotte nuove facce triangolari scalene oppure isosceli. Sulla base di queste considerazioni, si giustifica il fatto che soltanto il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro generano dei poliedri a facce triangolari in cui quelle regolari, cioè equilatero, sono quante sono le facce del poliedro di origine. Altra caratteristica fondamentale è che le variazioni di lunghezza tra gli spigoli sono minime rispetto a tutti gli altri solidi. Infatti, gli altri solidi platonici e (dove possibile³⁹) tutti i semiregolari, generano poliedri in cui le facce avranno lo stesso numero di lati del poliedro iniziale, creando eccessive varietà di lunghezza degli spigoli anche se viene applicato un elevato ordine di doubling. In conclusione possiamo dire che già dalla prima operazione applicata al tetraedro, all'ottaedro e all'icosaedro il doubling genera un'ottima approssimazione della sfera sia dal punto di vista geometrico, strutturale che estetico.

La seconda modalità è chiamata *division* (fig. IV.131) e consiste nella divisione in n parti uguali del cerchio massimo della



IV.132/ Se la equipartizione del cerchio massimo è fatta con valori $n > 3$ allora la divisione dà origine a poligoni sghembi.

sfera circoscritta, sotteso allo spigolo del poliedro di origine. Risulta evidente che se $n=2$ l'operazione coincide con il doubling. La divisione per $n=3$ invece, genera una nuova serie di poliedri quasiregolari che mantengono (sempre in riferimento al poliedro di origine) lo stesso numero di facce e di spigoli che si incontrano nei vertici invarianti; ciò è valido per i poliedri regolari e semiregolari. Le nuove facce generate con il solido invece, possiedono un numero di lati doppio della faccia iniziale a cui rimangono parallele, ma a differenza di queste, non sono regolari. Nel caso di $n=3$ per i poliedri platonici valgono le seguenti relazioni:

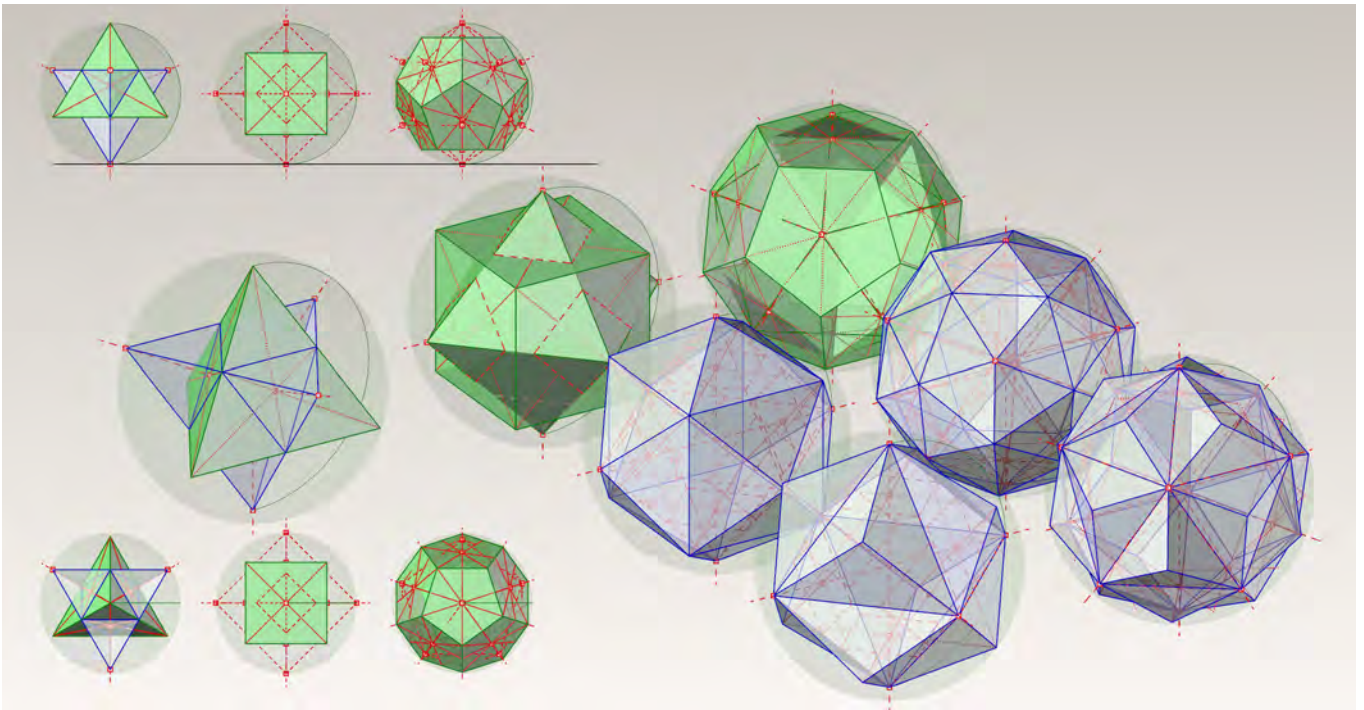
$$V_3 1 = V + 2E$$

$$E_3 1 = 3E + kV$$

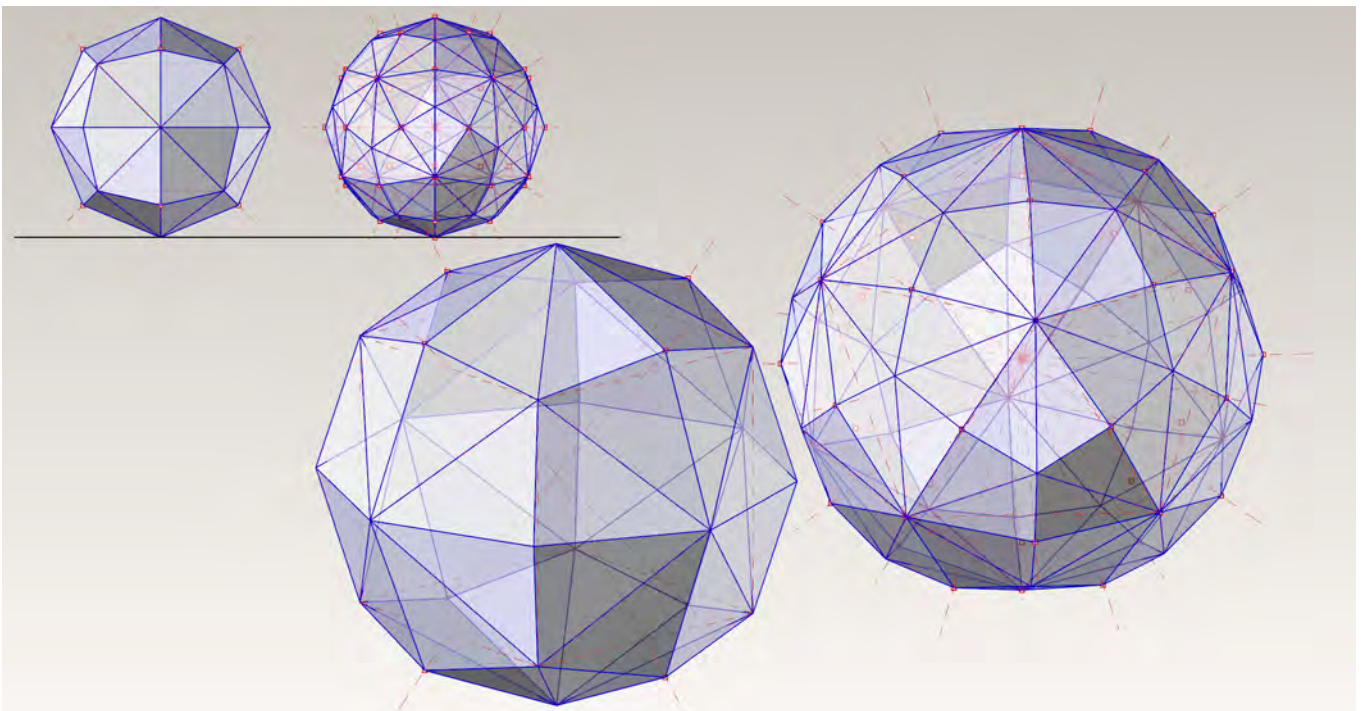
$$F_3 1 = F + kV$$

con k che, come nel caso del doubling, può assumere i valori 3, 4 o 5. Se la equipartizione del cerchio massimo è fatta con valori $n > 3$ allora la divisione dà origine a poligoni sghembi (fig. IV.132). Per questa ragione tale metodo non può generare da solo, griglie sferiche triangolate.

Il terzo metodo di approssimazione della sfera prende il nome di *twinning* (gemellaggio) e consiste nel proiettare sulla sfera circoscritta, il centro delle facce del poliedro di origine dal centro della sfera stessa (fig. IV.133). L'operazione dà luogo a due poliedri reciproci, che si compenetrano in quanto inscritti nella medesima sfera. I poliedri quasiregolari che si ricavano sono sempre due per ogni operazione di twinning effettuata. Se applicato al tetraedro, il twinning genera un ulteriore tetraedro con spigoli mutuamente perpendicolari a quelli del primo nei rispettivi punti medi. Si viene a creare un ottaedro stellato i cui vertici sono comuni a quelli di un cubo. Nel caso del tetraedro il twinning non genera alcun poliedro quasi regolare. I poliedri reciproci cubo e ottaedro (ottenuti applicando il twinning ad uno dei due poliedri) invece, individuano due poliedri quasiregolari: il primo è un cubo piramidato convesso che nasce mantenendo gli spigoli del cubo; il secondo è un ottaedro concavo piramidato che nasce mantenendo gli spigoli dell'ottaedro. Applicandolo al dodecaedro oppure all'icosaedro il twinning genera ancora una volta due poliedri quasiregolari: il primo è un dodecaedro convesso piramidato (con piccole variazioni di lunghezza nelle due tipologie di spigoli) che si ottiene mantenendo gli spigoli del dodecaedro; il secondo è un icosaedro concavo piramidato (in cui le variazioni di lunghezza tra gli spigoli sono più evidenti) che si ottiene



IV.133/ Il twinning consiste nella proiezione del centro delle facce del poliedro, sulla sfera circoscritta.



IV.134/ Se viene applicato il doubling ai solidi quasiregolari ottenuti dal twinning, si genera una nuova serie di poliedri quasiregolari.

mantenendo gli spigoli dell'icosaedro. Ai solidi quasiregolari ottenuti da questo metodo di approssimazione, è possibile applicare il doubling ottenendo così una nuova serie di poliedri quasiregolari (fig. IV.134). Ad esempio nel caso della coppia cubo-ottaedro, il doubling genera un poliedro (che si ritrova in alcune strutture cristalline) composto da 48 facce triangolari scalene tutte uguali tra loro. In questo caso il doubling è stato applicato agli spigoli dei due solidi cubo e ottaedro. Il poliedro che si genera dalla coppia dodecaedro-icosaedro, i cui spigoli sono stati sottoposti all'operazione di doubling, genera un poliedro quasiregolare composto da 120 facce triangolari scalene tutte eguali tra loro. In merito all'operazione di twinning si può constatare che la famiglia di poliedri che viene generata è caratterizzata da un folto numero di spigoli accompagnati da una variazione troppo elevata della loro lunghezza. Per tali ragioni, anche se da un punto di vista puramente geometrico rimane una valida approssimazione della sfera per mezzo di superfici poliedriche, non trova un'efficace applicazione nei sistemi costruttivi.

L'ultimo metodo di costruzione consiste nella *pyramidation* (cioè nella costruzione di piramidi) delle facce non triangolari del poliedro di origine, i cui vertici giacciono sulla sfera circoscritta al solido stesso. È evidente che la *pyramidation* nel caso del cubo e del dodecaedro genera i due solidi quasiregolari che abbiamo costruito precedentemente per mezzo del twinning. Questa procedura è utilizzata molto più spesso nei solidi semiregolari generando dei poliedri quasiregolari composti da facce triangolari equilatera (quelle del poliedro di origine) e facce triangolari isosceli.

Abbiamo visto che tra i quattro metodi di approssimazione della sfera, solo il doubling e la *pyramidation* possono essere applicati in successione. Le strutture geodetiche, come abbiamo già detto, hanno però una morfologia condizionata fortemente da una serie di requisiti di carattere economico e strutturale. Va notato quindi che soltanto il doubling applicato all'icosaedro e la *pyramidation* applicata al dodecaedro, generano risultati interessanti. Per quanto riguarda invece i poliedri semiregolari, solo la *pyramidation* applicata ai solidi **A III**, **A V** e **A XIII** (quelli cioè composti da sole facce triangolari, pentagonali ed esagonali) genera poliedri quasiregolari rispondenti a tali requisiti. Infatti, negli altri casi i poliedri generati presentano tutti una notevole variazione di lunghezza negli spigoli che ne compromette l'utilità costruttiva. Abbiamo così evi-

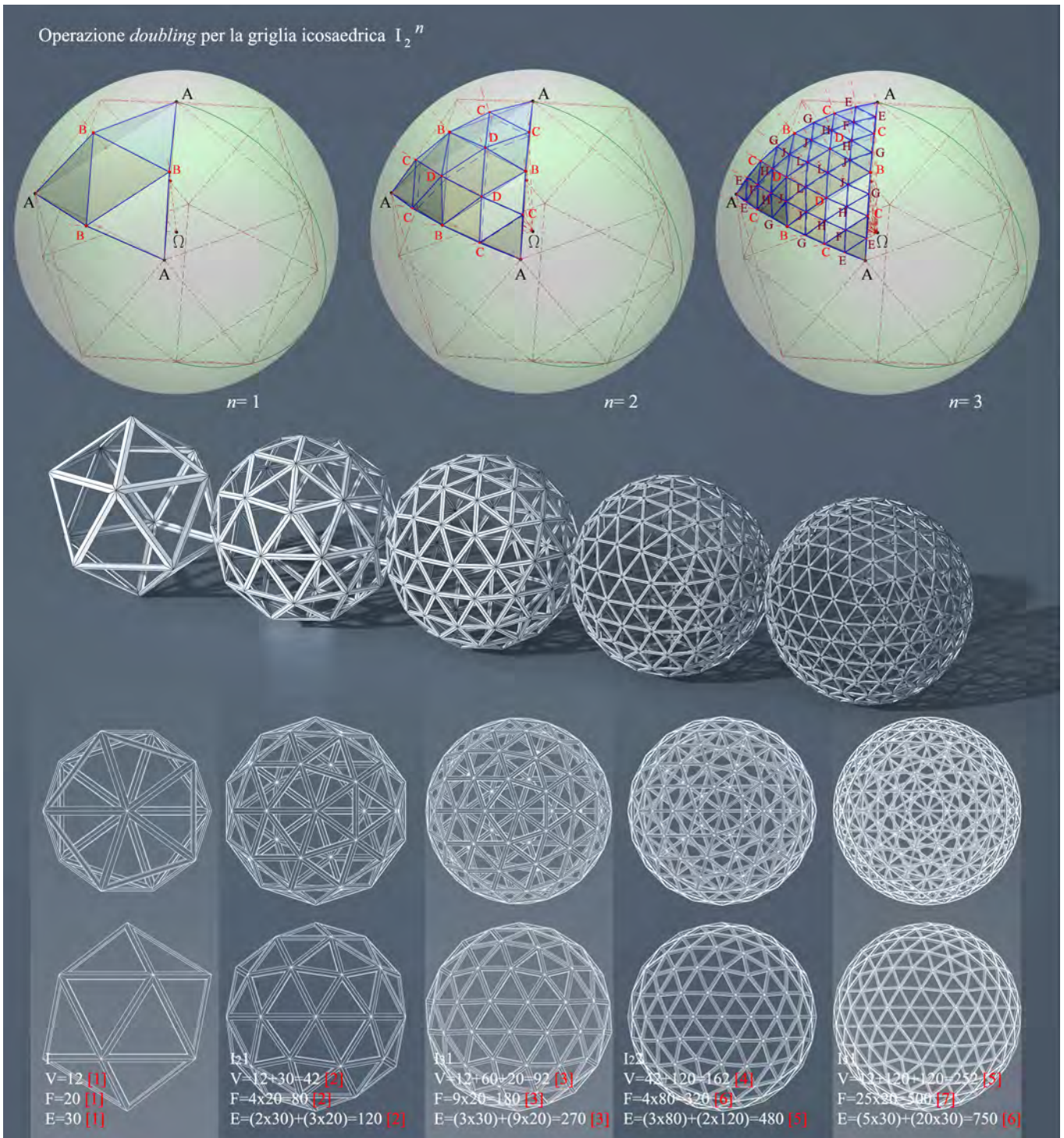
denziato cinque famiglie di poliedri quasiregolari che possono trovare un'applicazione nelle strutture di coperture reticolari e che prendono il nome di *maglie triangolari sferiche*.

Prima di procedere con l'analisi geometrica di queste famiglie, è opportuno richiamare un'osservazione dei due autori Gheorghiu e Dragomir sui problemi di rappresentazione di queste strutture "... se da un lato le costruzioni grafiche di queste geometrie non possono avere il giusto livello di accuratezza necessario alla loro progettazione e costruzione, rimangono però una valida approssimazione, sufficientemente vera da permettere un'analisi comparativa dei meriti e demeriti delle varie tipologie reticolari con i relativi ordini di suddivisione. Naturalmente le lunghezze degli spigoli possono essere accuratamente determinate con qualsiasi livello di approssimazione, così come le ampiezze angolari; ma questo è consentito per mezzo del calcolo analitico attraverso successive approssimazioni, oppure seguendo le operazioni e le proprietà geometriche oppure per mezzo delle formule messe a disposizione dalla trigonometria". Nell'arco di soli venti anni dalla pubblicazione del testo di Dragomir e Gheorghiu, la rappresentazione matematica è divenuta il mezzo per superare questi limiti offrendo al contempo un accurato strumento di analisi e di visualizzazione. Nella trattazione che segue non verranno quindi affrontati i problemi relativi ai metodi di rappresentazione, che, come già abbiamo visto parlando della rappresentazione dei poliedri in assonometria obliqua, si basano sulle relazioni di affinità che seguono il teorema di Pohlke-Schwartz. Focalizzeremo la nostra attenzione sulla genesi geometrica di queste cinque famiglie di cupole geodetiche e sull'analisi delle caratteristiche metriche e formali che esse implicano. L'obiettivo di questa indagine non va ritrovato nella possibilità di offrire uno strumento valido di controllo e di progettazione di queste strutture (come doveva essere quasi sicuramente l'intento dei due autori romeni) che nella storia dell'architettura hanno disatteso gli ideali utopistici che si proponevano. L'analisi va ricondotta nel più ampio quadro di ricerca dei metodi di tassellazione (ovvero discretizzazione) della superficie sferica e nelle nuove possibilità di rappresentazione.

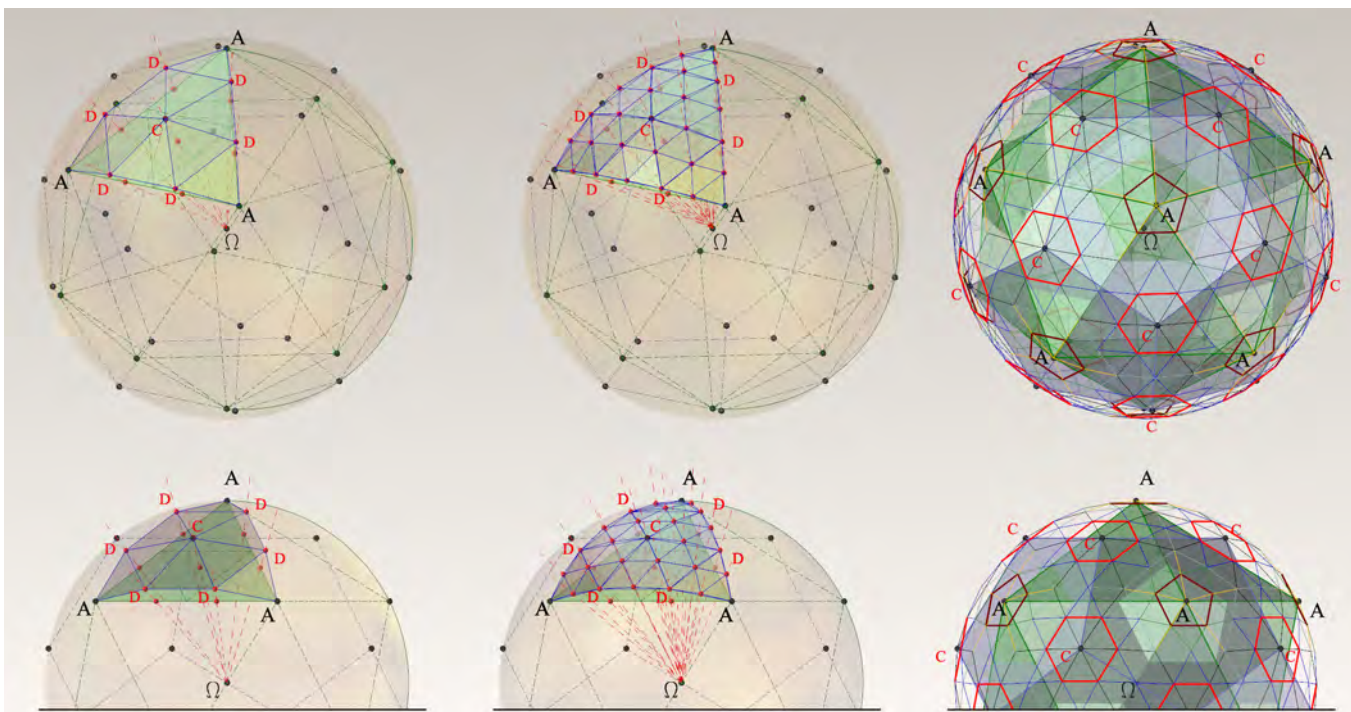
Prima tipologia: le griglie icosaedriche

La prima operazione di doubling condotta a partire da un icosaedro regolare, consiste nella proiezione dei punti medi degli spigoli del poliedro, dal centro della sfera circoscritta sulla

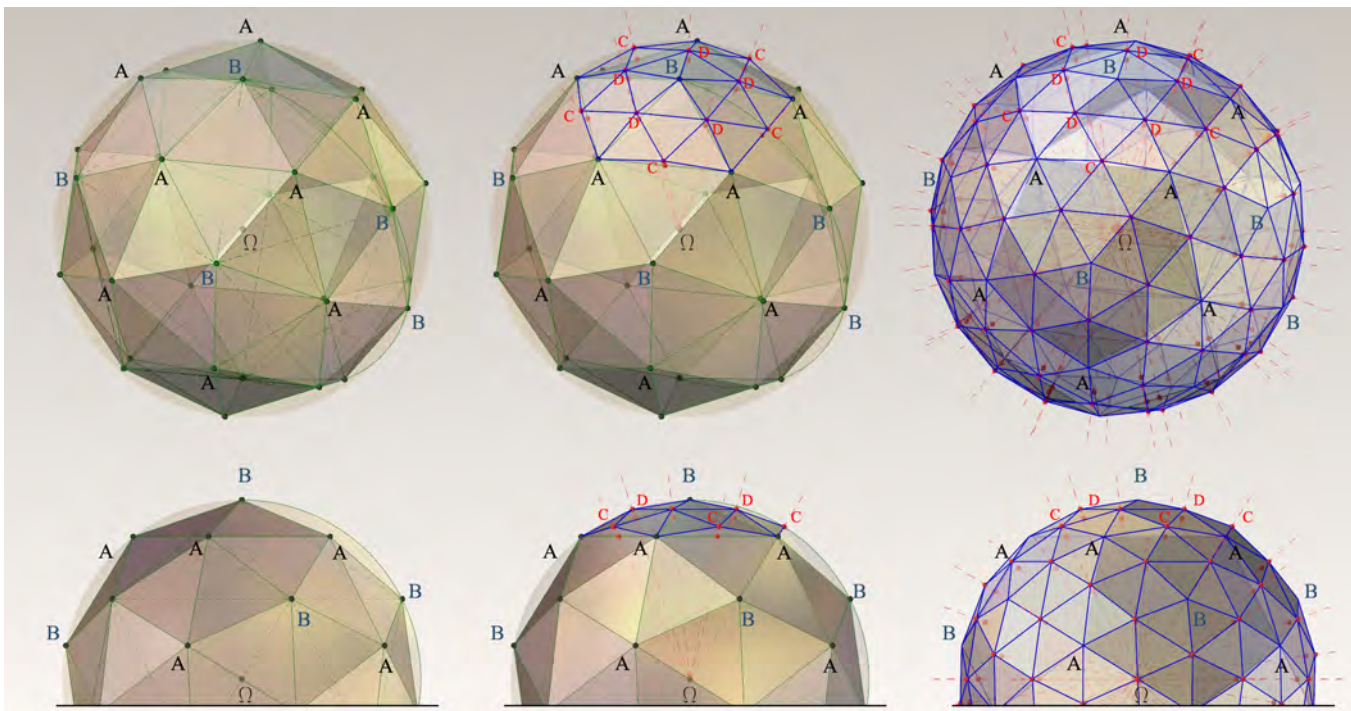
Operazione *doubling* per la griglia icosaedrica I_2^n



IV.135/ Griglie icosaedriche: operazioni di doubling applicate all'icosaedro.



IV.136/ Operazioni di doubling con valori dispari di divisione degli spigoli.



IV.138/ Griglie dodecaedriche: operazione di twinning applicata al dodecaedro o all'icosaedro.

sfera stessa (fig. IV.135). Il poliedro quasiregolare che si viene a generare, indicato con il simbolo I_21 , è composto da due tipi di facce (i triangoli equilateri **BBB**, ed i triangoli isosceli **ABB**), due tipi di aste **AB** e **BB**, ed infine due tipi di vertici **A** e **B**. Per l'icosaedro completo si ha:

$$F_21 = 20\mathbf{BBB} + (3 \times 20)\mathbf{ABB} = 80$$

$$E_21 = (3 \times 20)\mathbf{AB} + (3 \times 20)\mathbf{BB} = 120$$

$$V_21 = 12\mathbf{A} + 30\mathbf{B} = 42$$

Alla prima operazione di doubling ne può seguire un'altra che consiste nella proiezione dei punti medi del poliedro I_21 condotta dal centro della sfera circoscritta sulla sfera stessa. Otteniamo così il poliedro I_22 che sarà composto da 6 tipi di facce triangolari (**DDD** equilatero, **ACC-BDD-DCC** isosceli ed infine le **BDC-BCD** scalene simmetriche), 5 tipi di spigoli (**DD, DB, DC, CC, CA=CB**) e 4 tipi di vertici (**A, B, C, D**). Per l'icosaedro completo si ha:

$$F_22 = 20[\mathbf{DDD} + 3(\mathbf{ACC} + \mathbf{BDD} + \mathbf{DCC} + \mathbf{BCD} + \mathbf{BDC})] = 320$$

$$E_22 = 4 \times 30\mathbf{CA} + 10[3(\mathbf{DD} + \mathbf{CC}) + 6(\mathbf{DB} + \mathbf{DC})] = 420$$

$$V_22 = 12\mathbf{A} + 30(\mathbf{B} + 2\mathbf{C}) + 20 \times 3\mathbf{D} = 162$$

La terza operazione di doubling dà luogo al poliedro I_23 che è composto da:

$$F_23 = 4 \times 320 = 1280 \text{ (15 tipi)}$$

$$E_23 = 2 \times 480 + 3 \times 320 = 1920 \text{ (15 tipi)}$$

$$V_23 = 162 + 480 = 642 \text{ (10 tipi)}$$

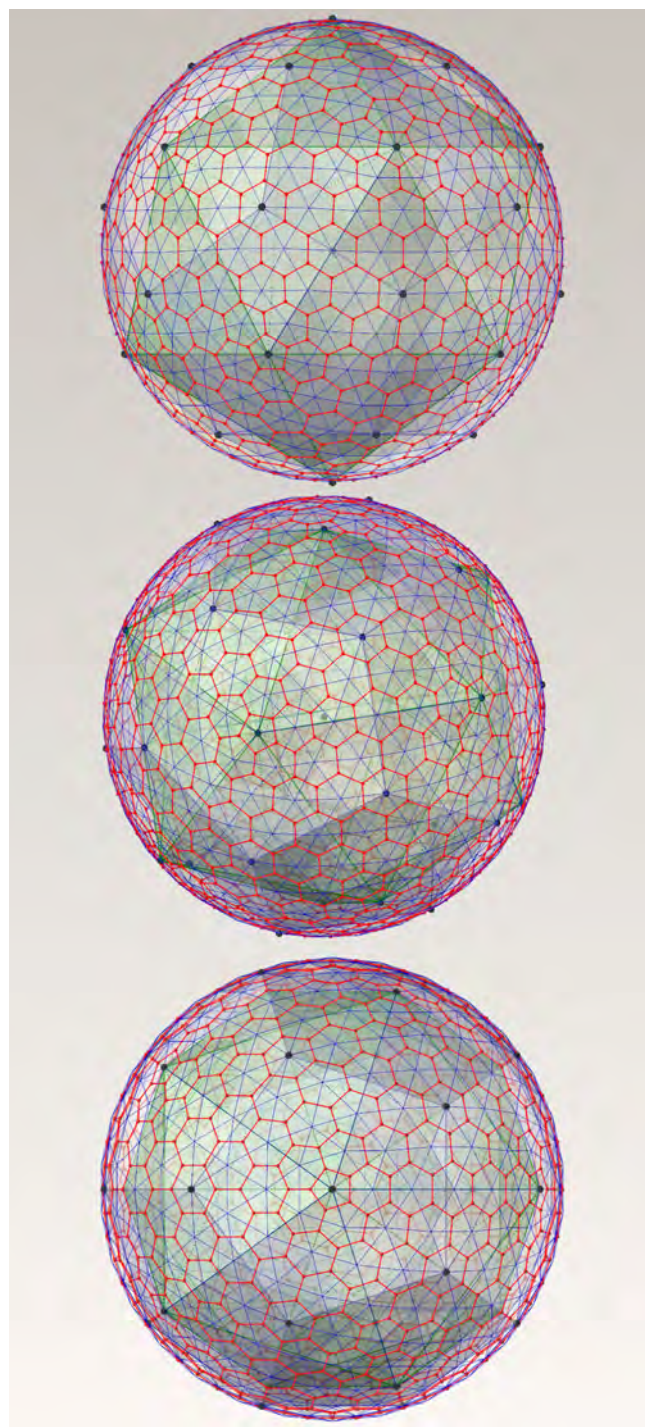
Bisogna distinguere le maglie icosaedriche generate dalle operazioni di doubling da quelle di divisione dispari degli spigoli. Queste ultime infatti, introducono i vertici del poliedro duale (cioè il dodecaedro) inscritto nella medesima sfera: il poliedro *twinned* (gemellato) **ID**. Dunque la divisione in tre parti uguali dell'icosaedro (fig. IV.136), genera il poliedro quasiregolare I_31 , che ha piramidi a base pentagonale nei vertici **A** invarianti di **I**, e piramidi a base esagonale nei vertici **C** invarianti di **D**. Proiettando i baricentri dei triangoli **AAA** dal centro della sfera sulla sfera stessa otteniamo i vertici **C** che uniti con le tripartizioni **D** degli spigoli dell'icosaedro, generano il solido I_31 . Quest'ultimo è composto da:

$$F_31 = 9 \times 20 = 180 \text{ (3 tipi)}$$

$$E_31 = 3 \times 30 + 9 \times 20 = 270 \text{ (3 tipi)}$$

$$V_31 = 12 + 20 + 2 \times 30 = 92 \text{ (3 tipi)}$$

Operando il doubling a questo solido, otteniamo il poliedro quasiregolare I_61 che mantiene facce pentagonali nei vertici **A** invarianti dell'icosaedro, esagoni regolari attorno i vertici **C** del dodecaedro; gli spigoli sono invece di 11 lunghezze



IV.137/ Poliedro quasiregolare avente facce pentagonali sui vertici dell'icosaedro ed esagoni regolari sui vertici del dodecaedro.

diverse. Il reciproco di quest'ultimo solido (*fig. IV.137*), in cui i vertici sono i baricentri delle facce di I_6 , è un altro solido quasiregolare avente ancora facce pentagonali sui vertici dell'icosaedro, ed esagoni regolari sui vertici del dodecaedro ma 7 tipi di esagoni sghembi che rivestono il resto della superficie. Risulta evidente che un twinning applicato ai due solidi reciproci genererebbe un'altra griglia triangolare.

Seconda tipologia: le griglie dodecaedriche

Abbiamo visto che l'operazione di doubling applicata al dodecaedro regolare non genera un'approssimazione della sfera che possa essere ritenuta idonea alla realizzazione di sistemi geodetici reticolari. Dunque il primo tipo appartenente alla famiglia delle griglie dodecaedriche è rappresentato dal poliedro **ID** generato dall'operazione di twinning impostata sul dodecaedro oppure sull'icosaedro (*fig. IV.138*). In particolare tra i due poliedri **ID** generati dal twinning, quello che meglio risponde ai requisiti costruttivi geodetici è quello convesso che può essere letto come un dodecaedro piramidato in ciascuna sua faccia **AAAAA**, in modo tale che i vertici delle piramidi siano i vertici **B** dell'icosaedro reciproco ed inscritto nella medesima sfera. Le facce del poliedro **ID** sono triangoli isosceli e nel complesso è definito da:

$$F=5 \times 12 \text{AAB}=60 \text{ (di un solo tipo)}$$

$$E=30 \text{AA}+5 \times 12 \text{AB}=90 \text{ (di due tipi)}$$

$$V=20 \text{A}+12 \text{B}=32 \text{ (di due tipi)}$$

La prima operazione di doubling applicata al poliedro **ID** consiste nella proiezione dei punti medi degli spigoli, operata dal centro della sfera circoscritta sulla sfera stessa. Il poliedro quasiregolare **ID₂1** così ottenuto, avrà 4 tipi di facce triangolari (**BDD** e **CDD** isosceli, **ACD** e **ADC** scalene uguali ma riflesse) 4 tipi di spigoli (**AC**, **DD**, **AD=BD** e **CD**) ed infine 4 tipi di vertici (**A**, **B**, **C**, **D**). Complessivamente il solido è definito da:

$$F_21=5 \times 12 \times (\text{DDB}+\text{DDC}+\text{ACD}+\text{ADC})=240$$

$$E_21=2 \times 30 \text{AC}+5 \times 12 (\text{DD}+2 \text{AD}+2 \text{CD})=360$$

$$V_21=20 \text{A}+12 \text{B}+5 \times 12 \text{D}+30 \text{C}=122$$

La seconda operazione di doubling (*fig. IV.139*) genera invece il poliedro quasiregolare **ID₂2** definito dai seguenti elementi:

$$F_22=4 \times 240=960 \text{ (16 tipi: 4 isosceli, 12 scaleni uguali ma riflessi)}$$

$$E_22=3 \times 240+2 \times 360=1440 \text{ (11 tipi)}$$

$$V_22=122+360=482 \text{ (12 tipi)}$$

In questa struttura gli unici poligoni regolari che si possono rintracciare sono i pentagoni attorno i vertici invarianti **B** dell'icosaedro.

Terza tipologia: le griglie A III

Il solido semiregolare icosidodecaedro (**A III**) è generato a partire o dall'icosaedro o dal dodecaedro, suddividendone i loro spigoli secondo i relativi punti medi. Esso è composto da 12 facce pentagonali e 20 equilatero, con 60 spigoli (ovviamente della stessa lunghezza perché è un solido archimedeo) ed in tutto ha 30 vertici. La prima griglia impostata su questo poliedro si basa sulla pyramidation che, come sappiamo, va applicata alle sole facce pentagonali (*fig. IV.140*). È evidente che per un certo valore dell'altezza delle piramidi pentagonali, si ridefinirebbe l'intero icosaedro. Ma questo parametro è definito dal fatto che i vertici devono giacere sulla sfera circoscritta. Generiamo così il poliedro piramidato **A III** composto da facce triangolari equilatero **AAA** e triangolari isosceli **BAA** (dove i vertici **B** sono anche i vertici dell'icosaedro inscritto nella stessa sfera). In particolare i suoi elementi sono:

$$F=20 \text{ (equilatero)}+(5 \times 12) \text{ (isosceli)}=80$$

$$E=60+(5 \times 12)=120 \text{ (di due tipi)}$$

$$V=30+12=42 \text{ (di due tipi)}$$

Operiamo il primo doubling ed otteniamo il solido **A III₂1**, composto dalle facce equilatero **DDD**, dai triangoli isosceli **ADD**, **BCC**, **DCC**, e da quelli scaleni **ACD** e **ADC** uguali ma riflessi; in particolare avremo:

$$F_21=4 \times 80=320 \text{ (di 6 tipi)}$$

$$E_21=(2 \times 120)+(3 \times 80)=480 \text{ (di 5 tipi)}$$

$$V_21=42+120=162 \text{ (di 4 tipi)}$$

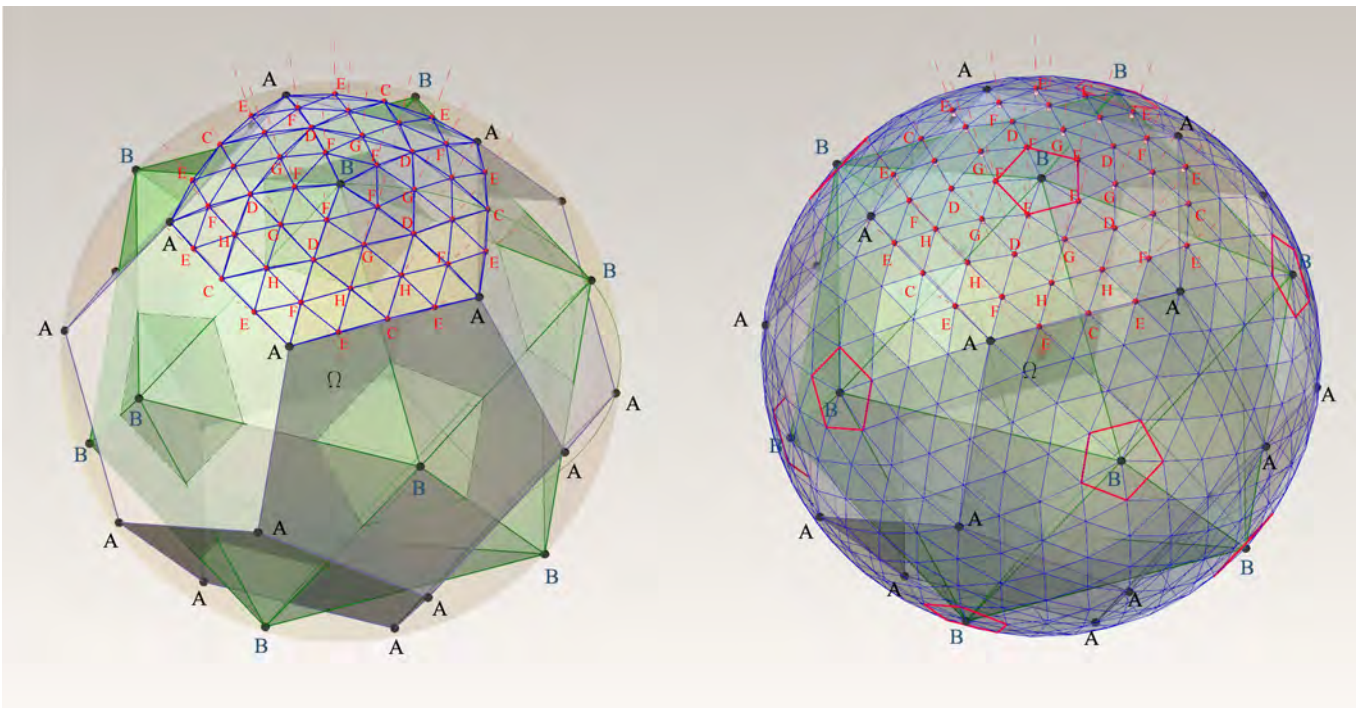
Il secondo doubling (*fig. IV.141*) genera invece il poliedro quasiregolare **A III₂2**, così definito:

$$F_22=4 \times 320=1280 \text{ (di 15 tipi di cui uno equilatero)}$$

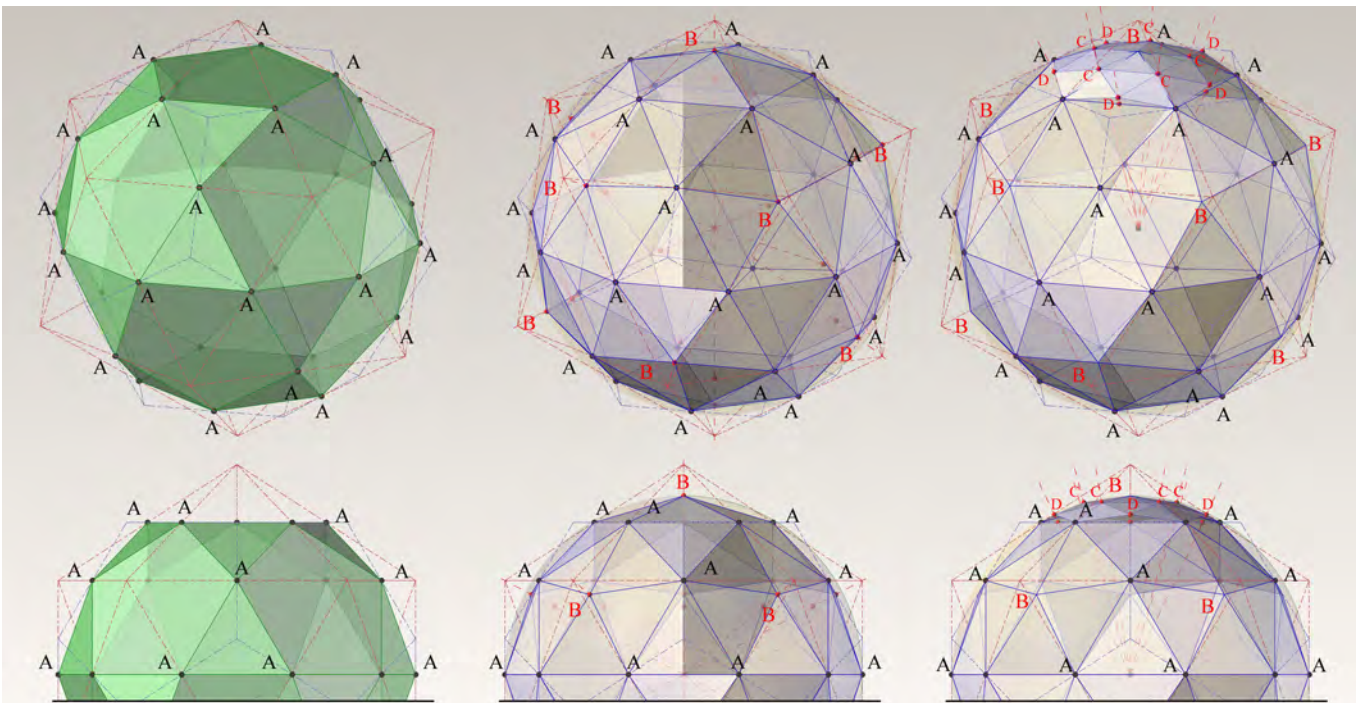
$$E_22=(2 \times 480)+(3 \times 320)=1920 \text{ (di 15 tipi)}$$

$$V_22=162+480=642 \text{ (di 10 tipi)}$$

Poiché la sezioni diametrali del poliedro **A III** sono decagoni regolari, è interessante notare che questa famiglia di poliedri sferici può essere utilizzata nelle cupole geodetiche in modo tale che la struttura di ancoraggio sia impostata proprio su di un poligono regolare che varia a seconda dell'ordine di doubling utilizzato (dai 10 lati iniziali si passa ai 20 del primo doubling, poi ai 40 del secondo e così via).



IV.139/ Seconda operazione di doubling applicata al poliedro ID, genera il poliedro quasiregolare ID₂.



IV.140/ Griglie A III: operazione di pyramidation applicata alle sole facce pentagonali dell'icosidodecaedro.

Quarta tipologia: le griglie A V

La prima griglia di questa tipologia nasce a partire dal solido semiregolare **A V**. Si tratta di un poliedro composto da 12 facce pentagonali e 20 facce esagonali. Ricordiamo anche che la sua genesi geometrica è frutto di una equipartizione in tre segmenti degli spigoli di un icosaedro, da cui il nome icosaedro troncato (*fig. IV.142*). Anche in questo caso il primo passaggio consiste nella pyramidation delle facce non triangolari (quindi verranno coinvolte tutte le facce di **A V**) in modo tale che i vertici delle piramidi giacciono sulla sfera circoscritta. Il solido piramidato **A V**, è così definito:

$F=5 \times 12 + 6 \times 20 = 180$ (con triangoli isosceli di due tipi **AAB** e **AAC**)

$E=90 + 5 \times 12 + 6 \times 20 = 270$ (di tre tipi)

$V=60 + 12 + 20 = 92$ (di tre tipi)

L'operazione di doubling applicata al solido **A V** piramidato (*fig. IV.143*) genera il poliedro quasiregolare **A V₂1**, così definito:

$F_21=4 \times 180 = 720$ (di 8 tipi: **BDD**, **EDD**, **DAE**, **DEA**, **AFE**, **AEF**, **EFF**, **CFF**)

$E_21=(2 \times 270) + (3 \times 180) = 1080$ (di 7 tipi: **AE**, **BD**, **CF**, **FF**, **EF**, **DD**, **DE**)

$V_21=92 + 270 = 362$ (di 7 tipi)

Quinta tipologia: le griglie A XIII

Anche in questo caso la prima tipologia di poliedro nasce dalla pyramidation delle 12 facce pentagonali (le altre sono 80 facce triangolari equilateri) del solido semiregolare **A XIII** (*fig. IV.144*). Il solido così individuato è definito da:

$F=80 \mathbf{AAA} + (5 \times 12 \mathbf{BAA}) = 140$ (di due tipi)

$E=150 \mathbf{AA} + (5 \times 12 \mathbf{BA}) = 210$ (di due tipi)

$V=60 \mathbf{A} + 12 \mathbf{B} = 72$ (di due tipi)

Il doubling applicato al solido **A XIII** piramidato genera il poliedro quasiregolare **A XIII₂1**, definito da:

$F_21=4 \times 140 = 560$ (di 6 tipi)

$E_21=(2 \times 210) + (3 \times 140) = 840$ (di 5 tipi)

$V_21=72 + 210 = 282$ (di 5 tipi)

Si noti che in questa tipologia di griglia è possibile individuare un settore sferico poliedrico, impostato su di un pentagono regolare. Inoltre tale settore è caratterizzato da un rapporto molto grande tra ampiezza ed altezza, risultando quindi molto utile nella realizzazione di cupole geodetiche per la copertura di ampi spazi in relazione ad una limitata altezza.

Le cinque tipologie di griglie sferiche (*fig. IV.145*), come abbiamo detto, sono quelle che meglio si prestano all'applicazione in campo architettonico nella creazione delle cupole geodetiche. Infatti esse sono quelle che rispondono meglio ai requisiti geometrici, tecnici ed estetici che tali strutture coinvolgono. La scelta della tipologia di griglia da utilizzare in fase di progettazione dipende da due fattori principali: il primo l'ampiezza della cupola in relazione alla sua altezza, ed il tipo di poligono di supporto; il secondo riguarda invece la variazione di lunghezza delle aste che a sua volta è relativo al tipo di materiale utilizzato, al tipo di carico a cui è sottoposta la struttura (peso proprio ed carichi non di punta), ed infine alla possibilità del loro trasporto. Nella tabella (*tabella IV.29*) è indicato il riepilogo delle caratteristiche geometriche delle cinque tipologie, in funzione dei numeri di vertici, di facce e di spigoli che esse generano in ogni passaggio di suddivisione. Con il simbolo /*n* è indicato il numero di tipi degli elementi. La prima considerazione che può essere fatta leggendo la tabella riguarda l'abbassamento proporzionale della varietà degli elementi con l'aumentare del livello della tipologia (cioè dall'icosaedro **I** al dodecaedro camuso **A XIII**). Se ad esempio confrontiamo il numero degli elementi associato a ciascun tipo, tra due strutture simili in caratteristiche come **A XIII₃1** ed **I₂3** notiamo che:

in **A XIII₃1** per le facce il rapporto è 1/140 (ogni tipo di faccia si ripete 140 volte in tutta la sfera), per gli spigoli 1/210 e per i vertici 1/70

nell' **I₂3** l'indice delle facce è 1/85, degli spigoli 1/128 e per i vertici 1/94

Quindi, da un punto di vista economico di produzione industriale e di efficienza strutturale complessiva, risulta quasi più conveniente la struttura di tipo **A XIII₃1** rispetto alla **I₂3**.

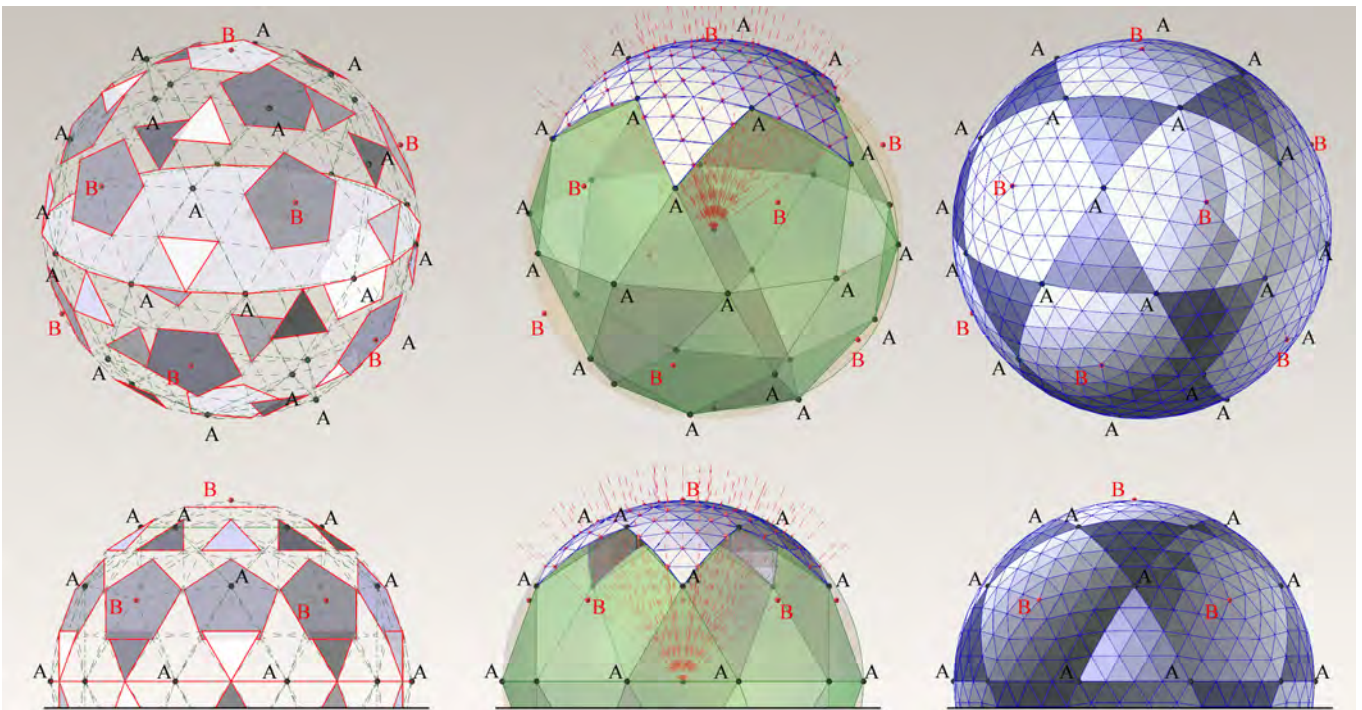
Un'altra considerazione interessante che emerge dal confronto, è che alcuni livelli alti di suddivisione applicati a tipologie di griglie "basse", danno risultati identici all'applicazione di livelli bassi di suddivisione applicati a tipologie "alte". Questo è il caso di:

A III₃0 = I₂1

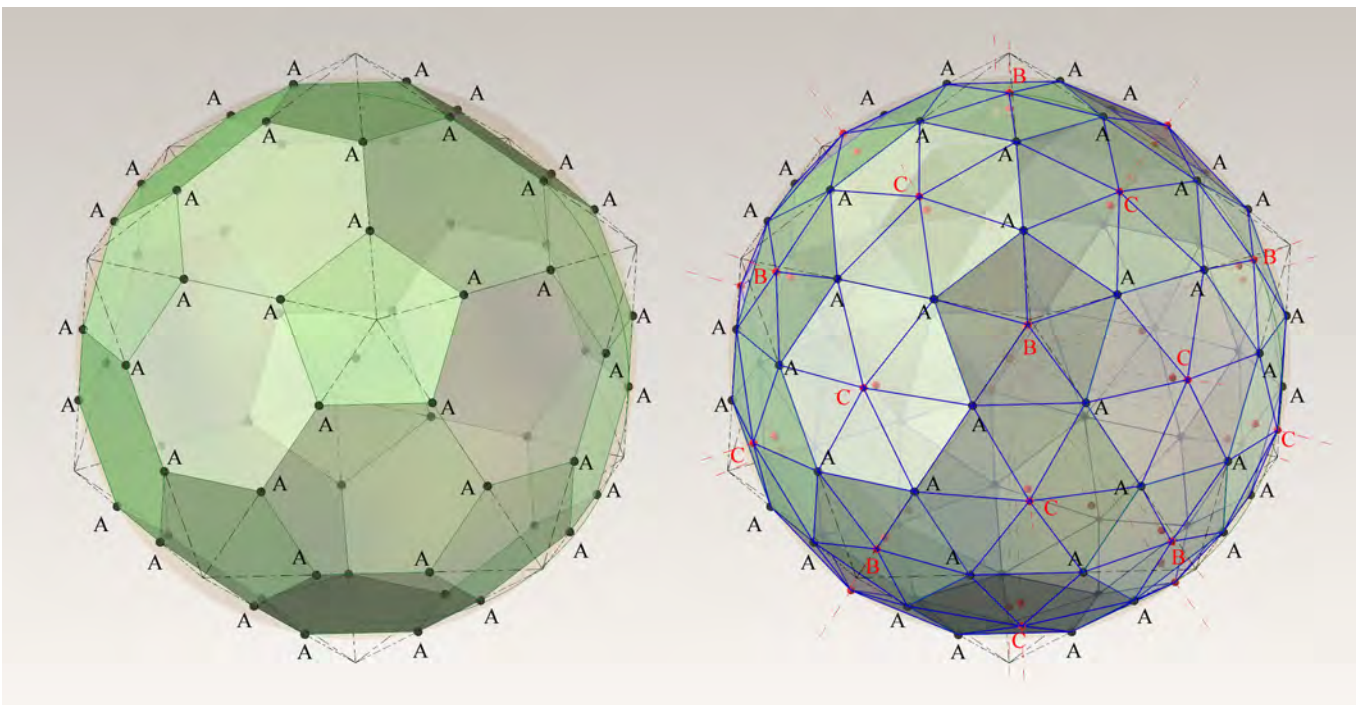
A III₂1 = I₂2

A III₂2 = I₂3

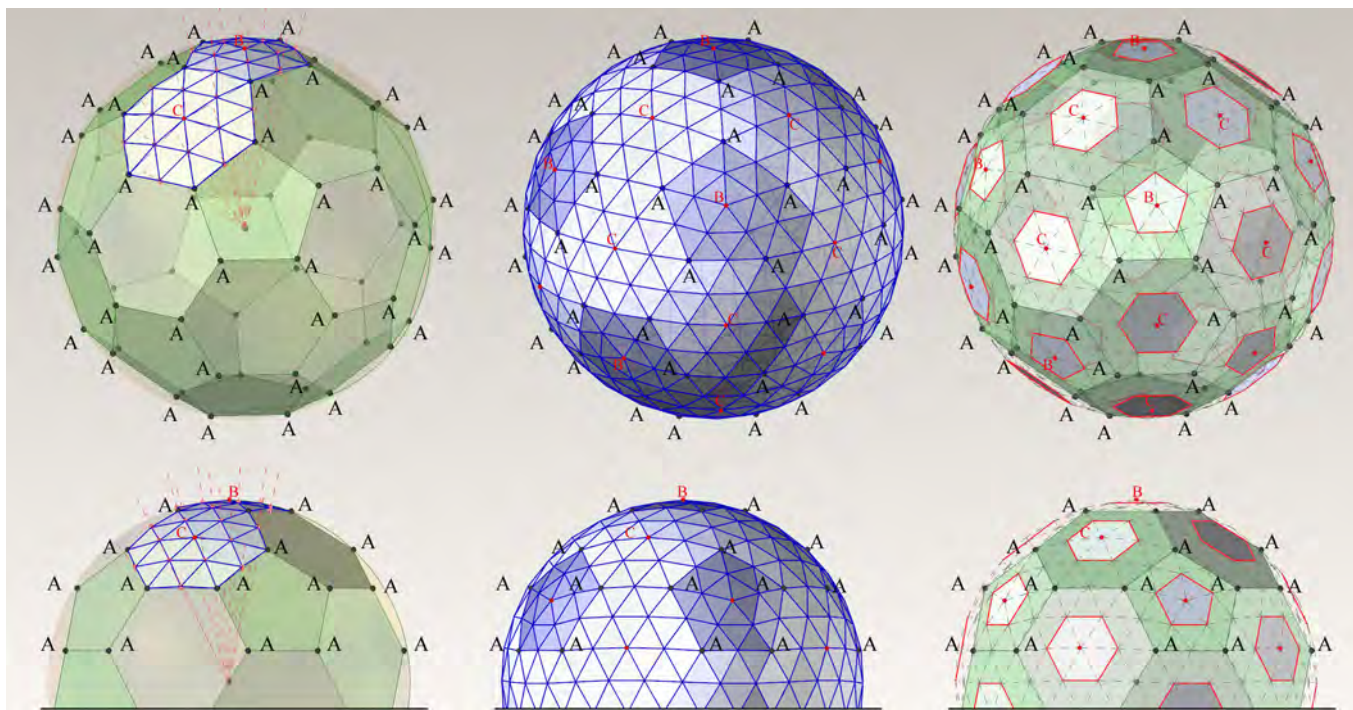
Dunque in questi casi si può parlare di strutture poliedriche isomorfe che differiscono solo per la lunghezza media delle aste. Infine notiamo che l'indice del numero di tipi degli elementi



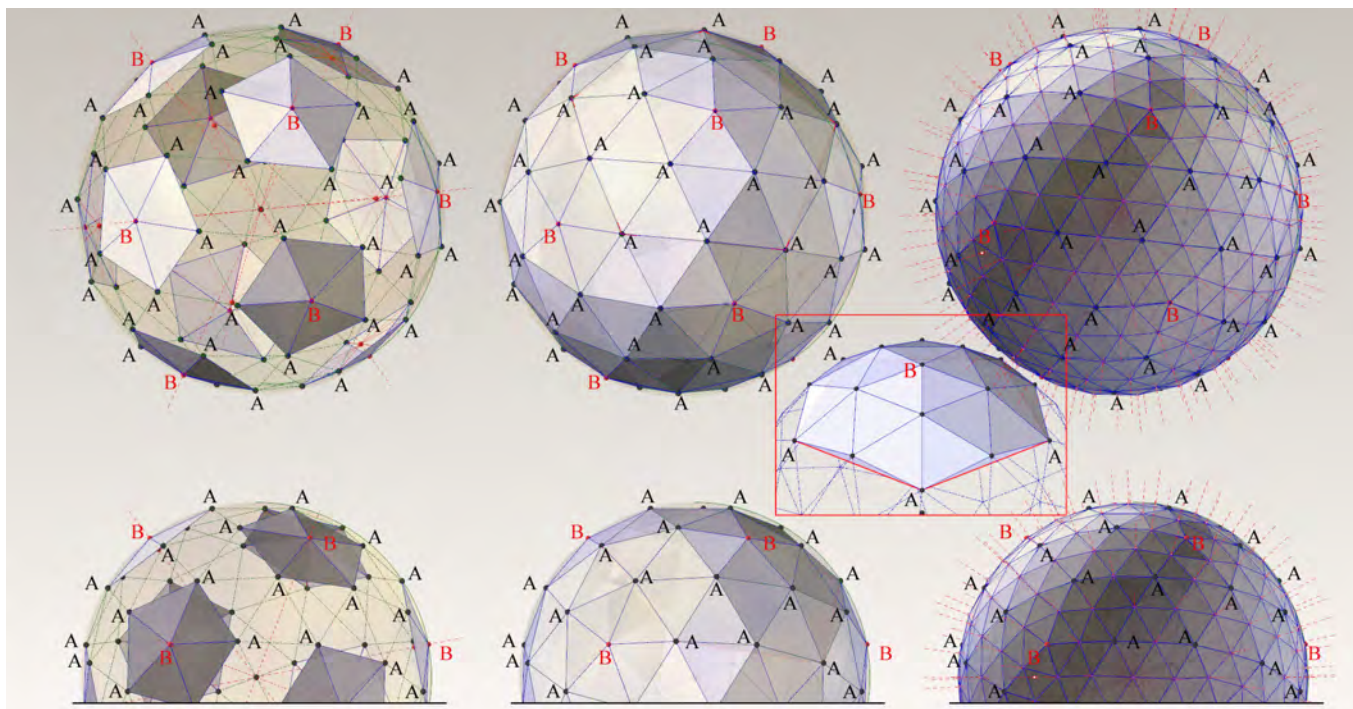
IV.141/ Il poliedro quasiregolare $A III_2$ ottenuto da una seconda operazione di doubling applicato al poliedro piramidato $A III$.



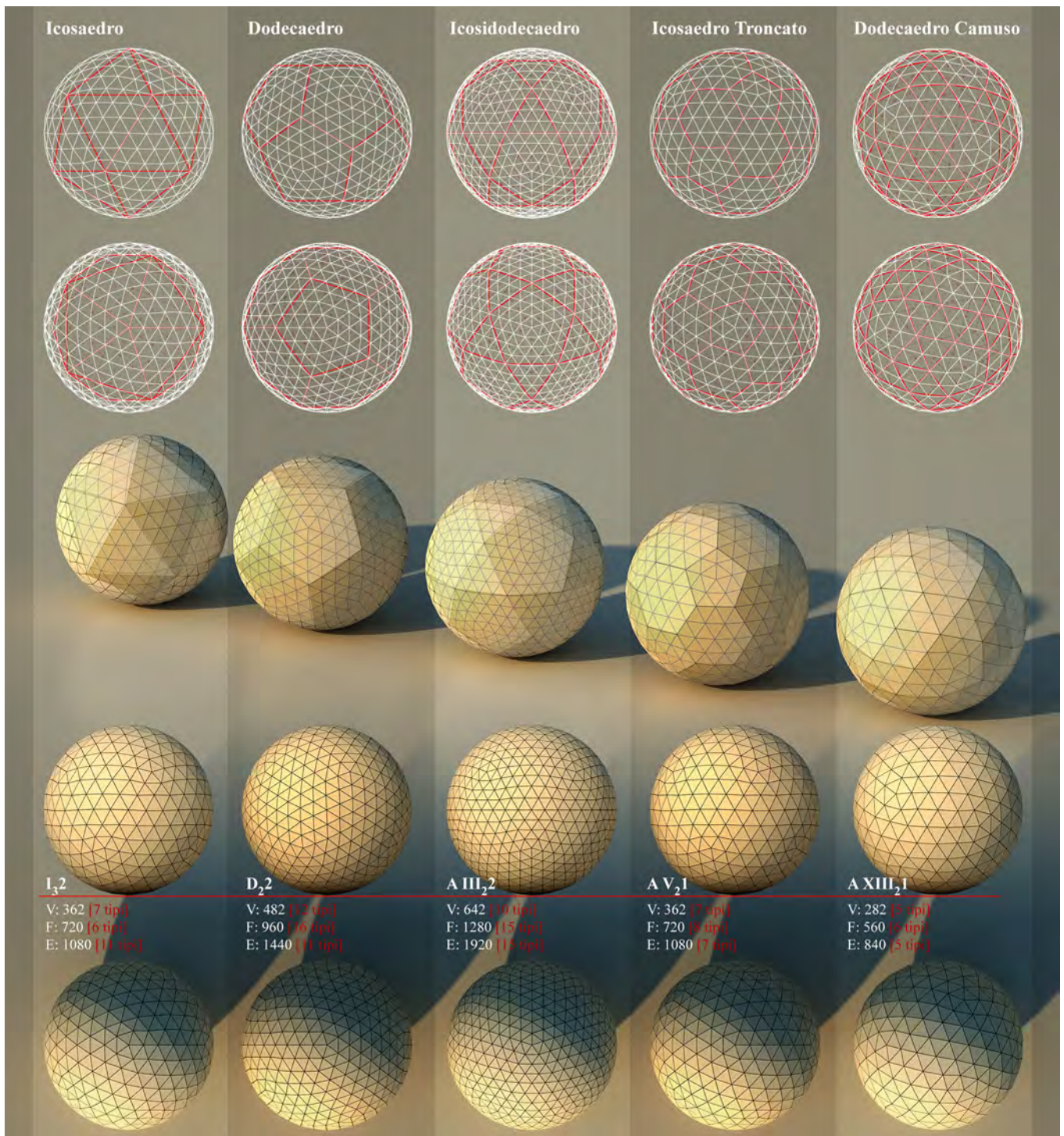
IV.142/ Griglie $A V$: operazione di pyramidation applicata all'icosaedro troncato.



IV.143/ L'operazione di doubling applicata al solido A V piramidato genera il poliedro A V₂1.



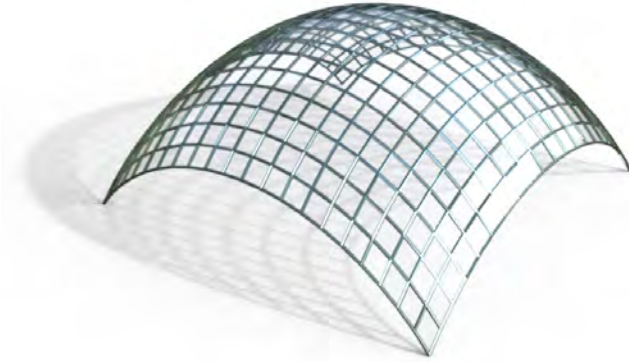
IV.144/ Griglie A XIII: operazione di pyramidation applicata al dodecaedro camuso.



IV.145/ Le cinque tipologie di griglie sferiche.

Poliedro	pyramidation	Primo doubling	Divisione in 3 parti	Secondo doubling	Divisione in 5 parti	Terzo doubling
I		I₂1	I₃1	I₂2	I₅1	I₂3
V=12/1		12+30=42/2	12+60+20=92/3	42+120=162/4	12+120+120=252/5	462+480=942/10
F=20/1		4x20=80/2	9x20=180/3	4x80=320/6	25x20=500/7	4x320=1280/15
E=30/1		(2x30)+(3x20) =120/2	(3x30)+(9x20) =270/3	(3x80)+(2x120) =480/5	(5x30)+(20x30) =750/6	(2x480)+(3x320) =1920/15
D	D₀	D₂1		D₂2		
V=20/1	20+12=32/2	32+90=122/4		122+360=482/12		
F=12/1	5x12=60/1	4x60=240/4		4x240=960/16		
E=30/1	(30+3)x20 =90/2	(2x30)+(5x60) =360/4		(3x240)+(2x360) =1440/11		
A III	A III₀	A III₂1		A III₂2		A III₂3
V=30/1	30+12=42/2	42+120=162/4		162+480=642/10		642+1920=2562
F=32/2	(5x12)+(20x2) =80/2	4x80=320/6		4x320=1280/15		4x1280=5120
E=60/1	(60+5)x12 =120/2	(3x80)+(2x120) =480/5		(2x480)+(3x320) =1920/15		(3x1280)+(2x1920) =1680
A V	A V₀	A V₂1		A V₂2	A V₅1	
V=60/1	60+12+20 =92/3	92+270=362/7		362+1080=1442	92+1080+1080=2252	
F=32/2	(5x12)+(6x20) =180/2	4x180=720/8		4x720=2880	25x180=4500	
E=90/1	90+(5x12)+ (6x20)=270/3	(3x180)+(2x270) =1080/7		(3x720)+ (2x1080)=4320	(5x270)+(180x30) =6750	
A XIII	A XIII₀	A XIII₂1	A XIII₃1	A XIII₂2		A XIII₂3
V=60/1	60+12=72	72+210=282/5	72+420+140 =632/9	282+840 =1122/15		1122+3360=4482
F=92/2	(5x12)+80 =140/2	4x140=560/6	9x140=1260/9	4x560=2240/15		4x2240=8960
E=150/1	150+(5x12) =210/2	(3x140)+(2x210) =840/5	(3x210)+(9x140) =1890/9	(3x560)+(2x840) =3360/15		(3x2240)+(2x3360) =13440

Tabella IV.29



IV.146/ Pseudovela generata dallo scorrimento di una arco di circonferenza su di un altro di eguale raggio.

decesce in modo molto rapido con l'aumento del livello di suddivisione.

Un'analisi comparativa tra le lunghezze delle aste (rapportate ad una medesima sfera di raggio 100) nelle diverse tipologie di griglie e nei diversi livelli di suddivisione, mette in evidenza che maggiore è il tipo di griglia e minore è la differenza tra i valori massimi e minimi (vedi Appendice al capitolo IV). È interessante notare che il dodecaedro camuso se da un lato mostra piccole differenze di variazione tra le aste già dalla prima triangolazione (si creano da subito le 80 facce equilateri), dall'altro denota che nella pyramidation e nel primo doubling genera una lunghezza delle aste maggiore di quella generata dallo stesso livello di suddivisione applicato al poliedro A V. Dopo il secondo doubling i valori diventano di nuovo molto prossimi. Ulteriori considerazioni di questo tipo possono essere condotte sulla base della lettura di tabelle simili. La loro utilità risiede soprattutto nella possibilità di classificarle per un corretto approccio alla progettazione di queste strutture (ad esempio ordinando le tipologie più efficaci a seconda dell'ampiezza dello spazio da ricoprire). Inoltre il tema delle strutture reticolari sferiche andrebbe approfondito anche rispetto a quelle tipologie a *double-layer* (doppio strato) che intervengono nel caso di luci superiori ai 40 m. Ma le nostre finalità di ricerca sono distanti da questo tipo di indagini e vogliono rimanere legate al contributo che queste superfici poliedriche hanno dato al tema della discretizzazione della superficie sferica.

Considerazioni di carattere geometrico e strutturale

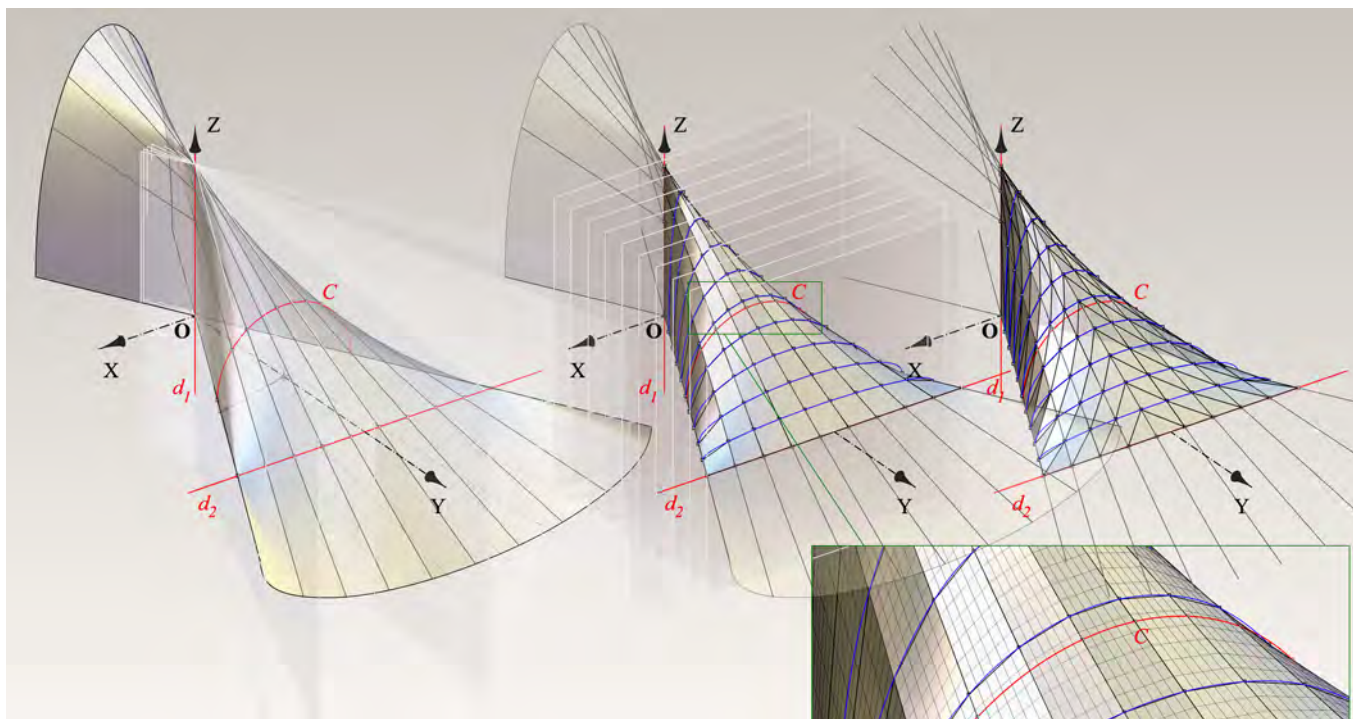
Le superfici sferiche reticolari che abbiamo analizzate sono del tutto assimilabili a superfici poliedriche quasiregolari, composte da facce triangolari. Esse nascono da operazioni condotte sui solidi regolari o semiregolari. Questa ottimizzazione della superficie continua sferica trova come principale campo di applicazione, la realizzazione delle cupole geodetiche in cui le facce (che a volte possono essere anche poligoni sghembi che vengono o triangolati o ridotti in porzioni di paraboloidi iperbolici) vengono a costituire gli elementi di tamponamento (realizzati con diversi materiali come vetro, plexiglass, legno etc.), gli spigoli divengono le aste reticolari ed i vertici i nodi strutturali che, essendo cerniere, trasmettono solo carichi assiali (cioè di compressione e di trazione). Possiamo quindi dire che la sfera e la superficie poliedrica che la ottimizza, divengono topologicamente equivalenti cioè omeomorfe, in quanto sono superfici bidimensionali con andamento spaziale, legate dalle medesime caratteristiche topologiche (possono cioè essere deformate l'una nell'altra senza ricorrere a strappi, sovrapposizioni o incollature). Abbiamo quindi lasciato da parte le strutture reticolari spaziali (sia le strutture piane reticolari che le strutture sferiche a doppio strato) per poter riprendere il tema della discretizzazione di una superficie geometrica qualsiasi per mezzo di una superficie poliedrica. Sappiamo che questa operazione di approssimazione (*faceting*) è sempre possibile e con diverse modalità; ma se le finalità sono ancora una volta quelle architettoniche, ecco che diventa necessario il controllo degli elementi che la definiscono. I requisiti principali sono quelli già incontrati nelle cupole geodetiche di regolarità e di simmetria degli elementi (sia per ragioni di efficienza strutturale che di estetica), e di limitazione delle diverse tipologie di aste e di nodi. Nei casi di coperture di grandi luci o di superfici molto ampie spesso è opportuno ricorrere a degli elementi di irrigidimento che escano dal livello superficiale variando quindi la superficie poliedrica da varietà bidimensionale a varietà tridimensionale. Alcuni autori chiamano questa operazione con il termine *polyhedrated-surface*. Se ad esempio in una superficie poliedrica triangolare che approssima una superficie continua, si uniscono con un nuova asta i vertici liberi di due triangoli adiacenti (individuando in questo modo un tetraedro irregolare), operiamo una *tetraedrizazione* della superficie. Quindi, ad

una triangolazione di una superficie può seguire, per ragioni strutturali, una sua *poliedrizzazione* (cioè una sua spazializzazione). Solitamente questa si ottiene attraverso una *piegatura* della superficie, che consiste nell'approssimarla per mezzo dell'introduzione di una serie di piccole concavità e convessità: le *folded surface*. La prima grande differenza tra le operazioni di *faceting* (discretizzazione) e di *folding*, è evidentemente la natura bidimensionale della prima rispetto a quella tridimensionale della seconda. Inoltre dalla prima operazione gli elementi generati sono quasi sempre facce piane, nel secondo caso invece le *stripes* (strisce) generate, sono vere porzioni di superfici (piane o sghembe) orientate principalmente in una direzione. Non ultimo è il fatto che se la triangolazione è sempre possibile il *folding* è applicabile solo nelle superfici rigate, siano esse sviluppabili o non sviluppabili.

Nell'ambito della progettazione di strutture per ampie coperture o facciate, il principale obiettivo che si vuole perseguire è quello di poter utilizzare elementi prefabbricati. Per ragioni di carattere tecnico ed economico, questi elementi devono essere piani (possibilmente definiti da un poligono regolare) con

un limitato numero di tipi, facili da trasportare e leggeri. Nel caso di una volta sferica abbiamo visto che le superfici geodetiche costituiscono un efficace esempio di ottimizzazione degli elementi, i quali, nella maggior parte dei casi, sono triangolari e prefabbricabili. La possibilità di realizzare elementi semplici, abbastanza piccoli da potersi adattare alla curvatura delle superfici, dipende principalmente dalla possibilità di inscrivere lungo alcune curve della superficie stessa, delle linee spezzate definite da una certa regolarità.

Le superfici di traslazione rispondono a questi requisiti generando elementi (*facets*) piani. Come abbiamo detto a proposito del progetto della copertura per il Museo di Storia della città di Amburgo, se una curva (piana o meno) è fatta scorrere su di un'altra in modo da mantenersi parallela a sé stessa, la superficie di scorrimento ottenuta (il ruolo di generatrice e direttrice può essere scambiato nelle superfici di traslazione) può essere discretizzata in funzione delle corde inscritte nelle due curve. In particolare se le due curve sono piane, e le corde mantengono una lunghezza costante, abbiamo visto che le facce del poliedro di sintesi, saranno rombiche. Nel caso della



IV.147/ Discretizzazione di un conoide generico utilizzando la famiglia di generatrici.

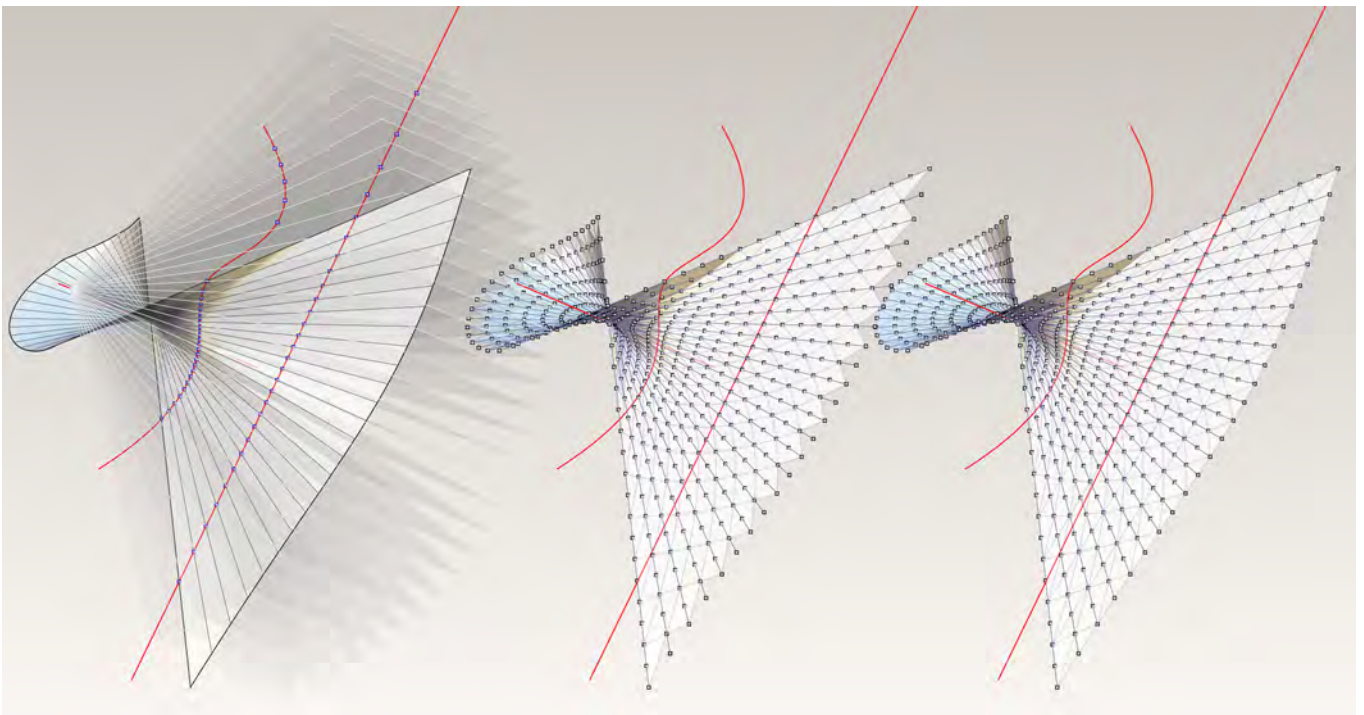
copertura di Amburgo (figg. I.8, I.9 e IV.146), le due curve erano archi di circonferenza con lo stesso raggio e appartenenti a due piani ortogonali tra loro, che divise ciascuna in n parti uguali, davano origine a facce quadrilatere che tendevano al quadrato in prossimità del polo.

Anche le superfici rigate ben si prestano ad essere approssimate da una superficie poliedrica. I metodi utilizzati per questo passaggio fanno uso della famiglia di generatrici (rette) della superficie a cui ne viene affiancata un'altra, scelta sulla base di alcuni criteri, in modo da consentire la generazione di una serie di quadrilateri sghembi.

Consideriamo il caso di un conoide generico (fig. IV.147). Il conoide è una superficie rigata in cui le direttrici sono una linea curva e due linee rette. In particolare se queste ultime sono rette a distanza finita si genera il conoide generico, se una delle due è una retta all'infinito (piano direttore) si genera il conoide a piano direttore. Allora, esaminiamo il caso di un conoide generico generato⁴⁰ da una semicirconferenza C appartenente ad un piano verticale parallelo a ZOX e con centro sull'asse OY , e due direttrici d_1 e d_2 di cui la prima coinci-

dente con l'asse OZ e la seconda parallela all'asse OX . Utilizziamo il fascio di piani ausiliari avente per asse la retta OZ , per individuare le generatrici della superficie rigata; il conoide generico risulta quindi individuato. La seconda famiglia di curve per effettuare la discretizzazione, può essere quella ottenuta sezionando il conoide con il fascio di piani aventi la giacitura comune al piano XOZ , cioè parallelo alla curva C . La maglia ottenuta dall'intersezione delle generatrici con le curve ausiliarie appena trovate, crea un reticolo di quadrilateri sghembi che costituiscono delle file di porzioni di paraboloidi iperbolici. Questi ultimi possono essere suddivisi tracciando per ogni quadrilatero una diagonale, in modo tale da ottenere una triangolazione dell'intero conoide. Se per ciascun quadrilatero si traccia la seconda diagonale si effettua la tetraedrizazione, con uno spessore minimo, del conoide.

Ovviamente la triangolazione della superficie rigata può anche essere effettuata utilizzando la sola famiglia di generatrici andando a staccare per ognuna di esse, segmenti uguali che possono essere collegati in modi diversi con i punti appartenenti alla generatrice successiva (fig. IV.148).



IV.148/ Maglie triangolari diverse impostate su di una medesima griglia di punti.

Tra le superfici rigate non sviluppabili, quelle che offrono le migliori possibilità di discretizzazione vanno annoverati l'iperboloide (di rotazione e generico) ed il paraboloido iperbolico. Il motivo di questa opportunità risiede nel fatto che in queste superfici è possibile distinguere due schiere di generatrici tra di loro simmetriche. Allora, nel caso di un iperboloide di rotazione (*fig. IV.149*) possiamo sezionarlo con una serie di piani ortogonali all'asse di rotazione, anche non equidistanti tra di loro, in modo da definire dei cerchi d'intersezione. Questi vengono ridotti nei poligoni in cui i vertici sono rappresentati dai punti d'intersezione tra le curve e le generatrici dell'iperboloide e i lati sono le corde delle circonferenze. Per ultimo si individuano le spezzate delle eliche iperboliche che chiudono la triangolazione dell'intera superficie.

Sempre utilizzando una schiera di generatrici insieme ad altre due altre famiglie di curve opportunamente scelte, otteniamo una triangolazione diretta del paraboloido iperbolico. Ad esempio si può scegliere una schiera di generatrici g (*fig. IV.150*) unitamente alle corrispondenti corde tracciate sulle due famiglie di parabole P_1 e P_2 , che definiscono il paraboloido stesso come una superficie di traslazione. Infatti il paraboloido iperbolico oltre ad essere definito come il luogo geometrico delle rette che scorrono su due rette sghembe assegnate e che sono parallele ad un piano direttore, può essere considerato come una superficie di traslazione in cui una generatrice è una parabola che scorre su di una direttrice anch'essa parabola⁴¹; gli assi delle due curve sono paralleli ma opposti. Per le considerazioni fatte in precedenza, se il paraboloido è dunque inteso come superficie di traslazione di due parabole, sarà approssimabile da un poliedro a facce quadrangolari piane. Comunque, rimane possibile operare la discretizzazione utilizzando una sola schiera di generatrici e staccando per ciascuna retta, segmenti di eguale lunghezza. I punti così individuati vengono poi collegati tra loro in modo da definire le facce triangolari della superficie poliedrica.

Il metodo più naturale per ottenere un'approssimazione regolare di un paraboloido iperbolico o di un iperboloide (generico o di rotazione) consiste però nell'utilizzare per ciascuna superficie entrambe le schiere di generatrici insieme ad un'altra famiglia di curve opportunamente scelta.

Consideriamo ad esempio un iperboloide generico (*fig. IV.151*) definito dalle due schiere di rette simmetriche g_1 e g_2 che si incontrano ad intervalli regolari. La terza famiglia di curve per

operare la triangolazione, può essere costituita dall'insieme delle corde delle ellissi E individuate dall'intersezione dell'iperboloide con piani ortogonali all'asse centrale e passanti per i punti d'intersezione tra g_1 e g_2 . Questi ultimi punti coincideranno anche con i vertici dei poligoni di riduzione delle ellissi stesse. La discretizzazione che ne deriva è caratterizzata da triangoli isosceli ed uguali compresi tra coppie successive di ellissi. Inoltre, i lati dei triangoli saranno appartenenti alla superficie dell'iperboloide oppure saranno inscritti all'interno di esso.

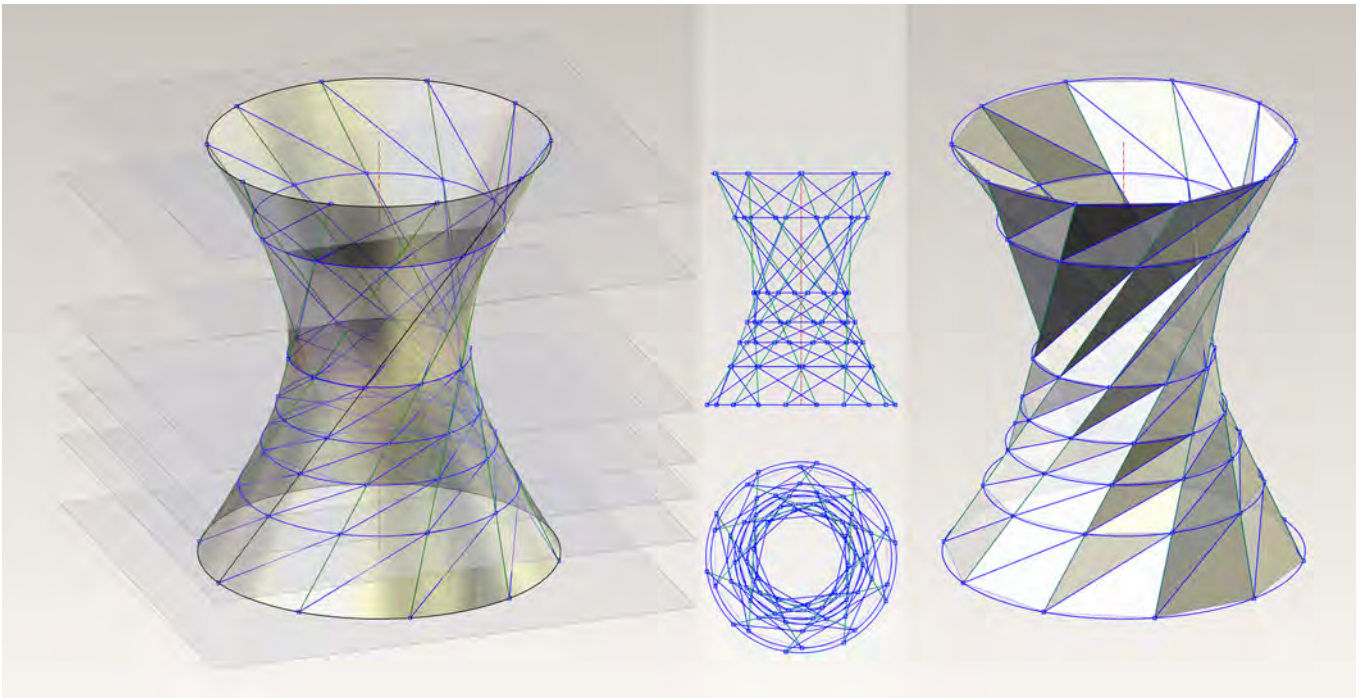
Un'altra scelta per la terza famiglia di curve da utilizzare congiuntamente alla due schiere di generatrici, risiede nell'insieme delle corde delle iperboli H individuate dall'intersezione dell'iperboloide con i piani radiali passanti per i punti in comune a g_1 e g_2 . In questo caso la discretizzazione è caratterizzata da triangoli i cui lati apparterranno o saranno esterni all'iperboloide.

Se ora sovrapponiamo le due triangolazioni appena determinate (quelle cioè rientranti od uscenti rispetto alla superficie dell'iperboloide) si ottiene una tetraedizzazione dell'iperboloide (*fig. IV.152*). I tetraedri avranno per spigoli i quadrilateri sghembi definiti dalle schiere di generatrici e dalle relative diagonali. Inoltre va notato che, in linea con il principio dell'ottimizzazione della forma, tutti i vertici dei tetraedri apparterranno alla superficie dell'iperboloide. Anche in questo caso, l'accuratezza della tetraedizzazione è proporzionale alla frequenza delle generatrici utilizzate.

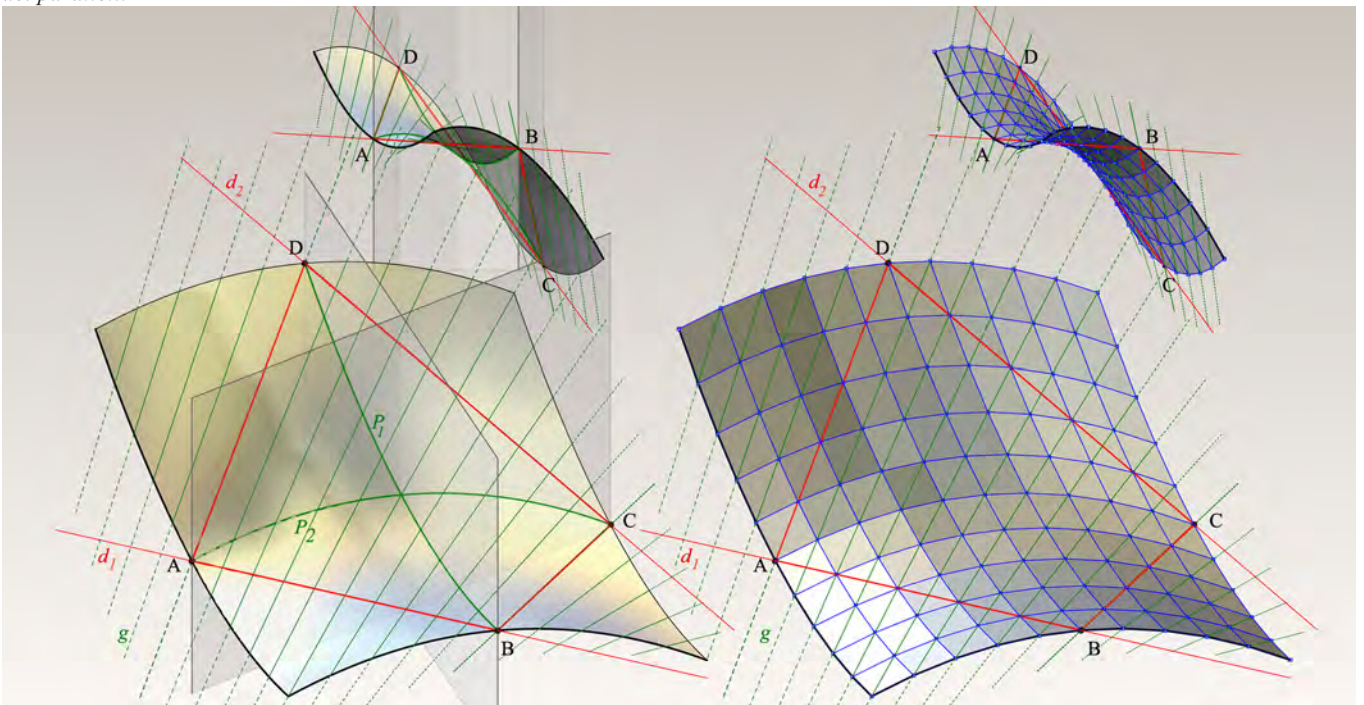
Per ottenere una tetraedizzazione minima di un paraboloido iperbolico, conviene utilizzare le due schiere di generatrici e le corde tracciate sul sistema delle parabole direttrici-generatrici. Consideriamo allora un paraboloido iperbolico generato da un lato \mathbf{aB} di un cubo che scorre lungo il lato \mathbf{OB} e la diagonale \mathbf{aC} dello stesso cubo (*fig. IV.153*). Dividendo in 8 parti uguali le generatrici \mathbf{OC} e \mathbf{Ba} , si ottengono le generatrici $\mathbf{1-I}$, $\mathbf{2-2}$,... parallele al piano \mathbf{AaCc} . Dividendo in 8 parti uguali anche i lati del paraboloido \mathbf{OB} ed \mathbf{aC} , definiamo la seconda schiera di generatrici $\mathbf{I-I}$, $\mathbf{II-II}$,... che staccherà segmenti uguali sulla prima schiera. Infatti, preso un punto d'intersezione s , risulterà che:

$$\mathbf{sM=sP} \text{ e che } \mathbf{sN=sQ}$$

il che vuole dire che il quadrilatero $\mathbf{MN PQ}$ sarà un parallelogramma piano. Dunque il paraboloido iperbolico può essere approssimato da una superficie poliedrica in cui i vertici (o nodi)



IV.149/ Discretizzazione di un iperboloido di rotazione utilizzando una famiglia di generatrici, le spezzate di eliche iperboliche e le corde dei paralleli.



IV.150/ Discretizzazione di un paraboloido iperbolico utilizzando una schiera di generatrici unitamente alle corde su due famiglie di parabole.

sono i punti d'intersezione delle generatrici, e gli spigoli (o aste), possono essere letti, o come le diagonali dei quadrilateri sghembi individuati dalle due generatrici oppure come le corde del sistema di parabole. Inoltre le corde si mantengono della stessa lunghezza parallelamente ai piani delle parabole di traslazione. Nel caso in esame il paraboloido iperbolico delimitato dagli spigoli **OC**, **OB**, **Ba** e **aC**, sarà costituito da 64 aste di 12 tipi diversi, 24 parallelogrammi di 12 tipi diversi (cioè 2 parallelogrammi per ogni tipo grazie alla simmetria rispetto al piano **OdaA**), e da 16 triangoli (di 8 tipi diversi) isosceli lungo tutto il bordo.

Le NURBS e la discretizzazione delle superfici free-form

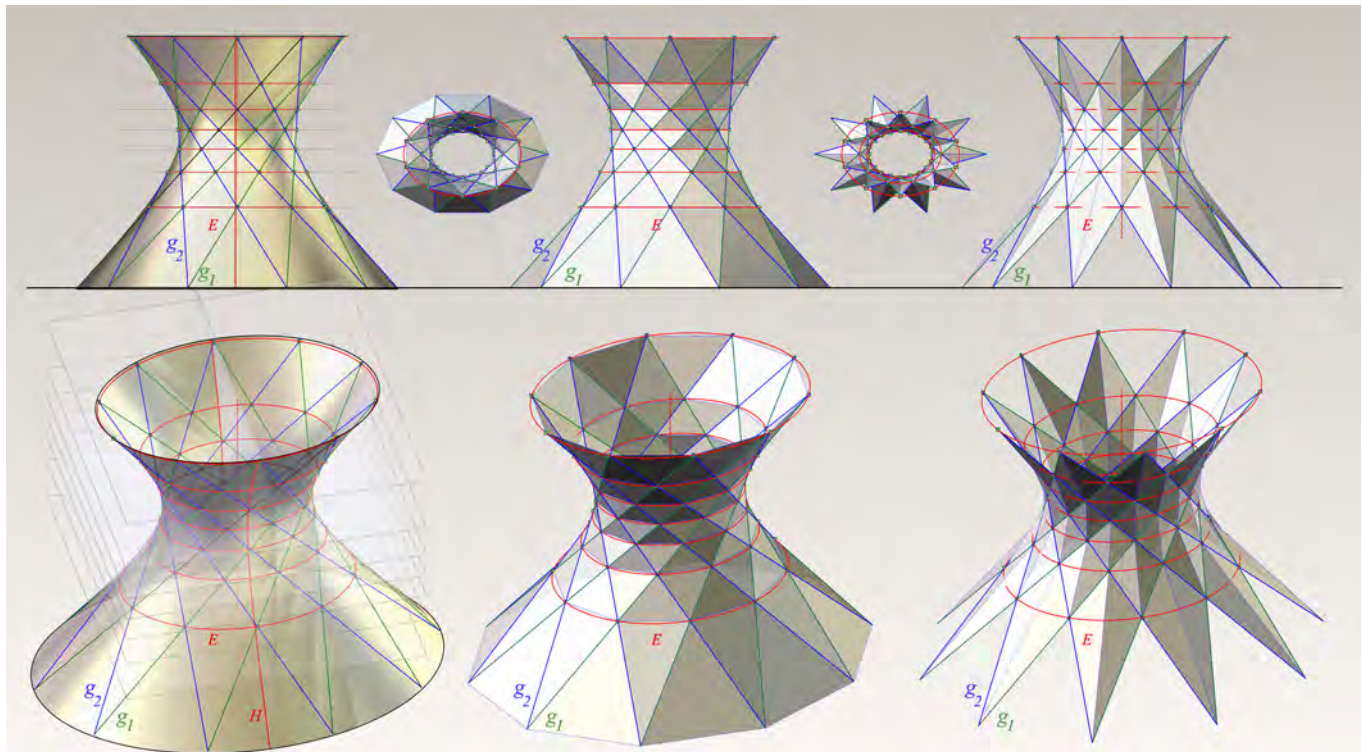
Abbiamo già detto che le superfici libere che spesso caratterizzano le forme plastiche di recenti progetti architettonici, vengono ben rappresentate dalle superfici di tipo NURBS, acronimo per Non Uniform Rational Basis Spline⁴². Lasciando da parte considerazioni (già accennate nel primo capitolo) sul

contributo che questi strumenti offrono alla nuova figura interdisciplinare dell'architetto, si vogliono esaminare i più importanti aspetti matematici di questo particolare tipo di superfici, per poterne poi analizzare il metodo di discretizzazione. Le considerazioni valide per le curve NURBS possono essere estese al caso delle superfici NURBS, quindi per semplicità faremo riferimento alle sole curve.

Sappiamo che le curve NURBS sono espresse da funzioni di tipo parametrico, sono cioè della forma:

$$Q(u) = \{x(u), y(u)\}$$

Dove $x(u)$ e $y(u)$ sono funzioni del parametro u . In questa forma dato un valore al parametro u la funzione $x(u)$ ci calcola il corrispondente valore della x del punto, e la funzione $y(u)$ ci calcola il corrispondente valore della y del punto. Per comprendere meglio il significato di questa forma, possiamo immaginare una particella che si muove lungo un foglio di carta, la cui traiettoria è segnata da una curva, dove il parametro u rappresenta il tempo. Allora la funzione $Q(u)$ ci fornisce le coordinate x e y della particella in un certo istante u .



IV.151/ Discretizzazione di un iperboloido generico utilizzando entrambe le schiere di generatrici.

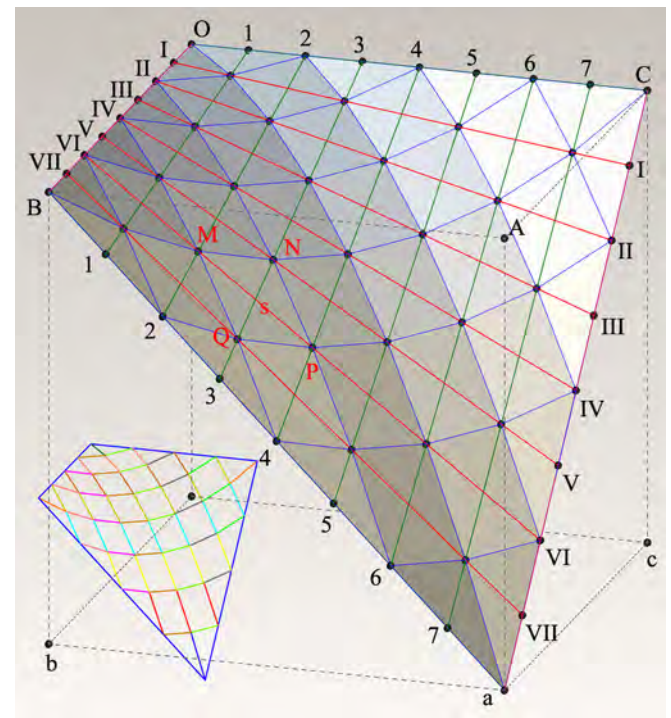


IV.152/ Tetraedrizazione dell'iperboloide generico.

Uno dei vantaggi più importanti di questo tipo di rappresentazione matematica è che riesce a descrivere in modo molto accurato sia le superfici classiche della geometria proiettiva ed analitica (come le rigate, le superfici di traslazione e quelle di rotazione), sia le superfici libere. Abbiamo quindi un'estensione delle famiglie delle superfici della trattazione classica.

Le curve parametriche u e v sono curve NURBS che derivano dalle B-spline e dalle curve di Bezier. Le curve di Bezier (dal nome del matematico francese che le introdusse nel 1962 per la progettazione delle carrozzerie d'automobili) sono curve d'interpolazione di punti assegnati (senza però passare per essi) i quali vengono chiamati punti di controllo (o poli). L'analogia con l'uso dei listelli (detti appunto *spline*) utilizzati nel design di carrozzerie o scafi, è evidente in questo tipo di algoritmo di approssimazione. Il poligono⁴³ formato dai punti di controllo è chiamato *poligono di Bezier* o poligono di controllo; l'ordine k di una curva di Bezier è pari al numero p dei punti di controllo. Visto che in una spline, il grado n è definito dall'uguaglianza:

$$n=k-1$$



IV.153/ Tetraedrizazione del paraboloide iperbolico.

e visto che nelle curve di Bezier il numero dei poli è uguale all'ordine della curva, cioè $p=k$, allora la relazione precedente diventa:

$$n=p-1$$

Altre proprietà delle curve di Bezier sono:

- la curva inizia per il punto P0 e termina nel punto Pn (endpoint interpolation property);
- la curva è rettilinea se e solo se i poli sono allineati;
- nei punti iniziali e finali la curva è tangente al primo segmento (e all'ultimo) del poligono di Bezier;
- curve come il cerchio non possono essere descritte accuratamente da una curva di Bezier o da altre sottocurve sempre di Bezier⁴⁴;
- la curve offset (parallele a quella di origine) di una curva di Bezier non è un curva di Bezier;
- il poligono convesso⁴⁵ del poligono di Bezier contiene la curva di Bezier.

Le curve B-spline (Basis spline) derivano dalle curve di Bezier ma sono formate da più tratti. Il loro ordine k è sempre minore del numero p dei relativi punti di controllo. Questa variazione fa in modo che per alcuni valori del grado della curva, la curva B-spline possa coincidere con la curva di Bezier. Inoltre la curva B-spline si allontana tanto di più dal poligono di controllo quanto più aumenta il valore di k , tendendo quindi alla curva di Bezier. Il vantaggio più grande delle curve B-spline è il fatto che possono essere modificate localmente: cambiando un nodo (un insieme di numeri, che definiscono la separazione tra i tratti della curva e di cui parleremo tra breve) vengono influenzati solo k tratti.

Possiamo pensare che la posizione della nostra particella in ogni istante u sia una media delle influenze di tutti i punti di controllo dove però i poli più vicini sono più influenti di quelli più lontani⁴⁶. In termini matematici questo si esprime con la relazione delle B-spline:

$$Q(u) = \sum_{i=0}^n B_i N_{i,k}(u)$$

La funzione $B_i N_{i,k}(u)$ che determina quanto il punto di controllo B_i influenza la curva nell'istante u è chiamata *funzione di base* (da cui il significato di B-spline cioè *basis spline*) di quel punto di controllo. Il valore di questa funzione è un numero reale, così che un qualsiasi punto $Q(u)$ può essere definito ad esempio dal 25% della posizione di un punto di

controllo, più il 50% della posizione di un altro e così via fino a determinare la funzione di base per ciascun punto di controllo. Abbiamo detto che i punti di controllo influenzano una parte della curva in modo che quando la particella si allontana da un certo punto di controllo esso ha poca influenza sulla sua posizione; al contrario quando si avvicina l'influenza aumenta sempre di più. Il concetto vago di "vicino" e "lontano" della particella può essere messo in relazione con il parametro u in modo da individuare all'interno della curva alcune regioni definite in uno specifico intervallo del parametro. Ad esempio se l'intervallo del nostro parametro per tutta la curva va da $u=0$ a $u=10$, possiamo circoscrivere una sua regione, ad esempio l'intervallo che va da $u=3.3$ a $u=7.5$, così che un punto di controllo in posizione mediana $u=5$ avrà un'influenza in quello specifico intervallo. Rappresentando in un grafico la funzione di base di un punto di controllo, dove nell'asse X mettiamo il parametro u e nell'asse Y l'influenza, espressa in percentuale, che il polo ha sulla curva, otteniamo un grafico a campana, che evidenzia che all'interno di un certo intervallo di u , il massimo dell'influenza del polo (circa il 95%) si ottiene nella metà dell'intervallo stesso. Quindi, visto che ogni punto di controllo ha una sua funzione di base, una curva con ad esempio cinque punti di controllo avrà cinque grafici a campana che si sovrappongono in alcuni tratti, ciascuno relativo ad un certo intervallo di u .

In generale però non conviene avere grafici a campana tutti uguali come altezza e uniformemente distribuiti nel parametro u , cioè uguali come larghezza. Per aumentare le possibilità di controllo sulla curva conviene che alcuni punti di controllo possano avere maggiori o minori percentuali di influenza, oppure possano incidere su intervalli di diversa ampiezza. Questa caratteristica è descritta dal termine *non uniform* dell'acronimo NURBS (le NURBS sono particolari B-spline). I punti che segnano la separazione tra i vari intervalli sono i nodi (knot) che ordinati in una lista formano un *vettore dei nodi*, che in questo contesto non sta a significare una direzione tridimensionale. Nel caso della curva precedente, con cinque punti di controllo ognuno agente su uguali intervalli di u , il vettore nodo è del tipo $\{0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0\}$. Variandolo ad esempio in $\{0.0, 1.0, 2.0, 3.75, 4.0, 4.25, 6.0, 7.0\}$ otteniamo un insieme di funzioni non uniformi che modificano l'andamento della curva. In particolare allargando l'intervallo del parametro la funzione di base abbassa il suo

valore di massimo con la conseguenza che il relativo punto di controllo è meno influente sulla curva; al contrario riducendo l'intervallo del parametro u , la funzione raggiunge valori più alti di percentuale d'influenza, che si riflette in un maggiore potere attrattivo del relativo punto di controllo. A questo punto possiamo definire la funzione di base nel seguente modo:

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u-x_i)N_{i,(k-1)}(u)}{x_{i+(k-1)}-x_i} + \frac{(x_{i+k}-u)N_{(i+1),(k-1)}(u)}{x_{(i+p)}-x_{(i+1)}}$$

Dove x_i indica l' i -esimo nodo all'interno dell'intero vettore dei nodi e con k è indicato l'ordine della funzione di base; se k è il valore più alto delle funzioni di base, si dice che la curva NURBS che ne risulta è di grado $k-1$. Si possono definire alcune importanti caratteristiche delle funzioni di base:

- in ogni istante u il valore di tutte le funzioni di base vale esattamente 1;
- se tutti i punti di controllo hanno pesi positivi, la curva NURBS è contenuta all'interno di un perimetro convesso (il convex hull);
- in ogni istante u , non più di k (ordine della curva) funzioni di base influenzano la curva;
- una curva di ordine k è definita solo dove l'ordine delle funzioni di base non sono nulli.

Quest'ultima proprietà ha un interesse di carattere non solo teorico. Se infatti consideriamo una curva NURBS di grado 3 (cioè ordine $k=4$) con un vettore dei nodi ad esempio $\{0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0\}$, curiosamente la curva è definita solo nell'intervallo che va da $u=3$ ad $u=4$. Infatti la curva inizia al k -esimo nodo del vettore nodo e finisce al k -esimo nodo dalla fine.

Un tipo di applicazione di non uniformità dei nodi consente di avere la curva NURBS passante per un punto di controllo e per quel punto ammettere una discontinuità (kink). Ciò è possibile assegnando a vari nodi dell'intero vettore dei nodi, uno stesso valore del parametro u . Infatti la continuità di una curva NURBS si valuta nei giunti definiti dai nodi della curva stessa, dove due parti si incontrano. La direzione del vettore tangente in un punto della curva si calcola come derivata della funzione rispetto al parametro u , e cioè:

$$Q'(u)$$

Quando c'è un cambio istantaneo della direzione del vettore tangente tra due punti infinitamente vicini, allora si verifica la

discontinuità; se le derivate sono uguali c'è invece continuità tra le due parti di curva. In particolare la continuità è definita dai numeri interi 0 (continuità di posizione), 1 (continuità di tangenza o continuità della prima derivata), 2 (continuità di curvatura o continuità della seconda derivata). In generale se ad ogni giunto corrisponde un solo nodo, la curva ha continuità C^{n-1} dove n è il grado della curva, così che se ad esempio la curva è di grado 3 (cioè ordine 4) la curva avrà continuità C2 in ogni giunto. Se due nodi coincidono, allora la continuità in quel giunto si abbassa di un grado; se tre nodi coincidono in un giunto la continuità si abbassa di due gradi, e così via. Quindi per ottenere una discontinuità in un punto della curva, si aggiungono in quel punto, dei nodi al vettore dei nodi. Dobbiamo infine definire cosa si intenda per curve razionali; quello che finora abbiamo descritto è il funzionamento di una B-spline. I punti di controllo di una NURBS hanno associato un altro parametro che determina il suo potere di attrarre verso di sé la regione di curva su cui agisce. Questo ci consente di controllare la curva senza il bisogno di inserire eccessivi punti di controllo con il conseguente aumento delle difficoltà di calcolo. Tale parametro è chiamato peso dei punti di controllo e quando è presente definisce che una curva è di tipo razionale⁴⁷. Da un punto di vista matematico le curve razionali sono curve della quarta dimensione (perché ciascun punto di controllo è caratterizzato dalle tre coordinate cartesiane più la quarta coordinata che è il peso), che vengono poi ridotte nello spazio tridimensionale. Il metodo per ottenere questa riduzione consiste nella divisione della componente w del vertice, cioè il suo peso. Quando le quattro coordinate di un punto vengono divise per la componente w (notiamo che w/w è sempre uguale ad 1) esse vengono chiamate *coordinate omogenee*⁴⁸. Quindi incorporando questo metodo nella definizione di B-spline, otteniamo:

$$Q(u) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,k}(u)} \cdot \sum_{i=0}^n B_i w_i N_{i,k}(u)$$

dove B_i sono le proiezioni dei poli a quattro dimensioni con le coordinate omogenee, e w_i il loro peso.

La caratteristica di essere curve razionali, consente alle NURBS di rappresentare accuratamente le coniche. Le coniche sono curve quadratiche e quindi rappresentabili da curve

NURBS di grado 2 (cioè ordine 3) molto particolari. Sono definite da tre punti di controllo, in cui il primo e l'ultimo sono il punto iniziale e finale dell'arco, mentre quello centrale serve a definire la forma della curva. Il peso dei punti di controllo estremi è 1. Il punto centrale se ha peso minore di 1 genera un'ellisse, se è uguale ad 1 genera una parabola e se è maggiore di 1 genera un'iperbole. Il vettore nodo è del tipo $\{0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0\}$. L'arco di cerchio è trattato come caso particolare di ellisse in cui i lati del poligono di controllo sono uguali formando così un triangolo isoscele; l'angolo α alla base di questo triangolo è uguale alla metà dell'angolo sotteso dall'arco di circonferenza che si vuole rappresentare; il peso di controllo del punto centrale è uguale a $\cos\alpha$. Proprio per quest'ultima caratteristica, possiamo disegnare solo archi minori di 180° ; per archi maggiori, oppure per il cerchio completo, si usano più curve NURBS come ad esempio 4 archi impostati su un angolo di 90° , che comunque sono matematicamente rappresentabili come unica curva.

In generale possiamo individuare le seguenti caratteristiche valide per le curve NURBS dei software matematici, e cioè:

- l'ordine della curva può variare tra 2 e 16 (cioè grado 1 oppure 15);
- i punti di controllo sono rappresentati in forma omogenea, cioè dividendo per il proprio peso w le coordinate spaziali $(x;y;z)$ per determinare la loro posizione nello spazio;
- il numero dei punti di controllo deve essere uguale o maggiore dell'ordine;
- il numero dei nodi è uguale al numero dei punti di controllo più l'ordine della curva;
- i nodi non possono essere rappresentati in forma decrescente;
- se k è l'ordine della curva non ci possono essere più di $k - 1$ nodi con lo stesso valore (tranne che all'inizio o alla fine della curva).

Se introduciamo un secondo parametro v , tutte le considerazioni fatte finora rimangono valide a definire le caratteristiche delle superfici NURBS. Dunque, per qualsiasi superficie NURBS la regola di stima (la formula matematica vista in precedenza), associa un numero ad un punto. Questa regola di stima (che mette in relazione il grado, i punti di controllo con i relativi pesi, ed i nodi) riceve come input un parametro e fornisce come output un punto.

È possibile associare ad ogni punto di coordinate parametriche

$(u;v)$ un punto del piano cartesiano XY . Si crea cioè una corrispondenza, che lega ad ogni coppia di coordinate parametriche della superficie (che a loro volta definiscono le coordinate spaziali $(x;y;z)$ dei punti della superficie), una coppia di coordinate cartesiane $(x;y)$; questa corrispondenza, non sempre è di tipo biunivoco⁴⁹. È un'operazione simile ad uno "stiramento" delle coordinate parametriche u e v , che topologicamente sono uguali agli assi cartesiani X e Y , ma non va confusa con lo sviluppo geometrico della superficie. Ciò ha due effetti immediati: il primo è la generalizzazione dell'operazione a qualsiasi tipo superficie; il secondo è che solitamente non si mantiene la corrispondenza tra le lunghezze.

Ad esempio consideriamo una superficie NURBS generica (fig. IV.154) e creiamo la corrispondenza tra le curve u e v ed il piano XY , in modo da individuare un rettangolo, che rappresenta l'insieme dei valori in cui è definita la superficie, cioè il suo dominio. Nel caso in esame, la superficie non presenta autointersezioni e non è periodica, quindi la corrispondenza tra le coordinate parametriche e le coordinate spaziali, è di tipo biunivoco. Dividiamo in 4 parti uguali, le curve u e v disposte sul piano XY . Individuiamo ora i punti a coordinate spaziali $(x;y;z)$ corrispondenti ai nodi della griglia "parametrica"; questa operazione prende il nome di *mapping delle coordinate parametriche*. Si nota immediatamente che non solo le lunghezze dei bordi della superficie non misurano quanto i lati del rettangolo su XY , ma anche che la distribuzione dei nodi regolari su XY , non è mantenuta dai corrispondenti nodi "spaziali". Questo comportamento apparentemente anomalo, si spiega con il fatto che la corrispondenza che abbiamo istituita fa riferimento esclusivamente alla parametrizzazione della superficie⁵⁰ (e quindi al grado, al numero dei poli, al loro peso, alla distribuzione del vettore nodo e alla modalità in cui essi sono relazionati), e non alle sue caratteristiche dimensionali.

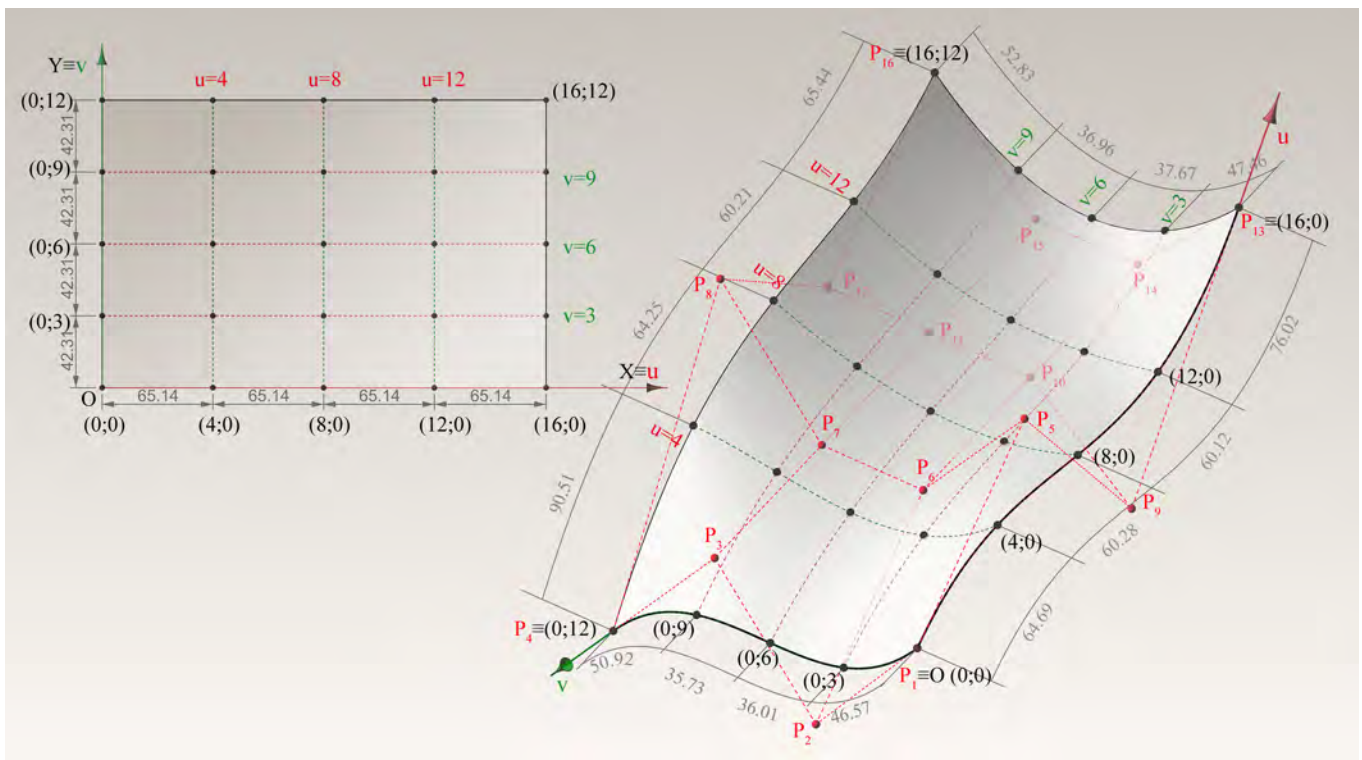
Il vantaggio più importante di questa operazione risiede, come abbiamo detto, nel fatto che essa è applicabile anche al caso di superfici a doppia curvatura, quindi geometricamente non sviluppabili (ad esempio la sfera o l'ellissoide). Il metodo già utilizzato per la discretizzazione delle superfici rigate può allora essere applicato allo sviluppo delle coordinate parametriche. La porzione di piano cartesiano, in cui ogni punto $(x;y)$ è associato ad un valore di u e v , può dunque essere suddivisa con i metodi della tassellazione del piano e poi riassociata ai punti corrispondenti nello spazio. Come abbiamo visto però, la re-

golarità delle suddivisioni ottenute con la tassellazione, generalmente non viene mantenuta sulla superficie. Usiamo il termine generalmente, perché se la superficie ha una parametrizzazione regolare (ad esempio in un cilindro rotondo), l'aspetto dimensionale si mantiene anche nella fase di mapping. Dunque, se da un lato possiamo sfruttare la caratteristica delle NURBS di essere definite dall'andamento di due parametri per poter operare una tassellazione, l'esito del risultato per finalità costruttive (gli stessi requisiti che abbiamo già analizzato per le strutture geodetiche) va valutato caso per caso.

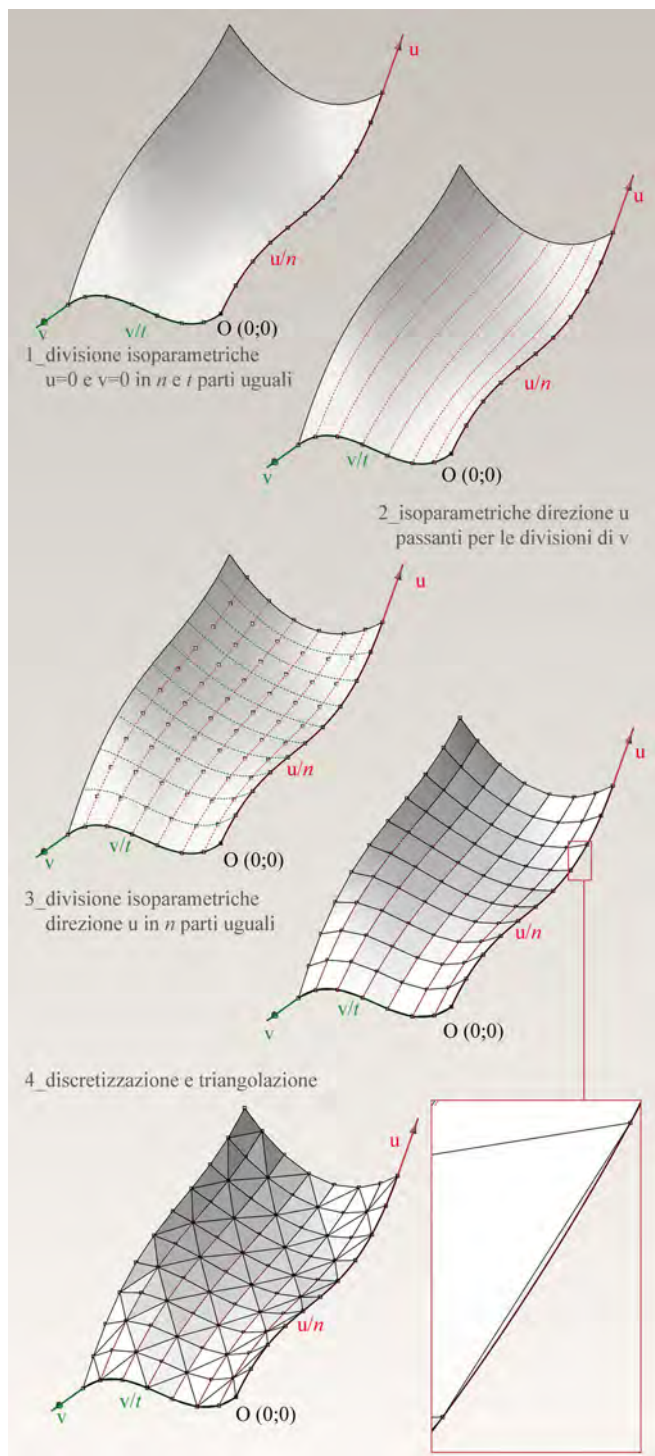
Consideriamo ora un secondo metodo di discretizzazione delle superfici *free-form*, scandito da quattro fasi consecutive (fig. IV.155). Nella prima fase vengono individuate le isoparametriche $u=0$ e $v=0$, e si suddividono rispettivamente in t ed n parti (ovviamente può anche essere $t=n$). Per i punti di divisione di una delle due isoparametriche si tracciano le isoparametriche parallele all'altra direzione: ad esempio dalle divisioni lungo v , si tracciano t isoparametriche parallele ad u . Ora si suddividono in n parti le isoparametriche appena trac-

ciate; si nota che nel caso generico, i punti appena determinati, non risultano allineati con le isoparametriche parallele a v ed uscenti dai punti u/n . La griglia che abbiamo determinata è quadrangolare, con facce composte da porzioni di paraboloidi iperbolici poiché i vertici non giacciono su di un piano. La triangolazione secondo le diagonali dei quadrilateri sghembi, ci consente però di ridurre ciascun parabolide iperbolico secondo due facce piane. Con questa costruzione, abbiamo generato una discretizzazione sufficientemente regolare di una superficie *free-form* qualsiasi. È evidente che la regolarità è direttamente proporzionata alle variazioni di curvatura lungo i due parametri u e v . Inoltre non si può garantire una uniformità della lunghezza delle aste.

Segnaliamo un applicativo chiamato *Paneling Tools*, sviluppato in questi ultimi mesi dall'azienda americana McNeel, che definisce, attraverso una serie di semplici *scripting*, la procedura che abbiamo appena descritto. Questo ci permette di valutare l'efficacia dell'algoritmo di riduzione dal continuo al discreto, applicandolo rapidamente ad un'ampia casistica di superfici.



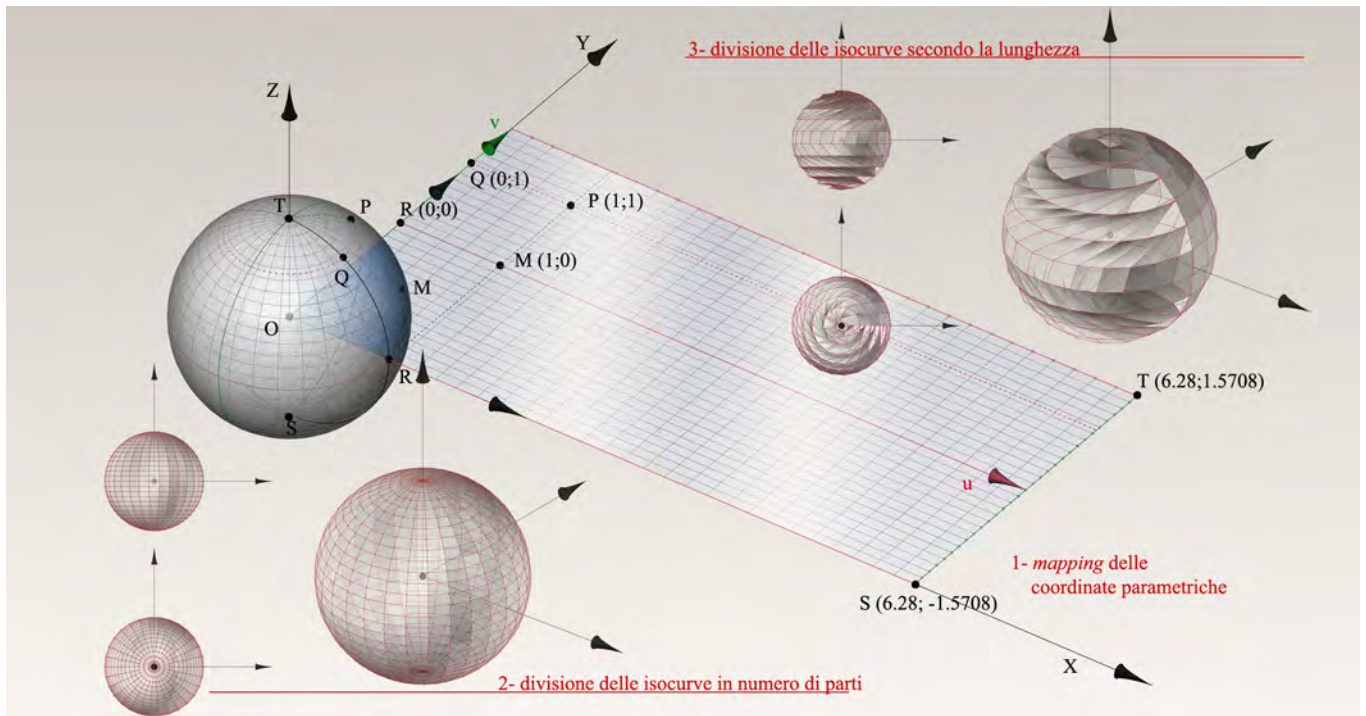
IV.154/ Punti di controllo e dominio di una superficie NURBS.



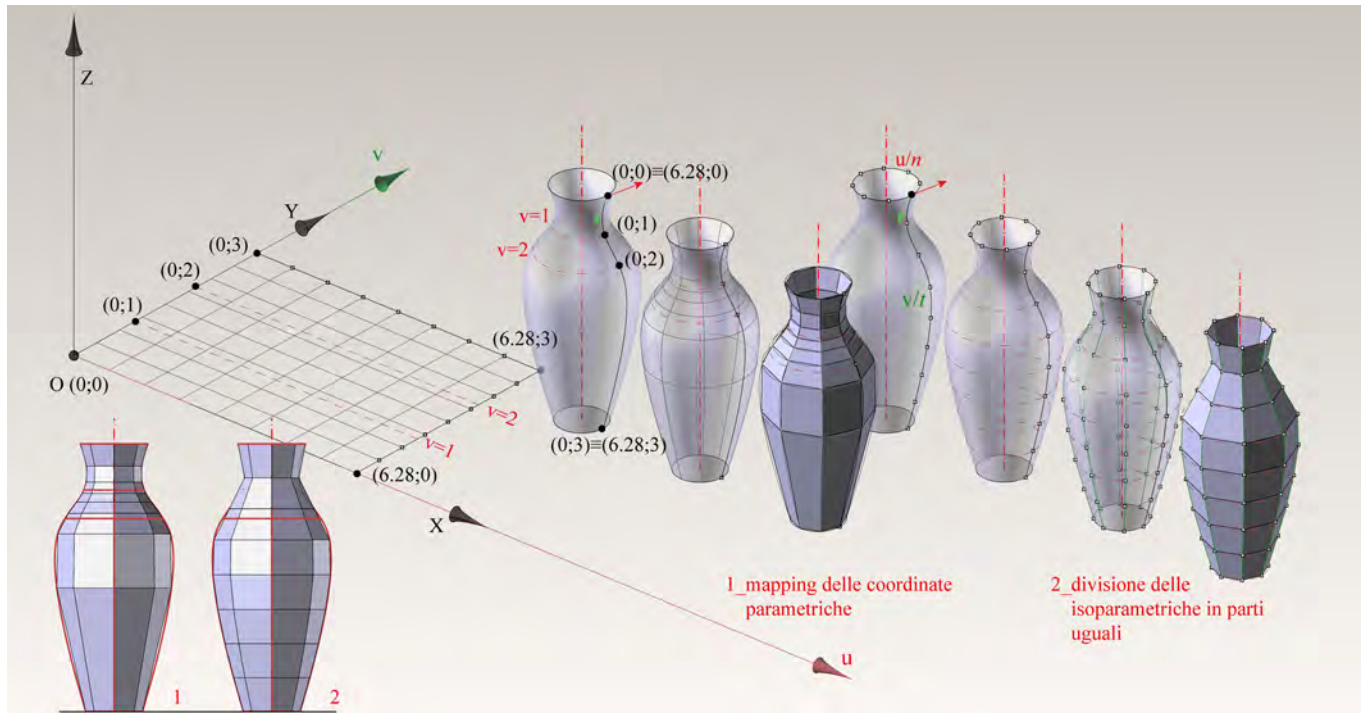
IV.155/ Metodo di discretizzazione di una superficie NURBS.

Le modalità con cui si genera la griglia ordinata di punti, ha anche un approccio alternativo, e cioè operando una divisione secondo una lunghezza prestabilita.

Nel caso di una sfera (fig. IV.156) il metodo della divisione delle isocurve in parti uguali genera il medesimo risultato del metodo del mapping delle coordinate parametriche. Infatti in entrambi i casi, i paralleli tendono ad intensificarsi con l'avvicinarsi ai poli e i meridiani invece rimangono uniformemente distribuiti. Ciò è dovuto alla uniformità di curvatura della superficie sferica. Applicando invece il metodo della divisione delle isoparametriche secondo una lunghezza fissa, non si verificano più problemi di dilatazione ma si perdono i parallelismi con l'arco generatore della sfera. Le superfici generiche di rivoluzione, generano risultati diversi a seconda del metodo di discretizzazione utilizzato (fig. IV.157). Consideriamo una linea grafica che ruoti attorno ad una retta (asse di rivoluzione). Nella sua rappresentazione matematica, la superficie è caratterizzata dal parametro v che coincide con la curva profilo ed ha come dominio il dominio della curva (nel nostro caso varia da 0 a 3); il parametro u della superficie è, come in tutte le superfici di rivoluzione, periodico e variabile da 0 a 6.28 . Il mapping delle coordinate parametriche genera sul piano XY un rettangolo in cui si nota una caratteristica interessante: le isoparametriche parallele ad u e di valore $v=1$ e $v=2$, dividono in tre parti uguali il dominio della superficie. Osservando invece la loro distribuzione nello spazio, le corrispondenti isoparametriche sono ravvicinate nella zona in cui c'è un cambio repentino di curvatura della generatrice. Questo conferma il fatto che la corrispondenza tra la superficie nello spazio e la sua mappatura su XY (che in questo caso non è biunivoca perché per ogni punto della generatrice, esistono due punti con valori distinti di u e v), fa riferimento alla parametrizzazione della superficie. La superficie poliedrica che ne risulta approssima bene la superficie continua, perché si infittisce (e dunque è più accurata) lì dove aumenta la curvatura, ma proprio per questa ragione, il suo andamento non è regolare. Il metodo della divisione delle isoparametriche in parti uguali genera invece una maglia più regolare ma evidentemente meno accurata. Si noti infine che le facce di entrambe le superfici poliedriche sono quadrilateri piani. Ottenute le griglie ordinate di nodi, ci sono diverse modalità con cui è possibile connetterli insieme a formare gli spigoli dei pannelli (fig. IV.158). Ad ogni modo, ricordiamo che la triangolazione è l'unico metodo che garantisce la discretizzazione piana di una superficie (figg. IV.159 e IV.160).



IV.156/ Confronto tra i metodi di discretizzazione di una superficie sferica rappresentata matematicamente.



IV.157/ Confronto tra i metodi di discretizzazione di una superficie di rivoluzione.



IV.158/ Esempi di modalità di connessione dei nodi di una griglia.

Note

1. Emmer, *L'occhio di Horus- Itinerari nell'immaginario matematico*, pp. 71-79.

2. Carl B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano, 2004.

3. Paola Gario, *L'immagine geometrica del mondo: storia dei poliedri*, Stampatori Editore, Torino 1979.

4. Platone, *Timeo*, Traduzione di Francesco Acri, in: http://it.wikisource.org/wiki/Timeo/Capitolo_XIX

5. Michele Emmer, *Art and Mathematics: the Platonic Solids*, in *Leonardo*, vol. 15, n. 4, 1982.

6. J. Kepler, *Harmonices Mundi*, Traduzione di Charles Glenn Wallis, in: <http://www.sacred-texts.com/astro/how/index.htm>

7. Il mazzocchio era un copricapo fiorentino a forma di toro poliedrico e che interessò moltissimo Paolo Uccello.

8. Nel 1810 il matematico francese Augustin Louis Cauchy dimostrò che i cinque solidi Platonici e i quattro solidi di Keplero Poincaré sono i soli poliedri regolari possibili.

9. Leonard Euler, *Elementa Doctrinae Solidorum*, Pietroburgo, 1758.

10. Adrian Gheorghiu, Virgil Dragomir, *Geometry of structural forms*, Applied Science Publisher LTD, 1978.

11. Riccardo Migliari, *Dieci lezioni di geometria descrittiva. La teoria delle ombre e del chiaroscuro. Il modello geometrico del moto apparente del Sole*, in "Quaderni di Applicazioni della Geometria Descrittiva", n.3, Roma, 1984.

12. Il teorema di Dandelin-Quetelet afferma che "i fuochi dell'ellisse proiezione del contorno apparente di una sfera, rispetto ad una assegnata direzione di proiezione, sono le proiezioni degli estremi del diametro della sfera che è perpendicolare al piano di quadro".

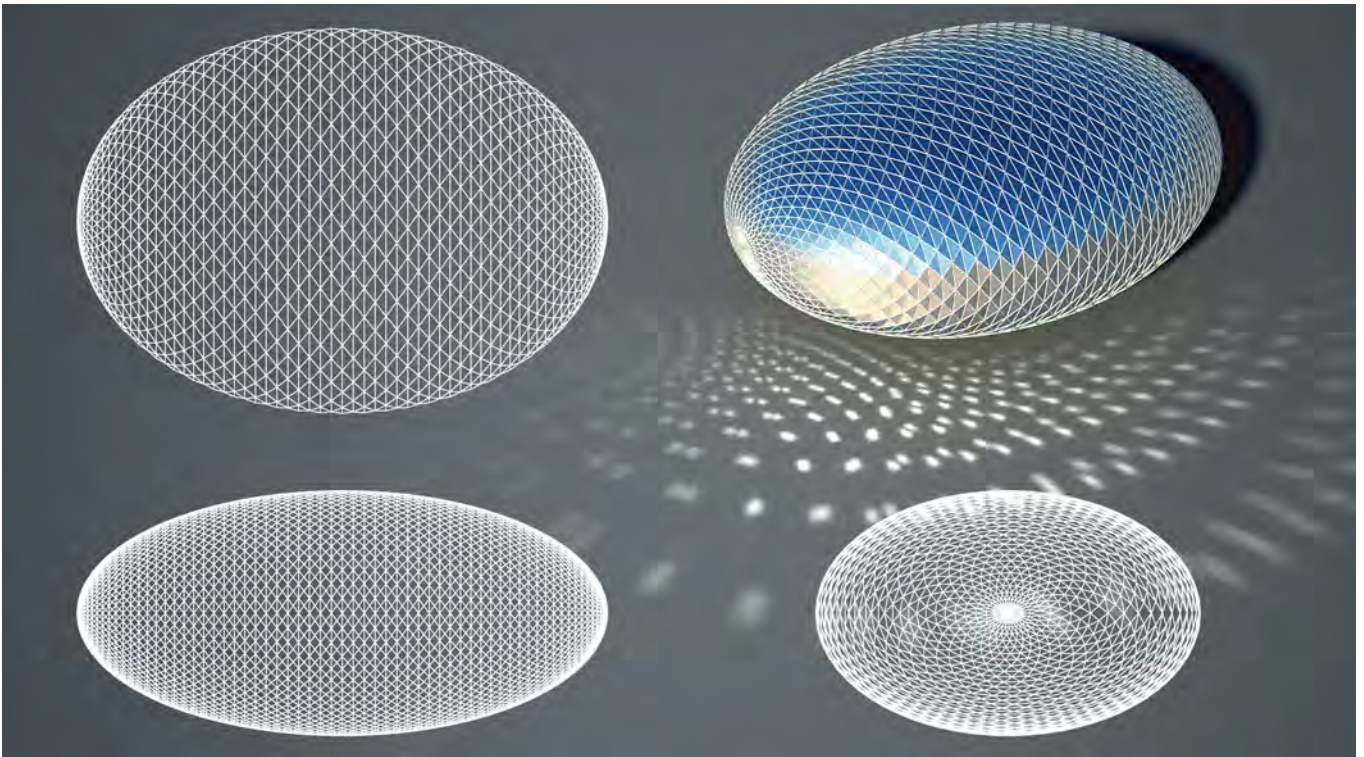
13. Come fa notare Migliari "la ricostruzione della terna ammette due infinità di soluzioni, una per ciascuna delle due possibili direzioni di proiezioni, simmetriche rispetto al piano di proiezione. Se si trascura l'orientamento destrorso o sinistrorso della terna, alle due possibilità suddette se ne aggiungono altre due, date dalle terne simmetriche di quelle già ricostruite".

14. Gino Loria, *Metodi matematici*, Milano 1935, X.

15. Si noti che questo criterio di troncamento, se applicato al cubo o al dodecaedro, non genera alcun solido semiregolare.

16. Wolfram Mathematica 6.0, *Wolfram Research, Inc.* www.wolfram.com

17. http://www.steelpillow.com/polyhedra/five_sf/five.htm



IV.159-160/ Triangolazioni di superfici.

18. Le coordinate cartesiane $(x;y;z)$ degli undici vertici dell'endecaedro bisimmetrico, sono:

A: (0; 0; 2)
 B: (2; 1; 1)
 C: (0; -1; 1)
 D: (-2; 1; 1)
 E: (0; 2; 0)
 F: (1; -1; 0)
 G: (-1; -1; 0)
 H: (2; 1; -1)
 J: (0; -1; -1)
 K: (-2; 1; -1)
 L: (0; 0; -2)

19. Le coordinate cartesiane $(x;y;z)$ degli undici vertici dell'endecaedro sfenoide, sono:

A: $(13/7; [3*\text{Sqr}(3)]/7; 1)$
 B: $(1; \text{Sqr}(3); 0)$
 C: $(2; \text{Sqr}(3); 0.5)$
 D: $(2.5; [\text{Sqr}(3)]/2; 0)$
 E: $(2.25; [\text{Sqr}(3)]/4; 0.5)$
 F: $(2; 0; 0)$
 G: $(0; 0; 0.5)$
 H: $(2; \text{Sqr}(3); -0.5)$
 J: $(2.25; [\text{Sqr}(3)]/4; -0.5)$

K: (0; 0; -0.5)
 L: $(13/7; [3*\text{Sqr}(3)]/7; -1)$

20. Joseph Plateau, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1873.

21. Emmer, *L'occhio di Horus- Itinerari nell'immaginario matematico*, pp. 253-261.

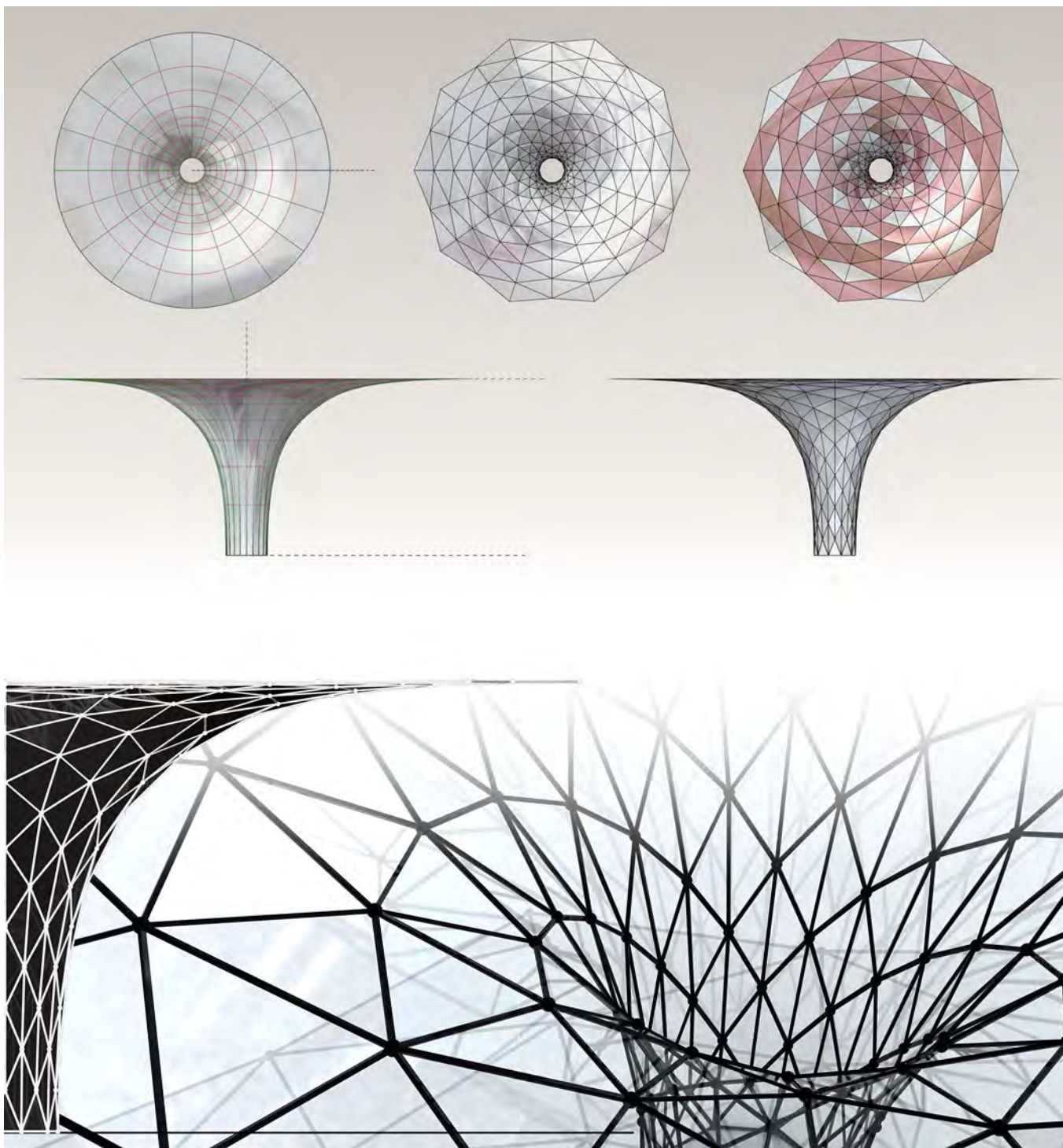
22. J.E. Taylor, *The structure of Singularities in Soap-Bubbles-like and Soap-film-like Minimal Surfaces*, in *Annals of Mathematics* n. 103, 1976.

23. Plateau non riuscì a vedere tutti gli esperimenti poiché in seguito ad una serie di osservazioni fatte direttamente al sole, divenne cieco. Gli esperimenti gli venivano raccontati dai collaboratori e furono descritti attraverso i disegni.

24. D. Hoffman, *The Computer Aided Discovery of new Embedded Minimal Surfaces*, in *The Mathematical Intelligencer*, vol.9, 1987.

25. Le coordinate cartesiane $(x;y;z)$ dei venti vertici del dodecaedro irregolare, sono:

A: (3.1498; 0; 6.2996)
 B: (-3.1498; 0; 6.2996)



IV.160/ Triangolazioni di superfici.

C: (4.1997; 4.1997; 4.1997)
 D: (0; 6.2996; 3.1498)
 E: (-4.1997; 4.1997; 4.1997)
 F: (-4.1997; -4.1997; 4.1997)
 G: (0; -6.2996; 3.1498)
 H: (4.1997; -4.1997; 4.1997)
 I: (6.2996; 3.1498; 0)
 L: (-6.2996; 3.1498; 0)
 M: (-6.2996; -3.1498; 0)
 N: (6.2996; -3.1498; 0)
 O: (4.1997; 4.1997; -4.1997)
 P: (0; 6.2996; -3.1498)
 Q: (-4.1997; 4.1997; -4.1997)
 R: (-4.1997; -4.1997; -4.1997)
 S: (0; -6.2996; -3.1498)
 T: (4.1997; -4.1997; -4.1997)
 U: (3.1498; 0; -6.2996)
 V: (-3.1498; 0; -6.2996)

26. Le coordinate cartesiane (x;y;z) dei ventiquattro vertici del tetrakaidecaedro, sono:

A: (3.14980; 3.70039; 5)
 B: (-3.14980; 3.70039; 5)
 C: (-5; 0; 5)
 D: (-3.14980; -3.70039; 5)
 E: (3.14980; -3.70039; 5)
 F: (5; 0; 5)
 G: (4.19974; 5.80026; 0.80026)
 H: (-4.19974; 5.80026; 0.80026)
 I: (-6.85020; 0; 1.29961)
 L: (-4.19974; -5.80026; 0.80026)
 M: (4.19974; -5.80026; 0.80026)
 N: (6.85020; 0; 1.29961)
 O: (5.80026; 4.19974; -0.80026)
 P: (0; 6.85020; -1.29961)
 Q: (-5.80026; 4.19974; -0.80026)
 R: (-5.80026; -4.19974; -0.80026)
 S: (0; -6.85020; -1.29961)
 T: (5.80026; -4.19974; -0.80026)
 U: (3.70039; 3.14980; -5)
 V: (0; 5; -5)
 W: (-3.70039; 3.14980; -5)
 Z: (-3.70039; -3.14980; -5)
 Y: (0; 5; -5)
 X: (3.70039; -3.14980; -5)

27. <http://www.chrisbosse.de/>

28. A. H. Schoen, *Infinite Periodic Minimal Surfaces without Self-Intersection*, Electronic Research Center, National Aeronautics and Space Administration, Washington D.C., 1970.

29. M. Burt, *Saddle Polyhedra & Close-Packing*, in *Zodiac* n. 22, Milano 1973.

30. Si noti che nell'articolo di Burt, l'angolo veniva indicato con un'ampiezza di 109.28°. Risulta evidente che questo errore (infatti con quest'angolo non si può individuare l'esagono spaziale) sia dovuto a problemi strumentali.

31. In geometria differenziale, una superficie S si definisce continua se per ogni suo punto esiste un piano tangente ad S e perpendicolare alla normale n.

32. Nel caso in esame la misura del segmento di geodetica risulta essere 9,528 unità di misura con valore di tolleranza impostato su 0,001 unità; la lunghezza dei lati dei triangoli equilateri dello sviluppo piano risulta essere di 9,526. La differenza di sole 0,002 unità di misura risulta coerente con le considerazioni fatte a proposito del concetto di tolleranza dei modellatori matematici.

33. A. Marcolli, *Teoria del campo 2*, Sansoni Editore, Firenze 1991.

34. R.B. Fuller, R. Marks, *The Dymaxion World of B. Fuller*, A Doubleday Anchor Book, New York, 1973.

35. Osservando la sequenza 12, 42, 92, 162, 252, 362,... si nota che togliendo il 2 (comune a tutti i numeri) si ottengono i numeri che esprimono il quadrato del numero dello strato che avvolge il nucleo: $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$... Inoltre, Marcolli fa notare che nella formula del numero delle sfere Fuller associa il 2 "a due sfere addizionali di ogni livello o strato che si aggiungono al fattore quadratico e fungono da terminali polari, i due poli da cui passa l'asse neutro di rotazione, caratteristico di ogni sistema atomico. Il numero 10, moltiplicatore, è relativo al numero di simmetrie triangolari presenti in ogni metà della sfera dell'atomo. Il numero delle simmetrie per entrambi gli emisferi è doppio". Marcolli, *op. cit.*, p. 245.

36. M. Emmer, *Dai radiolari ai vasi di Gallè*, in *Matematica e Cultura 2007*, pubblicato da Springer, 2007.

37. R. Migliari, *Le cupole geodetiche: guida all'uso di un'utopia*, Edizioni Kappa, Roma 1975.

38. Anche se la sfera racchiude il massimo volume con il minimo di superficie, dal punto di vista matematico non può essere definita superficie minima. Infatti, la media tra le curvature principali della sfera è diversa da zero.

39. Si noti che non tutti i solidi semiregolari possono generare solidi quasiregolari se sottoposti all'operazione di doubling. In alcuni casi infatti (come ad esempio nel solido **A I**) si generano poligoni sghembi che non individuano quindi una faccia piana.

40. Queste impostazioni hanno il solo scopo di rendere agevole la costruzione della discretizzazione andando a sfruttare la simmetria

rispetto al piano YOZ del conoide. La stessa procedura può essere seguita per generare altri conoidi generici a partire da due linee rette e da una linea curva qualsiasi.

41. Ciò è dovuto al fatto che il paraboloido iperbolico è l'unica superficie rigata ad avere due piani direttori.

42. La S finale per molti autori è compresa nella sigla B-spline, quindi spesso si parla di curve o superfici NURB.

43. Il termine geometricamente più appropriato sarebbe *linea spezzata di controllo*, che può essere aperta o chiusa a formare un poligono. Per convenzione è più diffuso il termine *poligono di controllo*.

44. Questo tipo di curve possono essere rappresentate solo da equazioni polinomiali razionali, in modo da avere l'incognita anche al denominatore.

45. Il poligono convesso (*convex hull*) in caso di oggetti nel piano, può essere immaginato come un elastico che viene teso in modo da contenere tutti gli oggetti. Nel caso dei punti del piano è assimilabile al poligono di minima lunghezza che li può contenere.

46. Philip J. Schneider, *NURB Curves: A Guide for the Uniniti-*

ated, in *Develop, The Apple Technical Journal*, n.25, Marzo 1996. <http://devworld.apple.com/dev/techsupport/develop/issue25/schneider.html>

47. In generale quando disegniamo con il modellatore matematico una linea grafica, il peso di ciascun punto di controllo vale 1. Se andiamo a controllare le proprietà della curva ci accorgiamo che essa è di tipo non-razionale, cioè una B-spline. Cambiando il peso di solo uno dei punti di controllo, la curva diventa di tipo razionale.

48. Le coordinate omogenee vengono utilizzate in matematica per esprimere il concetto di infinito. Infatti se consideriamo il rapporto a/w di due numeri reali, diminuendo w esso tende all'infinito che si raggiunge con $w=0$. Se w è diverso da zero allora v vale esattamente a/w .

49. Basti pensare infatti al caso di un cappio: per esso a due copie di coordinate parametriche corrisponde una sola coppia di coordinate spaziali.

50. Ciò vuole dire che due superfici, apparentemente uguali, ma definite da matematiche diverse, individuano su XY, domini diversi.

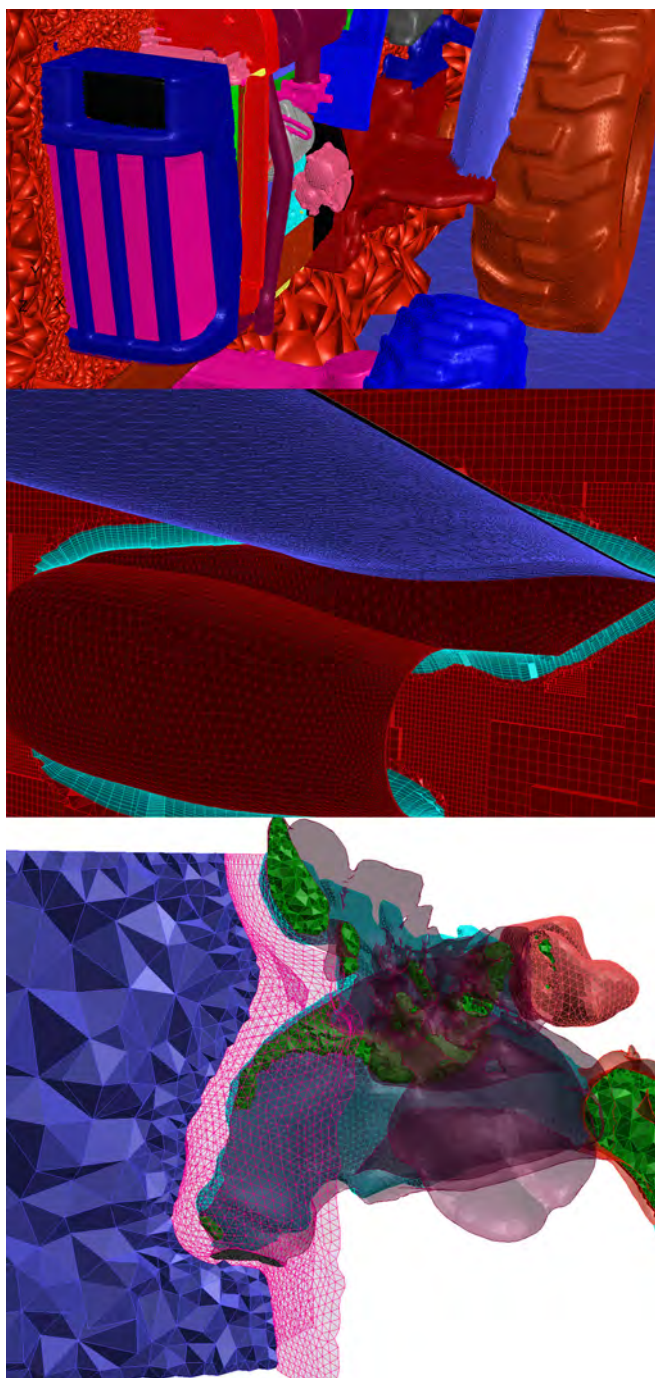
Gli algoritmi informatici di *meshing*

La generazione delle mesh

Una delle più importanti e diffuse ricadute dei processi di tassellazione, si ha in campo informatico nella fase di discretizzazione delle superfici continue. Abbiamo visto che la geometria rappresentata dai modellatori matematici di tipo NURBS, è una geometria parametrica che rappresenta in modo accurato e continuo qualsiasi tipo di superficie. Per necessità di visualizzazione, i modellatori NURBS usano delle superfici poliedriche “invisibili” che ottimizzano, o meglio, semplificano, la matematica NURBS. Ciò che noi vediamo nei nostri monitor, durante le operazioni di modellazione tridimensionale, in realtà non è la superficie che abbiamo costruita matematicamente, ma la sua riduzione in una maglia (*mesh*). Le superfici *mesh* sono delle superfici poliedriche formate da facce piane solitamente triangolari o quadrangolari. Nella computer grafica, consentono di snellire il processo di rendering poiché le librerie grafiche (ad esempio le *Open Graphics Library*) e gli acceleratori grafici hardware, sono studiati per operare su questo tipo di superfici in modo molto rapido. Il compito delle Open GL è quello di ricevere come input, delle entità primitive come linee e poligoni, e trasformarli in pixel; tale processo prende il nome di *rasterizing* o rasterizzazione.

Tuttavia, il motivo per cui ad esempio in una sfera non percepiamo una superficie poliedrica ma una superficie continua, è da ritrovarsi nelle operazioni di algoritmi di interpolazione delle normali, che intervengono nella fase di rasterizzazione dei poligoni. Uno dei più diffusi è il *Phong shading*, sviluppato intorno gli anni '70 da Bui Tuong Phong dell'università dello Utah. Il Phong Sha-

ding è un miglioramento del *Gouraud shading*. Il principio si basa sulla stima della normale in ogni vertice di un poligono del modello *mesh*, calcolando la media delle normali dei poligoni che lo toccano. A questo punto viene interpolata linearmente la normale N lungo l'intera superficie del triangolo (e non solo nel suo perimetro come avviene nell'algoritmo di Gouraud) partendo dalle tre normali date; in ognuno dei pixel che rappresentano il triangolo rasterizzato, viene normalizzato N così da poter essere utilizzato nel modello d'illuminazione di Phong, per l'assegnazione del relativo colore. La procedura di approssimazione di una superficie continua di tipo NURBS ad una discreta di tipo *mesh*, prende il nome di *surface triangulation* o *surface tessellation*. La creazione di superfici *mesh* a partire da un insieme ordinato o meno, di punti (*point cloud*) ha un vastissimo campo di applicazioni, quali ad esempio il rilievo tridimensionale per mezzo di laser scanner, l'analisi ad elementi finiti (FEM) oppure la stereolitografia per il *rapid prototyping*. Il problema comune a questi settori è la gestione informatica del dato discreto. Tale gestione è strettamente correlata al tipo di finalità che la generazione della *mesh* si ripropone. Ad esempio, nel caso di un modello digitale del terreno (Digital Terrain Model, DTM) la nuvola di punti è costituita dal rilievo topografico realizzato al suolo o per via aerea con ricognizioni fotogrammetriche o di scansioni laser. Il modello nasce dunque da un insieme di punti casualmente distribuiti nello spazio tridimensionale. Per realizzare degli efficienti modelli topologici di superfici a variazione casuale (proprio come il terreno) uno degli strumenti più efficaci consiste nella realizzazione di un reticolo a maglia triangolare: il *Triangular Irregular*



V.1/ In figura sono illustrate alcune analisi agli elementi finiti per la distribuzione del calore in un veicolo agricolo, per lo studio aerodinamico di un'ala d'aereo e per l'andamento del flusso di aria in una cavità nasale (ANSYS, Inc.)

Network, TIN. Questo tipo di *mesh* ha lati che uniscono l'insieme dei punti misurati sull'oggetto, in modo da generare dei triangoli che hanno la caratteristica geometrica di individuare univocamente un piano nello spazio. Il risultato è dunque una superficie poliedrica composta da elementi triangolari.

La riduzione di problemi descritti da equazioni alle derivate parziali, in un sistema di equazioni algebriche, è una tecnica numerica, sviluppatasi a partire dagli anni '50 in campo aerospaziale con il contributo di M.J. Turner, che prende il nome di metodo degli elementi finiti (FEM). L'obiettivo è quello di cercare soluzioni approssimate quando il dominio ha forma complessa (come la carrozzeria di un'automobile), quando il dominio è variabile (cambiamento delle condizioni al contorno), o in casi di accuratezza non omogenea (nel caso dei crash test, l'accuratezza sarà maggiormente richiesta nelle zone d'impatto). Il campo di applicazione di questi metodi spazia dall'ingegneria civile ed aeronautica fino ad arrivare all'analisi della dinamica dei fluidi per l'industria navale oppure alla medicina (fig. V.1).

Anche in questo caso la caratteristica principale è quella di ridurre un dominio continuo in un dominio discreto attraverso la semplificazione in entità primitive (gli elementi finiti) di forma semplice: triangoli e quadrilateri per il 2D, e tetraedri ed esaedri per il 3D. Proprio questa è la caratteristica che distingue i metodi di analisi FEM rispetto alle superfici poliedriche ad esempio di un DTM: la possibilità di creare *mesh* volumetriche se l'analisi da compiere lo richiede.

Gli algoritmi informatici di meshing

La generazione automatica di *mesh*¹ a partire da un assegnato dominio è un campo dell'informatica relativamente recente. La prima grande distinzione riguarda le due tipologie di griglie da cui possono essere generate le *mesh*: griglie strutturate e griglie non strutturate. Solitamente le *mesh* appartenenti al primo gruppo sono quadrilatere oppure esagonali e sono caratterizzate dal fatto che ogni nodo ha lo stesso numero di elementi contigui. Da questo punto di vista le griglie create nella discretizzazione a fini costruttivi delle superfici

geometriche esaminate nel precedente capitolo, rappresentano un tipo di griglia strutturata.

Le griglie non strutturate ammettono invece una libertà di numero degli elementi che si incontrano in un nodo, con la conseguenza di meglio adattarsi al dominio di origine. In generale le *mesh* sono caratterizzate da elementi triangolari o tetraedrici benché siano ammesse anche quelle con elementi quadrilateri oppure esaedrici. Dal punto di vista delle tecniche informatiche per la generazione delle *mesh* strutturate o non strutturate, la grande differenza risiede nella facilità di memorizzare in una matrice i modelli a maglia regolare, con la conseguente semplicità di programmazione di algoritmi per l'estrazione di informazioni dal modello.

Di seguito è riportata una ricognizione degli algoritmi più diffusi nei software industriali per la generazione di *mesh*. Si tratta di una selezione che fa riferimento ad un quadro riassuntivo proposto da Steven J. Owen, direttore del *Computational Modeling Science Department* dei *Sandia National Laboratories*², che sono i principali laboratori di ricerca del *Department of Energy* degli Stati Uniti. Il sito web curato dallo stesso Owen, e chiamato *Meshing Research Corner*, si propone di mettere insieme la letteratura disponibile circa il tema della generazione di *mesh* non strutturate. Inoltre raccoglie tutte le pubblicazioni degli atti relativi alle conferenze *International Meshing Roundtable*, che annualmente si svolgono in varie parti del mondo, con l'obiettivo principale di fare un punto sullo stato dell'arte delle ricerche informatiche e tracciare quindi nuove linee di sviluppo per il futuro. La vastità dell'argomento ed il suo continuo aggiornamento, uniti ad una difficoltà oggettiva di comprendere contenuti di una scienza (l'informatica) che esula dalle nostre competenze, non ci consente una trattazione approfondita di questi temi. Tuttavia si ritiene necessario (per le finalità che la seguente ricerca si propone) delineare quelle che sono le principali modalità di natura geometrica con cui operano questi algoritmi.

Generatori di mesh triangolari e tetraedrici

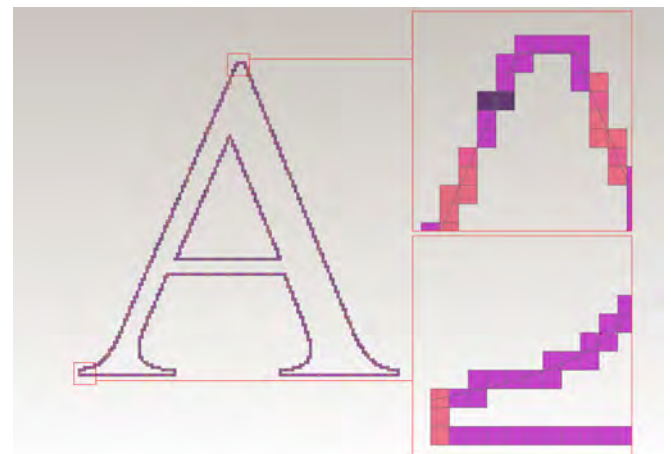
Tra gli algoritmi di generazione automatica di *mesh* triangolari (2D) o tetraedriche (3D) vanno segnalati i seguenti.

Octree

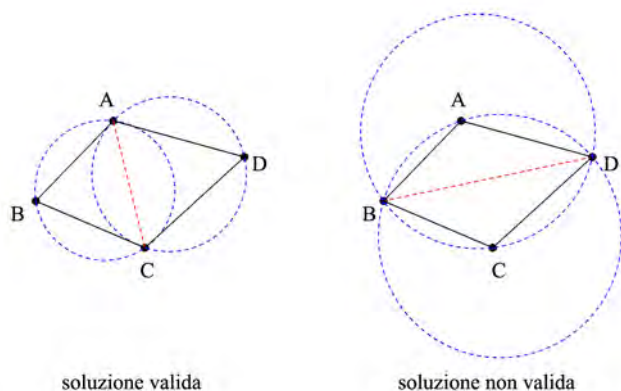
Questa tecnica (da oct-tree, cioè struttura ad albero in cui ogni nodo ha fino a 8 figli) fu sviluppata a partire dagli anni '80 da Mark Shephard del *Rensselaer Polytechnic Institute* di New York³. Si basa su di una suddivisione ricorsiva della geometria di base per mezzo di cubi che la contengono, fino al raggiungimento di un'ideale approssimazione (*fig. V.2*). Dove i cubi intersecano la superficie, vengono introdotte nuove celle. Per garantire cambi non troppo repentini di dimensioni, la suddivisione octree è limitata a certi valori di tolleranza. In seguito è possibile utilizzare altre operazioni di *smoothing* (smussatura) per una discretizzazione più accurata. La tabella di ricognizione dei software attualmente più diffusi sul mercato per la generazione di *mesh* (*Appendice C*), dimostra che questa tecnica ormai è desueta.

Delaunay

Il criterio di Delaunay è la tecnica più usata dai generatori di *mesh*. Si basa su di un concetto molto semplice, il quale impone che ogni nodo, non debba essere contenuto nella sfera che circoscrive qualsiasi tetraedro presente nella *mesh*. Ecco il motivo per cui è conosciuto anche con il nome del *metodo della sfera vuota*. Il problema nel piano si riduce alla condizione che per triangolare quattro nodi **ABCD** di una griglia, tra le due possibili opzioni, viene scartata quella in cui le circonferenze circoscritte ai due triangoli così ottenuti,

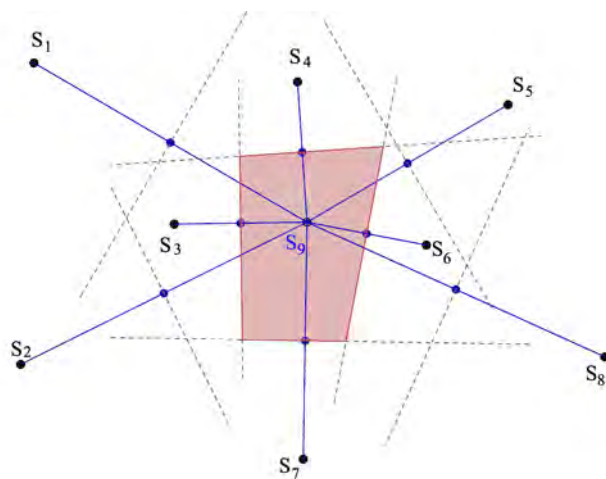


V.2/ La tecnica dell'Octree applicata ad una geometria bidimensionale.



V.3/ Il criterio di Delaunay per la triangolazione dei punti, secondo il quale ogni nodo non deve essere contenuto nel cerchio che circonda qualsiasi triangolo presente nella mesh.

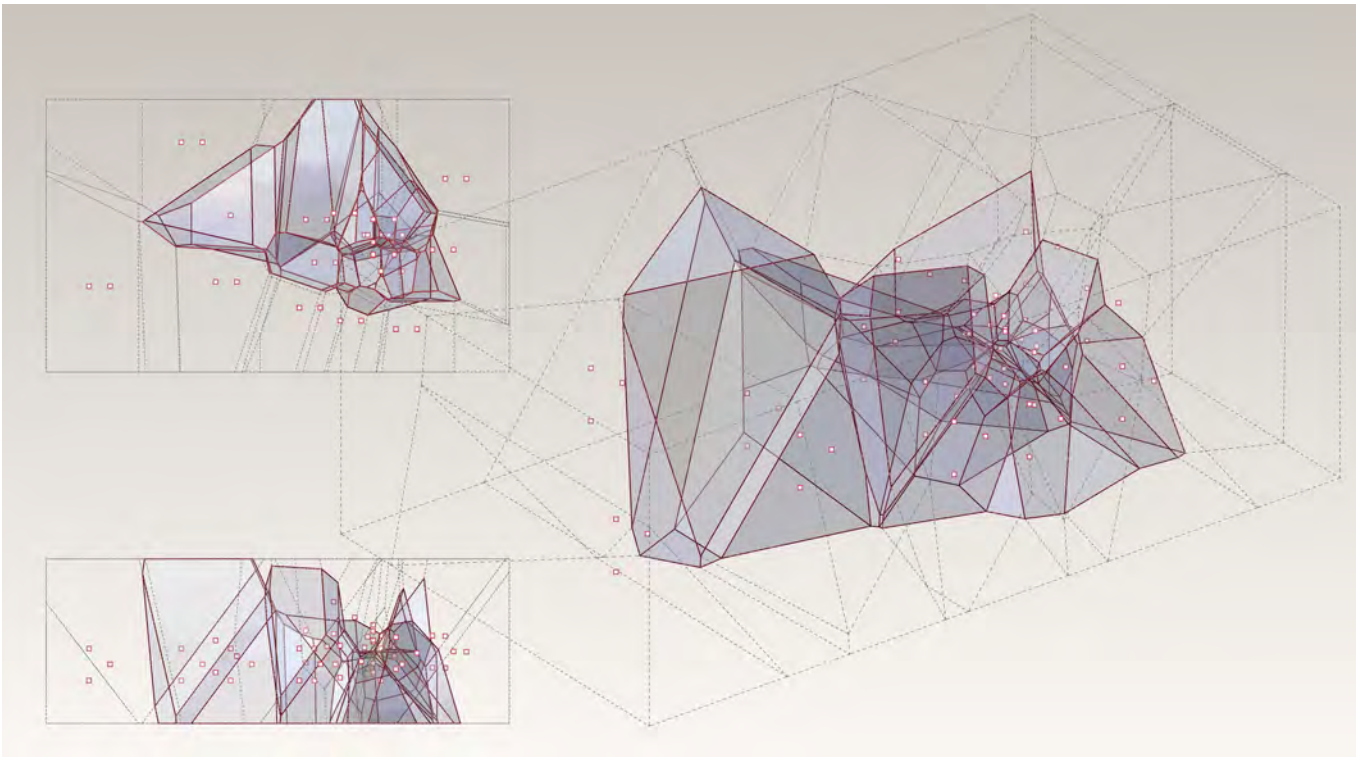
contengono un nodo al loro interno (fig. V.3). Questo criterio era molto noto in geometria e in matematica, ma solo grazie al contributo di Charles Lawson⁴ e Dave Watson⁵, a partire dagli anni '80, è stato implementato per la triangolazione di vertici casualmente distribuiti nello spazio. Quello di Delaunay però, non è un vero e proprio algoritmo bensì è un criterio con cui poter selezionare una soluzione invece che un'altra. Quindi viene associato ad un algoritmo che genera una *mesh* sulla geometria da discretizzare, in modo tale da avere un insieme di nodi iniziali su cui operare. A questo, segue la triangolazione vera e propria dei nodi perimetrali, scartando le soluzioni non coerenti con il criterio di Delaunay. La seconda fase consiste nell'inserimento di ulteriori nodi d'infittimento all'interno della *mesh*, che nuovamente verranno triangolati coerentemente con il criterio di Delaunay. Proprio il metodo d'inserimento degli ulteriori nodi all'interno della *mesh* distingue i tipi di software che usano la triangolazione di Delaunay. È importante a questo punto delineare alcune caratteristiche geometriche della triangolazione di Delaunay. Nel capitolo I a proposito delle tassellazioni casuali che spesso si riscontrano in natura, abbiamo accennato alle *tassellazioni di Dirichlet*. In realtà queste sono più conosciute con il nome di *diagramma di Voronoi* in onore del matematico russo Georgy Voronoi (1868-1908) che



V.4/ Costruzione geometrica del poligono di Voronoi.

approfondì le prime ricerche condotte dal matematico tedesco G.L. Dirichlet (1805-1859). Si tratta della costruzione più importante di reticoli irregolari. Importante perché essa ha campi di applicazione davvero eterogenei come la geofisica, l'informatica, la metallurgia, la biologia a perfino la meteorologia. La prima applicazione del diagramma di Voronoi fu infatti studiata dal climatologo A.H. Thiessen per stabilire le aree d'influenza delle stazioni meteorologiche disordinatamente distribuite nel territorio.

Assegnato un insieme di n punti S (chiamati punti sorgenti) nel piano euclideo, il diagramma di Voronoi è una suddivisione del piano in poligoni convessi (chiamati poligoni di Voronoi), tale che ogni poligono contenga esattamente un punto sorgente, e tale che un qualsiasi punto all'interno di un poligono, è più vicino al relativo punto sorgente di ogni altro punto del piano (fig. V.4). La costruzione geometrica consiste nell'unione di ogni punto sorgente con gli altri punti del piano. Ad esempio a partire dal punto S_9 si tracciano i segmenti di unione con gli altri punti. Si tracciano poi le ortogonali a questi segmenti passanti per i relativi punti medi. Abbiamo definito in questo modo il poligono di Voronoi relativo al punto S_9 , che è il luogo geometrico dei punti del piano più vicini a S_9 di ogni altro punto. Un particolare uso del diagramma di Voronoi, fu applicato nell'analisi dell'epi-



V.5/ Costruzione dei poliedri di Voronoi a partire da un insieme casuale di punti nello spazio.

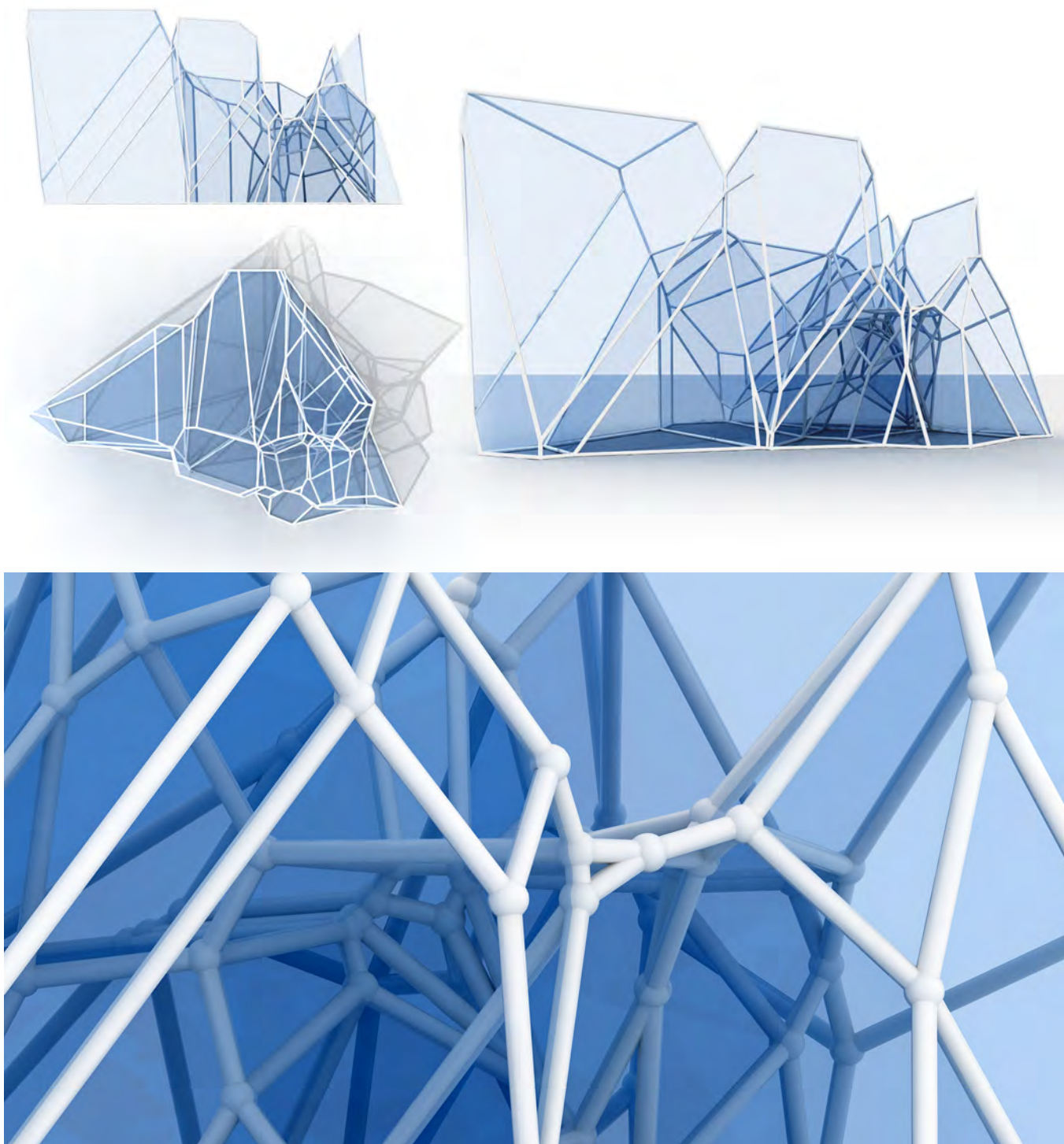
demia di colera del 1854 a Londra, in cui il fisico John Snow mise in relazione un'alta percentuale di mortalità con una precisa area in prossimità di una pompa idraulica, che poi risultò essere infetta.

La costruzione del diagramma di Voronoi è possibile anche a partire da un insieme casuale di punti disposti nello spazio (fig. V.5). La tassellazione irregolare che ne deriva, genera poliedri convessi che ricoprono lo spazio (fig. V.6 e fig. V.7). Le immagini elaborate in queste pagine sono state create utilizzando un semplice *scripting*⁶ (quasi una macro, cioè una serie sequenziale di operazioni) di generazione dei diagrammi di Voronoi, sviluppati da utenti e programmatori per il software *Rhinoceros 4.0*. Il volume che si genera, solo apparentemente casuale, è frutto di un algoritmo tanto semplice quanto affascinante. Rientra a far parte di quella ricca serie d'insegnamenti che la natura quotidianamente ci presenta (basta guardare una tela di un ragno, oppure le crepe in un terreno arido) e che se compresi fino in fondo

possono divenire un'ottima occasione di ricerca formale nella progettazione architettonica.

La proprietà che comunque riguarda più da vicino la nostra indagine, è che collegando ogni punto sorgente solo con i punti sorgenti dei poligoni adiacenti otteniamo la triangolazione di Delaunay (fig. V.8 e fig. V.9). Ciò vuole dire che il diagramma di Voronoi è il duale (o reciproco) della triangolazione di Delaunay. Inoltre, i centri dei cerchi circoscritti ad ogni triangolo di Delaunay coincidono con i vertici dei poligoni di Voronoi. Possiamo quindi passare da una tassellazione di Voronoi ad una triangolazione di Delaunay con semplici passaggi definibili in una procedura automatica.

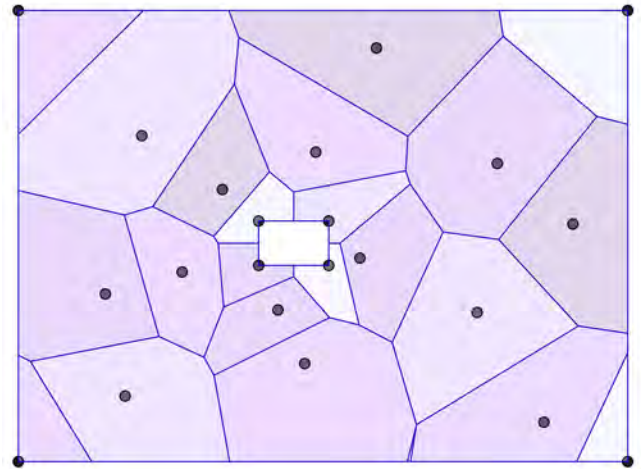
L'utilità della triangolazione di Delaunay, all'interno di un processo di generazione di una *mesh* va messa in relazione con i requisiti che la *mesh* deve possedere. Ricordiamo infatti che il criterio di Delaunay non è l'unico metodo possibile di triangolazione, ma è il più diffuso poiché genera triangoli "corti e grassi" anziché "lunghi



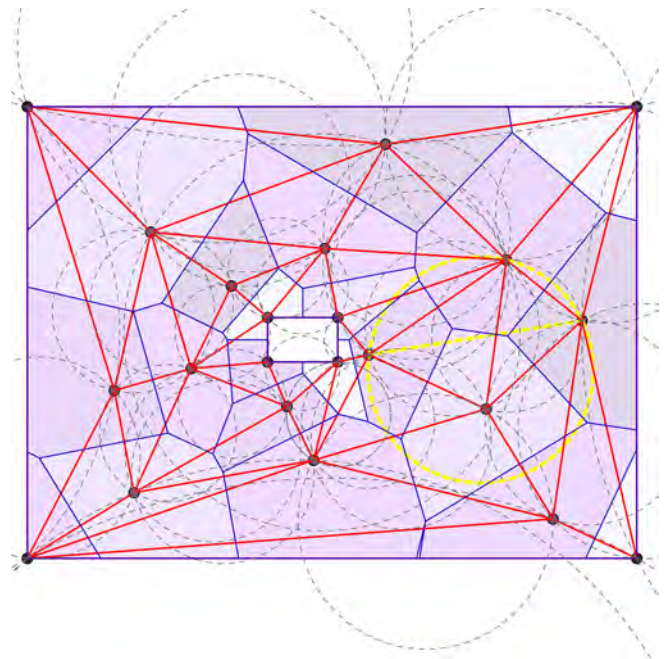
V.6-7/ La ricerca formale nella progettazione architettonica può prendere spunto da fenomeni che spesso ricorrono in natura.

e magri”. Ciò vuole dire che si genera una *mesh* regolare con limitate variazioni di dimensioni tra le tessere. Uno dei metodi più semplici di risolvere il problema dell’inserimento dei nuovi nodi all’interno di un dominio, è quello di inserirli in modo ricorsivo, nei baricentri dei triangoli oppure dei tetraedri irregolari. Weatherill e Hassan⁷ nel 1994, hanno proposto questo metodo automatico di generazione dei nuovi nodi nei baricentri dei tetraedri, dimostrando una regolarità della *mesh* così ottenuta. Un’alternativa altrettanto valida sviluppata da Chew e Ruppert⁸, definisce i nuovi nodi nei centri delle circonferenze (o sfere) dei triangoli (o tetraedri). Una *mesh* apparentemente ben strutturata è quella che si genera utilizzando il *Voronoi-segment point insertion method*. Questo metodo introdotto da Rebay⁹ consiste nella creazione dei nuovi nodi lungo gli spigoli dei poligoni di Voronoi, in modo da soddisfare il criterio della giusta localizzazione spaziale. E ancora un metodo che crea *mesh* ben allineate con il contorno e di tipo regolare, è quello di Marcum¹⁰ con una tecnica chiamata *advancing front*. In questo caso i nodi sono inseriti a partire dall’esterno verso l’interno. Ogni faccia è analizzata per determinare la localizzazione ideale per il quarto punto da inserire nella *mesh* di Delaunay esistente. A questo segue la connessione con gli altri nodi.

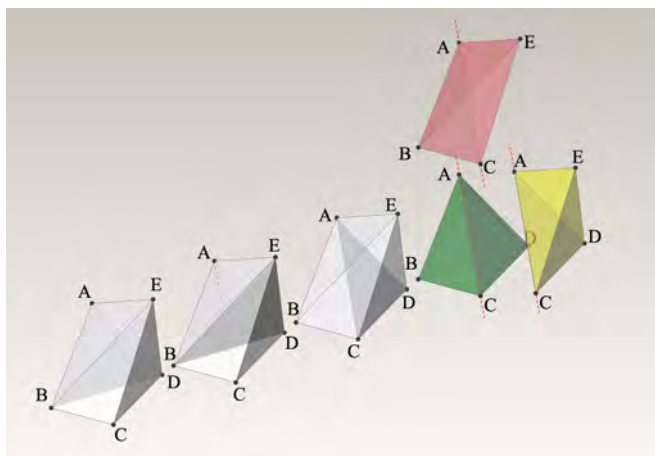
In molte applicazioni degli elementi finiti uno dei requisiti principali è che venga mantenuta integra la superficie iniziale. In molte tecniche del tipo Delaunay invece, prima che vengano generati i nodi interni, viene fatta una tassellazione della geometria, che non sempre garantisce tale requisito. Una implementazione di questi metodi prevede un passaggio intermedio che “forza” la prima triangolazione ad essere contenuta nella geometria iniziale. Non essendo più strettamente di tipo Delaunay, prende il nome di *boundary constrained Delaunay triangulation* (triangolazione Delaunay forzata al contorno). La modifica degli spigoli nel caso bidimensionale è relativamente semplice; può essere ottenuta ribaltando iterativamente gli spigoli dei triangoli fino al raggiungimento dell’approssimazione ritenuta soddisfacente. Il problema si fa più complicato nello spazio dove il risultato è a volte impossibile da raggiungere senza l’inserimento di nuovi nodi. Le tecniche



V.8/ Tassellazione piana per mezzo di poligoni di Voronoi, a partire da una distribuzione casuale di punti nel piano.



V.9/ Relazione di dualità tra la triangolazione di Delaunay ed il diagramma di Voronoi.



V.10/ Inserendo un nuovo spigolo tra due tetraedri adiacenti è possibile suddividerli in tre tetraedri.

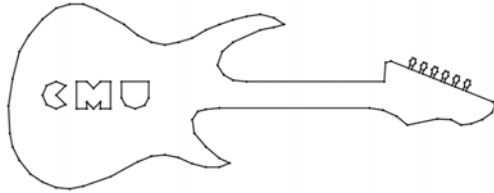
per risolvere questo problema sono numerose. Tra queste, in quella definita da George¹¹, le operazioni di “aggiustamento” degli spigoli, vengono risolte in generale inserendo un nuovo spigolo tra due tetraedri adiacenti, così da generare tre tetraedri con il nuovo spigolo in comune (fig. V.10).

A titolo esemplificativo, vediamo come il criterio di Delaunay lavori all’interno di un algoritmo, nel software *Triangle*¹² utilizzato per la generazione di *mesh* bidimensionali. L’input iniziale consiste in questo caso in una serie di punti che sono estremità di segmenti di retta, così da definire una spezzata chiamata *planar straight line graph* (PSLG) (fig. V.11). Il primo passaggio dell’algoritmo consiste nel determinare la triangolazione di Delaunay per tutti i vertici di input. In generale in questa fase, alcuni dei segmenti di origine possono essere omessi (in questo caso i segmenti del manico della chitarra). Si passa quindi alla modifica forzata della *mesh* per renderla conforme all’input, scegliendo tra due modalità: la prima consiste nell’inserimento dei nuovi punti nei punti medi dei segmenti che non compaiono nella *mesh*; la seconda è invece la *constrained Delaunay Triangulation* che inserisce i nuovi segmenti (quelli della PSLG) eliminando quelli che da essi vengono intersecati, e ripetendo la triangolazione dell’intorno. La terza

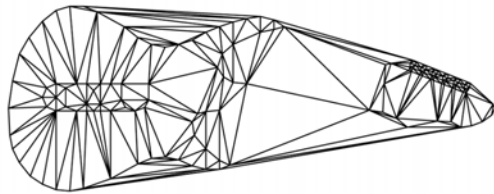
fase consiste nell’eliminazione dei triangoli nelle concavità e nei buchi. Questi ultimi sono trattati come dei punti nel piano specificati dall’utente dove viene immesso un “virus mangia triangoli” che avanza entro un certo livello di tolleranza. Le concavità invece, sono rintracciate tra gli spigoli della *mesh* di contorno che non sono stati ancora forzati. Una volta evidenziati gli spigoli nelle aree concave, viene utilizzato lo stesso tipo di “virus” per svuotarli. L’ultimo passaggio, che è il cuore dell’intero algoritmo, è l’infittimento di nuovi vertici all’interno della *mesh*, in modo che non solo venga mantenuta la coerenza con il criterio di Delaunay ma anche in modo che ogni triangolo sia all’interno di certi limiti di area massima, ed abbia angoli maggiori di un certo valore. Le regole che controllano l’infittimento sono due. La prima è che il cerchio che ha per diametro il nuovo segmento (il più piccolo ed unico cerchio che contiene il segmento) non deve avere al suo interno nessun vertice. Quando ciò non accade, il segmento viene diviso a metà inserendo un nuovo vertice, e la verifica del cerchio si ripete fino a che la condizione non è soddisfatta (fig. V.12). La seconda regola interviene quando un triangolo non è di “buona qualità”. In termini geometrici ciò vuole dire che ha angoli troppo piccoli oppure un’area troppo grande. In questi casi il triangolo viene diviso inserendo un vertice nel centro del cerchio che passa per i tre punti, garantendo in questo modo il rispetto del criterio di Delaunay.

Advancing Front

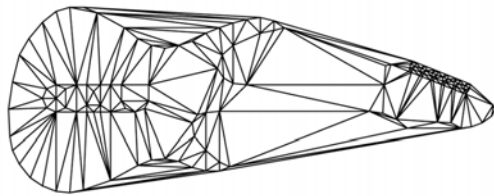
L’*Advancing Front* (chiamato anche *moving front method*) è un altro algoritmo utilizzato per la generazione automatica di *mesh*. I principali contributi forniti a questo metodo si devono a Rainald Lohner¹³ e S.H.Lo¹⁴. Consiste in una costruzione progressiva di tetraedri che dal perimetro esterno si muove verso l’interno. Per ogni faccia triangolare del nuovo fronte viene localizzata la posizione ideale del quarto nodo; dopodiché viene generato il nuovo strato di tetraedri che continuano a riempire gli spazi ancora vuoti. A questo algoritmo è affiancata una funzione che garantisce la non sovrapposizione dei nuovi elementi con il procedere della generazione delle *mesh*. Inoltre può essere integrata anche la funzione di selezione del dimensionamento, che evita variazioni troppo grandi tra gli elementi.



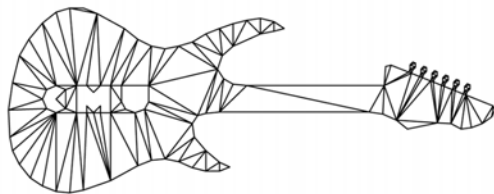
Input: PSLG (*planar straight line graph*)



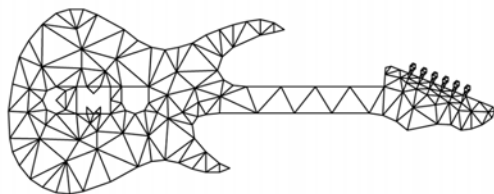
Step 1: *Delaunay Triangulation* dei vertici del PSLG



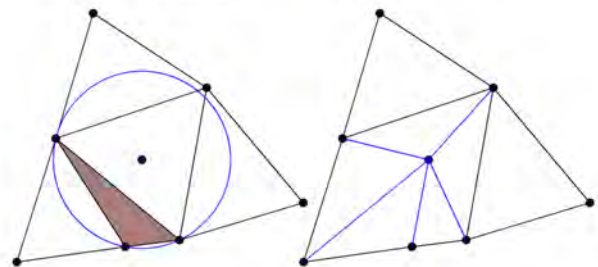
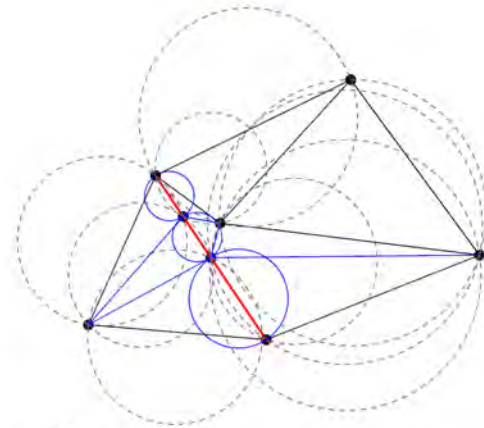
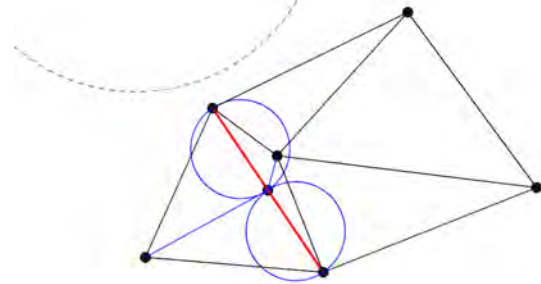
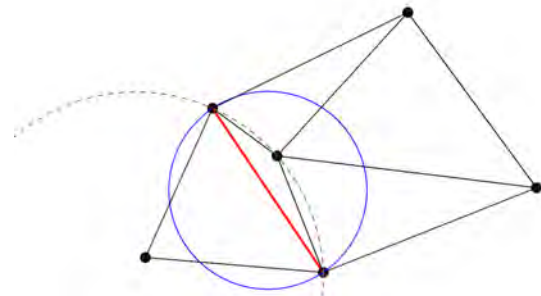
Step 2: *Constrained Delaunay Triangulation* del PSLG



Step 3: Rimozione dei triangoli dalle concavità e dai buchi



Step 4: *Conforming Delaunay Triangulation* con angoli maggiori di 20°



V.11/ *Algoritmo del software Triangle per la generazione di mesh bidimensionali che seguono il criterio di Delaunay.*

V.12/ *Regole di infittimento per la localizzazione di nuovi nodi all'interno della mesh.*

Generatori di mesh quadrilateri ed esaedrici

Gli algoritmi per la generazione di mesh quadrilatere (2D) oppure esaedriche (3D) sono meno diffusi di quelli per la generazione di mesh triangolari. Inoltre il passaggio dal bidimensionale al tridimensionale è più complesso di quelli che riguardano le mesh triangolari.

Mapped Meshing

Questo tipo di tecniche sono generalmente quelle che offrono il miglior risultato (nonostante siano sempre mesh di tipo non strutturato) in termini di regolarità delle mesh ottenute. Il limite più grande risiede nel fatto che non sempre sono applicabili. Infatti, il requisito necessario è che gli spigoli opposti dell'area da discretizzare, siano divisibili nello stesso numero di parti uguali. Ciò vuole dire che spesso non è applicabile a superfici libere, oppure il metodo richiederebbe un intervento dell'operatore costituendo quindi un grande limite alla fluidità dell'intero processo di generazione della mesh. Le ricerche sviluppate negli ultimi anni¹⁵ per risolvere questo problema, propongono una suddivisione automatica in aree e volumi che possano rispondere al requisito di equipartizione. Un altro metodo chiamato *sweeping* (applicabile solo per certe famiglie di geometrie) consiste nel far scorrere una mesh quadrilatera lungo una curva nello spazio. In particolare in una geometria vengono riconosciute una superficie sorgente ed una superficie bersaglio (accomunate dall'aver mesh con gli stessi elementi quadrangolari), che vengono raccordate tramite una serie di superfici (disposte lungo la curva direttrice) in cui è possibile individuare le medesime mesh. Il passo successivo è quello di collegare i nodi delle mesh corrispondenti, ottenendo così una mesh esaedrica.

Unstructured Quad meshing

In questi algoritmi si distinguono due differenti tipologie di approccio: quello *indiretto* e quello *diretto*. Il primo consiste nella generazione di una mesh triangolare che viene poi suddivisa in elementi quadrangolari. Questo è possibile ad esempio unendo i punti medi di ogni lato dei triangoli con il baricentro dello stesso triangolo. La mesh così ottenuta è sicuramente quadrangolare ma presenta una grande variazione di tipi di nodi, e quindi la qualità non è elevata. Un secondo metodo consiste nel

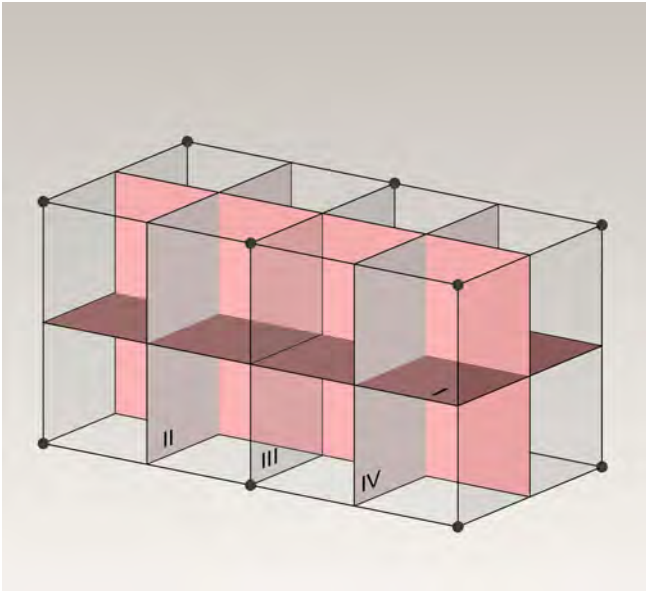
considerare due triangoli adiacenti che, con la rimozione del lato in comune, vengono a formare un quadrilatero. Se da un lato si ottiene una mesh più regolare della precedente, il difetto di questo metodo consiste nella perdita a volte eccessiva di elementi. Un miglioramento di questo metodo, dovuto a S.H.Lo¹⁶, prevede una serie di procedure di tipo euristico per stabilire quale combinazione dei triangoli riesca a massimizzare il numero dei quadrilateri. In conclusione, il metodo indiretto ha il grande vantaggio di essere molto veloce (non è neanche necessario il controllo delle autointersezioni) ma ha il grande limite di generare mesh troppo irregolari, oppure di insufficiente aderenza con il contorno (proprietà fondamentale in alcune applicazioni).

I metodi di generazione diretta delle mesh quadrilatere sono a loro volta divisibili in due grandi famiglie: *quad meshing decomposition* e *advancing front quad meshing*. La prima tecnica si basa su di una suddivisione del dominio in semplici regioni che fanno riferimento a dei modelli. Ad esempio uno dei primi metodi sviluppati da Bahemann¹⁷ suddivide il dominio rispetto alle caratteristiche dimensionali degli elementi, a cui poi segue un infittimento (sempre secondo mesh quadrilatere) che tende a regolarizzare i nodi e ad ottimizzare il contorno. Per quanto riguarda invece l'*advancing front quad meshing*, si possono individuare due fasi: nella prima vengono distribuiti una serie di nodi lungo il contorno del dominio che individuano i vertici di elementi triangolari rivolti verso l'interno; nella seconda fase gli elementi vengono combinati (con tecniche simili a quelle viste in precedenza) per formare da due triangoli un elemento quadrangolare.

Unstructured Hex meshing

Per la generazione di mesh esaedriche, analogamente a quanto abbiamo visto per le mesh quadrilatere, si possono distinguere ancora i metodi indiretti da quelli diretti. In questo caso i metodi indiretti (che consistono in una suddivisione di un tetraedro in quattro esaedri irregolari) creano mesh di bassa qualità e quindi stanno diventando obsoleti.

Tra i metodi indiretti si possono segnalare quattro tipologie differenti d'intervento che sono: *grid-based*, *medial surface*, *plastering* e *whisker weaving*. Tra queste,



V.13/ La *spatial twist continuum (STC)* è una struttura spaziale che viene utilizzata come guida per inserire i nuovi elementi esaedrici all'interno di un volume.

l'ultima sembrerebbe essere la più interessante perché genera mesh regolari anche se non sempre applicabili ad una grande varietà di geometrie. Questa tecnica, introdotta da Tautges e Blacker¹⁸, si basa su quella che viene chiamata *spatial twist continuum (STC)*. Gli autori definiscono la STC come duale della mesh esaedrica e consiste in un insieme di superfici che si intersecano e che tagliano le facce delle mesh esaedriche, secondo le tre giaciture principali (fig. V.13). Questa struttura spaziale viene utilizzata come una sorta di guida per inserire i nuovi elementi esaedrici all'interno del volume. Il primo passaggio consiste nella determinazione delle intersezione delle superfici STC con il dominio. Ciò avviene attraverso una rappresentazione topologica (quindi non viene eseguito un vero e proprio calcolo) di queste intersezioni (*loops*) che possono essere determinate facilmente a partire da una mesh quadrangolare fatta sulla superficie. L'obiettivo principale dell'algoritmo è determinare dove si presenteranno queste intersezioni anche dentro il volume, e solo al termine verranno create le mesh esaedriche. Ovunque convergano tre superfici STC, viene creato un elemento della mesh.

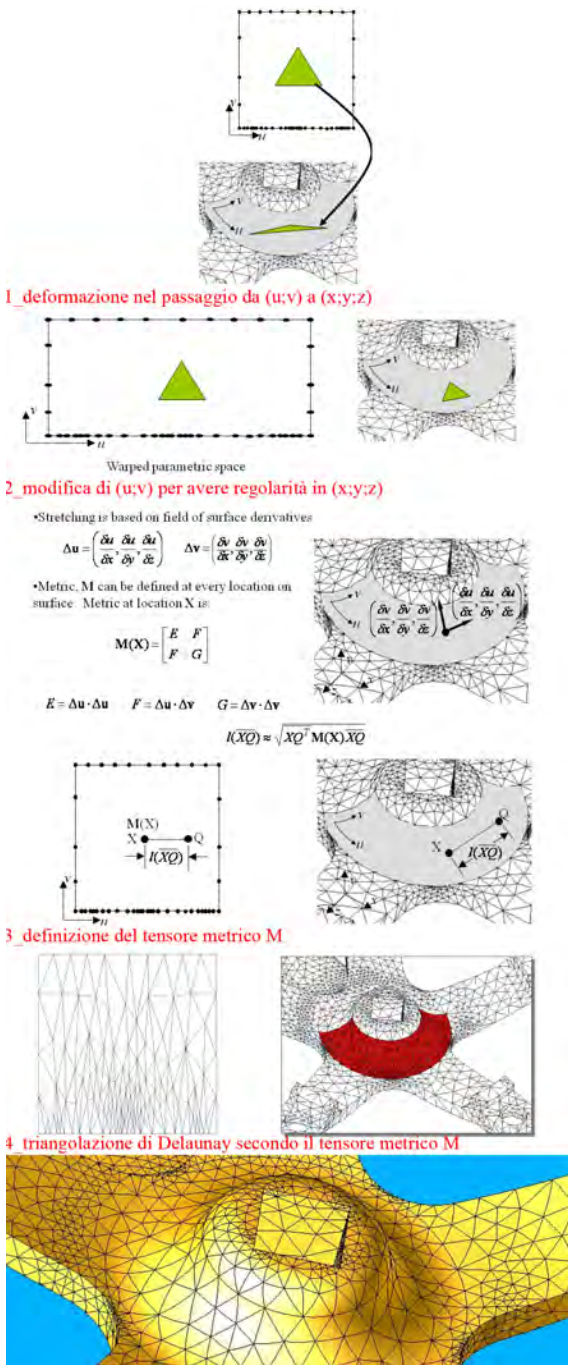
Hex-Dominant Mesh

Dal momento che molti degli algoritmi di generazione di mesh quadrilatero non danno buoni risultati in molti tipologie di superfici, questo algoritmo fonde insieme il meshing tetraedrico e quello esaedrico. Un approccio¹⁹ prevede una prima discretizzazione manuale per mezzo del mapping meshing in tutti quei casi in cui ci si trovi ad analizzare una superficie particolarmente complessa. Nelle zone in cui non è possibile definire una mesh esaedrica vengono inseriti gli elementi tetraedrici. Oppure in alternativa²⁰ si può applicare un *advancing front method* con struttura esaedrica a cui può essere associato l'uso di elementi tetraedrici nelle parti in cui i vuoti lasciati, divengono difficili da discretizzare. In modo analogo un sistema²¹ propone un livello di esaedri che si muovono parallelamente al bordo della superficie verso l'interno; i vuoti rimanenti vengono riempiti con tetraedri, piramidi o altri solidi irregolari a forma di cuneo.

Surface Meshing

Molti dei software di generazione delle mesh, si occupano dei problemi legati alla discretizzazione di superfici di tipo parametrico come le NURBS. Le mesh così ottenute (chiamate da alcuni autori a 2.5 dimensioni per distinguerle dalle mesh planari e le mesh volumetriche) hanno numerosi campi di applicazione (il calcolo delle soluzioni di radiosity²², il calcolo strutturale, il calcolo della fluidodinamica addirittura in alcuni casi vengono utilizzate direttamente per la definizione degli elementi strutturali delle *grid-shell*) e possono essere utilizzate anche come input per generare mesh volumetriche. In ogni caso, si possono individuare due tipologie di approccio al problema del meshing: la prima è chiamata *parametric space*, la seconda *direct 3D*.

Dal momento che le superfici NURBS sono rappresentazione matematiche di tipo parametrico (vedi Capitolo IV), gli algoritmi di tipo *parametric space*, generano la mesh a partire direttamente dalle due dimensioni dei parametri u e v , che nel passaggio finale vengono riassociate alle coordinate spaziali x, y e z . Come abbiamo avuto modo di constatare a proposito della discretizzazione delle superfici NURBS, il limite più grande di



V.14/ Il parametric space mesh generation è un algoritmo che consente di “personalizzare” la triangolazione dello spazio parametrico, in modo tale da generare elementi isotropi quando viene riassociata allo spazio tridimensionale cartesiano.

questa procedura risiede nella possibilità di ottenere elementi molto irregolari una volta che la mesh impostata sulle parametriche, viene ridefinita nello spazio cartesiano. Gli algoritmi automatici cercano di risolvere questo problema in due modi: il primo consiste nella riparametrizzazione della superficie in modo da garantire una creazione più uniforme degli elementi; il secondo consiste nel modificare l’algoritmo di generazione della mesh, in modo da ottenere elementi che nello spazio parametrico risultano deformati (ad esempio allungati più in una direzione piuttosto che nell’altra e quindi anisotropi) ma che quando vengono riassociati allo spazio tridimensionale, ritornano regolari (isotropi). Il metodo della riparametrizzazione ha come requisito principale che le derivate Du e Dv della superficie NURBS non debbano variare eccessivamente all’interno dominio. Quindi alcuni algoritmi²³ consistono in una analisi selettiva delle derivate della superficie nel dominio in cui essa è definita, accompagnata da una modifica dei parametri u e v che consenta di far rientrare entro certi limiti la variazione di Du e Dv . Questo metodo ha numerosi svantaggi come l’eccessivo tempo richiesto dal calcolo oppure il fatto che in molti casi non è applicabile. Per queste ragioni il secondo metodo è il più diffuso. Il *parametric space mesh generation* (fig. V.14) è un algoritmo che consente di “personalizzare” la triangolazione dello spazio bidimensionale parametrico, in modo tale che quando viene riassociato (questa operazione prende il nome di *mapping*) allo spazio tridimensionale cartesiano, genera elementi isotropi. Il vantaggio più grande consiste nella possibilità di utilizzarlo in numerose casistiche. La deformazione degli elementi si basa sull’inserimento di un tensore metrico M (nella forma di una matrice 2×2) che viene utilizzato per definire le distanze nello spazio parametrico, per ogni punto della superficie. Di conseguenza, applicando al dominio u e v , la generazione delle mesh in cui le distanze sono ora controllate dal tensore metrico M , il metodo della triangolazione secondo il criterio di Delaunay, cioè quello del cerchio vuoto, diviene a tutti gli effetti il metodo dell’ellisse vuota. In generale, questo metodo è molto più veloce ed affidabile degli algoritmi di generazione di mesh volumetriche. Il limite più grande è costituito da

quei casi in cui la parametrizzazione è scarsa.

Il metodo del *Direct 3D* invece, genera le mesh a partire direttamente dalla geometria, senza considerare la rappresentazione parametrica che essa sottintende. È utilizzata in tutti quei casi in cui la parametrizzazione è povera d'informazioni. In alcuni metodi²⁴ l'approccio è quello già discusso dell'*advancing front*, applicato di volta in volta ai piani tangenti alla superficie e passanti per i punti analizzati. Inoltre, viene utilizzato un cospicuo numero di operazioni di proiezione sulla superficie, per garantire l'appartenenza dei nodi su di essa. Vengono spesso integrati da sistemi di controllo per evitare i problemi di sovrapposizione dei triangoli.

Post produzione delle mesh

Gli algoritmi che abbiamo rapidamente descritto, difficilmente riescono a creare mesh pronte ad essere utilizzate. È necessario un lavoro di post produzione sulle mesh (*mesh post processing*) che può avvenire in due modalità principali: la prima è chiamata *smoothing* (smussatura) ed include quelle procedure che modificano la posizione dei nodi mantenendo la stessa connessione tra gli elementi; la seconda è chiamata *clean-up* (pulitura) e si riferisce alla possibilità di modificare la connessione tra gli elementi.

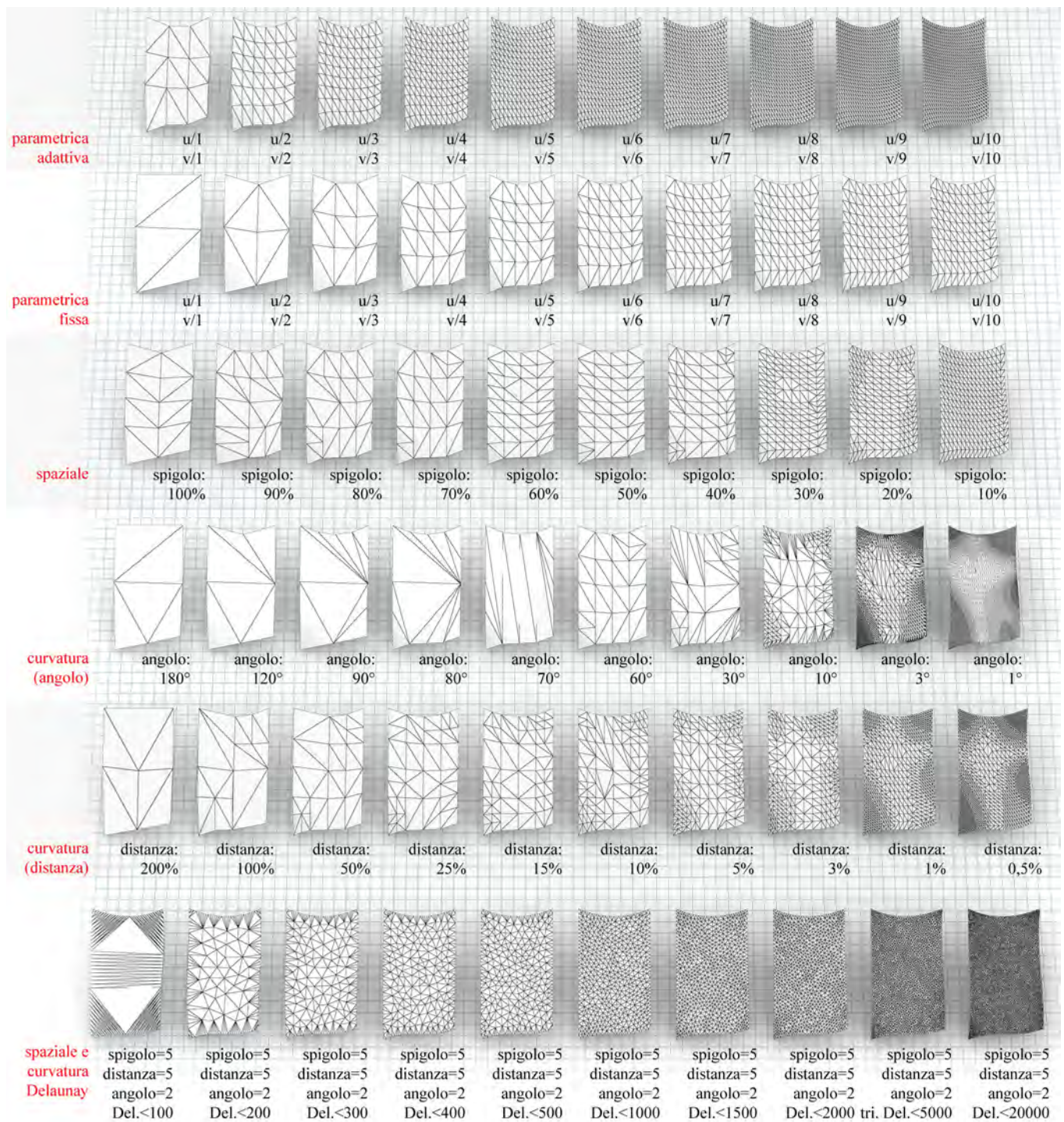
Alla prima modalità appartengono i cosiddetti *averaging methods* (metodi impostati sul calcolo della media) di cui il più importante è il *Laplacian smoothing*²⁵. Con questo metodo ogni nodo interno della mesh è spostato (senza cambiarne la topologia) nel punto di equidistanza con gli altri nodi a cui è connesso. È un processo iterativo che viene applicato a tutti i nodi interni della mesh ed è affiancato da sistemi di controllo che ne limitano spostamenti eccessivi. Inoltre, visto che gli *averaging methods* qualche volta degradano la qualità locale dell'elemento (cambiandone eccessivamente le proporzioni) viene fatta un'analisi comparativa della qualità dell'elemento prima e dopo lo spostamento del nodo, che viene eseguito solo nel caso ci sia un miglioramento.

Un approccio di tipo euristico è invece quello effettuato dal sistema *optimization based method*, che usa una tecnica di ottimizzazione per incrementare la qualità della

mesh. Viene misurata la qualità degli elementi nell'intorno di un nodo, definendo un vettore della qualità dell'elemento rispetto alla posizione del nodo. Lo spostamento avviene lungo la direzione in cui c'è un aumento del vettore, fino al raggiungimento del massimo valore possibile. Se da una parte questo metodo assicura mesh molto ben definite, il tempo richiesto dall'operazione lo rende praticamente inutilizzabile.

I metodi *cleanup* invece, migliorano la qualità della mesh andando a modificare la connessione tra gli elementi. Questo può essere eseguito attraverso un semplice ribaltamento degli elementi triangolari (*shape improvement*) che ad esempio, nel caso di una mesh derivata da una geometria parametrica, potrebbe significare una migliore adesione con la superficie. Il miglioramento topologico (*topological improvement*) invece, si basa sull'analisi del numero degli spigoli incidenti in un nodo, chiamato *grado* o *valenza*²⁶. Per una mesh triangolare infatti, ogni nodo ha 6 come grado ottimale (come abbiamo visto nelle tassellazioni piane regolari), invece nel caso di una mesh quadrilatera, il grado ottimale è 4. Quindi ogni nodo che non ha la valenza ottimale è soggetto a trasformazioni topologiche degli elementi dell'intorno, migliorando nel complesso la qualità della mesh. Nel caso di mesh volumetriche la procedura si complica notevolmente. Infatti oltre all'ottimizzazione del numero degli spigoli incidenti in un nodo, vengono considerate anche le facce dei poliedri.

Per ultimo si accennano ad alcune tecniche di raffinamento che riducono la dimensione dei singoli elementi di una mesh, con il conseguente miglioramento della qualità della mesh stessa. I principali metodi su cui si fondano questi algoritmi per le mesh triangolari o tetraedriche, sono la bisezione degli spigoli (*edge bisection*), l'inserimento di punti (*point insertion*) e l'uso di modelli predefiniti di riferimento (*templates*). Quest'ultima tecnica è l'unica applicabile al caso di mesh quadrilatere oppure esaedriche. La *edge bisection* si applica in 2D nel caso di triangoli adiacenti e riguarda lo spigolo in comune; nel caso di mesh volumetriche, si applica agli spigoli in comune a più tetraedri. L'inserimento di nuovi punti nella mesh può essere localizzato nel baricentro di un elemento (sia esso triangolare che



V.15/ Quadro riassuntivo degli algoritmi di approssimazione delle superfici parametriche presenti all'interno di alcuni software di modellazione informatica.

tetraedrico). Generalmente però questa operazione non è sufficiente a migliorare la qualità della mesh, quindi è affiancata da un approccio di tipo Delaunay che elimina gli elementi nell'intorno del nuovo punto per crearne di nuovi che siano appunto coerenti con il criterio di Delaunay. La tecnica dei modelli²⁷ si basa invece su dei modelli di suddivisione dell'elemento. Ad esempio un modello di suddivisione potrebbe essere quello di dividere un elemento triangolare in quattro triangoli inserendo un nodo nel punto medio di ogni suo spigolo. Se applicato ad un elemento tetraedrico questo sistema lo suddividerebbe in 8 tetraedri più piccoli.

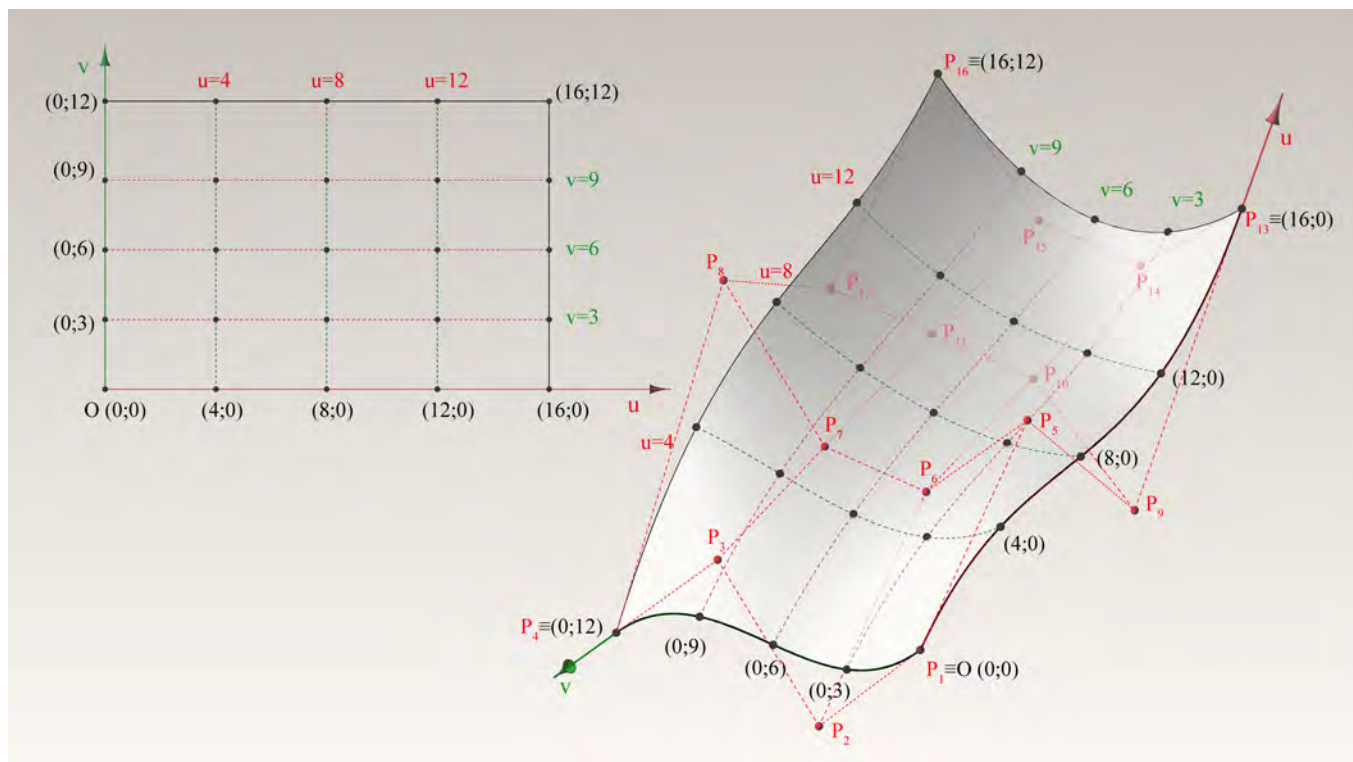
Per concludere, questa rapida visione d'insieme dei principali algoritmi di generazione di mesh non strutturate, dimostra che l'obiettivo principale sul quale si stanno indirizzando le più recenti ricerche del settore, è quello di automatizzare il più possibile l'intero processo. L'intervento dell'utente, se da un lato garantisce soluzioni più accurate e a più ampio spettro, dall'altro comporta significativi decrementi di produttività. Inoltre, la qualità della mesh oltre alle già citate caratteristiche geometriche di regolarità, va rintracciata anche nel giusto rapporto tra ottimizzazione del dominio e quantità degli elementi generati. Anche in questo caso infatti, il rischio in cui si incorre è quello di incrementare inutilmente i tempi di calcolo. Infine è condivisibile l'osservazione di Steven Owen circa l'utilità di un lavoro di ricognizione tra gli algoritmi di meshing, la quale afferma che il modo migliore di arrivare ad un progresso tecnologico, è quello di sviluppare la ricerca basandosi sui risultati ottenuti dagli altri, riconoscendone i valori di originalità e di innovazione.

Metodi di tassellazione delle superfici parametriche nei modellatori informatici

Vediamo ora che ruolo giocano le procedure di generazione mesh appena descritte, all'interno dei software di modellazione informatica. Per prima cosa dobbiamo definire le finalità per cui essa sarà creata. Il meshing nel nostro caso ha come obiettivo l'ottimizzazione della superficie NURBS. È preferibile dunque l'accuratezza con cui viene discretizzata la superficie continua ad esempio

andando ad infittirsi nei punti che presentano cambi repentini di curvatura, piuttosto che una sua regolarità. La mesh che vogliamo generare è dunque ben diversa, ad esempio, da quella che potrebbe essere utilizzata per il calcolo delle soluzioni del radiosity. In quest'ultimo caso infatti, la mesh deve essere più rifinita nelle zone di contatto tra gli oggetti, nelle aree con ombre portate o in prossimità delle sorgenti di luce. La nostra indagine ha utilizzato come software di riferimento *3DStudio Max 9-32bit*, della *Autodesk Inc.*, che, per quanto sia un software di tipo poligonale, offre al suo interno ben cinque algoritmi di approssimazione delle superfici parametriche (fig. V.15). Queste ultime possono essere generate o all'interno dello stesso software (sono messi a disposizione pochi strumenti per la gestione e creazione NURBS), oppure possono essere importate attraverso formati di scambio che ne mantengano la descrizione parametrica (come ad esempio l'estensione IGES- *Initial Graphics Exchange Specification*). Inoltre, le modalità con cui si opera la riduzione dal continuo al discreto, sono comuni a molti programmi di modellazione. Ci interessa sottolineare non il particolare comando di un software piuttosto che di un altro, ma come le metodologie (con le relative problematiche) fin qui esaminate, si ritrovino più spesso di quanto possiamo immaginare, negli strumenti con cui il progettista si confronta quotidianamente.

Consideriamo una superficie NURBS di tipo free-form di cui vengono rappresentati i punti di controllo e una maglia di isoparametriche (fig. V.16). In generale vengono distinte due forme di tassellazione della superficie: la prima ha come obiettivo l'ambiente di lavoro, la seconda il calcolo finale del rendering. Ciò vuole dire che ogni superficie ha una mesh che permette l'ombreggiatura (*shading*) in tempo reale, la seconda mesh invece viene considerata solo quando si esegue il calcolo di rendering. In questo modo l'utente ha la possibilità di definire una mesh poco accurata, per snellire i calcoli delle schede grafiche e viceversa, una mesh molto più accurata, utilizzata nel calcolo finale. Un secondo aspetto comune ai modellatori informatici (siano essi matematici che numerici), è che vengono messi a disposizione una serie di valori predefiniti dei parametri,



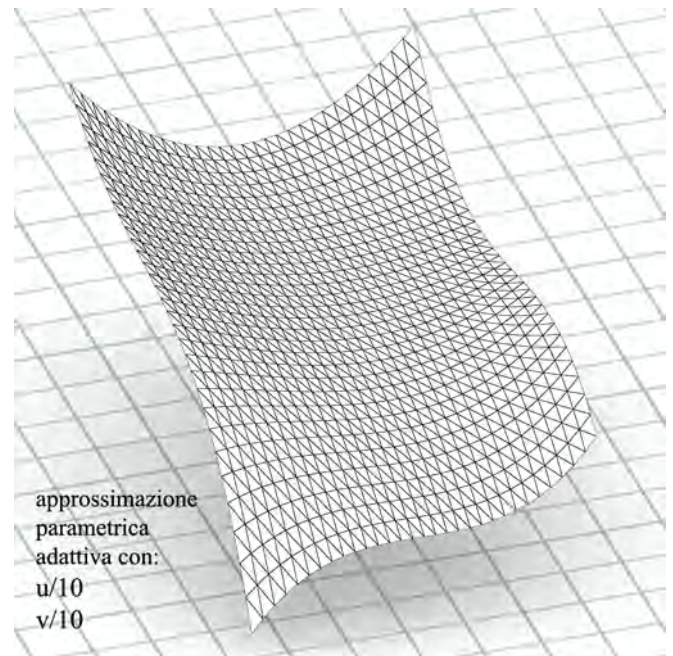
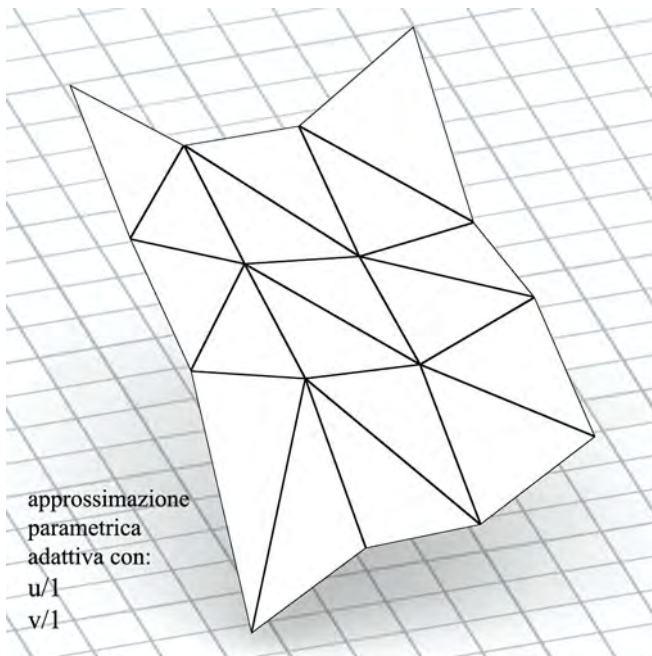
V.16/ Punti di controllo e coordinate parametriche di una superficie NURBS.

con cui è possibile approssimare in modo geometrie non troppo complesse.

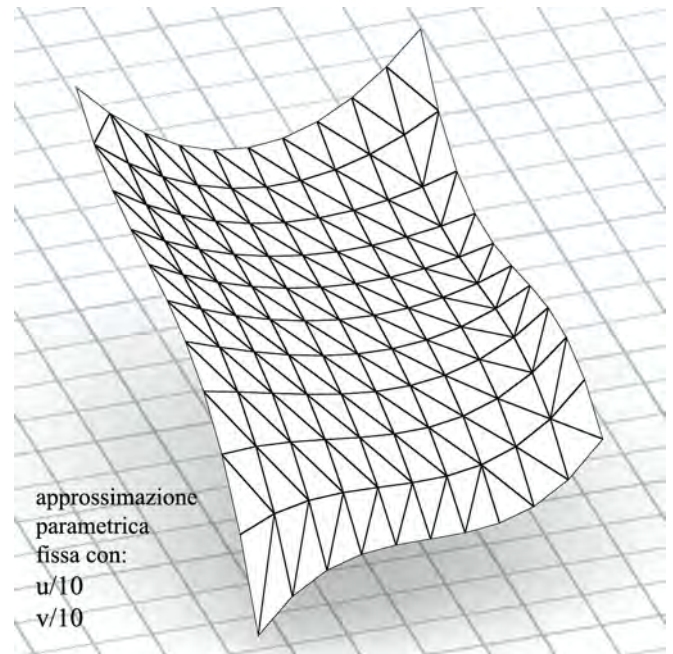
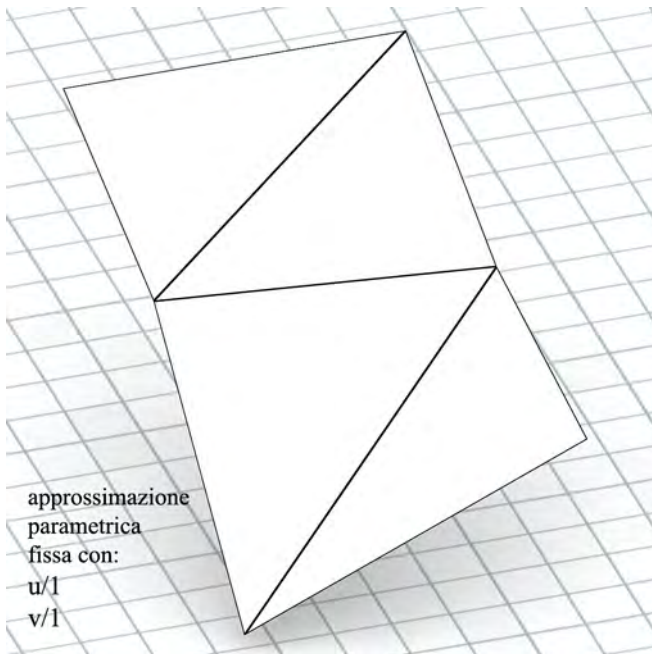
Il primo algoritmo (fig. V.17 e fig. V.18) è di tipo parametrico adattivo, quindi rientra nelle modalità già analizzate di *parametric space mesh generation*. In questo caso però, l'algoritmo è di tipo *adattivo* quindi la divisione in n e t parti, rispettivamente delle isoparametriche u e v , è anche in funzione delle variazioni di curvatura della superficie NURBS. La divisione reale delle isoparametriche, si ottiene invece con il secondo algoritmo di approssimazione che viene chiamato di tipo parametrico *fisso* (fig. V.19 e fig.20). Le curve u e v vengono divise in un certo numero di parti uguali, costituendo una griglia di punti su cui viene creata la mesh. È da notare però, che nel caso di $u=1$ e $v=1$ non vengono generati i soli due triangoli che occorrerebbero per suddividere il paraboloide iperbolico individuato dai quattro vertici sghembi della NURBS sorgente, ma il parametro u è comunque diviso in due parti uguali. Dalle

considerazioni già fatte nei paragrafi precedenti, abbiamo la possibilità di verificare che la tassellazione con il metodo parametrico (sia esso adattivo che fisso) genera dei buoni risultati se la superficie non presenta repentini cambiamenti di curvatura. In quel caso infatti la mesh presenta un alto grado di irregolarità dei nodi. Inoltre si può osservare che il numero degli elementi creato, cresce in maniera esponenziale con l'aumentare del numero di parti con cui vengono divise le isoparametriche.

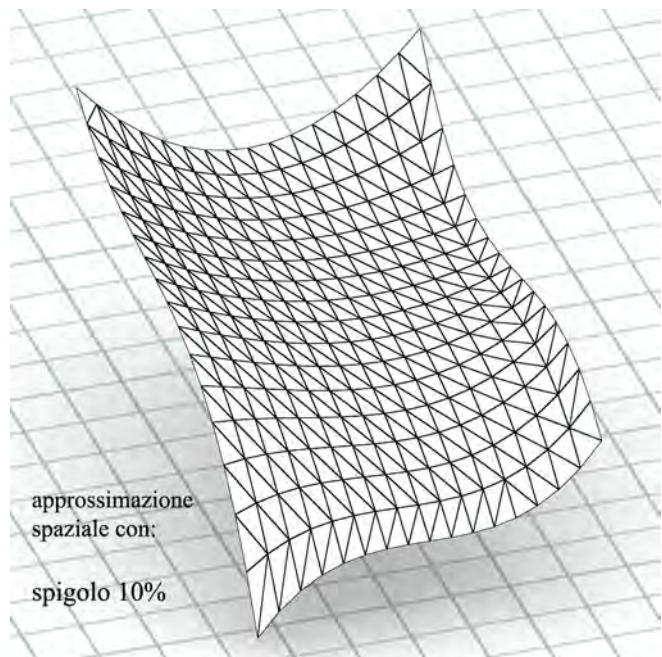
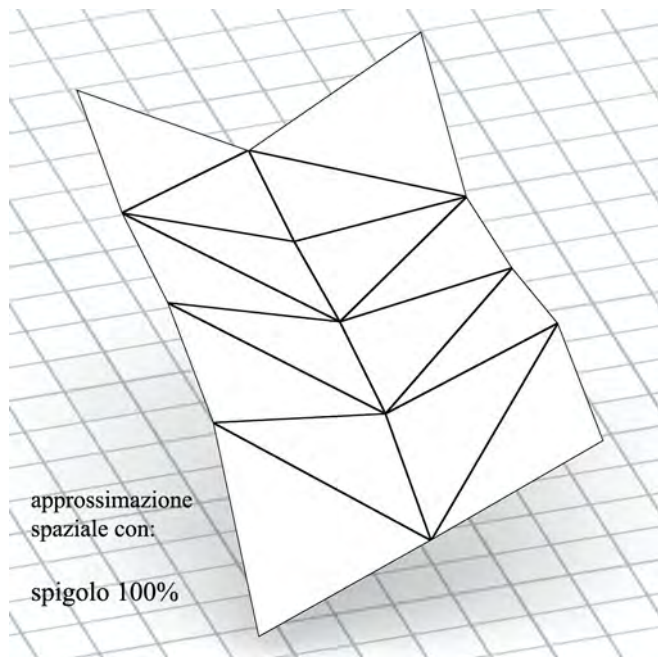
Gli altri tre algoritmi fanno riferimento a quello che abbiamo definito metodo *direct 3D*, che agisce direttamente sulle coordinate spaziali della superficie, anziché su quelle parametriche. Il primo viene chiamato *spaziale* ed ha come parametro variabile, la lunghezza massima dello spigolo della mesh triangolare che esso genera (fig. V.21 e fig.22). Lo spigolo è espresso in questo caso come percentuale della diagonale del *bounding box*, ossia il parallelepipedo minimo che racchiude la superficie.



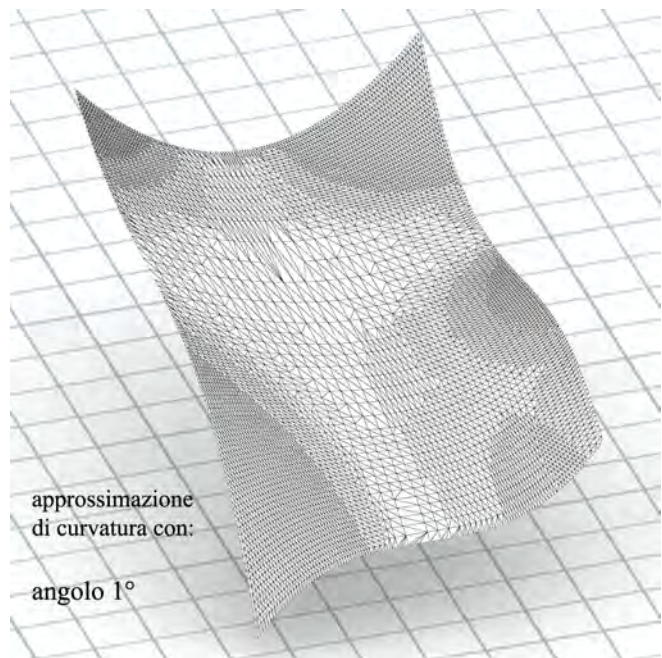
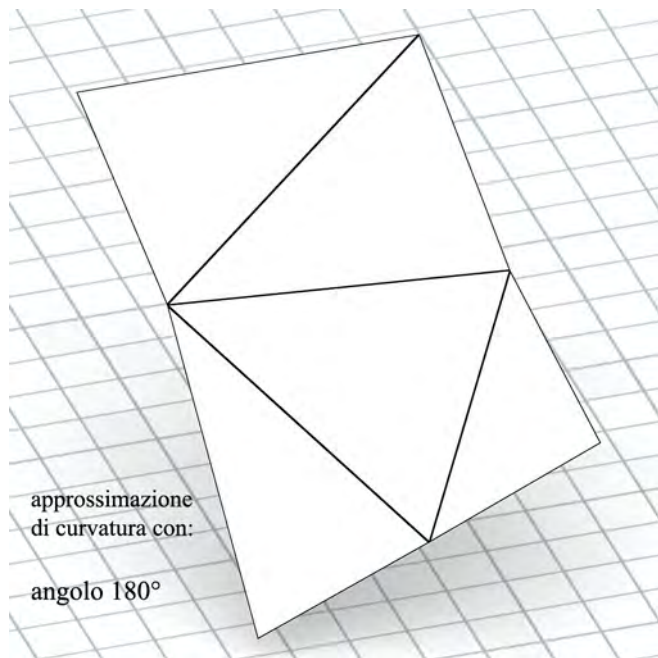
V.17-18/ Risultati di approssimazione con il metodo parametrico adattivo.



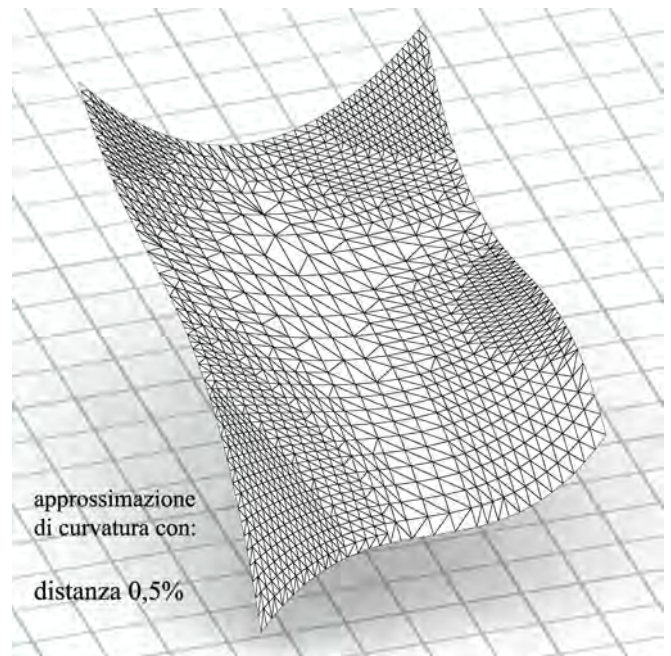
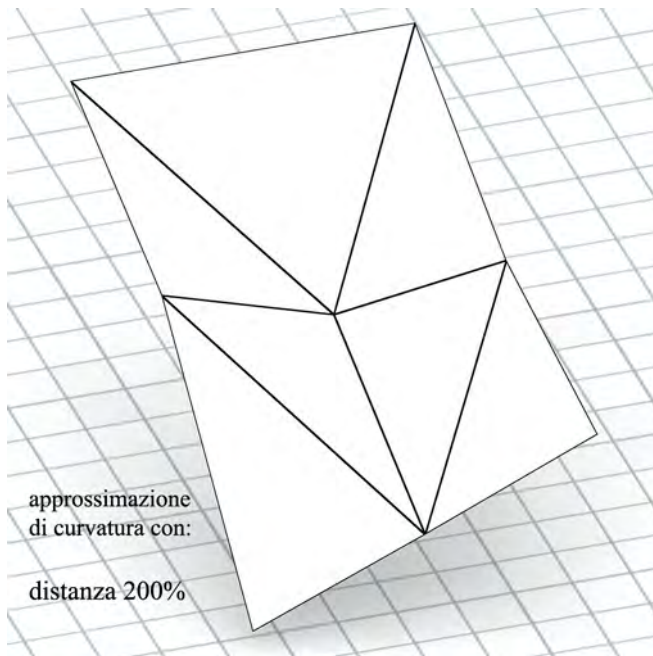
V.19-20/ Risultati di approssimazione con il metodo parametrico fisso.



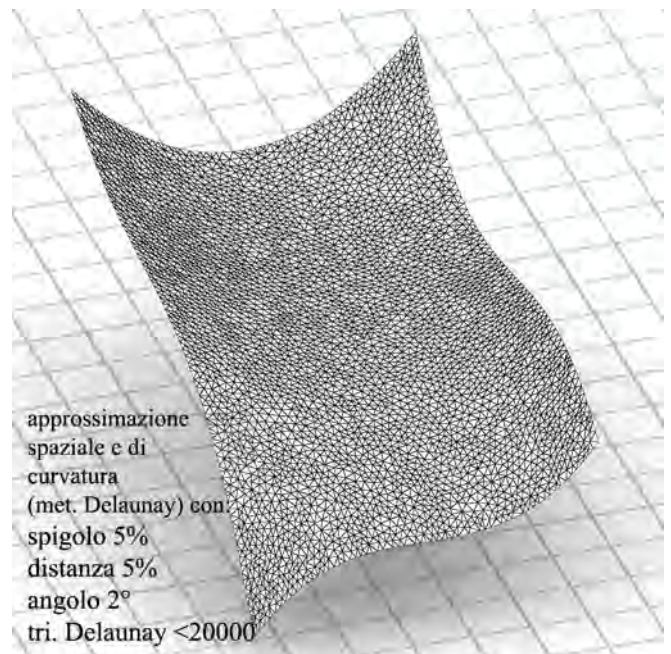
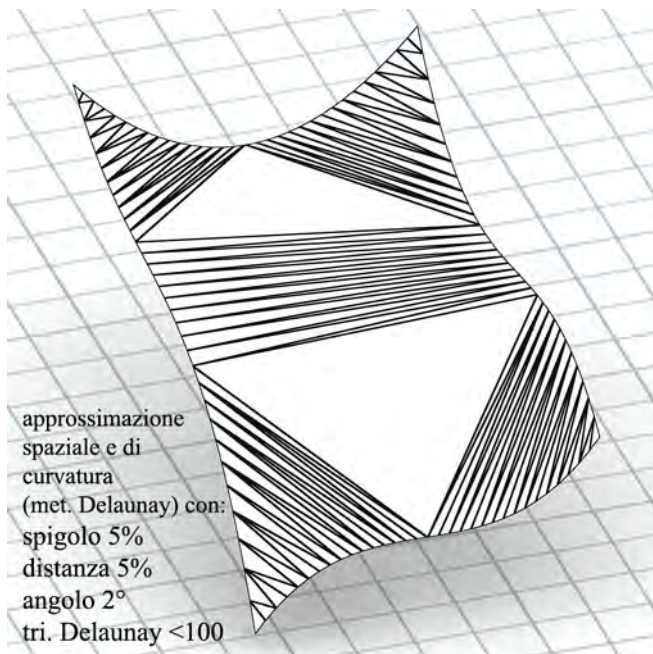
V.21-22/ Risultati di approssimazione con il metodo spaziale variando il parametro spigolo.



V.23-24/ Risultati di approssimazione con il metodo spaziale variando il parametro curvatura.



V.25-26/ Risultati di approssimazione con il metodo spaziale variando il parametro distanza.



V.27-28/ Risultati di approssimazione con il metodo spaziale associato al metodo di triangolazione di Delaunay.

Più spesso invece il valore dello spigolo fa riferimento alle unità di misura del modello. È evidente che diminuendo il valore dello spigolo tende ad aumentare il numero degli elementi che compongono la mesh, con il relativo aumento dell'accuratezza e dei tempi di calcolo necessari alla visualizzazione. Anche in questo caso vengono ignorati i casi limite, quelli cioè che porterebbero ad una mesh non valida. Ad esempio assegnare un valore dello spigolo pari a 0, non dà luogo ad alcuna mesh.

Il metodo di *curvatura* crea una mesh irregolare che segue l'andamento della curvatura della superficie; in particolare si infittisce lì dove aumenta il valore della curvatura gaussiana. Questo metodo è controllato da due parametri: l'angolo e la distanza. L'angolo è quello formato tra due facce della mesh, quindi diminuendolo aumenta l'infittimento degli elementi (*fig. V.23 e fig.24*). L'angolo uguale a 0 viene ignorato. Il secondo parametro del metodo di curvatura è la distanza (*fig. V.25 e fig.26*). Esso esprime la distanza massima ammissibile tra la superficie e la mesh generata. Il valore espresso in percentuale fa riferimento alla diagonale del bounding-box della superficie.

L'ultimo algoritmo a disposizione è una combinazione del metodo spaziale e quello di curvatura (*fig. V.27 e fig.28*). È interessante notare che i criteri con cui vengono eseguiti questi algoritmi sono diversi. Nella figura ad esempio, il metodo ibrido spaziale e di curvatura, è stato eseguito con il criterio di Delaunay in cui viene controllato il numero massimo dei triangoli che è possibile generare.

Note

1. Steven J. Owen, *A survey of Unstructured Mesh Generation Technology*, Department of Civil and Environmental Engineering <http://www.andrew.cmu.edu/user/sowen/survey/index.html>
2. L'obiettivo principale dei due laboratori (uno nel New Mexico e l'altro in California) è lo sviluppo e il test dei componenti non nucleari delle bombe nucleari. Sono anche svolte ricerche sulla chimica computazionale, matematica, scienza dei materiali ed energie alternative.
3. M. A. Yerry e M. S. Shephard, *Three-Dimensional Mesh Generation by Modified Octree Technique*, in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1984.
4. C. L. Lawson, *Software for C1 Surface Interpolation*, *Mathematical Software III*, 1977.
5. D. F. Watson, *Computing the Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes*, in *The Computer Journal*, Vol. 24(2), 1981.
6. <http://en.wiki.mcneel.com/default.aspx/McNeel/PointsetReconstruction.html>
7. N. P. Weatherill e O. Hassan, *Efficient Three-dimensional Delaunay Triangulation with Automatic Point Creation and Imposed Boundary Constraints*, in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1994.
8. J. Ruppert, *A New and Simple Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation*, in *Technical Report UCB/CSD 92/694*, University of California at Berkley, Berkley California, 1992.
9. S. Rebay, *Efficient Unstructured Mesh Generation by Means*

- of Delaunay Triangulation and Bowyer-Watson Algorithm, in *Journal Of Computational Physics*, Vol. 106, 1993.
10. D. L. Marcum e N. P. Weatherill, *Unstructured Grid Generation Using Iterative Point Insertion and Local Reconnection*, in *AIAA Journal*, Vol. 33, no. 9, September 1995.
 11. P.L. George, F. Hecht e E. Saltel, *Automatic Mesh Generator with Specified Boundary*, in *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 92, North-Holland, 1991.
 12. <http://www.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>
 13. R. Lohner, P. Parikh e C. Gumbert, *Interactive Generation of Unstructured Grid for Three Dimensional Problems*, in *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mechanics*, in Pineridge Press, 1988.
 14. S. H. Lo, *Volume Discretization into Tetrahedra-I. Verification and Orientation of Boundary Surfaces*, in *Computers and Structures*, Vol. 39, n. 5, 1991.
 15. CUBIT Mesh Generation Toolkit, web site: <http://endo.sandia.gov/SEACAS/CUBIT/Cubit.html>
 16. S.H. Lo, *Generating Quadrilateral Elements on Plane and Over Curved Surfaces*, in *Computers and Structures*, Vol.31, 1989.
 17. P. L. Baehmann, S. L. Wittchen, M. S. Shephard, K. R. Grice e M. A. Yerry, *Robust Geometrically-based, Automatic Two-Dimensional Mesh Generation*, in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.24, 1987.
 18. T. J. Tautges, T. Blacker e S. Mitchell, *The Whisker-Weaving Algorithm: A Connectivity Based Method for Constructing All-Hexahedral Finite Element Meshes*, in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, 1996.
 19. S. J. Owen, S. A. Canann e S. Saigal, *Pyramid Elements for Maintaining Tetrahedra to Hexahedra Conformability*, in *AMD-Vol. 220 Trends in Unstructured Mesh Generation*, 1997.
 20. P. Tuchinsky, M. Brett e W. Clark, *The Hex-Tet, Hex-Dominant Automesher: An Interim Progress Report*, in *Proceedings, 6th International Meshing Roundtable*, 1997.
 21. W. Min, *Generating Hexahedron-Dominant Mesh Based on Shrinking-Mapping Method*, in *Proceedings, 6th International Meshing Roundtable*, 1997.
 22. Il radiosity è un algoritmo di illuminazione globale usato in computer grafica, ed è un'applicazione del metodo degli elementi finiti che consente di risolvere l'equazione di rendering.
 23. R. T. Farouki, *Optimal parameterizations*, in *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 14, 1997.
 24. T.S. Lau e S.H. Lo, *Finite Element Mesh Generation Over Analytical Surfaces*, in *Computers and Structures*, Vol. 59, no. 2, 1996.
 25. D. A. Field, *Laplacian smoothing and Delaunay triangulations*, in *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 4, 1988.
 26. S. A. Canann, S. N. Muthukrishnan e R. K. Phillips, *Topological Refinement Procedures for Triangular Finite Element Meshes*, in *Engineering with Computers*, Vol. 12, 1996.
 27. M.L. Staten, e N.L. Jones, *Local Refinement of Three-Dimensional Finite Element Meshes*, in *Engineering with Computers*, Vol. 13, 1997.

Bibliografia

Sulla riduzione delle superfici continue dell'architettura contemporanea in superfici discrete

Fondamenti scientifici:

- AA.VV., *Atlante del vetro*, UTET, 2002.
- N.V. Banichuk, M. Serra, A. Sinitsyn, *Shape optimization of quasi-brittle axisymmetric shells by genetic algorithm*, in *Computers and Structures*, Vol. 84, No.29, 2006.
- O. Baverel, H. Nooshin, Y. Kuroiwa, Y. Parke e G.A.R., *International Journal of Space Structures*, Vol 15, No. 2, 2000.
- A. Bogart, *Tuba Kocaturk, Free Form design as the digital "Zeitgeist"*, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, 2007.
- G. Del Guerra (candidato) Prof.Ing. M. Froli (relatore), *Progettazione strutturale di volte sottili in vetro e acciaio irrigidite da reti di funi*, Università degli studi di Pisa, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, 2004-2005.
- M. Emmer, *L'idea di spazio da Escher all'architettura virtuale*, in L. De Carlo, a cura di, *Informatica e fondamenti scientifici della rappresentazione*, Gangemi editore, 2007.
- K.W.Forster, a cura di, *Metamorph: Focus*, catalogo, *La Biennale di Venezia*, Marsilio ed., 2004.
- J. Frazer, *An Evolutionary Architecture*, Architectural Association Publications, 1995.
- A. Holgate, *The Art of Structural Engineering: The Work of Jorg Schlaich and his Team*, Edition Axel Menges, 1997.
- T. Ito & Associates, *Meiso No Mori Municipal Funeral Hall, Kakamigahara-Gifu*, in *The Plan*, n. 27, 2008.
- J. H. Poincarè, *La scienza e l'ipotesi*, Edizioni Bompiani, 2003.
- M. Sassone e A. Pugnale, *Evolutionary Structural Optimization in Shell Design*, nei *Proceedings of Special Workshop: Advanced Numerical Analysis of Shell-like Structures held in Zagerb*, Croatia, September 26-28, 2007 edito da Jurica Sorić Institute of Applied Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb (Croatia) Friedrich Gruttmann Institut für Werkstoffe und Mechanik im Bauwesen, TU Darmstadt (Germany) Werner Wagner Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH) (Germany).
- M. Sassone e A. Pugnale, *Optimal design of glass grid shells with quadrilateral elements by means of a genetic algorithm*, nei *Proceedings of the 6th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures IASS-IACM 2008: "Spanning Nano to Mega" 28-31 May 2008*, Cornell University, Ithaca, NY, USA John F. ABEL and J. Robert COOKE (eds.)
- V. Togan, A. Daloglu, *Optimization of 3d trusses with adaptive approach in genetic algorithms*, *Engineering Structures*, Vol. 28, No. 7, 2006.
- M. Wigginton, *Glass in Architecture*, Phaidon Press, paperback edition, London 2002.

Sitologia:

- Versione elettronica di *An Evolutionary Architecture*: <http://www.aaschool.ac.uk/publications/ea/intro.html>
- Homepage della IASS (*International Association for Shell and Spatial Structure*): http://www.iass-structures.org/index.cfm/page/journal_info.htm

Sulla tassellazione del piano euclideo

Fonti:

- J. Keplero, *Harmonices Mundi Libri V*, Linz, 1619.

Fondamenti scientifici:

- M.A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, Springer, 1997.
- H.S.M. Coxeter, *Introduction to geometry*, John Wiley & Sons Inc, New York 1969.
- K. Critchlow, *Islamic Patterns: an Analytical and Cosmological Approach*, Thames and Hudson, Londra 1976.
- B. Grunbaum, G.C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W.H. Freeman and Company, New York, 1987.
- I. Hargittai, *Symmetry: A Unifying Concept*, Shelter Publications Inc., 1994.
- I. Hargittai, *Symmetry Through the Eyes of a Chemist*, Springer, 1995.
- Eric A. Lord, Alan Lindsay Mackay e Srinivasa Rananathan, *New Geometries for New Materials*, Cambridge University Press, 2006.
- R. Penrose, *Pentaplexity. Una famiglia di ricoprimenti non-periodici del piano*, in M. Emmer, a cura di, *L'occhio di Horus. Itinerari nell'immaginario matematico*, Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani S.p.A., 1989.
- D. Schechtman, I. Blech, O. Gratias, J.W. Cahn, *Metallic Phase with Long Range Orientational Order and no Translational Symmetry*, Physical Review Letters, Vol. 53, 1984.
- P.S. Stevens, *Handbook of Regular Patterns: An Introduction to Symmetry in Two Dimensions*, The MIT Press, Cambridge, 1980.
- H. Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton 1952; trad. It. La Feltrinelli, Milano, 1975.

Letteratura critica:

- M. Emmer, *La simmetria*, in M. Emmer, a cura di, *L'occhio di Horus. Itinerari nell'immaginario matematico*, Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani S.p.a., 1989.

- R. Penrose, *La mente nuova dell'imperatore*, Biblioteca Universale Rizzoli, Milano, 2006.

Sitologia:

- Versione elettronica di *Harmonies of the World*, tradotta da Charles Glenn Wallis nel 1939: <http://www.sacred-texts.com/astro/how/index.htm>
- Trattazione matematica dei concetti di simmetria, cristallografia e poliedri, curata da Steven Dutch, della *University of Wisconsin*: <http://www.uwgb.edu/DutchS/symmetry/symmetry.htm>
- Trattazione matematica dei gruppi cristallografici, curata da David E. Joyce, del *Department of Mathematics and Computer Science*, della Clark University, Worcester: <http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper/index.html>

Sulla tassellazione delle geometrie non euclidee

Fonti:

- Euclide, *Gli elementi*, a cura di Frajese A., Maccioni M., Ed. UTET, 1996.

Fondamenti scientifici:

- F. Bool J.L. Locher, *M.C. Escher: his life and complete graphic work*, 1981.
- H.S.M. Coxeter, *La simmetria non-euclidea in Circle Limit III di M.C. Escher*, in M. Emmer, a cura di, *L'occhio di Horus. Itinerari nell'immaginario matematico*, Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani S.p.A., 1989.
- H.S.M. Coxeter, *Non-Euclidean Geometry*, Toronto University Press, Toronto 1965.
- H.S.M. Coxeter, *Regular Compound Tessellations in Hyperbolic Plane*, Proc. Royal Soc., 1964.
- B. Ernst, *Lo specchio magico di M.C. Escher*, Taschen, 1996.
- C. Goodman-Strauss, *Compass and Straightedge in the Poincaré Disk*, The mathematical Association of America, Monthly 108, January 2001.
- J. McCleary, *Geometry from a differentiable Viewpoint*, Cambridge University Press, NY, 1994.

- E. E. Moise, *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, Addison-Wesley, 1990.
- D. Schattschneider, *Visioni della Simmetria*, Zanichelli, Bologna, 1992.

Letteratura critica:

- E. Agazzi, D. Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare*, La Scuola, Brescia, 1998.
- H.S.M. Coxeter, M. Emmer, R. Penrose e M.L. Tauber, *M.C. Escher: Art and Science Proceedings of the International Congress on M.C. Escher, Rome, Italy, 26-28 March 1985*, North Holland, 1986.
- F. Giudiceandrea, a cura di, *M.C. Escher. L'arte del puzzle e puzzle dell'arte*, Catalogo della mostra *L'arte del puzzle e puzzle dell'arte*, Roma Marzo 2008, Microtec.S.r.l., 2008.
- P. Odifreddi, *Arte del puzzle e puzzle dell'arte, in M.C. Escher. L'arte del puzzle e puzzle dell'arte*, a cura di F. Giudiceandrea, Catalogo della mostra *L'arte del puzzle e puzzle dell'arte*, Roma Marzo 2008, Microtec.S.r.l., 2008.
- K. Popper, *La ricerca non ha fine. Autobiografia intellettuale*, a cura di D. Antiseri, Armando Editore, 2002.
- R. Penrose, *The Road to Reality. A Complete Guide to the Law of the Universe*, Jonathan Cape, 2004.

Sitologia:

- Sito di divulgazione scientifica curato dal fisico Paolo Sirtoli per un'ampia trattazione del concetto di curvatura dello spazio:
<http://www.vialattea.net/curvatura/>
- Versione elettronica dell'articolo di C. Goodman-Strauss, *Compass and Straightedge in the Poincare Disk* :
<http://comp.uark.edu/~strauss/papers/hypcomp.pdf>
- *NonEuclid*, software Java per lo studio interattivo dei modelli di Poincaré del Disco e del Semipiano per la geometria iperbolica, sviluppato da Joel Castellanos, del *Department of Computer Science*, della University of New Mexico:
<http://www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid->

Italian.html

- Sito curato da Jess Maertterer, del *Rensselaer Polytechnic Institute*, sviluppatore dell'applicativo *Math*, per il software di modellazione NURBS, *Rhinoceros V4.0*:
<http://www.rhino3.de/>

Sui poliedri e le strutture reticolari

Fonti:

- Leonard Euler, *Elementa Doctrinae Solidorum*, Pietroburgo, 1758.
- J. Plateau, *Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*, Gauthier-Villars, Paris, 1873.
- Platone, *Timeo*, in *Opere*, Laterza, 1966.

Fondamenti scientifici:

- M. Burt, *Saddle Polyhedra & Close-Packing*, in *Zodiac* n. 23, Milano 1973.
- M. Emmer, *Art and Mathematics: the Platonic Solids*, in *Leonardo*, vol. 15, n. 4, 1982.
- A. Gheorghiu, V. Dragomir, *Geometry of structural forms*, Applied Science Publisher LTD, 1978.
- R.B. Fuller, R. Marks, *The Dymaxion World of B. Fuller*, A Doubleday Anchor Book, New York, 1973.
- D. Hoffman, *The Computer Aided Discovery of new Embedded Minimal Surfaces*, in *The Mathematical Intelligencer*, vol.9, 1987.
- G. Loria, *Metodi matematici: essenza, tecnica, applicazioni*, Hoepli, 1935.
- G. Loria, *Poliedri, curve e superficie secondo i metodi della geometria descrittiva*, U. Hoepli, 1912.
- A. Marcolli, *Teoria del campo 2*, Sansoni Editore, Firenze 1991.
- R. Migliari, *Le cupole geodetiche: guida all'uso di un'utopia*, Edizioni Kappa, Roma, 1975.
- R. Migliari, *Dieci lezioni di geometria descrittiva. La teoria delle ombre e del chiaroscuro. Il modello geometrico del moto apparente del Sole*, in *"Quaderni di Applicazioni della Geometria Descrittiva"*, n.3, Roma, 1984.
- Les A. Piegl, W. Tiller, *The NURBS Book*, Springer,

- Sec. Edizione, 1997.
- P. J. Schneider, *NURB Curves: A Guide for the Uninitiated*, in *Develop, The Apple Technical Journal*, n.25, Marzo 1996.
 - J.E. Taylor, *The structure of Singularities in Soap-Bubbles-like and Soap-film-like Minimal Surfaces*, in *Annals of Mathematics* n. 103, 1976.
 - M.J. Wenninger, *Polyhedron Models*, Cambridge University Press, Londra 1971.
 - *Letteratura critica e storia della matematica:*
 - C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano, 2004.
 - M. Emmer, *Le Bolle di Sapone*, in *L'occhio di Horus-Itinerari nell'immaginario matematico*, a cura di Michele Emmer, Istituto della Enciclopedia Italiana Treccani, 1989.
 - M. Emmer, *Dai radiolari ai vasi di Gallè*, in M. Emmer, a cura di, *Matematica e Cultura 2007*, pubblicato da Springer, 2007.
 - P. Gario, *L'immagine geometrica del mondo: storia dei poliedri*, Stampatori Editore, Torino 1979.
- Sitologia:*
- Versione elettronica di *Platone, Timeo*, traduzione di Francesco Aciri, in:
<http://it.wikisource.org/wiki/Timeo>
 - Wolfram Mathematica 6.0, *Wolfram Research, Inc.*
www.wolfram.com
 - Versione elettronica del *The Mathematical Gazette* 80, November 1996, scritto da Guy Inchbald:
<http://www.steelpillow.com/polyhedra/index.htm>
 - Versione elettronica dell'articolo di Lord Kelvin, *On the Division of Space with Minimum Partitional Area*, in *Philosophical Magazine*, Vol. 24, No. 151, 1887: http://zapatopi.net/kelvin/papers/on_the_division_of_space.html
- Sugli algoritmi informatici di meshing**
- Fondamenti scientifici:*
- P. L. Baehmann, S. L. Wittchen, M. S. Shephard, K. R. Grice e M. A. Yerry, *Robust Geometrically-based, Automatic Two-Dimensional Mesh Generation*, in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.24, 1987.
 - S. A. Canann, S. N. Muthukrishnan e R. K. Phillips, *Topological Refinement Procedures for Triangular Finite Element Meshes*, in *Engineering with Computers*, Vol. 12, 1996.
 - R. T. Farouki, *Optimal parameterizations*, in *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 14, 1997.
 - D. A. Field, *Laplacian smoothing and Delaunay triangulations*, in *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 4, 1988.
 - P.L. George, F. Hecht e E. Saltel, *Automatic Mesh Generator with Specified Boundary*, in *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 92, North-Holland, 1991.
 - T.S. Lau e S.H. Lo, *Finite Element Mesh Generation Over Analytical Surfaces*, in *Computers and Structures*, Vol. 59, no. 2, 1996.
 - C. L. Lawson, *Software for C1 Surface Interpolation*, *Mathematical Software III*, 1977.
 - S. H. Lo, *Volume Discretization into Tetrahedra-I. Verification and Orientation of Boundary Surfaces*, in *Computers and Structures*, Vol. 39, n. 5, 1991.
 - S.H. Lo, *Generating Quadrilateral Elements on Plane and Over Curved Surfaces*, in *Computers and Structures*, Vol.31, 1989.
 - R. Lohner, P. Parikh e C. Gumbert, *Interactive Generation of Unstructured Grid for Three Dimensional Problems*, in *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mechanics*, in *Pineridge Press*, 1988.
 - D. L. Marcum e N. P. Weatherill, *Unstructured Grid Generation Using Iterative Point Insertion and Local Reconnection*, in *AIAA Journal*, Vol. 33, no. 9, September 1995.
 - W. Min, *Generating Hexahedron-Dominant Mesh Based on Shrinking-Mapping Method*, in *Proceedings, 6th International Meshing Roundtable*, 1997.
 - S. J. Owen, S. A. Canann e S. Saigal, *Pyramid Elements for Maintaining Tetrahedra to Hexahedra Conformability*, in *AMD-Vol. 220 Trends in Unstructured Mesh Generation*, 1997.
 - S. Rebay, *Efficient Unstructured Mesh Generation by Means of Delaunay Triangulation and Bowyer-Wat-*

- son Algorithm, in *Journal Of Computational Physics*, Vol. 106, 1993.
- J. Ruppert, *A New and Simple Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation*, in *Technical Report UCB/CSD 92/694*, University of California at Berkley, Berkley California, 1992.
 - M.L. Staten, e N.L. Jones, *Local Refinement of Three-Dimensional Finite Element Meshes*, in *Engineering with Computers*, Vol. 13, 1997.
 - T. J. Tautges, T. Blacker e S. Mitchell, *The Whisker-Weaving Algorithm: A Connectivity Based Method for Constructing All-Hexahedral Finite Element Meshes*, in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, 1996.
 - P. Tuchinsky, M. Brett e W. Clark, *The Hex-Tet, Hex-Dominant Automesher: An Interim Progress Report*, in *Proceedings, 6th International Meshing Roundtable*, 1997.
 - D. F. Watson, *Computing the Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polytopes*, in *The Computer Journal*, Vol. 24(2) , 1981.
 - N. P. Weatherill e O. Hassan, *Efficient Three-dimensional Delaunay Triangulation with Automatic Point Creation and Imposed Boundary Constraints*, in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1994.
 - M.A. Yerry e M. S. Shephard, *Three-Dimensional Mesh Generation by Modified Octree Technique*, in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, 1984.

Sitologia:

- Steven J. Owen, *A survey of Unstructured Mesh Generation Technology*, Department of Civil and Environmental Engineering:
<http://www.andrew.cmu.edu/user/sowen/survey/index.html>

ALCUNI MODELLI DI PIANO IPERBOLICO

LUCA LUSSARDI

La geometria iperbolica è un caso particolare di *geometria non-euclidea*, ovvero una geometria in cui non vale il quinto postulato di Euclide, il quale afferma, nella sua forma originale (Euclide: *Elementi*, libro I) che: *se una retta che taglia due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due retti allora prolungando le due rette esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori dei due retti*. In una forma equivalente il quinto postulato si può anche enunciare come segue: *dati una retta ed un punto esterno ad essa esiste ed è unica la retta parallela alla retta data passante per il punto assegnato*; per questo motivo il quinto postulato si chiama anche *postulato delle parallele*. Quando tale postulato non vale si parla di geometria non-euclidea. L'introduzione delle geometrie non-euclidee è stata abbastanza travagliata; si pensi che da Euclide (IV-III sec. a.C.) all'Ottocento circa i matematici hanno cercato invano di dimostrare il postulato delle parallele a partire dai primi quattro postulati euclidei. Solo a metà Ottocento qualcuno ha provato a congetturare l'esistenza di spazi geometrici non-euclidei (Bolyai, Lobachevsky, Gauss). In un primo momento le nuove geometrie non furono accolte con entusiasmo dalla comunità scientifica; del resto l'obiettivo dei matematici era ancora quello di costruire questi spazi con regole estranee al mondo reale, ma con l'intenzione di arrivare prima o poi a contraddizioni logiche, le quali avrebbero così dimostrato l'assolutezza della geometria degli *Elementi*. Invece la contraddizione non arrivò mai; al posto di essa la costruzione dei modelli di geometria non-euclidea pose la parola fine a tutto quanto: la geometria non-euclidea deve essere accettata poiché logicamente coerente ed esemplificata da modelli concreti.

In realtà mondi in cui non valgono le regole della geometria euclidea non sono poi così lontani da noi. Ad esempio la superficie di una sfera, che rappresenta con buona approssimazione il mondo bidimensionale su cui viviamo noi, è un esempio di geometria non-euclidea: fino a che misuriamo distanze molto piccole sulla Terra l'approssimazione euclidea va bene, ma se supponiamo di dover misurare grandi distanze, ad esempio tra città molto lontane, allora deve essere tenuta in considerazione la curvatura della superficie terrestre. Più precisamente la geometria della sfera è una *geometria ellittica*: nel piano ellittico non esistono rette parallele, tutte le rette si incontrano a due a due. Sulla superficie della sfera le rette sono le circonferenze massime: per andare da un punto A ad un punto B sulla sfera seguendo il più breve tratto possibile dobbiamo seguire la circonferenza massima che passa per A e per B . Con tale definizione di retta però qualcosa casca: non

possiamo più definire il punto semplicemente come un punto della superficie sferica, altrimenti per due punti antipodali passerebbero infinite rette, che sono tutti i meridiani passanti per i due punti. Nella geometria della sfera infatti il “punto” è una coppia di punti antipodali, mentre una retta è una circonferenza massima. Il piano ellittico così determinato è quindi, a meno di deformazione, il piano proiettivo: la geometria proiettiva è quindi una geometria non-euclidea, ed infatti nella geometria proiettiva non esiste, per definizione, il concetto di parallelismo.

In questa breve trattazione ci occuperemo di alcuni modelli di *geometria iperbolica*, ovvero di geometria non-euclidea nella quale il postulato delle parallele cade ma abbiamo presenza di molte parallele, invece che non esistenza come nel caso ellittico. Più precisamente in uno spazio iperbolico fissati una retta ed un punto ad essa esterno esistono almeno due rette distinte tra loro passanti per il punto assegnato e che non intersecano la retta data.

Analizzeremo i due modelli principali di piano iperbolico; in modo abbastanza approfondito ci occuperemo dell’iperboloide ellittico dotato della metrica lorentziana, e ne studieremo le proprietà sfruttando la geometria differenziale. In un secondo momento otterremo un altro esempio importante di piano iperbolico, il disco di Poincaré, come proiezione stereografica dell’iperboloide lorentziano.

1. L’IPERBOLOIDE ELLITTICO

Uno dei più celebri modelli di piano iperbolico è dato dall’iperboloide ellittico, detto anche a due falde, il quale si ottiene per rotazione completa di un’iperbole attorno al suo asse trasverso. La quadrica risultante è una quadrica a punti ellittici costituita da due insiemi sconnessi di \mathbb{R}^3 che sono appunto le due falde dell’iperboloide. Fissiamo la nostra attenzione sull’iperboloide ellittico di equazione cartesiana

$$z^2 = 1 + x^2 + y^2.$$

Tale quadrica è rappresentata nella figura 1. Per quanto interessa a noi in questa trattazione ci limiteremo a considerare solo la falda superiore dell’iperboloide dato, che risulta essere il grafico della funzione $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$.

1.1. Metrica lorentziana sull’iperboloide ellittico. Andiamo a mettere sulla falda superiore dell’iperboloide considerato una metrica riemanniana che indurrà una geometria di tipo iperbolico sulla falda stessa. Per far ciò definiamo il seguente “prodotto scalare” su tutto \mathbb{R}^3 :

$$\langle (x, y, z), (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \rangle = x\bar{x} + y\bar{y} - z\bar{z}, \quad (x, y, z), (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3.$$

La metrica indotta si dice anche *lorentziana* e assume molta importanza in teoria della relatività; osserviamo che non si tratta di un prodotto scalare euclideo dal momento che non è definito positivo. Con tale notazione la falda superiore risulta essere data dall’insieme

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), (x, y, z) \rangle = -1\}.$$

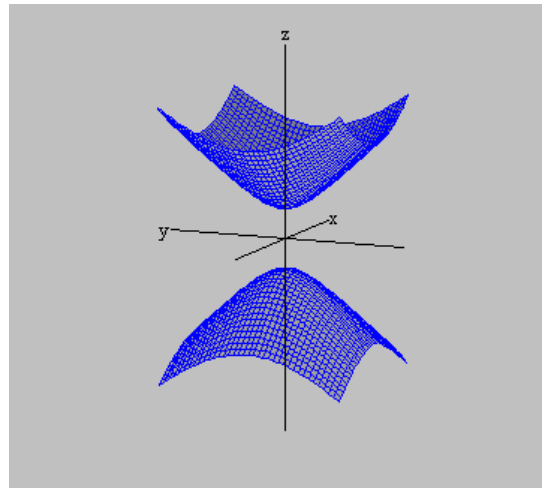


FIGURA 1. Le due falde dell'iperboloide di equazione $z^2 = 1 + x^2 + y^2$.

Rispetto alla metrica lorentziana la falda superiore dell'iperboloide considerato appare quindi “come una sfera”; ritroveremo anche più avanti analogie di questo tipo.

Andiamo ora a verificare che il prodotto scalare definito su tutto lo spazio risulta essere definito positivo se ristretto al generico piano tangente alla falda considerata. Per far ciò anzitutto parametrizziamo il grafico di $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ nel seguente modo.

$$(1) \quad \mathbf{x} : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{1 + u^2 + v^2} \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Ne segue che due generici vettori tangenti indipendenti saranno dati da

$$\mathbf{x}_u = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}\right), \quad \mathbf{x}_v = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}\right).$$

Il generico vettore tangente, e dunque il generico elemento del piano tangente in p , dove p ha coordinate locali (u, v) , è quindi dato da

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{x}_u + \beta \mathbf{x}_v = \left(\alpha, \beta, \frac{\alpha u + \beta v}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}\right)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Essendo $p = (u, v, \sqrt{1 + u^2 + v^2})$ osserviamo che si trova facilmente $\langle \mathbf{v}, p \rangle = 0$. Ne segue una cosa fondamentale: il piano tangente non è altro che $\{p\}^\perp$, dove l'ortogonalità è ovviamente da intendersi nel senso del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dunque il piano tangente risulta ortogonale in ogni punto al raggio vettore del punto stesso: un'ulteriore conferma del

fatto che rispetto alla metrica lorentziana l'iperboloide ellittico si comporta quindi "come una sfera". Risulta inoltre

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha v - \beta u)^2}{1 + u^2 + v^2} \geq 0$$

e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\alpha = \beta = 0$. Ne segue un'altra fondamentale proprietà: il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induce sul generico piano tangente una metrica riemanniana. Abbiamo così dimostrato che la falda di equazione $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ diventa una varietà riemanniana con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sul piano tangente: denotiamo con \mathbb{I}_2 tale varietà riemanniana.

Troviamo, per concludere, le componenti del tensore metrico. Si ha facilmente

$$g_{11} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{1 + v^2}{1 + u^2 + v^2}, \quad g_{22} = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1 + u^2}{1 + u^2 + v^2},$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = -\frac{uv}{1 + u^2 + v^2}.$$

da cui

$$g^{11} = 1 + u^2, \quad g^{22} = 1 + v^2, \quad g^{12} = g^{21} = uv.$$

1.2. Lunghezza di curve su \mathbb{I}_2 . Rispetto alla parametrizzazione data da (1) una curva $(u(t), v(t))$ su \mathbb{I}_2 parametrizzata sull'intervallo $[a, b]$ ha lunghezza pari a

$$\mathcal{L}(c) = \int_a^b \sqrt{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2} dt,$$

da cui si trae l'importante formula

$$\mathcal{L}(c) = \int_a^b \sqrt{\frac{\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + (\dot{u}\dot{v} - \dot{v}\dot{u})^2}{1 + u^2 + v^2}} dt.$$

1.3. Curvatura riemanniana dell'iperboloide lorentziano. Per studiare la curvatura di \mathbb{I}_2 non conviene parametrizzare \mathbb{I}_2 con la parametrizzazione (1). Per semplificare i conti parametrizziamo in un altro modo $\mathbb{I}_2 \setminus \{0, 0, 1\}$; dimostriamo che in ogni punto di $\mathbb{I}_2 \setminus \{0, 0, 1\}$ la curvatura riemanniana K vale -1 ; per continuità anche in $\{0, 0, 1\}$ essa varrà -1 . La parametrizzazione che scegliamo è la seguente:

$$\bar{\mathbf{x}} : \begin{cases} x = \sinh \psi \cos \varphi \\ y = \sinh \psi \sin \varphi \\ z = \cosh \psi \end{cases} \quad (\psi, \varphi) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times [0, 2\pi).$$

Si ha dunque

$$\bar{\mathbf{x}}_\psi = (\cosh \psi \cos \varphi, \cosh \psi \sin \varphi, \sinh \psi)$$

e

$$\bar{\mathbf{x}}_\varphi = (-\sinh \psi \sin \varphi, \sinh \psi \cos \varphi, 0).$$

Osserviamo che l'espressione di $\bar{\mathbf{x}}_\varphi$ motiva il fatto che abbiamo escluso $\psi = 0$; infatti per $\psi = 0$ si ha $\bar{\mathbf{x}}_\varphi = (0, 0, 0)$ per cui nel punto $(0, 0, 1)$ non avremmo due vettori tangenti linearmente indipendenti.

Troviamo quindi le componenti del tensore metrico g_{ij} rispetto a queste nuove coordinate. Si ha

$$g_{11} = \langle \bar{\mathbf{x}}_\psi, \bar{\mathbf{x}}_\psi \rangle = 1, \quad g_{22} = \langle \bar{\mathbf{x}}_\varphi, \bar{\mathbf{x}}_\varphi \rangle = \sinh^2 \psi,$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle \bar{\mathbf{x}}_\psi, \bar{\mathbf{x}}_\varphi \rangle = 0.$$

da cui

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{\sinh^2 \psi}, \quad g^{12} = g^{21} = 0.$$

I soli simboli di Christoffel non nulli sono dati da

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial \psi}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial \psi}$$

da cui segue che la componente essenziale R_{1212} del tensore di Riemann è data da

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \frac{\partial}{\partial \psi} (g_{11}\Gamma_{22}^1) - g_{11}\Gamma_{22}^1\Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial \psi^2} + \frac{1}{4\sinh^2 \psi} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \psi} \right)^2 \\ &= -\sinh^2 \psi. \end{aligned}$$

Si ha quindi finalmente

$$K := \frac{R_{1212}}{\det(g_{ij})} = -\frac{\sinh^2 \psi}{\sinh^2 \psi} = -1$$

che prova quanto volevamo. La negatività della curvatura riemanniana è una proprietà tipica delle varietà riemanniana di natura iperbolica.

1.4. Geodetiche sopra \mathbb{I}_2 . In questo paragrafo analizziamo uno dei problemi più importanti: lo studio delle geodetiche, ovvero le “rette” del piano iperbolico \mathbb{I}_2 . Consideriamo una sezione piana γ di \mathbb{I}_2 ottenuta sezionando \mathbb{I}_2 con un piano passante per l’origine, e parametrizzata a velocità unitaria (rispetto al prodotto scalare lorentziano). Allora in ogni punto q di γ la retta normale principale a γ è la retta generata da q ; ne segue che la normale principale stessa è ortogonale punto per punto al piano tangente a \mathbb{I}_2 . Essendo γ a velocità unitaria si ha quindi che la derivata covariante del vettore tangente lungo γ è 0. Per definizione γ è dunque una geodetica su \mathbb{I}_2 rispetto alla metrica lorentziana. Viceversa se $p = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è un punto di \mathbb{I}_2 e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in T_p\mathbb{I}_2$ con $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$, allora per unicità l’unica geodetica che passa per p e ha in p vettore tangente \mathbf{v} è proprio la curva piana sezione tra \mathbb{I}_2 ed il piano generato da p e da \mathbf{v} . Osserviamo che essendo le geodetiche di \mathbb{I}_2 sezioni piane di una quadrica esse sono necessariamente coniche; più precisamente risultano essere tutte iperboli dal momento che passano per due punti impropri dell’iperboloide.

Andiamo ora a trovare le equazioni parametriche dell’unica geodetica passante per p e con vettore tangente $\mathbf{v} \in T_p\mathbb{I}_2$ in p con $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$. Il piano

generato da p e da \mathbf{v} ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \lambda\bar{x} + \mu v_1 \\ y = \lambda\bar{y} + \mu v_2 \\ z = \lambda\bar{z} + \mu v_3 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ne segue che le equazioni della geodetica γ spiccata da p con velocità \mathbf{v} si trovano da

$$(2) \quad \gamma : \begin{cases} u(t) = \lambda\bar{x} + \mu v_1 \\ v(t) = \lambda\bar{y} + \mu v_2 \\ \sqrt{1 + u(t)^2 + v(t)^2} = \lambda\bar{z} + \mu v_3. \end{cases}$$

Ponendo $\lambda = \cosh t$ e $\mu = \sinh t$ si ha che la terza equazione di (2) diventa un'identità e dunque una parametrizzazione per γ è data da

$$\gamma(t) = \cosh t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \sinh t(v_1, v_2, v_3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si osservi inoltre che la parametrizzazione data è a velocità unitaria (rispetto alla metrica lorentziana ovviamente): infatti si ha facilmente

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 - (z'(t))^2 = 1.$$

Le geodetiche su \mathbb{I}_2 sono quindi globali, per cui \mathbb{I}_2 è una varietà riemanniana completa. Come già osservato per via sintetica si tratta di iperboli; nel caso particolare in cui il piano generato da p e \mathbf{v} sia perpendicolare, in senso euclideo, al piano $z = 0$, si ottengono i meridiani di \mathbb{I}_2 , che sono iperboli equilateri che hanno vertice in $(0, 0, 1)$. Se quindi due punti di \mathbb{I}_2 stanno sullo stesso meridiano la geodetica che li connette, rispetto alla metrica lorentziana, è l'arco di meridiano stesso a cui appartengono.

2. IL DISCO DI POINCARÉ

Passiamo ora alla costruzione di un altro fondamentale modello di piano iperbolico, che dedurremo proiettando stereograficamente l'iperboloide \mathbb{I}_2 sul piano $z = 0$ dal polo sud $(0, 0, -1)$. A tal scopo consideriamo la retta uscente da $(0, 0, -1)$ e che incontra \mathbb{I}_2 in $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Tale retta ha equazioni parametriche date da

$$r : \begin{cases} x = \lambda\bar{x} \\ y = \lambda\bar{y} \\ z = -1 + \lambda(\bar{z} + 1) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La proiezione stereografica π di \mathbb{I}_2 sul piano $z = 0$ sarà quindi data dall'insieme

$$\pi(\mathbb{I}_2) = \left\{ \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in \mathbb{I}_2 \right\}.$$

Essendo $z \geq 1$ sempre l'espressione di $\pi(\mathbb{I}_2)$ risulta ben definita. Dal momento che $x^2 + y^2 = z^2 - 1$ si trova che

$$\frac{x^2}{(1+z)^2} + \frac{y^2}{(1+z)^2} = \frac{z^2 - 1}{(1+z)^2} = \frac{z-1}{1+z}.$$

Potendo z variare in tutto $[1, +\infty)$ si ha che $\frac{z-1}{1+z}$ varia in tutto $[0, 1)$. Si conclude quindi che

$$\pi(\mathbb{I}_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

La falda superiore dell'iperboloide ellittico di equazione $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ si proietta quindi sul disco aperto unitario centrato nell'origine. Su tale disco possiamo definire la metrica iperbolica indotta dalla metrica lorentziana di \mathbb{I}_2 . Più precisamente siano \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 due vettori tangenti a $\pi(\mathbb{I}_2)$ nel punto $p \in \pi(\mathbb{I}_2)$; allora \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono tangenti in p a due curve tracciate in $\pi(\mathbb{I}_2)$ date da γ_1 e γ_2 rispettivamente. Siano \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 i due vettori tangenti alle curve $\pi^{-1} \circ \gamma_1$ e $\pi^{-1} \circ \gamma_2$ rispettivamente; allora poniamo

$$(3) \quad \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle := \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle.$$

In questo modo $\pi(\mathbb{I}_2)$ eredita la struttura di varietà riemanniana da \mathbb{I}_2 ; in particolare $\pi(\mathbb{I}_2)$ diventa una superficie con curvatura riemanniana costantemente uguale a -1 . Si osservi l'importante fatto che segue: dal punto di vista euclideo $\pi(\mathbb{I}_2)$ è una superficie piatta; la metrica definita da (3) rende invece il disco aperto $\pi(\mathbb{I}_2)$ una superficie "curva", in particolare una superficie di tipo iperbolico. La curvatura quindi è una proprietà fortemente dipendente dalla metrica considerata.

Il disco $\pi(\mathbb{I}_2)$ munito della metrica (3) viene detto *disco di Poincaré*, lo denotiamo con \mathbb{D}_2 , e rappresenta un modello a tutti gli effetti "piano" di piano iperbolico.

2.1. Geodetiche in \mathbb{D}_2 . Per definizione di metrica sopra \mathbb{D}_2 si ha che le geodetiche di \mathbb{D}_2 si trovano mediante proiezione stereografica delle geodetiche di \mathbb{I}_2 . Dal momento che una geodetica γ su \mathbb{I}_2 è parametrizzata da

$$t \mapsto \cosh t(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \sinh t(v_1, v_2, v_3)$$

essendo $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = p \in \mathbb{I}_2$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{T}_p\mathbb{I}_2$ con $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$, si ha che la proiezione stereografica dal polo sud $(0, 0, -1)$ di γ sul piano $z = 0$ ha parametrizzazione data da

$$\pi(\gamma) : \begin{cases} x(t) = \frac{\cosh t\bar{x} + \sinh tv_1}{1 + \cosh t\bar{z} + \sinh tv_3} \\ y(t) = \frac{\cosh t\bar{y} + \sinh tv_2}{1 + \cosh t\bar{z} + \sinh tv_3} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

la quale risulta ben definita dal momento che $\cosh t\bar{z} + \sinh tv_3 > 1$ sempre. Verifichiamo che $\pi(\gamma)$ è un arco di circonferenza dimostrando che la curvatura in senso euclideo è costante; dal momento che non siamo in parametrizzazione intrinseca (rispetto alla metrica euclidea) dobbiamo sfruttare la formula generale data da

$$k = \frac{\|(x'(t), y'(t), 0) \wedge (x''(t), y''(t), 0)\|}{\|(x'(t), y'(t), 0)\|^3}.$$

Allo scopo calcoliamo anzitutto $x'(t)$ e $y'(t)$; si ha facilmente

$$x'(t) = \frac{\bar{z}v_1 - \bar{x}v_3 + \sinh t\bar{x} + \cosh tv_1}{(1 + \cosh t\bar{z} + \sinh tv_3)^2},$$

$$y'(t) = \frac{\bar{z}v_2 - \bar{y}v_3 + \sinh t\bar{y} + \cosh tv_2}{(1 + \cosh t\bar{z} + \sinh tv_3)^2}.$$

Ne segue che

$$x''(t) = \frac{x(t) - x'(t)(\sinh t\bar{z} + \cosh tv_3)}{1 + \cosh t\bar{z} + \sinh tv_3},$$

$$y''(t) = \frac{y(t) - y'(t)(\sinh t\bar{z} + \cosh tv_3)}{1 + \cosh t\bar{z} + \sinh tv_3}.$$

Si trova quindi che

$$(x'(t), y'(t), 0) \wedge (x''(t), y''(t), 0) = \left(0, 0, \frac{x'(t)y(t) - x(t)y'(t)}{1 + \cosh t\bar{z} + \sinh tv_3}\right)$$

da cui

$$\|(x'(t), y'(t), 0) \wedge (x''(t), y''(t), 0)\| = \frac{|x'(t)y(t) - x(t)y'(t)|}{1 + \cosh t\bar{z} + \sinh tv_3}.$$

Calcolando esplicitamente $x'(t)y(t) - x(t)y'(t)$ si trova

$$\|(x'(t), y'(t), 0) \wedge (x''(t), y''(t), 0)\| = \frac{|\bar{y}v_1 - \bar{x}v_2|}{(1 + \cosh t\bar{z} + \sinh tv_3)^3}.$$

Dal momento che risulta

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \frac{1}{(1 + \cosh t\bar{z} + \sinh tv_3)^2}$$

si deduce che $k = |\bar{y}v_1 - \bar{x}v_2|$, la quale mostra che la curvatura non dipende da t . La curva $\pi(\gamma)$ è quindi un arco di circonferenza. Osserviamo inoltre che si ha

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\bar{x} + \tanh tv_1}{\frac{1}{\cosh t} + \bar{z} + \tanh tv_3} = \frac{\bar{x} + v_1}{\bar{z} + v_3}$$

e

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\bar{y} + \tanh tv_2}{\frac{1}{\cosh t} + \bar{z} + \tanh tv_3} = \frac{\bar{y} + v_2}{\bar{z} + v_3}.$$

Il punto di coordinate

$$\left(\frac{\bar{x} + v_1}{\bar{z} + v_3}, \frac{\bar{y} + v_2}{\bar{z} + v_3}\right)$$

sta su $\partial\mathbb{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$: infatti risulta

$$\left(\frac{\bar{x} + v_1}{\bar{z} + v_3}\right)^2 + \left(\frac{\bar{y} + v_2}{\bar{z} + v_3}\right)^2 = \frac{(\bar{z} + v_3)^2}{(\bar{z} + v_3)^2} = 1.$$

In modo analogo si dimostra che

$$(6) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = \left(\frac{\bar{x} - v_1}{\bar{z} - v_3}, \frac{\bar{y} - v_2}{\bar{z} - v_3} \right) \in \partial \mathbb{D}_2.$$

Dunque le geodetiche di \mathbb{D}_2 si avvicinano al bordo di \mathbb{D}_2 , ma raggiungendolo solo in un tempo infinito. Inoltre si ha

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x'(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y'(t) = 0$$

la quale dice che la velocità di $\pi(\gamma)$ tende a 0 quando la geodetica $\pi(\gamma)$ tende ad avvicinarsi al bordo di \mathbb{D}_2 . Il vettore tangente a $\pi(\gamma)$ tende quindi a diventare il vettore nullo quando $t \rightarrow \pm\infty$, nonostante esso resti di lunghezza 1 in ogni istante rispetto al prodotto scalare lorentziano. Per avere quindi informazioni sul comportamento della direzione del vettore tangente quando $t \rightarrow \pm\infty$ normalizziamo esso rispetto alla norma euclidea. Abbiamo già visto che

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \frac{1}{(1 + \cosh t\bar{z} + \sinh tv_3)^2}$$

e dunque

$$T_e(t) := \frac{(x'(t), y'(t))}{\|(x'(t), y'(t))\|} = \left(\frac{\bar{z}v_1 - \bar{x}v_3 + \sinh t\bar{x} + \cosh tv_1}{1 + \cosh t\bar{z} + \sinh tv_3}, \frac{\bar{z}v_2 - \bar{y}v_3 + \sinh t\bar{y} + \cosh tv_2}{1 + \cosh t\bar{z} + \sinh tv_3} \right).$$

Passando al limite per $t \rightarrow +\infty$ come in precedenza si trova

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T_e(t) = \left(\frac{\bar{x} + v_1}{\bar{z} + v_3}, \frac{\bar{y} + v_2}{\bar{z} + v_3} \right)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} T_e(t) = \left(\frac{-\bar{x} + v_1}{\bar{z} - v_3}, \frac{-\bar{y} + v_2}{\bar{z} - v_3} \right).$$

Confrontando tali formule con le (4), (5) e (6) si deduce che il vettore tangente tende ad assumere la direzione del raggio vettore quando $t \rightarrow \pm\infty$; ne segue che le geodetiche si avvicinano ortogonalmente, in senso euclideo, al bordo di \mathbb{D}_2 . Nella figura 2 è riportato il disco \mathbb{D}_2 , le due “rette” AB e BC ed è anche raffigurato l’angolo tra le due rette.

In figura 3 invece sono rappresentate le proiezioni delle geodetiche di \mathbb{I}_2 sul disco di Poincaré. Osserviamo che le geodetiche di \mathbb{D}_2 che sono proiezione stereografica dei meridiani di \mathbb{I}_2 diventano i diametri di \mathbb{D}_2 ; se quindi la congiungente due punti di \mathbb{D}_2 passa per il centro del disco allora l’unica geodetica che connette i due punti assegnati è il segmento di retta, come accadrebbe rispetto alla metrica euclidea.

Il disco di Poincaré rappresenta un modello di piano iperbolico rispetto alla definizione elementare di geometria iperbolica stessa, così come anche l’iperboloide ellittico munito della metrica lorentziana: basta chiamare rette gli archi di circonferenza interni a \mathbb{D}_2 che incontrano il bordo del disco ortogonalmente. Assegnati un punto in \mathbb{D}_2 ed una retta del disco di Poincaré

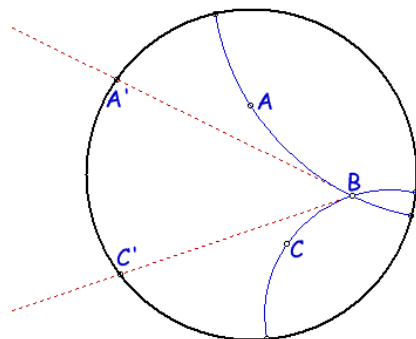


FIGURA 2. Il disco di Poincaré

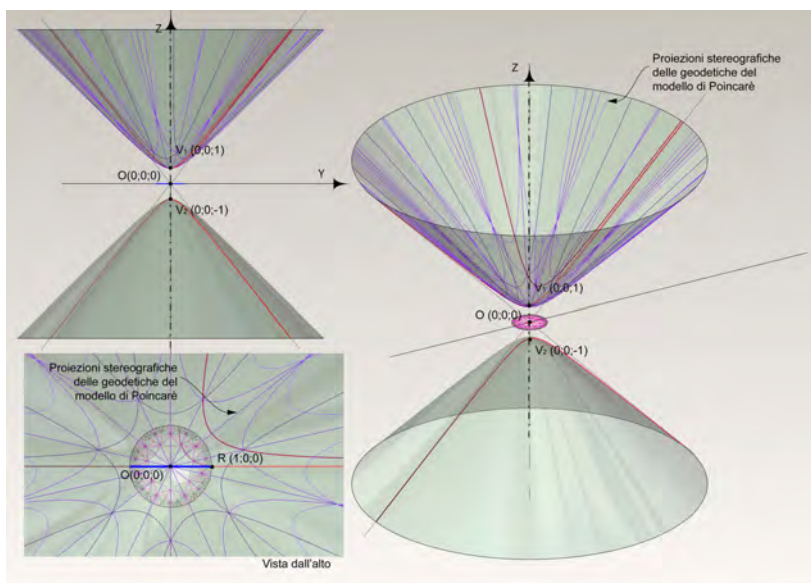


FIGURA 3. Proiezione stereografica delle geodetiche di \mathbb{H}_2

che non passa per il punto dato, esistono allora infinite altre rette che passano per il punto e che non incontrano la retta assegnata; quindi nel disco di Poincaré il quinto postulato di Euclide non è più vero.

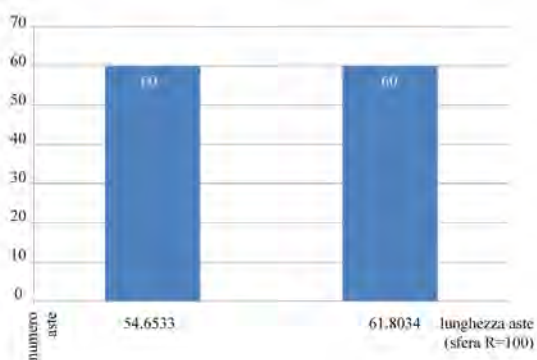
RINGRAZIAMENTI

Ringrazio la dott. Paola Frediani, ricercatrice in Geometria presso l'Università degli Studi di Pavia, per la fondamentale consulenza e i preziosi riferimenti bibliografici. Ringrazio la prof. Silvia Pianta, professore associato di Geometria presso l'Università Cattolica di Brescia per l'interesse mostrato e i numerosi consigli. Infine, ma non ultimo in ordine di importanza, ringrazio il dott. Leonardo Baglioni, dottorando in Scienza della rappresentazione presso l'Università La Sapienza di Roma per avere motivato lo studio, da parte mia, dei modelli di piano iperbolico e per aver fornito l'immagine che rappresenta la proiezione stereografica delle geodetiche.

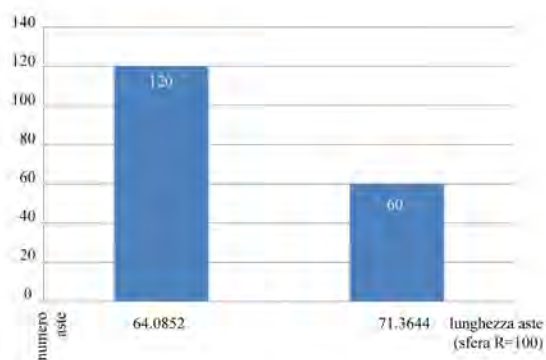
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] M. P. Docarmo. *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice Hall, 1976.
- [2] R. Benedetti, C. Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*, Springer Berlin, 1992.
- [3] E. Sernesi. *Geometria 2*, Bollati boringhieri, Torino, 1994.
- [4] B. Spain. *Calcolo tensoriale*, Edizioni cremonese, Roma, 1971.

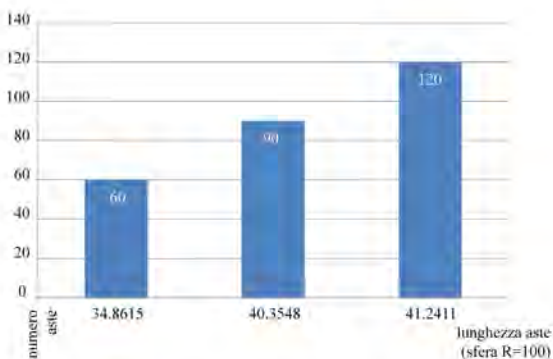
Appendice al Capitolo IV



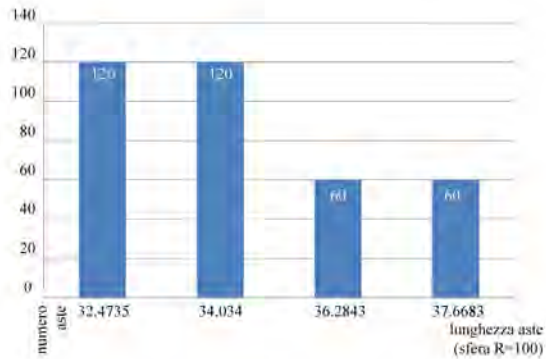
Griglia Icosaedrica $I_{1,1}=A III_0$
Numero totale aste: 120



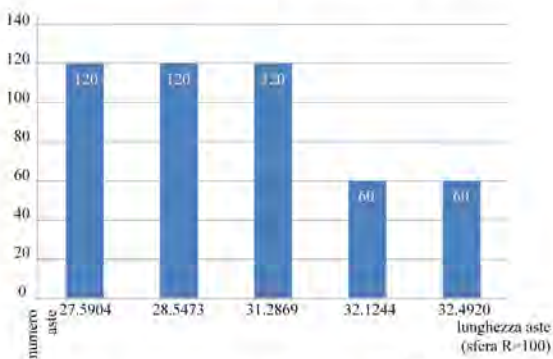
Griglia Dodecaedrica ID
Numero totale aste: 180



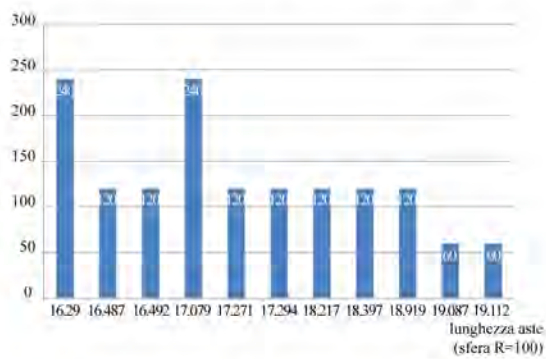
Griglia Icosaedrica $I_{1,1}=A III_2$
Numero totale aste: 270



Griglia Dodecaedrica ID_1
Numero totale aste: 360

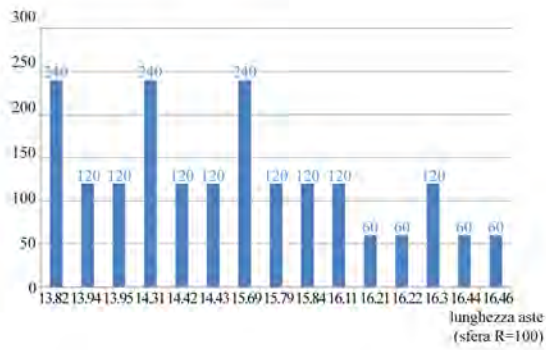


Griglia Icosaedrica $I_{2,2}=A III_1$
Numero totale aste: 480

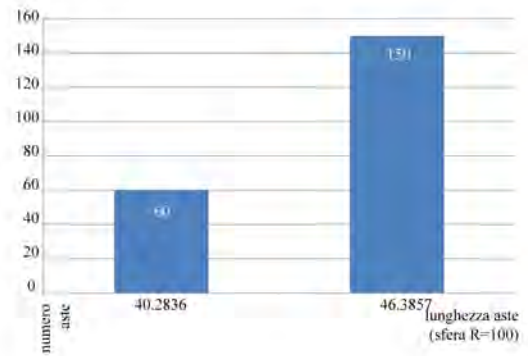


Griglia Dodecaedrica ID_2
Numero totale aste: 1440

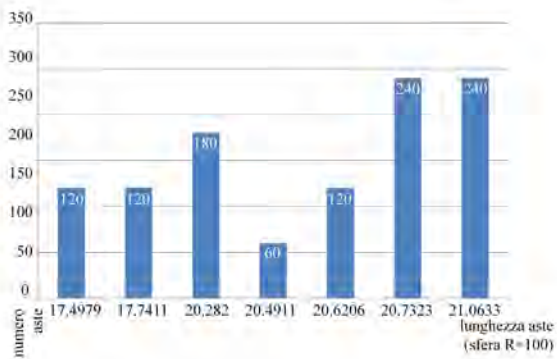




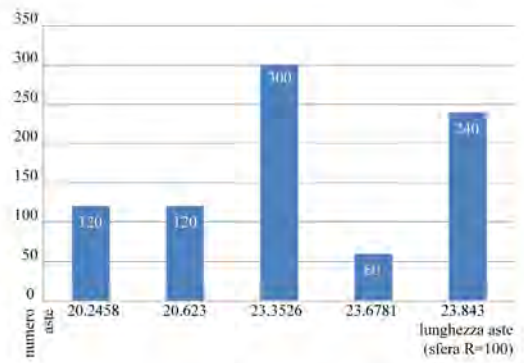
Griglia Dodecaedrica A III₂=I₂₃
Numero totale aste: 1920



Griglia Dodecaedrica A X III₀
Numero totale aste: 210



Griglia Icosaedrica A V₂₁
Numero totale aste: 1080



Griglia Icosaedrica A XIII₁
Numero totale aste: 840





MESHING SOFTWARE SURVEY

Tetrahedra Mesh Generation Software

Product Name	Company / Organization	Availability				Platform				Discipline				Elements				Tri/Tet Algorithm			Quad/Hex Algorithm				Other Features				Company / Organization	Product Name							
		Public Domain	Research Code	Commercial Product	Stand Alone Module	Source Code	Customer Support	Windows	Macintosh	UNIX	Structural	CFD	EMAG	Thermal	Environmental	Tetrahedra	Quasitetrahedra	Hexahedra	Pyramid	Wedge	Surface Meshing	Deflating	Advancing Front	Octree	Advancing Front	Medial Axis	Indirect	Sweeping			Blapped Meshing	Structured	Boundary Layers	Adaptivity	Anisotropy	Refinement	Mesh Improvement
AFLR3	ERC, Miss. State																																			ERC, Miss. State	AFLR3
AMESH	EKK, Inc																																			EKK, Inc	AMESH
ANSYS	ANSYS, Inc.																																			ANSYS, Inc.	ANSYS
AVL FAME	AVL LIST GmbH																																			AVL LIST GmbH	AVL FAME
CADfx	FEOS Ltd.																																			FEOS Ltd.	CADfx
CFD-GEOM	CFD Research Corp.																																			CFD Research Corp.	CFD-GEOM
COG	WIAS Berlin																																			WIAS Berlin	COG
CUBIT	Sandia Nat. Lab.																																			Sandia Nat. Lab.	CUBIT
DesignSpace	ANSYS Inc.																																			ANSYS Inc.	DesignSpace
FELISA	NASA/MIT																																			NASA/MIT	FELISA
FEMGV	Femsys Ltd.																																			Femsys Ltd.	FEMGV
Gambit	Fluent, Inc.																																			Fluent, Inc.	Gambit
geomagic Wrap	Raindrop Geomagic																																			Raindrop Geomagic	geomagic Wrap
Geopack90	ZCS Inc.																																			ZCS Inc.	Geopack90
GiD	CIMNE																																			CIMNE	GiD
GMS	EMRC, BYU																																			EMRC, BYU	GMS
GMSH	E. C. Montreal & U. Liege																																			E. C. Montreal & U. Liege	GMSH
Gridgen	Pointwise																																			Pointwise	Gridgen
GridTool	NASA Langley																																			NASA Langley	GridTool
GRUMMP	U. of British Columbia																																			U. of British Columbia	GRUMMP
BOMARD	Electricité de France																																			Electricité de France	BOMARD
Ilypermesh	Alair																																			Alair	Ilypermesh
ICEM CFD	ICEM CFD																																			ICEM CFD	ICEM CFD
LaGrT	Los Alamos																																			Los Alamos	LaGrT
MAFIA-M	CST																																			CST	MAFIA-M
MEGA	SCOREC, RPI																																			SCOREC, RPI	MEGA
Mentat	MARC																																			MARC	Mentat
Mesh++	CRS4, Sardinia																																			CRS4, Sardinia	Mesh++
Mesh-Maker	Env. Ctr., U. of Leeds																																			Env. Ctr., U. of Leeds	Mesh-Maker
MESH	ISE, Zurich																																			ISE, Zurich	MESH
MG	TecGraf																																			TecGraf	MG
MTC	SCC/CEMEF																																			SCC/CEMEF	MTC
NETGEN	J. Kepler U., Austria																																			J. Kepler U., Austria	NETGEN
Ohull	Geom. Center, U. of Minneapolis																																			Geom. Center, U. of Minneapolis	Ohull
QMG	Cornell University																																			Cornell University	QMG
samm	adapco																																			adapco	samm
SCP Grid Library	Syracuse University																																			Syracuse University	SCP Grid Library
SolidMesh	ERC, Miss. State																																			ERC, Miss. State	SolidMesh
TetMesh GH3D	SIMULOG																																			SIMULOG	TetMesh GH3D
TGrid	Fluent, Inc.																																			Fluent, Inc.	TGrid
TrueGrid	XYZ Sci. Apps., Inc.																																			XYZ Sci. Apps., Inc.	TrueGrid
VGRID	NASA Langley																																			NASA Langley	VGRID

MESHING SOFTWARE SURVEY | MESHING RESEARCH CORNER
shawn@sandia.gov

Abstract


*The reduction of a continuous domain into a discrete one, is called tessellation. Dealing with the question from a geometrical, mathematical and historical point of view, is possible to define a path through the several meanings of this word, in the different scientific areas in which it is applied. Starting from the analysis of some of the features of the contemporary architecture, deeply influenced by the technologies it comes from (free-form represented by NURBS surfaces), our investigation focuses on the properties of euclidean plane tessellations which is called tiling. Although the art of tiling must have originated very early in the history of civilization, as soon as man began to build and to use the stones to cover the floors and the walls of his house, the science of tiling is more recent. With the term science of tiling we mean the study of its mathematical properties. Probably the first study of this kind appears in Kepler's book *Harmonices Mundi* dated 1619. The research goes on with the study of the work *Circle Limit III*, made by the Dutch artist M.C.Escher, which represents the occasion to approach the revolutionary ideas of the hyperbolic geometry and its geometrical properties. A specific application of the hyperbolic geometry concepts is represented by the Minkowskian model of the Einstein's space-time theory (the subject has been studied with the collaboration of the mathematician Luca Lussardi of the Mathematical Department of Politecnico di Torino). We present the discretization of other non-euclidean geometry,*

the elliptic one, with the aim of introducing the important theme of polyhedron which leads to the structural grids of the geodesic domes. In this part of the work, we highlighted the facet of actuality that the subject is still having in spite of its long history. As an example, we studied the specific configuration of two irregular polyhedra (one pentagonal dodecahedron and one tetrakaidecahedra) discovered by Wearie e Phelan in 1993, which can be packed together to give the least possible amount of surface film between them (they are called Wearie-Phelan bubbles). We indicated some features of the so called saddle-polyhedra studied beginning from 1960. The last chapter of the work deals with an important application of tessellation in computer technology, with the polyhedral surface called mesh. We present a brief survey of mesh generation technology, in which we compared the fundamentals algorithms used by mesh generation software used nowadays in many different fields. The methodology implemented for the whole work gives priority to the synthetic description of an event more than the symbolic one. This is possible thanks to the mathematical representation introduced with the NURBS software, which can be used as a scientific virtual laboratory: we can make an hypothesis and then verify its veracity. Another question which finds solution thanks to the mathematical representation introduced, is that one of the visualization of the subjects would be too elaborate for the traditional graphical description.



Leonardo Baglioni
estratto del curriculum

Leonardo Baglioni nasce a Roma il 30 luglio 1973. Nel 2001 si laurea in Architettura presso l'Università degli Studi Roma TRE ed inizia la sua attività di libero professionista. Particolarmente rilevanti sono le collaborazioni al progetto definitivo delle opere di valorizzazione delle pendici e dell'invaso fluviale del Tevere Trasversale del Gianicolo e Trasversale dell'Aventino per l'Ufficio Città Storica del Comune di Roma e al rilievo del tamburo della chiesa di S. Agnese in Agone per la Soprintendenza. Nel 2005 vince una borsa di studio per il Dottorato di Ricerca in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo, presso la Sapienza Università di Roma. All'interno dell'esperienza di dottorato pubblica due saggi dal titolo "Il contributo del modellatore informatico nello studio di curve sghembe: eliche, spirali e lossodromie" e "Studio sulla genesi geometrica della Cappella Pazzi" in *Informatica e fondamenti scientifici della rappresentazione*, a cura di Laura De Carlo. In collaborazione con Riccardo Migliari, pubblica l'articolo "Edward Kasner: il signore degli anelli. Il problema di Apollonio nello spazio: il caso delle circonferenze a diversa giacitura", in *Ikhnos*, 2008. In collaborazione con Piero Albisinni pubblica l'articolo "Il modello strutturato nello studio dei caratteri dell'architettura", in *Abitare Virtuale significa rappresentare*, a cura di Maurizio Unali.



Scuola Nazionale di Dottorato
in *Scienze della Rappresentazione e del Rilievo*
I Ciclo 2005/2008

Sede centrale di coordinamento
Università degli Studi di Firenze
Direttore
Emma Mandelli

Sedi consorziate
Politecnico di Bari
Università di Catania - Siracusa
Università degli studi "G. D'Annunzio" Chieti - Pescara
Università degli Studi di Firenze
Università degli Studi di Palermo
Università Mediterranea di Reggio Calabria
Sapienza Università di Roma

Sito web ufficiale
www.scuoladottorato-icar17.it