

## Geometria responsiva *Responsive Geometry*

Il progetto industriale, così come quello architettonico, manifesta un'attenzione crescente verso comportamenti di tipo "responsivo". Gli oggetti, sia nella piccola scala del Design, sia nella più grande scala dell'architettura, sono sempre più frequentemente dotati di un'intelligenza digitale, una logica comportamentale che consente loro di interagire con le persone che li fruiscono. Gli oggetti e gli spazi a carattere "responsivo" caratterizzeranno senza dubbio il prossimo futuro e questo processo di trasformazione riguarderà in modo particolare anche la forma e dunque la geometria che la forma stessa astrae e descrive. La modellazione parametrica è un valido ausilio in questo processo, ma il progettista, più del solito, dovrà necessariamente confrontarsi con la geometria. Lo studio qui illustrato sperimenta la parametrizzazione finalizzata alla trasformazione dinamica di superfici piane in superfici coniche.

*As the architectural drawing, the industrial one shows a growing interest for "responsive" behaviors. From the design scale to the architectural scale, the objects are ever more often endowed with a digital intelligence, a behavioral logic that allows them to interact with the people using them. The "responsive" objects and spaces will certainly characterize the near future. This transformation process will also especially involve the form, and the geometry abstracted and described by the form itself. So, a new way of imagine and design dynamic models is necessary. Parametric modeling is a great help in this process, but the designer will necessarily more than ever face with the geometry. In this study we test the parameterization oriented to the dynamic transformation of flat surfaces in conical ones.*



**Graziano Mario Valenti**

Architetto. Professore di Modellazione digitale e Computer Grafica presso l'Università di Roma "La Sapienza", Dipartimento di Architettura. Nei suoi recenti scritti e contributi teorici ha focalizzato l'attenzione sulla definizione di una interazione dinamica con un modello digitale integrato.



**Jessica Romor**

Architetto, Dottore di ricerca presso il Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura dell'Università di Roma "La Sapienza". Assegnista di ricerca, si occupa di storia e tecnica dei metodi di rappresentazione e collabora ai corsi di Disegno e Fondamenti e applicazioni di geometria descrittiva del Prof. Riccardo Migliari.

**Parole chiave:** dynamic models, folding surfaces, ruled surfaces, visual programming, parametric models

**Keywords:** modelli dinamici, superfici piegate, superfici rigate, programmazione visuale, modelli parametrici

## INTRODUZIONE

Al giorno d'oggi vi sono diverse procedure per operare nella modellazione tridimensionale in modo parametrico: il progettista può disporre di una vasta gamma di applicazioni che spaziano da modalità vicine alla programmazione fino a modalità grafiche concettuali o proprie del disegno tecnico. Pur agevolato dalla tecnologia informatica, il progettista che vuole cimentarsi con forme dinamiche si trova presto ad affrontare complesse problematiche di tipo geometrico. Se oggi si può considerare relativamente facile concepire virtualmente superfici statiche, anche notevolmente complesse, e perfino realizzarle, soprattutto nella piccola scala, non si può dire altrettanto quando le superfici debbano anche muoversi o addirittura trasformarsi durante questo movimento.

In un periodo temporale in cui l'approccio scultoreo al progetto tende a superare quello geometrico, l'approccio dinamico parametrico, pensato in funzione del movimento delle superfici, può riportare in primo piano la necessità di conoscere la geometria, condizione indispensabile per sapere come far variare le forme, come vincolarle, così come individuare gli elementi che possono essere oggetto di parametrizzazione.

Attualmente possiamo distinguere tre diverse modalità operative per definire un modello tridimensionale parametrico: *scripting*, *geometric constraint*, *nodal*.

Lo *scripting* è per natura il più antico e il più efficace dei tre metodi: trattandosi di programmazione vera e propria, consente la massima versatilità e accesso alle risorse del sistema. I modellatori, normalmente, consentono tre livelli principali. Il primo livello, rivolto all'utente generico, consente di automatizzare una sequenza di comandi per ripeterli facilmente nel loro insieme ad ogni successiva utile occorrenza. Il secondo livello, rivolto ad un utente che ha già nozioni di programmazione, consente una programmazione più strutturata utilizzando linguaggi di alto livello (*visual basic*, *javascript*, *python*, *lisp*.) con i quali è generalmente possibile pilotare il software di modellazione per soddisfare ogni esigenza di disegno. Il terzo livello, infine, rivolto ai programmatori, consente

```
Function CreateEntasi(ByVal myFrct As Double, ByVal myY As Dou
```

```

myFrct = myFrct * myMod
myY = myY * myMod
cdx = cdx * myMod
edx = edx * myMod

Dim baseX As Double = myMod / 2 + cdx
Dim baseY As Double = myY
Dim startX As Double = baseX
Dim startY As Double = myY + myFrct / 3
Dim controlX As Double = baseX
Dim controlY As Double = myY + myFrct * 2 / 3
Dim endX As Double = baseX + edx
Dim endY As Double = myY + myFrct

Dim P1(2), P2(2), P3(2), P4(2) As Double
Dim arrpoints(2) As Object
P1(0) = baseX : P1(1) = 0 : P1(2) = baseY
P2(0) = startX : P2(1) = 0 : P2(2) = startY
P3(0) = controlX : P3(1) = 0 : P3(2) = controlY
P4(0) = endX : P4(1) = 0 : P4(2) = endY
arrpoints(0) = P2 : arrpoints(1) = P3 : arrpoints(2) = P4

Dim Prof01, Prof02 As String
Dim Prof03 As Object
Dim MyCurve(1) As String
Prof01 = m_rhinoscript.AddLine(P1, P2)
Prof02 = m_rhinoscript.AddCurve(arrpoints)
MyCurve(0) = Prof01 : MyCurve(1) = Prof02
Prof03 = m_rhinoscript.JoinCurves(MyCurve, True)

m_rhinoscript.AddRevSrf(Prof03(0), VectZ)

Return True
End Function

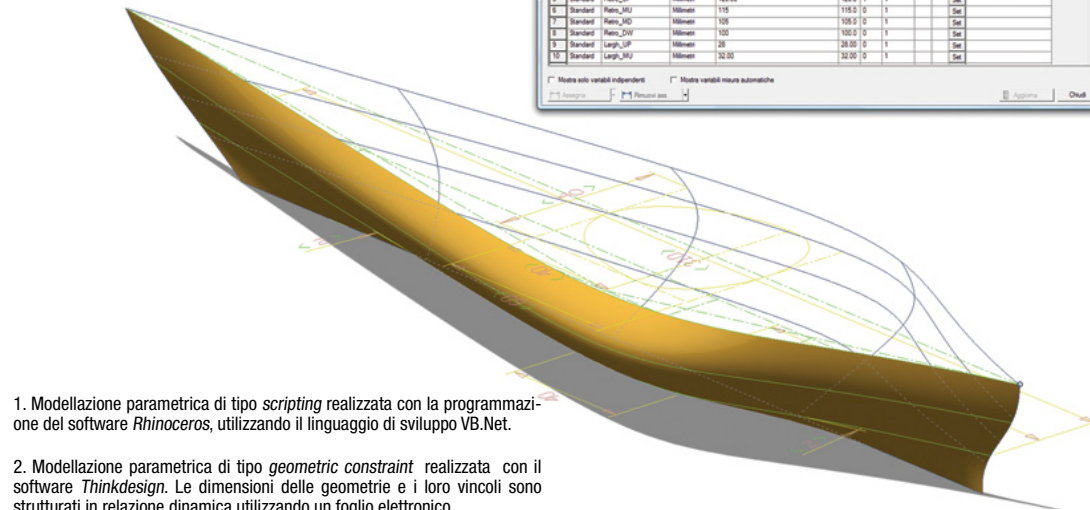
```

di creare vere e proprie estensioni del software di modellazione, utilizzando linguaggi a basso livello (*C++*, *Assembler*), con il vantaggio di accedere ad ogni recondita funzionalità dell'hardware e del software, ottimizzandone l'elaborazione per raggiungere velocità esecutive altrimenti non ottenibili (fig.1).

Il *geometric constraint* è invece una tecnica di modellazione parametrica, facilmente apprendibile e molto intuitiva, che prevede di mettere in relazione le diversi parti del modello attraverso vincoli geometrici e dimensionali.

Si può, per esempio, stabilire che due rette siano fra loro sempre ortogonali e che la lunghezza di una sia sempre due volte quella dell'altra. Struturando in modo appropriato un consistente numero di relazioni, si giunge a definire un modello che, al variare di una o più misure (lineari o angolari), muta significativamente nella forma (fig.2). La parametrizzazione nodale è un derivato dei linguaggi di programmazione visuali ad ogget-

Type	Name	Units	Espressione	Valore	Unità	Assegnato	Min	Max	Commenti
1	Standard	Totale_LUP	Millimetri	350.00	350.0	1	1		
2	Standard	Totale_MU	Millimetri	135.00	135.0	0	1		
3	Standard	Totale_MSD	Millimetri	210.00	210.0	0	1		
4	Standard	Totale_SUV	Millimetri	285.00	285.0	0	1		
5	Standard	Rete_LUP	Millimetri	120.00	120.0	1	1		
6	Standard	Rete_MU	Millimetri	115.00	115.0	0	1		
7	Standard	Rete_MSD	Millimetri	135.00	135.0	0	1		
8	Standard	Rete_SUV	Millimetri	100.00	100.0	0	1		
9	Standard	Largh_LUP	Millimetri	25.00	25.00	0	1		
10	Standard	Largh_MU	Millimetri	32.00	32.00	0	1		



1. Modellazione parametrica di tipo *scripting* realizzata con la programmazione del software *Rhino*, utilizzando il linguaggio di sviluppo VB.Net.

2. Modellazione parametrica di tipo *geometric constraint* realizzata con il software *Thinkdesign*. Le dimensioni delle geometrie e i loro vincoli sono strutturati in relazione dinamica utilizzando un foglio elettronico.

ti. Piccole procedure di codice sono rese visibili all'utente sotto forma di "blocchetti" di elaborazione aventi porte di ingresso e di uscita, attraverso le quali transitano i dati, rispettivamente prima e dopo l'elaborazione. Connettendo opportunamente in sequenza qualsiasi numero di queste entità elaboranti, si ottengono complessi sistemi di elaborazione senza scrivere una riga di codice (fig.3).

Le tre tecniche non possono considerarsi l'una esclusiva dell'altra: un operatore esperto che sappia parimenti farne uso, pur riconoscendo in esse distinti valori prestazionali, finirà per optare per quella che in modo più immediato e sufficientemente efficace consentirà di giungere alla soluzione.

Vi è inoltre da dire che particolari problematiche possono essere affrontate anche con l'integrazione di due o tutte le tecniche illustrate. Per le sperimentazioni oggetto di questo studio si è optato per il sistema nodale.

### LE SUPERFICI SVILUPPABILI: DAL PIANO AL CONO

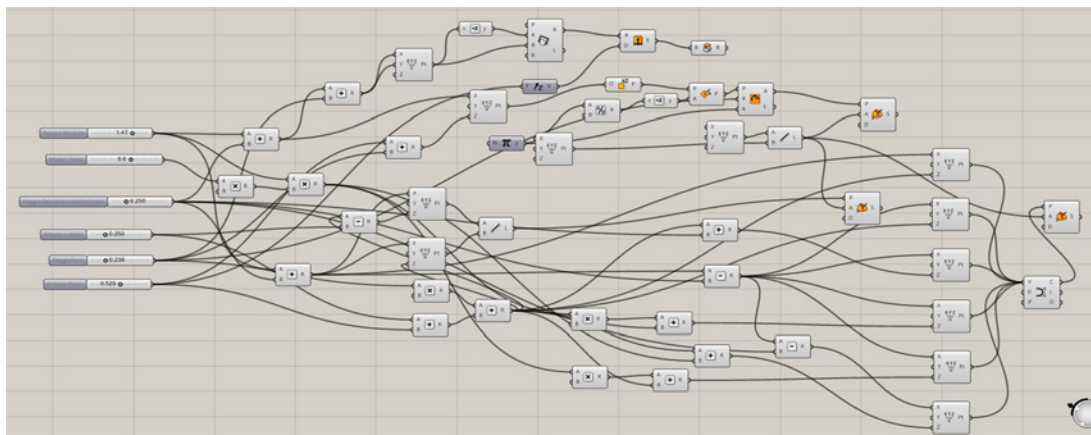
Nell'ottica del progetto responsivo, immaginando modelli che attraverso il movimento assumono diverse conformazioni, le superfici sviluppabili assumono un ruolo di utilità fondamentale, poiché, normalmente, si può giungere senza troppi costi e difficoltà alla loro costruzione\ingegnerizzazione.

Nell'arte degli origami la trasformazione di una superficie piana in una superficie conica è "un gioco da ragazzi", mentre, operando con la modellazione parametrica, il processo è naturalmente più complesso.

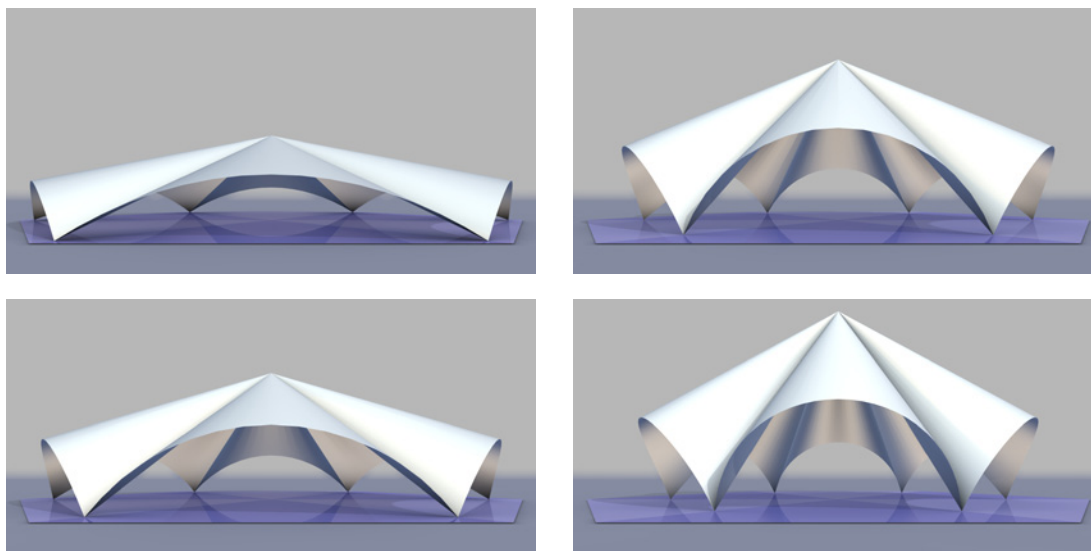
Le soluzioni agli esempi che si propongono non sono uniche e assolute ma semplicemente delle sperimentazioni che possono essere utili riferimenti per svilupparne delle altre. La varietà delle soluzioni è strettamente correlata all'insieme dei vincoli geometrici che si impongono, in fase di progetto, alla trasformazione della superficie piana.

### PRIMO MODELLO SPERIMENTALE

Nella prima sperimentazione è stata affrontata la trasformazione di una figura piana triangolare



3. Modellazione parametrica di tipo nodale, realizzata con la plugin Grasshopper, sviluppata per il software Rhinoceros. Ogni blocco ha una sua specifica funzione e viene "cablato" con gli altri come in un circuito elettrico. Le informazioni sono elaborate da sinistra verso destra..



4. Immagini della volta a spicchi conici realizzate assegnando diversi valori all'angolo sotteso all'arco di imposta.

in una superficie conica. La soluzione di questa problematica consente di ottenere una superficie voltata a spicchi conici partendo da un poligono regolare (fig.4).

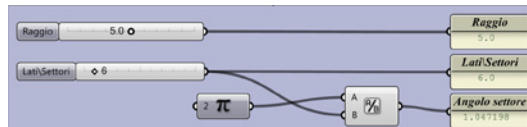
In fase di progetto è stato stabilito che la procedura parametrica dovesse assolvere la generazione di superfici impostate su un poligono regolare dimensionato per mezzo del raggio del cerchio che lo inscrive e avente un numero di lati compresi fra un minimo di 3 e un massimo di 36 (uno ogni 10 gradi).

La trasformazione del piano corrispondente al settore triangolare in una superficie conica è studiata per un singolo settore triangolare, il cui angolo al centro del poligono è naturalmente  $2\pi / \text{lati}$  (fig.5). Al termine della procedura, la superficie creata viene ripetuta sugli altri settori del poligono per mezzo di una copia polare.

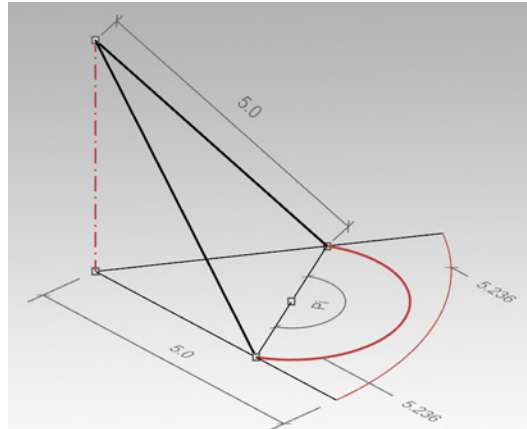
Il cambiamento di stato da superficie piana a conica deve avvenire senza alterazioni delle dimensioni: l'area della superficie e la lunghezza dei lati che la delimitano devono rimanere costanti. Poiché, nonostante ciò, restano infinite le superfici coniche che si possono realizzare durante il movimento di trasformazione, si rende necessario porre qualche ulteriore vincolo geometrico, necessario a condurre a termine detto processo, optando per soluzioni che nel contempo possano semplificare lo sviluppo della procedura parametrica.

Nello specifico, in questa prima sperimentazione si è scelto di: conservare retti i due lati del settore corrispondenti ai raggi del cerchio che inscrive il poligono; variare l'angolo fra di essi in modo da fare "inarcare" il lato del settore coincidente con il lato del poligono. Per ottenere questa configurazione senza perdere continuità con le superfici appartenenti agli altri settori, i primi due lati devono inclinarsi, mantenendo il vertice comune in asse con il centro del poligono e gli altri due vertici devono avvicinarsi percorrendo i rispettivi lati di appartenenza considerati nella loro posizione iniziale (fig.6).

Da un punto di vista geometrico, i due lati che rimangono retti e convergono in un punto assumono il ruolo rispettivamente di generatrici e vertice del cono. Il lato che si "inarca", invece, è in realtà una curva sghemba, corrispondente ad una

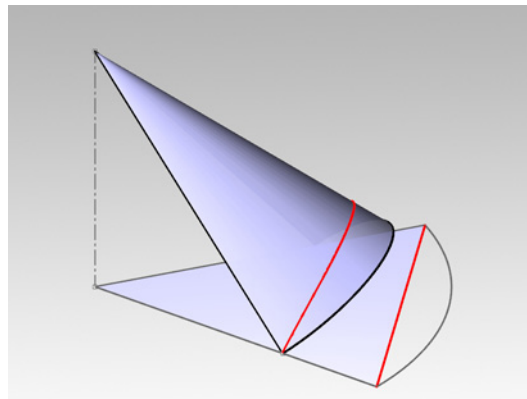


5. Definizione del poligono: raggio del cerchio inscritto, angolo del settore.



6. Schema di riferimento del primo modello sperimentale: i lati del settore non si deformano, il loro vertice comune si muove verticalmente, il lato del poligono (corda dell'arco) si riduce muovendosi lungo i lati del settore, la lunghezza dell'arco rimane costante.

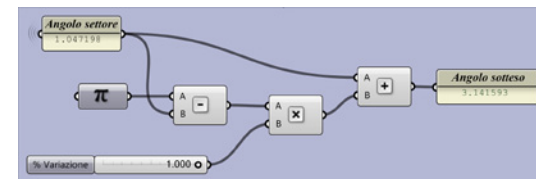
7. La geodetica è una curva, normalmente sghemba, che descrive la traiettoria più breve esistente fra due punti appartenenti alla medesima superficie. Se la superficie è sviluppabile, è facile comprendere che la geodetica sviluppata sia una linea retta.



geodetica della superficie conica. Questo tipo di curva rappresenta la traiettoria più breve percorribile fra due punti appartenenti alla medesima superficie, un aspetto geometrico facilmente apprezzabile se si pensa alla superficie triangolare del settore come sviluppo piano di una superficie conica: il lato del settore corrispondente al lato del poligono è la traiettoria retta – dunque la più breve – che unisce i vertici degli altri due lati (fig.7).

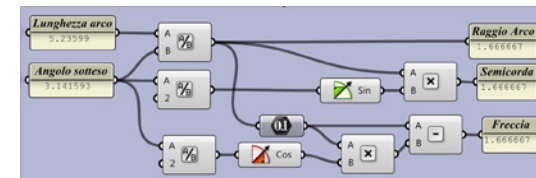
Poiché questa curva non si può ricavare finché non si definisce la superficie, è stata introdotta nella parametrizzazione un'ulteriore curva, strettamente relazionata al settore, più facile da controllare e modificare durante la trasformazione della superficie: l'arco sotteso al settore.

Quest'arco può essere considerato direttrice della superficie conica. La procedura prevede la variazione dell'angolo sotteso a quest'arco conservando inalterata la sua lunghezza. L'ambito di variazione dell'angolo sotteso all'arco, stabilito in fase di progetto, è compreso fra il valore iniziale corrispondente all'angolo del settore e quello finale di  $\pi$ . Il primo valore rappresenta la superficie



8. Variazione dell'angolo sotteso: la differenza fra il valore massimo  $\pi$  e l'angolo del settore iniziale è l'ambito di variazione massimo per l'angolo sotteso. Questo intervallo viene moltiplicato per un fattore compreso fra 0 e 1 e aggiunto all'angolo iniziale del settore.

9. Definito un nuovo angolo sotteso  $a$  e volendo mantenere costante la lunghezza  $L$  dell'arco, il raggio dell'arco trasformato è  $R=L/a$ ; la semicorda è  $S=R \sin(a/2)$ ; la freccia è  $F=R-R \cos(a/2)$ .



conica nella condizione limite di sviluppo piano, il secondo valore è stato fissato perché per angoli sottesi maggiori di  $\pi$  le superfici dei settori contigui finirebbero per intersecarsi. La variazione è stabilita come percentuale (calcolata fra 0 e 1) della differenza fra l'angolo del settore e  $\pi$  (fig.8). Definito l'angolo sotteso e nota la lunghezza originaria dell'arco del settore, con poche relazioni trigonometriche si possono facilmente ricavare il raggio, la semicorda e la freccia della nuova configurazione geometrica da imporre all'arco (fig.9). I vertici della nuova corda dell'arco dovranno trovarsi sui due lati  $OA'$  e  $OB'$  del settore, ad una distanza dall'origine  $O$  calcolabile sempre per via trigonometrica; il software di sviluppo ha una funzione utile allo scopo che, data una curva e una lunghezza da computare su di essa, restituisce il punto corrispondente (fig.10).

I segmenti  $OA'$  e  $OB'$  possono essere considerati le proiezioni delle rette  $VA'$   $VB'$  aventi lunghezza fissa e uguale ai raggi del poligono  $OA$  e  $OB$  di cui rappresentano il movimento durante la trasformazione. L'inclinazione delle  $VA'$  e  $VB'$  è pertanto definibile come l'arcocoseno del rapporto fra queste lunghezze e quelle delle loro proiezioni. Trovato l'angolo e applicata la funzione seno si ricava la coordinata  $Z$ , traslazione del centro del poligono, vertice del settore trasformato (fig.11). Il piano di appartenenza dell'arco trasformato è identificato mediante l'intersezione di due cerchi, passanti per un piano verticale bisettore. Il primo cerchio ha centro nel vertice  $V$  e raggio pari a quello del poligono; il secondo vertice ha centro nel punto medio della nuova corda e raggio pari alla relativa freccia calcolata. La procedura restituisce naturalmente due punti  $C'$  e  $C''$ , di cui uno solo è quello utile (fig.12).

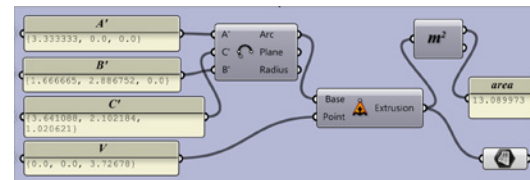
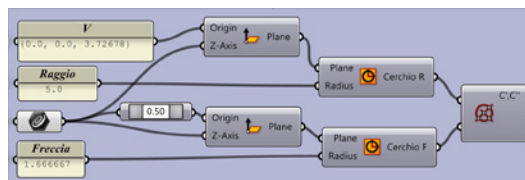
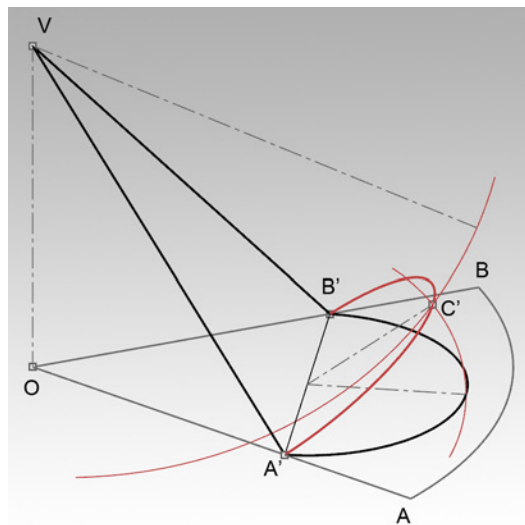
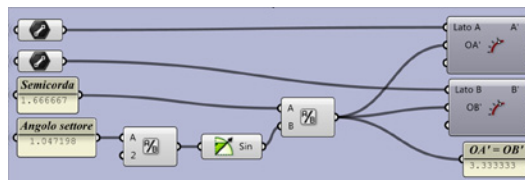
Con i dati fin qui ricavati è possibile disegnare l'arco trasformato per i punti  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e la superficie conica, avente come direttrici l'arco e il vertice  $V$ . Apposite funzioni del software di sviluppo consentono facilmente di mantenere sotto controllo i dati dimensionali delle geometrie generate (fig.13).

Una volta definita la superficie, si procede alla generazione della curva geodetica (fig.14) e con la medesima si taglia la parte di superficie ecceden-

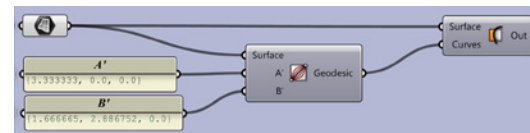
10. I punti  $A'$  e  $B'$  sono calcolati sulle linee  $OA$  e  $OB$  a distanza  $S/\sin(a/2)$ .

11. Il punto  $C'$  è calcolato come intersezione di due cerchi disposti su un piano verticale bisettore dell'angolo in  $AOB$ . Il primo cerchio ha centro in  $V$  e raggio pari  $VA'=OA$ ; il secondo cerchio ha centro nel punto medio della semicorda trasformata e raggio pari alla freccia dell'arco trasformata.

12. Intersezione fra i due archi nel sistema nodale. La semicorda viene utilizzata per definire due piani perpendicolari ad essa. Il primo piano ha origine nel vertice  $V$ , il secondo piano ha origine nel punto medio ( $u=0.5$ ) della semicorda. Orientati i sistemi di riferimento sono tracciati i cerchi, quindi si intersecano. Il nodo finale, in questo caso, produce due punti d'intersezione.

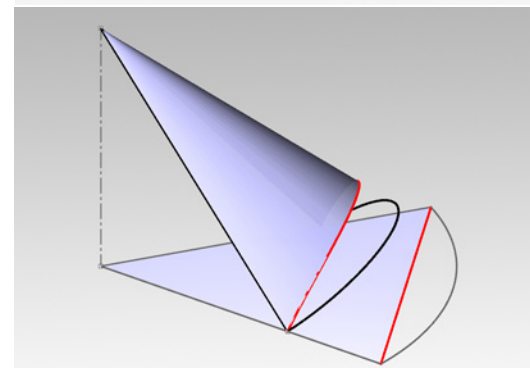
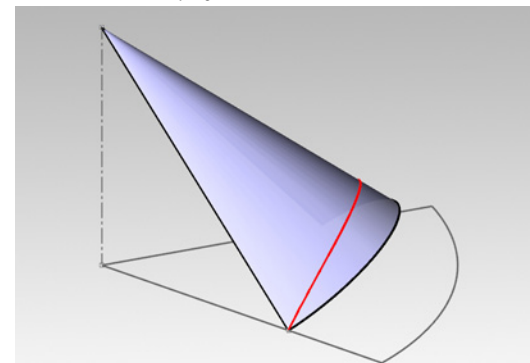


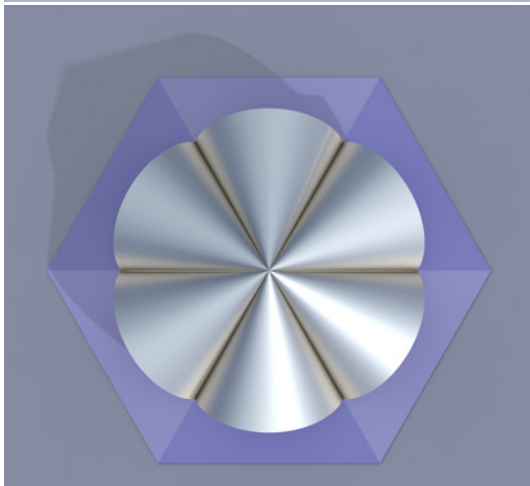
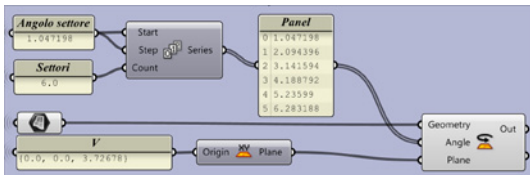
13. Disegno dell'arco e della superficie conica. Monitoraggio dell'area.



14. Disegno della curva geodetica e successivo taglio della superficie cilindrica.

15. Effetti del taglio della superficie conica con la curva geodetica: corrispondenza con il settore del poligono.





16. La superficie generata viene copiata negli altri settori del poligono.

17. Superficie voltata a spicchi conici. Sullo sfondo il poligono, immagine della superficie sviluppata.

te quella strettamente di pertinenza del poligono iniziale (fig.15). Infine si procede alla copia polare della superficie generata, così da ripeterla in corrispondenza di ogni settore (figg. 16,17).

### SECONDO MODELLO SPERIMENTALE

Il secondo modello sperimentale, più articolato del primo, prevede la variazione contemporanea di due superfici coniche. In realtà si tratta della stessa superficie che però in parte è ripiegata su se stessa. Le forme d'origine sono molto semplici: si parte da un quadrato e si traccia dentro di esso un arco di 90 gradi avente per raggio il lato del quadrato (fig.18). Immaginiamo ora che l'arco sia una linea di piegatura verso la quale possono concorrere due superfici coniche (fig.19).

La soluzione di questa parametrizzazione ha previsto di vincolare la giacitura dell'arco sul piano XY e la posizione del suo punto medio.

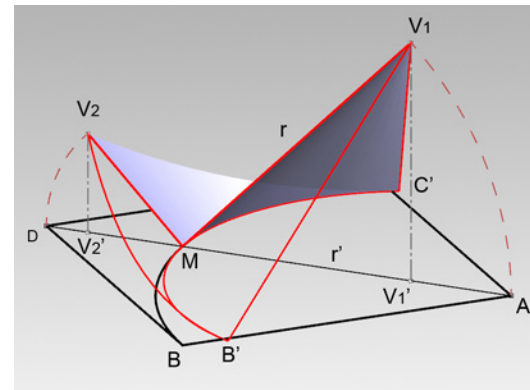
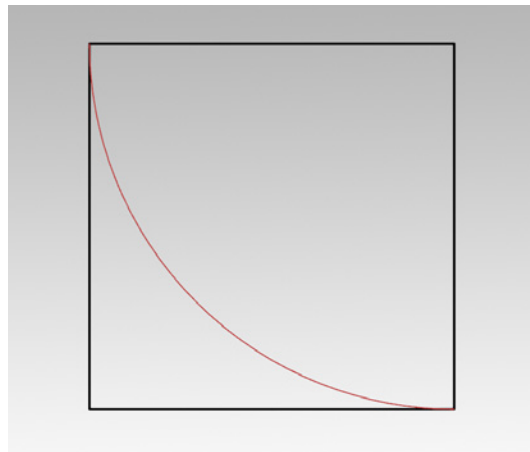
Anche in questo caso, come nella sperimentazione precedente, la variazione dell'angolo sotteso all'arco è il parametro guida della trasformazione, ma l'ambito di valorizzazione è più ampio (da 90° - valore iniziale - fino a 360°), prevedendo che l'arco possa chiudersi fino a definire un cerchio (fig.20).

Definito il nuovo angolo sotteso all'arco, la procedura calcola l'inclinazione della generatrice  $r$  (M-V1) passante per il punto medio dell'arco. Il calcolo è conseguito per via trigonometrica valutando l'arcocoseno del rapporto fra le lunghezze del raggio dell'arco trasformato  $r'$  e la lunghezza della generatrice  $r$  (equivalente al raggio originario) (fig.21).

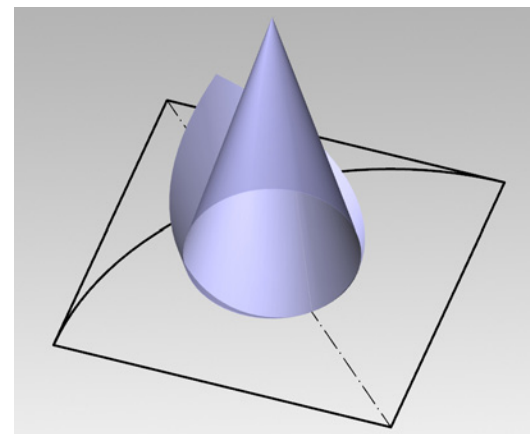
L'inclinazione della generatrice dell'altra superficie è considerata simmetrica alla principale. Da un punto di vista geometrico, infatti, possiamo immaginare di prolungare la falda principale oltre il piano su cui giace l'arco, tagliare la parte di superficie prolungata e specchiarla rispetto al medesimo piano (fig.22).

Il calcolo dei vertici V1 e V2 è dunque condotto

18. Diagramma di partenza del secondo modello sperimentale.

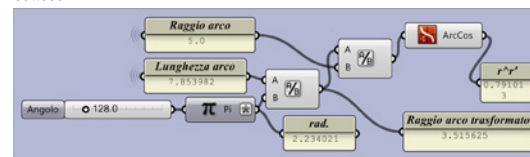


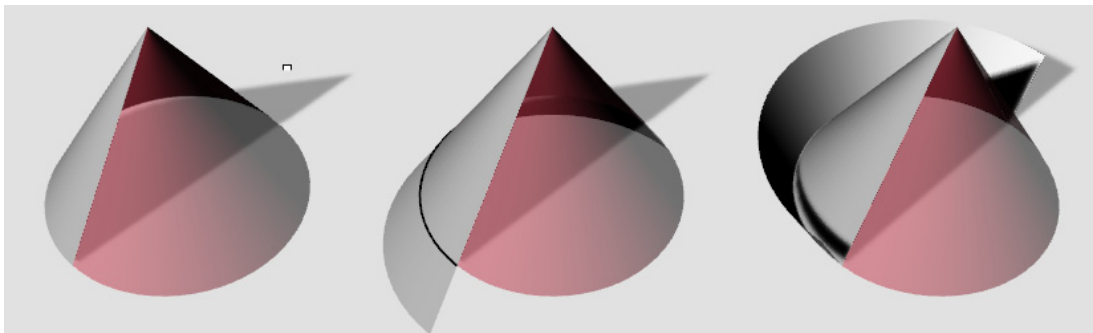
19. Schema sintetico delle trasformazioni del secondo modello sperimentale.



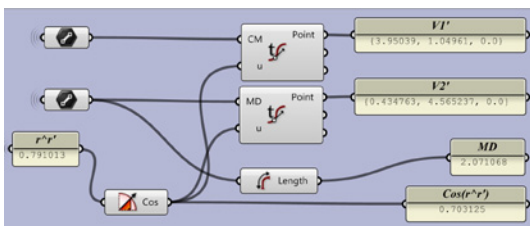
20. Situazione limite: angolo sotteso uguale a  $2\pi$ .

21. Definito l'angolo sotteso all'arco trasformato, è calcolato l'angolo che la retta  $r$  forma con il piano XY, quindi con la sua proiezione  $r'$ . Detto angolo è pari all'arcocoseno del rapporto  $r'/r$ . Dove  $r$  è noto e  $r'$  è dato dal rapporto fra la lunghezza dell'arco - noto e costante - e il valore stabilito per l'angolo sotteso.

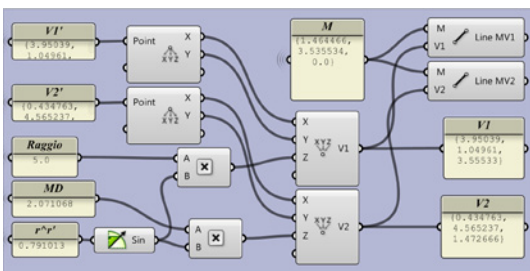




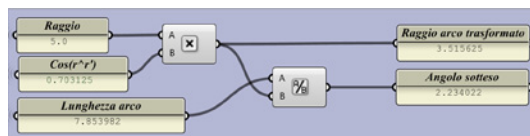
22. Relazione speculare fra la falda principale e la falda secondaria.



23. Individuazione dei vertici  $V1'$  e  $V2'$ . In questo caso non viene fornita al nodo l'indicazione della distanza a cui si trovano i punti sulle rette  $CM$  e  $MD$ , ma il valore del parametro  $u$  ( $0 < u < 1$ ), direttamente proporzionale con il valore del coseno disponibile.



24. Calcolo delle coordinate dei vertici  $V1$  e  $V2$  eseguito estraendo le coordinate  $X$  e  $Y$  dalle loro proiezioni, individuate in precedenza.



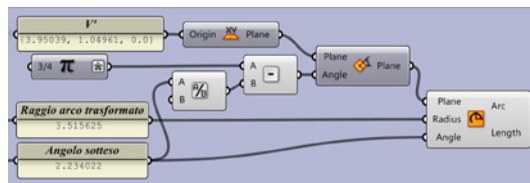
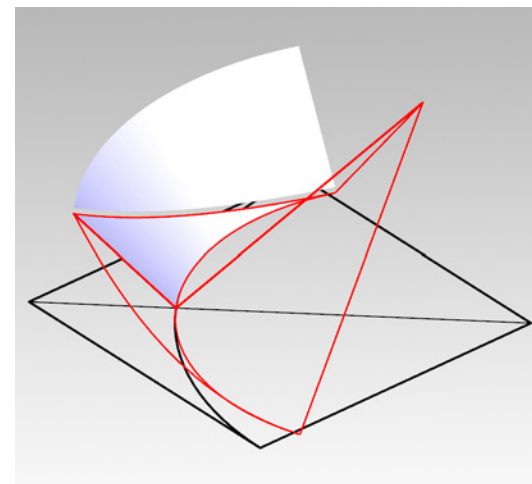
25. Calcolo informazioni necessarie a disegnare l'angolo trasformato.

26. Rappresentazione dell'arco trasformato.

individuando prima le loro proiezioni (fig.23), dalle quali sono ricavate le coordinate  $X$  e  $Y$ , e poi la loro quota, assegnata alla coordinata  $Z$  nella definizione dei vertici (fig.24).

Le informazioni individuate sono ormai sufficienti per tracciare l'arco trasformato (figg.25,26) e la superficie conica tessuta fra l'arco e il vertice  $V1$ . Anche in questo caso nella procedura è stata inserita una verifica di controllo sull'area della superficie che deve mantenersi costante al trasformarsi della superficie (fig.27).

Mentre due dei quattro lati del quadrato iniziale sono stati considerati retti durante la trasformazione, in quanto ad essi è stato assegnato il ruolo di generatrici del cono principale, non possiamo fare altrettanto per l'altra coppia di lati. Riportando alla mente le considerazioni fatte circa la rela-



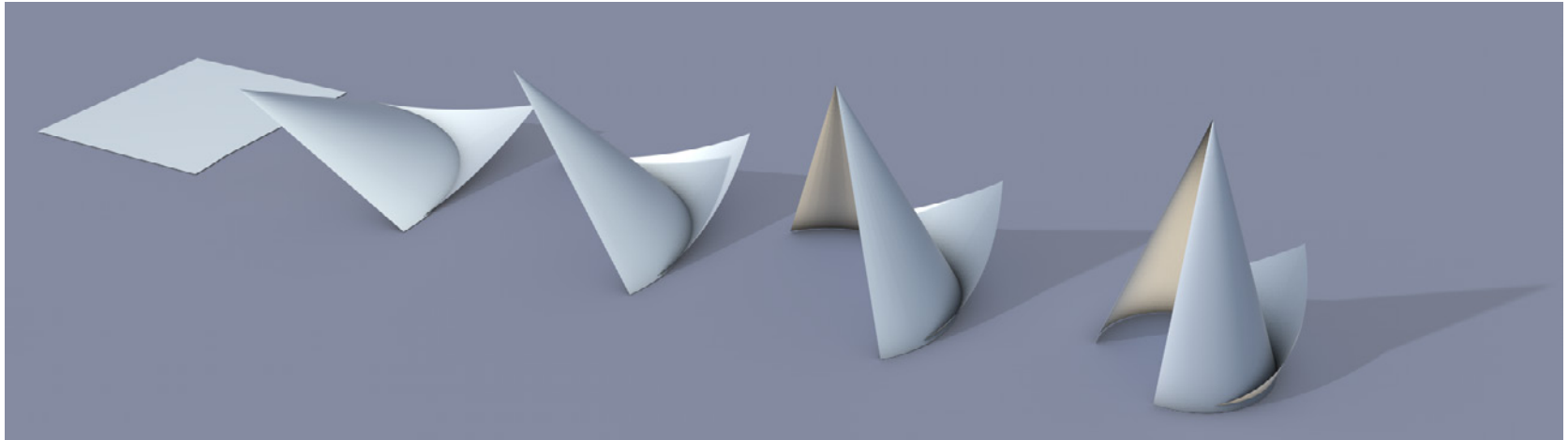
27. Disegno della superficie e monitoraggio dell'area.



28. Disegno della seconda falda conica, disegno della curva geodetica, taglio della falda conica.



29. Disegno della seconda falda conica, disegno della curva geodetica, taglio della falda conica nel sistema nodale.



30. Configurazioni della superfici durante la sua trasformazione.

zione speculare fra le due superfici e la forma che queste assumono nel loro sviluppo piano, appare chiaro che anche in questo caso siamo in presenza di curve geodetiche.

Per giungere facilmente alla loro definizione si è pensato di disegnare inizialmente una superficie conica più ampia e tracciare su di essa le geodetiche, con le quali successivamente si è ritagliata al superficie (fig.28).

La superficie conica più ampia è stata realizzata facendo rototraslare la generatrice MV2 lungo l'arco trasformato (fig.29).

Le problematiche affrontate in questi due modelli sperimentali potrebbero essere risolte con maggiore efficienza utilizzando altre vie messe a disposizione dalla matematica, ma la soluzione geometrica ha senza dubbio il vantaggio di essere più efficace, nonché fonte di spunti creativi all'interno del processo progettuale. In quest'ottica l'uso sperimentale di sistemi di sviluppo che operano all'interno di modellatori tridimensionali, oltre che facilitare il progetto di architetture responsive, favorisce l'avvicinamento delle nuove generazioni di progettisti allo studio della geometria, aspetto non trascurabile per lo sviluppo della ricerca e della didattica nel campo del disegno.

#### NOTE

[1] Si tratta naturalmente di un cono considerato nella sua accezione di superficie rigata, definito da una schiera di generatrici poggiate su tre direttrici. Queste, nello specifico, sono una curva e due rette incidenti: l'arco e il punto.

#### BIBLIOGRAFIA

Casale Andrea, Valenti Graziano Mario, Calvano Michele (2011), Tra rappresentazione e fabbricazione, dalla costruzione del modello al modello costruito. In *Le vie dei mercanti. SAVE Heritage Safeguard of Architectural, Visual, Environmental Heritage*. Napoli:La Scuola di Pitagora s.r.l., vol. 10, 2011, pp.1-9 ISBN 978-88-6542-046-1

Casale, Andrea (2010), *Geometria Creativa. Intuizione e ragione del disegno dell'oggetto. Nuovi quaderni di Applicazioni della Geometria Descrittiva*. Roma: Kappa, vol. 5, 2010, pp.5-213 ISBN 978-88-6514-040-6

De Carlo Laura, Baglioni, Leonardo (2009), *Le linee Curve*, In Migliari, Riccardo. *Geometria descrittiva - Tecniche e applicazioni*. Novara: CittàStudi - De Agostini, p.628, 2009, ISBN 978-88-251-7330-7

Frere Gabriel Marie (1920-1996), *Géométrie Descriptive. Exercices*, Paris. vol. 2, pp. 507-620, ISBN 2-87647-170-1

Pottmann Helmut, Schiffner Alexander, Pengbo Bo, Schmiedhofer

Heinz, Wang Wenping, Baldassini Niccolo, Wallner Johannes (2008), *Freeform surfaces from single curved panels*. ACM Trans. Graph

Issa, R. (2009), *Essential Mathematics for Computational Design*. Robert Mc-Nneel & Associates

Loria, Gino (1912), *Poliedri, curve e superfici secondo i metodi della geometria descrittiva*, Hoepli, Milano

Kilian Martin, Flöry Simon, Chen Zhonggui, Mitra Niloy J., Sheffer Alla, Pottmann Helmut (2008) *Curved folding*, In ACM SIGGRAPH 2008 ACM, New York, NY, USA

Migliari, Riccardo (2009), *Geometria descrittiva. Tecniche e applicazioni*, CittàStudi, Novara, p.628. 2009, ISBN 978-88-251-7330-7

Migliari Riccardo, Fallavollita Federico, Salvatore Marta (2009), *Superfici*, In Migliari, Riccardo, *Geometria descrittiva - Tecniche e applicazioni*, CittàStudi, Novara, p.628, 2009, ISBN 978-88-251-7330-7

Migliari Riccardo, Fallavollita Federico (2009), *Gli archi e le volte*, In Migliari, Riccardo. *Geometria descrittiva - Tecniche e applicazioni*, CittàStudi, Novara, p.628, 2009, ISBN 978-88-251-7330-7

Valenti, Graziano Mario (2007), *HySpace: spazio virtuale parametrico per la fruizione interattiva di modelli digitali*. In *Sistemi informativi per l'architettura*, Alinea, Firenze, pp.600-605, 2007, ISBN 978-88-6055-135-1

Valenti, Graziano Mario (2004), *MI Il modello integrato*. In Migliari, Riccardo, *Disegno come Modello*, Kappa, Roma, pp.59-62, 2004, ISBN 978-88-7890-605-1

Valenti, Graziano Mario (2008), *De.form.are - De.form.ing, Rdesignpress*, Roma, pp.1-195, 2008, ISBN 978-88-89819-16-6