

Università degli studi di Roma "La Sapienza"

**DOTTORATO DI RICERCA IN
MECCANICA TEORICA E APPLICATA**

UN FATTORE DI CONFIDENZA
PER LE SOLUZIONI
STATISTICO-ENERGETICHE
DI SISTEMI VIBROACUSTICI

Antonio Culla

Tutore: prof. Aldo Sestieri

Docente guida: prof. Antonio Carcaterra

Indice

Nota introduttiva 2

- 1 **Introduzione alla "Statistical Energy Analysis" 4**
 - 1.1 *I problemi vibro-acustici ad alta frequenza 4*
 - 1.2 *Una premessa ai concetti di base della "Statistical Energy Analysis" 5*
 - 1.3 *Le equazioni della "Statistical Energy Analysis" 9*
 - 1.4 *Primi passi verso una valutazione della confidenza dei risultati della "Statistical Energy Analysis" 16*
- 2 **Il problema delle ipotesi e dei limiti di utilizzo della "Statistical Energy Analysis" 21**
 - 2.1 *Criterio di somiglianza dei modi di un sottosistema 21*
 - 2.2 *Condizioni di validità delle equazioni della "Statistical Energy Analysis" 22*
 - 2.3 *Condizioni perchè il modello matematico della "Statistical Energy Analysis" sia un sistema algebrico lineare 23*
 - 2.4 *Conclusioni sintetiche e confronto delle ipotesi 24*
- 3 **Dal problema della sensibilità alla valutazione della confidenza della soluzione della "Statistical Energy Analysis" 27**
 - 3.1 *Un'introduzione alla perturbazione statistica dei coefficienti della "Statistical Energy Analysis" 28*
 - 3.2 *Analisi di sistemi strutturali accoppiati 34*
 - 3.3 *Analisi di un sistema strutturale connesso ad una cavità acustica 40*
 - 3.4 *Commenti riassuntivi sull'analisi perturbativa statistica delle equazioni della "Statistical Energy Analysis" 45*
- 4 **Introduzione al problema della confidenza dell'energia e del flusso di energia in sistemi deterministici 48**
 - 4.1 *Perturbazione dei parametri fisici: statistica dell'energia e del flusso di energia 50*
 - 4.2 *Definizione di un fattore di confidenza 52*

5	Perturbazioni aleatorie in sistemi continui isolati: guide d'onda e sistemi risonanti	53
5.1	<i>Il fattore di confidenza dell'energia di una guida d'onda</i>	53
5.2	<i>Il fattore di confidenza del flusso di energia di una guida d'onda</i>	56
5.3	<i>Il fattore di confidenza dell'energia di un sistema risonante</i>	58
5.4	<i>Il fattore di confidenza del flusso di energia di un sistema risonante</i>	62
5.5	<i>Risultati numerici per il fattore di confidenza di sistemi risonanti</i>	64
5.6	<i>Discussione conclusiva al capitolo</i>	73
6	Perturbazioni aleatorie in sistemi continui accoppiati	74
6.1	<i>Il fattore di confidenza dell'energia e del flusso di energia di una guida d'onda connessa ad un sistema risonante</i>	74
6.2	<i>Il fattore di confidenza dell'energia e del flusso di energia di due sistemi risonanti accoppiati tramite una giunzione</i>	77
6.2.1	<i>Sistema di due travi accoppiate</i>	80
6.2.2	<i>Sistema di due piastre accoppiate</i>	91
6.3	<i>Note riepilogative al capitolo</i>	100
7	Perturbazioni aleatorie nei giunti	101
7.1	<i>Il fattore di confidenza dell'energia e del flusso di energia di due guide d'onda accoppiate tramite una giunzione</i>	101
7.2	<i>Il fattore di confidenza dell'energia e del flusso di energia di due sistemi risonanti accoppiati tramite una giunzione</i>	104
7.3	<i>Commenti conclusivi al capitolo</i>	119
	Note conclusive generali	120
	Appendice A	123
	Appendice B	125
	Bibliografia	127
	Elenco delle figure	133
	Elenco delle tabelle	135

Nota introduttiva

Intorno agli anni sessanta una teoria statistico-energetica, la *Statistical Energy Analysis*, è stata sviluppata da Lyon ed altri con l'intento di offrire uno strumento per la soluzione di problemi vibro-acustici. Le equazioni alla base del metodo sono equazioni di bilancio energetico ed offrono il valor medio dell'energia accumulata nei sistemi meccanici che partecipano al problema vibro-acustico che si intende studiare. Un'informazione sulla deviazione standard da associare al valor medio dell'energia, soluzione del problema, non è offerta da questa teoria.

Il tema centrale del presente lavoro è lo studio della statistica dell'energia e del flusso di energia in sistemi meccanici complessi quando sono presi in considerazione comportamenti aleatori per i parametri di detti sistemi.

Questa tesi, quindi, nasce con l'intento di offrire una risposta riguardo all'informazione mancata alla teoria della *Statistical Energy Analysis* sia indagando all'interno dell'ambito strettamente correlato con questa teoria, sia muovendosi nella direzione dei modelli della meccanica classica.

Nel lavoro, quindi, si distinguono due parti. Nella prima è sviluppato uno studio direttamente in relazione alle equazioni della *Statistical Energy Analysis*. Nella seconda l'attenzione è rivolta alla stima di un fattore di confidenza dell'energia e del flusso di energia soluzioni di modelli classici. I capitoli 1 e 2 trattano in maniera specifica la metodologia della *Statistical Energy Analysis*: lo scopo è quello di delineare con precisione le basi della teoria ed i confini entro i quali questa ha successo.

Il capitolo 3 si muove ancora nell'ambito della teoria della *Statistical Energy Analysis* con lo scopo di valutare la sensibilità della soluzione offerta da questo metodo a fronte di perturbazioni applicate ai dati, quindi, la confidenza della soluzione nota l'incertezza sui parametri.

Dal capitolo 4 comincia la seconda parte. Il lavoro è rivolto allo studio dell'energia di sistemi meccanici, soluzione di problemi classici. È presentato l'approccio metodologico che si intende sviluppare per il calcolo della confidenza dell'energia, in presenza di perturbazioni aleatorie dei parametri del sistema. In particolare, è definito un fattore di confidenza la cui stima offre una misura della dispersione dei risultati intorno al loro valor medio.

Nei capitoli 5, 6 e 7, in base alle linee metodologiche premesse nel capitolo 4,

è svolto lo studio del fattore di confidenza per differenti modelli, intendendosi con questo differenti configurazioni dei sistemi e differenti parametri perturbati aleatoriamente.

Nel capitolo 5 sono analizzati sistemi continui isolati, i loro parametri fisici - modulo di Young,...- sono alterati in maniera stocastica. Nel capitolo 6 lo studio è rivolto a sistemi continui connessi fra loro tramite giunzioni e la perturbazione aleatoria è di nuovo imposta ai parametri fisici dei sistemi. Infine nel capitolo 7 sono studiati sistemi continui connessi fra di loro attraverso giunti a parametri stocastici.

Capitolo 1

Introduzione alla "Statistical Energy Analysis"

1.1 I problemi vibro-acustici ad alta frequenza

La predizione della risposta vibroacustica di sistemi meccanici ha acquistato sempre maggiore importanza nell'ultimo secolo. Nell'ambito ingegneristico l'esigenza di ridurre il peso di macchine e strutture a parità di potenze in gioco ha indirizzato l'analisi tradizionale verso la predizione ed il controllo delle vibrazioni di ampiezza elevata. In generale i maggiori spostamenti si realizzano in corrispondenza delle frequenze di risonanza di ordine più basso, ed è proprio riguardo a queste che è stato rivolto l'interesse maggiore da parte degli studi tradizionali.

Le prime problematiche affrontate hanno riguardato la predizione delle risposte di sistemi lineari dovute ad eccitazioni che sono funzioni periodiche del tempo. Fenomeni di questo tipo si verificano, ad esempio, nelle macchine rotanti e nelle strutture ad esse connesse.

Nuovi tipi di problemi nella predizione della risposta dinamica dei sistemi meccanici sono nati in specifici settori industriali quando nuove categorie di eccitazioni non periodiche, altamente irregolari e a larga banda sono state scoperte. Nell'ambito aeronautico, ad esempio, è stato visto che le variazioni temporali della pressione agente su ali e fusoliera degli aeromobili possono avere natura molto complessa a causa del rumore indotto dai motori a reazione o dalla turbolenza atmosferica. L'uso dei metodi deterministici convenzionali si è dimostrato inadatto per lo studio di tali fenomeni e a causa di ciò sono stati sviluppati metodi probabilistici in modo da offrire una descrizione della risposta dinamica in termini di parametri statistici. In particolare sia le forze eccitanti sia la vibrazione del sistema sono considerati processi stocastici: dalla conoscenza di alcune informazioni statistiche della funzione di ingresso è possibile calcolare analoghe informazioni della soluzione del problema: la densità spettrale di potenza è un esempio eloquente.

La scoperta e la grande attenzione rivolta verso questa nuova categoria di carichi, oltre ad essere stata di impulso, come accennato, per lo sviluppo della teoria li-

neare delle vibrazioni stocastiche ha spinto la ricerca ad occuparsi di problemi ad alta frequenza.

Per problema ad alta frequenza si intende quel particolare fenomeno per il quale il rapporto fra la dimensione caratteristica del sistema studiato e la lunghezza d'onda caratteristica del problema è molto inferiore all'unità. Tale condizione si verifica facilmente, ad esempio, in strutture di grandi dimensioni, leggere ed eccitate da carichi a larga banda quali quelli considerati nel caso di vibrazioni stocastiche.

L'analisi di problemi ad alta frequenza implica due principali ordini di difficoltà. La soluzione classica di problemi inerenti la meccanica delle vibrazioni si raggiunge attraverso procedure numeriche che implementano modelli discreti dei fenomeni studiati. Per un problema ad alta frequenza il numero di gradi di libertà necessari a predire il risultato raggiunge facilmente valori elevatissimi. Questo di per sé rappresenta una difficoltà dal punto di vista computazionale tanto da poter rendere impossibile il calcolo. Se, però, questo ostacolo può essere pensato superabile dall'evoluzione dei calcolatori elettronici esiste un motivo fisico perché una soluzione di tipo tradizionale fallisca. Le frequenze di risonanza e gli autovettori di ordine più elevato manifestano una grande sensibilità a piccole variazioni della geometria -dimensioni e forma-, alle condizioni al contorno e alle proprietà dei materiali. Aggiungiamo che gli algoritmi numerici che calcolano gli autovalori e gli autovettori hanno, indipendentemente dalle incertezze sui parametri fisici, una accuratezza sempre minore al crescere dell'ordine dell'autosoluzione valutata.

A motivo dei punti qui sviluppati, affrontare il problema della risposta vibro-acustica con metodi statistici piuttosto che deterministici sembra essere la via più appropriata. Infatti, da un lato ci sono le incertezze indotte dall'elevata sensibilità della soluzione, dall'altro l'elevato numero di gradi di libertà, un limite dal punto di vista deterministico che diventa un punto di forza per un approccio statistico. Più è ricca la popolazione statistica tanto minore è la fluttuazione delle singole realizzazioni dal valor medio della risposta.

1.2 Una premessa ai concetti di base della "Statistical Energy Analysis"

Negli anni sessanta un metodo di soluzione dei problemi vibro-acustici che si discosta dalle procedure tradizionali è stato sviluppato da Lyon e Maidanik: la *Statistical Energy Analysis* -SEA-. Come spiega lo stesso autore [12]:

Statistical emphasizes that the systems studied are presumed to be drawn from populations of similar design construction having known distribu-

tions of their dynamical parameters. *Energy* denotes the primary variable of interest. Other dynamic variables such as displacement, pressure, etc., are found from the energy of vibration. The term *Analysis* is used to emphasize that SEA is a framework of study, rather than a particular technique.

È importante sottolineare, come già nella spiegazione del nome assegnato al metodo, quale tipo di statistica si intende seguire. Il sistema studiato è rappresentativo di una popolazione stocastica di sistemi simili nella quale l'elemento aleatorio è rappresentato dai valori assunti dai parametri fisici.

Another possibility is to assume that the system itself is "random". That is, that the exact mode shapes and resonance frequencies are not known, either because of random irregularities in their construction, or because the detailed calculation procedures are not accurate enough to calculate them. In this case, we assume that the resonance frequencies ω_n are uniformly distributed over some frequency interval. Such an approach is an example of statistical modeling, a central theme in Statistical Energy Analysis. In the work that follows we take this latter approach, assuming that ω is fixed and that the ω_n 's is the random variable. [12]

Per quanto riguarda le teorie che hanno ispirato la SEA Lyon spiega come l'acustica delle sale -*room acoustics*- e la meccanica statistica abbiano svolto un ruolo fondamentale.

L'interesse per l'acustica delle sale ha rappresentato un importante punto di partenza per lo studio del comportamento di sistemi con un grande numero di gradi di libertà. Esiste una ricca bibliografia, [2, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24], che si può collocare temporalmente circa nella prima metà del XX secolo, mirata allo studio delle leggi che regolano il numero e la densità dei modi propri di volumi acustici in funzione della frequenza ed ancora della distribuzione delle frequenze proprie e degli intervalli che fra esse intercorrono sull'asse delle frequenze. Queste ricerche avevano lo scopo di predire determinate proprietà del comportamento della pressione acustica nelle sale -ad esempio il tempo di riverbero- in relazione alla distribuzione dei modi propri in funzione della frequenza.

Uno dei parametri che regolano la qualità del suono nelle sale è il tempo di riverbero. È stato visto che esiste una relazione fra la fluttuazione della risposta in frequenza e questo parametro. Maggiore è la fluttuazione, più lungo è il tempo di riverbero, più costante è la risposta -quindi l'assorbimento è alto- più è breve il tempo di riverbero [14, 22, 24]. Parallelamente è stato sviluppato un approfondimento dello studio riguardo al comportamento della risposta in frequenza in modo da isolare dei criteri per predirne l'irregolarità. È stato visto che tale

irregolarità poteva essere espressa in funzione del momento statistico del secondo ordine della variabile aleatoria che descrive la distribuzione degli intervalli in frequenza fra i modi. L'aleatorietà alla quale ci si riferisce in questo caso non dipende da una effettiva indeterminazione dei parametri fisici, ma è causata dalla incapacità di offrire, per tutti i casi possibili, una legge più determinata [17].

Allo scopo di calcolare questo momento statistico sono stati sviluppati dei modelli per descrivere la densità di probabilità con la quale i modi, quindi gli intervalli fra di essi, appaiono sull'asse delle frequenze. Un risultato molto interessante e che sarà ripreso in particolare da Lyon è che per particolari rapporti fra le dimensioni della cavità e per intervalli ampi fra i modi la distribuzione più adeguata è quella di Poisson [19, 26].

La fisica statistica studia il comportamento e le proprietà dei corpi macroscopici, ovvero quelli formati da un numero notevole di particelle. Per stato di un sistema si intende il valore assunto dalle coordinate e dalle velocità generalizzate ad un dato istante. È sempre possibile, in linea di principio, descrivere lo stato di un sistema comunque complesso scrivendo e risolvendo le equazioni del moto -posizione e velocità- con le relative condizioni iniziali per ogni grado di libertà. Ma se anche fosse possibile integrare il sistema di equazioni differenziali -ricordiamo che il numero di gradi di libertà è elevatissimo- è di certo impensabile esprimere tutte le condizioni iniziali necessarie per il calcolo della soluzione particolare.

Per descrivere il comportamento di sistemi così complicati è necessario fare ricorso a leggi statistiche. Il comportamento di una particella isolata del sistema in questa descrizione perde di significato e lo studio del sistema si risolve nella ricerca dei valori medi delle grandezze fisiche che caratterizzano lo stato del sistema inteso come una unica entità. Il metodo statistico trova il suo punto di forza nel grande numero di azioni che le varie parti del sistema esercitano fra di loro -*maximally disordered*-: in un tempo sufficientemente lungo il sistema passerà un gran numero di volte per tutti gli stati possibili. Si può quindi considerare una grandezza che esprima la probabilità che in un qualsiasi istante il sistema si trovi in un particolare stato. A questo punto, se è nota la funzione di distribuzione statistica del sistema si può risalire ai valori medi delle grandezze fisiche che lo caratterizzano [7].

Il legame fra la SEA e la meccanica statistica nasce dal fatto che entrambe le teorie funzionano in presenza di un grande numero di gradi di libertà. Il risultato della meccanica statistica che la SEA utilizza è che l'energia termica fluisce da sistemi a temperatura maggiore verso altri a temperatura minore e che il valore del flusso è proporzionale alla differenza fra le temperature dei due sistemi. La SEA fa sua questa conclusione associando al concetto di temperatura quello di energia modale e al concetto di flusso di energia termica quello di flusso di energia vibrazionale [4, 12].

L'approccio statistico proprio della SEA, se da un lato si avvantaggia di una de-

scrizione "semplificata" e più significativa del fenomeno, necessita di una misura sull'incertezza dei risultati che offre. Per sistemi con un altissimo numero di gradi di libertà il problema sollevato è irrilevante, ma una tale condizione non è sempre verificata. È quindi sentita la necessità di una valutazione per la confidenza della soluzione. [4, 12]

Per risolvere un problema con il metodo SEA è necessario suddividere il sistema studiato in opportuni sottosistemi. Si definisce sottosistema un gruppo di modi "simili" che sono accumulatori di energia - "*similar*" *energy storage modes*-. Per scegliere i gruppi modali si devono seguire, come spiegato dall'autore del metodo, i criteri di "somialianza" e "significatività". Il primo indica che i modi del gruppo devono essere ugualmente eccitati dalle sorgenti, ugualmente accoppiati ai modi degli altri sottosistemi e ugualmente smorzati. Questo vuol dire che hanno quasi la stessa energia, perché, per ogni modo, si ha la stessa energia entrante e la stessa energia dissipata. Il secondo indica che i modi del gruppo devono svolgere un ruolo importante nella trasmissione, dissipazione ed immagazzinamento dell'energia.

Lyon spiega il metodo SEA nelle parole che seguono [12]:

In its simplest form, SEA results in a procedure for calculating the flow and storage of dynamical energy in a complex system. The energy storage elements or "subsystems" are groups of "similar modes". Energy input to each of the storage elements comes from a set of external (usually but not necessarily random) sources. Energy is dissipated by system damping, and transferred between the storage elements.

.....

The equations that result are simultaneous linear equations that can be solved by the methods of matrix algebra. The calculations determine the energy distribution among the subsystems based on information on injected power, and system parameters.

È necessario definire i termini usati.

Per potenza entrante si intende quella proveniente dall'ambiente esterno. Per calcolarla è necessario conoscere, oltre all'eccitazione, l'impedenza di ingresso del sottosistema eccitato -torneremo sull'argomento in modo più dettagliato-. La potenza dissipata rappresenta l'aliquota di potenza che in ogni sottosistema è persa a causa di vari tipi di dissipazione e che non può essere recuperata. La potenza trasmessa è quella parte di potenza meccanica che un sottosistema scambia con gli altri.

Come accennato nel paragone fra SEA e meccanica statistica, la parte più originale del metodo è proprio il calcolo della potenza trasmessa. Quando si conside-

rano due sistemi connessi, i modi del sistema complessivo differiranno da quelli di ognuno dei sottosistemi componenti. Ci si aspetta che il flusso di energia fra i due sottosistemi dipenda dal grado di accoppiamento delle frequenze proprie dei due sistemi, dal grado di somiglianza degli autovettori, dalla posizione delle giunzioni e dalla distribuzione dello smorzamento fra i due sistemi. Ci si aspetta inoltre che il flusso di energia vada dal sistema a livello energetico maggiore verso quello a livello energetico minore esattamente come accade per l'energia termica.

1.3 Le equazioni della "Statistical Energy Analysis"

Nel presente paragrafo si dà l'espressione matematica del sistema di equazioni che rappresentano il modello SEA e la spiegazione di come questo è stato derivato. Procediamo per gradi cominciando da un sistema composta da oscillatori elementari per poi procedere allo studio di sistemi multimodali.

Per un singolo oscillatore lineare la potenza dissipata, P_d , può essere espressa con la seguente relazione:

$$P_d = c\dot{x}^2 = \omega_n \eta m \dot{x}^2 = \omega_n \eta E \quad (1.1)$$

dove ω_n è la frequenza naturale dell'oscillatore, η il fattore di perdita ed E l'energia totale immagazzinata nell'oscillatore. Vale che in condizioni stazionarie la potenza in ingresso, P_{in} , è bilanciata dalla potenza dissipata: $P_{in} = P_d$.

Per due oscillatori lineari accoppiati tramite un giunto conservativo privo di massa si dimostra che il flusso di energia, mediato in frequenza, dal primo al secondo oscillatore, \bar{P}_{12} , ovvero la potenza trasmessa media è:

$$\bar{P}_{12} = \mathcal{B}(\bar{E}_1 - \bar{E}_2) \quad (1.2)$$

dove \bar{E}_1 e \bar{E}_2 sono rispettivamente i valori medi delle energie totali dei due oscillatori, mentre \mathcal{B} un coefficiente definito positivo e simmetrico rispetto ai parametri dei sottosistemi. Per la potenza media netta trasmessa in direzione opposta si ha:

$$\bar{P}_{21} = \mathcal{B}(\bar{E}_2 - \bar{E}_1) = -\bar{P}_{12} \quad (1.3)$$

La simmetria deriva dall'aver scelto una giunzione conservativa. Per il calcolo della media si considera il sistema eccitato da una forza che ha uno spettro piatto in un intervallo, $\Delta\omega$, che comprende le pulsazioni proprie dei due oscillatori, ω_1 e ω_2 :

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_i \quad \omega_i \ll \omega_1 \quad \omega_s \gg \omega_2$$

Quindi si calcola il valore medio rispetto ad ω in questo intervallo.

Le equazioni (1.2) e (1.3) mostrano come il flusso di energia sia proporzionale alla differenza fra le energie totali dei due oscillatori. Il coefficiente di proporzionalità \mathcal{B} è funzione dei parametri fisici del giunto, dello smorzamento degli oscillatori e della differenza fra le frequenze proprie dei due sottosistemi. Questo verifica le aspettative viste nel paragrafo precedente, ovvero che l'energia meccanica immagazzinata nei sottosistemi abbia un comportamento simile a quello della temperatura in termodinamica se si ragiona in termini statistici. In particolare, riguardo alla relazione fra SEA e meccanica statistica, è verificata la possibilità di associare il comportamento del flusso di energia vibrazionale a quello del flusso di energia termica.

Un risultato notevole riguardo al flusso di energia è dimostrato da Lyon e qui di seguito proposto. Questo risultato è inoltre indispensabile per le ulteriori estensioni del metodo a sistemi più complessi e rappresenta un importante punto di partenza per la discussione che verrà sviluppata a riguardo della confidenza sui valori medi di energia e potenza trasmessa. Le equazioni (1.2) e (1.3) sono ottenute, come detto, considerando una media in frequenza. Si consideri ora di eccitare il primo oscillatore e che la sua frequenza propria, ω_1 , possa variare in maniera aleatoria in un intervallo che contiene la frequenza propria del secondo oscillatore, ω_2 . Lyon dimostra che è possibile calcolare il flusso di energia medio considerando una media rispetto alla variabile aleatoria ω_1 ed ottenere un risultato del tutto analogo a quello precedentemente ottenuto considerando la media sulla frequenza -vedi in particolare pagg. 58 e 59 e l'appendice A di [12]. Questo significa che è possibile barattare la sorgente di rumore bianco, l'eccitazione a spettro piatto, con un comportamento stocastico dei modi, quindi dei parametri del sistema. È come se si considerasse ergodico il comportamento in frequenza del sistema -figura 1.1-. Si suppone che al variare della frequenza il sistema assuma tutte le possibili caratteristiche fisiche proprie dei campioni della popolazione stocastica che si vuole studiare. In questo modo considerare la media su un intervallo di frequenze corrisponde a calcolare la media di insieme su tutte le possibili realizzazioni [4, 12].

I risultati così ottenuti per oscillatori elementari possono essere estesi a sistemi a più gradi di libertà [4, 12].

Prima di procedere è importante chiarire tre concetti che saranno frequentemente presenti. Il primo è quello di densità modale, il secondo è quello di *modal overlap factor*, il terzo è quello di potenza entrante nel sistema.

La densità modale di un sistema, $n(\omega)$, è definita come il numero di modi posseduti dal sistema nella banda di frequenza unitaria. Segue che il numero di modi di un sistema, N , presenti nella banda di frequenza, $\Delta\omega$, di pulsazione centrale ω si esprime come: $N(\omega, \Delta\omega) = n(\omega)\Delta\omega$. È importante sottolineare due proprietà

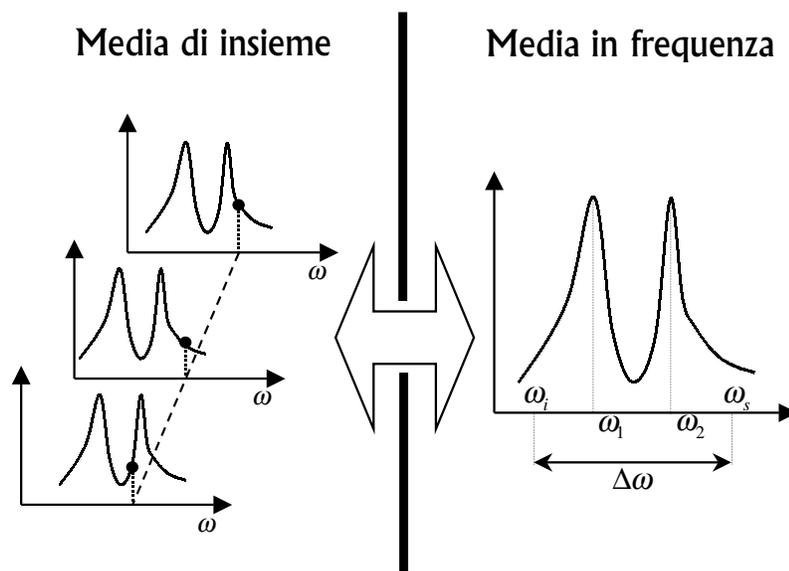


Figura 1.1: Equivalenza fra le medie in frequenza e le medie di insieme

di questa grandezza [13]: la densità modale è una proprietà estensiva dei sistemi dinamici e non dipende dalle condizioni di vincolo. Sebbene la definizione sia elementare, conoscere l'espressione esplicita della funzione non è cosa semplice. Ricordando quanto detto quando si discuteva sull'influsso che lo studio legato all'acustica delle sale aveva avuto sulla SEA, in letteratura sono disponibili molti lavori sull'argomento. È importante precisare un'ultima cosa: la densità modale è qui definita come una grandezza continua e questo non è più corretto quando nella banda sono contenuti pochi modi.

Il *modal overlap factor* è definito nel seguente modo:

$$m(f) = fn(f)\eta(f)$$

dove f indica la frequenza. Per capire il significato di questa grandezza si deve guardare il grafico della risposta in frequenza di un sistema risonante. Quando le risonanze si distinguono bene le une dalle altre il *modal overlap factor* è basso, al contrario più il grafico è piatto più il *modal overlap factor* è alto. Come dice lo stesso nome, questo fattore dà una misura di quanto i modi si sovrappongono. Questo fenomeno di sovrapposizione è legato a due elementi entrambi fondamentali: la quantità di frequenze proprie nella banda -più ce ne sono più le distanze fra di esse sono esigue ed è quindi difficile distinguerle- ed il valore dello smorzamento -per smorzamento elevato il grafico corrispondente al contributo di un modo tende a sovrapporsi a quelli dei modi adiacenti, quindi nella risposta

totale i vari contributi si confondono-.

Per conoscere la potenza che una forza esercita su un sistema è possibile utilizzare la mobilità del punto di eccitazione. Infatti, lavorando in termini di fasori, essendo la potenza istantanea e puntuale:

$$P(t) = \text{Re}\{F e^{j\omega t}\} \text{Re}\{V e^{j\omega t}\} \quad (1.4)$$

con F il fasore della forza e V il fasore della velocità, si dimostra che la potenza mediata rispetto al tempo è ¹:

$$\langle P \rangle_t = \frac{1}{2} \text{Re}\{F V^*\} \quad (1.5)$$

con V^* il complesso coniugato del fasore della velocità. Sostituendo alla velocità la mobilità, ovvero il rapporto fra velocità e forza V/F , si ha che:

$$V^* = \frac{M^*}{F^*} \quad \rightarrow \quad \langle P \rangle_t = \frac{1}{2} |F|^2 \text{Re}\{M^*\}$$

La difficoltà è che per conoscere la potenza entrante del sistema, un dato del problema, è necessario conoscere la forza, ancora un dato del problema, ma anche la soluzione del problema stesso, la velocità o la mobilità del punto eccitato. Un modo per aggirare la difficoltà è quello di considerare il valore medio della parte reale della mobilità. In pratica, il termine $\text{Re}\{M^*\}$ fluttua rapidamente in frequenza: si può allora pensare di semplificare la situazione considerando la media di questo termine rispetto alla frequenza, ipotizzando che il sistema sia eccitato da un rumore con densità spettrale costante nella banda. Alternativamente la media può essere fatta rispetto alle pulsazioni proprie le quali sono assunte variabili aleatorie uniformemente distribuite nella banda di frequenze -questo concetto verrà ripreso e meglio approfondito più avanti-. Il risultato di questa media e della media spaziale su tutti i punti di eccitazione della parte reale della mobilità è:

$$\langle \langle \text{Re}\{M\} \rangle_{\omega_n} \rangle_x = \frac{\pi n(\omega)}{2\mathcal{M}}$$

dove \mathcal{M} è la massa del sistema ed $n(\omega)$ la densità modale. La potenza entrante nel sistema può essere quindi scritta come:

$$\langle \langle \langle P \rangle_t \rangle_{\omega_n} \rangle_x = \frac{1}{2} \langle |F|^2 \rangle_x \langle \text{Re}\{M\} \rangle_{\omega_n} \rangle_x = \frac{1}{2} \langle |F|^2 \rangle_x \frac{\pi n(\omega)}{2\mathcal{M}} \quad (1.6)$$

Si vuole ora dimostrare che una relazione del tipo (1.2) vale anche per sistemi a più gradi di libertà. Torniamo, quindi, allo sviluppo del modello matematico per

1. Con il simbolo $\langle \circ \rangle_\circ$ si indica la media dell'argomento fatta rispetto alla variabile a pedice

tali sistemi.

Si considerino due sottosistemi multi modali connessi fra loro. Si consideri inoltre che la densità spettrale della componente modale dell'eccitazione del sottosistema, $\mathcal{L}_{i\alpha} = \int p_i \psi_{i\alpha} dx_i$ -l'indice i sta ad indicare il sottosistema, l'indice α il modo, p_i è il carico e $\psi_{i\alpha}$ è l'autofunzione-, sia piatta in un intervallo di frequenze $\Delta\omega$ che, secondo la definizione data di densità modale, contiene un numero N_i di modi. Devono poi essere verificate le seguenti due ipotesi.

Ogni frequenza propria di ciascun sottosistema, $\omega_{i\alpha}$, considerata come una variabile aleatoria, ha una densità di probabilità uniforme in un intervallo di frequenza $\Delta\omega$, ovvero nell'intervallo ha la stessa probabilità di assumere un valore invece di un altro. Questa ipotesi va interpretata fisicamente pensando che ciascun sottosistema appartenga ad una popolazione statistica. La differenza fra un campione e l'altro di questa popolazione è data dal comportamento aleatorio dei parametri fisici del sottosistema stesso.

Each mode α of subsystem i is assumed to have a natural frequency $\omega_{i\alpha}$ that is uniformly probable over a frequency interval $\Delta\omega$. This means that each subsystem is a member of a population of systems that are generally similar physically, but differ enough to have randomly distributed parameters. . . . [12]

Ogni modo dello stesso sottosistema ha lo stesso livello energetico e le ampiezze delle componenti modali della soluzione per un sottosistema sono incoerenti fra di loro. Questo lo si può ottenere partendo da un'eccitazione scelta in modo particolare: la componente modale dell'eccitazione, $\mathcal{L}_{i\alpha}$, deve far parte di una popolazione di funzioni che sono incoerenti fra di loro.

We assume that every mode in a subsystem is equally energetic, and that the modal amplitudes $\mathcal{Y}_{i\alpha} = \int (\rho_i y_i \psi_{i\alpha} / M) dx_i$ are incoherent, that is,

$$\langle \mathcal{Y}_{i\alpha} \mathcal{Y}_{i\beta} \rangle_t = \delta_{\alpha,\beta} \langle \mathcal{Y}_{i\alpha}^2 \rangle_t$$

.....

It also implies that the modal excitation functions $\mathcal{L}_{i\alpha}$ are drawn from random populations of functions that have certain similarities (such as equal frequency and wavenumber spectra) but are individually incoherent. . . . [12]

Lyon non manca di puntualizzare ulteriormente che l'ipotesi più importante non è la presenza di una eccitazione random, quanto la necessità di considerare appartenenti ad una popolazione statistica sia i modi dei sottosistemi, sia le componenti modali dell'eccitazione. Infatti precisa che la metodologia SEA può essere usata

con successo anche in presenza di eccitazioni monocromatiche purché ci sia un numero sufficiente di modi.

The conditions just listed are the basis for the descriptor "statistical" in SEA.

The concept of system derived by selection of individual modes and modal excitations from random populations is of prime importance, more so than the use of random (or noise) excitation. Indeed, we can use SEA to good accuracy in situations in which the excitation is a pure tone if there are a sufficient number of modes in the interaction to provide "good statistics". . . . [12]

Enunciate queste ipotesi procediamo fornendo l'argomento che consente di scrivere l'equazione (1.2) generalizzata per un sistema multimodale. In generale ogni modo del primo sottosistema interagisce con un modo del secondo sottosistema e viceversa. Se isoliamo una coppia di modi, modo l e modo m , uno di un sottosistema ed uno dell'altro, quindi consideriamo il flusso di energia fra questi due modi, ci troviamo in una condizione assolutamente analoga a quella studiata per la coppia di oscillatori elementari. Per quanto visto considerare la media sull'insieme dei sottosistemi equivale a supporre un'eccitazione di rumore bianco e la relativa media in frequenza.

Deve valere l'ipotesi appena vista di equipartizione dell'energia modale per ogni sottosistema, ovvero l'energia associata ad ogni modo dello stesso sottosistema deve avere sempre lo stesso valore¹:

$$\overline{E}_l^{(i)} = \text{cost} \quad \forall l, i$$

dove $E_l^{(i)}$ è l'energia associata al modo l -esimo del sottosistema i -esimo. Quindi definita l'energia modale come rapporto fra l'energia totale del sottosistema ed il relativo numero di modi:

$$\bar{e}_i = \frac{\overline{E}^{(i)}}{N_i} \quad \forall i$$

dove $E^{(i)}$ è l'energia totale, e_i l'energia modale e N_i il numero di modi del sottosistema i -esimo, questa dovrà essere uguale all'energia associata a ciascun modo del medesimo sottosistema ed essere uguale per tutti i modi:

$$\overline{E}_l^{(i)} = e_i = \text{cost}$$

In base alle equazioni (1.2) e (1.3) si può quindi scrivere:

$$\overline{P}_{lm} = \langle \mathcal{B}_{lm} \rangle_{\omega_l \omega_m} (\overline{E}_l^{(1)} - \overline{E}_m^{(2)}) \quad \rightarrow \quad \overline{P}_{lm} = \langle \mathcal{B}_{lm} \rangle_{\omega_l \omega_m} (\bar{e}_1 - \bar{e}_2) \quad (1.7)$$

1. Con la linea a cappello si intendono grandezze mediate sullo spazio e sulla frequenza o, come visto, equivalentemente sulle autofrequenze: $\langle \langle \circ \rangle_x \rangle_{\omega_n}$

Il flusso di energia totale fra tutti i modi del sistema 1 ed il modo m del sistema 2 si ottiene sommando sopra gli N_1 modi del sistema 1 ed è:

$$\bar{P}_{1m} = \langle \mathcal{B}_{lm} \rangle_{\omega_l \omega_m} N_1 (\bar{e}_1 - \bar{e}_2)$$

Poichè lo stesso calcolo può essere fatto per il sistema 2, la potenza trasmessa totale fra i due sistemi è:

$$\bar{P}_{12} = \langle \mathcal{B}_{lm} \rangle_{\omega_l \omega_m} N_1 N_2 (\bar{e}_1 - \bar{e}_2) \quad (1.8)$$

Se si sostituiscono le energie modali dei due sottosistemi con quelle totali si può scrivere:

$$\bar{P}_{12} = \langle \mathcal{B}_{lm} \rangle_{\omega_l \omega_m} N_1 N_2 (\bar{E}_1/N_1 - \bar{E}_2/N_2)$$

Se si definiscono i seguenti coefficienti:

$$\eta_{12} = \langle \mathcal{B}_{lm} \rangle_{\omega_l \omega_m} N_2 / \omega \quad \eta_{21} = N_1 \eta_{12} / N_2 \quad (1.9)$$

si arriva a scrivere l'espressione per il flusso di energia:

$$\bar{P}_{12} = \omega (\eta_{12} \bar{E}_1 - \eta_{21} \bar{E}_2) \quad (1.10)$$

I coefficienti definiti nelle equazioni (1.9) sono chiamati *coupling loss factor*: questi rappresentano i coefficienti di proporzionalità tra la potenza che un sottosistema perde a causa dell'accoppiamento con un altro gruppo modale e l'energia da esso accumulata, $\eta_{12} = \bar{P}_{12}^1 / \omega \bar{E}_1$. Ricordiamo che \bar{P}_{12} è la potenza netta scambiata, mentre \bar{P}_{12}^1 rappresenta solo la parte persa dal sottosistema 1. La seconda delle equazioni (1.9) oltre a definire il *coupling loss factor* η_{21} definisce la relazione di reciprocità:

$$N_1 \eta_{12} = N_2 \eta_{21} \quad (1.11)$$

che vale nella banda di frequenza $\Delta\omega$.

Per concludere, in condizioni stazionarie è possibile scrivere il seguente sistema di equazioni che rappresenta il bilancio fra la potenza entrante nei sottosistemi, quella dissipata a causa dello smorzamento e quella scambiata con il secondo sottosistema -da adesso in poi si ometterà la linea a cappello dei vari termini che indica il loro valor medio-:

$$P_{1,in} = \omega \eta_1 E_1 + \omega (\eta_{12} E_1 - \eta_{21} E_2) \quad (1.12)$$

$$P_{2,in} = \omega \eta_2 E_2 + \omega (\eta_{21} E_2 - \eta_{12} E_1)$$

La trattazione affrontata per due gruppi modali accoppiati può essere estesa ad M sottosistemi collegati insieme [9, 13]. Si ha in questo caso un sistema lineare di M equazioni analogo al sistema (1.12):

$$P_{i,in} = \omega \eta_i E_i + \omega \sum_{j=1, j \neq i}^M (\eta_{ij} E_i - \eta_{ji} E_j) \quad (1.13)$$

che sotto forma di matrice è:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 + \sum_{j=2}^M \eta_{1j} & -\eta_{21} & \cdots & -\eta_{M1} \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \sum_{j=1, j \neq 2}^M \eta_{2j} & \cdots & -\eta_{M2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta_{1M} & -\eta_{2M} & \cdots & \eta_M + \sum_{j=1}^{M-1} \eta_{Mj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_M \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} P_{1,in} \\ P_{2,in} \\ \vdots \\ P_{M,in} \end{bmatrix}$$

La soluzione del sistema (1.13) offre il valore dell'energia media accumulata da ogni sottosistema -media, ricordiamo, nel senso di speranza matematica di una popolazione di gruppi modali simili-

Il problema della predizione per i fenomeni vibro acustici è quindi spostato dalle difficoltà computazionali e di sensibilità prima esposte a quello di una corretta identificazione dei valori da attribuire a coefficienti e termini noti del sistema (1.13).

Il *damping loss factor* è la maggiore fonte di indeterminazione nel calcolo della risposta del sistema. Il modo più accurato per stimarne il valore è la misura sperimentale. Il *coupling loss factor* è anch'esso un parametro di difficile valutazione. Esistono comunque delle valide espressioni analitiche per particolari tipi di giunzioni; negli altri casi, come per il *damping loss factor*, è necessario determinarne il valore attraverso opportuna sperimentazione. I termini noti del sistema di equazioni sono le potenze entranti nei singoli sottosistemi. La loro valutazione, come è stato già presentato, non è affatto immediata: infatti, nota l'eccitazione, è indispensabile conoscere la mobilità del sottosistema o comunque il rapporto fra la densità modale e la massa dello stesso.

1.4 Primi passi verso una valutazione della confidenza dei risultati della "Statistical Energy Analysis"

Poiché la SEA è una teoria statistica la soluzione che offre è in termini di valor medio dell'energia dei gruppi modali. Come già affermato la media deve essere intesa come valore atteso fra le soluzioni di sottosistemi appartenenti a popolazioni di gruppi modali "simili", dove la parola "simile" indica che un sistema differisce da un'altro per piccole variazioni aleatorie dei parametri fisici. Le equazioni offrono solo il valor medio dell'energia e non dicono nulla riguardo alla confidenza

della soluzione. Per completezza sarebbe indispensabile avere il valore della deviazione standard dell'energia che permette di misurare la dispersione dei dati intorno al valor medio e , quindi, di quanto l'energia di ogni singolo elemento della popolazione si discosta, al massimo, dalla soluzione SEA.

Lyon ha studiato il problema della stima di questa deviazione standard sviluppando dei calcoli teorici. Alla base di questi calcoli si assume che le autofrequenze siano distribuite lungo l'asse delle frequenze con una distribuzione di probabilità alla Poisson. Una motivazione per la scelta di questo tipo di distribuzione è stata vista nel paragrafo 1.2: in condizioni particolari, è una scelta plausibile per una cavità acustica. Un'altro motivo nasce osservando il comportamento del grafico fatto rispetto alla frequenza della parte reale della mobilità: il modo con il quale appaiono le autofrequenze sulle ascisse ricorda una sequenza di impulsi prodotti nel tempo da un generatore di impulsi random [26].

As discussed ... our basic population model assumes that the resonance frequencies of modes occur randomly along the frequency axis (at least over an interval $\Delta\omega$ and independently of each other. As a result of these assumption the occurrence of these resonances is a *Poisson Process* and probability density function of spacing between resonances $\text{pdf}(\delta\omega)$ is the exponential function ... [12]

Ora, la densità di probabilità di Poisson è caratteristica di quelle variabili random che indicano il numero di punti che appaiono in un determinato campo quando si verificano le seguenti tre ipotesi [6].

1. I punti devono essere distribuiti uniformemente nel campo con densità media, λ , costante, quindi la probabilità che un numero qualsiasi di punti appartenga ad un intervallo dipende solo dalla lunghezza dell'intervallo e non dalla sua posizione sull'asse.
2. I punti devono essere distribuiti nel campo in modo indipendente: quindi la probabilità che un numero qualsiasi di punti appartenga ad un intervallo non dipende dal numero di punti che appartengono ad un altro intervallo che non si interseca con il primo.
3. La probabilità che due o più punti coincidano è praticamente nulla.

Si fa inoltre presente che possono essere definite distribuzioni di Poisson generalizzate. Una di queste è la distribuzione di Poisson non omogenea che gode delle proprietà 2 e 3, ma non della 1. Infatti, in questo caso si assume una densità media non costante. Quindi la probabilità che, secondo la legge di Poisson, in un

intervallo ci siano N punti è espressa dalla relazione seguente:

$$p_N = \frac{m^N}{N!} e^{-m}$$

dove con m si indica il valor medio della variabile aleatoria.¹

Per quanto detto risulta plausibile la scelta di questa particolare distribuzione per valutare la probabilità che un determinato numero di frequenze proprie siano presenti in un intervallo di frequenze, senza dimenticare che, considerando le ipotesi indicate, non è possibile generalizzare il risultato a tutti i sistemi.²

Come già accennato, il modo con il quale le frequenze proprie appaiono sull'asse delle frequenze assomiglia ad una serie di impulsi prodotta da un generatore di impulsi random. Esistono degli studi riguardo al comportamento della serie di impulsi collegati al conteggio del numero di elettroni che arrivano ad un anodo [1]. Se $F(t)$ è l'effetto prodotto dall'arrivo dell'elettrone e se gli effetti dei vari

-
1. Si può notare che per un intervallo di lunghezza Δf il valore medio corrispondente è:

$$m = \lambda \Delta f$$

essendo λ la densità media. Se la densità non è costante -densità di probabilità di Poisson non omogenea- la media è l'integrale della densità sul campo [6]:

$$m = \int_{f_0}^{f_0 + \Delta f} \lambda(f) df$$

2. In relazione agli studi condotti sulle sale acustiche, consideriamo una distribuzione random per la quale ogni frequenza normale μ_n ha uguale probabilità di assumere un valore di frequenza qualsiasi nell'intervallo Δ . È questo un esempio di distribuzione alla Poisson per la quale si può dimostrare che:

$$p_m = \frac{N^m e^{-N}}{m!}$$

è la probabilità che ci siano m frequenze normali in un intervallo nel quale N è il numero atteso (medio) di frequenze proprie ($N = \Delta/\bar{\delta}$ dove $\bar{\delta}$ lo spazio medio fra due frequenze proprie). La probabilità di non trovare frequenze proprie in Δ è:

$$p_0 = e^{-N} = e^{-\Delta/\bar{\delta}}$$

che corrisponde alla probabilità di trovare un intervallo di dimensione Δ dove l'intervallo atteso è $\bar{\delta}$. Da questa relazione si ricava che la probabilità, secondo la legge di Poisson, di trovare un intervallo reale δ per unità di intervallo medio $\bar{\delta}$ è [19]:

$$e^{-\delta/\bar{\delta}}$$

elettroni si sommano linearmente, l'effetto totale sarà:

$$I(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(t - t_k)$$

dove k indica l'indice associato all'elettrone, t_k è il tempo nel quale l'elettrone k -esimo arriva e la serie è assunta convergente. Per quanto riguarda la probabilità di avere K elettroni si dimostra che vale la legge di Poisson:

$$p_K = \frac{(\nu T)^K}{K!} e^{-\nu T}$$

dove ν è il numero medio degli elettroni per secondo e T è l'intervallo di misura. Il teorema di Campbell stabilisce che il valor medio e la varianza della grandezza $I(t)$ sono rispettivamente:

$$\overline{I(t)} = \nu \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt \quad \overline{(I(t) - \overline{I(t)})^2} = \nu \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(t) dt$$

Questo risultato è sfruttato da Lyon in quanto il calcolo dei momenti statistici del valore quadratico medio della velocità consiste nel calcolo dei momenti statistici di una sommatoria dove, invece degli effetti degli arrivi degli elettroni all'anodo, ci sono gli effetti della comparsa sull'asse delle frequenze dei modi propri. Per due sistemi Lyon riesce a scrivere una relazione sulla confidenza come il rapporto fra la varianza ed il quadrato del valor medio -una varianza normalizzata- della velocità quadratica media -media rispetto allo spazio e sulla banda di frequenza $\Delta\omega$ -. Di seguito è riportata l'espressione per il sistema 2, ma vale l'espressione simmetrica per il sistema 1:

$$\frac{\sigma_{v_2}^2}{m_{v_2}^2} = \frac{2}{n_1 n_2 \pi (\eta_1 + \eta_2) \Delta\omega} \left(\frac{\langle \psi_1^4 \rangle}{\langle \psi_1^2 \rangle^2} \right)^2 \left(\frac{\langle \psi_2^4 \rangle}{\langle \psi_2^2 \rangle^2} \right)^2$$

dove n_1 ed n_2 , η_1 e η_2 , ψ_1 e ψ_2 sono rispettivamente le densità modali, gli smorzamenti e le autofunzioni dei due sottosistemi, mentre $\Delta\omega$ è la larghezza di banda dell'eccitazione. L'equazione mostra come la varianza normalizzata della velocità quadratica media diminuisca in maniera proporzionale alla sovrapposizione modale ed al numero di modi nella banda di eccitazione. Per due sistemi, i parametri fisici dei quali sono fissati, la confidenza aumenta con la frequenza [4, 12].

Questo risultato si può considerare esatto nei limiti delle ipotesi imposte. Di fatto, non esiste ancora una relazione certa e generale che stabilisca l'influenza del *modal overlap factor* e della densità modale sulla confidenza dei risultati. Infatti, riguardo al modo di calcolare i momenti statistici è importante puntualizzare

che la variabile aleatoria scelta è il numero di frequenze proprie che sono presenti in un intervallo di frequenze. È questa variabile che segue o comunque può seguire la distribuzione di probabilità alla Poisson. Tutto questo, inoltre, vale per il comportamento della risposta di un singolo sottosistema. Come è stato precedentemente illustrato, la statistica sulla quale si basa la teoria della SEA è calcolata nei riguardi di una popolazione di gruppi modali "simili". Poiché per "simili" si intende che i gruppi modali si discostano di poco uno dall'altro a causa di piccole variazioni dei parametri fisici, l'aleatorietà è sul valore assunto dalle autofrequenze. È vero che cambiando il valore delle autofrequenze può cambiare il loro numero in un intervallo di frequenze, ma sicuramente è anche, e direi soprattutto, il valore assunto dalla frequenza propria.

Questo argomento è approfondito in maniera più dettagliata nei capitoli dove è calcolata la confidenza dell'energia accumulata e della potenza trasmessa considerando direttamente l'incertezza dei parametri fisici dei sottosistemi.

Capitolo 2

Il problema delle ipotesi e dei limiti di utilizzo della "Statistical Energy Analysis"

La SEA, come ogni modello, ha un campo di applicazione limitato. In questo capitolo si tenta di svolgere un lavoro di "traduzione fisica" delle ipotesi più accreditate presenti in letteratura che dovrebbero essere alla base del metodo [3, 4, 9, 12, 13]. È un dato di fatto che nella SEA le ipotesi di lavoro facciano uso di concetti e definizioni completamente interni alla teoria e frequentemente estranei alla dinamica delle strutture classica. Si è quindi sentita l'esigenza, in questo lavoro, di rendere più chiara ed esplicita a dette ipotesi, dandone in alcuni casi forma analitica.

2.1 Criterio di somiglianza dei modi di un sottosistema

In questo paragrafo sono analizzate in dettaglio le ipotesi esposte nel paragrafo 1.2.

Tutti i modi costituenti un gruppo modale devono possedere pressoché la stessa energia modale. Questa ipotesi equivale a richiedere che sia importante lo scambio di energia fra i modi adiacenti di ogni sottosistema. Ciò si verifica se la risposta ha un andamento in frequenza piuttosto piatto, ovvero quando si ha alto *modal overlap factor*, oppure nel caso di campo diffuso. Le due condizioni possono essere espresse nel seguente modo:

$$m(f) \gg 1 \quad f\eta_i(f) \ll 1 \quad (2.1)$$

dove η_i è lo smorzamento del sistema i -esimo.

Tutti i modi costituenti un gruppo modale devono ricevere pressoché la stessa potenza di ingresso. L'ipotesi si traduce nella necessità che la potenza entrante nel sottosistema sia costante rispetto alla frequenza. La potenza entrante media, come abbiamo visto in (1.6) è:

$$\langle P_{in}(\omega) \rangle_x = \frac{1}{2} \langle F_{rms}^2(\omega) \rangle_x \langle \langle \text{Re}\{M(\omega)\} \rangle_{\omega_n} \rangle_x$$

dove $\langle F_{rms}^2(\omega) \rangle_x$ è la media spaziale del valore quadratico medio dell'eccitazione. Poiché il dato del problema è l'eccitazione, perchè l'ipotesi sia verificata, imposto che la media spaziale del valore quadratico medio della forza sia piatta in frequenza, dovrà essere circa costante anche il termine legato alla mobilità del sistema, ovvero:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} (\langle \langle \text{Re}\{M(\omega)\} \rangle_{\omega_n} \rangle_x) = 0$$

Poiché, ricordando ancora la (1.6), si dimostra che:

$$\langle \langle \text{Re}\{M(\omega)\} \rangle_{\omega_n} \rangle_x = \frac{\pi n(\omega)}{2\mathcal{M}}$$

dove \mathcal{M} è la massa del sistema, la condizione per la quale l'ipotesi è rispettata si traduce nella costanza della densità modale:

$$\frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega} = 0 \quad (2.2)$$

Tutti i modi costituenti un sottosistema devono avere pressoché lo stesso accoppiamento con tutti i modi di tutti i gruppi modali con i quali il sottosistema scambia energia. L'ipotesi richiede che i *coupling loss factor* siano circa costanti in ciascuna banda di frequenze. Questo infatti garantisce che il parametro che regola lo scambio di energia fra modi risonanti di due sottosistemi fra loro accoppiati abbia lo stesso valore in ciascuna banda di frequenze. La relazione matematica che traduce l'ipotesi è:

$$\frac{\partial \eta_{ij}(\omega)}{\partial \omega} = 0 \quad (2.3)$$

Tutti i modi costituenti un gruppo modale devono avere pressoché lo stesso smorzamento. L'ipotesi si può interpretare richiedendo che la funzione smorzamento di ogni sottosistema sia costante in frequenza, quindi che:

$$\frac{\partial \eta_i(\omega)}{\partial \omega} = 0 \quad (2.4)$$

2.2 Condizioni di validità delle equazioni della "Statistical Energy Analysis"

L'accoppiamento tra i sottosistemi deve essere di tipo conservativo. Se quest'ipotesi non fosse verificata il flusso di energia dipenderebbe non solo dalla differenza tra le energie modali, ma anche dal loro valore assoluto. Comunque è stato dimostrato che per sistemi multimodali il fattore di perdita per accoppiamento contribuisce all'incremento dello smorzamento interno di ogni sottosistema.

D'altra parte non è cosa facile la valutazione quantitativa di questo contributo. **La risposta di ogni sottosistema deve derivare prevalentemente dal solo contributo dei modi risonanti nella banda di interesse.** Questa ipotesi deriva dal fatto che quando vengono calcolate le medie sulle pulsazioni proprie, sono considerate solo quelle che appartengono all'intervallo di frequenze eccitato. Quello che deve essere verificato, perché l'ipotesi sia rispettata, è che i residui dovuti ai modi fuori banda siano trascurabili.

Le frequenze proprie di ogni gruppo modale devono essere uniformemente probabili nell'intervallo di frequenze studiato. L'ipotesi richiede che nella banda di frequenze la densità modale sia costante:

$$\frac{\partial n(\omega)}{\partial \omega} = 0 \quad (2.5)$$

2.3 Condizioni perchè il modello matematico della "Statistical Energy Analysis" sia un sistema algebrico lineare

Tra le forze che eccitano i vari sottosistemi deve esserci bassa cross-correlazione. Le equazioni della SEA si basano sulla possibilità di considerare l'energia di un sistema come la somma delle energie di tutti i sottosistemi:

$$E = \sum_i E_i$$

Se l'ipotesi non è rispettata non è possibile scrivere questa relazione. Infatti facendo riferimento ad un sistema strutturale, senza comunque perdere di generalità, si ha che:

$$E = \mathcal{M} \langle v^2 \rangle_t \quad E_i = \mathcal{M} \langle v_i^2 \rangle_t$$

Per la velocità si può scrivere che:

$$v = \sum_i v_i \quad \langle (\sum_i v_i)^2 \rangle_t = \sum_i \langle v_i^2 \rangle_t + 2 \sum_{i,j \neq i} \langle v_i v_j \rangle_t$$

Dalle relazioni precedenti deriva la seguente equazione:

$$E = \sum_i E_i + 2\mathcal{M} \sum_{i,j \neq i} \langle v_i v_j \rangle_t$$

Se la cross-correlazione dei carichi non fosse nulla non si annullerebbe il termine misto dell'ultima equazione [13].

Le interazioni fra gruppi modali devono essere deboli. In sistemi complessi

il flusso di energia fra un sottosistema e gli altri è dato da una sommatoria fra le differenze delle energie modali disaccoppiate -nel senso che il gruppo modale si considera disappiando tutti gli altri- di tutti i sottosistemi. L'uso delle energie disaccoppiate non permette di trattare particolari problemi nei quali appaiono più di due sottosistemi. Pensiamo ad un sistema in cascata di tre gruppi modali dove solo il primo è eccitato. Poiché le energie disaccoppiate del secondo e del terzo sottosistema sono nulle, in quanto questi gruppi modali non sono direttamente eccitati, lo è anche il flusso di energia fra questi due gruppi modali. Questo, ovviamente, è ben lontano da essere una condizione reale. Per questo è necessario sviluppare i calcoli considerando le energie che effettivamente i sottosistemi hanno accumulato. Quando si ha accoppiamento debole le energie effettivamente accumulate coincidono con quelle disaccoppiate e non si ha accoppiamento indiretto ovvero non si ha scambio fra sottosistemi che non sono in contatto. Nelle equazioni della SEA, infatti, il flusso di energia è sempre fra sistemi in contatto. Si dimostra che c'è accoppiamento debole quando ciascun sottosistema possiede un *damping loss factor* molto maggiore di tutti i *coupling loss factor* dei sottosistemi ad esso connessi [13], quindi si può scrivere:

$$\frac{\eta_{ij}(\omega)}{\eta_i(\omega)} \ll 1 \quad (2.6)$$

Le onde che trasportano energia dal sottosistema i -esimo al j -esimo devono essere incorrelate con quelle che trasportano energia in senso opposto. Quest'ipotesi è in genere sempre soddisfatta. Comunque è tanto più vera quanto più si viene a creare un campo riverberante e quindi tanto più è vera la relazione:

$$f\eta_i(f) \ll 1 \quad (2.7)$$

La dissipazione nei gruppi modali deve essere lineare. Deve, quindi, essere verificata la relazione:

$$P_{i,d} = E_i\omega\eta_i$$

I modelli di smorzamento rispettano in generale questa ipotesi. Non tengono conto, però, di fenomeni legati all'assemblaggio dei componenti -pompaggio del fluido, attrito alle giunzioni, ...-. Quindi nella teoria della SEA si trascurano queste condizioni di smorzamento, forti del fatto che, a frequenze elevate, la dissipazione di energia alle giunzioni è trascurabile.

2.4 Conclusioni sintetiche e confronto delle ipotesi

Le ipotesi considerate nei paragrafi precedenti mostrano come non sia facile realizzare le condizioni per il miglior utilizzo della SEA.

Fra le ipotesi compare in due diverse occasioni la condizione di campo diffuso. Questa garantisce sia che tutti i modi di un sottosistema abbiano la stessa energia sia l'incorrelazione fra le onde che trasportano energia da un sottosistema ad un altro con quelle che operano il passaggio inverso. Contemporaneamente, però, è richiesto che il *modal overlap factor* sia elevato sempre perché si realizzi l'ipotesi dell'equipartizione dell'energia. Ricordiamo che il *modal overlap factor* è: $m(f) = f\eta_d(f)n(f)$, mentre la condizione di campo diffuso si realizza quando: $f\eta_d(f) \ll 1$. Si può vedere che la contemporaneità delle due condizioni è difficile da ottenere: esisterà un campo di frequenze e di valori dello smorzamento nel quale vale la condizione di campo diffuso ed un altro, separato dal primo, nel quale vale la condizione di *modal overlap factor* alto.

Un altro requisito che insiste su due differenti ipotesi è quello di costanza della densità modale. Questa condizione, ricordiamo, garantisce sia l'equidistribuzione della potenza in ingresso sia che i modi siano uniformemente probabili. È comunque un vincolo difficile da rispettare. Per quanto riguarda i sistemi elementari solo per le vibrazioni longitudinali delle travi e quelle flessionali delle piastre si verifica la costanza della densità modale. In generale nulla garantisce che un sistema meccanico complesso realizzi questa condizione, tutt'altro. Comunque, poiché la condizione deve valere in intervalli di frequenza, è sempre possibile avere regioni nelle quali la derivata della $n(\omega)$ è piccola anche se l'andamento su tutto il campo non è costante.

Per quanto riguarda lo smorzamento è richiesta la sua costanza perchè sia uguale il valore per tutti i modi. Questa condizione non trova in generale un riscontro nei sistemi reali, ma è meno pesante di quella di costanza della densità modale. I requisiti sopra esposti, richiesti sia alla densità modale che allo smorzamento, si riallacciano alla condizione sul *modal overlap factor*. Reclamare la costanza di questi due coefficienti significa che o essi hanno dei valori costanti ma elevati, in modo che sia verificata la condizione $m(f) \gg 1$, ovviamente a danno della richiesta di campo riverberante, o che l'unico motivo di incremento di $m(f)$ è l'aumentare della frequenza.

Per quanto riguarda il *coupling loss factor*, questo interviene per garantire: uguale accoppiamento fra gruppi modali accoppiati -il *coupling loss factor* deve essere costante in frequenza-, debole interazione fra i sottosistemi connessi -il *coupling loss factor* deve essere piccolo rispetto allo smorzamento-. Per quanto riguarda il rispetto della condizione di costanza del coefficiente, come è stato discusso a riguardo della densità modale, questo in generale non è verificato. Al solito è possibile che in particolari bande di frequenza la situazione sia migliore, sebbene, su tutto il campo, la richiesta sia disattesa. A riguardo della condizione sul rapporto fra *coupling loss factor* e *damping loss factor* il suo realizzarsi potrebbe essere di disturbo per la condizione di campo ondoso riverberante. Infatti, perché si verifichi che $f\eta_d(f)$ sia molto minore dell'unità, lo smorzamento dovrà essere

piccolo. Ma perchè sia confermata la condizione sul debole accoppiamento tanto più è piccolo il *damping loss factor* tanto più dovrà esserlo il *coupling loss factor*. Questo si verifica solo in condizioni molto particolari di accoppiamento e quindi in generale non è facile che tale condizione si realizzi.

Capitolo 3

Dal problema della sensibilità alla valutazione della confidenza della soluzione della "Statistical Energy Analysis"

La SEA stima il valor medio dell'energia accumulata nei vari gruppi modali che compongono il sistema studiato. Si è visto come sia necessario conoscere la varianza di detta soluzione per la completezza della soluzione statistica. È stato detto come Lyon stesso abbia sentito la necessità di stimare questo momento statistico. Imponendo una particolare distribuzione di probabilità al numero di frequenze proprie che appaiono in bande di frequenza, Lyon calcola la varianza normalizzata della velocità quadratica media per due sistemi accoppiati, nei limiti del procedimento e delle ipotesi da lui adottate e descritte nel paragrafo 1.3. In questo capitolo l'analisi è rivolta direttamente alle equazioni della SEA partendo dal lavoro di Radcliffe e Huang [29].

Gli autori affrontano il problema introducendo una perturbazione stocastica nelle equazioni della SEA, linearizzando queste equazioni intorno alla perturbazione imposta e calcolando la varianza delle nuove equazioni linearizzate. Essi affermano che la carenza di informazione della SEA può essere colmata calcolando la varianza associata alle variazioni imposte ai parametri della SEA - *coupling loss factor*, potenza entrante, ...-.

Queste operazioni certamente permettono di calcolare la sensibilità delle equazioni SEA relativamente alla data perturbazione imposta e quindi permettono di conoscere il livello di confidenza della soluzione SEA in relazione a dei cambiamenti imposti sui parametri di progetto del sistema studiato. Tant'è che la verifica dei risultati teorici è svolta attraverso un test basato su una procedura Monte Carlo nella quale le realizzazioni sono estratte da una popolazione stocastica di soluzioni SEA e non di soluzioni deterministiche. D'altra parte è da dimostrare che tale metodo effettivamente offra la soluzione attesa ovvero il livello di confidenza della soluzione SEA.

3.1 Un'introduzione alla perturbazione statistica dei coefficienti della "Statistical Energy Analysis"

Le equazioni della SEA (1.13) sono equazioni deterministiche; i termini che in esse compaiono sono valori medi di energie accumulate e di potenze dissipate e scambiate. I coefficienti, *damping loss factor* e *coupling loss factor*, sono grandezze deterministiche funzioni dei parametri fisici del problema.

Come è stato più volte detto, l'incognita del problema è il valore medio, calcolato sulle pulsazioni proprie e sullo spazio, dell'energia accumulata in ogni gruppo modale. Ancora, questo valore atteso dell'energia è la media di tutte le realizzazioni che sono predizioni dell'energia per una popolazione di sistemi "simili". Allo scopo di rendere più agevole la lettura e per amore di sintesi, decidiamo di chiamare con l'espressione "realizzazioni deterministiche" tutte le funzioni dell'energia che fanno parte del processo stocastico del quale la soluzione della SEA è la media.

La soluzione della SEA è una funzione del *damping loss factor*, del *coupling loss factor* e delle potenze entranti:

$$E_i(\eta_l, \eta_{lm}, P_{l,in}) \quad i, l, m = 1, \dots, N \quad l \neq m$$

I valori che sono assegnati a questi termini identificano un sistema ben preciso, perché sono funzioni deterministiche dei parametri fisici. Questo sistema è quello "rappresentativo" del gruppo di sistemi "simili" ed i valori assegnati ad η_l , η_{lm} e $P_{l,in}$ sono i valori nominali associati al sistema rappresentativo. Tutti gli altri sistemi, campioni della popolazione statistica individuata dal sistema rappresentativo, sono caratterizzati da parametri fisici affetti da piccole perturbazioni statistiche rispetto ai valori nominali:

$$\tilde{\vartheta} = \vartheta(1 + \varepsilon) \tag{3.1}$$

dove ϑ è il generico parametro fisico nominale, ε è una variabile aleatoria e, chiaramente, per ognuno di questi sistemi esiste una soluzione deterministica che è una realizzazione dell'energia, una delle realizzazioni deterministiche. Per ogni valore assunto dalla variabile stocastica si ha una realizzazione che fa parte della famiglia individuata dalla soluzione della SEA. La figura 3.1a descrive in maniera schematica il procedimento presentato.

Facciamo un passo avanti. È sempre possibile introdurre nel modello matematico della SEA una perturbazione dei parametri fisici del sistema nominale: questa perturbazione implica una perturbazione dei *damping loss factor*, dei *coupling loss factor* e delle potenze entranti:

$$\begin{aligned} \tilde{\vartheta} &= \vartheta(1 + \varepsilon_1) \\ &\quad \downarrow \\ \tilde{\eta}_l &= \eta_l(1 + \varepsilon_2) \quad \tilde{\eta}_{lm} = \eta_{lm}(1 + \varepsilon_3) \quad \tilde{P}_{l,in} = P_{l,in}(1 + \varepsilon_4) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Per differenti valori assunti dalla variabile statistica ε_1 si calcolano valori lieve-

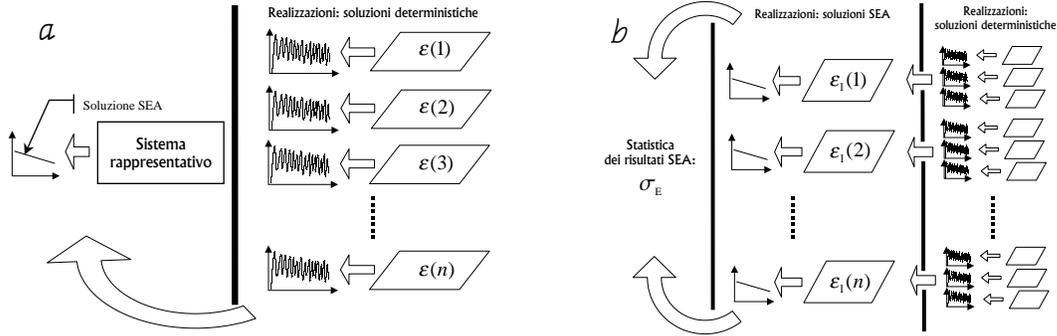


Figura 3.1: *a* - schematizzazione del procedimento di media sviluppato nella SEA, *b* - schematizzazione del procedimento di media su soluzioni SEA che si differenziano per piccole perturbazioni statistiche le une dalle altre

mente differenti della media dell'energia accumulata. Quello che in effetti si sta facendo è studiare differenti gruppi di sistemi simili ognuno dei quali ha come valori nominali i nuovi valori perturbati. È certamente lecito il calcolo delle caratteristiche statistiche di questo insieme di risultati SEA considerato come una popolazione statistica, ma il significato di tale operazione merita ulteriori approfondimenti che sono di seguito sviluppati. La figura 3.1*b* descrive il caso presentato.

Il problema di base rimane quello del calcolo della deviazione standard del risultato SEA. Un tentativo di sviluppare una metodologia generale per la stima della confidenza dei risultati della SEA è stato trattato recentemente da Radcliffe e Huang [29]. L'idea è quella di calcolare i momenti statistici dell'energia predetta dalla SEA utilizzando una tecnica perturbativa. Si tratta di sviluppare l'energia in serie di Taylor al primo ordine intorno ai valori nominali dei parametri *-damping loss factor, coupling loss factor* e potenza entrante:-

$$\begin{aligned}
 E_i = & E_i(\eta_l, \eta_{lm}, P_{l,in}) + \left. \frac{\partial E_i}{\partial \tilde{\eta}_l} \right|_{\eta_l, \eta_{lm}, P_{l,in}} (\tilde{\eta}_l - \eta_l) + \\
 & + \left. \frac{\partial E_i}{\partial \tilde{\eta}_{lm}} \right|_{\eta_l, \eta_{lm}, P_{l,in}} (\tilde{\eta}_{lm} - \eta_{lm}) + \left. \frac{\partial E_i}{\partial \tilde{P}_{l,in}} \right|_{\eta_l, \eta_{lm}, P_{l,in}} (\tilde{P}_{l,in} - P_{l,in})
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

È importante ricordare che la (3.3) vale se la perturbazione è piccola. Da questo sviluppo in serie è possibile calcolare i momenti statistici della E_i purché sia nota la variabile che regola il comportamento dei parametri perturbati.

È necessario approfondire in quale misura il procedimento presentato possa essere utile al nostro scopo.

Come abbiamo detto, introdurre una perturbazione statistica direttamente nelle equazioni della SEA non significa lavorare sulle realizzazioni che fanno parte della famiglia individuata dalla soluzione della SEA, le realizzazioni deterministiche. Quindi calcolare la deviazione standard seguendo questa procedura non equivale, in generale, a calcolare la dispersione dei dati intorno al risultato della SEA. Quello che questa tecnica effettivamente calcola è la sensibilità del sistema di equazioni: per una variazione dei parametri, coefficienti e termini noti, quale è l'effetto sulla soluzione?

D'altra parte lo sviluppo in serie (3.3) approssima il valore dell'energia per piccole perturbazioni. Si viene a determinare, quindi, una famiglia di predizioni SEA che si discostano poco una dall'altra. Per amore di sintesi chiamiamo queste funzioni con il termine "realizzazioni SEA". Il punto è il seguente: è lecito confondere la statistica sulle realizzazioni deterministiche con la statistica sulle realizzazioni SEA?

La deviazione standard che è possibile calcolare con questa procedura non offre, in generale, l'informazione sulla confidenza richiesta, la offrirebbe solo se fosse possibile confondere l'energia dei gruppi modali, predetta dalla SEA, con una qualsiasi realizzazione della famiglia che quel particolare gruppo modale, con quei particolari parametri nominali, rappresenta. Diamo una rappresentazione matematica e quindi cerchiamo di quantificare il concetto ora esposto.

Ogni realizzazione deterministica, r , campione della popolazione statistica rappresentata da una particolare soluzione SEA è funzione, $r(\vartheta)$, dei parametri fisici del sistema, ϑ . Se si perturba questo parametro con una variabile aleatoria adimensionale, ε , si ha che $\vartheta = \vartheta_0(1 + \varepsilon)$ -qui ϑ_0 è il valore nominale del parametro ϑ - ed è possibile sviluppare la funzione $r(\vartheta)$ in serie di Taylor intorno al valor medio, $\bar{\varepsilon}$, della perturbazione:

$$r \simeq r|_{\bar{\varepsilon}} + \left. \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \right|_{\bar{\varepsilon}} (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \quad (3.4)$$

Il valor medio dello sviluppo in serie è un'approssimazione della soluzione della SEA. Questo vale:

$$\bar{r} \simeq r|_{\bar{\varepsilon}} + \left. \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \right|_{\bar{\varepsilon}} \overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})} \quad \rightarrow \quad \bar{r} \simeq r|_{\bar{\varepsilon}} \quad (3.5)$$

Il valor medio delle realizzazioni così calcolato, il quale è bene ricordare di nuovo, rappresenta una approssimazione della soluzione SEA, è una funzione del valor medio della variabile aleatoria che perturba il parametro fisico, $\bar{r} \simeq r(\bar{\varepsilon})$.

Si pensi a questo punto di perturbare il valor medio $\bar{\varepsilon}$ con una nuova variabile

statistica ε_1 , $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_0 + \varepsilon_1$ ¹. Quello che si sta facendo è di considerare una famiglia di soluzioni SEA in quanto questa volta la perturbazione non è più imposta sulle realizzazioni, ma sui valori medi. Uno sviluppo in serie di Taylor della \bar{r} , eseguito intorno al valor medio $\bar{\varepsilon}_1$, è:

$$\bar{r} \simeq \bar{r}|_{\bar{\varepsilon}_1} + \left. \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varepsilon_1} \right|_{\bar{\varepsilon}_1} (\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1)$$

quindi per la (3.5) si può scrivere:

$$\bar{r} \simeq r|_{\bar{\varepsilon}_1} + \left. \frac{\partial r}{\partial \varepsilon_1} \right|_{\bar{\varepsilon}_1} (\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1) \quad (3.6)$$

La (3.6) è equivalente alla (3.3) perché esprime lo sviluppo in serie della soluzione della SEA quando è imposta una perturbazione, ε_1 , ai parametri fisici del sistema e di conseguenza ai parametri SEA che da essi dipendono. Quindi il valor medio della (3.6) rappresenta la media di tutte le soluzioni SEA che appartengono alla popolazione statistica generata dalla variabile ε_1 e quindi la media della (3.3) è il valore atteso delle realizzazioni SEA. La sua espressione è di seguito calcolata:

$$\bar{\bar{r}} \simeq r|_{\bar{\varepsilon}_1} + \left. \frac{\partial r}{\partial \varepsilon_1} \right|_{\bar{\varepsilon}_1} \overline{(\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1)} \quad \rightarrow \quad \bar{\bar{r}} \simeq r|_{\bar{\varepsilon}_1} \quad (3.7)$$

La domanda alla quale bisogna dare ancora una risposta è la seguente: è lecito confondere la statistica sulle realizzazioni deterministiche con la statistica sui risultati SEA? Per quanto riguarda il valor medio la condizione che permette di rispondere in modo affermativo al precedente quesito è che le due medie (3.5) e (3.7) si equivalgano: $\bar{r} = \bar{\bar{r}}$. La relazione può essere riscritta nella seguente maniera più esplicita²:

$$r(\bar{\varepsilon}) \simeq r(\bar{\varepsilon}_0 + \varepsilon_1)|_{\bar{\varepsilon}_1} \quad \rightarrow \quad r(\bar{\varepsilon}) \simeq r(\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_1) \quad (3.8)$$

Dalla (3.8) deriva che la condizione da rispettare è:

$$\bar{\varepsilon}_1 = 0 \quad (3.9)$$

infatti $\bar{\varepsilon}$ e $\bar{\varepsilon}_0$ coincidono, perché il secondo è il valore nominale del primo. A motivo dell'arbitrarietà della scelta della variabile aleatoria che perturba la soluzione

1. L'espressione permette di trattare il caso di valore nominale nullo, evento non improbabile in quanto la ε è una variabile statistica scelta in maniera arbitraria.

2. L'uso del simbolo \simeq deriva dall'approssimazione indotta dallo sviluppo in serie di Taylor. Se $\bar{r} \simeq r|_{\bar{\varepsilon}}$ e $\bar{\bar{r}} \simeq r|_{\bar{\varepsilon}_1}$ allora, perché valga la $\bar{r} = \bar{\bar{r}}$, dovrà essere $r|_{\bar{\varepsilon}} \simeq r|_{\bar{\varepsilon}_1}$

SEA, è sempre possibile prendere in considerazione una variabile con media nulla senza perdere di generalità. Ricordiamo, inoltre, che tutto l'impianto si basa sull'aver imposto una piccola perturbazione in modo che abbia significato confondere le funzioni con i loro sviluppi in serie e questa è una condizione che deve essere rispettata contemporaneamente alla (3.9)

Cerchiamo la condizione che controlla la varianza. Dalla (3.4) si calcola la σ_r^2 e dalla (3.6) la $\sigma_{\bar{r}}^2$. Per quanto riguarda la varianza delle realizzazioni deterministiche si ha la seguente espressione ¹:

$$\sigma_r^2 \simeq \text{E} \left\{ r(\vartheta_0(1 + \bar{\varepsilon}))^2 + \left. \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \right|_{\bar{\varepsilon}}^2 (\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2 + 2r(\vartheta_0(1 + \bar{\varepsilon})) \left. \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \right|_{\bar{\varepsilon}} (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \right\} - r(\vartheta_0(1 + \bar{\varepsilon}))^2$$

quindi:

$$\sigma_r^2 \simeq \left. \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \right|_{\bar{\varepsilon}}^2 \sigma_{\varepsilon}^2 \quad (3.10)$$

La varianza delle realizzazioni SEA è, invece:

$$\sigma_{\bar{r}}^2 \simeq \text{E} \left\{ r(\vartheta_0(1 + \bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_1))^2 + \left. \frac{\partial r}{\partial \varepsilon_1} \right|_{\bar{\varepsilon}_1}^2 (\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1)^2 + 2r(\vartheta_0(1 + \bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_1)) \left. \frac{\partial r}{\partial \varepsilon_1} \right|_{\bar{\varepsilon}_1} (\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_1) \right\} - r(\vartheta_0(1 + \bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_1))^2$$

ovvero:

$$\sigma_{\bar{r}}^2 \simeq \left. \frac{\partial r}{\partial \varepsilon_1} \right|_{\bar{\varepsilon}_1}^2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 \quad (3.11)$$

È importante chiarire che il termine $\vartheta_0(1 + \bar{\varepsilon})$ corrisponde al valore medio della proprietà fisica ϑ e quindi si può scrivere: $\vartheta_0(1 + \bar{\varepsilon}) = \bar{\vartheta}$. Inoltre, per la condizione (3.9), anche il termine $\vartheta_0(1 + \bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon}_1)$ è uguale al valor medio di $\bar{\vartheta}$. Sfruttando la regola della derivazione delle funzioni composte possiamo scrivere che:

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \vartheta_0 \quad (3.12)$$

ed ancora

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \vartheta_0 \quad (3.13)$$

1. Con il simbolo $\text{E}\{o\}$ si indica la media di insieme dell'argomento

In base alle (3.12) e (3.13) le (3.10) e (3.11) possono essere riscritte nel seguente modo:

$$\sigma_r^2 \simeq \left. \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \right|_{\bar{\varepsilon}}^2 \vartheta_0^2 \sigma_\varepsilon^2 \quad (3.14)$$

$$\sigma_r^2 \simeq \left. \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \right|_{\bar{\varepsilon}_1}^2 \vartheta_0^2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 \quad (3.15)$$

Se si vuole che le varianze siano uguali, $\sigma_r^2 = \sigma_r^2$, deve essere:

$$\left. \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \right|_{\bar{\varepsilon}}^2 \vartheta_0^2 \sigma_\varepsilon^2 \simeq \left. \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \right|_{\bar{\varepsilon}_1}^2 \vartheta_0^2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 \quad (3.16)$$

Poiché le due derivate sono calcolate nello stesso punto quando prendiamo in considerazione la condizione (3.9), ovvero in $\vartheta = \bar{\vartheta}$, esse assumono lo stesso valore. La condizione che è necessario rispettare è dunque la seguente:

$$\sigma_{\varepsilon_1}^2 \simeq \sigma_\varepsilon^2 \quad (3.17)$$

Riassumiamo, a questo punto, le condizioni che la perturbazione da imporre alla soluzione SEA deve rispettare affinché medie e varianze delle realizzazioni deterministiche e delle realizzazioni SEA offrano informazioni riguardo alla confidenza dello stesso fenomeno.

1. L'ampiezza della perturbazione da imporre deve essere piccola.
2. Il valor medio della perturbazione deve essere nullo.
3. La varianza della perturbazione deve essere circa uguale alla varianza del processo individuato dalle realizzazioni deterministiche.

La prima condizione si realizza sicuramente, poiché le realizzazioni deterministiche, per come è strutturata la teoria della SEA, si discostano poco le une dalle altre in quanto generate da una perturbazione stocastica che ha una piccola deviazione standard, mentre le realizzazioni SEA possono essere scelte, e di fatto lo sono, tali da rispettare la condizione. Anche la seconda condizione è sicuramente verificata, in quanto, se la perturbazione è a valor medio nullo, il valor medio della grandezza perturbata è il valore nominale. Questa è esattamente quello che si verifica nelle realizzazioni deterministiche ed è una condizione che può essere sicuramente imposta alle realizzazioni SEA. La terza condizione, invece, in generale non sussiste. La varianza delle realizzazioni deterministiche non è un dato conosciuto: è noto che ha un valore piccolo, ma di fatto tale valore è ignorato. Quindi scegliere per le realizzazioni SEA una perturbazione aleatoria a media nulla e varianza piccola non garantisce che i risultati sulla confidenza cercati -la confidenza della soluzione del metodo SEA- coincidano con quelli che è effettivamente possibile calcolare con la presente tecnica: il risultato ottenuto con questo

procedimento è solo un'approssimazione di quello desiderato.

In questo capitolo è studiata la deviazione standard normalizzata -il rapporto fra deviazione standard e valore medio $\bar{\sigma} = \sigma/m$ - dell'energia soluzione del sistema (1.13) per gruppi modali strutturali connessi e per l'accoppiamento fra un sottosistema strutturale ed una cavità acustica. L'indicatore statistico è calcolato utilizzando il metodo perturbativo prima presentato. I parametri che sono perturbati sono quelli fisici -modulo di Young, densità dei materiali, ...- che appaiono nell'espressione del *coupling loss factor* della potenza entrante.

3.2 Analisi di sistemi strutturali accoppiati

In questo paragrafo è affrontato lo studio di due differenti sistemi, uno di tre e l'altro di due sottosistemi strutturali -piastre- connessi insieme.

Il *coupling loss factor* di strutture accoppiate lungo una linea è espresso dalla seguente relazione [9]:

$$\eta_{ij} = \frac{2c_{B_i} L_{ij} \tau_{ij}}{\pi \omega S_i} \quad (3.18)$$

c_{B_i} ed S_i sono rispettivamente la velocità del suono e la superficie del sottosistema i -esimo, L_{ij} è la lunghezza della giunzione fra le due strutture e τ_{ij} è il coefficiente di trasmissione d'onda. Valgono le seguenti relazioni:

$$c_{B_i} = \left(\frac{Y_i t_i^2 \omega^2}{12(1 - \nu^2) \rho_i} \right)^{1/4} \quad (3.19)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}(0) \frac{2.754 \frac{t_i}{t_j}}{1 + 3.24 \frac{t_i}{t_j}} \quad \tau_{ij}(0) = \frac{2}{\left(\sqrt{\psi_{ij}} + \frac{1}{\sqrt{\psi_{ij}}} \right)^2} \quad \psi_{ij} = \frac{\rho_i \left(\frac{Y_i}{\rho_i} \right)^{3/4} t_i^{5/2}}{\rho_j \left(\frac{Y_j}{\rho_j} \right)^{3/4} t_j^{5/2}} \quad (3.20)$$

dove Y è il modulo di Young, ρ è la densità del materiale e t è lo spessore.

La soluzione del sistema (1.13) è l'energia dei gruppi modali accoppiati. Se si considera di perturbare un parametro fisico alla volta si può calcolare la deviazione standard normalizzata delle energie corrispondenti.

Il primo passo è quello di definire una opportuna perturbazione aleatoria. In questo caso è scelta una variabile statistica, ε , adimensionale a distribuzione gaussiana, media nulla e piccolo valore della varianza, rispettando, in questo modo, le condizioni viste nel precedente paragrafo. Il secondo passo è lo sviluppo in serie

di Taylor intorno al valor medio di ε dell'energia calcolata con il metodo SEA:

$$E_i \simeq E_i|_{\varepsilon=0} + \left. \frac{\partial E_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon \quad (3.21)$$

Da questa equazione il calcolo della deviazione standard normalizzata è immediato:

$$\bar{\sigma}_{E_i} = \frac{\sigma_{E_i}}{\bar{E}_i} = \left| \frac{\left. \frac{\partial E_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}}{E_i|_{\varepsilon=0}} \right| \sigma_\varepsilon \quad (3.22)$$

Per un sistema composto da tre gruppi modali la soluzione del sistema (1.13) è la seguente:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{P_{3,in}(\eta_2\eta_{31} + \eta_{23}\eta_{31} + \eta_{21}(\eta_{31} + \eta_{32})) + P_{2,in}(\eta_{23}\eta_{31} + \eta_{21}(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32}))}{\omega(\eta_{13}((\eta_{21} + \eta_{23})\eta_3 + \eta_2(\eta_3 + \eta_{32})) + \eta_{12}(\eta_{23}\eta_3 + \eta_2(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32})) + \eta_{32}))} + \\ &\quad \frac{P_{1,in}(\eta_{23}(\eta_3 + \eta_{31}) + \eta_2(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32}) + \eta_{21}(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32}))}{+\eta_1(\eta_{23}(\eta_3 + \eta_{31}) + \eta_2(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32}) + \eta_{21}(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32}))} \\ E_2 &= \frac{P_{3,in}((\eta_1 + \eta_{13})\eta_{32} + \eta_{12}(\eta_{31} + \eta_{32})) + P_{1,in}(\eta_{13}\eta_{32} + \eta_{12}(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32}))}{\omega(\eta_{13}((\eta_{21} + \eta_{23})\eta_3 + \eta_2(\eta_3 + \eta_{32})) + \eta_{12}(\eta_{23}\eta_3 + \eta_2(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32})) + \eta_{32}))} + \\ &\quad \frac{P_{2,in}(\eta_{13}(\eta_3 + \eta_{32}) + \eta_1(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32}) + \eta_{12}(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32}))}{+\eta_1(\eta_{23}(\eta_3 + \eta_{31}) + \eta_2(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32}) + \eta_{21}(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32}))} \\ E_3 &= \frac{P_{2,in}((\eta_1 + \eta_{12})\eta_{23} + \eta_{13}(\eta_{21} + \eta_{23})) + P_{1,in}(\eta_{12}\eta_{23} + \eta_{13}(\eta_2 + \eta_{21} + \eta_{23}))}{\omega(\eta_{13}((\eta_{21} + \eta_{23})\eta_3 + \eta_2(\eta_3 + \eta_{32})) + \eta_{12}(\eta_{23}\eta_3 + \eta_2(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32})) + \eta_{32}))} + \\ &\quad \frac{P_{3,in}(\eta_{12}(\eta_2 + \eta_{23}) + \eta_1(\eta_2 + \eta_{21} + \eta_{23}) + \eta_{13}(\eta_2 + \eta_{21} + \eta_{23}))}{+\eta_1(\eta_{23}(\eta_3 + \eta_{31}) + \eta_2(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32}) + \eta_{21}(\eta_3 + \eta_{31} + \eta_{32}))} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Quando invece i gruppi modali sono due la soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{P_{1,in}(\eta_2 + \eta_{21}) + P_{2,in}\eta_{21}}{\omega(\eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_{12} + \eta_1\eta_{21})} \\ E_2 &= \frac{P_{2,in}(\eta_2 + \eta_{12}) + P_{1,in}\eta_{12}}{\omega(\eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_{12} + \eta_1\eta_{21})} \end{aligned} \quad (3.24)$$

A causa della visibile complessità delle espressioni, i calcoli sono stati eseguiti per mezzo di un programma di manipolazione simbolica e lo studio è stato sviluppato assegnando i valori numerici ai parametri del problema.

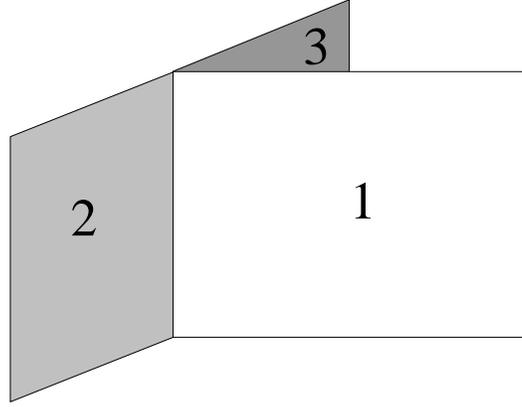


Figura 3.2: Sistema composto da tre piastre connesse insieme

Il primo modello studiato è composto da tre piastre connesse tra loro come in figura 3.2. Sono imposti i seguenti valori ai parametri fisici:

$$\begin{aligned}
 Y_1 = Y_2 = Y_3 = 6.9 \times 10^{10} \text{ Pa} \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 2700 \text{ kgm}^{-3} \\
 t_1 = t_2 = t_3 = 0.003 \text{ m} \quad \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0.01
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$S_1 = 0.4 \times 0.6 \text{ m}^2 \quad S_2 = 0.4 \times 0.3 \text{ m}^2 \quad S_3 = 0.4 \times 0.4 \text{ m}^2$$

Si analizzano i seguenti casi.

1. Si considera di imporre una perturbazione sui *coupling loss factor*, ovvero sui parametri fisici che appaiono nelle loro espressioni, ed una eccitazione su tutti e tre i sistemi.
2. Si considera ancora di imporre una perturbazione sui *coupling loss factor*, ma è eccitato solo il sistema 1.
3. Si considera di imporre una perturbazione sulla potenza entrante nel sistema 1 e si considerano eccitati anche gli altri due sistemi.
4. Si considera di imporre ancora la perturbazione sulla potenza entrante nel sistema 1 e questa è l'unica eccitazione del sistema.

Per il primo caso si considera di perturbare un parametro fisico alla volta. Di seguito sono riportate le espressioni della perturbazione dei parametri fisici:

$$\begin{aligned}
 Y_i = Y_{i_0}(1 + \varepsilon) \quad \rho_i = \rho_{i_0}(1 + \varepsilon) \\
 S_i = S_{i_0}(1 + \varepsilon) \quad t_i = t_{i_0}(1 + \varepsilon)
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

con $i, j = 1, 2, 3$ $i \neq j$. I valori nominali dei parametri fisici sono quelli dati nelle (3.25). Le potenze entranti hanno uno spettro piatto in frequenza di ampiezza

unitaria:

$$P_{1,in}(\omega) = P_{2,in}(\omega) = P_{3,in}(\omega) = 1 \text{ W} \quad (3.27)$$

È predetto il comportamento della deviazione standard normalizzata con la tecnica prima illustrata. L'espressione calcolata è funzione unicamente della pulsazione e quindi è possibile conoscere il valore della deviazione standard normalizzata per qualunque valore della frequenza. È possibile inoltre dire che l'andamento del grafico che rappresenta la funzione è monotono decrescente con la concavità verso l'alto per tutte le condizioni di perturbazione considerate. In figura 3.3a è riportato, a titolo di esempio, il grafico di una delle deviazioni standard calcolate. Per le altre si ha un andamento del grafico simile, cambiando naturalmente i valori assunti dalle funzioni. Un interesse particolare è rivolto al comportamento di questo indicatore statistico al tendere della frequenza all'infinito, $\omega \rightarrow \infty$. Per ognuna delle tre energie e qualunque sia il parametro fisico perturbato il risultato è sempre che la deviazione standard normalizzata tende a zero:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_{E_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.28)$$

La (3.28) indica che, in queste particolari condizioni, all'aumentare della frequenza la dispersione dei dati intorno al valor medio diminuisce e la confidenza della soluzione SEA aumenta. Parallelamente si può estrapolare, sempre dalla (3.28), che la soluzione del sistema (3.23) è, all'aumentare della frequenza, sempre meno sensibile a variazioni sui parametri fisici.

Per il secondo caso valgono ancora le (3.26) e per i valori nominali dei parametri

	$\bar{\sigma}_{E_1}$	$\bar{\sigma}_{E_2}$	$\bar{\sigma}_{E_3}$
Y_1	0	$0.25\sigma_\varepsilon$	$0.25\sigma_\varepsilon$
Y_2	0	0	0
Y_3	0	0	0
ρ_1	0	$0.25\sigma_\varepsilon$	$0.25\sigma_\varepsilon$
ρ_2	0	0	0
ρ_3	0	0	0
t_1	0	$0.735849 \sigma_\varepsilon$	$0.735849 \sigma_\varepsilon$
t_2	0	$0.235849 \sigma_\varepsilon$	0
t_3	0	0	$0.235849 \sigma_\varepsilon$
S_1	0	σ_ε	σ_ε
S_2	0	0	0
S_3	0	0	0

Tabella 3.1: Comportamento al limite della deviazione standard normalizzata per $\omega \rightarrow \infty$. Perturbazione applicata ai parametri fisici, eccitazione applicata al solo sistema 1

fisici le (3.25). La potenza entrante nel sottosistema 1 è scelta ancora con spettro piatto ed ampiezza unitaria, mentre, come premesso, gli altri gruppi modali non sono eccitati:

$$P_{1,in}(\omega) = 1 W \quad P_{2,in}(\omega) = P_{3,in}(\omega) = 0 W \quad (3.29)$$

Nelle figura 3.3*b*, *c* e *d* sono riportati i grafici di alcune deviazioni standard calcolate. La tavola (3.1) sintetizza il comportamento della deviazione standard normalizzata per $\omega \rightarrow \infty$. I risultati mostrano come, in particolari condizioni di eccitazione e perturbazione dei parametri, la $\bar{\sigma}_E$ tenda ad un valore costante, non nullo, il quale, a causa della linearizzazione imposta tramite lo sviluppo in serie di Taylor dell'energia, è proporzionale alla deviazione standard della variabile statistica che rappresenta la perturbazione. Negli altri casi, di nuovo, il risultato del passaggio al limite offre come risultato il valore zero. Mentre nei casi nei quali l'asintoto è zero le curve sono, come già visto in precedenza, monotone decrescenti con la concavità verso l'alto ,3.3*b* , in quelli nei quali l'asintoto assume un valore non nullo le curve sono monotone crescenti con la concavità verso il basso -figura 3.3*c* e *d*.

Come premesso gli altri due casi studiati si differenziano dai precedenti perché la perturbazione non è imposta sui *coupling loss factor*, ma sulla potenza entrante. In maniera assolutamente analoga al procedimento prima adottato si impongono le perturbazioni su ogni potenza entrante separatamente, utilizzando, per ogni prova, una delle seguenti espressioni:

$$P_{i,in}(\omega) = P_{i,in_0}(\omega)(1 + \varepsilon) \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.30)$$

Per il terzo caso i valori assunti dai parametri fisici sono quelli della (3.23), per quanto riguarda i valori nominali delle potenze entranti sono scelti a spettro piatto e di ampiezza unitaria:

$$P_{1,in_0}(\omega) = P_{2,in_0}(\omega) = P_{3,in_0}(\omega) = 1 W \quad (3.31)$$

Nella tavola (3.2) sono riportati i risultati per il comportamento asintotico della

	$\bar{\sigma}_{E_1}$	$\bar{\sigma}_{E_2}$	$\bar{\sigma}_{E_3}$
P_1	σ_ε	0	0
P_2	0	σ_ε	0
P_3	0	0	σ_ε

Tabella 3.2: Comportamento al limite della deviazione standard normalizzata per $\omega \rightarrow \infty$. Perturbazione applicata alle potenze entranti, eccitazione applicata a tutti e tre i sistemi

deviazione standard delle energie in corrispondenza delle perturbazioni su ognuna

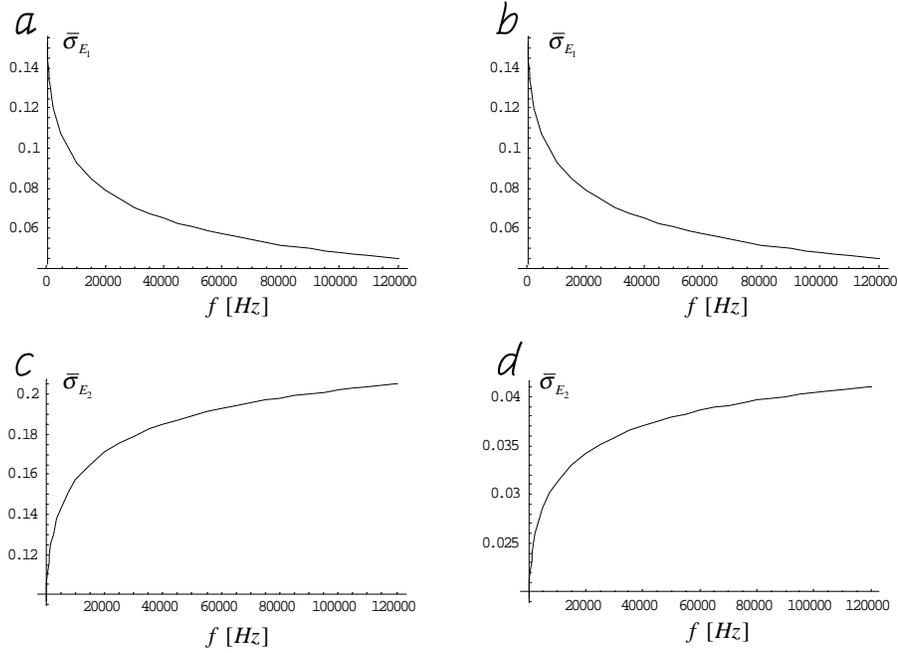


Figura 3.3: deviazione standard normalizzata di: a - E_1 perturbazione su Y_1 tutti i sottosistemi eccitati, b - E_1 perturbazione su Y_1 eccitato il primo sottosistema, c - E_2 perturbazione su Y_1 eccitato il primo sottosistema, d - E_2 perturbazione su S_1 eccitato il primo sottosistema. $\sigma_\varepsilon = 0.05$

delle potenze entranti. È possibile vedere come nel sottosistema che subisce la potenza entrante perturbata, la $\bar{\sigma}_E$, per frequenza tendente ad infinito, tende ad un valore costante non nullo, mentre la deviazione standard del sottosistema al quale è applicata una potenza non perturbata tende a zero. Per quanto riguarda l'andamento dei grafici si hanno gli stessi comportamenti già visti negli altri casi. La curva è monotona decrescente con concavità verso l'alto se la deviazione standard tende a zero, mentre è monotona crescente con concavità verso il basso se l'indicatore statistico tende ad un valore non nullo.

Il quarto caso studiato è molto simile al terzo con l'unica differenza che vengono considerate nulle le potenze che eccitano i gruppi modali 2 e 3:

$$P_{1,in_0}(\omega) = 1 \quad P_{2,in_0}(\omega) = P_{3,in_0}(\omega) = 0 \quad (3.32)$$

Il comportamento asintotico degli indicatori statistici di interesse è uguale in tutte le condizioni di perturbazione:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_{E_i} = \sigma_\varepsilon \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.33)$$

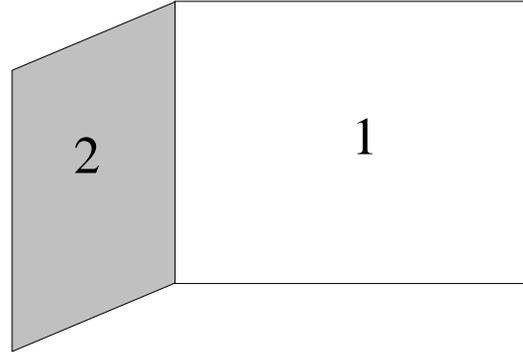


Figura 3.4: Sistema composto da due piastre connesse insieme

Al solito, tutte le curve sono monotone crescenti con concavità verso il basso.

Lo stesso studio fino ad ora sviluppato è stato condotto su un sistema composto da soli due gruppi modali -due piastre accoppiate fra loro- come illustrato in figura 3.4. I risultati ricalcano esattamente quelli visti per il sistema precedente: devono, ovviamente, essere ignorate le soluzioni che coinvolgono il sottosistema mancante.

3.3 Analisi di un sistema strutturale connesso ad una cavità acustica

In questo paragrafo è studiato un sistema formato da una piastra connessa con una cavità acustica parallelepipedica. Il sottosistema strutturale coincide interamente con una faccia del volume parallelepipedo -figura 3.5-. Il *coupling loss factor* per questo tipo di accoppiamento è espresso dalla seguente funzione [9]:

$$\eta_{sv} = \frac{\rho_a c_a \sigma_r}{\rho_s 2\pi f} \quad (3.34)$$

Il pedice s indica il sottosistema strutturale, quello v indica la cavità acustica, ρ_a è la densità dell'aria, c_a la velocità del suono in aria, ρ_s è la densità del materiale della struttura e σ_r è il coefficiente di irradiazione. Nel caso di piastra rettangolare semplicemente appoggiata sui quattro lati si hanno relazioni analitiche che esprimono il σ_r [3]. In differenti bande di frequenza queste relazioni assumono differenti espressioni che sono di seguito riportate:

$$f \leq f_{cr}/10 \quad \sigma_r = \frac{4S}{c_a^2}$$

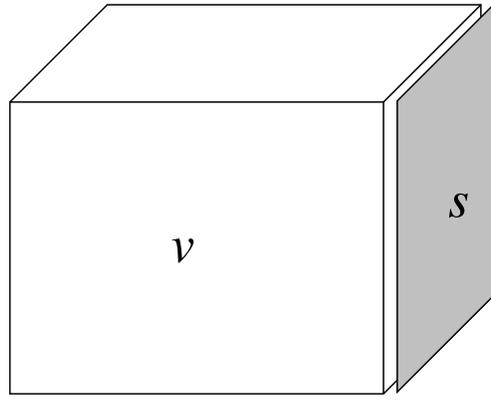


Figura 3.5: Sistema composto da una piastra connessa ad una cavità acustica

$$f_{cr}/10 < f < f_{cr}/2 \quad \sigma_r = \frac{\lambda_c^2}{S} g_1 + \frac{\mathcal{P}\lambda_c}{S} g_2$$

$$g_1 = \frac{8(1-2\alpha^2)}{\pi^4 \alpha \sqrt{1-\alpha^2}} \quad \alpha = \sqrt{\frac{f}{f_{cr}}}$$

$$g_2 = \frac{(1-\alpha^2) \log\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) + 2\alpha}{4\pi^2(1-\alpha^2)^{3/2}}$$

$$f_{cr}/2 < f < f_{cr} \quad \sigma_r = \frac{\lambda_c^2}{S} g_1 + \frac{\mathcal{P}\lambda_c}{S} g_2$$

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = \frac{(1-\alpha^2) \log\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) + 2\alpha}{4\pi^2(1-\alpha^2)^{3/2}}$$

$$f = f_{cr} \quad \sigma_r = \sqrt{\frac{L_x}{\lambda_c}} + \sqrt{\frac{L_x}{\lambda_c}}$$

$$f > f_{cr} \quad \sigma_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{f_{cr}}{f}}}$$

dove S , \mathcal{P} , L_x ed L_y sono rispettivamente la superficie, il perimetro e le lunghezze dei lati della piastra, f_{cr} è la frequenza critica¹ e λ_{cr} la corrispondente lunghezza d'onda:

$$f_{cr} = \frac{c^2}{1.8c_L t} \quad c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \lambda_{cr} = \frac{c}{f_{cr}}$$

La soluzione del sistema (1.13) è l'energia dei due sottosistemi ed è espressa dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{P_{s,in}(\eta_v + \eta_{vs}) + P_{v,in}\eta_{vs}}{\omega(\eta_s\eta_v + \eta_v\eta_{sv} + \eta_s\eta_{vs})} \\ E_v &= \frac{P_{v,in}(\eta_v + \eta_{sv}) + P_{s,in}\eta_{sv}}{\omega(\eta_s\eta_v + \eta_v\eta_{sv} + \eta_s\eta_{vs})} \end{aligned} \quad (3.35)$$

La η_{vs} è calcolata per mezzo del principio di reciprocità:

$$\eta_{vs} = \eta_{sv} \frac{n_s}{n_v} \quad (3.36)$$

dove:

$$n_s = \frac{L_x L_y}{3.6 \sqrt{\frac{Y}{\rho}} t} \quad n_v = \frac{\omega^2 L_x L_y L_z}{2\pi^2 c}$$

Con lo stesso procedimento seguito nel paragrafo precedente si calcola la deviazione standard normalizzata delle energie:

$$\bar{\sigma}_{E_s} = \frac{\sigma_{E_s}}{E_s} = \left| \frac{\frac{\partial E_s}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}}{E_s \Big|_{\varepsilon=0}} \right| \sigma_\varepsilon \quad \bar{\sigma}_{E_v} = \frac{\sigma_{E_v}}{E_v} = \left| \frac{\frac{\partial E_v}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}}{E_v \Big|_{\varepsilon=0}} \right| \sigma_\varepsilon \quad (3.37)$$

Anche in questa occasione la complessità delle espressioni costringe all'uso di un programma di manipolazione simbolica, all'omissione delle espressioni finali che sarebbero comunque non significative e all'assegnazione dei valori numerici ai parametri del problema.

I casi analizzati sono due.

1. La frequenza critica è quella particolare frequenza in corrispondenza della quale la lunghezza d'onda in aria, $\lambda = c/f$, uguaglia la lunghezza delle onde flessionali di una piastra:

$$f_{cr} = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho h(1-\nu^2)}{Eh^3}}$$

1. Si impone una perturbazione statistica sui *coupling loss factor*, quindi sui parametri fisici dei quali sono funzioni, e si considera eccitato il solo sistema strutturale.
2. Si impone una perturbazione statistica sulla potenza entrante del sistema strutturale e si considera eccitato solo questo sistema.

Per il primo caso si considera di perturbare uno alla volta i parametri fisici nel modo di seguito indicato:

$$Y = Y_0(1 + \varepsilon) \quad \rho = \rho_0(1 + \varepsilon) \quad L_x = L_{x_0}(1 + \varepsilon)$$

$$L_y = L_{y_0}(1 + \varepsilon) \quad t = t_0(1 + \varepsilon)$$

dove, al solito, ε è la variabile statistica a distribuzione gaussiana a media nulla con varianza piccola. Per quanto riguarda la trattazione numerica del problema

	Y	ρ_s	t	L_x	L_y
$\bar{\sigma}_{E_s}$	0	0	0	0	0
$\bar{\sigma}_{E_v}$	0	σ_ε	0	0	0

Tabella 3.3: Comportamento al limite della deviazione standard normalizzata dell'energia per $\omega \rightarrow \infty$. Perturbazione applicata ai parametri fisici, eccitazione applicata al solo sistema strutturale

sono scelti i seguenti valori nominali per le proprietà fisiche del sistema:

$$Y = 6.9 \times 10^{10} \text{ Pa} \quad \rho_s = 2700 \text{ kgm}^{-3} \tag{3.38}$$

$$t = 0.08 \text{ m} \quad L_x = L_y = 1 \text{ m}$$

Per la potenza entrante si hanno spettri piatti in frequenza con la seguente ampiezza:

$$P_s = 1 \text{ W} \quad P_v = 0 \text{ W} \tag{3.39}$$

Nella tavola 3.3 sono riportati i comportamenti della deviazione standard normalizzata dell'energia dei due sottosistemi per $\omega \rightarrow \infty$. Poiché esistono cinque intervalli di frequenze nei quali sono definiti i *coupling loss factor*, corrispondentemente sono definiti cinque intervalli per le energie e le relative deviazioni standard normalizzate. I valori riportati nella tavola 3.3 rappresentano il comportamento al limite della deviazione standard normalizzata definita nell'ultimo intervallo $-f > f_{cr}$. Le figure 3.6 e 3.7 mostrano i grafici delle $\bar{\sigma}_E$ nei vari intervalli di frequenze nella condizione di perturbazione imposta sulla densità del materiale della struttura. È interessante vedere che in corrispondenza della frequenza critica la deviazione standard normalizzata ha un punto di singolarità e tende ad infinito.

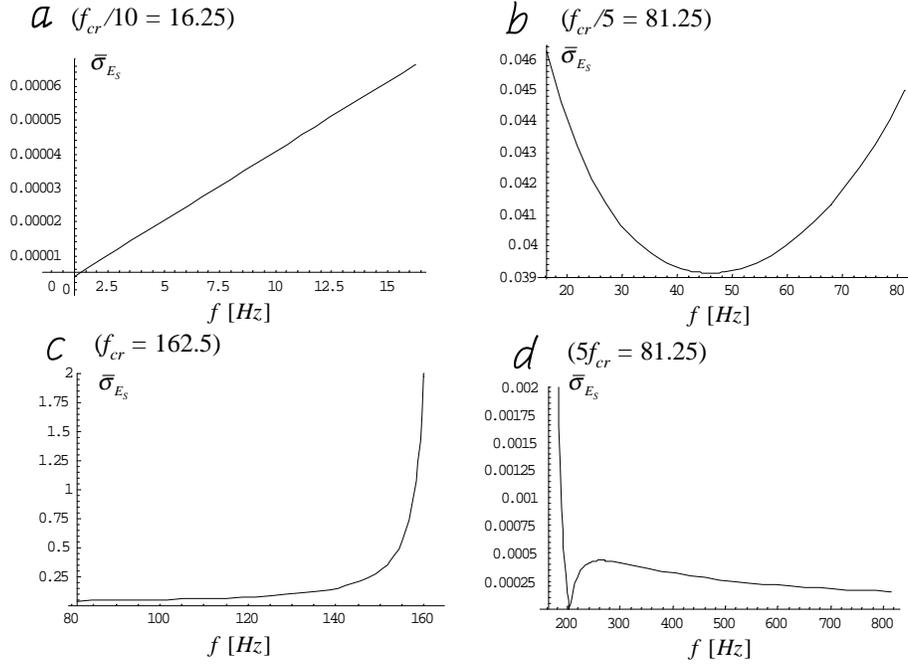


Figura 3.6: Deviazione standard normalizzata di E_s , per perturbazione su ρ_s , nei seguenti intervalli di frequenze: a - $f \leq f_{cr}/10$, b - $f_{cr}/10 < f < f_{cr}/2$, c - $f_{cr}/2 < f < f_{cr}$, d - $f_{cr} < f < 5f_{cr}$. $f_{cr} = 162.5$, $\sigma_\varepsilon = 0.05$

Questo fenomeno si riscontra anche per perturbazione sul modulo di Young e sullo spessore della struttura, ma al contrario non appare per perturbazioni sulle dimensioni L_x ed L_y .

Per il secondo caso studiato valgono ancora le (3.39) mentre per le potenze entranti si hanno le seguenti relazioni:

$$P_{s,in}(\omega) = P_{s,in_0}(\omega)(1 + \varepsilon) \quad P_{s,in_0} = 1 \quad P_{v,in} = 0$$

La deviazione standard normalizzata per le energie di entrambi i gruppi modali è costante e vale σ_ε per tutti e cinque gli intervalli di frequenza:

$$\bar{\sigma}_{E_s}(\omega) = \sigma_\varepsilon \quad \bar{\sigma}_{E_v}(\omega) = \sigma_\varepsilon \quad (3.40)$$

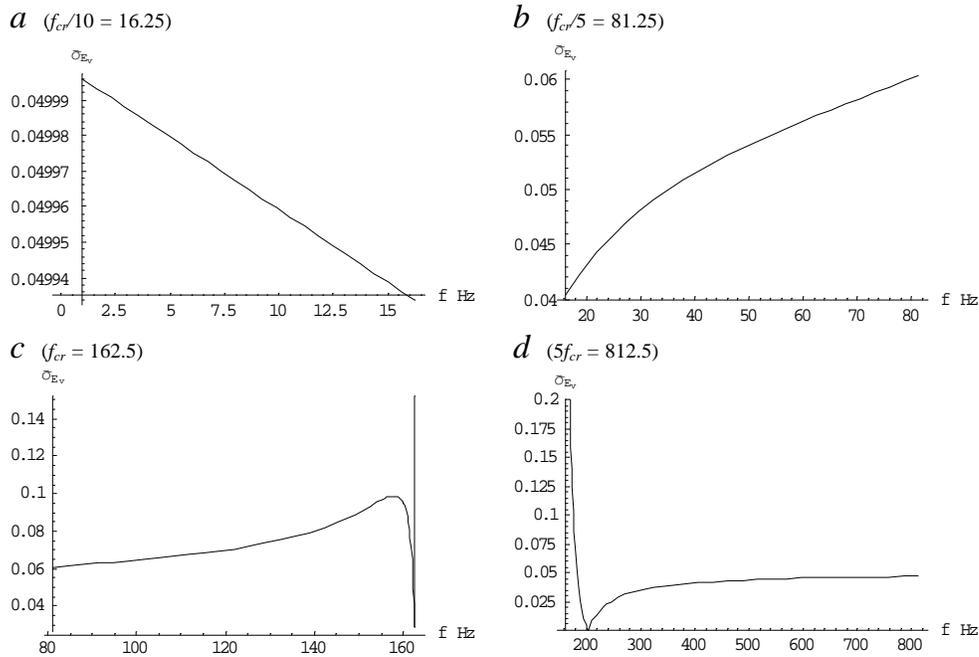


Figura 3.7: Deviazione standard normalizzata di E_v , per perturbazione su ρ_s , nei seguenti intervalli di frequenze: a - $f \leq f_{cr}/10$, b - $f_{cr}/10 < f < f_{cr}/2$, c - $f_{cr}/2 < f < f_{cr}$, d - $f_{cr} < f < 5f_{cr}$. $f_{cr} = 162.5$, $\sigma_\varepsilon = 0.05$

3.4 Commenti riassuntivi sull'analisi perturbativa statistica delle equazioni della "Statistical Energy Analysis"

L'analisi fin qui condotta, lo ricordiamo nuovamente, ha un doppio significato. Quando si considerano perturbazioni sui parametri fisici dei sottosistemi, da un lato si sta cercando, nei limiti precedentemente esposti, di dare una risposta al problema della confidenza dei risultati della SEA; dall'altro si ottengono informazioni sulla sensibilità del sistema di equazioni (1.13): quanto un errore sul calcolo del *coupling loss factor* o della potenza entrante ha ripercussioni sulla soluzione del problema?

I risultati ottenuti nei paragrafi precedenti mostrano come, per nessuna combinazione di perturbazione ed eccitazione imposta al sistema, la dispersione dei dati intorno al valor medio tende a divergere. Questo sicuramente lavora a vantaggio della confidenza dei risultati. L'unica situazione nella quale la deviazione standard normalizzata tende all'infinito è in corrispondenza della frequenza critica per sistemi accoppiati strutturali-acustici quando ad essere perturbati

sono o il modulo di Young o la densità del materiale o lo spessore del sottosistema strutturale. Questo fenomeno non si verifica quando ad essere perturbate sono invece le dimensioni della struttura.

Per i sistemi strutturali studiati, al crescere della frequenza, la deviazione standard normalizzata tende ad annullarsi o a raggiungere un valore asintotico non nullo proporzionale -a motivo della linearizzazione eseguita- alla deviazione standard della perturbazione, quindi ad un parametro che offre una misura della grandezza della perturbazione. Più nel dettaglio si è visto che gioca un ruolo determinante l'eccitazione. Per un gruppo modale direttamente eccitato tramite una potenza non affetta da perturbazione, comunque si perturbino i parametri fisici dell'intero sistema, la dispersione dei dati intorno alla soluzione SEA tende ad annullarsi al crescere della frequenza. Quando, invece, un sottosistema non è direttamente eccitato, per particolari condizioni di perturbazione dei parametri fisici, la deviazione standard normalizzata della soluzione SEA tende ad un valore costante proporzionale alla deviazione standard della perturbazione stessa. Queste particolari condizioni sono: deve essere aleatorio uno dei parametri fisici del sottosistema eccitato. Come si vede dalla tavola 3.1, per quanto riguarda lo spessore dei sottosistemi strutturali, alla regola appena enunciata si aggiungono dei vincoli sugli spessori dei sottosistemi non eccitati. Quando ad essere perturbata è, invece, la potenza entrante, la dispersione dell'energia del sottosistema eccitato tende ad un valore costante proporzionale alla deviazione standard della perturbazione imposta.

Comportamento analogo si manifesta nel sistema accoppiato acustico strutturale studiato.

Riguardo al caso di perturbazione sulla potenza entrante è utile un ulteriore approfondimento. La potenza entrante, lo ricordiamo nuovamente, è sì un termine noto delle equazioni della SEA, ma che dipende da un dato, l'intensità della forza, e da un coefficiente legato al sistema stesso, la parte reale della mobilità. L'analisi di sensibilità è qui lo studio di quanto la soluzione risenta di una naturale difficoltà, ovvero quella di essere a conoscenza di un valore certo della potenza entrante ignorando *a priori* la soluzione del problema. I risultati mostrano come il caso di perturbazione sulla potenza entrante sia di fatto quello che comporta una minore confidenza sulla soluzione nella regione ad alta frequenza. Infatti il valore della deviazione standard normalizzata corrispondente a questa perturbazione è quella massima calcolata, uguale al valore della deviazione standard della perturbazione. Pur tuttavia il fatto che la dispersione dei risultati sia al massimo pari a quella dei dati è confortante e nella peggiore delle ipotesi la confidenza sulla soluzione è uguale a quella dei termini noti perturbati.

In conclusione di seguito è riepilogato il comportamento della deviazione standard normalizzata in un elenco sinottico.

- La deviazione standard normalizzata, al tendere della frequenza all'infinito, assume sempre o il valore costante non nullo o il valore nullo.
- La deviazione standard normalizzata assume valore infinito in corrispondenza della frequenza critica di sistemi accoppiati strutturali-acustici quando si perturbano o il modulo di Young o lo spessore o la densità del materiale del sottosistema strutturale.
- Per i gruppi modali direttamente eccitati affetti o non da perturbazione stocastiche dei parametri fisici, comunque connessi ad altri sottosistemi comunque perturbati aleatoriamente, la dispersione dei dati tende sempre ad annullarsi per frequenza tendente ad infinito.
- Per i gruppi modali non direttamente eccitati, quando è affetto da perturbazione aleatoria qualcuno dei parametri fisici del sottosistema eccitato, la dispersione dei dati tende ad un valore non nullo costante per $\omega \rightarrow \infty$ -tavole 3.1 e 3.3-.
- Per i gruppi modali non direttamente eccitati ed affetti da perturbazione statistica nei parametri fisici la dispersione dei dati, in generale, per $\omega \rightarrow \infty$, tende ad annullarsi, ed in casi particolari ad un valore non nullo -vedi tavole (3.1) e (3.3)-.
- Per i gruppi modali direttamente eccitati con potenza entrante perturbata in maniera aleatoria la deviazione standard normalizzata tende ad un valore costante non nullo per $\omega \rightarrow \infty$ -vedi tavola (3.2)-.

Capitolo 4

Introduzione al problema della confidenza dell'energia e del flusso di energia in sistemi deterministici

Nei precedenti capitoli lo studio è stato concentrato sulle equazioni del modello SEA, sia per quanto riguarda l'analisi dei limiti di utilizzo sia per l'indagine rivolta al comportamento della soluzione SEA nel caso di perturbazione delle equazioni del modello. Il presente capitolo ed i successivi 5, 6 e 7 si discostano da questo approccio direttamente indirizzato alla SEA. Lo scopo è quello di fornire delle informazioni sul livello di confidenza dell'energia di sistemi meccanici quando si considera di imporre perturbazioni aleatorie ai parametri fisici che appaiono nei rispettivi modelli. L'energia che qui si considera è quella ottenuta dalla soluzione del sistema di equazioni differenziali che predicono il comportamento dei sistemi meccanici.

Sebbene non si lavori più in un ambito strettamente SEA, in quanto le equazioni investigate non sono quelle di questo modello, i risultati che si ottengono sono assolutamente fruibili nel campo di analisi SEA. Infatti, la procedura per ottenere le informazioni sulla confidenza dei risultati è rigorosamente legata alla tecnica matematica con la quale si passa dalle equazioni della meccanica classica a quelle del modello SEA. Le medie che Lyon considera sono: una media di insieme su una popolazione di sistemi simili ed una media spaziale.

L'indagine coinvolge differenti tipi di sistemi e differenti tipi di perturbazioni. La suddivisione più generale è fra sistemi isolati e sistemi accoppiati. Riguardo al primo gruppo lo studio è sviluppato considerando di applicare una piccola perturbazione aleatoria ad un parametro fisico del sistema. Per il secondo gruppo si considera un'ulteriore ramificazione: la perturbazione aleatoria è pensata o sui parametri fisici distribuiti dei sistemi accoppiati o sui parametri fisici del giunto che connette i sistemi. Dove è possibile, il risultato è fornito attraverso una trattazione teorica. Sempre è calcolata una soluzione numerica basata su un metodo Monte Carlo quando ciò è significativo.

Entrando più nel dettaglio, le grandezze sottoposte ad indagine sono la media e la deviazione standard dell'energia, E , e del flusso di energia, P , dei sistemi considerati. Il livello di confidenza è quantificato attraverso un coefficiente chiamato fattore di confidenza, f_c , definito come il rapporto fra la media e la deviazione standard che qui è solo presentato, ma in seguito è trattato in maniera più approfondita.

I passaggi logici seguiti per il calcolo del fattore di confidenza sono di seguito elencati:

- calcolo del campo di velocità e di spostamento associato al campo di forze esterne imposte al sistema,
- calcolo dell'energia e del flusso di energia a partire dalle velocità e dagli spostamenti noti,
- perturbazione aleatoria di un parametro fisico nell'espressione dell'energia e del flusso di energia,
- calcolo della media e della deviazione standard, quindi del fattore di confidenza, delle grandezze energetiche di interesse.

Il fattore di confidenza è, in generale, funzione dei parametri del sistema e della frequenza. Una particolare attenzione è rivolta allo studio del suo comportamento in regioni di alta frequenza. È quindi studiato in maniera analitica il comportamento del seguente limite:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} f_c$$

Come descritto, quindi, relativamente alla media di insieme sulla popolazione di sistemi simili si ha accordo fra la SEA e la presente trattazione. Unica differenza fra i momenti statistici qui calcolati e quelli incognite della SEA è la media spaziale: qui è valutato il fattore di confidenza in un punto del dominio, lì è offerto il valore mediato su tutto il sistema.

Questa dissonanza merita dei commenti. L'analisi che in questo lavoro è sviluppata presenta dei risultati più dettagliati rispetto alle informazioni che può fornire la SEA: il fattore di confidenza è calcolato in più punti del sistema e a seconda delle varie posizioni nelle quali sono applicati i carichi o nelle quali i diversi sottosistemi si connettono, assume comportamenti differenti. L'operazione di media spaziale non è qui di fatto svolta perché, essendo l'attività indirizzata verso lo studio delle equazioni deterministiche sia con sviluppi teorici che numerici, l'onerosità del calcolo la renderebbe, in generale, proibitiva. Esiste, comunque, una stretta corrispondenza fra i risultati ottenuti con la presente analisi e quelli che si otterrebbero con il calcolo delle medie spaziali. La tavola 4.1 mostra i risultati statistici, media e varianza, rispettivamente in presenza o in assenza di media spaziale -i pedici i e j indicano due generici punti del dominio-: Poiché le perturbazioni stocastiche analizzate sono omogenee, come i parametri fisici che

	<i>con media spaziale</i>	<i>senza media spaziale</i>
<i>media</i>	$\frac{1}{N} \sum_i \langle E_i \rangle_{\omega_n}$	$\langle E_i \rangle_{\omega_n}$
<i>varianza</i>	$\frac{1}{N^2} \left[\sum_i \left(\langle E_i^2 \rangle_{\omega_n} - \langle E_i \rangle_{\omega_n}^2 \right) - \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \langle E_i \rangle_{\omega_n} \langle E_j \rangle_{\omega_n} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \langle E_i E_j \rangle_{\omega_n} \right]$	$\langle E_i^2 \rangle_{\omega_n} - \langle E_i \rangle_{\omega_n}^2$

Tabella 4.1: Corrispondenza fra le medie e le varianze sulla popolazione di sistemi simili in presenza ed assenza di medie spaziali

influenzano, non c'è motivo di credere che in differenti posizioni si abbia un differente comportamento della media dell'energia, a meno che non si considerino punti particolari come quello di applicazione della forza esterna.

Per quanto riguarda la varianza tornano in parte le stesse considerazioni viste per il valor medio. Appare, inoltre, una somma di prodotti misti per la quale valgono ancora le stesse osservazioni, ed un termine di covarianze che, essendo legato alla cross-correlazione, tende rapidamente a zero quando la distanza fra i punti i e j è superiore alla lunghezza d'onda considerata.

4.1 Perturbazione dei parametri fisici: statistica dell'energia e del flusso di energia

Consideriamo un generico parametro fisico -modulo di Young, densità del materiale, ...- ed indichiamolo con il simbolo ϑ . Imponiamo a questo parametro una piccola perturbazione aleatoria. Questa operazione è rappresentata dalla seguente espressione matematica:

$$\vartheta = \vartheta_0(1 + \varepsilon) \quad (4.1)$$

dove ϑ_0 è un valore nominale del parametro fisico e ε una generica variabile aleatoria adimensionale. Con il termine piccolo si vuole indicare che i valori assunti da ε non hanno una grande dispersione intorno al valor medio. Se si impone

la (4.1) nell'espressione dell'energia e del flusso di energia queste due grandezze diventano processi stocastici legati da una particolare relazione funzionale con la ε . Per quanto riguarda i momenti statistici dell'energia e del flusso di energia questi, in generale, possono essere calcolati, nota la densità di probabilità dei rispettivi processi, attraverso i seguenti integrali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E^n(\varepsilon, \omega) p(E, \omega) dE \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P^n(\varepsilon, \omega) p(P, \omega) dP \quad (4.2)$$

dove $p(\cdot)$ è la funzione densità di probabilità. Poiché la relazione funzionale che lega la variabile statistica ε e la grandezza energetica è complicata e non lineare, in generale non c'è possibilità di calcolare tramite sviluppi teorici, ovvero in forma chiusa, la densità di probabilità dell'energia e della potenza trasmessa, quindi i loro momenti statistici.

Tuttavia, dal momento che è presa in considerazione una piccola perturbazione, è possibile pensare di sviluppare in serie di Taylor nell'intorno del valor medio di ε le grandezze in studio. Si ottengono così le seguenti espressioni lineari dell'energia e del flusso di energia:

$$E = E|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} + \left. \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \quad P = P|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} + \left. \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=\bar{\varepsilon}} (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \quad (4.3)$$

Queste nuove relazioni funzionali permettono di procedere al calcolo della media e della deviazione standard che interessano a partire dalla conoscenza della densità di probabilità della perturbazione, qualunque essa sia. Unico limite

Più nel dettaglio, lo studio è svolto eleggendo come variabile aleatoria una a densità di probabilità gaussiana e media nulla. La scelta vuole essere rappresentativa al massimo. La distribuzione gaussiana, a motivo del teorema del limite centrale, è quella che, a fronte di un gran numero di contributi aleatori al fenomeno, meglio descrive il comportamento statistico dello stesso. Inoltre è la distribuzione che governa la manifestazione degli errori nelle misure, fenomeno che ha fortissime analogie con quello che è qui considerato. La media nulla indica, in relazione all'espressione (4.1), che il valor medio del parametro fisico perturbato è il valore nominale. In conseguenza a questa particolare scelta si può procedere direttamente al calcolo delle espressioni simboliche di media e deviazione standard delle (4.3). La linearità delle relazioni e l'essere gaussiano della ε implicano che anche l'energia ed il flusso di energia siano processi gaussiani. Di seguito sono riportate le espressioni dei momenti statistici cercati:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= E|_{\varepsilon=0} & \sigma_E &= \left. \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \sigma_\varepsilon \\ \bar{P} &= P|_{\varepsilon=0} & \sigma_P &= \left. \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \sigma_\varepsilon \end{aligned} \quad (4.4)$$

Le (4.4) mostrano come le deviazioni standard delle grandezze energetiche siano, ovviamente, funzioni lineari della deviazione standard della perturbazione. Sia il valor medio che la deviazione standard sono funzioni dei parametri del sistema e della frequenza.

4.2 Definizione di un fattore di confidenza

Per comprendere se la media può rappresentare in maniera idonea il comportamento dell'energia e del flusso di energia, un fattore di confidenza, può essere definito nella seguente maniera:

$$f_c = \left| \frac{m}{\sigma} \right| \quad (4.5)$$

dove m indica la media e σ la deviazione standard della grandezza.

Il fattore di confidenza controlla la dimensione della dispersione dei dati intorno al valor medio. Un valore alto per il fattore di confidenza indica una piccola dispersione dei dati, al contrario un valore piccolo di f_c indica una grande dispersione. Partendo dalle (4.4) è possibile scrivere le relazioni analitiche del fattore di confidenza dell'energia e del flusso di energia nei limiti delle semplificazioni scelte. Specializzando la (4.5) sulle (4.4) si ha:

$$f_{c_E} = \left| \frac{E|_{\varepsilon=0}}{\left. \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad f_{c_P} = \left| \frac{P|_{\varepsilon=0}}{\left. \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad (4.6)$$

Il comportamento del fattore di confidenza, come si vede chiaramente dalla (4.6), è legato in modo complicato alla risposta del sistema meccanico calcolata per un particolare valore della perturbazione statistica, $\varepsilon = 0$, ed al reciproco della deviazione standard della stessa perturbazione, σ_ε . In generale, quindi, il fattore di confidenza è una funzione complicata dei parametri fisici del sistema e della frequenza. Come già premesso lo studio di f_c è sviluppato, dove possibile limitatamente alla complicazione dei calcoli, su tutto l'intervallo di frequenze di interesse, ma è, comunque, sempre focalizzato sul comportamento in regioni di alti valori della frequenza.

Capitolo 5

Perturbazioni aleatorie in sistemi continui isolati: guide d'onda e sistemi risonanti

Nel presente capitolo è studiato il comportamento del fattore di confidenza dell'energia e del flusso di energia di sistemi continui quando alcuni parametri fisici di questi sono perturbati in maniera aleatoria. I sistemi studiati sono una guida d'onda longitudinale e due sistemi risonanti continui: una trave ed una piastra.

5.1 Il fattore di confidenza dell'energia di una guida d'onda

Il sistema di onde piane longitudinali che si propaga in un'asta di dimensione infinita nella direzione delle x crescenti -figura (5.1)- è descritto dalla seguente equazione:

$$w(x, t) = W e^{-\eta k x} e^{j(\omega t - k x)} \quad (5.1)$$

w è lo spostamento nella direzione x ed η è il coefficiente di smorzamento. Essendo un problema di onde longitudinali si ha che:

$$k = \frac{\omega}{c_L} = \frac{\omega \sqrt{\rho}}{\sqrt{Y}}$$

dove c_L è la velocità delle onde longitudinali, ρ ed Y rispettivamente la densità ed il modulo di Young del materiale. La densità di energia totale in un punto si calcola con la seguente equazione:

$$E(x, t) = \rho \dot{w}^*(x, t) \dot{w}(x, t) \quad (5.2)$$

'*' indica la grandezza complessa coniugata.

In base alla (5.1) la (5.2) diventa:

$$E(x, t) = \rho \omega^2 |W|^2 e^{-2\eta k x} \quad (5.3)$$

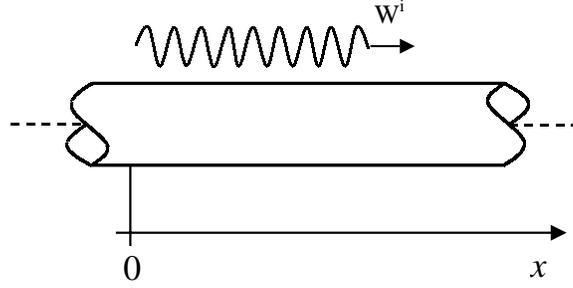


Figura 5.1: Guida d'onda longitudinale isolata

Si consideri di perturbare in maniera aleatoria e singolarmente i seguenti parametri fisici che appaiono nell'espressione della densità di energia:

$$Y = Y_0(1 + \varepsilon) \quad \rho = \rho_0(1 + \varepsilon) \quad \eta = \eta_0(1 + \varepsilon) \quad (5.4)$$

con ε variabile stocastica scelta a distribuzione gaussiana e a media nulla, $\bar{\varepsilon} = 0$. In base alle (4.6) è possibile calcolare il fattore di confidenza. Il procedimento per il suo calcolo consiste nel sostituire, una alla volta, le (5.4) nella (5.3) e quindi di calcolare direttamente f_c .

Relativamente al caso di perturbazione del modulo di Young definendo k_0 il numero d'onda nominale, ovvero quello corrispondente al valore nominale del modulo di Young, Y_0 , si può scrivere la seguente relazione:

$$E|_{\varepsilon=0} = \rho\omega^2 |W|^2 e^{-2\eta k_0 x} \quad (5.5)$$

Per la regola di derivazione delle funzioni composte deve valere che:

$$\frac{\partial E}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial E}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \quad (5.6)$$

Può essere, quindi, calcolata la derivata in corrispondenza del valor medio della ε e si ha la seguente equazione:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \rho\omega^2 |W|^2 k_0 \eta x e^{-2\eta k_0 x} \quad (5.7)$$

Quindi il fattore di confidenza per la (5.5) e per la (5.7) può essere scritto nel modo seguente:

$$f_c = \left| \frac{\sqrt{Y_0}}{\omega \eta x \sqrt{\rho}} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad (5.8)$$

Passando ad esaminare il caso di perturbazione sulla densità del materiale il procedimento logico rimane invariato. In questo caso k_0 corrisponde al numero d'onda nominale relativo al valore nominale della densità, ρ_0 . Si calcolano, quindi, le seguenti espressioni:

$$E|_{\varepsilon=0} = \rho_0 \omega^2 |W|^2 e^{-2\eta k_0 x} \quad (5.9)$$

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \rho_0 \omega^2 |W|^2 (1 - \eta k_0 x) e^{-2\eta k_0 x} \quad (5.10)$$

ed infine il fattore di confidenza:

$$f_c = \left| \frac{1}{1 - \omega \eta x \sqrt{\frac{\rho_0}{Y}}} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad (5.11)$$

L'ultimo caso studiato è quello di perturbazione sul coefficiente di dissipazione. Con la stessa metodologia seguita per i due casi precedenti si calcolano le relazioni che seguono:

$$E|_{\varepsilon=0} = \rho \omega^2 |W|^2 e^{-2\eta_0 k x} \quad (5.12)$$

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -2\rho \omega^2 |W|^2 k x \eta_0 e^{-2\eta_0 k x} \quad (5.13)$$

e quindi il fattore di confidenza assume la seguente espressione:

$$f_c = \left| \frac{\sqrt{Y}}{2\omega \eta_0 x \sqrt{\rho}} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad (5.14)$$

Le equazioni (5.8), (5.11) e (5.14) offrono il valore di f_c della densità di energia per la guida d'onda longitudinale rispettivamente per perturbazione aleatoria sul modulo di Young, sulla densità del materiale e sul coefficiente di dissipazione della struttura. Questi risultati possono essere utilmente discussi esaminando il comportamento del fattore di confidenza al variare di x con ω fissato ed al variare di ω ad x fissato.

Nel primo caso, ovvero per ω fissato e finito, f_c è massimo nell'origine delle ascisse, $x = 0$, e diminuisce in modo monotono all'aumentare del valore di x . Più nel dettaglio, mentre se ad essere perturbati sono il modulo di Young ed il coefficiente di dissipazione, in corrispondenza dell'origine del sistema di riferimento il fattore di confidenza assume valore infinito, per perturbazione sulla densità il valore assunto è $f_c = 1/\sigma_\varepsilon$. Per $x \rightarrow \infty$, invece, in tutti e tre i casi di perturbazione il fattore di confidenza tende a zero. Questo comportamento rispetta un'aspettativa: più ci si allontana dalla sorgente del segnale, più l'informazione viene a deteriorarsi in quanto l'incertezza è attribuita al mezzo attraverso il quale il segnale si propaga. Nel secondo caso, quindi, per x finito e fissato, all'aumentare della frequenza il

fattore di confidenza diminuisce in modo monotono. Il massimo della confidenza si ha quindi per valori di frequenza bassi, mentre per tutti e tre i casi di perturbazione, quando $\omega \rightarrow \infty$, il fattore di confidenza tende a zero. In questo caso il risultato mostra un comportamento più difficile da prevedere: più le lunghezze d'onda sono piccole più si perde informazione.

5.2 Il fattore di confidenza del flusso di energia di una guida d'onda

Si considera lo stesso sistema di onde studiato nel paragrafo precedente -figura (5.1)-. La trazione lungo l'asta, se S è la sua sezione, è data dalla seguente equazione:

$$N(x, t) = YS \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5.15)$$

la quale per la (5.1) diventa:

$$N(x, t) = -\omega S \sqrt{Y\rho} (\eta + j) W e^{-(\eta+j)kx} e^{j\omega t} \quad (5.16)$$

In questo paragrafo si è interessati allo studio del flusso di energia lungo la guida d'onda. Il valor medio nel tempo di tale grandezza è data, in ogni posizione, dalla seguente equazione -vedi (1.5)-:

$$P(x) = \frac{1}{2} \text{Re}\{N\dot{w}^*\} \quad (5.17)$$

Ricordiamo che N e \dot{w}^* indicano rispettivamente il fasore della trazione ed il complesso coniugato del fasore della velocità. Utilizzando la (5.16) la (5.17) diventa:

$$P(x) = -\frac{1}{2} \omega S \sqrt{Y\rho} |W|^2 e^{-2\eta kx} \quad (5.18)$$

Anche in questo caso si consideri di perturbare in maniera aleatoria ed uno alla volta il modulo di Young, la densità del materiale ed il coefficiente di dissipazione dell'asta, secondo le regole viste nella (5.4). La variabile statistica ε è scelta ancora a distribuzione gaussiana e media nulla. Il fattore di confidenza del flusso di energia è calcolato attraverso la (4.6).

In relazione alla perturbazione imposta sul modulo di Young, ricordando il significato dato al termine k_0 di valore nominale per il numero d'onda, è calcolato il fattore di confidenza tramite i seguenti passaggi. Si ha:

$$P|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{2} \omega S \sqrt{Y_0\rho} |W|^2 e^{-2\eta k_0 x} \quad (5.19)$$

e

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{2} \omega S \sqrt{\rho} |W|^2 \left(\frac{\sqrt{Y_0}}{2} + \eta x \omega \sqrt{\rho} \right) e^{-2\eta k_0 x} \quad (5.20)$$

Quindi il fattore di confidenza ha la seguente espressione:

$$f_c = \left| \frac{2\sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_0} + 2\eta x \omega \sqrt{\rho}} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad (5.21)$$

Per perturbazione sulla densità del materiale, ricordando al solito il significato da attribuire al simbolo k_0 , si hanno le seguenti relazioni:

$$P|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{2} \omega S \sqrt{Y \rho_0} |W|^2 e^{-2\eta k_0 x} \quad (5.22)$$

e

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{2} \omega S \rho_0 \sqrt{E} |W|^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{\rho_0}} - \frac{\eta x \omega}{\sqrt{Y}} \right) e^{-2\eta k_0 x} \quad (5.23)$$

Il fattore di confidenza ha, quindi, il seguente valore:

$$f_c = \left| \frac{2}{1 - \eta x \omega \sqrt{\frac{\rho}{Y}}} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad (5.24)$$

Infine, quando ad essere perturbato è il coefficiente di dissipazione si hanno:

$$P|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{2} \omega S \sqrt{Y \rho} |W|^2 e^{-2\eta_0 k x} \quad (5.25)$$

e

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \omega^2 S \rho x \eta_0 |W|^2 e^{-2\eta_0 k x} \quad (5.26)$$

Il fattore di confidenza per questo tipo di perturbazione è:

$$f_c = \left| \frac{\sqrt{Y}}{2\eta_0 x \omega \sqrt{\rho}} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad (5.27)$$

Anche in questa occasione è utile sintetizzare e discutere le (5.21), (5.24) e (5.27). Queste offrono il fattore di confidenza per il flusso di energia in una guida d'onda longitudinale quando sono aleatoriamente perturbati rispettivamente il modulo di Young, la densità ed il coefficiente di dissipazione del materiale.

Quando ω assume un valore finito e fissato, si vede dalle tre equazioni che il fattore di confidenza assume il valore massimo in corrispondenza all'origine del sistema di riferimento e tende monotonicamente a diminuire con il crescere di x . Per $x = 0$, quando è perturbato il coefficiente di dissipazione il fattore di

confidenza tende all'infinito, quando invece sono perturbati il modulo di Young e la densità il fattore di cofidenza assume il seguente valore: $f_c = 2/\sigma_\varepsilon$. Al tendere di x all'infinito, invece, per tutti e tre i tipi di perturbazione si ha che $f_c \rightarrow 0$. Quando ad assumere un valore finito e fissato è la x il fattore di confidenza mostra all'aumentare di ω un andamento monotono decrescente. Per bassi valori della frequenza si hanno, quindi, alti valori di f_c . In particolare, qualunque sia il tipo di perturbazione imposto, per $\omega \rightarrow \infty$ il fattore di confidenza tende a zero.

Nella tavola (5.1) sono riassunte tutte le espressioni ottenute per i fattori di confidenza e nella tavola (5.2) i valori numerici che f_c assume nelle condizioni studiate.

	<i>densità di energia</i>	<i>flusso di energia</i>
$Y = Y_0(1 + \varepsilon)$	$\left \frac{\sqrt{Y_0}}{\omega \eta x \sqrt{\rho}} \right \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$	$\left \frac{2\sqrt{Y_0}}{\sqrt{Y_0 + 2\eta x \omega \sqrt{\rho}}} \right \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$
$\rho = \rho_0(1 + \varepsilon)$	$\left \frac{1}{1 - \omega \eta x \sqrt{\frac{\rho_0}{Y}}} \right \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$	$\left \frac{2}{1 - \eta x \omega \sqrt{\frac{\rho}{Y}}} \right \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$
$\eta = \eta_0(1 + \varepsilon)$	$\left \frac{\sqrt{Y}}{2\omega \eta_0 x \sqrt{\rho}} \right \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$	$\left \frac{\sqrt{Y}}{2\eta_0 x \omega \sqrt{\rho}} \right \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$

Tabella 5.1: Valori del fattore di confidenza della densità di energia e del flusso di energia per una guida d'onda longitudinale in diverse condizioni di perturbazione aleatoria

5.3 Il fattore di confidenza dell'energia di un sistema risonante

Il sistema considerato è un sistema continuo, limitato ed eccitato in un generico punto da una forza, F_1 , puntuale ed armonica, figura (5.2). Il modulo di Young del sistema è considerato perturbato in maniera statistica, $Y = Y_0(1 + \varepsilon)$. La

	<i>densità di energia</i>			<i>flusso di energia</i>		
	$x = 0$ ω fissato e finito	$x \rightarrow \infty$ ω fissato e finito	$\omega \rightarrow \infty$ x fissato e finito	$x = 0$ ω fissato e finito	$x \rightarrow \infty$ ω fissato e finito	$\omega \rightarrow \infty$ x fissato e finito
$Y = Y_0(1 + \varepsilon)$	∞	0	0	$2/\sigma_\varepsilon$	0	0
$\rho = \rho_0(1 + \varepsilon)$	$1/\sigma_\varepsilon$	0	0	$2/\sigma_\varepsilon$	0	0
$\eta = \eta_0(1 + \varepsilon)$	∞	0	0	∞	0	0

Tabella 5.2: Valori numerici del fattore di confidenza della densità di energia e del flusso di energia per una guida d'onda longitudinale in diverse condizioni di perturbazione aleatoria

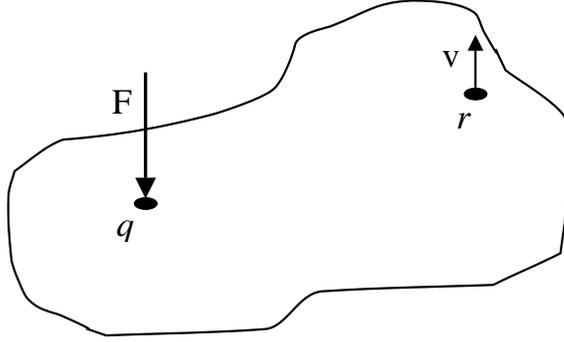


Figura 5.2: Sistema risonante isolato

variabile statistica ε è scelta adimensionale, a distribuzione gaussiana e media nulla. La mobilità di un sistema risonante può essere rappresentata mediante l'espressione che segue:

$$M_{qr} = \omega \Theta \sum_n \frac{\varphi_n(x_q) \varphi_n(x_r)}{\omega_n^2 \eta + j(\omega^2 - \omega_n^2)} \quad (5.28)$$

dove q e r sono rispettivamente gli indici del punto di rilevazione e di eccitazione, Θ è un coefficiente che dipende dai parametri del sistema, φ_n sono le autofunzioni ed ω_n le pulsazioni proprie del sistema. La mobilità può essere riscritta nel modo seguente, separando la parte reale da quella immaginaria:

$$M_{qr} = \omega \Theta \sum_n (A_n - jB_n) \quad (5.29)$$

dove per A_n e B_n valgono le seguenti espressioni:

$$A_n = \frac{\varphi_n(x_q) \varphi_n(x_r) \omega_n^2 \eta}{\omega_n^4 \eta^2 + (\omega^2 - \omega_n^2)^2} \quad B_n = \frac{\varphi_n(x_q) \varphi_n(x_r) (\omega^2 - \omega_n^2)}{\omega_n^4 \eta^2 + (\omega^2 - \omega_n^2)^2} \quad (5.30)$$

In base alla (5.29) il modulo della mobilità, grandezza che sarà in seguito utilizzata, è:

$$|M_{qr}| = \omega \Theta \left[\left(\sum_n A_n \right)^2 + \left(\sum_n B_n \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5.31)$$

La densità di energia totale calcolata nel punto di rilevazione q è:

$$E_q = \rho v_q v_q^* = \rho |M_{qr}|^2 |F_r|^2 \quad (5.32)$$

Per calcolare il fattore di confidenza si utilizza di nuovo la (4.6) specializzata a questo particolare caso.

In base alla regola di derivazione delle funzioni composte è possibile scrivere la seguente uguaglianza:

$$\frac{\partial E_q}{\partial \varepsilon} = \sum_n \frac{\partial E_q}{\partial \omega_n} \frac{\partial \omega_n}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \quad (5.33)$$

Le autofrequenze, infatti, dipendono dal modulo di Young della struttura; inoltre è importante considerare la loro derivata rispetto ai parametri fisici distribuiti, perchè si dimostra che tale derivata è direttamente proporzionale alla frequenza e quindi per niente trascurabile quando si studia il fattore di confidenza in regioni di alta frequenza. È chiaro che a seconda del tipo di struttura analizzato, cambierà la relazione funzionale fra l'autofrequenza ed il modulo di Young, ma in generale è possibile esprimere la derivata con la seguente equazione:

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial Y} = \omega_n \alpha(Y) \quad (5.34)$$

dove $\alpha(Y)$ è una funzione del modulo di Young da calcolare caso per caso.

Riguardo al calcolo della derivata della densità di energia si procede nel seguente modo. In base alle (5.32), (5.33) e (5.34) si può scrivere l'espressione che segue:

$$\frac{\partial E_q}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \alpha(Y) \sum_n \omega_n \frac{\partial}{\partial \omega_n} \left(\rho |F|^2 |M_{qr}|^2 \right)$$

quindi:

$$\frac{\partial E_q}{\partial \varepsilon} = \rho |F|^2 \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \alpha(Y) \sum_n \omega_n \frac{\partial |M_{qr}|^2}{\partial \omega_n}$$

ed infine:

$$\frac{\partial E_q}{\partial \varepsilon} = \rho |F|^2 \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \alpha(Y) 2 |M_{qr}| \sum_n \omega_n \frac{\partial |M_{qr}|}{\partial \omega_n}$$

Sviluppando la derivata del modulo della velocità e sostituendo la (5.31) si ha:

$$\frac{\partial E_q}{\partial \varepsilon} = 2 \frac{E}{|M_{qr}|} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \alpha(Y) \sum_n \omega_n \frac{\partial}{\partial \omega_n} \left(\omega \Theta \sqrt{\left(\sum_i A_i \right)^2 + \left(\sum_i B_i \right)^2} \right)$$

quindi:

$$\frac{\partial E_q}{\partial \varepsilon} = 2 \frac{E}{|M_{qr}|} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \alpha(Y) \sum_n \frac{\omega_n \omega \Theta}{\sqrt{(\sum_i A_i)^2 + (\sum_i B_i)^2}} \left(\sum_i A_i \frac{\partial A_n}{\partial \omega_n} + \sum_i B_i \frac{\partial B_n}{\partial \omega_n} \right)$$

ed infine:

$$\frac{\partial E_q}{\partial \varepsilon} = 2 \frac{E}{|M_{qr}|^2} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \alpha(Y) \omega^2 \Theta^2 \sum_n \omega_n \left(\sum_i A_i \frac{\partial A_n}{\partial \omega_n} + \sum_i B_i \frac{\partial B_n}{\partial \omega_n} \right) \quad (5.35)$$

Il fattore di confidenza, in base alla (4.6) e (5.35), assume la seguente forma:

$$f_c = \left| \frac{|M_{qr}|^2|_{\varepsilon=0}}{2\omega^2 \Theta^2 \alpha(Y) \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \sum_n \omega_n \left(\sum_i A_i \frac{\partial A_n}{\partial \omega_n} + \sum_i B_i \frac{\partial B_n}{\partial \omega_n} \right) \Big|_{\varepsilon=0}} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad (5.36)$$

La (5.36) mostra un'espressione molto complessa descritta da un doppio sviluppo in serie. A differenza, quindi, del comportamento monotono visto per il fattore di confidenza nel caso della guida d'onda, in questo caso, a motivo della presenza dei modi, ovvero delle riflessioni e sovrapposizioni delle onde, il comportamento del fattore di confidenza è in generale oscillante e difficile da descrivere. Utile analisi può, comunque, essere condotta sul comportamento di questo ente al tendere della frequenza all'infinito, $\omega \rightarrow \infty$. È chiaro che studiare la (5.36) per $\omega \rightarrow \infty$ significa contemporaneamente studiare il problema per $\omega_N \rightarrow \infty$ -con N si indica l'autovalore di ordine più elevato- a garanzia della convergenza della serie. Il metodo di analisi che è adottato è quello di controllare il comportamento dei vari termini dello sviluppo in serie e quindi di confrontare gli ordini degli infiniti e degli infinitesimi. Per mezzo di un programma di manipolazione simbolica sono calcolati i vari termini della (5.36); vengono, quindi, valutati i loro comportamenti per $\omega \rightarrow \infty$ e $\omega = \omega_N$. In appendice B sono riportati gli sviluppi analitici. Confrontando gli ordini degli infinitesimi dei vari termini si ha la seguente espressione:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} f_c = \left| \frac{1}{8\alpha(Y_0)Y_0} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad (5.37)$$

La relazione (5.37) mostra come, al tendere all'infinito della frequenza, il fattore di confidenza della densità di energia per un sistema risonante isolato al quale è imposta una perturbazione statistica su un parametro distribuito, il modulo di Young nella fattispecie, tenda ad un valore costante e finito funzione dei parametri fisici del sistema e della deviazione standard della perturbazione imposta.

È importante notare che la (5.37) è indipendente dalle condizioni al contorno. Infatti, la parte dell'espressione della frequenza propria che dipende dai parametri distribuiti del sistema non cambia al variare delle condizioni al contorno e quindi $\alpha(Y)$ dipende solo dal tipo di sistema scelto -trave, piastra,...- e dalle proprietà dei materiali che lo compongono.

5.4 Il fattore di confidenza del flusso di energia di un sistema risonante

Lo studio è svolto, anche in questo paragrafo, sul sistema descritto in figura 5.2. Anche qui è considerata una perturbazione statistica, a distribuzione gaussiana e media nulla, del modulo di Young del sistema, $Y = Y_0(1 + \varepsilon)$. Scopo del paragrafo è lo studio del fattore di confidenza del flusso di energia del sistema ora descritto. Valendo la (1.5) per il flusso di energia, sostituendo in essa la mobilità in vece della velocità si ha la seguente equazione:

$$P(x) = \frac{1}{2} |F|^2 \operatorname{Re} \{ M_{qq}^* \} \quad (5.38)$$

che vale nel punto di eccitazione.

Per il calcolo del fattore di confidenza si fa di nuovo ricorso alla (4.6), specializzata a questo caso particolare attraverso la (5.38). Ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte si ha la seguente espressione:

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \sum_n \frac{\partial P}{\partial \omega_n} \frac{\partial \omega_n}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon}$$

Per la (5.29), la (5.34) e la (5.38) la derivata del flusso di energia diventa:

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} |F|^2 \alpha(Y) \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \sum_n \omega_n \frac{\partial}{\partial \omega_n} \operatorname{Re} \{ M_{qq}^* \}$$

quindi:

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} |F|^2 \alpha(Y) \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \sum_n \omega_n \frac{\partial}{\partial \omega_n} \omega \Theta \sum_i A_i$$

ed infine:

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} |F|^2 \omega \Theta \alpha(Y) \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \sum_n \omega_n \sum_i A_i \frac{\partial A_n}{\partial \omega_n}$$

Poiché la (5.38) può essere riscritta nel seguente modo:

$$P = \frac{1}{2} |F|^2 \omega \Theta \sum_i A_i$$

per il fattore di confidenza vale:

$$f_c = \left| \frac{\sum_i A_i \Big|_{\varepsilon=0}}{\alpha(Y) \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \sum_n \omega_n \sum_i A_i \frac{\partial A_n}{\partial \omega_n} \Big|_{\varepsilon=0}} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad (5.39)$$

Anche per lo studio del fattore di confidenza del flusso di energia l'attenzione è concentrata sul suo comportamento asintotico per $\omega \rightarrow \infty$. Il limite della (5.39) è calcolato con una metodologia analoga a quella utilizzata nel paragrafo precedente confrontando i vari termini della serie e gli ordini di grandezza dei vari infinitesimi -gli sviluppi matematici sono riportati in appendice B-. Il risultato è di seguito esposto:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} f_c = \infty \quad (5.40)$$

Per il flusso di energia nel punto di eccitazione si vede che il valore del fattore di confidenza per frequenze infinite tende ad infinito.

Tutto questo vale per la potenza trasmessa nel punto di eccitazione. Per il flusso di energia in un qualunque punto r del sistema la (1.5) ha ancora valore, ma la forza è quella derivante dallo stato di tensione in quel determinato punto.

Per un continuo tridimensionale il tensore del flusso di energia per unità di superficie è dato dalla seguente equazione:

$$\mathbf{P} = \underline{\sigma} \cdot \mathbf{v} \quad (5.41)$$

dove $\underline{\sigma}$ è il tensore degli sforzi e \mathbf{v} il vettore della velocità. Operare dei calcoli a partire dalla (5.41) per studiare il fattore di confidenza è cosa assai complessa. Per amore di semplicità sono sviluppati i calcoli per una trave flessionale.

Per la trave il flusso di energia è dato dal contributo dovuto al momento flettente, \mathcal{M} , e al taglio, \mathcal{T} . Imponendo una eccitazione armonica è possibile svolgere i calcoli in termini di fasori. Con w si indica lo spostamento trasversale della trave ed ζ è l'ascissa dell'asse, diamo di seguito le seguenti definizioni:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \bar{\mathcal{M}}e^{j\omega t} & \mathcal{T} &= \bar{\mathcal{T}}e^{j\omega t} & w &= We^{j\omega t} \\ \dot{w} &= j\omega We^{j\omega t} = Ve^{j\omega t} & w' &= W'e^{j\omega t} & \dot{w}' &= V'e^{j\omega t} \\ w'' &= W''e^{j\omega t} & w''' &= W'''e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Il punto indica la derivata rispetto alla variabile temporale, $\dot{w} = \partial w / \partial t$, e l'apice la derivata rispetto alla variabile spaziale, $w' = \partial w / \partial \zeta$.

In base alla (1.4) si può scrivere per il flusso di energia la seguente espressione:

$$P(x, t) = \text{Re} \{ \mathcal{M} \} \text{Re} \{ \dot{w}' \} + \text{Re} \{ \mathcal{T} \} \text{Re} \{ \dot{w} \} \quad (5.42)$$

Il flusso mediato rispetto al tempo, per la (1.5), è quindi:

$$P = \frac{1}{2} \left[\text{Re} \{ \bar{\mathcal{M}}V'^* \} + \text{Re} \{ \bar{\mathcal{T}}V^* \} \right] \quad (5.43)$$

Poiché i legami costitutivi fra la linea elastica e le caratteristiche di sollecitazione, per modulo di Young, Y , e momento di inerzia della sezione, \mathcal{I} , costanti lungo

l'asse della trave, sono:

$$\mathcal{M} = Y\mathcal{I}w'' \quad \mathcal{T} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} = -Y\mathcal{I}w''' \quad (5.44)$$

l'equazione (5.43) diventa:

$$P = \frac{1}{2}Y\mathcal{I}(\operatorname{Re}\{W''V'^*\} + \operatorname{Re}\{W''''V^*\}) \quad (5.45)$$

L'equazione (5.45) può essere riscritta in termini di recettanza -rapporto fra lo spostamento e la forza applicata $H = W/F$ - e di mobilità nel seguente modo:

$$P = \frac{1}{2}Y\mathcal{I}|F_q|^2 (\operatorname{Re}\{H''_{qr}M'_{qr}^*\} + \operatorname{Re}\{H''''_{qr}M^*_{qr}\}) \quad (5.46)$$

Gli sviluppi teorici della (5.46) necessari per predire il comportamento del fattore di confidenza sono oltremodo complessi e le approssimazioni che sarebbe necessario introdurre renderebbero poco significativo il risultato finale. Per questo motivo lo studio della (5.46) è sviluppato solo con un metodo numerico.

5.5 Risultati numerici per il fattore di confidenza di sistemi risonanti

In questo capitolo è sviluppato un calcolo numerico di confronto con i risultati teorici ottenuti nel paragrafo 5.4. È studiato il comportamento del fattore di confidenza per una trave e per una piastra che lavorano a flessione. L'utilizzo di un metodo Monte Carlo ha permesso il calcolo di medie e deviazioni standard, quindi del fattore di confidenza, della densità di energia e del flusso di energia dei sistemi considerati. Di seguito sono esposte nel dettaglio le configurazioni e la perturbazione aleatoria utilizzate.

Le caratteristiche fisiche della trave, figura 5.3, sono riportate nella tavola 5.3. Le condizioni al contorno sono di appoggio semplice. È imposta un'eccitazione armonica puntuale in 1 ($\zeta_1 = .3\text{m}$) di ampiezza 1N e sono scelti come punti di osservazione per la velocità, quindi per la densità di energia e per il flusso di energia, sia il punto eccitato che il 2 ($\zeta_2 = .7\text{m}$).

La densità di energia, essendo nota l'espressione analitica della mobilità della trave, è calcolata in entrambi i punti tramite la seguente relazione:

$$E_i = \rho|F_1|^2 \left| \frac{2\omega}{\rho SL} \sum_n \frac{\varphi_n(\zeta_1)\varphi_n(\zeta_i)}{\eta\omega_n^2 + j(\omega^2 - \omega_n^2)} \right|^2 \quad i = 1, 2 \quad (5.47)$$

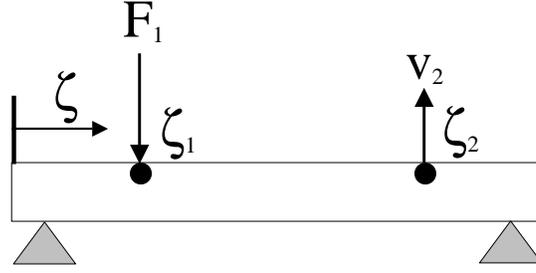


Figura 5.3: Trave semplicemente appoggiata

Il flusso di energia ha, invece, le seguenti espressioni: nel punto 1 -flusso di energia entrante-:

$$P_1 = \frac{1}{2}|F_1|^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\omega}{\rho SL} \sum_n \frac{\varphi_n^2(\zeta_1)}{\eta\omega_n^2 + j(\omega^2 - \omega_n^2)} \right\} \quad (5.48)$$

nel punto 2, invece:

$$P_2 = \frac{Y\mathcal{I}}{\rho SL}|F_1|^2 \left[\operatorname{Re} \left\{ \sum_n \frac{\varphi_n(\zeta_1)\varphi_n''(\zeta_2)}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j\eta\omega_n^2} \sum_n \left(\frac{\varphi_n(\zeta_1)\varphi_n'(\zeta_2)}{\eta\omega_n^2 + j(\omega^2 - \omega_n^2)} \right)^* \right\} + \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \left\{ \sum_n \frac{\varphi_n(\zeta_1)\varphi_n'''(\zeta_2)}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j\eta\omega_n^2} \sum_n \left(\frac{\varphi_n(\zeta_1)\varphi_n(\zeta_2)}{\eta\omega_n^2 + j(\omega^2 - \omega_n^2)} \right)^* \right\} \right] \quad (5.49)$$

Le espressioni delle autofunzioni e delle frequenze proprie sono:

$$\varphi_n = \sin\left(\frac{n\pi\zeta}{L}\right) \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \omega_n = k_n^2 \sqrt{\frac{E\mathcal{I}}{\rho A}} \quad (5.50)$$

dove \mathcal{I} e S sono rispettivamente il momento di inerzia l'area della sezione. È

Y (Pa)	ρ (kg m ⁻³)	h (m)	L (m)	\mathcal{I} (m)	η
2.1×10^{11}	7800	0.01	1.5	8.3×10^{-10}	.01

Tabella 5.3: Valori dei parametri fisici della trave

scelto come parametro aleatorio il modulo di Young secondo la seguente legge:

$$Y = Y_0(1 + \varepsilon)$$

dove Y_0 è il valore di riferimento ed ε una variabile stocastica adimensionale a distribuzione gaussiana, media nulla e deviazione standard $\sigma_\varepsilon = 0.05$.

In base alle (5.50), la $\alpha(Y)$ che compare nella (5.34) si specializza nella seguente espressione:

$$\alpha(Y) = \frac{1}{2Y} \tag{5.51}$$

I limiti (5.37) e (5.39), per il valore assegnato alla deviazione standard della perturbazione e per la (5.51), assumono i seguenti valori:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} f_{cE_i} = 5 \quad i = 1, 2 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} f_{cP_1} = \infty \tag{5.52}$$

Sono calcolate duecento realizzazioni della densità di energia e del flusso di energia, ogni realizzazione essendo corrispondente ad un valore della variabile aleatoria ε . Di queste realizzazioni è calcolata la media e la deviazione standard, quindi il fattore di confidenza come espresso dalla sua definizione.

Le figure 5.5 e 5.6 mostrano i grafici del fattore confidenza dell'energia e del flusso di energia calcolati nel punto di eccitazione in funzione della frequenza, le figure 5.7 e 5.8 mostrano i grafici di f_c , sempre in funzione della frequenza, calcolato nel punto 2. Le prove sono condotte da 10Hz a 10000Hz.

Per la piastra, figura 5.4, le condizioni al contorno sono ancora di appoggio semplice su tutti i lati e le caratteristiche fisiche sono riportate nella tavola 5.4. L'ec-

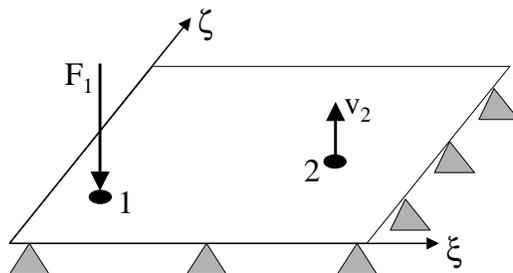


Figura 5.4: Piastra semplicemente appoggiata

citazione è armonica puntuale di ampiezza 1N applicata in ($\zeta_1 = .1\text{m}$, $\xi = .15\text{m}$). Il punto di osservazione per il calcolo della densità di energia è sia quello coincidente con quello di eccitazione che quello a ($\zeta_1 = .45\text{m}$, $\xi = .3\text{m}$). Per il flusso di energia il fattore di confidenza è calcolato solo nel punto di eccitazione.

Y (Pa)	ρ (kg m ⁻³)	ν	h (m)	L_ζ (m)	L_ξ (m)	η
2.1×10^{11}	7800	0.28	.002	1.	1.	.01

Tabella 5.4: Valori dei parametri fisici della piastra

Per la densità di energia e per il flusso di energia si hanno le rispettive due relazioni:

$$E_i = \rho |F_1|^2 \left| \frac{4\omega}{\rho h S} \sum_{n,m} \frac{\varphi_{n,m}(\zeta_1, \xi_1) \varphi_{n,m}(\zeta_i, \xi_i)}{\eta \omega_{n,m}^2 + j(\omega^2 - \omega_{n,m}^2)} \right|^2 \quad i = 1, 2$$

e

$$P_1 = \frac{1}{2} |F_1|^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{4\omega}{\rho h S} \sum_{n,m} \frac{\varphi_{n,m}^2(\zeta_1, \xi_1)}{\eta \omega_{n,m}^2 + j(\omega^2 - \omega_{n,m}^2)} \right\}$$

Le espressioni delle autofunzioni e delle frequenze proprie sono:

$$\varphi_{nm} = \sin\left(\frac{n\pi\zeta}{L_\zeta}\right) \sin\left(\frac{m\pi\xi}{L_\xi}\right) \quad k_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_\zeta}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_\xi}\right)^2}$$

$$\omega_{nm} = k_{nm}^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}$$

È scelto, anche per questo secondo caso, come parametro aleatorio il modulo di Young, seguendo la stessa legge utilizzata nella trave.

Anche per la piastra $\alpha(Y)$ si specializza nel seguente modo:

$$\alpha(Y) = \frac{1}{2Y}$$

Quindi valgono ancora le (5.52) per quanto riguarda i valori assunti dai limiti. Anche in questo caso sono calcolate duecento realizzazioni.

Le figure 5.9 e 5.10 mostrano i grafici del fattore confidenza dell'energia e del flusso di energia calcolati nel punto di eccitazione in funzione della frequenza, la figura 5.11 mostra il grafico di f_c relativo alla sola energia, sempre in funzione della frequenza, calcolato nel punto 2. Le prove sono condotte da 10Hz a 10000Hz.

È possibile commentare le figure dalla 5.5 alla 5.7 e dalla 5.9 alla 5.11 confrontando i grafici con le predizioni ottenute teoricamente.

Quando si è di fronte ad un comportamento asintotico del fattore di confidenza nella regione a più bassa frequenza questo mostra un comportamento molto oscillante, all'aumentare della frequenza l'ampiezza delle fluttuazioni diminuisce e

la curva tende ad un valore costante, prossimo a quello predetto dalla teoria.

Per il fattore di confidenza del flusso di energia della trave calcolato nel punto 2 non c'è la possibilità di una comparazione con il risultato teorico. È comunque possibile commentare i soli risultati numerici. Il grafico mostra anche qui un comportamento sempre meno oscillante del fattore di confidenze al crescere della frequenza e che tende ad un valore costante.

I risultati numerici ottenuti tramite la simulazione Monte Carlo in due casi si discostano notevolmente dalla predizione teorica.

Per quanto riguarda la trave ci si aspetterebbe che il fattore di confidenza del flusso di energia calcolato nel punto di eccitazione, $f_{c_{P_1}}$, tendesse ad infinito. Il grafico in figura 5.6 non mostra l'accordo atteso con la teoria.

Relativamente alla piastra la mancata corrispondenza fra valori numerici e teorici avviene per il fattore di confidenza dell'energia calcolato nel punto di eccitazione. Qui il risultato teorico prevederebbe un comportamento asintotico, al contrario $f_{c_{E_1}}$ tende ad infinito.

I risultati ottenuti mostrano come il procedimento teorico approssimato non sia in grado di offrire sempre un risultato che ricalchi fedelmente la soluzione ottenuta direttamente tramite una procedura numerica. Per differenti tipi di sistemi il comportamento del fattore di confidenza della stessa grandezza può non essere sempre lo stesso e questa difformità non è riconosciuta dall'analisi teorica approssimata qui sviluppata. Mentre nel caso della piastra i valori dei fattori di confidenza delle grandezze energetiche calcolate nel punto di eccitazione aumentano in maniera indefinita all'aumentare della frequenza, questo comportamento non lo si ritrova nella trave flessionale. I risultati teorici, per quanto riguarda il flusso di energia entrante, concordano con i valori calcolati per la piastra, mentre, per l'energia del punto di eccitazione, concordano con i risultati numerici relativi alla trave.

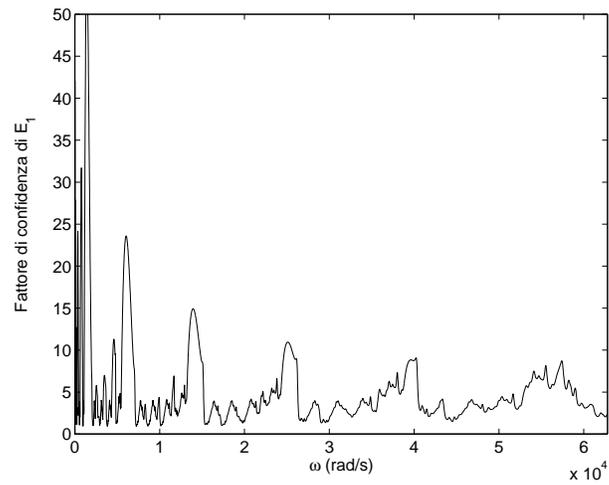


Figura 5.5: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema trave flessionale isolata calcolato nel punto di eccitazione

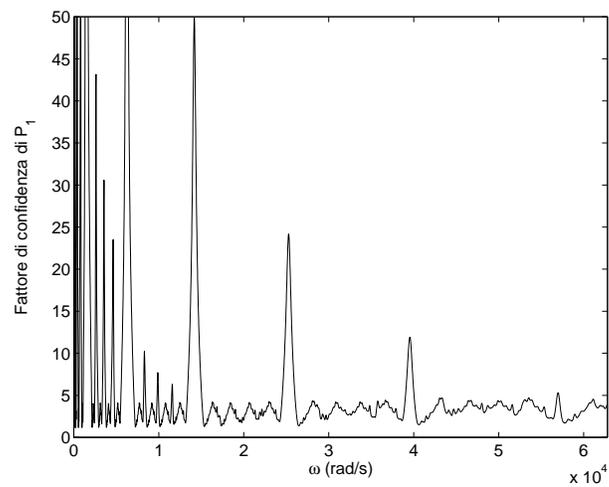


Figura 5.6: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema trave flessionale isolata calcolato nel punto di eccitazione

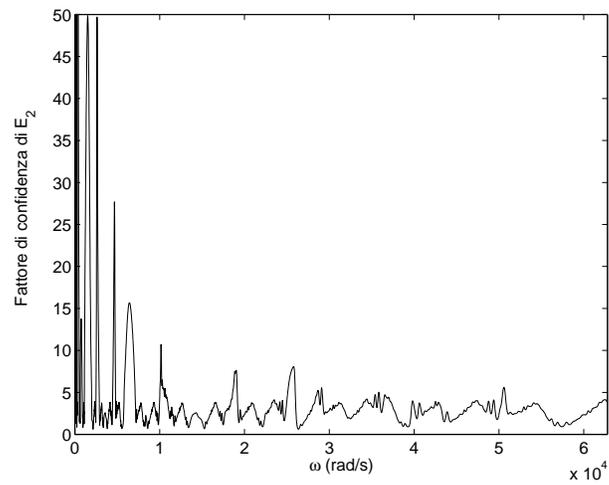


Figura 5.7: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema trave flessionale isolata calcolato nel punto 2

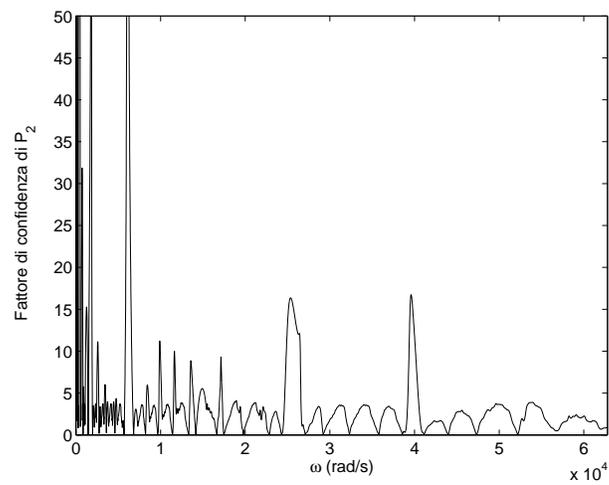


Figura 5.8: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema trave flessionale isolata calcolato nel punto 2

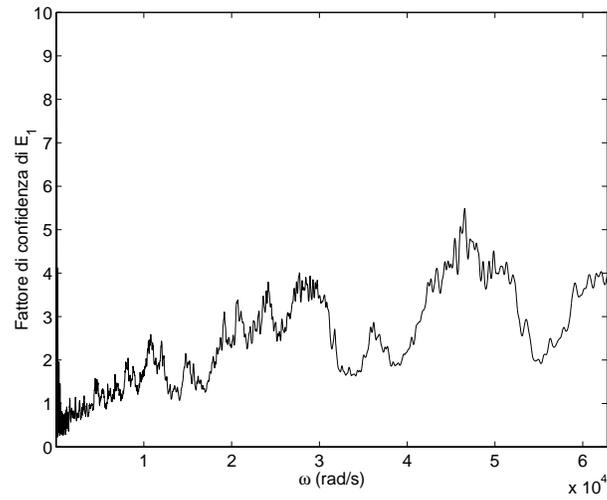


Figura 5.9: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema piastra flessionale isolata calcolato nel punto di eccitazione

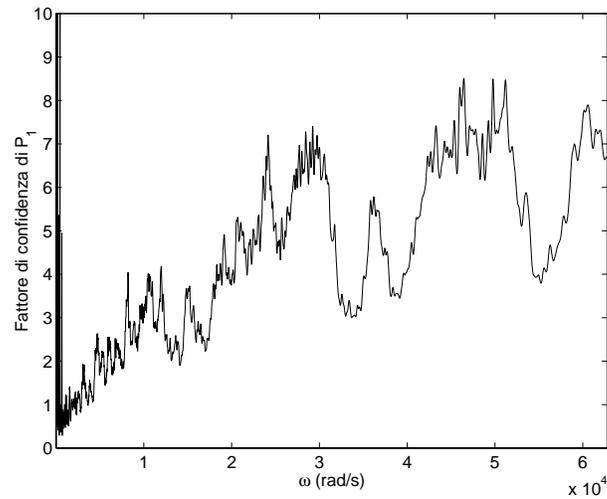


Figura 5.10: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema piastra flessionale isolata calcolato nel punto di eccitazione

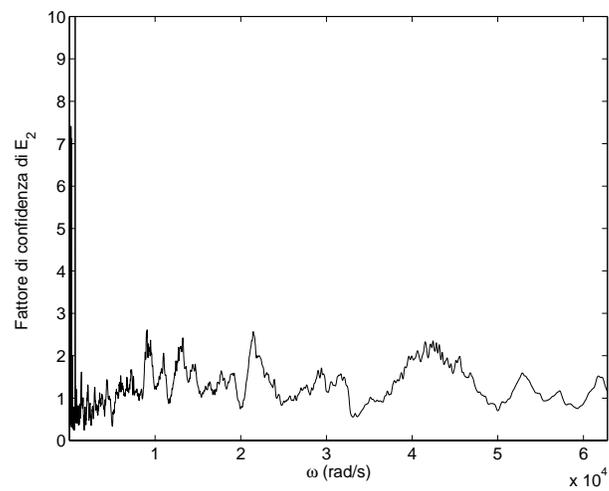


Figura 5.11: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema piastra flessionale isolata calcolato nel punto 2

5.6 Discussione conclusiva al capitolo

In questo paragrafo è trattata una conclusione che comprende sia le guide d'onda sia i sistemi risonanti.

È stato già trattato, ed è chiaro dalle tavole 5.1 e 5.2, che il fattore di confidenza sia dell'energia che del flusso di energia nelle asti infinite tende a zero quando la frequenza tende ad infinito:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} f_c = 0$$

Comportamento assolutamente diverso si ha, invece, nel caso di sistemi risonanti: per frequenze che tendono ad infinito il fattore di confidenza di energia e flusso di energia tende o ad un valore costante finito o ad infinito.

Quello che si legge dalle precedenti considerazioni è che un campo ondoso composto da onde che si propagano senza riflessioni conserva l'informazione in modo peggiore che un campo ondoso composto da onde che si sovrappongono a causa delle riflessioni.

Nello studio condotto sulle guide d'onda si è visto come è possibile barattare la x con la ω : studiare il comportamento del fattore di confidenza all'aumentare dell'ascissa spaziale porta a risultati assolutamente analoghi a quelli che si hanno studiando il problema all'aumentare della frequenza. Questo dipende, ovviamente, dalla natura delle equazioni usate per descrivere il fenomeno. Per lo stesso motivo tale comportamento non si ha per sistemi risonanti: le equazioni che descrivono questi sistemi hanno una relazione funzionale con la frequenza e lo spazio non barattabile.

In un campo diffuso il mezzo attraversato dalle onde ed affetto da perturbazione aleatoria deteriora l'informazione che le onde stesse trasportano. Il fattore di confidenza dipende dall'ascissa spaziale, quindi dalla distanza tra punto di osservazione e di immissione dell'informazione, attraverso le autofunzioni del sistema. Dipendenza assolutamente diversa, invece, c'è fra il fattore di confidenza e la frequenza. Quindi, a meno che non si calcoli l'energia ed il flusso di energia esattamente nel punto di eccitazione, il comportamento di f_c per tutti i punti del sistema è assolutamente simile.

Il comportamento oscillante del fattore di confidenza è da mettere in relazione con il comportamento della risposta dei sistemi risonanti nella quale appare la presenza delle autofrequenze. La media di insieme segue il comportamento oscillante delle singole realizzazioni. La deviazione standard è minima nei punti dove le varie curve si infittiscono e massima dove i valori assunti dalle realizzazioni sono distanti fra loro.

È molto importante notare che le (5.37) e (5.40) sono indipendenti dalle condizioni al contorno. Infatti la parte dell'espressione dell'autofrequenza che dipende dai parametri del sistema non cambia al variare delle condizioni al contorno e quindi $\alpha(Y)$ è sempre la stessa, fissato il sistema.

Capitolo 6

Perturbazioni aleatorie in sistemi continui accoppiati

In questo capitolo sono analizzati alcuni sistemi meccanici accoppiati ed è presa in considerazione la perturbazione stocastica di alcuni parametri fisici distribuiti dei sistemi stessi. Lo studio è svolto sia su sistemi risonanti che su sistemi non confinati ed è valutata l'analogia fra i risultati degli uni e degli altri.

6.1 Il fattore di confidenza dell'energia e del flusso di energia di una guida d'onda connessa ad un sistema risonante

Il sistema è composto da una guida d'onda longitudinale accoppiata ad un sistema risonante continuo, figura 6.1. Il sistema di onde piane longitudinali della guida è

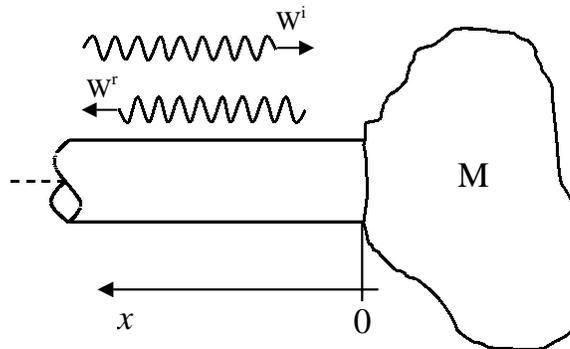


Figura 6.1: Guida d'onda accoppiata ad un sistema risonante

caratterizzato dalla sovrapposizione di un'onda incidente ed una riflessa rispetto

al punto di connessione. In base al sistema di riferimento di figura 6.1 è possibile scrivere le seguenti relazioni per le due onde:

$$\begin{aligned} w_i(x, t) &= W_i e^{-\eta k x} e^{j(\omega t + k x)} & w_r(x, t) &= W_r e^{-\eta k x} e^{j(\omega t - k x)} \\ w(x, t) &= w_i(x, t) + w_r(x, t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Si definisce un coefficiente di riflessione attraverso la seguente equazione:

$$r = \frac{W_r}{W_i} \quad (6.2)$$

Il valore del coefficiente di riflessione si calcola attraverso la mobilità del risonatore; infatti, nel punto di contatto fra guida d'onda e risonatore, $x = 0$, nel sistema di riferimento di figura 6.1, la mobilità vale:

$$M_0 = \left. \frac{\dot{w}}{N} \right|_{x=0} \quad (6.3)$$

dove N è la forza longitudinale lungo l'asta:

$$N(x, t) = Y S \frac{\partial w}{\partial x} \quad (6.4)$$

Calcolando le derivate \dot{w} e $\partial w / \partial x$ dalle (6.1), la (6.3) con la (6.4) permette il calcolo del coefficiente di riflessione che è dato dall'equazione che segue:

$$r = \frac{M_0 S \sqrt{Y \rho} (-\eta + j) - j}{M_0 S \sqrt{Y \rho} (\eta + j) + j} \quad (6.5)$$

La densità di energia totale in un punto è definita ancora dalla (5.2) che, specializzata a questo caso particolare, diventa:

$$E(x, t) = \rho \left(|\dot{w}_i|^2 + |\dot{w}_r|^2 + \dot{w}_i^* \dot{w}_r + \dot{w}_r^* \dot{w}_i \right) \quad (6.6)$$

Sostituendo le (6.1) e (6.2) nella (6.6) si ha la seguente equazione per la densità di energia:

$$E(x, t) = \rho \omega^2 |W_i|^2 e^{-2\eta k x} \left(1 + |r|^2 + 2 \operatorname{Re} \left\{ r e^{2j k x} \right\} \right) \quad (6.7)$$

La (1.5) offre la potenza media puntuale che se specializzata per questo particolare sistema e calcolata nell'origine del sistema di riferimento, vista la (6.4), diventa:

$$P(x) = \left. \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ N \dot{w}^* \} \right|_{x=0} = \left. \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ Y S \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} + \frac{\partial w_r}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \dot{w}_i^*}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_r^*}{\partial x} \right) \right\} \right|_{x=0} \quad (6.8)$$

Per le (6.1) e (6.2) la (6.8) può essere riscritta come segue:

$$P(x) = \frac{1}{2} S \omega^2 \sqrt{Y \rho} |W_i|^2 (1 - |r|^2) \quad (6.9)$$

Sono considerate separatamente tre differenti tipi di perturbazioni dei parametri fisici dell'asta seminfinita: modulo di Young, $Y = Y_0(1 + \varepsilon)$, densità, $\rho = \rho_0(1 + \varepsilon)$ e coefficiente di dissipazione, $\eta = \eta_0(1 + \varepsilon)$. Per ognuna delle perturbazioni è stimato il fattore di confidenza della densità di energia e del flusso di energia seguendo le (4.6) e, a causa della complessità dei calcoli, con l'ausilio di un programma di manipolazione simbolica. Le espressioni di f_c sono molto complicate e sono fun-

	<i>densità di energia</i>	<i>flusso di energia</i>
$Y = Y_0(1 + \varepsilon)$	$2 \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$	$\frac{1}{\sigma_\varepsilon}$
$\rho = \rho_0(1 + \varepsilon)$	$\frac{2}{3} \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$	$\frac{1}{\sigma_\varepsilon}$
$\eta = \eta_0(1 + \varepsilon)$	∞	∞

Tabella 6.1: Valori del fattore di confidenza della densità di energia e del flusso di energia di una guida d'onda longitudinale accoppiata ad un sistema meccanico risonante in diverse condizioni di perturbazione aleatoria per $\omega \rightarrow \infty$ in corrispondenza della giunzione

zioni dei parametri fisici della guida d'onda e della mobilità del sistema risonante. Nella tavola 6.1 sono riportati i risultati dell'analisi del comportamento del fattore al tendere della frequenza ad infinito, $\omega \rightarrow \infty$, in corrispondenza dell'origine del sistema di riferimento, ovvero del punto di giunzione, $x \rightarrow \infty$. L'analisi è svolta attraverso un confronto fra gli ordini di grandezza di infiniti ed infinitesimi che appaiono nell'espressione completa -in appendice A sono riportati i passaggi per il calcolo del comportamento asintotico della parte reale ed immaginaria della mobilità-.

La tavola 6.1 mostra come solo per perturbazioni sul coefficiente di dissipazione il fattore di confidenza tenda asintoticamente ad infinito per $\omega \rightarrow \infty$. Per perturbazioni sugli altri parametri il fattore di confidenza tende ad un valore finito e costante.

6.2 Il fattore di confidenza dell'energia e del flusso di energia di due sistemi risonanti accoppiati tramite una giunzione

Si considerino due sistemi risonanti, I e II , come indicato in figura 6.6. Il sistema I è eccitato da una forza armonica puntuale $f_1(t) = F_1 e^{j\omega t}$, applicata al punto 1, ed è accoppiato al sistema II da un giunto privo di massa, simile a quello studiato nel paragrafo 6.2, che connette i due sistemi nei punti 2 e 3. Le generiche espressione

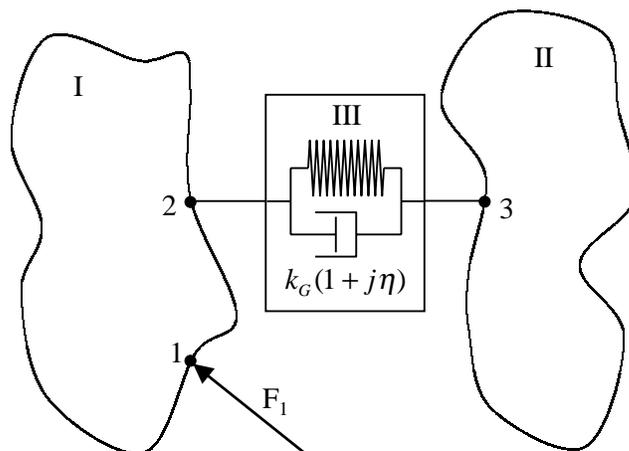


Figura 6.2: Due sistemi risonanti accoppiati tramite giunzione

per la densità di energia e per il flusso di energia sono date rispettivamente dalle (5.2) e (1.5) di seguito nuovamente riportate:

$$E(x, t) = \rho V V^* \quad P(x) = \frac{1}{2} \text{Re}\{F V^*\} \quad (6.10)$$

dove F e V sono rispettivamente i fasori della forza applicata e della velocità di un punto.

È presa in considerazione la densità di energia totale e la potenza meccanica nei punti 2 e 3, rispettivamente: E_2 , E_3 , P_2 e P_3 . Per poter calcolare queste espressioni dalle (6.10) è necessario conoscere il valore della forza e della velocità nei punti oggetto di indagine. Allo scopo è sviluppato un procedimento di accoppiamento di mobilità. Si hanno le tre seguenti relazioni per le mobilità puntuali dei sistemi

accoppiati:

$$\begin{aligned} v_1 &= M_{11}F_1 + M_{12}F_2 \\ v_2 &= M_{21}F_1 + M_{22}F_2 \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$v_3 = M_{33}F_3$$

Poiché il sistema *III* è privo di massa ed è in serie con il sistema *II*, si possono scrivere le seguenti due relazioni:

$$F_2 = -F_3 \quad (6.12)$$

$$v_2 = -F_2(M_{33} + M_{III})$$

Le (6.11) insieme alle (6.12) sono un sistema di cinque equazioni nelle cinque incognite v_1, v_2, v_3, F_2 e F_3 . La sua soluzione risolve il problema del calcolo della densità di energia e del flusso di energia nei punti 2 e 3.

Per la densità di energia si hanno, rispettivamente, le seguenti relazioni:

$$E_2 = \rho V_2 V_2^* = \rho |F_1|^2 |M_{21}|^2 \left| \frac{M_{33} + M_{III}}{M_{33} + M_{22} + M_{III}} \right|^2 \quad (6.13)$$

$$E_3 = \rho V_3 V_3^* = \rho |F_1|^2 |M_{21}|^2 \left| \frac{M_{33}}{M_{33} + M_{22} + M_{III}} \right|^2 \quad (6.14)$$

Le M_{qr} sono le mobilità puntuali dei due sottosistemi $M_{qr} = V_q/F_r$. La potenza meccanica P_2 e quella P_3 sono, rispettivamente, il flusso di energia che passa dal sistema *I* attraverso il giunto e quello che dal giunto passa al sistema *II*. Le due grandezze sono di seguito rappresentate:

$$P_2 = \frac{1}{2} \text{Re}\{F_2 V_2^*\} = -\frac{1}{2} \frac{|M_{21} F_1|^2}{|M_{33} + M_{22} + M_{III}|^2} \text{Re}\{M_{33}^* + M_{III}^*\} \quad (6.15)$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \text{Re}\{F_3 V_3^*\} = \frac{1}{2} \frac{|M_{21} F_1|^2}{|M_{33} + M_{22} + M_{III}|^2} \text{Re}\{M_{33}^*\} \quad (6.16)$$

Si deve notare che l'equazione (6.15) offre una P_2 negativa, mentre la (6.16) una P_3 positiva. Infatti P_2 è il flusso di energia che lascia il sistema *I*, mentre la P_3 è il flusso di energia che entra in *II*. L'energia dissipata nel giunto è $P_{G_{diss}} = P_2 + P_3$. Poiché per il giunto è scelto un sistema composto da una molla con smorzamento isteretico priva di massa, la mobilità M_{III} è scritta come¹:

$$M_{III} = \frac{\omega(\eta + j)}{k_G(\eta^2 + 1)}$$

1. Essendo il giunto privo di massa, quello che si può dire è che vale la seguente relazione per lo spostamento di un estremo:

$$F = k_G(1 + j\eta)X$$

dove k_G è la rigidezza del giunto ed η il fattore di perdita. Assumendo $\eta \ll 1$ il termine η^2 può essere omesso e le equazioni (6.13), (6.14), (6.15) e (6.16) diventano:

$$E_2 = \rho V_2 V_2^* = \rho |F_1|^2 |M_{21}|^2 \left| \frac{M_{33} + \omega(\eta + j)/k_G}{M_{33} + M_{22} + \omega(\eta + j)/k_G} \right|^2 \quad (6.17)$$

$$E_3 = \rho V_3 V_3^* = \rho |F_1|^2 |M_{21}|^2 \left| \frac{M_{33}}{M_{33} + M_{22} + \omega(\eta + j)/k_G} \right|^2 \quad (6.18)$$

$$P_2 = -\frac{1}{2} \frac{|M_{21} F_1|^2}{|M_{33} + M_{22} + \omega(\eta + j)/k_G|^2} \operatorname{Re} \{ M_{33}^* + \omega(\eta - j)/k_G \} \quad (6.19)$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \frac{|M_{21} F_1|^2}{|M_{33} + M_{22} + \omega(\eta + j)/k_G|^2} \operatorname{Re} \{ M_{33}^* \} \quad (6.20)$$

Scopo del paragrafo è lo studio del fattore di confidenza quando una qualche perturbazione è imposta ai parametri fisici distribuiti dei due sottosistemi risonanti. A motivo di ciò sono considerate una serie di prove nelle quali è imposta una perturbazione su ciascuno dei moduli di Young dei due sistemi, $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$, con tutti gli altri parametri fissati. La variabile aleatoria ε è, come al solito, scelta a distribuzione gaussiana e media nulla. Il calcolo teorico basato sullo sviluppo in serie di Taylor delle grandezze energetiche e quindi il calcolo del fattore di confidenza in forma approssimata e chiusa in base alla (4.6) presenta rilevanti difficoltà. L'analisi del comportamento del fattore di confidenza è stata sviluppata seguendo una metodologia numerica. È stato implementato un programma di calcolo impostato su una metodologia Monte Carlo.

Si descrive la procedura comune a tutte le prove in maniera più dettagliata.

Per mezzo di un generatore di numeri random, imponendo il tipo di distribuzione desiderata, il valore della media e della deviazione standard, sono calcolati i valori della variabile statistica ε che servono per la simulazione numerica. In particolare i valori scelti sono: $\bar{\varepsilon} = 0$ e $\sigma_\varepsilon = 0.05$. Il metodo Monte Carlo consiste nel calcolare un numero sufficientemente elevato di realizzazioni delle densità di energia e dei flussi di energia per ogni valore assunto dalla variabile random, quindi di calcolare il valor medio e la deviazione standard di questo insieme di realizzazioni ed infine il fattore di confidenza come rapporto dei due momenti statistici prima stimati. Di seguito sono riportati la descrizione ed i risultati ottenuti per due differenti configurazioni: due travi flessionali accoppiate e due piastre accoppiate.

e quindi per la mobilità associata al sistema si ha la seguente espressione:

$$M = \frac{V}{F} = \frac{j\omega}{k_G(1 + j\eta)}$$

6.2.1 Sistema di due travi accoppiate

Il sistema meccanico studiato è formato da due travi flessionali appoggiate accoppiate fra di loro tramite il giunto non conservativo precedentemente descritto -figura 6.3-. Le mobilità del sistema hanno le seguenti espressioni:

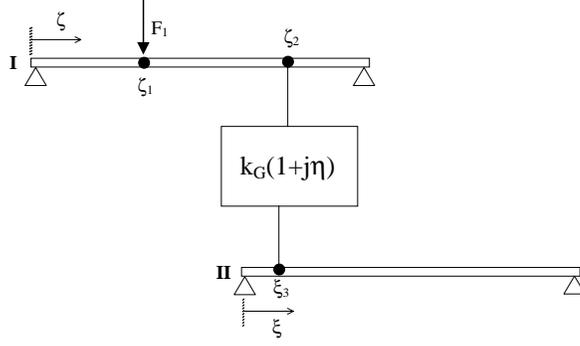


Figura 6.3: Due travi flessionali semplicemente appoggiate accoppiate tramite giunto non conservativo a mobilità puntuale

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= \frac{2\omega}{\rho_I S_I L_I} \sum_n \frac{\varphi_{In}(\zeta_1)\varphi_{In}(\zeta_2)}{\eta_I \omega_{In}^2 + j(\omega^2 - \omega_{In}^2)} \\
 M_{22} &= \frac{2\omega}{\rho_I S_I L_I} \sum_n \frac{\varphi_{In}(\zeta_2)^2}{\eta_I \omega_{In}^2 + j(\omega^2 - \omega_{In}^2)} \\
 M_{33} &= \frac{2\omega}{\rho_{II} S_{II} L_{II}} \sum_n \frac{\varphi_{II n}(\xi_3)^2}{\eta_{II} \omega_{II n}^2 + j(\omega^2 - \omega_{II n}^2)}
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

I pedici *I* e *II* indicano la prima e la seconda trave. Le espressioni delle autofunzioni e delle frequenze proprie sono:

$$\varphi_n = \sin\left(\frac{n\pi\zeta}{L}\right) \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \omega_n = k_n^2 \sqrt{\frac{E\mathcal{I}}{\rho A}} \tag{6.22}$$

dove \mathcal{I} e S sono rispettivamente il momento di inerzia l'area della sezione. Nella tavola 6.2 sono riportati i valori dei parametri fisici del sistema. La prima trave è eccitata da una forza armonica che agisce in $\zeta_1 = 0.3\text{m}$ e la sua ampiezza è $F_1 = 1\text{N}$. Il giunto è connesso alle due travi nei punti $\zeta_2 = 0.7\text{m}$ e $\zeta_3 = 0.4\text{m}$ come indicato in figura 6.3.

	Y (Pa)	ρ (kg m ⁻³)	h (m)	L (m)	\mathcal{I} (m)	η
First beam	2.1×10^{11}	7800	0.01	1.5	8.3×10^{-10}	.01
Second beam	2.1×10^{11}	7800	0.005	2.5	5.2×10^{-11}	.01

Tabella 6.2: Valori dei parametri fisici delle due travi accoppiate

La simulazione è svolta imponendo ai parametri del giunto i seguenti valori: $k_G = 1000\text{N/m}$ e $\eta = 0.01$.

Si eseguono tre differenti prove con differenti combinazioni di perturbazioni:

1. perturbazione del modulo di Young della prima piastra: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$
2. perturbazione del modulo di Young della seconda piastra: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$
3. perturbazione di moduli di Young di entrambe le piastre: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$

Nelle figure 6.8 e 6.9, a puro titolo esemplificativo, sono rappresentati i grafici di medie e varianze rispettivamente della densità di energia e del flusso di energia nei punti 2 e 3 per perturbazione sul modulo di Young della prima trave. Le

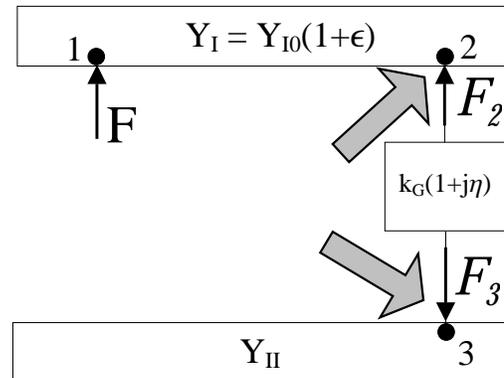


Figura 6.4:

figure dalla 6.10 alla 6.13 mostrano il comportamento in frequenza dei fattori di confidenza delle quattro grandezze energetiche di interesse quando è perturbato il modulo di Young della prima trave. Le figure dalla 6.14 alla 6.17 mostrano i grafici dei fattori di confidenza quando è perturbato Y_{II} . Infine le figure dalla 6.18 alla 6.21 mostrano i grafici dei fattori di confidenza quando sono perturbati contemporaneamente Y_I ed Y_{II} . I grafici mostrano come il fattore di confidenza abbia un comportamento assolutamente assimilabile a quello osservato per i sistemi risonanti isolati. Infatti l'ampiezza delle oscillazioni del fattore di confidenza diminuisce all'aumentare della frequenza ed il grafico tende ad un valore costante quando ci si riferisce alla densità di energia ed al flusso di energia del sistema

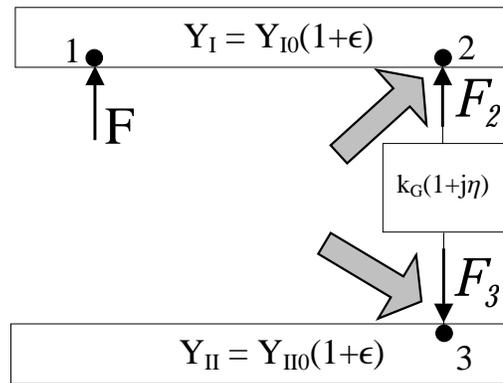


Figura 6.5:

affetto da perturbazione statistica. Quando, invece, si considera il fattore di con-

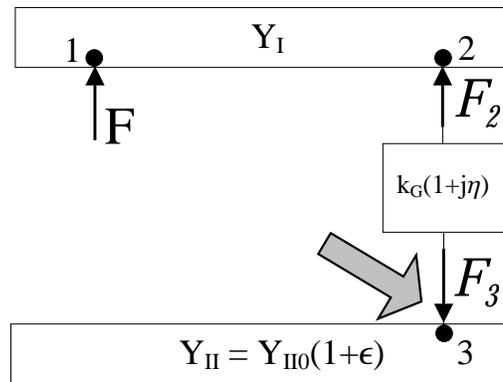


Figura 6.6:

fidenza delle grandezze energetiche del sistema "a monte" della perturbazione statistica, questo ha un andamento crescente all'aumentare della frequenza. In particolare le figure dalla 6.10 alla 6.13 mostrano i grafici del fattore di confidenza della densità di energia e del flusso di energia quando la perturbazione aleatoria è imposta nel mezzo che si trova fra il punto di eccitazione e quello di osservazione (figura 6.4). Nelle figure dalla 6.18 alla 6.21 sono rappresentati i grafici dei fattori di confidenza quando la perturbazione è imposta su entrambi i sottosistemi (figura 6.5). Le figure 6.15 e 6.17 mostrano il comportamento di f_c nei punti eccitati di un sottosistema che ha il modulo di Young aleatorio (figura 6.6). In tutti questi grafici il fattore di confidenza tende ad un valore costante al crescere della frequenza e questo risultato corrisponde al comportamento stu-

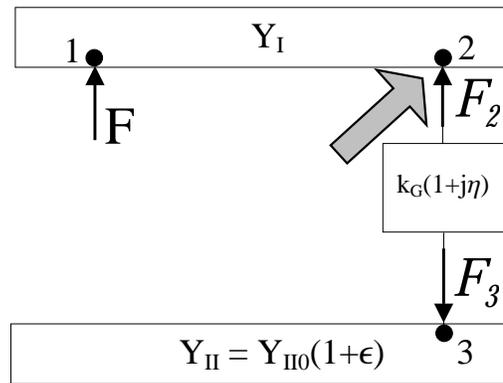


Figura 6.7:

diato nei risonatori isolati. Infatti in tutti i casi fino ad ora esaminati la forza esterna agisce in un punto del mezzo i parametri fisici del quale sono perturbati in maniera aleatoria. Le figure 6.14 e 6.16, invece, mostrano i grafici dei fattori di confidenza di un punto appartenente ad un sottosistema che è eccitato da una forza esterna ed il modulo di Young del quale non è variabile stocastica (figura 6.7). In questi casi il fattore di confidenza non tende ad un valore costante, ma diverge all'aumentare della frequenza. Infatti l'informazione che deriva dalla forza esterna applicata al sistema non è deteriorata da un comportamento aleatorio del mezzo che collega il punto di iniezione del segnale con quello di osservazione dello stesso.

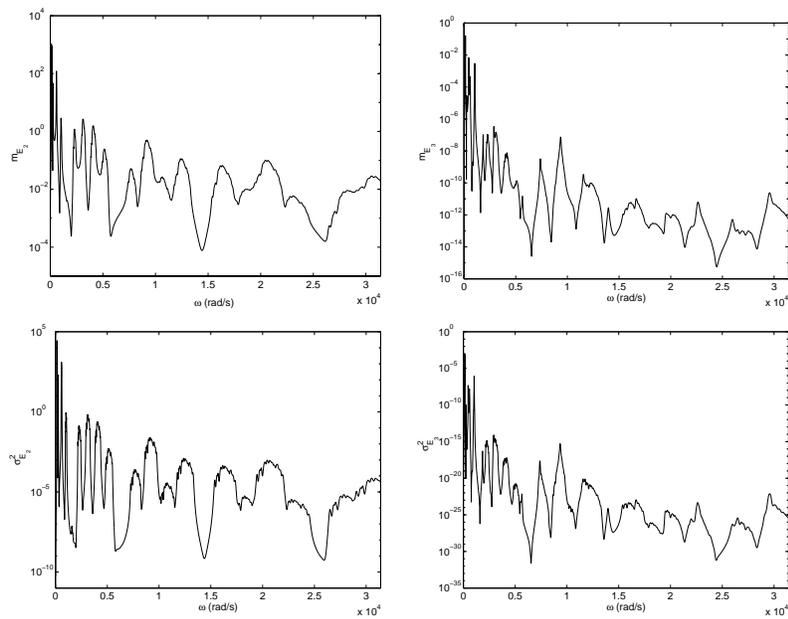


Figura 6.8: Caratteristiche statistiche della densità di energia, sistema travi accoppiate, perturbazione aleatoria su Y_I : **1.** valor medio in ζ_2 ; **2.** valor medio in ζ_3 ; **3.** varianza in ζ_2 ; **4.** varianza ζ_3 .

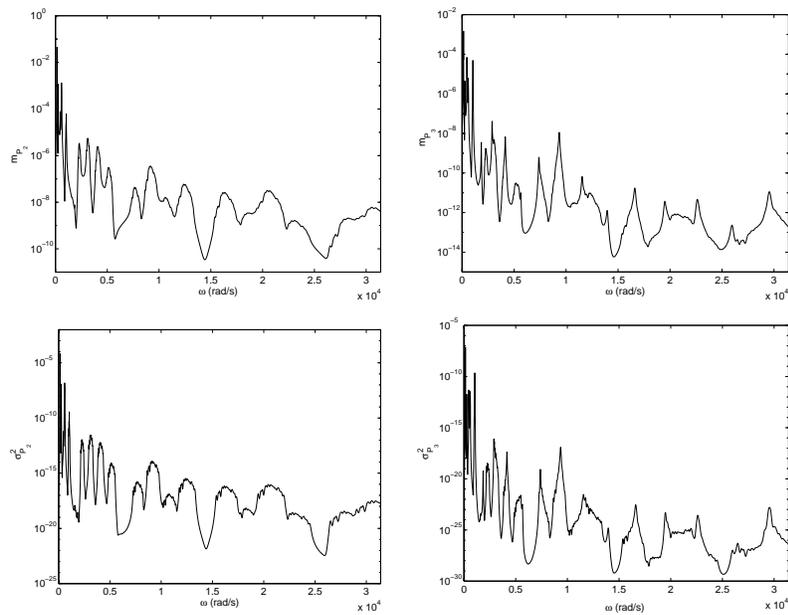


Figura 6.9: Caratteristiche statistiche del flusso di energia, sistema travi accoppiate, perturbazione aleatoria su Y_I : **1.** valor medio in ζ_2 ; **2.** valor medio in ζ_3 ; **3.** varianza in ζ_2 ; **4.** varianza ζ_3 .

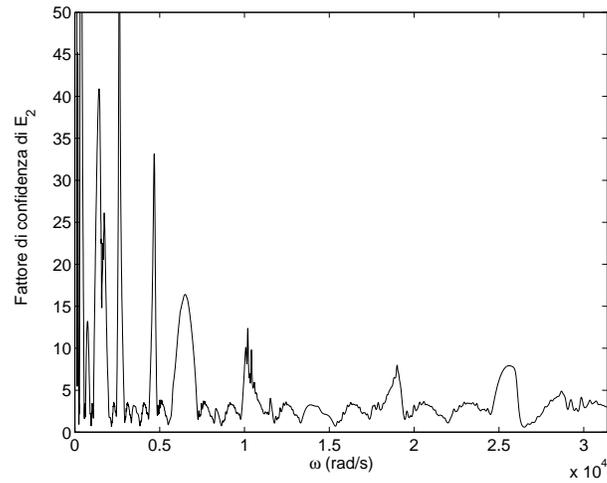


Figura 6.10: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$

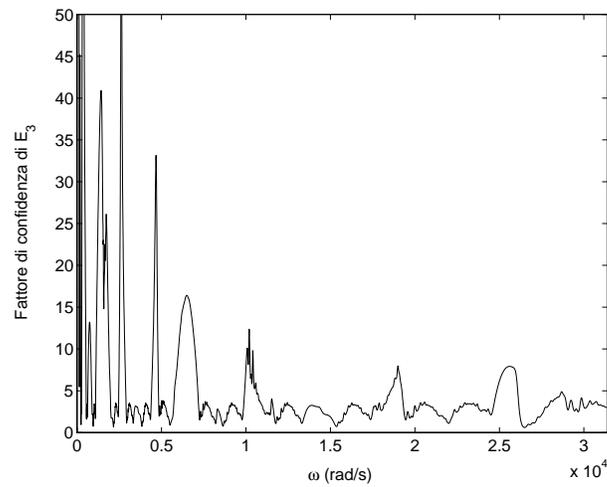


Figura 6.11: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$

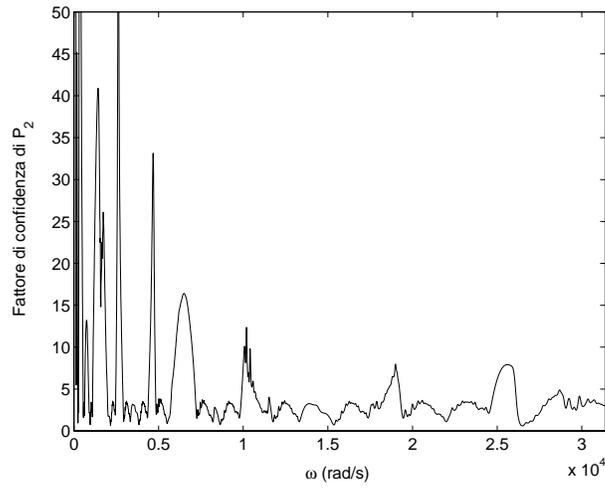


Figura 6.12: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$

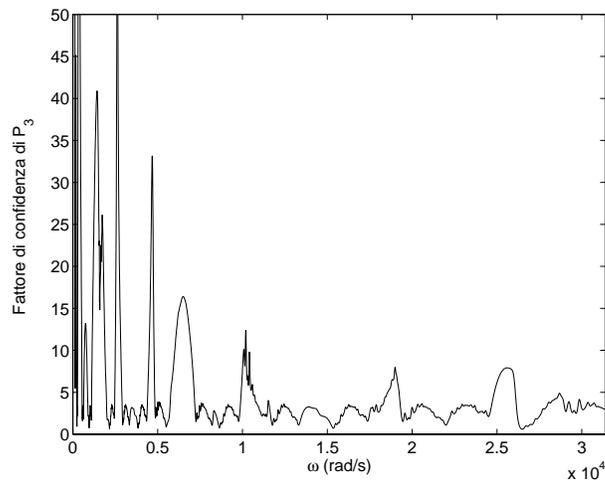


Figura 6.13: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$

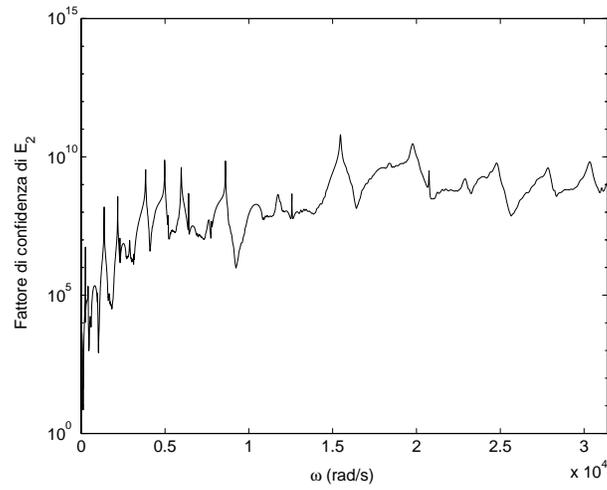


Figura 6.14: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$

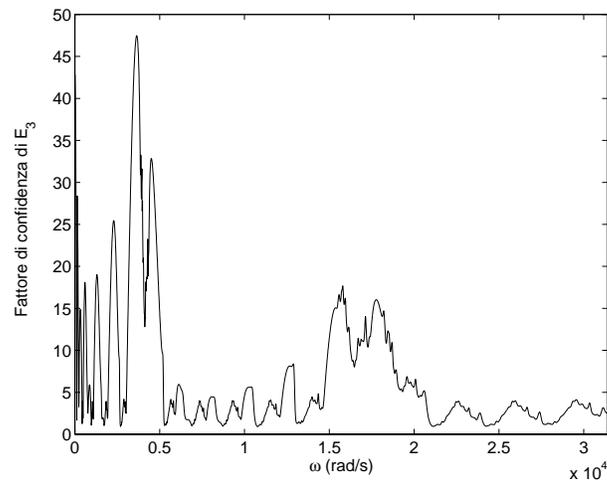


Figura 6.15: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$

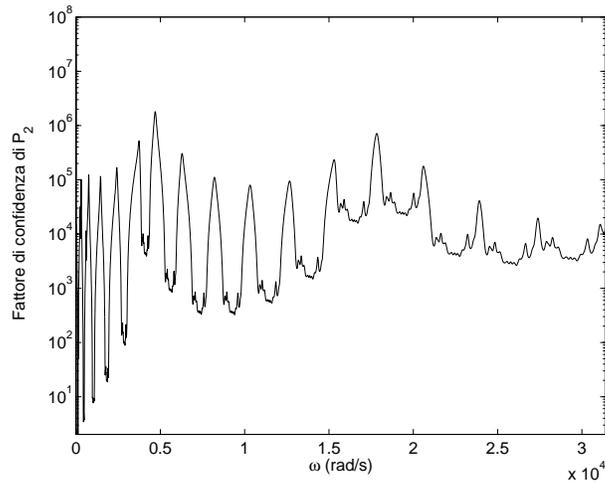


Figura 6.16: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$

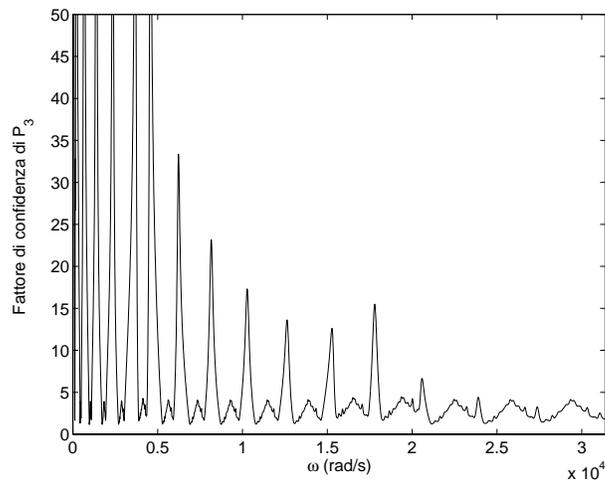


Figura 6.17: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$

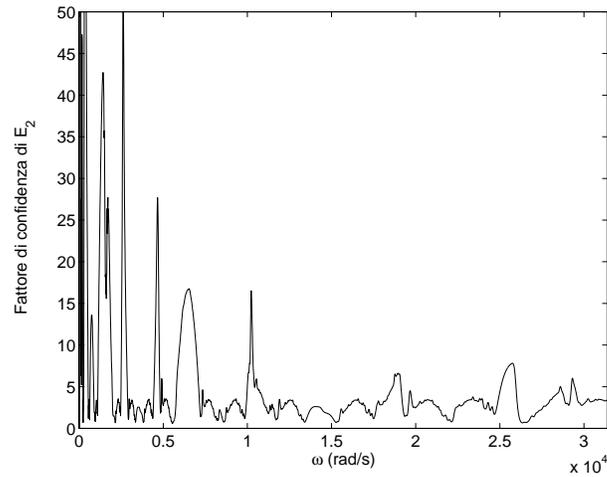


Figura 6.18: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$

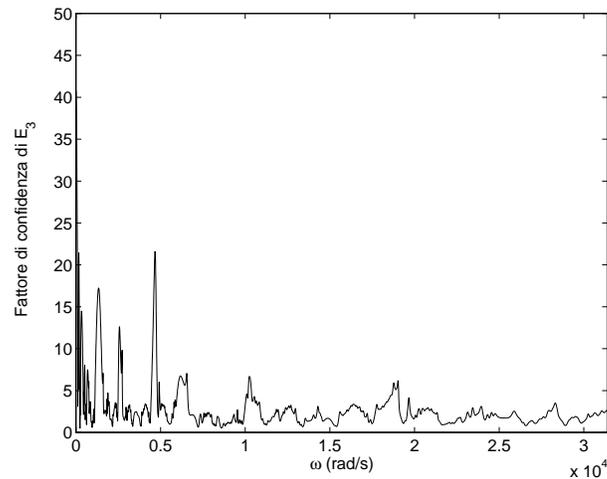


Figura 6.19: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$

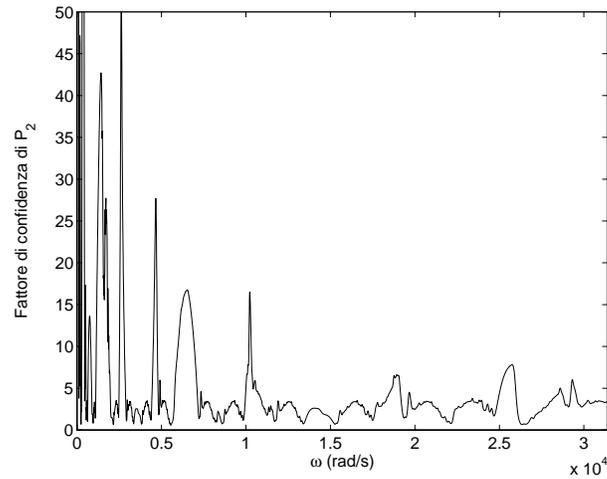


Figura 6.20: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$

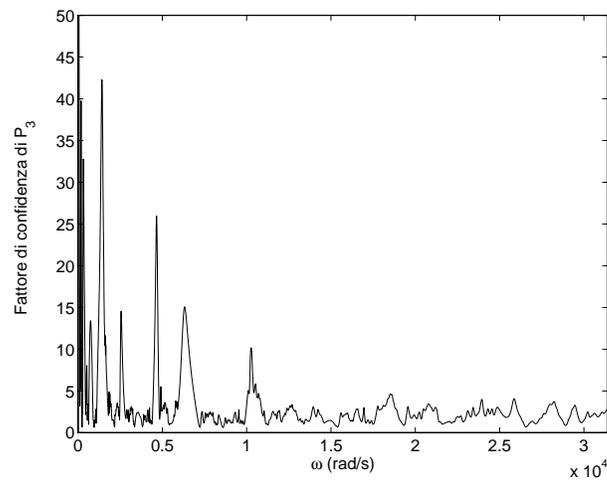


Figura 6.21: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$

6.2.2 Sistema di due piastre accoppiate

Il particolare sistema studiato è composto da due piastre semplicemente appoggiate lungo i quattro lati e connesse tramite il giunto prima presentato -figura 6.22-. Le mobilità hanno le seguenti espressioni:

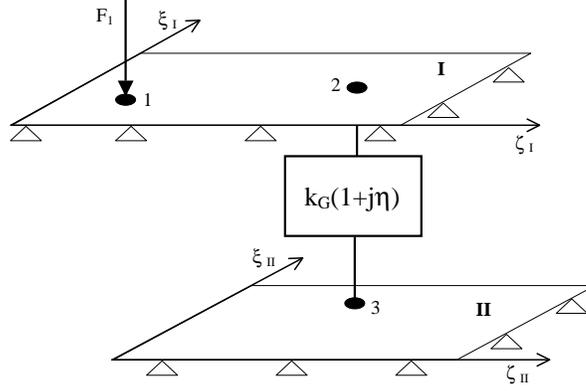


Figura 6.22: Due piastre semplicemente appoggiate accoppiate tramite giunto a mobilità puntuale

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= \frac{4\omega}{\rho_I h_I S_I} \sum_{n,m} \frac{\varphi_{Inm}(\zeta_1, \xi_1) \varphi_{In}(\zeta_2, \xi_2)}{\eta_I \omega_{Inm}^2 + j(\omega^2 - \omega_{Inm}^2)} \\
 M_{22} &= \frac{4\omega}{\rho_I h_I S_I} \sum_{n,m} \frac{\varphi_{Inm}(\zeta_2, \xi_2)^2}{\eta_I \omega_{Inm}^2 + j(\omega^2 - \omega_{Inm}^2)} \\
 M_{33} &= \frac{4\omega}{\rho_{II} h_{II} S_{II}} \sum_{n,m} \frac{\varphi_{IIIm}(\zeta_3, \xi_3)^2}{\eta_{II} \omega_{IIIm}^2 + j(\omega^2 - \omega_{IIIm}^2)}
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

S_I ed S_{II} , h_I ed h_{II} sono rispettivamente le aree superficiali e gli spessori di ciascuna piastra. Autovalori ed autofunzioni sono:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{nm} &= \sin\left(\frac{n\pi\zeta}{L_\zeta}\right) \sin\left(\frac{m\pi\xi}{L_\xi}\right) \quad k_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L_\zeta}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_\xi}\right)^2} \\
 \omega_{nm} &= k_{nm}^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

La prima piastra è eccitata da una forza armonica che agisce nel punto 1 ($\zeta_I = 0.1\text{m}$, $\zeta_{II} = 0.15\text{m}$) e la sua ampiezza è $F_1 = 1\text{N}$. Il giunto connette il punto 2

($\zeta_I = 0.45\text{m}$, $\zeta_{II} = 0.3\text{m}$) della prima piastra con il punto 3 ($\zeta_I = 0.23\text{m}$, $\zeta_{II} = 0.34\text{m}$) della seconda piastra. I valori dei parametri fisici delle due piastre sono date in tavola 6.3. Per quanto riguarda i parametri del giunto si ha:

	Y (Pa)	ρ (kg m^{-3})	ν	h (m)	L_ζ (m)	L_ξ (m)	η
First plate	2.1×10^{11}	7800	0.28	.002	1.	1.	.01
Second plate	2.1×10^{11}	7800	0.28	.0025	1.5	1.	.01

Tabella 6.3: Valori dei parametri fisici delle due piastre

$k_G = 1000\text{N/m}$ e $\eta = 0.01$.

Anche per la presente configurazione sono svolte tre differenti prove con differenti combinazioni di perturbazioni:

1. perturbazione del modulo di Young della prima piastra: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$
2. perturbazione del modulo di Young della seconda piastra: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$
3. perturbazione di moduli di Young di entrambe le piastre: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$

Nelle figure 6.23 e 6.24, a puro titolo esemplificativo, sono rappresentati i grafici di medie e varianze rispettivamente della densità di energia e del flusso di energia nei punti 2 e 3 per perturbazione sul modulo di Young della prima piastra.

Le figure dalla 6.25 alla 6.28 mostrano il comportamento in frequenza dei fattori di confidenza delle quattro grandezze energetiche di interesse quando è perturbato il modulo di Young della prima piastra. Le figure dalla 6.29 alla 6.32 mostrano i grafici dei fattori di confidenza quando è perturbato Y_{II} . Infine le figure dalla 6.33 alla 6.36 mostrano i grafici dei fattori di confidenza quando sono perturbati contemporaneamente Y_I ed Y_{II} .

I grafici mostrano un comportamento analogo a quello discusso per il sistema di travi accoppiate. Le figure 6.30 e 6.32 sembrano disattendere questa simmetria: il fattore di confidenza delle grandezze energetiche nel punto 3, quando è il sistema II ad essere affetto da una perturbazione aleatoria, tende ad un valore sempre crescente all'aumentare della frequenza. Il motivo per questa diversità può essere spiegato nel seguente modo. A differenza della trave, se per una piastra, qualche parametro della quale è affetto da perturbazione aleatoria, è scelto come punto di osservazione lo stesso dell'eccitazione per il calcolo del fattore di confidenza, questo non tende ad un valore costante all'aumentare della frequenza, ma diverge (figura 6.6). Infatti, analoga difformità di comportamento è stata osservata nel paragrafo 5.5 durante lo studio dei sistemi trave e piastra isolati.

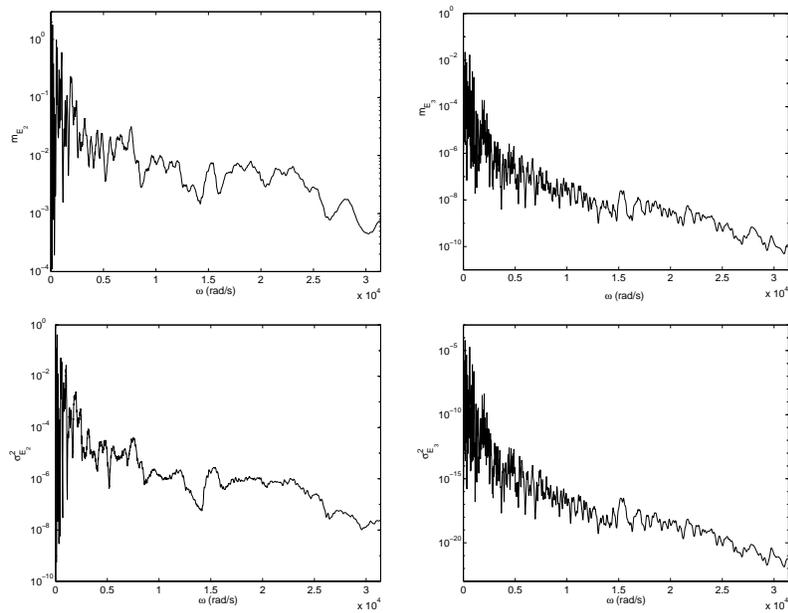


Figura 6.23: Caratteristiche statistiche della densità di energia, sistema piastre accoppiate, perturbazione aleatoria su Y_I : **1.** valor medio in ζ_2 ; **2.** valor medio in ζ_3 ; **3.** varianza in ζ_2 ; **4.** varianza ζ_3 .

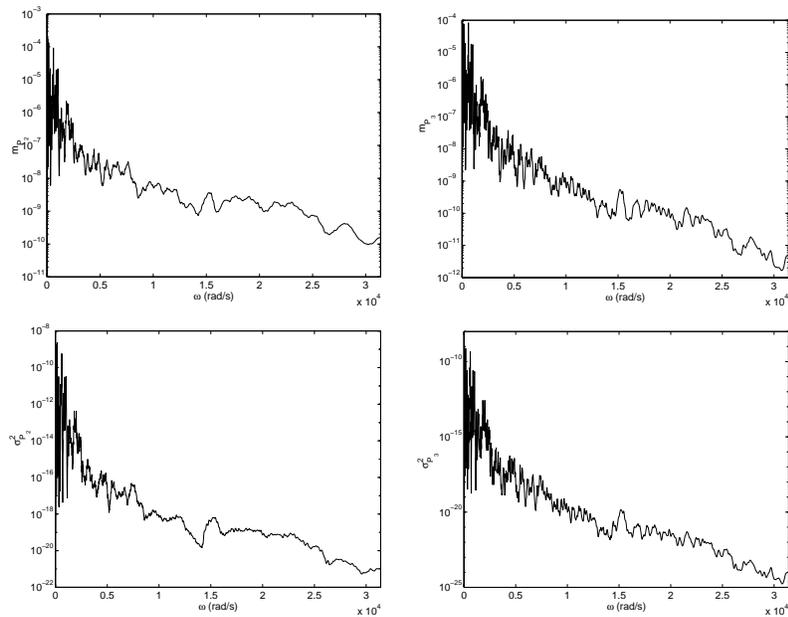


Figura 6.24: Caratteristiche statistiche del flusso di energia, sistema piastre accoppiate, perturbazione aleatoria su Y_I : **1.** valor medio in ζ_2 ; **2.** valor medio in ζ_3 ; **3.** varianza in ζ_2 ; **4.** varianza ζ_3 .

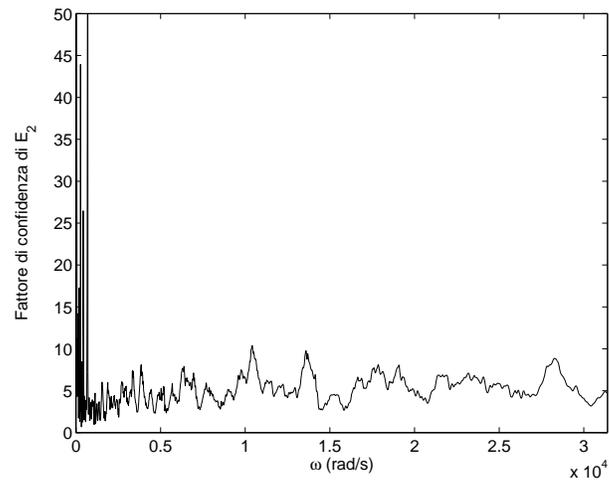


Figura 6.25: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$

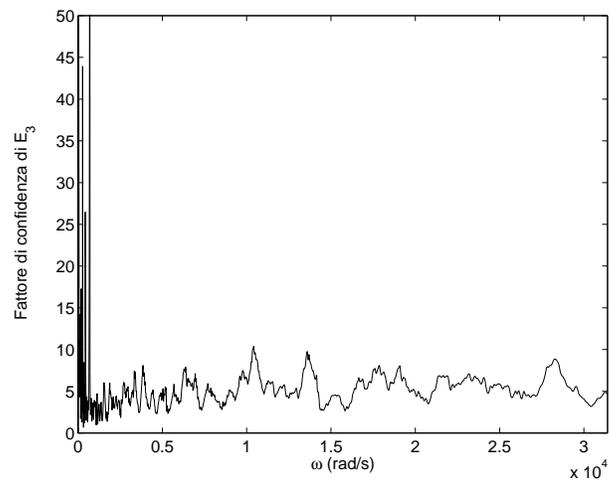


Figura 6.26: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$

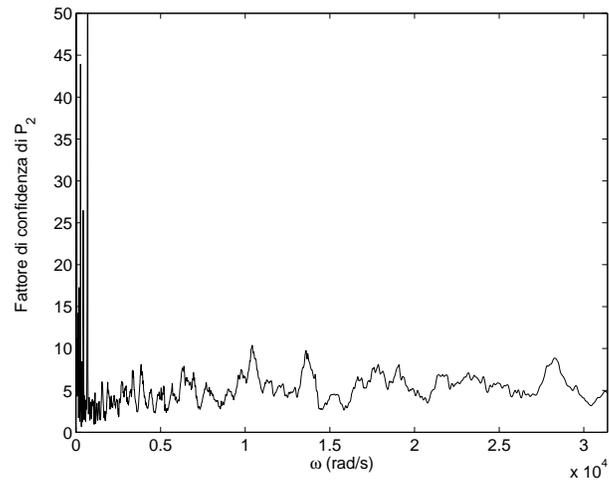


Figura 6.27: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$

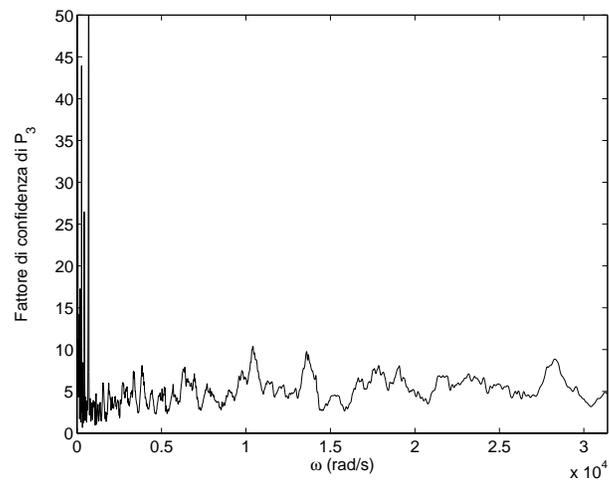


Figura 6.28: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$

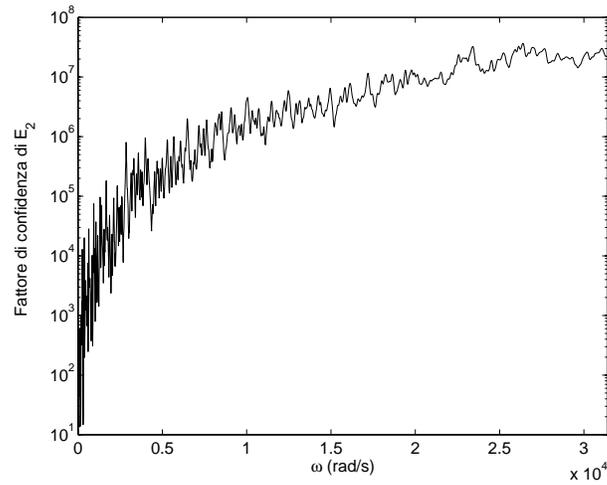


Figura 6.29: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$

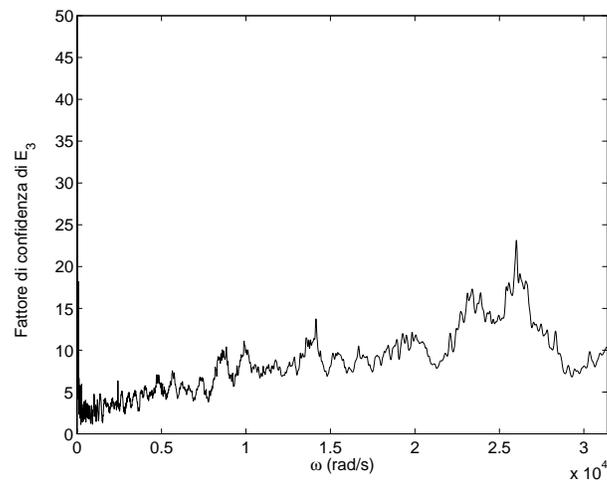


Figura 6.30: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$

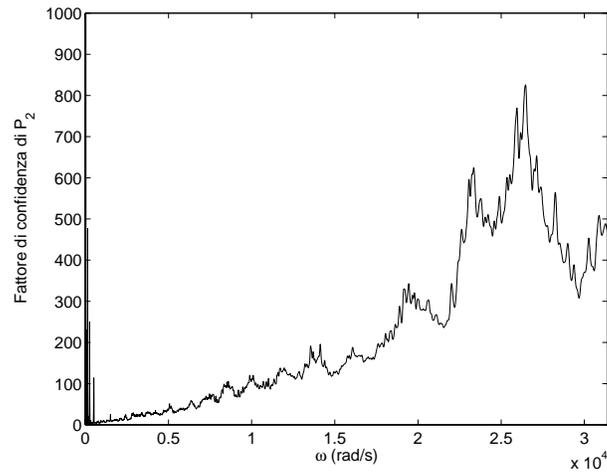


Figura 6.31: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$

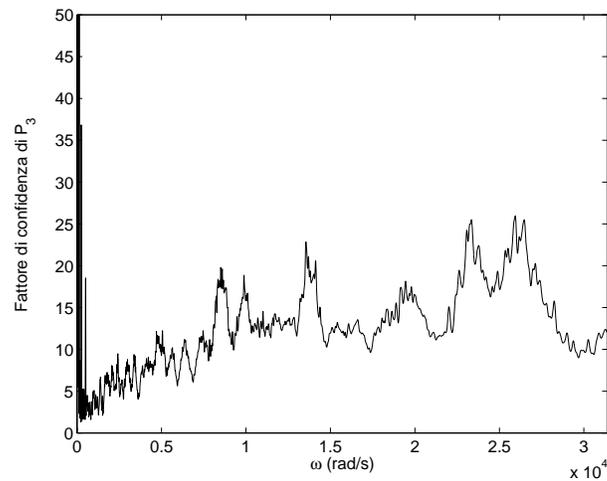


Figura 6.32: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$

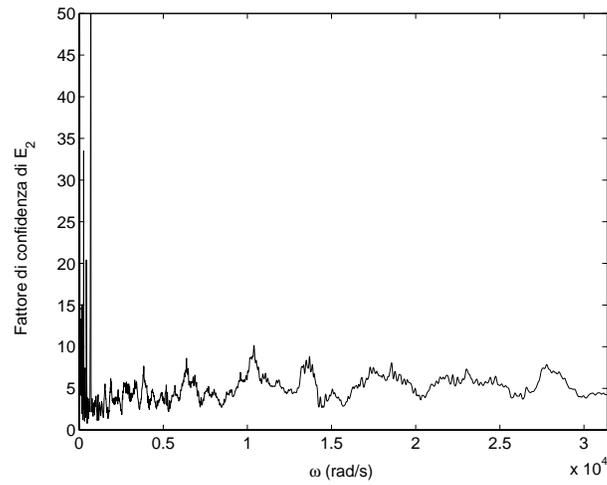


Figura 6.33: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$

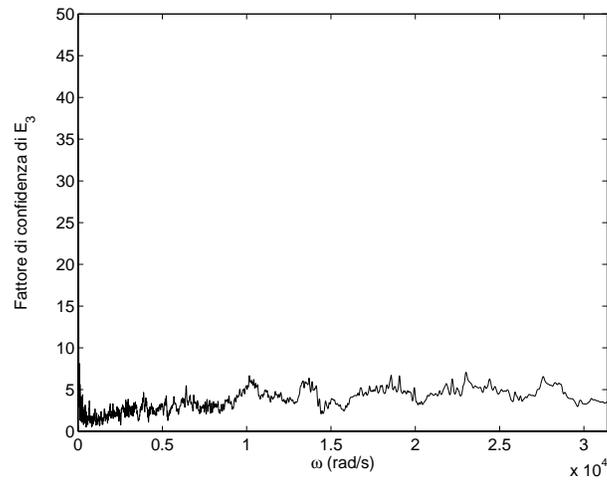


Figura 6.34: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$

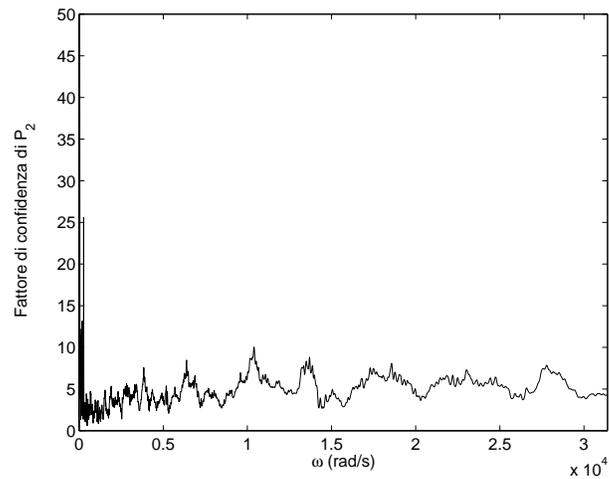


Figura 6.35: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$

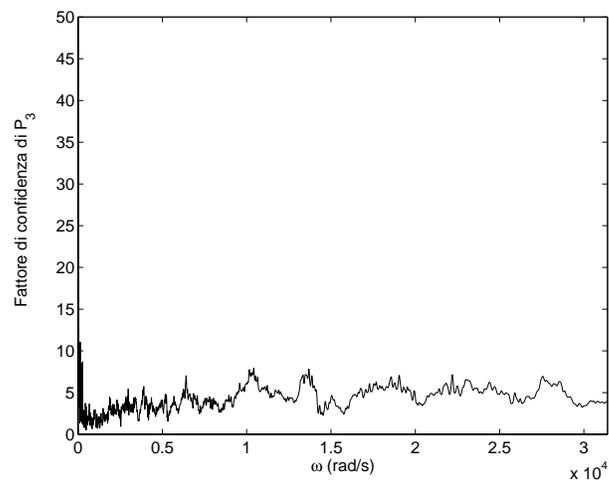


Figura 6.36: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$

Nella tavola 6.4 sono sintetizzati i risultati del fattore di confidenza nei vari casi analizzati al tendere della frequenza ad infinito.

	<i>travi accoppiate</i>			<i>piastre accoppiate</i>		
	\bar{Y}_I	\bar{Y}_{II}	\bar{Y}_I ed \bar{Y}_{II}	\bar{Y}_I	\bar{Y}_{II}	\bar{Y}_I ed \bar{Y}_{II}
E_2	<i>v. c.</i>	∞	<i>v. c.</i>	<i>v. c.</i>	∞	<i>v. c.</i>
E_3	<i>v. c.</i>	<i>v. c.</i>	<i>v. c.</i>	<i>v. c.</i>	∞	<i>v. c.</i>
P_2	<i>v. c.</i>	∞	<i>v. c.</i>	<i>v. c.</i>	∞	<i>v. c.</i>
P_3	<i>v. c.</i>	<i>v. c.</i>	<i>v. c.</i>	<i>v. c.</i>	∞	<i>v. c.</i>

Tabella 6.4: Valori del fattore di confidenza della densità di energia e del flusso di energia di sottosistemi continui accoppiati per varie condizioni di perturbazione stocastica nei punti 2 e 3 del sistema quando $\omega \rightarrow \infty$. Con l'acronimo "v. c." si indica "valore costante".

6.3 Note riepilogative al capitolo

Nel capitolo 5 è mostrata la differenza di comportamento fra il fattore di confidenza di sistemi isolati illimitati e limitati. Nel capitolo 6, invece, sono messi a confronto i fattori di confidenza di due tipologie di sistemi accoppiati in parte simili a quelle viste nel capitolo 5.

La guida d'onda connessa ad un sistema risonante assume un comportamento radicalmente diverso rispetto alla guida d'onda isolata in quanto, a differenza della prima, vede la presenza di due onde sovrapposte: quella incidente e quella riflessa. Non è, ovviamente, ancora un risonatore multimodale, in quanto si tratta sempre di un sistema semi-infinito e quindi non completamente confinato.

I risultati contenuti nella tavola 6.1 e quelli della tavola 6.4, estrapolazione dalle soluzioni Monte Carlo, mostrano un sommario accordo. A meno di particolari condizioni il fattore di confidenza tende ad un valore costante quando la frequenza tende ad infinito.

Di primaria importanza sono i risultati dello studio sulla reciproca posizione fra sorgente ed osservatore, viste nel paragrafo 6.2, la quale inteviene in maniera fondamentale sul comportamento del fattore di confidenza. Infatti, se il mezzo a parametri aleatori viene a trovarsi fra il punto di iniezione e quello di osservazione del segnale, il fattore di confidenza tende ad un valore costante al crescere della frequenza, altrimenti se l'aleatorietà non è direttamente coinvolta nel percorso di trasmissione del segnale fra sorgente e ricevitore il fattore di confidenza non risente nel suo comportamento asintotico della perturbazione stocastica, tendendo esso all'infinito.

Capitolo 7

Perturbazioni aleatorie nei giunti

7.1 Il fattore di confidenza dell'energia e del flusso di energia di due guide d'onda accoppiate tramite una giunzione

Il sistema studiato è formato da due aste infinitamente estese lungo una direzione, accoppiate tramite un giunto, simulato come un sistema elastico ad un grado di libertà privo di massa e con smorzamento isteretico. In figura 7.1 è rappresentato il sistema ed il relativo sistema di riferimento scelto. Il sistema di onde che si

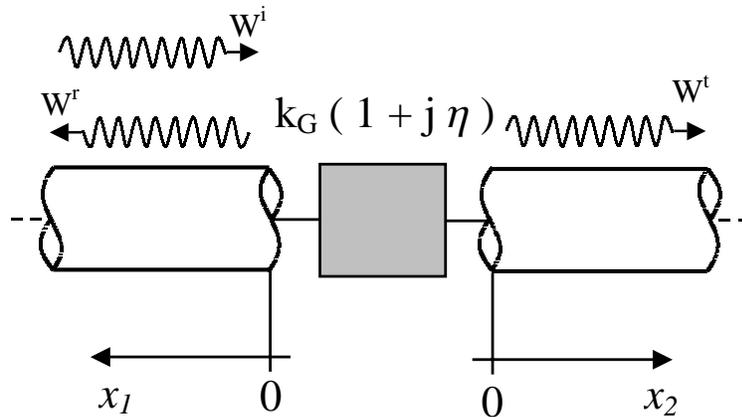


Figura 7.1: Due guide d'onda accoppiate tramite giunzione

muove lungo le due aste è generato nella prima guida d'onda ed è composto da un'onda incidente ed una riflessa nell'asta 1 e da un'onda trasmessa attraverso il giunto nell'asta 2. In base al sistema di riferimento mostrato in figura 7.1, le loro

espressioni matematiche sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
 w_1^i(x_1, t) &= W_1^i e^{-\eta_1 k_1 x_1} e^{j(\omega t + k_1 x_1)} & w_1^r(x_1, t) &= W_1^r e^{-\eta_1 k_1 x_1} e^{j(\omega t - k_1 x_1)} \\
 w_1(x_1, t) &= w_1^i(x_1, t) + w_1^r(x_1, t) & & (7.1) \\
 w_2^t(x_2, t) &= W_2^t e^{-\eta_2 k_2 x_2} e^{j(\omega t - k_2 x_2)}
 \end{aligned}$$

Si definiscono il coefficiente di riflessione, r , e di trasmissione, τ , con le seguenti equazioni:

$$r = \frac{W_1^r}{W_1^i} \quad \tau = \frac{W_2^t}{W_1^i} \quad (7.2)$$

Il loro valore è calcolato tramite le seguenti condizioni al giunto:

$$\begin{cases} N_1|_{x_1=0} = N_2|_{x_2=0} \\ k_G(1 + j\eta_G)(w_1 + w_2)|_{x_1=x_2=0} = -N_2|_{x_2=0} \end{cases} \quad (7.3)$$

N_1 ed N_2 sono, rispettivamente, le trazioni lungo l'asta 1 e 2. In base alle (7.1), in corrispondenza dell'origine dei due sistemi di riferimento, sono rappresentate dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
 N_1|_{x_1=0} &= Y_1 S_1 \left(\frac{\partial w_1^i}{\partial x_1} + \frac{\partial w_1^r}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=0} = S_1 \omega \sqrt{Y_1 \rho_1} [-\eta_1 + j - (\eta_1 + j)r] W_1^i e^{j\omega t} \\
 N_2|_{x_2=0} &= Y_2 S_2 \frac{\partial w_2^t}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = -S_2 \omega \sqrt{Y_2 \rho_2} (\eta_2 + j) W_2^t e^{j\omega t}
 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Le (7.3) con le (7.4) sono riscritte come segue e sono un sistema lineare nelle incognite r e τ :

$$\begin{cases} S_1 \sqrt{Y_1 \rho_1} (\eta_1 + j)r - S_2 \sqrt{Y_2 \rho_2} (\eta_2 + j)\tau = S_1 \sqrt{Y_1 \rho_1} (-\eta_1 + j) \\ k_G(1 + j\eta_G)r + [k_G(1 + j\eta_G) - S_2 \sqrt{Y_2 \rho_2} (\eta_2 + j)] \tau = -k_G(1 + j\eta_G) \end{cases} \quad (7.5)$$

Di seguito è riportata la soluzione del sistema (7.5):

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\sqrt{Y_2 \rho_2} k_G S_2 (j + \eta_2) (1 + j\eta_G) + \sqrt{Y_1 \rho_1} S_1 (-j + \eta_1) [k_G (1 + j\eta_G) - \sqrt{Y_2 \rho_2} S_2 (j + \eta_2) \omega]}{\sqrt{Y_2 \rho_2} k_G S_2 (1 - j\eta_2) (-1 + j\eta_G) + \sqrt{Y_1 \rho_1} S_1 (j + \eta_1) [-k_G (1 + j\eta_G) + \sqrt{Y_2 \rho_2} S_2 (j + \eta_2) \omega]} \\
 \tau &= \frac{2j \sqrt{Y_1 \rho_1} k_G S_1 (-j + \eta_G)}{\sqrt{Y_2 \rho_2} k_G S_2 (1 - j\eta_2) (-1 + j\eta_G) + \sqrt{Y_1 \rho_1} S_1 (j + \eta_1) [-k_G (1 + j\eta_G) + \sqrt{Y_2 \rho_2} S_2 (j + \eta_2) \omega]}
 \end{aligned} \quad (7.6)$$

La funzione densità di energia per ognuna delle aste si calcola specializzando la (5.2) con le (7.1):

$$E_1(x_1, t) = \rho_1 \dot{w}_1^* \dot{w}_1 = \rho_1 \omega^2 |W_1^i|^2 \left[(1 + |r|^2) e^{-2\eta_1 k_1 x_1} + r e^{-2(\eta_1 + j) k_1 x_1} + r^* e^{2(-\eta_1 + j) k_1 x_1} \right] \quad (7.7)$$

$$E_2(x_2, t) = \rho_2 \dot{w}_2^{t*} \dot{w}_2^t = \rho_2 \omega^2 |W_1^i|^2 |\tau|^2 e^{-2\eta_2 k_2 x_2} \quad (7.8)$$

Allo scopo di semplificare i calcoli negli sviluppi successivi si considerano le densità di energia calcolate nell'origine dei sistemi di riferimento, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Le (7.7) e (7.8) diventano:

$$E_1(0, t) = \rho_1 \omega^2 |W_1^i|^2 (1 + |r|^2 + 2\text{Re}\{r\}) \quad (7.9)$$

$$E_2(0, t) = \rho_2 \omega^2 |W_1^i|^2 |\tau|^2$$

Per quanto riguarda il flusso di energia si è interessati al calcolo del suo valore in corrispondenza della giunzione, quindi dell'origine dei sistemi di riferimento. Specializzando la (1.5) si ottengono le seguenti equazioni:

$$P_1 = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ N_1 \left(\dot{w}_1^{i*} + \dot{w}_1^{r*} \right) \right\} \Big|_{x_1=0} = \frac{1}{2} S_1 \omega^2 \sqrt{Y_1 \rho_1} |W_1^i|^2 (1 - |r|^2) \quad (7.10)$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ N_2 \dot{w}_2^* \right\} \Big|_{x_2=0} = -\frac{1}{2} S_2 \omega^2 \sqrt{Y_2 \rho_2} |W_1^i|^2 |\tau|^2 \quad (7.11)$$

Siano perturbati i coefficienti di rigidità e di smorzamento del giunto secondo le regole seguenti:

$$k_G = k_{G_0} (1 + \varepsilon) \quad \eta_G = \eta_{G_0} (1 + \varepsilon) \quad (7.12)$$

Al solito la variabile random adimensionale ε è scelta gaussiana a media nulla, k_{G_0} e η_{G_0} sono i valori nominali rispettivamente della rigidità e dello smorzamento del giunto.

I fattori di confidenza dell'energia e del flusso di energia sono calcolati seguendo la (4.6), specializzata al caso attuale. A causa della complessità dei calcoli le operazioni sono state svolte attraverso un programma di manipolazione simbolica arrivando a calcolare il limite dei fattori di confidenza per la frequenza tendente ad infinito nelle varie condizioni di perturbazione. Nella tavola 7.1 sono riportati i risultati.

	<i>densità di energia</i>		<i>flusso di energia</i>	
	$\lim_{\omega \rightarrow \infty} f_{c_1}$	$\lim_{\omega \rightarrow \infty} f_{c_2}$	$\lim_{\omega \rightarrow \infty} f_{c_1}$	$\lim_{\omega \rightarrow \infty} f_{c_2}$
$k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$	∞	$\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$	$\frac{1}{\sigma_\varepsilon}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$
$\eta_G = \eta_{G_0}(1 + \varepsilon)$	∞	$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\eta_{G_0}}\right) \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$	$\frac{1}{\sigma_\varepsilon}$	$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\eta_{G_0}^2}\right) \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$

Tabella 7.1: Valori del fattore di confidenza della densità di energia e del flusso di energia di due guide d'onda longitudinali accoppiate tramite giunzione in diverse condizioni di perturbazione aleatoria dei parametri del giunto per $\omega \rightarrow \infty$

7.2 Il fattore di confidenza dell'energia e del flusso di energia di due sistemi risonanti accoppiati tramite una giunzione

Il sistema considerato è lo stesso del paragrafo 6.2 descritto dalla figura 6.6. Anche in questo caso si è interessati allo studio del fattore di confidenza della densità di energia meccanica totale e della potenza meccanica nei punti 2 e 3. La perturbazione, in questo caso, è imposta sulla rigidezza del giunto:

$$k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$$

k_{G_0} è la rigidezza di riferimento, ε una variabile random a distribuzione gaussiana e media nulla.

Si introducono le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} \mu &= |M_{21}F_1|^2 & \alpha &= \mu \operatorname{Re}\{M_{33}^*\} & a &= \operatorname{Re}\{M_{33}\} + \operatorname{Im}\{M_{33}\} \\ \beta &= \operatorname{Re}\{M_{33}\} + \operatorname{Re}\{M_{22}\} & b &= (1 + \eta^2)\omega^2 & \gamma &= \operatorname{Im}\{M_{33}\} + \operatorname{Im}\{M_{22}\} \\ c &= \operatorname{Im}\{M_{22}\} + \operatorname{Re}\{M_{22}\}\eta & d &= \operatorname{Im}\{M_{33}\} + \operatorname{Re}\{M_{33}\}\eta & \delta &= \beta^2 + \gamma^2 \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$A = 2 \left[1 + \frac{\omega(\beta\eta + \gamma)}{k_{G_0}\delta} \right] \quad B = 1 + \frac{\omega^2}{k_{G_0}^2\delta} + \frac{2\omega(\beta\eta + \gamma)}{k_{G_0}\delta} \quad (7.14)$$

Con le precedenti posizioni, E_2 , E_3 , P_2 e P_3 possono essere riscritte come segue:

$$E_2 = \rho\mu \frac{ak_{G_0}\varepsilon^2 + (2ak_{G_0}^2 + 2k_{G_0}d\omega)\varepsilon + ak_{G_0}^2 + b + 2k_{G_0}d\omega}{\delta k_{G_0}^2\varepsilon^2 + [2k_{G_0}^2\delta + 2k_{G_0}(c+d)\omega]\varepsilon + b + k_{G_0}^2\delta + 2k_{G_0}(c+d)} \quad (7.15)$$

$$E_3 = \rho\mu \frac{k_{G_0}^2|M_{33}|^2(\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1)}{\delta k_{G_0}^2\varepsilon^2 + [2k_{G_0}^2\delta + 2k_{G_0}(c+d)\omega]\varepsilon + b + k_{G_0}^2\delta + 2k_{G_0}(c+d)} \quad (7.16)$$

$$P_3 = \frac{\alpha}{2\delta} \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1}{\varepsilon^2 + A\varepsilon + B} \quad (7.17)$$

$$P_2 = -P_3 - \frac{\mu\eta\omega}{2k_{G_0}\delta} \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon^2 + A\varepsilon + B} \quad (7.18)$$

Queste espressioni offrono la dipendenza esplicita del flusso di energia rispetto alla perturbazione random, ε , espressioni queste necessarie per il calcolo dei momenti statistici e, quindi, del fattore di confidenza della potenza trasmessa.

Allo scopo di calcolare il fattore di confidenza per i due flussi di energia si ricordano le (4.6). Il procedimento è, al solito, quello di sviluppare in serie di Taylor intorno al valor medio della perturbazione. In base alle (7.15), (7.16), (7.17) e (7.18) ed alle posizioni (7.13) e (7.14) le espressioni dei fattori di confidenza assumono la seguente forma:

$$f_{c_{E_2}} = \left| \frac{(ak_{G_0}^2b + 2k_{G_0}d\omega)[b + k_{G_0}(k_{G_0}\delta + 2\omega(c+d))]}{2k_{G_0}[k_{G_0}b\delta + bc\omega + k_{G_0}^2c\delta\omega - \alpha k_{G_0}(b + k_{G_0}\omega(c+d))]} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad (7.19)$$

$$f_{c_{E_3}} = \left| \frac{b + k_{G_0}[k_{G_0}\delta + 2\omega(c+d)]}{2[b + k_{G_0}\omega(c+d)]} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad (7.20)$$

$$f_{c_{P_2}} = \left| \frac{(k_{G_0}\alpha + \eta\mu\omega)(k_{G_0}^2\delta + 2k_{G_0}\omega(\beta\eta + \gamma) + \omega^2)}{k_{G_0}^2\omega(2\alpha\beta\eta + 2\alpha\gamma - \eta\mu\delta) + 2k_{G_0}\alpha\omega^2 + \eta\mu\omega^3} \right| \frac{1}{\sigma_x} \quad (7.21)$$

$$f_{c_{P_3}} = \left| \frac{k_{G_0}^2\delta + 2k_{G_0}\omega(\beta\eta + \gamma) + \omega^2}{2k_{G_0}\omega(\beta\eta + \gamma) + 2\omega^2} \right| \frac{1}{\sigma_x} \quad (7.22)$$

È sviluppata un'analisi asintotica del fattore di confidenza per calcolarne il valore limite quando la frequenza tende all'infinito. La tavola 7.2 sintetizza come tendono a zero i parametri che appaiono nelle equazioni precedenti secondo i calcoli sviluppati in appendice A. In base alle equazioni dalla (7.19) alla (7.22) ed alla tavola prima menzionata si possono scrivere i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} f_{c_{E_2}} &= \infty & \lim_{\omega \rightarrow \infty} f_{c_{E_3}} &= \frac{1}{2\sigma_\varepsilon} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} f_{c_{P_2}} &= \frac{1}{\sigma_\varepsilon} & \lim_{\omega \rightarrow \infty} f_{c_{P_3}} &= \frac{1}{2\sigma_\varepsilon} \end{aligned} \quad (7.23)$$

	$\text{Re}\{M\}$	$\text{Im}\{M\}$	$ M $	α	a	β	b
<i>tende a zero come</i>	$1/\omega$	$1/\omega$	$1/\omega$	$1/\omega^3$	$1/\omega$	$1/\omega$	ω^2
	γ	c	d	δ	μ	A	B
<i>tende a zero come</i>	$1/\omega$	$1/\omega$	$1/\omega$	$1/\omega^2$	$1/\omega^2$	ω^2	ω^4

Tabella 7.2: Comportamento asintotico di alcune grandezze utilizzate per $\omega \rightarrow \infty$

Si deve notare che la differenza fra i due fattori di confidenza del flusso di energia può essere attribuito al fattore di perdita del giunto, η . Infatti quando η è uguale a zero entrambi i fattori assumono lo stesso valore, $1/2\sigma_\varepsilon$, perché P_2 è uguale a P_3 . Nel caso presente, invece, dove il giunto non è conservativo, il fattore di confidenza di P_2 assume un valore maggiore rispetto a quello di P_3 .

Le (7.23) mostrano come la distanza fra punto di iniezione del segnale e punto di osservazione, in relazione alla posizione del mezzo considerato aleatorio, giochi un ruolo importantissimo sulla confidenza dei risultati. I valori asintotici dei fattori di confidenza calcolati nel punto 2, che si trova fra il punto di eccitazione ed il giunto, sono maggiori di quelli calcolati in 3. In particolare, per quanto riguarda la densità di energia, il comportamento di f_{cE_2} dimostra che l'aleatorietà della rigidità del giunto ha un contributo irrilevante sul campo di velocità in 2 rispetto al contributo dovuto alla forza esterna. Ricordiamo, comunque, che si tratta di campi diffusi perché i sistemi sono risonanti e non infiniti. Il valore assunto dai limiti dei fattori di confidenza f_{cE_3} , f_{cP_2} e f_{cP_3} mostra come l'informazione sia tanto più compromessa quanto più è elevata la deviazione standard della perturbazione stocastica della rigidità del giunto, quindi quanto più è rilevante la sua aleatorietà.

Ulteriore importante conclusione è che i risultati teorici ora esposti coincidono perfettamente con quelli ottenuti nel paragrafo precedente per le guide d'onda accoppiate (tavola 7.1).

I fattori di confidenza che tendono ad un valore costante presentano differenti comportamenti in due differenti campi di frequenze: nel primo f_c ha oscillazioni di ampiezza elevata, nel secondo è quasi piatto. Questi due differenti comportamenti sono legati al valore di k_{G_0} . Considerando nell'ordine le equazioni (7.20), (7.22) e (7.21) è chiaro che quando si verifica ciascuna delle seguenti condizioni per il numeratore ed il denominatore:

$$(1 + \eta^2)\omega^2 \gg k_{G_0}[k_{G_0}\delta + 2\omega(c + d)] \quad (7.24)$$

$$(1 + \eta^2)\omega^2 \gg k_{G_0}\omega(c + d)$$

per $f_{c_{E_3}}$,

$$\begin{aligned}\omega^2 &\gg k_{G_0}^2 \delta + 2k_{G_0} \omega (\beta \eta + \gamma) \\ \omega^2 &\gg k_{G_0} \omega (\beta \eta + \gamma)\end{aligned}\tag{7.25}$$

per $f_{c_{P_3}}$ e

$$\begin{aligned}\eta \mu \omega^3 &\gg (k_{G_0} \alpha + \eta \mu \omega) [k_{G_0}^2 \delta + 2k_{G_0} \omega (\beta \eta + \gamma)] + k_{G_0} \alpha \omega^2 \\ \eta \mu \omega^3 &\gg 2k_{G_0} \alpha \omega^2 + k_{G_0}^2 \omega (2\alpha \beta \eta + 2\alpha \gamma - \eta \mu \delta)\end{aligned}\tag{7.26}$$

per $f_{c_{P_2}}$ allora si ottiene:

$$f_{c_{E_3}} \simeq \left| \frac{(1 + \eta^2) \omega^2}{2(1 + \eta^2) \omega^2} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad f_{c_{P_3}} \simeq \left| \frac{\omega^2}{2\omega^2} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \quad f_{c_{P_2}} \simeq \left| \frac{\eta \mu \omega^3}{\eta \mu \omega^3} \right| \frac{1}{\sigma_\varepsilon}$$

ovvero i fattori di confidenza tendono a diventare costanti ed uguali al valore asintotico dato dalle (7.23).

Le condizioni (7.24), (7.25) e (7.26) definiscono i valori delle frequenze che separano la regione oscillatoria da quella non oscillatoria. Allo scopo di stimare questi valori è sviluppata un'analisi adimensionale della mobilità.

Scegliendo la forma adimensionale, $\tilde{\omega}_n = \omega_n / \omega$, la mobilità di un sistema modale può essere scritta, in base alla (5.28), come segue:

$$M_{qr} = \frac{\chi}{m_t \omega} \sum_n \frac{\phi(x_q) \phi(x_r)}{\tilde{\omega}_n^2 \eta + j(1 - \tilde{\omega}_n^2)} = \frac{\chi}{m_t \omega} \tilde{M}_{qr}\tag{7.27}$$

dove m_t è la massa de sistema e χ è una costante: vale $\chi = 2$ per una struttura monodimensionale (trave) e $\chi = 4$ per una struttura bidimensionale (piastra). Si impongono le seguenti posizioni adimensionali:

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= \frac{m_T \omega}{\chi} \beta & \tilde{\gamma} &= \frac{m_T \omega}{\chi} \gamma & \tilde{\delta} &= \frac{m_T^2 \omega^2}{\chi^2} \delta \\ \tilde{c} &= \frac{m_T \omega}{\chi} c & \tilde{d} &= \frac{m_T \omega}{\chi} d\end{aligned}\tag{7.28}$$

dove m_T è la massa dell'intero sistema accoppiato. La semplificazione è in armonia con l'intento, in seguito ulteriormente sviluppato, di massimizzare il valore della grandezza adimensionale. Le (7.24), (7.25) e (7.26) diventano:

$$\begin{aligned}(1 + \eta^2) \omega^2 &\gg \frac{k_{G_0}^2 \chi^2}{m_T^2 \omega^2} \tilde{\delta} + \frac{2k_{G_0} \chi}{m_T} (\tilde{c} + \tilde{d}) \\ (1 + \eta^2) \omega^2 &\gg \frac{k_{G_0} \chi}{m_T} (\tilde{c} + \tilde{d})\end{aligned}\tag{7.29}$$

$$\omega^2 \gg \frac{k_{G_0}\chi}{m_T} \left(\frac{k_{G_0}\chi}{m_T\omega^2}\tilde{\delta} + 2\tilde{\beta}\eta + 2\tilde{\gamma} \right) \quad (7.30)$$

$$\omega^2 \gg \frac{k_{G_0}\chi}{m_T} (\tilde{\beta}\eta + \tilde{\gamma})$$

$$\begin{aligned} \eta\omega^3 \gg & \left(\frac{k_{G_0}\chi}{m_T\omega} \operatorname{Re}\{\tilde{M}_{33}\} + \eta\omega \right) \frac{\chi}{m_T\omega} \left[\frac{k_{G_0}^2\chi}{m_T\omega^2}\tilde{\delta} + 2k_{G_0}\omega(\tilde{\beta}\eta + \tilde{\gamma}) \right] + \\ & + \frac{k_{G_0}\chi\omega}{m_T} \operatorname{Re}\{\tilde{M}_{33}\} \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$\eta\omega^3 \gg 2\frac{k_{G_0}\chi\omega}{m_T} \operatorname{Re}\{\tilde{M}_{33}\} + \frac{k_{G_0}^2\chi^2}{m_T^2\omega} \left(2\tilde{\beta}\eta \operatorname{Re}\{\tilde{M}_{33}\} + 2\tilde{\gamma} - \eta\tilde{\delta} \right)$$

Poiché la mobilità ha un picco in risonanza è possibile massimizzare in maniera ulteriore le quantità adimensionali. In risonanza, $\tilde{\omega}_n$ è uguale all'unità ed il valore del prodotto degli autovettori, $\phi_n(x_q)\phi_n(x_r)$, può essere massimizzato sostituendovi il valore unitario. Quindi i massimi delle quantità non dimensionali sono:

$$\begin{aligned} \tilde{M} &\simeq \frac{1}{\eta} & \operatorname{Re}\{\tilde{M}\} &\simeq \frac{1}{\eta} & \operatorname{Im}\{\tilde{M}\} &\simeq 0 & \tilde{\beta} &\simeq \frac{2}{\eta} \\ \tilde{\gamma} &\simeq 0 & \tilde{\delta} &\simeq \frac{4}{\eta^2} & \tilde{c} &\simeq 1 & \tilde{d} &\simeq 1 \end{aligned} \quad (7.32)$$

infatti, nella sommatoria che definisce la \tilde{M} -vedi (7.27)- il termine risonante è quello che offre il contributo maggiore pari a $1/\eta$.

Sostituendo le (7.32) nelle (7.29), (7.30) e (7.31), essendo $\eta \ll 1$, si possono riscrivere le seguenti equazioni:

$$\omega^4 - \frac{4k_{G_0}\chi}{m_T}\omega^2 - \frac{4k_{G_0}^2\chi^2}{m_T^2\eta^2} \gg 0 \quad (7.33)$$

$$\omega^2 \gg \frac{2k_{G_0}\chi}{m_T}$$

$$\omega^4 - \frac{4k_{G_0}\chi}{m_T}\omega^2 - \frac{4k_{G_0}^2\chi^2}{m_T^2\eta^2} \gg 0 \quad (7.34)$$

$$\omega^2 \gg \frac{k_{G_0}\chi}{m_T}$$

$$\eta\omega^6 - \frac{k_{G_0}\chi}{m_T} \left(4 + \frac{1}{\eta} \right) \omega^4 - \frac{8k_{G_0}^2\chi^2}{m_T^2\eta} \omega^2 - \frac{4k_{G_0}^3\chi^3}{m_T^3\eta^3} \gg 0 \quad (7.35)$$

$$\eta\omega^4 - \frac{2k_{G_0}\chi}{m_T\eta} \omega^2 \gg 0$$

La soluzione dell'equazione associata alla prima delle disequazioni (7.33) è:

$$\omega^2 = \pm \frac{2k_{G_0}\chi}{m_T\eta}$$

considerando la seconda disequazione la soluzione cercata si restringe alla seguente relazione:

$$\omega^2 \gg \frac{2k_{G_0}\chi}{m_T\eta} \quad (7.36)$$

la quale offre il valore della frequenza di transizione fra comportamento oscillatorio e non oscillatorio per $f_{c_{E_3}}$. Per le (7.34) si segue un procedimento analogo ottenendo lo stesso risultato offerto dalla (7.36). La seconda delle (7.35) offre la seguente soluzione utile:

$$\omega^2 \gg \frac{2k_{G_0}\chi}{m_T\eta^2} \quad (7.37)$$

mentre la prima, ricordando la posizione $\eta^2 \ll 1$, è riscritta nel modo seguente:

$$(\omega^2)^3 - \frac{k_{G_0}\chi}{m_T\eta^2}(\omega^2)^2 - \frac{8k_{G_0}^2\chi^2}{m_T\eta^2}\omega^2 - \frac{4k_{G_0}^3\chi^3}{m_T^3\eta^3} \gg 0 \quad (7.38)$$

La soluzione della precedente disequazione utile al calcolo della frequenza di transizione è:

$$\omega^2 \gg \frac{k_{G_0}\chi}{2m_T\eta^2} \quad (7.39)$$

Comparando la (7.37) con la (7.39) si può vedere come la (7.37) sia la regola che definisce il valore di demarcazione fra comportamento oscillatorio e non oscillatorio per $f_{c_{P_2}}$.

I risultati ottenuti sono riassunti nella tavola 7.3.

Di seguito sono esaminati due esempi numerici relativi a due risonatori accoppiati. Lo studio di questi sistemi analizza il comportamento del fattore di confidenza di sistemi che hanno differenti densità modali. Il primo sistema è rappresentato

	$f_{c_{E_3}}$	$f_{c_{P_2}}$	$f_{c_{P_3}}$
<i>frequenza di transizione</i>	$\omega^2 \gg \frac{2k_{G_0}\chi}{m_T\eta}$	$\omega^2 \gg \frac{2k_{G_0}\chi}{m_T\eta^2}$	$\omega^2 \gg \frac{2k_{G_0}\chi}{m_T\eta}$

Tabella 7.3: Frequenze di transizione da comportamento oscillatorio a non oscillatorio per i fattori di confidenza: $f_{c_{E_3}}$, $f_{c_{P_2}}$ e $f_{c_{P_3}}$

da due travi accoppiate: è preso in considerazione un campo di onde flessionali, la densità modale decresce come $1/\sqrt{\omega}$. Due piastre accoppiate rappresentano il secondo sistema considerato. Anche in questo caso è studiato il campo ondoso flessionale. La densità modale è costante con la frequenza. Questi due sistemi hanno entrambi una rigidezza del giunto aleatoria, $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$. Una densità di distribuzione gaussiana è scelta per la variabile ε , con media nulla e deviazione standard $\sigma_\varepsilon = 0.05$. I valori scelti per la rigidezza nominale del giunto sono due: $k_{G_0} = 1000$ N/m e $k_{G_0} = 10000$ N/m, in modo da indagare, al variare della rigidezza nominale del giunto, il comportamento della frequenza di transizione. Le configurazioni studiate sono le stesse considerate nei capitoli 6.3.1 e 6.3.2 (figure 6.3 e 6.22). In questa occasione, però, l'aleatorietà non è imposta su di un parametro distribuito dei sistemi, il modulo di Young, ma su un parametro concentrato, la rigidezza del giunto. Le figure dalla 7.2 alla 7.7 mostrano i grafici del fattore di confidenza della densità di energia dei due sistemi calcolato nei due punti indagati. Le curve denunciano un evidente accordo con i risultati teorici ottenuti. Per entrambi i sistemi, mentre nel punto 2 il fattore di confidenza dell'energia tende ad aumentare al crescere della frequenza (figure 7.2 e 7.5), invece nel punto 3 (figure 7.3, 7.4, 7.6 e 7.7) f_c tende ad un valore costante molto prossimo a quello predetto teoricamente nelle (7.23): $f_c \rightarrow 1/2\sigma_\varepsilon$. Per quanto riguarda

	<i>travi accoppiate</i>		<i>piastre accoppiate</i>	
	$k_{G_0} = 1000$	$k_{G_0} = 10000$	$k_{G_0} = 1000$	$k_{G_0} = 10000$
$f_{c_{E_3}}$	$\omega \gg 491$ rad/s	$\omega \gg 1552$ rad/s	$\omega \gg 133$ rad/s	$\omega \gg 422$ rad/s
$f_{c_{P_2}}$	$\omega \gg 4909$ rad/s	$\omega \gg 6942$ rad/s	$\omega \gg 1335$ rad/s	$\omega \gg 4223$ rad/s
$f_{c_{P_3}}$	$\omega \gg 491$ rad/s	$\omega \gg 1552$ rad/s	$\omega \gg 133$ rad/s	$\omega \gg 422$ rad/s

Tabella 7.4: Valori delle frequenze di transizione per i sistemi studiati. Per le travi: $\eta = 0.01$, $m_T = 1.66$ Kg, per le piastre: $\eta = 0.01$, $m_T = 44.85$ Kg

la frequenza di transizione di $f_{c_{E_3}}$ le figure 7.3, 7.4, 7.6 e 7.7 mostrano come sia valido l'accordo fra la simulazione numerica ed il valore predetto dalla teoria riportato nella tavola 7.4.

Nelle figure dalla 7.8 alla 7.15 sono rappresentati i grafici del fattore di confidenza del flusso di energia dei due sistemi studiati. Come è stato per la densità di energia il comportamento illustrato è concorde con i risultati teorici. Le figure 7.8, 7.9, 7.12 e 7.13 mostrano i grafici di f_c calcolato nel punto 2: la teoria qui prevede che il fattore di confidenza, al crescere della frequenza, tenda al valore costante $1/\sigma_\varepsilon$. Nelle figure 7.10, 7.11, 7.14 e 7.15, invece, figurano i grafici del fattore di confidenza calcolato nel punto 3: qui la predizione della teoria è ancora che f_c tenda ad un valore costante, ma pari a $1/2\sigma_\varepsilon$.

Per quanto riguarda le frequenze di transizione di $f_{c_{P_2}}$ e $f_{c_{P_3}}$ anche in questi casi

si vede l'accordo fra simulazione numerica e teoria in base ai valori indicati nella tavola 7.4.

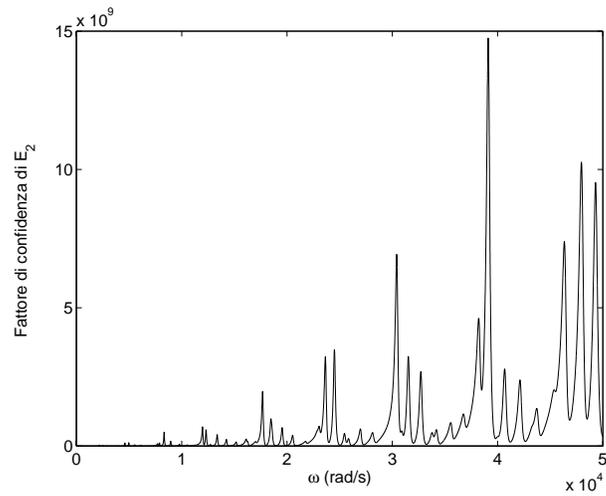


Figura 7.2: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m.

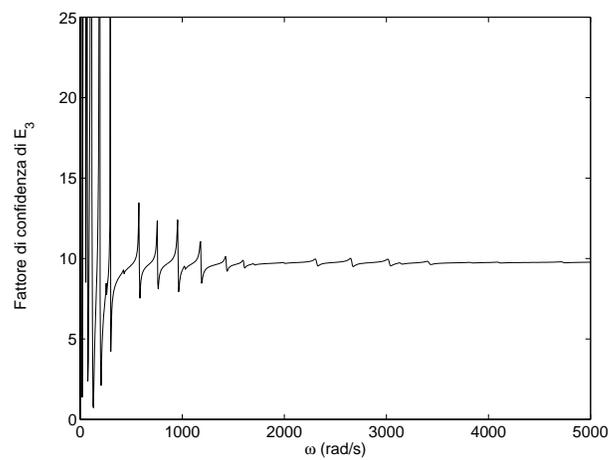


Figura 7.3: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m.

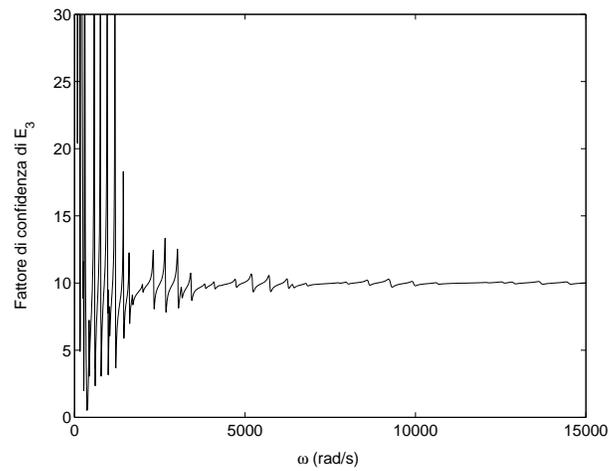


Figura 7.4: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 10000$ N/m.

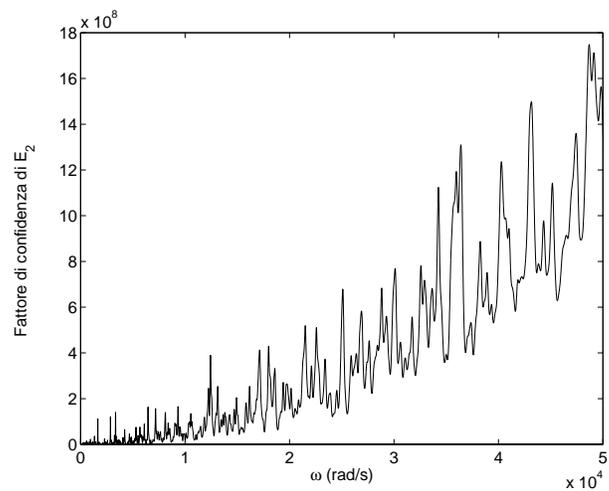


Figura 7.5: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto (ξ_{I_2}, ζ_{I_2}) con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m.

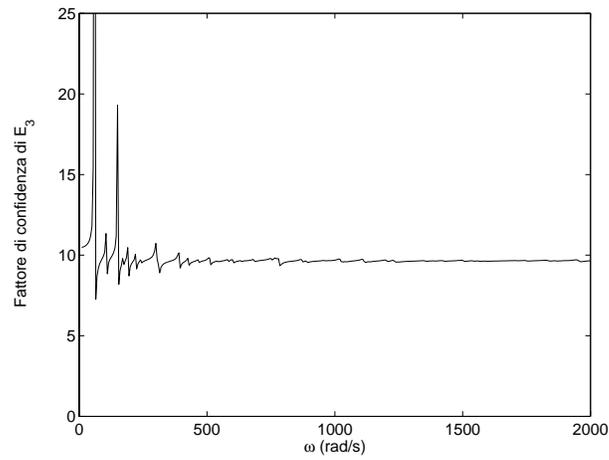


Figura 7.6: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto $(\xi_{II_3}, \zeta_{II_3})$ con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m.

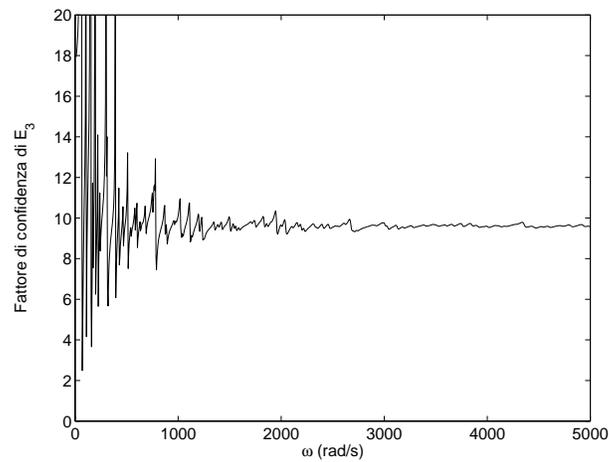


Figura 7.7: Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto $(\xi_{II_3}, \zeta_{II_3})$ con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 10000$ N/m.

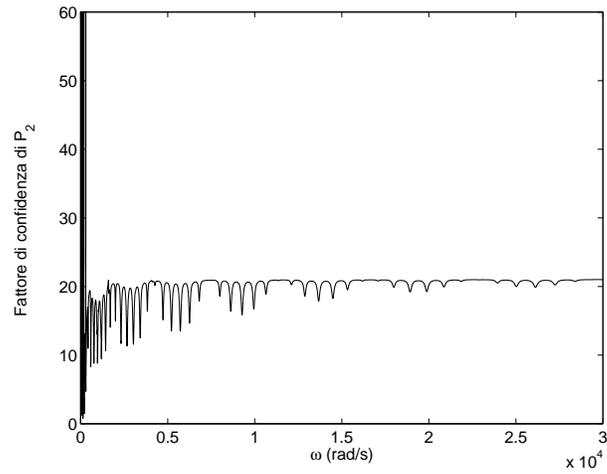


Figura 7.8: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m.

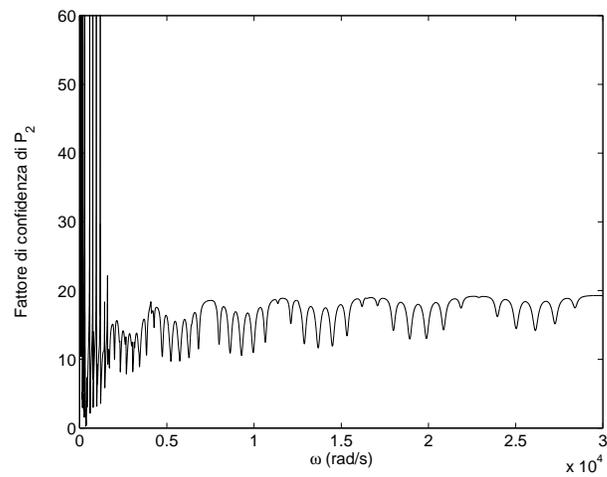


Figura 7.9: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 10000$ N/m.

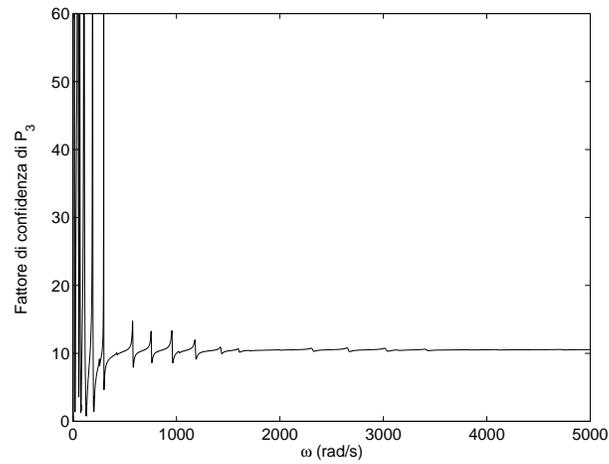


Figura 7.10: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m.

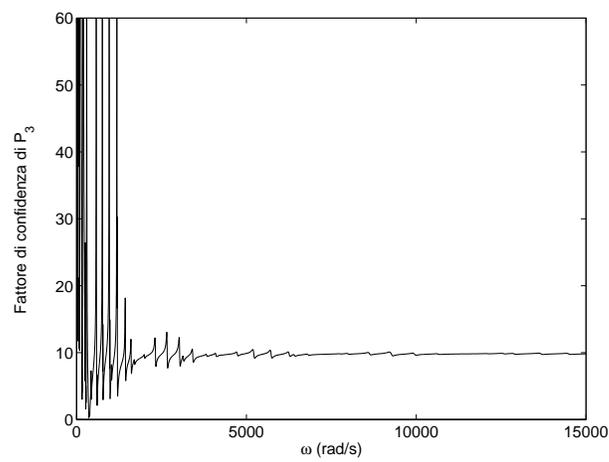


Figura 7.11: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 10000$ N/m.

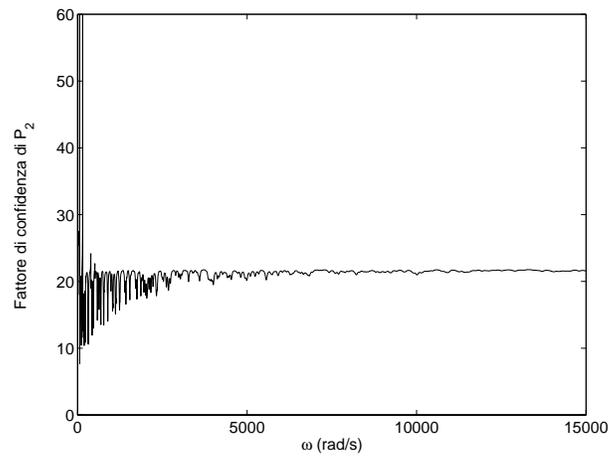


Figura 7.12: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto (ξ_{I_2}, ζ_{I_2}) con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m.

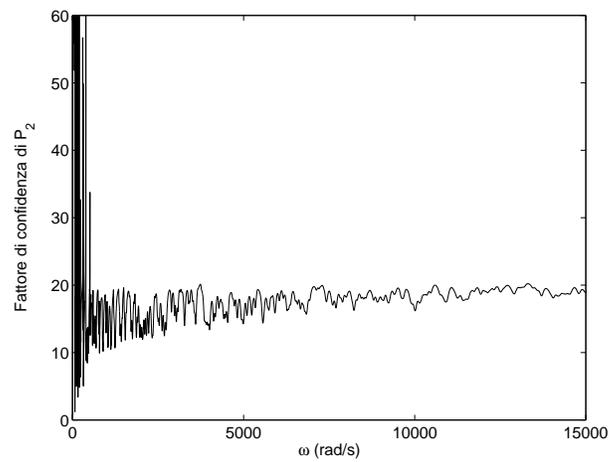


Figura 7.13: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto (ξ_{I_2}, ζ_{I_2}) con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 10000$ N/m.

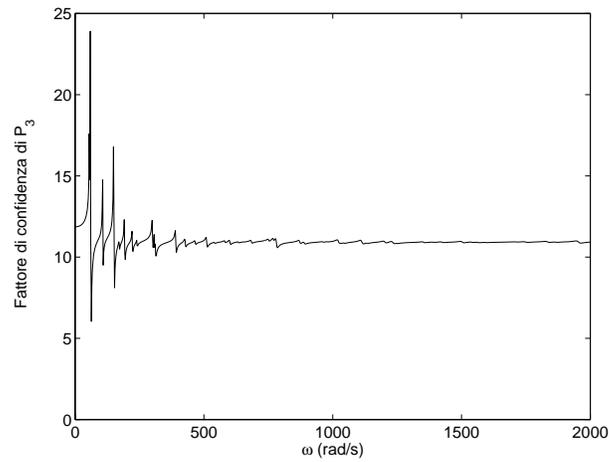


Figura 7.14: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto $(\xi_{II_3}, \zeta_{II_3})$ con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m.

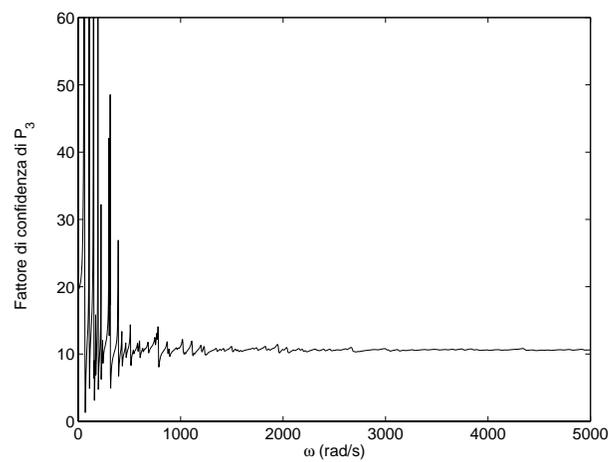


Figura 7.15: Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto $(\xi_{II_3}, \zeta_{II_3})$ con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 10000$ N/m.

7.3 Commenti conclusivi al capitolo

A differenza dei capitoli 5 e 6, in questo capitolo la perturbazione stocastica è imposta all'elemento di giunzione fra due sistemi meccanici.

Lo studio dei sistemi semiinfiniti mostra di nuovo come la presenza di onde che si sovrappongono a causa della loro riflessione muta radicalmente il comportamento del fattore di confidenza rispetto alla condizione di sole onde propagantisi.

Il particolare tipo di perturbazione imposta permette di ottenere espressioni matematiche più maneggevoli rispetto al caso di perturbazione dei parametri distribuiti dei sistemi e quindi uno studio teorico più raffinato. Infatti, oltre alle espressioni predittive sul comportamento asintotico del fattore di confidenza è stata possibile l'analisi della frequenza di transizione.

I risultati mostrano come ancora una volta la posizione reciproca dell'eccitazione e del mezzo perturbato influenzino il comportamento del fattore di confidenza. Infatti, il fattore di confidenza associato all'energia del punto 2 tende a crescere in modo indefinito insieme alla frequenza. Invece, tutti gli altri fattori di confidenza considerati mostrano un comportamento asintotico a frequenza elevata.

Riguardo al comportamento asintotico, il fattore di confidenza presenta due differenti andamenti in due differenti regioni di frequenza. In una prima regione il comportamento è caratterizzato da forti oscillazioni, con l'aumentare della frequenza, la seconda regione, queste oscillazioni tendono a decrementarsi notevolmente fino a quando non si raggiunge un andamento quasi costante. La frequenza di transizione individua la separazione fra queste due regioni in frequenza.

I risultati teorici sono confortati da un ottimo accordo con quelli ottenuti per via numerica.

Note conclusive generali

Come già presentato nelle note introduttive ed ovviamente sviluppato nel corpo del lavoro, lo studio svolto è indirizzato alla ricerca di un fattore di confidenza delle grandezze energetiche di sistemi meccanici nel momento in cui la natura di alcuni parametri di detti sistemi è assunta aleatoria. In particolare l'attenzione è rivolta a fornire una misura della confidenza per le variabili del modello SEA.

Nella tesi si distinguono due parti, affini ma sostanzialmente differenti.

Nella prima parte l'indagine è orientata direttamente allo studio del modello SEA. È spiegata la derivazione delle equazioni del metodo, ne sono inquadrati le ipotesi e quindi il campo di utilizzo, è sviluppata un'analisi statistica della sensibilità delle dette equazioni in relazione a perturbazioni aleatorie dei loro coefficienti. Quest'ultimo punto rappresenta un tentativo di parlare della confidenza sui risultati della SEA lavorando direttamente sulle equazioni del modello.

Nella seconda parte la ricerca è rivolta all'analisi dei momenti statistici della soluzione di modelli deterministici classici. Ovvero, è considerata una popolazione statistica di sistemi caratterizzata dall'aver imposto un comportamento aleatorio a qualche parametro fisico, quindi ai coefficienti del sistema di equazioni differenziali che regolano il fenomeno. Le statistiche dell'energia e del flusso di energia dei sistemi analizzati, ottenuti dalla soluzione delle equazioni della meccanica classica, permettono il calcolo del fattore di confidenza. Tutta l'analisi si sviluppa su una rosa di differenti sistemi che vogliono essere il più rappresentativi possibile. L'anello di congiunzione fra le due parti è la possibilità di avere una risposta sulla confidenza della soluzione offerta dal modello statistico energetico -SEA- attraverso i risultati ottenuti riguardo al fattore di confidenza delle soluzioni classiche, analizzato nella seconda parte.

In ognuno dei capitoli sono riportate delle note conclusive riguardo allo specifico argomento trattato, con riferimento ai risultati particolari ottenuti ed alle tecniche adottate in quel preciso ambito.

Qui è importante puntualizzare alcune conclusioni sintetiche.

La descrizione che nel capitolo 1 è fatta della SEA ha come scopo non solo una spiegazione ed una chiarificazione del metodo in quanto esso è fuori dai procedimenti risolutivi classici dei problemi vibro-acustici, ma soprattutto l'illustrazione

dettagliata dei fondamenti del metodo in relazione ai modelli meccanici classici. Come sono ottenute le equazioni di governo della SEA? Cosa si intende per valore medio nella *Statistical Energy Analysis*? Queste sono le domande alle quali è necessario dare una risposta inequivocabile, allo scopo di poter procedere allo sviluppo di un procedimento per il calcolo dell'informazione mancante nel metodo, la deviazione standard della soluzione, nel tentativo di muoversi in modo coerente. Solo se si conosce la vera natura della soluzione della SEA, è possibile calcolare la varianza ad essa associata.

Il capitolo 3 introduce un punto di vista del problema che si ha intenzione di dirimere. È descritta un'indagine sulla sensibilità della soluzione SEA. È il tentativo di fornire una misura dell'errore che si commette nella soluzione quando è noto il comportamento stocastico dei dati. Nel capitolo si dimostra come, in generale, non sia corretto interpretare i risultati ottenuti da questo tipo di approccio come una risposta alla richiesta di informazione sulla deviazione standard della soluzione SEA. Non è possibile risalire al valore della varianza di una variabile stocastica quando si ignora la variabile stessa ma si conosce il suo valor medio. Quindi, questo tipo di analisi non è direttamente correlata alla domanda posta nella tesi. D'altra parte i risultati ottenuti, nell'ambito del loro significato, sono interessanti e confortanti al tempo stesso. Per quanto riguarda i casi studiati, l'errore che si accumula nella risposta è al più dello stesso ordine di grandezza di quello nei dati. Inoltre, importanti conclusioni sono ottenute nei riguardi del ruolo interpretato dall'eccitazione dei sistemi rispetto alla confidenza della soluzione. Ma allora quale è il processo stocastico la cui media è la variabile incognita del modello SEA? Lyon afferma che le medie considerate sono medie di insieme calcolate su una popolazione stocastica di sistemi simili. Questo può essere tradotto imponendo che i parametri fisici del sistema considerato siano variabili aleatorie. Sebbene quello delle medie di insieme sulla popolazione di sistemi simili sia il punto cruciale della trattazione è necessario ricordare che il valore dell'energia offerto dalla SEA è anche una media spaziale. Accanto alla media prima discussa va considerata una media su tutto il dominio del sistema.

Chiarito questo punto si capisce la regola seguita nei capitoli dal 4 al 7. In essi seguendo il procedimento di Lyon, viene definita una popolazione stocastica di sistemi, viene calcolata la media e la deviazione standard sulla popolazione dell'energia e del flusso di energia in particolari punti dei sistemi, quindi il fattore di confidenza di queste grandezze. Unica differenza fra i momenti statistici calcolati nel presente lavoro e quelli incognite della SEA è la media spaziale: qui è valutato il fattore di confidenza in un punto del dominio, lì è offerto il valore mediato su tutto il sistema. Nel capitolo 4 è spiegato come questa dissonanza non infici affatto la validità dell'analisi svolta riguardo alla fruibilità dei risultati ottenuti, in relazione con lo scopo di fornire l'informazione statistica mancante ai risultati SEA.

A questo punto è opportuno commentare i risultati ottenuti riguardo al fattore di confidenza qui calcolato. Si è visto che al crescere della frequenza il fattore di confidenza nella peggiore delle ipotesi si stabilizza su un valore costante non nullo, nella migliore tende a crescere in maniera indefinita.

Questa differenza di comportamento del fattore di confidenza è dovuta al tipo di sistema che si sta analizzando -travi, piastre,...-, al parametro fisico perturbato ed alla posizione della forza esterna.

Nell'ottica della ricerca della corrispondenza fra i risultati deterministici ottenuti nel presente lavoro e quelli effettivamente fruibili in ambito SEA, è importante puntualizzare che parametri propri della SEA, come il *modal overlap factor* o la densità modale, sebbene non appaiano espressamente nelle relazioni qui offerte, influenzano indirettamente il comportamento del fattore di confidenza. Il differente andamento asintotico per il fattore di confidenza, calcolato in particolari punti di sistemi monodimensionali o bidimensionali, è il riflesso del contributo che differenti andamenti della densità modale hanno sui risultati.

Un'ultima considerazione deve essere rivolta alla comparazione fra i risultati ottenuti da Lyon, per quanto riguarda la varianza normalizzata della velocità quadratica media, e quelli offerti nel presente lavoro. Nel paragrafo 1.4 la discussione sulla relazione indicata da Lyon conduce alla conclusione che la dispersione dei dati intorno al valor medio tende a diminuire all'aumentare della frequenza. Il fattore di confidenza studiato in questa tesi, in generale, non mostra un comportamento concorde con il risultato di Lyon. Solo in particolari condizioni il fattore di confidenza ha un andamento crescente all'aumentare della frequenza. In generale, invece, questo tende ad un valore costante.

Tale risultato non è comunque affatto negativo. Sta ad indicare, infatti, che da una data frequenza in avanti la deviazione standard della soluzione smette di avere un comportamento fortemente oscillante assumendo un valore costante. In regioni di bassa frequenza il fattore di confidenza può assumere al tempo stesso valori molto alti e molto bassi in intervalli di frequenza molto piccoli. Al contrario a valori di frequenza alti il fattore di confidenza tende ad assumere un valore costante finito che è rappresentativo dell'incertezza che si ha sui parametri del sistema -infatti nelle approssimazioni teoriche lineari svolte risulta proporzionale all'inverso della deviazione standard della variabile aleatoria imposta-. Comunque, qualunque sia questo valore costante, si è certi che su grandi intervalli di frequenza questo non cambia.

Appendice A: Comportamento asintotico della mobilità

Studiamo il comportamento della mobilità per $\omega \rightarrow \infty$. Un'espressione generale per la mobilità è

$$M_{qr} = \omega \Theta \sum_n \frac{\varphi_n(\zeta_q) \varphi_n(\zeta_r)}{\omega_n^2 \eta + j(\omega^2 - \omega_n^2)}$$

dove Θ è un coefficiente che dipende dai parametri del sistema. Separiamo la parte reale da quella immaginaria della mobilità:

$$\operatorname{Re}\{M_{qr}\} = \Theta \sum_n \varphi_n(\zeta_q) \varphi_n(\zeta_r) \frac{\omega \omega_n^2 \eta}{\omega_n^4 \eta^2 + (\omega^2 - \omega_n^2)^2}$$

$$\operatorname{Im}\{M_{qr}\} = -\Theta \sum_n \varphi_n(\zeta_q) \varphi_n(\zeta_r) \frac{\omega(\omega^2 - \omega_n^2)}{\omega_n^4 \eta^2 + (\omega^2 - \omega_n^2)^2}$$

Considerando l'ultimo valore delle precedenti espressioni per $\omega \rightarrow \infty$, dobbiamo valutare anche il tendere ad infinito delle frequenze naturali per garantire la convergenza della serie.

Quindi, scrivendo esplicitamente alcuni termini della serie si ha che:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{M_{qr}\} = & \Theta \left[\varphi_1(\zeta_q) \varphi_1(\zeta_r) \frac{\omega \omega_1^2 \eta}{\omega_1^4 \eta^2 + (\omega^2 - \omega_1^2)^2} + \dots \right. \\ & + \varphi_n(\zeta_q) \varphi_n(\zeta_r) \frac{\omega \omega_n^2 \eta}{\omega_n^4 \eta^2 + (\omega^2 - \omega_n^2)^2} + \dots \\ & \left. + \varphi_N(\zeta_q) \varphi_N(\zeta_r) \frac{\omega \omega_N^2 \eta}{\omega_N^4 \eta^2 + (\omega^2 - \omega_N^2)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}\{M_{qr}\} = & -\Theta \left[\varphi_1(\zeta_q)\varphi_1(\zeta_r) \frac{\omega(\omega^2 - \omega_1^2)}{\omega_1^4 \eta^2 + (\omega^2 - \omega_1^2)^2} + \dots \right. \\ & + \varphi_n(\zeta_q)\varphi_n(\zeta_r) \frac{\omega(\omega^2 - \omega_n^2)}{\omega_n^4 \eta^2 + (\omega^2 - \omega_n^2)^2} + \dots \\ & \left. + \varphi_N(\zeta_q)\varphi_N(\zeta_r) \frac{\omega(\omega^2 - \omega_N^2)}{\omega_N^4 \eta^2 + (\omega^2 - \omega_N^2)^2} \right] \end{aligned}$$

Quando sia ω che ω_N tendono ad infinito le precedenti relazioni divengono:

$$\begin{aligned} \text{Re}\{M_{qr}\} &= \Theta \left[\varphi_1(\zeta_q)\varphi_1(\zeta_r) \frac{1}{\omega^3} + \dots \varphi_n(\zeta_q)\varphi_n(\zeta_r) \frac{1}{\omega^3} + \dots \varphi_N(\zeta_q)\varphi_N(\zeta_r) \frac{1}{\omega} \right] \\ \text{Im}\{M_{qr}\} &= -\Theta \left[\varphi_1(\zeta_q)\varphi_1(\zeta_r) \frac{1}{\omega} + \dots \varphi_n(\zeta_q)\varphi_n(\zeta_r) \frac{1}{\omega} + \dots \varphi_N(\zeta_q)\varphi_N(\zeta_r) \frac{0}{\omega^3} \right] \end{aligned}$$

È ovvio che se la parte reale e quella immaginaria tendono entrambe a zero come $1/\omega$, anche il modulo della mobilità tende a zero allo stesso modo.

Appendice B: Comportamento asintotico del fattore di confidenza dell'energia in sistemi risonanti isolati: calcoli supplementari

In base alle relazioni (5.30) è possibile calcolare le derivate di A_n e B_n contenute nelle (5.36) e (5.39):

$$\frac{\partial A_n}{\partial \omega_n} = -2\eta \varphi_n(x_q) \varphi_n(x_r) \frac{\omega_n[-\omega^4 + \omega_n^4(1 + \eta^2)]}{[\omega^4 - 2\omega^2\omega_n^2 + \omega_n^4(1 + \eta^2)]^2}$$

$$\frac{\partial B_n}{\partial \omega_n} = 2\varphi_n(x_q) \varphi_n(x_r) \frac{\omega_n[\omega^4 + \omega_n^4(1 + \eta^2) - 2\omega^2\omega_n^2(1 + \eta^2)]}{[\omega^4 - 2\omega^2\omega_n^2 + \omega_n^4(1 + \eta^2)]^2}$$

Con un procedimento analogo a quello seguito nell'appendice A sono calcolati i comportamenti asintotici per $\omega \rightarrow \infty$ -quindi contemporaneamente per $\omega_N \rightarrow \infty$ - dei vari termini che compaiono nelle (5.36) e (5.39).

$$\sum_n A_n = \frac{\varphi_1(x_q) \varphi_1(x_r) \omega_1^2 \eta}{\omega_1^4 \eta^2 + (\omega^2 - \omega_1^2)^2} + \dots + \frac{\varphi_N(x) \varphi_N(y) \omega_N^2 \eta}{\omega_N^4 \eta^2 + (\omega^2 - \omega_N^2)^2}$$

$$\sum_n B_n = \frac{\varphi_1(x_q) \varphi_1(x_r) (\omega^2 - \omega_1^2)}{\omega_1^4 \eta^2 + (\omega^2 - \omega_1^2)^2} + \dots + \frac{\varphi_N(x) \varphi_N(y) (\omega^2 - \omega_N^2)}{\omega_N^4 \eta^2 + (\omega^2 - \omega_N^2)^2}$$

per $\omega \rightarrow \infty$ e $\omega_N \rightarrow \infty$ tendono alle seguenti espressioni:

$$\sum_n A_n \rightarrow \frac{1}{\omega^4} + \dots + \frac{1}{\omega^2} \rightarrow \frac{1}{\omega^2}$$

$$\sum_n B_n \rightarrow \frac{1}{\omega^2} + \dots + \frac{0}{\omega^2} \rightarrow \frac{1}{\omega^2}$$

Per le derivate:

$$\sum_n \frac{\partial A_n}{\partial \omega_n} = -2\eta \left\{ \frac{\varphi_1(x_q) \varphi_1(x_r) \omega_1[-\omega^4 + \omega_1^4(1 + \eta^2)]}{[\omega^4 - 2\omega^2\omega_1^2 + \omega_1^4(1 + \eta^2)]^2} + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi_N(x_q) \varphi_N(x_r) \omega_N[-\omega^4 + \omega_N^4(1 + \eta^2)]}{[\omega^4 - 2\omega^2\omega_N^2 + \omega_N^4(1 + \eta^2)]^2} \right\}$$

$$\sum_n \frac{\partial B_n}{\partial \omega_n} = 2 \left\{ \frac{\varphi_1(x_q)\varphi_1(x_r)\omega_1[\omega^4 + \omega_1^4(1 + \eta^2) - 2\omega^2\omega_1^2(1 + \eta^2)]}{[\omega^4 - 2\omega^2\omega_1^2 + \omega_1^4(1 + \eta^2)]^2} + \dots \right. \\ \left. + \frac{\varphi_N(x_q)\varphi_N(x_r)\omega_N[\omega^4 + \omega_1^4(1 + \eta^2) - 2\omega^2\omega_N^2(1 + \eta^2)]}{[\omega^4 - 2\omega^2\omega_N^2 + \omega_N^4(1 + \eta^2)]^2} \right\}$$

per $\omega \rightarrow \infty$ e $\omega_N \rightarrow \infty$ tendono alle seguenti espressioni:

$$\sum_n \frac{\partial A_n}{\partial \omega_n} \rightarrow 2 \left(\frac{1}{\omega^4} + \dots \frac{1}{\omega^3} \right) \rightarrow 2 \frac{1}{\omega^3}$$

$$\sum_n \frac{\partial B_n}{\partial \omega_n} \rightarrow 2 \left(\frac{1}{\omega^4} + \dots \frac{1}{\omega^3} \right) \rightarrow 2 \frac{1}{\omega^3}$$

Combinando i precedenti risultati nelle (5.36) e (5.39) si ottengono le (5.37) e (5.40).

Bibliografia

- [1] S. O. Rice 1951 *Mathematical Analysis of Random Noise*. Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Edited by Nelson Wax, Dover Publication Inc., New York.
- [2] P. M. Morse, K. Uno Ingard 1968 *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [3] L. L. Beranek 1971 *Noise and Vibration Control*. McGraw-Hill Book Company.
- [4] R. H. Lyon 1975 *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems: Theory and Applications*. The MIT Press, Cambridge.
- [5] I. M. Sobol 1975 *The Monte Carlo Method*. MIR Publisher, Moskow.
- [6] E. S. Ventsel 1983 *Teoria delle probabilità*. Edizioni MIR, Mosca.
- [7] L. D. Landau, E. M. Lifshits, L. P. Pitaevskij 1986 *Fisica Statistica*. Editori Riuniti, Edizioni MIR, Mosca.
- [8] L. Cremer, M. Heckl 1988 *Structure-Borne Sound*. Springer Verlag, Berlin.
- [9] M. P. Norton 1989 *Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [10] M. K. Ochi 1990 *Applied Probability and Stochastic Processes*. John Wiley & Sons, New York.
- [11] F. J. Fahy 1994 *Statistical Energy Analysis: a Critical Overview, in Statistical Energy Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [12] R. H. Lyon, R. G. De Jong 1995 *Theory and Applications of Statistical Energy Analysis*. Butterworth-Heinemann.
- [13] S. De Rosa, F. Franco, F. Ricci 1999 *Introduzione alla Tecnica Statistico-Energetica (SEA)*. Liguori Editore, Napoli.

- [14] E. C. Wente 1935 *The Journal of the Acoustical Society of America* **7**, 123-126. The Characteristics of Sound Transition in Room.
- [15] R. H. Bolt 1939 *The Journal of the Acoustical Society of America* **10**, 228-234. Frequency Distribution of Eigentones in a Three-Dimensional Continuum.
- [16] Dah-You Maa 1939 *The Journal of the Acoustical Society of America* **10**, 235-

238. Distribution of Eigentones in a Rectangular Chamber at Low Frequency Range.
- [17] R. Clark Jones 1940 *The Journal of the Acoustical Society of America* **11**, 324-332. On the Theory of Fluctuations in the Decay of Sound.
- [18] R. H. Bolt 1946 *The Journal of the Acoustical Society of America* **18**, 130-133. Note on Normal Frequency Statistics for Rectangular Rooms.
- [19] R. H. Bolt 1947 *The Journal of the Acoustical Society of America* **19**(1), 75-90. Normal Frequency Spacing Statistics.
- [20] R. H. Bolt, R. W. Roop 1950 *The Journal of the Acoustical Society of America* **22**(2), 280-289. Frequency Response Fluctuations in Rooms.
- [21] L. Cremer 1953 *Acustica* **3**(5), 317-335. Calculation of Sound Propagation in Structures.
- [22] M. R. Schroeder, K. H. Kuttruff 1962 *The Journal of the Acoustical Society of America* **34**(1), 76-80. On Frequency Response Curves in Rooms. Comparison of Experimental, Theoretical and Monte Carlo Results for the Average frequency Spacing between Maxima.
- [23] R. H. Lyon, G. Maidanik 1962 *The Journal of the Acoustical Society of America* **34**(5), 623-639. Power Flow between Linearly Coupled Oscillators.
- [24] M. R. Schroeder 1962 *The Journal of the Acoustical Society of America* **34**(12), 1819-1823. Frequency-Correlation Functions of Frequency Responses in Rooms.
- [25] R. H. Lyon, E. Eichler 1964 *The Journal of Acoustical Society of America* **36**(7), 1344-1354. Random Vibration of Connected Structures.
- [26] R. H. Lyon 1969 *The Journal of Acoustical Society of America* **45**(3), 545-565. Statistical Analysis of Power Injection and Response in Structures and Rooms.
- [27] H. G. Davies 1972 *The Journal of Acoustical Society of America* **51**(1) Part 2, 393-401. Power Flow between Two Coupled Beams.
- [28] A. J. Keane, C. S. Manhoar 1993 *Journal of Sound and Vibrations* **168**(2), 253-284. Energy flow variability in a pair of coupled stochastic rods.
- [29] C. J. Radcliffe, X. L. Huang 1997 *Journal of Vibration and Acoustics - Transaction of ASME* **119**, 629-634. Putting Statistics into the Statistical Energy Analysis of Automotive Vehicles.
- [30] A. Montanari 2001 *Tesi di laurea - Università degli studi di Roma "La Sapienza - Facoltà di Ingegneria* Criteri per la valutazione a priori dell'affidabilità della Statistical Energy Analysis.

Elenco delle figure

- 1.1 Equivalenza fra le medie in frequenza e le medie di insieme 11
- 3.1 *a* - schematizzazione del procedimento di media sviluppato nella SEA, *b* - schematizzazione del procedimento di media su soluzioni SEA che si differenziano per piccole perturbazioni statistiche le une dalle altre 29
- 3.2 Sistema composto da tre piastre connesse insieme 36
- 3.3 deviazione standard normalizzata di: *a* - E_1 perturbazione su Y_1 tutti i sottosistemi eccitati, *b* - E_1 perturbazione su Y_1 eccitato il primo sottosistema, *c* - E_2 perturbazione su Y_1 eccitato il primo sottosistema, *d* - E_2 perturbazione su S_1 eccitato il primo sottosistema. $\sigma_\varepsilon = 0.05$ 39
- 3.4 Sistema composto da due piastre connesse insieme 40
- 3.5 Sistema composto da una piastra connessa ad una cavità acustica 41
- 3.6 Deviazione standard normalizzata di E_s , per perturbazione su ρ_s , nei seguenti intervalli di frequenze: *a* - $f \leq f_{cr}/10$, *b* - $f_{cr}/10 < f < f_{cr}/2$, *c* - $f_{cr}/2 < f < f_{cr}$, *d* - $f_{cr} < f < 5f_{cr}$. $f_{cr} = 162.5$, $\sigma_\varepsilon = 0.05$ 44
- 3.7 Deviazione standard normalizzata di E_v , per perturbazione su ρ_s , nei seguenti intervalli di frequenze: *a* - $f \leq f_{cr}/10$, *b* - $f_{cr}/10 < f < f_{cr}/2$, *c* - $f_{cr}/2 < f < f_{cr}$, *d* - $f_{cr} < f < 5f_{cr}$. $f_{cr} = 162.5$, $\sigma_\varepsilon = 0.05$ 45
- 5.1 Guida d'onda longitudinale isolata 54
- 5.2 Sistema risonante isolato 59
- 5.3 Trave semplicemente appoggiata 65
- 5.4 Piastra semplicemente appoggiata 66
- 5.5 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema trave flessionale isolata calcolato nel punto di eccitazione 69
- 5.6 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema trave flessionale isolata calcolato nel punto di eccitazione 69
- 5.7 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema trave flessionale isolata calcolato nel punto 2 70
- 5.8 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema trave flessionale isolata calcolato nel punto 2 70

- 5.9 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema piastra flessionale isolata calcolato nel punto di eccitazione 71
- 5.10 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema piastra flessionale isolata calcolato nel punto di eccitazione 71
- 5.11 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema piastra flessionale isolata calcolato nel punto 2 72
- 6.1 Guida d'onda accoppiata ad un sistema risonante 74
- 6.2 Due sistemi risonanti accoppiati tramite giunzione 77
- 6.3 Due travi flessionali semplicemente appoggiate accoppiate tramite giunto non conservativo a mobilità puntuale 80
- 6.4 81
- 6.5 82
- 6.6 82
- 6.7 83
- 6.8 Caratteristiche statistiche della densità di energia, sistema travi accoppiate, perturbazione aleatoria su Y_I : **1.** valor medio in ζ_2 ; **2.** valor medio in ζ_3 ; **3.** varianza in ζ_2 ; **4.** varianza ζ_3 . 84
- 6.9 Caratteristiche statistiche del flusso di energia, sistema travi accoppiate, perturbazione aleatoria su Y_I : **1.** valor medio in ζ_2 ; **2.** valor medio in ζ_3 ; **3.** varianza in ζ_2 ; **4.** varianza ζ_3 . 84
- 6.10 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ 85
- 6.11 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ 85
- 6.12 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ 86
- 6.13 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ 86
- 6.14 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$ 87
- 6.15 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$ 87

- 6.16 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$ 88
- 6.17 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$ 88
- 6.18 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$ 89
- 6.19 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$ 89
- 6.20 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$ 90
- 6.21 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$ 90
- 6.22 Due piastre semplicemente appoggiate accoppiate tramite giunto a mobilità puntuale 91
- 6.23 Caratteristiche statistiche della densità di energia, sistema piastre accoppiate, perturbazione aleatoria su Y_I : **1.** valor medio in ζ_2 ; **2.** valor medio in ζ_3 ; **3.** varianza in ζ_2 ; **4.** varianza ζ_3 . 93
- 6.24 Caratteristiche statistiche del flusso di energia, sistema piastre accoppiate, perturbazione aleatoria su Y_I : **1.** valor medio in ζ_2 ; **2.** valor medio in ζ_3 ; **3.** varianza in ζ_2 ; **4.** varianza ζ_3 . 93
- 6.25 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ 94
- 6.26 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ 94
- 6.27 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ 95
- 6.28 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del primo sottosistema: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ 95
- 6.29 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$ 96

- 6.30 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$ 96
- 6.31 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$ 97
- 6.32 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young del secondo sottosistema: $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon)$ 97
- 6.33 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$ 98
- 6.34 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$ 98
- 6.35 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$ 99
- 6.36 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sul modulo di Young di entrambi i sottosistemi: $Y_I = Y_{I_0}(1 + \varepsilon)$ e $Y_{II} = Y_{II_0}(1 + \varepsilon_1)$ 99
- 7.1 Due guide d'onda accoppiate tramite giunzione 101
- 7.2 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m. 112
- 7.3 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m. 112
- 7.4 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 10000$ N/m. 113
- 7.5 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto (ξ_{I_2}, ζ_{I_2}) con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m. 113
- 7.6 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto $(\xi_{II_3}, \zeta_{II_3})$ con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m. 114
- 7.7 Fattore di confidenza della densità di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto $(\xi_{II_3}, \zeta_{II_3})$ con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 10000$ N/m. 114

- 7.8 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m. 115
- 7.9 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_2 con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 10000$ N/m. 115
- 7.10 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m. 116
- 7.11 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di travi accoppiate calcolato nel punto ζ_3 con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 10000$ N/m. 116
- 7.12 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto (ξ_{I_2}, ζ_{I_2}) con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m. 117
- 7.13 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto (ξ_{I_2}, ζ_{I_2}) con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 10000$ N/m. 117
- 7.14 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto $(\xi_{II_3}, \zeta_{II_3})$ con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 1000$ N/m. 118
- 7.15 Fattore di confidenza del flusso di energia per il sistema di piastre accoppiate calcolato nel punto $(\xi_{II_3}, \zeta_{II_3})$ con perturbazione aleatoria sulla caratteristica elastica del giunto: $k_G = k_{G_0}(1 + \varepsilon)$, $k_{G_0} = 10000$ N/m. 118

Elenco delle tabelle

- 3.1 Comportamento al limite della deviazione standard normalizzata per $\omega \rightarrow \infty$. Perturbazione applicata ai parametri fisici, eccitazione applicata al solo sistema 1 37
- 3.2 Comportamento al limite della deviazione standard normalizzata per $\omega \rightarrow \infty$. Perturbazione applicata alle potenze entranti, eccitazione applicata a tutti e tre i sistemi 38
- 3.3 Comportamento al limite della deviazione standard normalizzata dell'energia per $\omega \rightarrow \infty$. Perturbazione applicata ai parametri fisici, eccitazione applicata al solo sistema strutturale 43
- 4.1 Corrispondenza fra le medie e le varianze sulla popolazione di sistemi simili in presenza ed assenza di medie spaziali 50
- 5.1 Valori del fattore di confidenza della densità di energia e del flusso di energia per una guida d'onda longitudinale in diverse condizioni di perturbazione aleatoria 58
- 5.2 Valori numerici del fattore di confidenza della densità di energia e del flusso di energia per una guida d'onda longitudinale in diverse condizioni di perturbazione aleatoria 59
- 5.3 Valori dei parametri fisici della trave 65
- 5.4 Valori dei parametri fisici della piastra 67
- 6.1 Valori del fattore di confidenza della densità di energia e del flusso di energia di una guida d'onda longitudinale accoppiata ad un sistema meccanico risonante in diverse condizioni di perturbazione aleatoria per $\omega \rightarrow \infty$ in corrispondenza della giunzione 76
- 6.2 Valori dei parametri fisici delle due travi accoppiate 81
- 6.3 Valori dei parametri fisici delle due piastre 92
- 6.4 Valori del fattore di confidenza della densità di energia e del flusso di energia di sottosistemi continui accoppiati per varie condizioni di perturbazione stocastica nei punti 2 e 3 del sistema quando $\omega \rightarrow \infty$. Con l'acronimo "v. c." si indica "valore costante". 100

- 7.1 Valori del fattore di confidenza della densità di energia e del flusso di energia di due guide d'onda longitudinali accoppiate tramite giunzione in diverse condizioni di perturbazione aleatoria dei parametri del giunto per $\omega \rightarrow \infty$ 104
- 7.2 Comportamento asintotico di alcune grandezze utilizzate per $\omega \rightarrow \infty$ 106
- 7.3 Frequenze di transizione da comportamento oscillatorio a non oscillatorio per i fattori di confidenza: f_{cE_3} , f_{cP_2} e f_{cP_3} 109
- 7.4 Valori delle frequenze di transizione per i sistemi studiati. Per le travi: $\eta = 0.01$, $m_T = 1.66\text{Kg}$, per le piastre: $\eta = 0.01$, $m_T = 44.85\text{Kg}$ 110