Proposizione 3 della κύκλου μέτρησις: la più emblematica delle opere di Archimede

(Proposition 3 of the κύκλου μέτρησις: the most emblematic of Archimedes' works)

Antonella Palma[*]
Luca Dragone[†]

Sunto

Nella proposizione 3 della κύκλου μέτρησις Archimede costruisce due numeri razionali che approssimano la misura del rapporto tra la circonferenza e il suo diametro, oggi noto come π.
In questo lavoro vogliamo porre l'accento su due aspetti del trattato di Archimede: il primo riguarda le scelte dei valori razionali approssimati per eccesso e per difetto di $\sqrt{3}$ utilizzati all'inizio della procedura di calcolo, che risultano essere i migliori approssimanti in base alla moderna teoria delle frazioni continue, i cui termini si possono ricavare dall'antico ανθυφαίρεσις euclideo; il secondo riguarda alcune stime utilizzate da Archimede, apparentemente non giustificate e sub-ottime, che invece sono frutto di un preciso procedimento logico da noi ricostruito in termini di un algoritmo.
Di tale studio è stata proposta una trasposizione didattica che parte dal testo antico e giunge alla produzione di una traduzione commentata in cui lo studente è protagonista del processo di scoperta.

Parole chiave: Archimede; π; misura del cerchio; frazioni continue; metodo di esaustione; GeoGebra.

[*] First Author's Affiliation (Sapienza Università di Roma, Italy); antonella.palma@gmail.com.
[†] Second Author's Affiliation (Università di Roma Tor Vergata, Italy); luca.dragone71@gmail.com.
[†] Received on June 13, 2024. Accepted on June 13, 2024. Published on June 30, 2024. DOI: 10.23756/sp.v12i1.1628. ISSN 2282-7757; eISSN 2282-7765.

Abstract

In proposition 3 of the κύκλου μέτρησις Archimedes constructs two rational numbers that approximate the measure of the ratio between the circumference and its diameter, today known as π.
In this work we emphasize two aspects of Archimedes' proof. The first one concerns the choices of the rational values approximated by excess and defect of $\sqrt{3}$ used at the beginning of the calculation procedure. These values turn out to be the best approximants based on the modern theory of continued fractions, whose terms can be obtained from the ancient Euclidean ανθυφαίρεσις. The second one concerns some estimates used by Archimedes, apparently unjustified and sub-optimal, which instead are the result of a precise logical procedure that we recontruct in terms of an algorithm.
We also propose an educational transposition of this study that starts from the ancient text and leads to the production of a commented translation in which the student is the protagonist of the discovery process.
Keywords: Archimedes; π; circle measurement; continued fractions; method of exhaustion; GeoGebra.

1. Introduzione

Nella proposizione 3 della κύκλου μέτρησις Archimede vuole determinare la misura del rapporto tra la circonferenza e il suo diametro, valore conosciuto come π. Egli sapeva che tale valore era reale e deve aver intuito che era impossibile che fosse razionale, per questo non tentò di rappresentarlo come rapporto di due numeri interi - come pure avevano fatto alcuni prima di lui e altri faranno dopo - ma costruì due numeri razionali che lo approssimano quanto più si vuole, per difetto e per eccesso. Non vogliamo proporre ipotesi anacronistiche: Archimede non poteva sapere che π fosse irrazionale e tantomeno trascendente – Jean H. Lambert ne dimostra l'irrazionalità nel 1768 e Ferdinand von Lindemann la trascendenza nel 1882 – eppure gestisce questo rapporto con una genialità sorprendente.

Nella proposizione 3 Archimede mostra che: «la circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro e lo supera ancora di meno di un settimo del diametro, e di più di dieci settantunesimi» [1]. La lettura dei testi archimedei è un'impresa particolarmente temeraria e in questo breve trattato si aggiunge oltre alla difficoltà di una scrittura criptica dovuta a passi dimostrativi non spiegati e calcoli non esplosi anche l'esibizione di scelte di approssimazioni apparentemente non motivate. A prima vista un lavoro destinato solo ad un pubblico specialistico, ma la nostra convinzione è che sia possibile una trasposizione didattica di notevole valenza. L'approccio al risultato parte dalla traduzione del testo antico, per dare il necessario peso e significato alle parole, e giunge alla produzione di una traduzione commentata in cui lo studente è protagonista del processo di scoperta.

2. La proposta didattica

Nei percorsi scolastici il rapporto tra la circonferenza e il suo diametro viene spesso trattato come valore numerico approssimato in base al suo utilizzo pratico. Questo percorso vuole restituire al π il significato relativo alla sua natura incommensurabile. Esso è pensato per studenti di scuola secondaria di secondo grado di liceo, per una lettura dal testo greco o latino [2], o di ogni tipo di scuola, per la lettura dal testo in italiano seicentesco di Vincenzo Viviani (1622–1702) [3].

Questo intervento vuole promuovere una visione interdisciplinare del sapere, in cui la matematica fa da collante ad altre discipline, come la storia, la letteratura e la filosofa. Il percorso prevede, oltre alla traduzione del testo dalla lingua delle fonti, l'interpretazione matematica della proposizione con la ricostruzione di rigorose dimostrazioni geometriche e la riproduzione dei calcoli usando solo gli strumenti matematici propri dell'epoca. Gli strumenti moderni di calcolo sono utilizzati esclusivamente per svolgere un lavoro di controllo sull'ottimizzazione relativa alla scelta dei valori di approssimazione sia di $\sqrt{3}$ che della estrazione di radice quadrata esibiti da Archimede nel trattato, scelte apparentemente sub-ottimali ma che invece giustificano e svelano una intuizione inaspettata.

La storia della matematica consente di avvicinarsi ai concetti propri della disciplina ampliando l'orizzonte riguardo alla loro origine e alla loro evoluzione.

2.1. La lettura dei testi antichi

Dopo la lettura di brevi parti selezionate del testo e la relativa interpretazione matematica, si procede ad una ricostruzione del calcolo proposto da Archimede usando il metodo della matematica ellenistica. Mettere in relazione ed in contrasto le rappresentazioni imparate a scuola con quelle prese dalle fonti originali genera negli studenti - e non solo - un riorientamento che fornisce un'opportunità per scoprire nuovamente proprietà prese per scontate, spesso intasate di automatismi [4].

2.2. Il metodo di esaustione e la non univocità matematica in classe

Archimede usa il metodo di esaustione, concezione che implica soltanto l'infinito potenziale evitando le antinomie connesse all'infinito attuale da cui Aristotele metteva in guardia, per ricavare un rapporto tra lunghezze. In particolare Archimede applica il metodo di Eudosso a poligoni regolari, circoscritti ed inscritti ad un circonferenza, partendo da un esagono regolare e raddoppiando il numero dei lati. Le proprietà delle proporzioni e il teorema di Talete risolvono la geometria di rapporti in ricorrenze che richiedono però l'estrazione di radice quadrata e quindi impongono scelte di approssimazioni numeriche. Questo aspetto costringe gli studenti a confrontarsi con una matematica non univoca che esige però rigore nelle disuguaglianze implicate. Inoltre giustificare le scelte compiute da Archimede si rivela un esercizio impegnativo, critico e formativo.

3. Organizzazione e contenuti del percorso didattico

Il percorso didattico è realizzato attraverso un *Libro GeoGebra* (codice Z6VMGJ3N) organizzato in attività laboratoriali costituite da sezioni guidate e da componenti interattive. Domande mirate stimolano all'osservazione e alla riflessione sulle scelte numeriche mostrate e invitano al rigore nell'uso delle disuguaglianze. Oltre all'artefatto tecnologico è stato utilizzato un quaderno cartaceo nel quale erano presenti alcune parti del testo originale e pagine bianche per produrre una personale traduzione commentata, seguendo una prassi tanto cara a Maria Montessori. Il testo di Archimede è il canovaccio sul quale si impostano le sequenze di calcolo, non esplicite nell'opera, e si richiamano e dimostrano i teoremi che vengono tacitamente usati.

3.1 Il poligono circoscritto e inscritto alla circonferenza

Per ricavare i termini delle disuguaglianze che eccedono e limitano dal basso il valore della circonferenza Archimede usa un poligono regolare di 96 lati rispettivamente circoscritto e inscritto nella circonferenza. In entrambi i casi parte da un esagono regolare e raddoppia di volta in volta il numero dei lati utilizzando la prop. VI,3 degli Elementi di Euclide. Per giungere alla costruzione dei poligoni si fa uso di una figura estremamente semplice ed elegante: il triangolo equilatero (fig. 1).

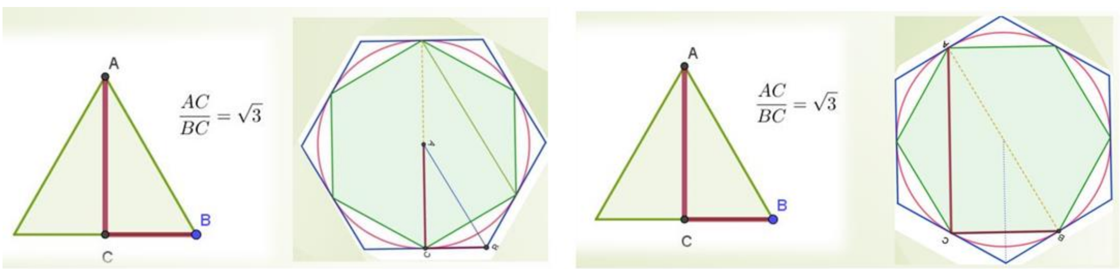

Figura 1. La figura triangolo equilatero nell'esagono circoscritto e inscritto nella circonferenza.

Per questa procedura è necessario fornire delle approssimazioni per eccesso e per difetto del lato τρίπους δύναμις ossia del rapporto tra l'altezza del triangolo equilatero e metà del lato, rapporto (λογος) che ovviamente era ben noto essere non razionale (αλογος) e quindi scrivibile solo in modo approssimato attraverso una frazione

3.2 Le approssimazioni di $\sqrt{3}$ e le frazioni continue

La misura del perimetro dell'esagono circoscritto che deve maggiorare la circonferenza, per coerenza della disuguaglianza, richiede l'uso di una frazione che rappresenti il rapporto tra l'altezza del triangolo equilatero e il suo semilato attraverso un valore minore di $\sqrt{3}$, e maggiore per la situazione del perimetro inscritto. Archimede nel primo caso sceglie il rapporto $\frac{AC}{BC} = \frac{265}{153}$ e nel secondo $\frac{AC}{BC} = \frac{1351}{780}$ senza dare alcuna giustificazione. La proposta di studio è che queste incredibilmente accurate approssimazioni di $\sqrt{3}$ derivino da un metodo che i greci chiamavano ανθυφαίρεσις, il noto algoritmo euclideo (EUCL.VII,2) [5], che risultano anche essere i migliori approssimanti ottenuti dalla teoria delle frazioni continue [6].

Assumendo l'ipotesi che, in un linguaggio diverso dal nostro, i greci fossero in grado di utilizzare la frazione continua come strumento di calcolo controllandone anche il segno dell'errore di approssimazione, si è costruita una sezione nel *Libro GeoGebra* che, partendo dalla divisione per ricorrenza dell'algoritmo euclideo, fa scoprire che i quozienti ottenuti altro non sono che i termini della scrittura a catena della frazione continua corrispondente. Questa lettura non può banalmente considerarsi una forzatura di applicazione della matematica moderna all'antico [7] [8], per l'evidenza della consapevolezza relativa alla scelta degli approssimanti. Infatti quei valori frazionari vicini al valore di $\sqrt{3}$ sono i più piccoli approssimanti di una classe di calcoli che conduce allo stesso risultato di approssimazione del π (anche svolto con tecniche moderne), come si può evincere dalle tabelle 1 e 2.

Per il convergente $\sqrt{3}$	$\frac{perimetro}{diametro}$	Scrittura a catena	Frazione continua [a_0; a_1]
$\frac{71}{41}$	$\frac{3936}{1252,31029}$	[3;6,1,151,1,1,...]	$3+\frac{1}{6}$
$\frac{265}{153}$	$\frac{14688}{4673,637}$	[3;7,166,5,4,21,...]	$3+\frac{1}{7}$
$\frac{989}{571}$	$\frac{54816}{17442,23772}$	[3;7,144,2,9,1,...]	$3+\frac{1}{7}$
$\frac{3691}{2131}$	$\frac{204576}{65095,31389}$	[3;7,143,7,1,1,...]	$3+\frac{1}{7}$
$\frac{13775}{7953}$	$\frac{763488}{242939,01785}$	[3;7,143,27,1,1,...]	$3+\frac{1}{7}$
$\frac{51409}{29681}$	$\frac{2849376}{906660,7575}$	[3;7,143,33,1,30,...]	$3+\frac{1}{7}$
$\frac{191861}{110771}$	$\frac{10634016}{3383704,01215}$	[3;7,143,34,1,1,...]	$3+\frac{1}{7}$

Tabella 1. Calcolo del π ottenuto dal rapporto tra il perimetro del poligono circoscritto e il diametro del cerchio usando i migliori approssimanti di $\sqrt{3}$ di ordine pari (approssimazione per difetto) ricavati dalle frazioni continue seguendo il procedimento di Archimede. Il valore di π nell'ultima colonna è espresso con i termini [a_0; a_1] che ne garantiscono l'approssimazione per eccesso.

Per il convergente $\sqrt{3}$	$\frac{perimetro}{diametro}$	Scrittura a catena	Frazione continua [a_0; a_1, a_2]
$\frac{97}{56}$	$\frac{5376}{1711\frac{2}{3}}$	[3;7,9,1,3,2,...]	$3 + \frac{9}{64}$
$\frac{362}{209}$	$\frac{20064}{6388\frac{1}{6}}$	[3;7,9,1,4,2,...]	$3 + \frac{9}{64}$
$\frac{1351}{780}$	$\frac{74880}{23840\frac{2}{9}}$	[3;7,10,2,1,16,...]	$3 + \frac{10}{71}$
$\frac{1351}{780}$	$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$ *	[3;7,10,2,1,36,...]	$3 + \frac{10}{71}$
$\frac{5042}{2911}$	$\frac{279456}{88969\frac{2}{3}}$	[3;7,10,1,3421,59,...]	$3 + \frac{10}{71}$

(* Calcolo originale di Archimede)

Tabella 2. Calcolo del π ottenuto dal rapporto tra il perimetro del poligono inscritto e il diametro del cerchio usando i migliori approssimanti di $\sqrt{3}$ di ordine dispari (approssimazione per eccesso) ricavati dalle frazioni continue seguendo il procedimento di Archimede. Il valore di π nell'ultima colonna è espresso con i termini [a_0; a_1, a_2] che ne garantiscono l'approssimazione per difetto.

Questa è ovviamente un'ipotesi che viene solo accennata nel percorso didattico. Essa è usata come espediente per introdurre le frazioni continue, favorendo un clima di apprendimento per scoperta.

3.3 Il calcolo per ricorrenza e l'algoritmo della lungimiranza

Il testo di Archimede da una premessa habeat un risultato che va ricavato attraverso teoremi non esplicitati e calcoli non esplosi, anche di radici quadrate ricavate con il metodo dello gnomone.

In questo procedimento apparentemente noioso si ottengono ricorrenze interessanti in cui ogni risultato è derivato dal precedente attraverso scelte di approssimazioni ponderate.

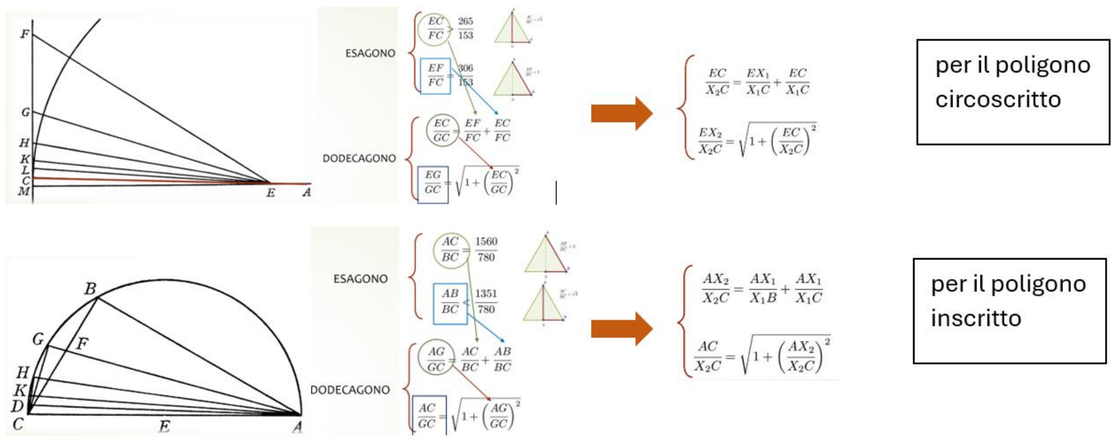

Figura 3. La ricorrenza del procedimento geometrico e dei calcoli.

Nel processo iterativo del poligono circoscritto il calcolo delle radici quadrate segue la sola logica di ricavare la parte frazionaria approssimata nella corretta disuguaglianza, tale che si ottenga un rapporto semplice e comodo per svolgere i calcoli successivi, dove comunque gli interi rimangono sempre dello stesso ordine di grandezza. Nella sezione dedicata al poligono inscritto il valore della frazione che approssima $\sqrt{3}$ è formato da interi più di cinque volte maggiori rispetto a quelli usati per il poligono circoscritto. Questo renderebbe difficile svolgere i calcoli ricorsivi con riga e compasso se Archimede non scegliesse particolari valori frazionari sub-ottimi per le approssimazioni delle radici quadrate. Tali valori permettono al passo successivo della ricorrenza di produrre frazioni con numeratori e denominatori molto piccoli rispetto a quelli che si otterrebbero con le stime ottimali della risoluzione della radice. Questa scelta di approssimazioni è quindi frutto di un preciso procedimento logico che abbiamo ricostruito in linguaggio moderno in termini di un algoritmo da noi chiamato “l’algoritmo della lungimiranza”; è sorprendente come Archimede abbia potuto intuirlo, usarlo e verificarlo senza l’aiuto del calcolo computazionale.

4. Conclusioni

Nella proposizione 3 della κύκλου μέτρησις Archimede non ha solo indicato un modo geniale per ricavare un ottimo risultato per il π, ma ha insegnato quale significato dare alla parola «calcolare». Egli ha mostrato che i numeri reali sono enti ideali, non oggetti attuali, la cui conoscenza, raggiungibile solo per quanto concerne le limitazioni inferiori e superiori, deve essere perseguita attraverso una raffinata indagine e condotta con rigore assoluto. Anche se l’essere umano mai raggiungerà la piena conoscenza dei numeri reali, potrà però valutare l’errore, sempre minore, che commette procedendo nelle approssimazioni. Prendere coscienza dei limiti umani nella interpretazione dei concetti e dei risultati della matematica non ne diminuisce il valore né ne contamina la suggestiva bellezza. Per questo il matematico Gaetano Fichera [9] definisce κύκλου μέτρησις la più emblematica delle opere di Archimede.

Ringraziamenti

Si ringrazia il professor Benedetto Scoppola per aver svolto la supervisione del lavoro e la dottoressa Agnese Pacifico per aver perfezionato le dimostrazioni.

Bibliografia

[1] A. Frajese, Opere di Archimede, Torino, Unione Tipografica Edit Torinese, 1974.
[2] J.L. Heiberg, Archimedis Opera Omnia, Leipzig, 1880.
[3] V. Viviani, Biblioteca nazionale centrale Firenze, Galileiano 208, n.98 della collezione dei Discepoli (https://www.bncf.firenze.sbn.it/risorse/galileiani/)
[4] H. N. Jahnke, The use of original sources in the mathematics classroom. In: J. Fauvel, & J.van Maanen, History in mathematics education, ICMI 291-328. Dordrecht, Kluwer Ac, 2000.
[5] F. Acerbi, Euclide tutte le opere, Bompiani, Terza Edizione, 2014.
[6] A.Ya. Khinchin, Continued Fractions, Mineola NY, Dover Publications Inc., 1997.
[7] T.L. Heath , The works of Archimedes, Cambridge, 1897.
[8] W.R. Knorr, Archimedes and the Measurement of the circle: a New interpretation, Archive for History of Exact Sciences, 15, 115-140, 1976.
[9] G. Fichera, Rigore e profondità nella concezione di Archimede della matematica quantitative. Atti del Convegno: Archimede. Mito Tradizione Scienza. Firenze, Leo S. Olschki, 1989.