

ai miei genitori

<i>Titolo</i>	Teoria dei Segnali
<i>Autore</i>	Alessandro Falaschi
<i>Rilascio</i>	Edizione 2.0a, 10 luglio 2023
<i>ISBN</i>	Not yet
<i>Copertina</i>	Marco Sebastiani - https://illustratoremarco.blogspot.com/
<i>Licenza</i>	 Creative Commons <i>Attribuzione - Non Commerciale - Condividi allo stesso modo</i> https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/deed.it
<i>Sito Web</i>	https://teoriadeisegnali.it/libro/
<i>Pagina Facebook</i>	Un modo per restare in contatto. Ricorda di mettere il <i>mi piace!</i> https://www.facebook.com/segnalisistemi
<i>Strumenti editoriali</i>	<ul style="list-style-type: none"> . Lyx - http://www.lyx.org/ . L^AT_EX - https://www.latex-project.org/ . Inkscape - http://www.inkscape.org/ . Gimp - https://www.gimp.org/ . Gnuplot - http://www.gnuplot.info/ . Octave - http://www.gnu.org/software/octave/ . Genius - https://www.jirka.org/genius.html . Linux - https://www.linux.it/
<i>Donazione</i>	Presso https://teoriadeisegnali.it/wiki/Libro/Donazioni puoi manifestare il tuo apprezzamento, stimolare la continuazione del lavoro, e garantirti la ricezione gratuita delle edizioni future. Il ricavato è in parte devoluto a progetti OpenSource
<i>Liberatoria</i>	L'inclusione accidentale di materiale protetto da copyright è da considerare momentanea, fino alla riproduzione di copie originali dello stesso. Ove possibile sono forniti riferimenti all'origine del materiale. L'autore si impegna alla rimozione dei contenuti che possano ledere gli altrui diritti
<i>Dello stesso autore</i>	<p>Lo strato applicativo di Internet http://teoriadeisegnali.it/wiki/Didattica/LoStratoApplicativodiInternet</p> <p>Signal Processing and Information Theory https://blog.teoriadeisegnali.it/2022/06/an-abridged-translated-and-twisted-edition/</p>

Prefazione

L'IDEA di autoprodurre questo testo trae forse origine da una sorta di desiderio di rivalsa rispetto alle fotocopie di appunti scritti a mano su cui da studente preparavo gli esami; con il passare degli anni dalla sua prima edizione del 2001, mi rendo sempre più conto di aver intrapreso un percorso *interminabile*. Un po' alla volta ho continuato infatti a migliorare la qualità del testo e ad integrare nuovi argomenti, incoraggiato dal gran numero di lettori raggiunti grazie alla sua accessibilità on-line, ed a distanza di più di venti anni dall'inizio dell'avventura annuncio il rilascio dell'edizione 2.0, che nella forma stampata si suddivide in due volumi, di cui questo è il primo.

La forma espositiva è tuttora articolata *su due livelli*, con numerose note ed appendici dove vengono svolti i passaggi e sviluppate le osservazioni, mentre il testo principale tenta di mantenere il *filo logico* del ragionamento complessivo. Si fa uso sistematico di rimandi e collegamenti che letteralmente *attraversano* l'intero testo, consentendo di *ricucire assieme* argomenti correlati ed interdipendenti, in modo particolarmente interattivo nel caso del formato PDF *navigabile*. Ci si avvale inoltre di *numerosissime illustrazioni*, per mostrare sia gli schemi (circuitali e simbolici) dei dispositivi discussi, sia l'andamento delle curve di prestazione o di altre grandezze in funzione del tempo, della frequenza, o dei parametri di sistema. Sono infine presenti svariati rimandi a contenuti on-line per gli argomenti accennati solo in parte, principalmente verso *Wikipedia*, da cui il lettore interessato può iniziare un percorso di approfondimento.

Giustamente ci si può chiedere: ma con tutti gli ottimi testi che già esistono su questi argomenti, che bisogno c'era di un ulteriore lavoro? A parte che quando iniziai a scrivere alcuni testi in italiano ora disponibili non erano ancora usciti, ritengo che il mio lavoro abbia prodotto un risultato con diversi aspetti di originalità. Il più appariscente è probabilmente la *disponibilità gratuita* in formato elettronico, che ha di fatto reso il testo un riferimento comune a tutta la comunità italoфона, e che ne permette la facile consultazione e navigabilità. Il secondo aspetto distintivo è la *varietà di argomenti* presenti, trattati in modo omogeneo e interdipendente, come difficilmente si riesce a fare in ambito universitario, a causa del livello di frammentazione didattica che lo

affligge¹. Una terza considerazione riguarda l'elevata *qualità tipografica* per un testo autoprodotta, ottenuta con l'utilizzo esclusivo di strumenti *opensource*. Il quarto punto di forza è la scelta di non affidarsi ad un editore tradizionale, ma affiancare al formato elettronico ad accesso pubblico² quello cartaceo in modalità *stampa on-demand*. Infine, l'aspetto forse più nascosto ma a mio avviso realmente qualificante è l'attività di *revisione dinamica* a cui è continuamente sottoposto durante i periodi didattici, che lo rende materia in continua evoluzione e ad ogni revisione sempre più completo.

Cultura libera

Nell'era di Internet un libro a carattere tecnico-scientifico non è un oggetto statico, bensì qualcosa che evolve per mantenere il passo con l'evoluzione di ciò che descrive. Questo testo è inoltre espressione di un *progetto di cultura libera*, cultura che deve poter fluire liberamente dall'accademia al bagaglio di conoscenze di chiunque ne sia interessato, priva di vincoli di costo, intermediari, distribuzione, rating, e con la sola forza della libera circolazione delle idee; la sua disponibilità pubblica è regolata dalle norme di licenza *CREATIVE COMMONS Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo*



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.it>

E' possibile contribuire allo sviluppo del progetto promuovendo la sua diffusione, acquistando una copia a stampa³, o incoraggiandone lo sviluppo ulteriore attraverso una *donazione*⁴, a cui corrisponde l'accesso *vitalizio* al formato PDF *navigabile* di tutte le edizioni presenti e future. Le donazioni ricevute sono poi in gran parte devolute ai progetti *open source* che hanno reso possibile il lavoro editoriale.

Edizione stampata

Come per le precedenti edizioni, si è scelto un servizio di tipo *print-on-demand*, in qualche modo *snobbando* gli editori tradizionali e by-passando qualsiasi *vaglio editoriale*. Anche se i principi della cultura libera reclamano priorità per la massima diffusione dell'opera, conseguita con la disponibilità del formato PDF liberamente scaricabile presso teoriadeisignali.it, il formato cartaceo sicuramente consente un approfondimento ed una memorizzazione dei contenuti assai più efficiente di quello elettronico, e dunque è giunto il momento di... *andare in stampa!*

¹In realtà il mondo universitario di afflizioni ne ha diverse, come ad esempio il fatto che un lavoro come questo ha VALORE ZERO per quanto riguarda la carriera accademica. Sì, perché il mestiere del docente, a quanto pare, NON È INSEGNARE BENE, ma scrivere *tanti articoli*, da far vendere alle riviste scientifiche, ovviamente a carico delle biblioteche universitarie.

²Presso <https://teoriadeisignali.it/libro/> è disponibile il *download* del testo in PDF, il formato HTML che viene indicizzato dai motori di ricerca, gli esercizi di esame svolti, e... molto altro!

³Nella copia a stampa, dopo l'ultimo capitolo viene fornito il link al download del PDF completamente navigabile.

⁴Le donazioni sono raccolte a partire da <https://teoriadeisignali.it/donazione.html>, mediante *Paypal* o carta.

In realtà l'operazione non è del tutto indolore, e dato che realizzare un unico volume con più di 900 pagine non è né pratico né fattibile, l'edizione stampata di *Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione* si suddivide in due volumi:

- TEORIA DEI SEGNALI che si compone di nove capitoli più uno introduttivo, e che tratta gli argomenti di base, e
- SISTEMI DI TELECOMUNICAZIONE di ben 23 capitoli (ma l'ultimo è solo un *segnaposto*) che trattano di (quasi) tutto il resto.

Quello che stai leggendo è il primo volume, ma potrai trovare al suo interno citazioni e riferimenti che indicano un numero di capitolo o di pagina che fanno parte dell'altro volume, permettendo a chi ha accesso ad entrambi di *riassemblare* i due in una unica *fonte coerente*.

Chi acquista una copia stampata ha inoltre il diritto di *scaricare* anche il formato *PDF navigabile*, riservato ai sostenitori del progetto, e senz'altro acquistare il libro significa sostenerlo. Chi lo desidera può inviare una foto del volume in suo possesso ad alef@teoriadeisignali.it, e riceverà al suo indirizzo le istruzioni per il download. Ad ogni modo, l'intervallo di quasi un anno tra l'annuncio dell'edizione 2.0 in formato PDF e quello dell'edizione stampata è anche servito ad incorporare alcuni piccoli refusi che ancora *alleggiavano*, oltre che ad includere la *data processing inequality* al capitolo nove.

Istruzioni per l'uso

Anche se un libro è esso stesso una spiegazione, e non dovrebbe averne di ulteriori, a volte qualche studente mi chiede: *ma quali sono le cose principali da sapere?* Purtroppo è una domanda senza risposta, o meglio, a cui potrebbe rispondere lo studente stesso dopo aver studiato, e infatti è quel genere di cose che vengono tramandate mediante passa parola. Io per primo non ho troppa simpatia per gli sviluppi analitici fini a se stessi, e ritengo più importante che siano afferrati i concetti e le modalità di procedere piuttosto che memorizzare i singoli passaggi senza avere al contempo una idea precisa del loro ruolo. D'altra parte *i conti* sono ciò che ci fa procedere nella conoscenza e che prova la sua esattezza: per questo *ce li ho messi* praticamente tutti, proprio lì dove è giusto che siano, *dentro un libro*, in modo che all'occorrenza si sappia dove andarli a cercare. Forse in una qualche edizione futura riuscirò a corredare ogni capitolo con una sezione di riassunto finale, leggendo la quale si possa avere una visione sintetica degli argomenti trattati e dei risultati più rilevanti ottenuti. Ma come consiglio generale allo studio, posso solo suggerire di provare a scrivere per proprio conto un riassunto del genere, perché è proprio attraverso la scrittura e la ripetizione che si rinforza la memoria; viceversa, leggendo e sottolineando è più probabile che si concili il sonno. Questa è una materia tanto affascinante quanto noiosa, non posso farci nulla.

Prefazione all'edizione 2.0

Anche se ormai il testo si è fatto *maggiorenne*⁵ i suoi contenuti non potevano che continuare ad espandersi, sia in termini di approfondimenti che di nuovi argomenti. Il formato è un po' cambiato, da 16x23 siamo passati a 17x24 cm, ed il corpo dei font è passato da 9 ad 11, prima erano veramente *troppo piccoli*! Oltre a queste (ed altre) operazioni di *maquillage*, l'insieme dei contenuti è stato suddiviso in *quattro* parti⁶:

- teoria dei segnali (I) (*interamente contenuta nel primo volume*)
- modulazione (II) (*che come le seguenti, è inclusa nel secondo volume*)
- trasmissione dei segnali (III)
- sistemi di telecomunicazione (IV)

con un associato rimescolamento degli argomenti tra i capitoli rispetto alla precedente edizione. Se le primissime *uscite pubbliche* di questo testo (in cui gli argomenti, sia pur disparati, erano resi contigui) incontrassero questa loro progenie cresciuta, immagino che non la riconoscerrebbero!

Principali novità

Questa edizione ha subito nel corso del suo sviluppo rallentamenti vari, ha attraversato il periodo del Covid per ritrovarsi con una guerra in Europa. Con l'auspicio che il buon senso possa prevalere sulla follia, vediamo cosa ci porta di nuovo l'edizione 2.0.

- sono investigati gli aspetti implementativi del *campionamento*, a cui segue il nuovo capitolo dedicato esclusivamente al *filtraggio*, che ora affronta anche le architetture *polifase* e *integratore-pettine in cascata*, chiudendo così il cerchio con la tecnica di sovracampionare e decimare;
- aggiunte figure esplicative della relazione tra DFT, DTFT e trasformata *zeta*;
- nel capitolo di *probabilità* si è approfondito lo studio della d.d.p. *gaussiana*, menzionata la funzione $Q(\cdot)$, e dimostrato il *teorema centrale del limite*; è stata inoltre sviluppata l'esposizione della *funzione caratteristica*, e la relazione tra momenti e serie di potenze della d.d.p;
- il capitolo sulla *correlazione* si arricchisce della sezione dedicata alla *regressione lineare*, sia semplice che *multipla*, e della relazione che intercorre tra questa ed il *metodo dei minimi quadrati*, introducendo la matrice *pseudo inversa* e svolgendo esemplificazioni figurate dei *concetti geometrici* associati;
- aggiunto un esempio figurato sulla *distorsione non lineare* presente in una sinusoide che va in *saturazione*;
- la *teoria dell'informazione* è ora suddivisa in due capitoli, il primo orientato alla codifica *di sorgente* ed il secondo a quella *di canale*:

⁵La prima edizione pubblica risale al 2001.

⁶Precedentemente erano tre, ora la modulazione ha acquisito lo status di parte a sé, dato che è un argomento che non necessariamente occorre spiegare (ad esempio) a studenti di (bio)informatica.

- approfondito lo studio della sorgente informativa *gaussiana*, con il calcolo della sua *entropia differenziale* (anche per il caso *multidimensionale*), e la dimostrazione che questa è massima applicando il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*, a cui è stata dedicata una apposita appendice corredata di grafico esplicativo;
- aggiunta sezione sull’informazione per coppie di v.a.: *entropia congiunta e condizionale*, *informazione mutua media*, *entropia relativa* (o divergenza di *Kullback Leibler*) ed entropia di *Rényi*;
- aggiunta sezione che, dopo aver evidenziato la formula di *calcolo a catena* per la probabilità di sequenze markoviane, ne estende le conseguenze al calcolo dell’entropia e dell’informazione mutua media, sino ad arrivare alla dimostrazione del *data processing inequality*;
- estesa la trattazione della *teoria velocità-distorsione*, e dimostrato il *limite inferiore di Shannon* $R(D) \geq h(X) - \frac{1}{2} \log_2(2\pi eD)$ con $h(X)$ pari all’entropia differenziale della sorgente e $\frac{1}{2} \log_2(2\pi eD)$ quella di una v.a. gaussiana con varianza D ;
- valutata l’entropia di un processo *gaussiano con memoria* e l’associata misura di *piattezza spettrale*, a cui segue la definizione di *funzione distorsione-velocità* mediante il procedimento di *water filling*;
- la trattazione della *codifica di canale* si allinea agli sviluppi intercorsi nelle ultime decadi, affrontando argomenti come il codice di Reed-Solomon *accorciato*, la *codifica concatenata* e l’*interleaving* da associarvi; è stato aggiunto lo *pseudo codice* della decodifica di *Viterbi*, illustrata la tecnica del *tail-biting* ed approfondito il principio di *decisione soffice* con la verosimiglianza associata, graficate le *prestazioni* di Viterbi per diverse *lunghezze di vincolo*. Dopo un accenno alle alternative di codifica convoluzionale, si descrive il codice *perforato* e la *concatenazione* Solomon-Viterbi, affrontando quindi la decodifica di Viterbi con *uscite soffici*;
- un significativo avanzamento riguarda poi la trattazione dei codici TURBO e di quelli a bassa densità di controllo parità (LDPC): per i primi dopo aver illustrato la *codifica ricorsiva parallela* e la decodifica SISO, sono definiti il rapporto di verosimiglianza logaritmica LLR e l’*informazione estrinseca*, valutata la LLR di ingresso e di uscita al SISO, e sviluppato l’algoritmo di *decodifica turbo*;
- l’elegante codifica LDPC viene affrontata dopo aver attinto a diverse fonti, tutte citate, realizzando una sintesi senza per questo sprofondare nei conti. Dopo aver illustrato le particolarità della *matrice di controllo H* e l’associato *grafo di Tanner*, si affronta la decodifica *iterativa* basata sullo scambio di messaggi tra nodi secondo un principio di *propagazione della credenza*, che può essere implementato mediante un algoritmo *somma-prodotto*. Come per le altre tecniche vengono forniti grafici prestazionali per diverse condizioni operative, e gli attuali contesti di adozione.

- alla trattazione della *ricezione ottima* di una trasmissione numerica tramite canale con distorsione lineare e rumore bianco, si è aggiunta la dimostrazione di come una *equalizzazione ripartita* tra i due estremi del collegamento sia quella in grado di garantire le migliori prestazioni, e valutata la perdita conseguente alla necessità di localizzare tutta l'equalizzazione al ricevitore;
- alla discussione sulla *ripartizione della potenza complessiva* tra le diverse portanti dell'OFDM si è aggiunto lo studio analitico della massimizzazione della *capacità aggregata* che porta all'espressione della soluzione ottima di tipo *water-filling*;
- anche il capitolo sui *mezzi trasmissivi* si è scisso in due, il primo dedicato a *cavo e fibra*, ed il secondo ai collegamenti *radio*;
- infine la novità *più poderosa* di questa edizione sono le 60 pagine del capitolo sui sistemi *multiantenna* o MIMO! La possibilità (offerta dalla tecnologia) di dotarsi di *più di una antenna* ha aperto le porte ad una *evoluzione* che giunge fino ai nostri giorni, e che è ripercorsa nei suoi diversi aspetti. Il *canale vettoriale* MIMO viene definito come una matrice complessa \mathbf{H} i cui elementi rappresentano il *guadagno aleatorio* del canale passa basso equivalente associato ad ogni coppia di antenne ai due lati del collegamento. Si mostra quindi come nel caso SIMO di più antenne al solo lato ricevente, quest'ultimo sia in grado di combinare in modo *coerente* le copie di messaggio ricevuto, e poi come nel caso MISO di più antenne al solo lato trasmittente si possano definire *codici spazio-tempo* STC che consentono di *diluire* l'informazione trasmessa oltre che nel tempo, anche sulle antenne, permettendo di ottenere un *guadagno di diversità*. Segue poi un impegnativo approfondimento sulla *capacità* del canale MIMO vero e proprio, da confrontare con quella per i casi SISO, SIMO e MISO. Il risultato che si ottiene è la possibilità di operare su di un set di *canali virtuali indipendenti*, ottenibile eseguendo un opportuno *signal processing* dal lato del trasmettitore, purché quest'ultimo sia a conoscenza dei valori di \mathbf{H} ; in tal caso si conseguono le prestazioni *ottime* dopo aver ripartito la potenza sui diversi canali virtuali con la tecnica del *riempimento d'acqua*.
 - Ma siamo solo a metà capitolo! Qui il discorso *si allarga* introducendo la tecnica della *multiplazione spaziale*, ossia dell'inviare diversi messaggi in simultanea dalle diverse antenne di trasmissione. Il ricevitore multiantenna può allora applicare diverse strategie di decodifica, di *massima verosimiglianza* o ML, *sphere decoding*, *zero forcing*, MMSE, VBLAST.
 - Si passa quindi a trattare la trasmissione multiutente o MU - MIMO, in cui le precedenti tecniche vengono per così dire *ribaltate* al trasmettitore (purché conosca \mathbf{H}) che può così effettuare il *precoding* dei messaggi da trasmettere. Nel caso di una trasmissione FDD sussiste quindi il problema di comunicare \mathbf{H} tra Rx a Tx, oppure di realizzare un *beamforming opportunistico*.
 - Nella trasmissione MIMO - OFDM alla *molteplicità* delle antenne si aggiunge quella delle sottoportanti, risolvendo allo stesso tempo in modo

semplice il problema della *equalizzazione* necessaria alle velocità più elevate. Il canale risultante acquisisce oltre alla *diversità* spaziale anche quella di *frequenza*, permettendo di definire *codici spazio-tempo-frequenza* in grado di trarre vantaggio da entrambe. La trattazione dei sistemi *multiutente* MU-MIMO-OFDM si focalizza al caso TDD che *non* comporta la trasmissione della matrice \mathbf{H} tra utenti mobili e stazione radio base (BS) e permette la definizione dei *blocchi di coerenza* entro i quali le parti si alternano a trasmettere, mentre la BASE STATION stima il canale di *downlink* mediante opportune *sequenze pilota ortogonali*. Il caso viene quindi calato nel contesto delle moderne *reti cellulari*, per le quali si forniscono gli opportuni rimandi di approfondimento.

- Il capitolo si conclude con l'applicazione della tecnica MISO al caso della diffusione *broadcast televisiva digitale* DVB-T mediante una *single frequency network* o SFN, in cui dopo una introduzione all'architettura ed agli aspetti trasmissivi, si approfondisce quello della sincronizzazione da parte del ricevitore TV dei simboli OFDM trasmessi da molteplici ripetitori, mediante l'utilizzo del segnale GPS e l'inserimento nel flusso MPEG di uno speciale pacchetto *mega frame initialization packet* o MIP.

Queste le novità in cui l'edizione 2.0 differisce rispetto alla 1.7 (sì, ho saltato due decimali, ma ci voleva!) raccontate per esteso presso <https://teoriadeisignali.it/libro/NEWS.txt>. Oltre, come sempre, alla miriade di altri aggiustamenti e precisazioni.

Posso dire di essere riuscito a mettere tutto dentro? Di certo gli ultimi sforzi pongono il testo su di un livello ancora più ambizioso! Anche se c'è ancora la situazione della quarta parte, che non ho toccato, e che potrebbe crescere includendo almeno i tratti essenziali di *cose di tutti i giorni* come la *telefonia mobile*, l'IPv6, il *bluetooth*, il wireless ottico, il GPS... ma probabilmente queste possono ancora attendere: prima vorrei riuscire ad affrontare due argomenti più di base, il primo già acquisito dalla tecnologia, ed il secondo emergente. Si tratta rispettivamente della *software defined radio* o SDR, ossia le particolarità che assumono i processi di *mo-demodulazione* quando realizzati su dati campionati, e dei *segnali sui grafi*, che sfruttano le relazioni non topologiche⁷ definite da una matrice di adiacenza, per sviluppare su questo tipo di segnali una analisi spettrale e definire approcci a filtraggio, sottocampionamento, inferenza e predizione. A chi può chiedersi *Si, ma cosa sono questi segnali sui grafi?* rispondo *di tutto*, dalle reti di sensori ai social network alle reti reputazionali, fino alle reti biologiche, di interazione proteica e malattia-farmaco, per arrivare alla medicina di precisione. E ti pare poco?

⁷Mentre per i campioni di segnale nel tempo la topologia associata è definita dalla relazione di vicinanza unidirezionale *uno contro l'altro*, e per le immagini la topologia corrisponde a quella di una mappa spaziale bidimensionale, per i dati sui grafi la topologia è definita a partire dalla *matrice di adiacenza*, che si fa beffe di mappe e sequenze.

viii

Un sentito grazie a tutti coloro che mi hanno incoraggiato a continuare, ed *io continuerò!*

Alessandro Falaschi, Settembre 2022

Indice

Prefazione	i
Cultura libera	ii
Edizione stampata	ii
Istruzioni per l'uso	iii
Prefazione all'edizione 2.0	iv
Principali novità	iv
1 Una visione di insieme	1
1.1 Trasmissione dei segnali e dell'infor-	1
mazione	1
1.2 Segnali analogici e numerici	3
1.2.1 Segnale analogico	3
1.2.1.1 Rappresentazione frequenziale	4
dei segnali analogici	4
1.2.1.2 Transito dei segnali attraverso	4
sistemi fisici	4
1.2.2 Trasmissione numerica	5
1.3 Segnali aleatori	9
1.3.1 Calcolo delle probabilità e statistica	9
1.3.1.1 Autocorrelazione e densità di	9
potenza	9
1.3.1.2 Teoria del traffico	10
1.4 Sistemi di telecomunicazione	10
1.5 Classi di segnale ed operazioni relative	13
1.5.1 Spettro di segnale	17
1.5.1.1 Segnale limitato in banda	18
1.5.2 Operazioni sui segnali	18
1.5.2.1 Combinazione di segnali	19
1.5.3 Segnali di uso frequente	20
1.5.3.1 Esponenziale complesso	22
1.6 Caratteristiche dei sistemi	25
1.6.1 Sistema lineare e permanente	25
1.6.2 Non linearità	27

I Teoria dei Segnali	29
Prefazione	31
2 Serie di Fourier e spazio dei segnali	35
2.1 Prerequisiti trigonometrici	35
2.1.1 Numeri complessi	35
2.1.2 Formula di Eulero	36
2.1.3 Fasore	37
2.2 Serie di Fourier	38
2.2.1 Serie di Fourier per segnali reali	39
2.2.1.1 Simmetria coniugata o Hermitiana	39
2.2.1.2 Interpretazione dei coefficienti	40
di Fourier come fasori	40
2.2.1.3 Serie trigonometrica	41
2.2.1.4 Serie di Fourier di un'onda	42
rettangolare	42
2.2.2 Serie di Fourier troncata	44
2.3 Teorema di Parseval	45
2.4 Spazio dei segnali	47
2.4.1 Spazio metrico	47
2.4.2 Spazio lineare	48
2.4.3 Spazio prodotto interno e spazio di	50
Hilbert	50
2.4.4 Spazi a dimensionalità infinita	53
2.4.4.1 Spazio dei segnali periodici	54
2.4.4.2 Spazio dei segnali di energia e di	55
potenza	55
2.4.4.3 Spazio dei funzionali lineari	55
definiti da un prodotto interno	55
2.5 Appendici	57
2.5.1 Convergenza della serie di Fourier	58
2.5.2 Ri-definizione dei coefficienti di	59
Fourier	59
2.5.3 Sviluppo in serie per alcuni segnali	59
3 Trasformata di Fourier e convoluzione	61
3.1 Dalla serie alla trasformata	61
3.2 Energia mutua, Parseval e densità di	63
energia	63
3.3 Prime proprietà della trasformata di	64
Fourier	64
3.4 Impulso di Dirac	68
3.4.1 Risposta impulsiva	70
3.4.2 Integrale di convoluzione	71
3.4.3 Risposta impulsiva come funzione	72
memoria	72
3.4.4 Convoluzione con l'impulso traslato	73
3.5 Moltiplicazione in frequenza e nel	73
tempo	73
3.5.1 Moltiplicazione in frequenza (<i>fil-</i>	74
<i>traggio</i>)	74

3.5.2	Moltiplicazione nel tempo (<i>modulazione e finestatura</i>)	76	5.1	Filtri analogici	119
3.6	Derivazione ed integrazione nel tempo	77	5.1.1	Filtro analogico ad un polo	122
3.7	Treno di impulsi	80	5.2	Filtri digitali	123
3.8	Appendici	82	5.2.1	Filtro trasversale	124
3.8.1	Grafico della trasformata di un rettangolo ritardato	82	5.2.2	Realizzazione numerica del filtro trasversale	125
3.8.2	Misura di una differenza di fase	83	5.2.3	Filtro trasversale del primo ordine	127
3.8.3	Quanti sono i possibili modi di calcolare una trasformata?	83	5.2.4	Filtro a risposta impulsiva <i>infinita</i> (IIR) del primo ordine	129
3.8.4	Finestratura e stima spettrale	84	5.3	Filtri numerici	131
3.8.5	Gli esponenziali complessi come base ortogonale	86	5.3.1	Sintesi FIR a partire dalla descrizione tempo continua	131
3.8.6	Trasformata di un gradino	86	5.3.2	Trasformata zeta e filtraggio	132
3.8.7	Proprietà della trasformata di Fourier	87	5.3.2.1	Filtri a risposta impulsiva finita	132
3.8.8	Trasformate di segnali	88	5.3.2.2	Risposta impulsiva infinita	133
4	Campionamento quantizzazione ed elaborazione numerica	89	5.3.3	Sintesi di un filtro IIR a partire da un filtro analogico	135
4.1	Teorema del campionamento	89	5.3.3.1	Invarianza della risposta impulsiva	135
4.1.1	Aliasing	92	5.3.3.2	Corrispondenza di poli e zeri	136
4.1.2	Ortogonalità delle funzioni sinc	92	5.3.3.3	Equazioni alle differenze	137
4.2	Aspetti realizzativi del campionamento	93	5.3.3.4	Trasformazione bilineare	137
4.2.1	Sovracampionamento e decimazione numerica	93	5.4	Filtraggio polifase	138
4.2.2	Generalizzazione del filtro di restituzione	93	5.4.1	Filtro di decimazione	138
4.2.3	Interpolazione numerica	94	5.4.1.1	Decomposizione polifase	139
4.2.4	Approssimazione degli impulsi	94	5.4.2	Filtro interpolatore	140
4.2.5	Conversione A/D e D/A	96	5.4.2.1	Semplificazione polifase	141
4.3	Quantizzazione e codifica binaria	97	5.4.3	Filtro integratore-pettine in cascata	141
4.3.1	Quantizzazione uniforme	98	6	Probabilità processi e statistica	145
4.3.1.1	SNR di quantizzazione	99	6.1	Teoria delle probabilità	145
4.3.2	Quantizzazione non uniforme	100	6.1.1	Assiomi delle probabilità	146
4.4	Trasformata di Fourier di sequenze	102	6.1.2	Teoremi di base	146
4.5	Trasformata discreta di Fourier	103	6.1.3	Probabilità congiunta, condizionata e marginale	146
4.5.1	Relazione tra DTFT, DFT e trasformata zeta	107	6.1.4	Probabilità a priori e a posteriori, teorema di Bayes	147
4.5.2	Fast Fourier Transform	109	6.1.5	Indipendenza statistica	148
4.5.3	Relazione tra DFT e DCT	110	6.2	Variabili aleatorie	148
4.5.4	DFT come un banco di filtri	111	6.2.1	Densità di probabilità e funzione di distribuzione	149
4.6	Filtraggio numerico via DFT	112	6.2.2	Valore atteso, momento e momento centrato	150
4.6.1	Convoluzione discreta	112	6.2.3	Variabile aleatoria uniforme	152
4.6.2	Convoluzione circolare	113	6.2.4	Variabile aleatoria gaussiana	153
4.6.3	Convoluzione tra sequenze di durata finita via DFT	114	6.2.4.1	Probabilità di un evento gaussiano	153
4.6.4	Convoluzione di segnali via DFT	114	6.2.5	Funzione caratteristica	155
4.7	Riassumendo	115	6.2.5.1	Densità di probabilità della somma di v.a. indipendenti	155
4.7.1	Le frequenze della DFT	116	6.2.5.2	Funzione caratteristica di una v.a. gaussiana	156
4.7.2	Le ampiezze della DFT	116	6.2.6	Variabile aleatoria multivariata	157
4.8	Sottocampionamento	116	6.3	Processi stazionari ed ergodici	158
5	Filtri analogici e numerici	119			

6.3.1	Momento come media di insieme	159	7.2.2	Segnale periodico	198
6.3.2	Media temporale	159	7.2.3	Processo armonico	199
6.3.3	Media temporale calcolata come media di insieme	160	7.2.4	Processo gaussiano bianco limitato in banda	199
6.3.4	Processo stazionario	160	7.2.5	Processo di segnale dati	201
6.3.5	Processo stazionario ed ergodico	161	7.3	Stima spettrale	201
6.3.6	Riassumendo	162	7.3.1	Periodogramma	202
6.3.7	Processo ad aleatorietà parametrica	162	7.4	Filtraggio di segnali e processi	204
6.4	Trasformazione di v.a. e cambio di variabili	164	7.4.1	Densità spettrale in uscita da un filtro	204
6.4.1	Caso unidimensionale	164	7.4.2	Caratteristiche statistiche in uscita da un filtro	207
6.4.2	Caso multidimensionale	166	7.5	Operazioni elementari sui segnali	208
6.5	Gaussiana multidimensionale	167	7.5.1	Ritardo	209
6.5.1	Indipendenza statistica per v.a. gaussiane incorrelate	168	7.5.2	Somma tra segnali aleatori	209
6.5.2	Trasformazione lineare di v.a. gaus- siane	169	7.5.3	Prodotto tra segnali aleatori	210
6.5.3	Processo gaussiano	169	7.5.4	Stima della autocorrelazione	211
6.6	Elementi di statistica	170	7.6	Filtro adattato	212
6.6.1	Test di verifica di ipotesi	170	7.6.1	Segnalazione antipodale	217
6.6.2	Funzione di verosimiglianza	171	7.6.2	Segnalazione ortogonale	217
6.6.2.1	Decisione di massima verosimi- glianza	171	7.7	Appendici	218
6.6.2.2	Curva operativa	171	7.7.1	Regressione lineare	219
6.6.3	Stima di parametro	172	7.7.2	Coefficiente di correlazione di Pear- son	222
6.6.3.1	Stima di massima verosimiglianza	173	7.7.3	Teorema di Wiener per processi	223
6.6.4	Stima di intervallo	174	7.7.4	Densità spettrale per onda PAM	224
6.6.4.1	Intervallo di confidenza per una frazione	178	7.7.5	Autocorrelazione di un processo in uscita da un filtro	228
6.6.5	Test chi quadro e verifica di distribuzione	179	7.7.6	Grafici di esempio	229
6.6.6	Stima di forma d'onda	181	8	Distorsione e rumore	231
6.7	Appendici	182	8.1	Misure di potenza in decibel	233
6.7.1	Approfondimento sulla gaussiana	182	8.2	Distorsione lineare	235
6.7.2	Teorema centrale del limite	183	8.2.1	Distorsione di ampiezza	236
6.7.3	Matrice di covarianza e forma quadratica associata	185	8.2.2	Distorsione di fase	237
7	Correlazione, densità spettrale e filtraggio	189	8.2.3	Effetto della distorsione lineare sui segnali	239
7.1	Correlazione, covarianza e autocorre- lazione	189	8.3	Distorsione da non linearità	241
7.1.1	Correlazione tra variabili aleatorie	190	8.3.1	Ingresso sinusoidale	242
7.1.2	Covarianza, indipendenza statistica e incorrelazione	192	8.3.2	Ingresso aleatorio	243
7.1.3	Correlazione di un processo stazio- nario ergodico	193	8.4	Disturbi additivi	244
7.1.4	Autocorrelazione e intercorrelazio- ne di segnali certi	193	8.4.1	Valutazione dell'SNR dovuto a diverse fonti di disturbo	244
7.1.5	Proprietà dell'autocorrelazione	195	8.4.2	Rumore gaussiano	245
7.2	Spettro di densità di potenza	197	8.4.2.1	Rumore termico nei bipoli passivi	245
7.2.1	Teorema di Wiener	197	8.4.2.2	Rumore termico di un generato- re di segnale	246
			8.5	Appendice	247
			8.5.1	Distorsione non lineare di processo gaussiano	247
			9	Teoria dell'informazione e codifica di sorgente	249
			9.1	Codifica di sorgente discreta	250

9.1.1	Entropia	251	9.6.2	Funzione velocità-distorsione	276
9.1.1.1	Entropia di sorgente binaria	252	9.6.2.1	Shannon lower bound	276
9.1.1.2	Ridondanza	252	9.6.3	Curva velocità-distorsione per sorgente gaussiana	277
9.1.1.3	Entropia di sorgente L-aria	253	9.6.4	Sorgente continua con memoria	279
9.1.2	Intensità informativa e codifica binaria	253	9.6.4.1	Entropia e potenza entropica di sorgente gaussiana con memoria	279
9.1.2.1	Teorema della codifica di sorgente	254	9.6.4.2	Funzione distorsione-velocità per sorgente gaussiana con memoria	280
9.1.2.2	Codebook e codeword	254	9.6.4.3	Sorgente non gaussiana	282
9.1.2.3	Efficienza del codice	254	9.7	Appendici	282
9.1.3	Codifica con lunghezza di parola variabile	255	9.7.1	Metodo dei moltiplicatori di Lagrange	282
9.1.3.1	Regola del prefisso	255	9.7.2	Massimo dell'entropia per variabile aleatoria gaussiana	284
9.1.3.2	Codice ottimo	256	9.7.3	Misura di piatezza spettrale di processo gaussiano	285
9.1.3.3	Codice di Huffman	257	9.7.4	Autocorrelazione di sequenza autoregressiva	287
9.1.3.4	Codifica dinamica (di Huffman)	258			
9.1.4	Codifica per blocchi	259			
9.1.4.1	Compromesso velocità-ritardo	260			
9.2	Sorgente discreta con memoria	261			
9.2.1	Sorgente Markoviana	261			
9.2.1.1	Autovettore della matrice di transizione	262			
9.2.2	Codifica di sorgente binaria con memoria	262			
9.2.2.1	Codifica run-length	263			
9.2.2.2	Codifica predittiva	263			
9.2.3	Compressione basata su dizionario	264			
9.2.3.1	Metodo di Lempel-Ziv-Welsh	264			
9.2.3.2	Algoritmo Deflate	265			
9.3	Contenuto informativo di sorgente continua	266			
9.3.1	Entropia differenziale di sorgente continua	266			
9.3.2	Entropia differenziale di sorgente gaussiana	267			
9.3.2.1	Massima informazione per processo gaussiano	267			
9.4	Misure di informazione per una coppia di v.a.	268			
9.4.1	Entropia congiunta	268			
9.4.2	Entropia condizionale	268			
9.4.3	Informazione mutua media	269			
9.4.4	Entropia relativa	270			
9.4.5	Entropia di Rényi	270			
9.5	Ricorrenze e disegualianza del data processing	271			
9.5.1	Calcolo a catena dell'entropia	271			
9.5.2	Calcolo a catena per l'informazione mutua media	272			
9.5.3	Data processing inequality	273			
9.6	Codifica di sorgente con perdita di informazione	274			
9.6.1	La distorsione di codifica	275			
			10	Codifica di sorgente multimediale	289
			10.1	Codifica audio	289
			10.1.1	Codifica di forma d'onda	290
			10.1.1.1	DPCM o PCM Differenziale	290
			10.1.1.2	ADPCM o DPCM Adattivo	291
			10.1.1.3	Codifica per sottobande	292
			10.1.2	Codifica basata su modello	293
			10.1.2.1	Produzione del segnale vocale	294
			10.1.2.2	Codifica a predizione lineare - LPC	296
			10.1.2.3	Predizione lineare ad eccitazione residuale - RELP	299
			10.1.2.4	Quantizzazione vettoriale dell'eccitazione	301
			10.1.2.5	Predizione lineare ad eccitazione codificata - CELP	302
			10.1.3	Codifica psicoacustica	304
			10.2	Codifica di immagine	307
			10.2.1	Dimensioni	307
			10.2.2	Spazio dei colori	309
			10.2.3	Formato GIF	312
			10.2.4	Codifica JPEG	313
			10.3	Codifica video	319
			10.3.1	Standard video	325
			10.3.1.1	H.261	325
			10.3.1.2	H.263	328
			10.3.1.3	MPEG-1	329
			10.3.1.4	MPEG-2	330
			10.3.2	Contenitori	332
			10.3.2.1	Transport Stream	334

Elenco dei simboli

AAL	ATM Adaptation Layer
ACK	acknowledgment
ADM	Add and Drop Multiplexer
ADPCM	Adaptive Differential Pulse Coded Mudulation
ADSL	Asymmetric Digital Subscriber Line
AM	Amplitude Modulation
AMI	Alternate Mark Inversion
ARP	Address Resolution Protocol
ARQ	Automatic Repeat reQuest
AS	Autonomous System
ASCII	American Standard Code for Information Interchange
ATM	Asynchronous Transfer Mode
AWGN	Additive White Gaussian Noise
BCH code	codice Bose Chaudhuri Hocquenghem
BGP	Border Gateway Protocol
BLR	Banda Laterale Ridotta
BLU	Banda Laterale Unica
BPSK	Bi-Phase Shift Keying
BRAS	Broadband Remote Access Server
BRI	Basic Rate Interface
BS	Base Station
BSC	Binary Symmetric Channel
CAS	Channel Associated Signaling
CB	Coherence Block
CC	codice convoluzionale
CCS	Common Channel Signaling
CDM	Code Division Multiplex
CDMA	Code Division Multiple Access
CDN	Circuito Diretto Numerico
CELP	Code Excited Linear Prediction
CIC	Cascaded Integrator-Comb (filtro)
CIDR	Classless Interdomain Routing

COFDM	Coded OFDM
CPK	Continous Phase Keying
CRC	Cyclic Redundancy Check
CSI	Channel State Information
CSMA/CD	Carrier Sense Multiple Access - Collision Detect
DAC	Digital to Analog Converter
DBPSK	Differential Bi Phase Shift Keying
DCT	Discrete Cosine Transform
DFE	Decision Feedback Equalizer
DFT	Discrete Fourier Transform
DL	DownLink
DLL	Delay Locked Loop
DMT	Discrete Multi Tone
DNS	Domain Name Service
DPC	Dirty Paper Coding
DPCM	Differential Pulse Coded Modulation
DPLL	Digital Phase Locked Loop
DSLAM	Digital Subscriber Line Access Multiplexer
DSSS	Direct Sequence Spread Spectrum
DTFT	Discete Time Fourier Transform
DWDM	Dense Wavelength Division Multiplex
f.d.t.	funzione di trasferimento
FDM	Frequency Division Multiplex
FEC	Forward Error Correction
FEXT	Far End Crosstalk
FFT	Fast Fourier Transform
FIFO	First In First Out
FIR	Finite Impulse Response
FM	Frequency Modulation
FSK	Frequency Shift Keying
FTTH	Fiber To The Home
GIF	Graphics Interchange Format
GMSK	Gaussian Minimum Shift Keying
GOB	Group Of (macro)Blocks
GPRS	General Packet Radio Service
GSM	Global System for Mobile communications
IDFT	Inverse Discrete Fourier Transform
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
IGP	Interior Gateway Protocols
IIR	Infinite Impulse Response
IP	Internet Protocol
ISDN	Integrated Service Data Network
ISI	Inter Symbol Interference
JPEG	Joint Photographic Experts Group
LAN	Local Area Network

LDPC	Low Density Parity Check
LLC	Logical Link Control
LMS	Least Mean Square
LOS	Line Of Sight
LPC	Linear Predictive Coding
MAC	Media Access Control
MFN	Multiple Frequency Network
MIMO	Multiple Input Multiple Output
MIP	Megaframe Initialization Packet
MISO	Multiple Input Single Output
ML	Maximum Likelihood
MLSD	Maximum Likelihood Sequence Detection
MMSE	Minimum Mean Square Error
MPEG	Moving Pictures Expert Group
MRC	Maximal Ratio Combining
MSK	Minimum Shift Keying
MU-MIMO	Multiple User MIMO
NEXT	Near End Crosstalk
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplex
OFDMA	Orthogonal Frequency Division Multiple Access
PCM	Pulse Coded Modulation
PDH	Plesiochronous Digital Hierarchy
PLL	Phase Locked Loop
PON	Passive Optical Network
POTS	Plain Old Telephony Services
PPS	Pulse Per Second
PSTN	Public Switched Telephone Network
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
QoS	Quality of Service
QPSK	Quadrature Phase Shift Keying
QV	Quantizzazione Vettoriale
REL	Residual Excited Linear Prediction
SAP	Service Access Point
SDH	Synchronous Digital Hierarchy
SDMA	Space Division Multiple Access
SFBC	Space Frequency Block Code
SFN	Single Frequency Network
SIMO	Single Input Multiple Output
SINR	Signal / Interferent and Noise Ratio
SISO	Single Input Single Output
SISO	Soft Input, Soft Output
SNAP	Subnetwork Access Protocol
SOVA	Soft Output Viterbi Algorithm
STBC	Space Time Block Code
STC	Space Time Code

STFBC	Space Time Frequency Block Code
STM	Synchronous Transport Module
STS	Synchronization Time Stamp
STTC	Space Time Trellis Code
SVD	Singular Value Decomposition
TCP	Transport Control Protocol
TDD	Time Division Duplex
UDP	User Datagram Protocol
UE	User Equipment
UL	UpLink
VBLAST	Vertical Bell Laboratories Layered Space-Time
VCO	Voltage Controlled Oscillator
VLAN	Virtual LAN
ZF	Zero Forcing

Una visione di insieme

QUESTO capitolo introduttivo offre innanzitutto una panoramica dei diversi aspetti, denominazioni e procedure che sono oggetto di studio nella trasmissione dei segnali, e la cui analisi approfondita viene sviluppata ai capitoli successivi. Prosegue quindi al § 1.5 approfondendo la descrizione delle caratteristiche dei *segnali* e dei *sistemi*, ovvero del veicolo utilizzato per trasmettere informazione. Saranno individuate diverse categorie e modalità di rappresentazione per i segnali, nonché le operazioni che è possibile eseguire su di essi.

1.1 Trasmissione dei segnali e dell'informazione

La disciplina della *trasmissione dei segnali* si è sviluppata allo scopo di descrivere la rappresentazione di *contenuti semantici* o *messaggi informativi* (il *significato*) mediante l'andamento nel tempo di grandezze fisiche (elettromagnetiche e/o simboliche) che ne costituiscono il *significante*¹. Dopo che al messaggio è stato associato un idoneo segnale (che lo *codifica*), la *trasmissione a distanza* del segnale avviene grazie a diversi apparati cooperanti, spesso organizzati *in rete*. Il segnale trasmesso può rappresentare un messaggio generato al tempo stesso della sua trasmissione, oppure pre-esistente e registrato.

Sorgente, destinatario e canale L'origine del segnale da trasmettere è tipicamente indicata (vedi Fig. 1.1-a) come *sorgente*, e ciò che giace tra sorgente e *destinatario* è descritto da una entità astratta denominata *canale* di comunicazione, le cui caratteristiche condizionano i segnali trasmessi.

Distorsione e disturbo Il canale può modificare (ovvero *distorcere*) il segnale sia nel suo andamento temporale, che per quanto riguarda le frequenze in esso contenute².

¹La distinzione tra significato e significante esprime la differenza che passa, ad esempio, tra l'immagine mentale che ognuno può avere di un cavallo, e la parola "cavallo" (scritta o pronunciata), in cui entrambi partecipano a definire un *segno linguistico*, vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Significante>. In tale contesto, i due aspetti del segno rimandano ad un *referente*, che nel nostro esempio corrisponde ad un cavallo in carne ad ossa, mentre dal punto di vista dei segnali individua una specifica *forma d'onda*.

²Approfondiremo nel seguito (cap. 8) il senso di questi concetti, limitandoci per ora ad associarli ad una generica *diversità* tra il segnale trasmesso e quello ricevuto.

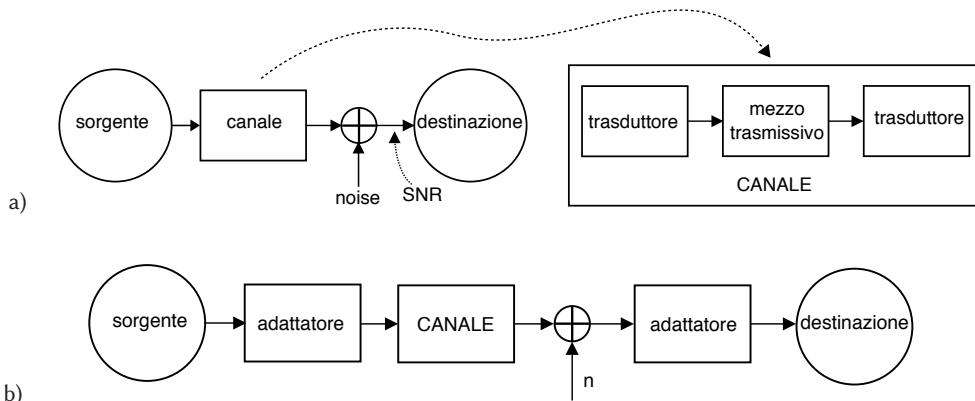


Figura 1.1: Trasmissione dell'informazione attraverso un canale di comunicazione

Cause fisiche ineliminabili producono inoltre la presenza di un segnale di *disturbo additivo* al lato ricevente, indicato come *rumore* (o *noise* in inglese), che rende il segnale a destinazione ancora diverso da quello all'uscita del canale. La conoscenza dei peggioramenti introdotti dal canale e dal rumore guida la scelta dei metodi di trasmissione più idonei a minimizzare la distorsione per il messaggio trasmesso.

Rapporto segnale-rumore L'entità delle alterazioni subite dal messaggio viene quantificata nei termini di un *rapporto segnale rumore* (SNR o SIGNAL-TO-NOISE RATIO), un indice di qualità del collegamento che per ora definiamo genericamente come il rapporto tra l'entità del segnale utile ricevuto e quella del rumore ad esso sovrapposto, indicato come *noise* nella figura 1.1, comprendendo in esso sia il disturbo additivo che la distorsione introdotta dal canale.

Trasmissione La fig. 1.1-a) evidenzia come nella realtà fisica il canale sia costituito da un *mezzo trasmissivo* su cui si propaga un segnale di natura elettromagnetica, generato e ricevuto mediante appositi *trasduttori* od *interfacce* di trasmissione e ricezione³. Considerando per il momento i trasduttori come facenti parte del canale stesso, proseguiamo l'analisi concentrandoci sugli ulteriori aspetti del processo di comunicazione.

Adattatori In figura 1.1-b) si mostra la possibile presenza (in trasmissione, ricezione, o ad entrambe le estremità del canale) di dispositivi *adattatori*, che hanno lo scopo di controbilanciare per quanto possibile i fenomeni di distorsione introdotti dalla trasmissione: si può ad esempio ricorrere ad un *equalizzatore* per correggere la risposta in frequenza di un canale, o ad un *amplificatore*, per contrastare l'attenuazione subita dal segnale.

Rete La trasmissione lungo un canale in uso esclusivo alla coppia sorgente - destinazione è piuttosto raro; usualmente i collegamenti sono *condivisi* tra più comunicazioni, ognuna con differente origine e destinatario. Il problema della condivisione delle risorse

³Un classico esempio di trasduttore è quello dell'antenna, nel caso di trasmissione radio, ovvero di microfono ed altoparlante qualora ci si ponga dal punto di vista dello studio e degli ascoltatori.

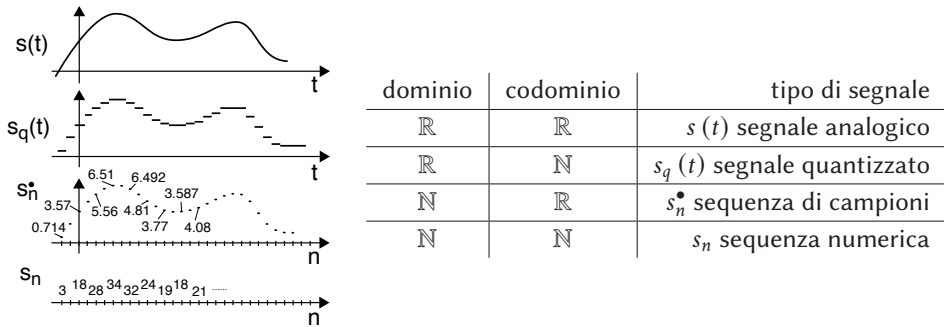
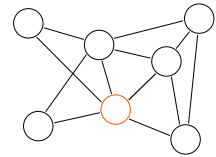


Figura 1.2: Segnali analogici, numerici, campionati e quantizzati

trasmissive, ed il coordinamento di queste attività, produce la necessità di analizzare in modo esplicito le *reti di telecomunicazione*, che entrano a far parte integrante dei sistemi di trasmissione dell'informazione.



1.2 Segnali analogici e numerici

Gli aspetti accennati sono immediatamente applicabili a segnali di natura *analogica*, definiti per *tutti* gli istanti di tempo, e che assumono valori nell'ambito dei numeri reali (o, come vedremo al cap. 11, complessi), come ad esempio nel caso di un segnale audio (vocale o musicale); d'altra parte, un segnale può viceversa essere definito solo per istanti di tempo *discreti* ovvero numerabili, ed assumere valori anch'essi discreti, come ad esempio per i documenti conservati su di un computer. In tal caso il segnale viene detto *sequenza numerica*, e la sua trasmissione coinvolge ulteriori elementi.

La figura 1.2 illustra la classificazione dei segnali dal punto di vista analitico, in base all'insieme di definizione dei valori assunti, e del dominio a cui appartiene la variabile indipendente. Notiamo che oltre ai due casi di segnale analogico e sequenza numerica, sussistono anche i due casi intermedi di *segnale quantizzato* $s_q(t)$ definito per tutti gli istanti ma a valori discreti, e di *sequenza di campioni* s_n^* definita ad istanti discreti, ma con valori continui. La relazione tra queste rappresentazioni dell'informazione viene approfondita al § 1.2.2.

1.2.1 Segnale analogico

Corrisponde all'andamento *nel tempo* di una grandezza fisica $s(t)$, di natura elettromagnetica come nei campi dell'elettronica o dei circuiti, ovvero risultato della trasduzione elettrica di grandezze di altra natura, come nel caso di un segnale audio che consiste in un'onda trasversale di pressione-velocità convertita in una tensione da un microfono, o nel caso di una misura di posizione, velocità od accelerazione ottenuta mediante tecniche di geo-localizzazione come nel telerilevamento, oppure ancora acquisita mediante sensori utilizzati ad es. nel contesto dei sistemi di controllo automatico.

Una diversa categoria di segnale sono le *immagini*, definite come una funzione di due variabili *spaziali* $s(x, y)$ il cui valore ne individua la *luminanza*, eventualmente

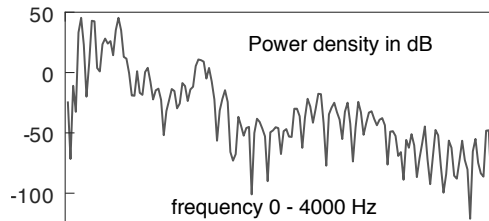
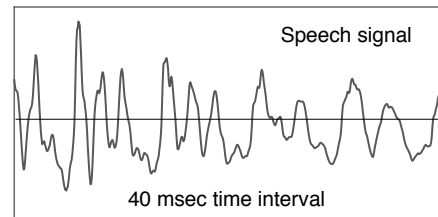
corredata da altri segnali di immagine definiti sullo stesso dominio e relativi all'informazione di *crominanza*. In questo contesto il fattore *tempo* torna in gioco qualora si tratti di immagini in movimento, come nei video: questi aspetti sono trattati al cap. 10.

Un segnale può anche presentare *valori complessi*⁴, e in tal caso *si sdoppia* in due andamenti definiti come parte reale e parte immaginaria, oppure modulo e fase. In tutti casi, un segnale analogico corrisponde alla comune accezione di funzione di variabile continua dell'analisi matematica, definita su di un supporto che può essere limitato o meno, e può in generale essere studiato e caratterizzato con le tecniche proprie di tale disciplina. Al § 1.5 è fornita una classificazione dei segnali in categorie (impulsivi, di energia, di potenza, e periodici) che rivestono un ruolo fondamentale per il loro studio successivo.

1.2.1.1 Rappresentazione frequenziale dei segnali analogici

Un fondamentale strumento per lo studio di un segnale $s(t)$ è la sua *analisi spettrale*, condotta per mezzo di una particolare *trasformazione lineare*, che individua un corrispondente segnale (in generale complesso) $S(f)$ funzione di una diversa variabile indipendente f nota come *frequenza*. Questo nuovo segnale è un sorta di *radiografia*, una analisi che individua lo *spettro* di frequenze di cui è costituito $s(t)$; la differenza tra la minima e massima delle frequenze presenti è detta *banda del segnale*, uno dei principali parametri che lo caratterizzano dal punto di vista dell'impegno delle risorse necessarie a trasmetterlo.

A seconda della categoria in cui ricade $s(t)$, la trasformazione assume una tra diverse formulazioni, definendo così uno *sviluppo in serie di Fourier* per la rappresentazione dei segnali periodici, una *trasformata di Fourier* per segnali di energia, e uno *spettro di densità di potenza* per segnali di durata indefinita. L'analisi di Fourier individua come la potenza (o l'energia) del segnale si *distribuisce in frequenza*.



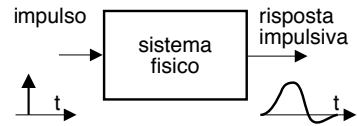
1.2.1.2 Transito dei segnali attraverso sistemi fisici

L'attraversamento di un *canale* da parte di un segnale analogico, che come discusso al § 1.1 avviene grazie ad un *mezzo trasmissivo*, viene studiato mediante l'ausilio di alcuni strumenti fondamentali qui brevemente descritti, e ripresi al § 1.6.

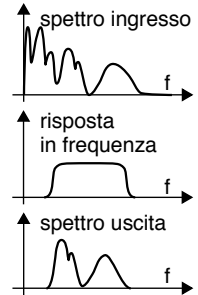
Risposta impulsiva e convoluzione La prima rappresenta l'uscita di un sistema fisico quando in ingresso è presente una particolare astrazione analitica, detta *impulso*

⁴Come vedremo al cap. 11, un segnale a valori complessi è il risultato di una particolare rappresentazione, detta *inviluppo complesso*, utile nell'analisi dei segnali modulati.

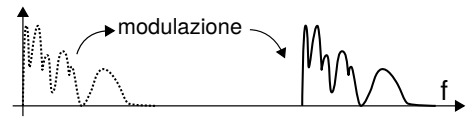
di Dirac. La risposta impulsiva permette di esprimere l'uscita del sistema in corrispondenza di un ingresso qualunque, mediante il calcolo di un particolare integrale (di convoluzione) che coinvolge solamente l'espressione del segnale in ingresso, e quella della risposta impulsiva.



Risposta in frequenza e filtraggio Operando nel dominio della frequenza, osserveremo come la trasformata di Fourier della risposta impulsiva rappresenti la *risposta in frequenza* del sistema, ovvero la modalità con cui il sistema riproduce in uscita ciascuna delle frequenze presenti nel segnale di ingresso. Dato che la risposta in frequenza descrive quali frequenze passeranno amplificate, inalterate od attenuate, il transito di un segnale viene indicato anche con il termine *filtraggio*, ed il sistema è detto *filtro*.



Modulazione Qualora il canale (o filtro) attraverso cui convogliare il segnale $s(t)$ non permetta l'attraversamento alle frequenze in esso presenti, come ad esempio nel caso di un



collegamento radio, occorre trasformare il segnale mediante una tecnica chiamata *modulazione*, in modo che il risultato giaccia in una *banda* di frequenze compatibile con la risposta in frequenza del canale. Il segnale modulato occupa ora una banda concentrata attorno ad un frequenza più elevata detta *portante*, ed il suo andamento nel dominio del tempo è descritto da un segnale noto come *inviluppo complesso*.

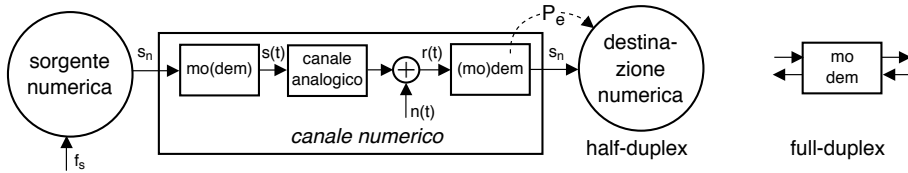
Trasferimento energetico Nel caso di collegamenti a distanza il mezzo trasmissivo *attenua* il segnale in transito, che viene ricevuto con una ampiezza molto inferiore a quella di trasmissione. Pertanto è fondamentale verificare che la potenza ricevuta non sia inferiore alla *soglia di sensibilità* del ricevitore, ovvero il minimo segnale necessario a garantire la qualità di ricezione richiesta. D'altra parte, attenuazioni e distorsioni di entità non trascurabile possono verificarsi anche in assenza di collegamenti a distanza, qualora si verifichi un *disadattamento di impedenza* tra stadi della catena trasmissiva.

Ulteriori aspetti dei sistemi di telecomunicazione sono riassunti al § 1.4, mentre ora ci occupiamo di caratterizzare le modalità di trasmissione per una *sequenza*.

1.2.2 Trasmissione numerica

Quando il contenuto informativo è costituito da una sequenza numerica s_n i suoi elementi possono essere messi in relazione biunivoca con un più generale *alfabeto simbolico* \mathcal{A} a cardinalità finita, come ad esempio nel caso di un testo scritto, in cui \mathcal{A} è il vero e proprio alfabeto della lingua in cui è scritto il testo. In questo caso sorgente e destinazione della trasmissione sono anch'esse indicate come *numeriche*, mentre gli elementi della sequenza s_n sono indicati come *simboli*, emessi dalla sorgente ad intervalli temporali regolari distanziati da un tempo di T_s , secondi detto *periodo di*

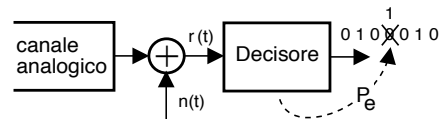
simbolo, il cui inverso $f_s = 1/T_s$ è indicato come *frequenza di simbolo*⁵. Ciò che permette la trasmissione tra sorgente e destinazione dell'informazione contenuta nel messaggio prende ora il nome di *canale numerico*, pensabile come una entità a sé stante, che la figura seguente mostra essere comunque costituito al suo interno dal canale *analogico* già discusso, e basato a sua volta su di un mezzo trasmissivo.



Modem o codificatore di linea Denota il dispositivo che provvede a generare un segnale analogico $s(t)$ in grado di trasportare l'informazione espressa dalla sequenza numerica s_n , e la cui etimologia deriva dalla contrazione di *MOD*ulatore e *DEM*odulatore, mentre il termine *codificatore di linea* è riferito alla trasmissione su di una *linea di trasmissione* come ad esempio un collegamento in cavo. In particolare, una trasmissione unidirezionale⁶ necessita di solo *metà* delle funzioni del modem per entrambi i lati del collegamento, mentre nel caso di collegamento *full duplex* (in cui gli estremi del canale possono essere contemporaneamente sorgente e destinazione) il modem opera allo stesso tempo nelle due direzioni.

All'interno del modem di ricezione è presente un dispositivo *decisore*, in grado di ricostruire la sequenza s_n a partire dal segnale analogico ricevuto $r(t)$, ma a causa del rumore $n(t)$ presente all'uscita del canale analogico il decisore può commettere *errore*, producendo una sequenza $\hat{s}_n \neq s_n$.

Probabilità di errore Quando il *decisore* presente nel modem produce un simbolo *diverso* da quello trasmesso si verifica un *errore*, e la frazione del numero di eventi di errore rispetto al totale rappresenta la *probabilità di errore*, il cui valore costituisce il parametro che caratterizza la *qualità* del collegamento numerico. Evidentemente il valore della probabilità di errore è strettamente legato in modo inverso a quello del rapporto segnale-rumore SNR che si riscontra per il canale analogico sottostante.

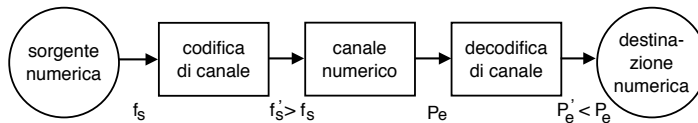


⁵Una sequenza prodotta da una sorgente numerica si presta facilmente ad essere trasformata in un'altra, con un diverso alfabeto ed una differente frequenza di simbolo. Per fissare le idee, consideriamo i simboli di una sequenza numerica s_n ad L valori (ovvero $\mathcal{A} = 1, 2, \dots, L$): questi possono essere presi a gruppi di M , producendo nuovi simboli q_k a velocità M volte inferiore, ma con L^M valori distinti. Se si dispone di un alfabeto di uscita \mathcal{B} ad H valori (ovvero $\mathcal{B} = 1, 2, \dots, H$), i gruppi di M simboli L -ari originari possono essere rappresentati con gruppi di N simboli H -ari purché $L^M \leq H^N$. Esempio: per codificare in binario ($H = 2$) simboli con $L = 26$ valori, occorrono almeno $N = 5$ bit/simbolo, ottenendo così $2^5 = 32 > L = 26$. E' un ragionamento confuso? Sì e no. Basta fare degli esempi.

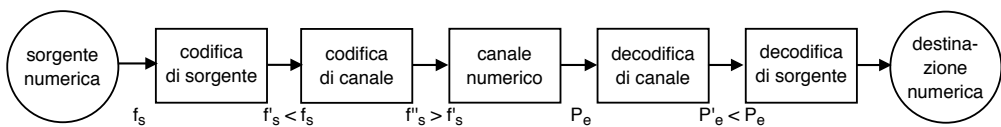
⁶Nelle trasmissioni unidirezionali, sorgente e destinazione non si scambiano i ruoli. La trasmissione stessa viene anche indicata con il termine di *half-duplex*.

Affrontiamo ora due aspetti del tutto *peculiari* della trasmissione di sequenze numeriche e simboliche, ovvero la codifica *di canale* e *di sorgente*.

Codifica di canale Consiste nell'invio di più simboli di quanti non ne produca la sorgente, e quindi di fatto *umentando* il loro numero per unità di tempo, che da f_s passa ad $f'_s > f_s$. La scelta dei simboli aggiunti viene fatta in modo che essi *dipendano* in modo *deterministico* da quelli già presenti, rendendo così la sequenza trasmessa *ridondante*, allo scopo di ridurre il valore della probabilità di errore. Infatti la dipendenza (nota) tra i simboli trasmessi permette al ricevitore di "accorgersi" che si è verificato un errore, dato che tale dipendenza non è più rispettata, e quindi il ricevitore può attuare delle contromisure, come quella di inviare una richiesta di ritrasmissione, oppure se la ridondanza introdotta è sufficientemente elevata, tentare di correggere errori isolati⁷. Dopo aver (eventualmente) svolto le possibili contromisure, i simboli aggiunti vengono rimossi al lato ricevente da parte di un blocco di *decodifica di canale*.



Codifica di sorgente Ha uno scopo per così dire "inverso" a quello della codifica di canale: la codifica di sorgente infatti *rimuove la dipendenza* (ora in senso *statistico*) tra i simboli presenti nella sequenza prodotta dalla sorgente, determinando la riduzione del numero di simboli da trasmettere per unità di tempo⁸, che passa così da f_s ad $f'_s < f_s$. Un tipico esempio è rappresentato dagli algoritmi di *compressione* per i documenti su computer, come ad es. i file *zippati*: in tal caso il fattore di compressione ottenibile dipende dalla natura del file, ed è tanto maggiore quanto più questo presenti caratteristiche di ripetitività, ovvero di predicibilità del suo contenuto. Pertanto l'uscita di un codificatore di sorgente è una sequenza di simboli tendenzialmente *indipendenti* tra loro, avendo limitato la predicibilità di un simbolo a partire dai circostanti.



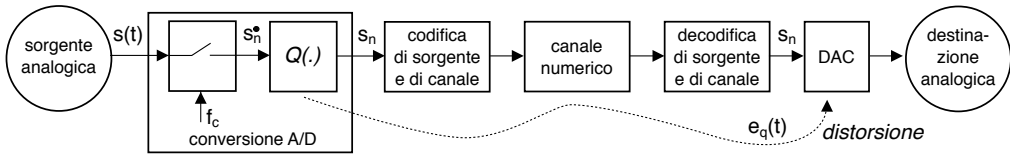
Non resta ora che discutere dei due casi elencati in fig. 1.2 ma non ancora incontrati, ovvero di ...

Campionamento e quantizzazione Poniamoci il problema di utilizzare un *canale numerico* per effettuare una *trasmissione analogica*: il vantaggio di una tale "contorsione" è da ricercarsi nel migliore comportamento della trasmissione numerica rispetto ai

⁷Si parla in questo caso di codifica FEC, ovvero di *Forward Error Correction*.

⁸Pensiamo per similitudine ad un imballaggio, il cui contenuto è prima disposto in modo da occupare il minimo volume (codifica di sorgente), ed a cui viene poi aggiunto del materiale antiurto (codifica di canale).

disturbi, nonché alla sua *generalità*⁹. Per riuscire nello scopo occorre che il segnale $s(t)$ prodotto dalla sorgente analogica venga prima *campionato* prelevandone i valori s_n^* in corrispondenza degli istanti $t = nT_c$, ossia con una velocità di $f_c = 1/T_c$ campioni/secondo, e quindi *quantizzato* approssimando i valori s_n^* mediante un insieme finito di L valori, producendo una sequenza numerica s_n di simboli appartenenti ad un alfabeto finito. Questa coppia di operazioni è indicata come *conversione analogico-digitale* o A/D, e la sequenza s_n può essere rappresentata da una sequenza *binaria* facendo corrispondere $M = \lceil \log_2 L \rceil$ bit¹⁰ ad ognuno dei simboli L -ari. Dopo le operazioni di co-decodifica e trasmissione, un dispositivo di conversione *digitale-analogica* (DAC) posto al lato ricevente provvede a ricostruire il segnale $s(t)$ originario.¹¹



Rumore di quantizzazione L'approssimazione dei campioni s_n^* mediante un insieme finito di valori introduce una *distorsione*, dato che il DAC opera su valori approssimati e non su quelli reali. L'effetto risultante è come se presso la destinazione fosse presente un disturbo additivo $e_q(t)$, detto *rumore di quantizzazione*, che si somma al segnale originario. L'entità di tale disturbo è inversamente legata alla *risoluzione del quantizzatore*, ovvero alla capacità di differenziare tra valori di ingresso molto vicini tra loro. In definitiva, la distorsione risulta tanto minore quanto maggiore è la velocità del flusso informativo prodotto dal quantizzatore, espresso in bit/secondo.

Abbiamo ora tutte le basi per introdurre un ulteriore concetto, quello della

Teoria dell'informazione Se ne parla al cap. 9, e deriva da una serie di teoremi enunciati negli anni '50 da CLAUDE SHANNON, le cui conseguenze possono essere riassunte come

Compromesso velocità-distorsione Una sorgente analogica campionata a velocità di f_c campioni/secondo e quantizzata con M bit/campione produce un flusso informativo di $f_b = f_c \cdot M$ bit/secondo, tanto più elevato quanto minore è la distorsione introdotta dal processo di quantizzazione¹²; pertanto la velocità di

⁹Nei collegamenti numerici non occorre specializzare il metodo di trasmissione al mezzo a disposizione, anzi quest'ultimo è totalmente "mascherato" dal fornitore del collegamento numerico stesso, e dal modem che viene utilizzato.

¹⁰La notazione $M = \lceil \log_2 L \rceil$ individua l'intero superiore del valore racchiuso tra le semiparentesi $\lceil \cdot \rceil$. Ad esempio se $L = 21$ allora $\log_2 21 = 4,3923..$ e dunque $M = \lceil 4,3923 \rceil = 5$, ovvero occorrono 5 bit/campione.

¹¹L'utilizzo di dispositivi di conversione digitale-analogico è molto comune nella realtà odierna, un esempio tra tutti è quello dei *CD audio*, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/CD_Audio

¹²Infatti $M = \lceil \log_2 L \rceil$ aumenta all'aumentare del numero L di possibili valori per i campioni quantizzati, e ciò corrisponde ad una maggiore fedeltà, ossia ad una minore distorsione. Inoltre, al cap. 4 verrà illustrato come l'aumento di f_c corrisponda ad un maggiore intervallo di frequenze che possono essere riprodotte dal DAC, ovvero anche il valore di f_c è direttamente legato ad un concetto di fedeltà di riproduzione.

trasmissione può essere ridotta a patto di accettare una maggiore distorsione.

Compromesso banda-potenza Un qualsiasi canale pone un limite al massimo flusso informativo che vi transita. Il limite deriva dai vincoli che il canale impone sulla massima banda B del segnale trasmesso, sulla massima potenza di segnale S ricevuta, e sulla potenza di rumore N presente al ricevitore. Il massimo flusso di informazione in transito prende il nome di *capacità di canale* C , espressa dalla relazione $C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right)$ bit/sec. In questi termini, la massima velocità di trasmissione può dipendere da una limitazione sulla banda, o sulla potenza, od essere causata da un eccessivo rumore: a parità di rumore solo adottando un diverso canale che permetta di trasmettere più potenza, o di occupare più banda, è possibile trasmettere a velocità più elevata.

Compromesso tempo-distorsione Considerando una coppia sorgente + canale, dato che il canale limita il massimo flusso informativo prodotto dalla sorgente, quest'ultima verrà necessariamente riprodotta con una distorsione tanto maggiore quanto minore è la capacità di canale. A meno di non cambiare canale, oppure impiegare *più tempo* per la trasmissione, e rinunciare alla possibilità di una riproduzione in *tempo reale*.

1.3 Segnali aleatori

Fin qui si è fatta l'assunzione implicita che i segnali e le sequenze di cui si discute siano *segnali certi*, ovvero completamente *noti*, in forma di espressione analitica (ad es., una sinusoidale con ampiezza e fase noti) oppure nei termini di una forma d'onda registrata. Al contrario, un sistema di comunicazione deve essere progettato per poter funzionare altrettanto bene per tutti i possibili segnali appartenenti ad una medesima classe, che prendono il nome di segnali (o *processi*) *aleatori* in quanto definiti unicamente da un punto di vista probabilistico, o per meglio dire, statistico.

1.3.1 Calcolo delle probabilità e statistica

Non solo costituisce la base per trattare i segnali aleatori, ma anche per definire la quantità di informazione di un messaggio, le prestazioni di un collegamento, i fenomeni che caratterizzano le trasmissioni radiomobili, il dimensionamento di una rete... Per questo al cap. 6 sono riassunti concetti di calcolo delle probabilità e di statistica, immediatamente applicati nel cap. 7 per arrivare a descrivere sia i segnali certi che quelli aleatori mediante lo stesso formalismo analitico.

1.3.1.1 Autocorrelazione e densità di potenza

Con questi termini si indicano due funzioni discusse al cap. 7, una del tempo e l'altra della frequenza, che è possibile definire per i segnali sia certi che aleatori, e che ne permettono la trattazione in modo unificato ai fini della relativa *stima spettrale*. Osserveremo come processi molto *correlati* siano caratterizzati da una densità di

potenza di tipo *colorato*, mentre al contrario i processi scarsamente correlati saranno identificati da una densità di potenza di tipo *bianco*¹³.

1.3.1.2 Teoria del traffico

Viene trattata al cap. 22 ed affonda le radici nel calcolo delle probabilità. Affronta il problema del dimensionamento di collegamenti che trasportano più messaggi contemporaneamente, ovvero che li trasmettono su di un medesimo mezzo trasmissivo in forma multiplata. In particolare, la teoria del traffico consente di analizzare e confrontare le prestazioni offerte dalle reti basate sulla commutazione di circuito o di pacchetto, dal punto di vista della probabilità di blocco e del ritardo medio.

1.4 Sistemi di telecomunicazione

Questa introduzione prosegue descrivendo, in modo sommario e sicuramente parziale, cinque diversi *punti di vista* in cui è possibile inquadrare le problematiche di telecomunicazione, ovvero gli aspetti *fisici*, di *sistema*, di *rete*, di *elaborazione*, e di *trasporto*, fornendo per ognuno di essi rimandi a dove nel testo essi vengono trattati, principalmente collocati a partire dalla *seconda parte* del testo, pag. 435.

Aspetti fisici Un canale di comunicazione, *dal punto di vista fisico*, si identifica con il mezzo trasmissivo, per la descrizione del quale si adotta frequentemente un modello circuitale. Elenchiamo i mezzi comunemente adottati:

Collegamento radio Il segnale si propaga nello spazio libero come onda elettromagnetica sferica, e viene irradiato mediante antenne, che ne focalizzano la potenza lungo direzioni privilegiate. La trasmissione è resa possibile grazie al processo di modulazione, cap. 20;

Collegamento in cavo Da quello tra computer e stampante, a quello su doppino (telefonia) e su cavo coassiale (televisione, ethernet). Può essere di tipo half o full duplex a seconda se i due estremi della comunicazione siano unidirezionali o bidirezionali, § 19.2;

Collegamento in fibra ottica E' realizzato facendo viaggiare energia luminosa attraverso una guida d'onda di materiale dielettrico. La tecnica è idonea alla trasmissione dei soli segnali numerici, dato che la sorgente luminosa in trasmissione viene semplicemente *accesa e spenta* in corrispondenza dei bit (zero od uno) del messaggio, § 19.3;

Modello circuitale Il collegamento ed i trasduttori ad esso relativi sono spesso descritti ricorrendo ad un circuito elettrico equivalente, in modo da poterne descrivere il comportamento mediante strumenti analitici noti, cap. 18.

¹³I termini *colorato* e *bianco* hanno origine da una similitudine con l'energia luminosa, per cui se la luce bianca indica l'indiscriminata presenza di tutte le lunghezze d'onda, così uno spettro bianco indica la presenza in egual misura di tutte le frequenze; viceversa, come una luce colorata dipende dal prevalere di determinate frequenze nella radiazione elettromagnetica, così uno spettro colorato indica la prevalenza di alcune frequenze su altre.

Aspetti sistemistici Da un punto di vista *di sistema*, il transito dei segnali attraverso sistemi fisici è analizzato in termini del peggioramento introdotto, che può essere catalogato nell'ambito di diverse categorie:

Distorsioni Si distinguono quelle cosiddette *lineari*, causate da una risposta in frequenza non ideale, dalle distorsioni *non lineari*, che causano invece una deformazione istantanea sulla forma d'onda in transito, capp. 8 e 13;

Non stazionarietà Sono fenomeni caratterizzati da una variazione nel tempo delle caratteristiche del canale, e ricorrono spesso nel caso di comunicazioni con mezzi mobili, § 20.4.4;

Attenuazione Un segnale trasmesso su un canale presenta in uscita una ampiezza inferiore a quella di ingresso. L'attenuazione può essere legata a cause fisiche intrinseche (lunghezza del collegamento, disadattamento di impedenze, tecnologia degli amplificatori), o dipendere da fatti contingenti (percorsi multipli, pioggia); in questo secondo caso, il fenomeno è trattato come l'esito di un processo aleatorio, §§ 19.1, 19.2.2, 20.4.1, 19.3.2;

Portata Affinché possano essere soddisfatti i requisiti di qualità (ad esempio l'SNR) desiderati, risulta che la lunghezza del collegamento deve essere inferiore ad un massimo, in conseguenza dell'attenuazione del collegamento, della potenza trasmessa, e degli altri fatti contingenti;

Qualità del servizio Con questo termine sono indicate diverse grandezze, ognuna applicabile in un particolare contesto, e che rappresentano un indice di "bontà" del processo comunicativo. Tra queste grandezze possiamo citare il *rapporto segnale rumore* SNR (§ 14) e la *probabilità di errore* P_e (§ 15.4, tab. 16.1), relative rispettivamente alle trasmissioni analogiche e numeriche; il *ritardo medio* (§ 22.4), rilevante nel caso di trasmissioni a pacchetto; il *tempo di fuori servizio* (§ 20.3.2.1), qualificante della affidabilità dei sottosistemi di comunicazione.

Rete Dal punto di vista della *rete di comunicazione*, la consegna del messaggio informativo alla destinazione deve tener conto degli aspetti descritti come:

Commutazione La rete è costituita da un insieme di *nodi di commutazione*, interconnessi da collegamenti che vengono usati in modalità condivisa da molte comunicazioni contemporanee, e che sono *attraversati* dai messaggi in transito e da *smistare* verso la porta di uscita corretta, §§ 22.5.2.2, 24.8;

Instradamento La determinazione del percorso dei messaggi nella rete, scelto tra i possibili percorsi alternativi che collegano la sorgente con la destinazione, prende il nome di *instradamento*, §§ 24.7, 23.1.3;

Segnalazione Il coordinamento tra i nodi della rete avviene mediante lo scambio tra gli stessi di informazioni aggiuntive dette *di segnalazione*, che costituiscono un vero e proprio processo di comunicazione parallelo a quello prettamente informativo, § 24.3.2;

Protocollo Lo scambio dei messaggi tra le coppie di nodi della rete, od anche tra i nodi ed un organo di controllo centrale, avviene utilizzando particolari linguaggi, detti *protocolli* di segnalazione, capp. 23, 24, § 22.6.

Mobilità Se i nodi della rete modificano la propria posizione nel tempo, o gli utenti desiderano usufruire degli stessi servizi indipendentemente dal punto di accesso alla rete, occorre individuare soluzioni specifiche, come ad esempio la registrazione ed il mantenimento dei propri dati presso una *unità di controllo*, e l'adozione di procedure di *autenticazione* che permettano di certificare l'identità degli utenti.

Elaborazione terminale Questa categoria comprende tutti gli aspetti legati alle trasformazioni operate sull'informazione ai due estremi del collegamento¹⁴. Tra questi è possibile distinguere la...

Codifica di sorgente Individua le trasformazioni sul segnale in grado di ridurre la quantità di risorse trasmissive necessarie (ad esempio, banda), e consiste in operazioni che tengono conto di specifiche *caratteristiche del segnale* da trattare, come nel caso della codifica vocale, o della codifica video, capp. 9 e 10;

Codifica di canale Definisce le trasformazioni necessarie a combattere gli errori nelle trasmissioni numeriche, e può tener conto delle caratteristiche statistiche *dei disturbi*, cap. 17;

Modulazione e formattazione Le operazioni necessarie alla trasmissione di un segnale radio, o di un segnale numerico, possono tener conto delle caratteristiche del *canale trasmissivo*, e adottare soluzioni che possono facilitare la realizzazione delle due funzioni precedenti, § 12, cap. 16, § 22.5.1.

Trasporto Dal punto di vista *logistico*, sono rilevanti gli aspetti di

Multiplazione Individua le modalità di uso condiviso di uno stesso mezzo trasmissivo da parte di più comunicazioni in transito contemporaneo per un tratto in comune; il risultato è quello di migliorare sensibilmente l'efficienza di utilizzo della rete, garantendo che le risorse trasmissive non restino poco (o per nulla) utilizzate. Le tecniche comunemente adottate sono la *multiplazione* ...

- di *frequenza*, in cui le diverse comunicazioni sono centrate su portanti diverse ma che ricadono in una medesima banda di frequenze, §§ 24.2.1, 11.1.1;
- di *tempo*, in cui lo stesso collegamento è utilizzato per più comunicazioni contemporanee in base ad uno schema di alternanza temporale, (§ 24.2.1);
- di *codice*, in cui diverse comunicazioni avvengono simultaneamente nella medesima banda di frequenza, adottando una particolare codifica che ne permette la separazione dal lato ricevente, (§ 16.9);

¹⁴L'importanza e la specificità di tali trasformazioni assume un rilievo sempre maggiore con l'evoluzione (in termini di miniaturizzazione e potenza di calcolo) dei dispositivi di elaborazione, in special modo per ciò che riguarda le trasmissioni numeriche.

- *cromatica* o di *lunghezza d'onda*, che si realizza quando un'unica fibra ottica è alimentata da una sorgente luminosa che adotta una λ diversa per ogni flusso numerico trasportato, (§ 19.3.3.2);
- *spaziale*, possibile nelle trasmissioni radio multi-antenna (§ 21.5), in cui più comunicazioni avvengono allo stesso tempo e nella stessa banda, ma restano separabili in virtù delle proprietà della matrice di guadagni complessi tra le antenne di trasmissione e quelle di ricezione.

Controllo Riguarda la corretta consegna del messaggio al destinatario, e coinvolge la gestione degli errori di trasmissione (§ 22.6), le problematiche di riassetto delle comunicazioni inoltrate in forma di pacchetti distinti, la gestione della segnalazione per ciò che riguarda l'adattamento dei protocolli di instradamento alle condizioni di carico della rete, ed il coordinamento delle sorgenti che desiderano trasmettere utilizzando il medesimo mezzo trasmissivo.

Si conclude qui la parte introduttiva di questo capitolo. Passiamo ora ad approfondire gli oggetti dello studio che ci attende, indicati come *segnali* e *sistemi*, due categorie concettuali alla base di molte discipline dell'ingegneria dell'informazione, e per questo a volte date per scontate: proviamo quindi a fare un po' di chiarezza.

1.5 Classi di segnale ed operazioni relative

Al § 1.2 è stata illustrata una tassonomia dei segnali distinguendoli sulla base del dominio di definizione (continuo o discreto) e dei valori assunti (continui o discreti). Volendo procedere per gradi, iniziamo a discutere dei segnali analogici $s(t)$, continui sia per quanto riguarda il tempo che per le ampiezze, e che essendo nient'altro che funzioni di una variabile temporale, possono essere caratterizzati utilizzando gli strumenti noti dai corsi di analisi matematica, almeno nel caso in cui se ne conosca l'espressione analitica. D'altra parte i segnali che tratteremo, proprio per la loro natura di trasportare informazione, spesso non sono noti a priori¹⁵ ma definiti solo in termini statistici: vedi ad esempio la fig. 1.3 che riporta un frammento di segnale vocale, ed un tracciato ECG. In tal caso i calcoli che stiamo per illustrare individuano condizioni che possono essere verificate solo per via numerica¹⁶, a partire da *esempi* dei segnali stessi.

Al § 1.2.1 sono stati definiti *segnali analogici* anche le immagini ed le funzioni a valore complesso, ma per ora restringiamo l'attenzione al caso di segnali di *variabile reale* ed a *valori reali*, ovvero di semplici *funzioni del tempo* $s(t)$. Inoltre, ci aspettiamo che in generale i segnali di interesse NON POSSANO avere asintoti verticali, dato che i circuiti elettrici operano su tensioni e correnti di valore finito; per lo stesso motivo, *escludiamo* i segnali che divergono *illimitati* per $t \rightarrow \infty$.

¹⁵Discuteremo al cap. 9 come l'informazione consista nella *sorpresa* di conoscere qualcosa che prima era ignoto, e dunque un segnale perfettamente noto non trasporta informazione.

¹⁶Ad esempio, il calcolo dell'integrale di una funzione viene svolto *per via numerica* quando è ottenuto senza conoscerne la primitiva, per mezzo di un programma che ne calcola l'approssimazione secondo la definizione di Riemann https://it.wikipedia.org/wiki/Integrale_di_Riemann, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Integrazione_numerica e pagine collegate.

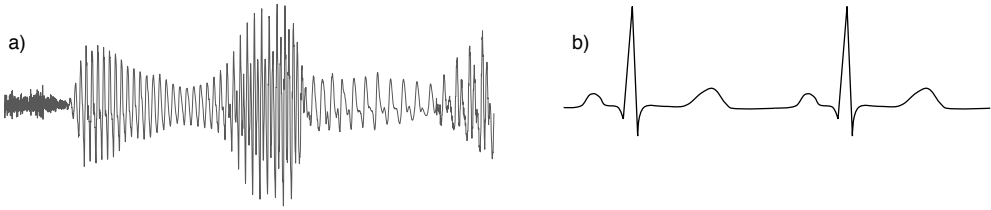


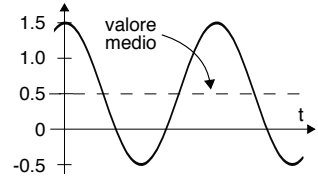
Figura 1.3: a) - 300 msec di segnale vocale; b) - due cicli di segnale elettrocardiografico

Valore medio Se osserviamo un segnale per un intervallo di tempo finito τ , per convenzione centrato attorno a $t = 0$, definiamo *media temporale* su τ il valore $\bar{s}_\tau = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) dt$ e, facendo tendere τ ad infinito, si ottiene il suo *valore medio* \bar{s} come

$$\bar{s} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) dt$$

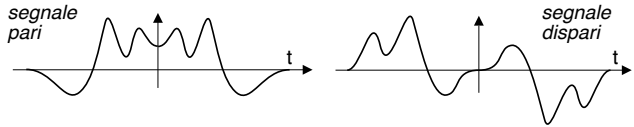
che si esprime nella stessa unità di misura di $s(t)$, visto che la somma integrale moltiplica per un tempo, per il quale viene nuovamente diviso attraverso il fattore $1/\tau$.

Il valore medio \bar{s} è detto anche *componente continua*, ed un qualunque segnale può essere decomposto come $s(t) = s_0(t) + \bar{s}$ in cui $s_0(t)$ è a media nulla. Se $s(t)$ è un segnale *costante* pari ad A , allora $\bar{s} = A$ ed il termine $s_0(t)$ è nullo. In figura, una cosinusoide a valor medio 0.5.



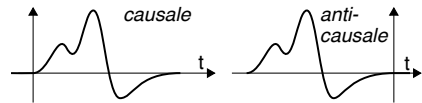
Simmetria pari e dispari Ogni segnale può essere decomposto nella somma dei due termini

$$s(t) = s_p(t) + s_d(t)$$



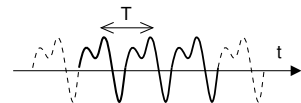
in cui $s_p(t)$ e $s_d(t)$ individuano rispettivamente la sua parte *pari* e *dispari* rispetto all'istante $t = 0$, potendo scrivere $s_p(t) = s_p(-t)$ e $s_d(t) = -s_d(-t)$ ¹⁷. Un segnale può essere anche solamente pari, o solamente dispari, come rappresentato in figura; notiamo che necessariamente un segnale dispari ha valor medio nullo.

Causalità Individua la condizione per cui $s(t) = 0$ per $t < 0$, mentre nel caso opposto ($s(t) = 0$ per $t > 0$) il segnale è detto *anticausale*. Qualora risulti $s(t) \neq 0$ sia per $t < 0$ che per $t > 0$ il segnale è detto *noncausale*.



Segnale periodico In questo caso il segnale si ripete ciclicamente uguale a se stesso, ed il minimo intervallo temporale T che intercorre tra due copie prende il nome di *periodo*, potendo scrivere

$$s(t) = s(t + T)$$



¹⁷Le componenti pari e dispari di un segnale si ottengono scrivendo $s(t)$ come

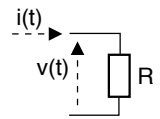
$$s(t) = \frac{1}{2} (s(t) + s(-t)) + \frac{1}{2} (s(t) - s(-t)) = \frac{1}{2} (s(t) + s(-t)) + \frac{1}{2} (s(t) - s(-t))$$

da cui si riconosce che $s_p(t) = \frac{1}{2} (s(t) + s(-t))$ e $s_d(t) = \frac{1}{2} (s(t) - s(-t))$.

Il valor medio di un segnale periodico può essere calcolato come $\bar{s} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt$, od anche $\bar{s} = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} s(t) dt$ per qualsiasi scelta di a . Al § 2.2 vedremo come un segnale periodico possa essere rappresentato mediante la somma pesata di infiniti termini del tipo $\cos(2\pi \frac{n}{T}t + \varphi_n)$ con $n = 0, 1, \dots \infty$. Un segnale *non* periodico è detto *aperiodico*.

Non resta ora che distinguere tra i segnali che si mantengono diversi da zero per $t \rightarrow \infty$ (¹⁸) da quelli che invece tendono a zero. Iniziamo dai primi.

Segnale di potenza In fisica la *potenza* \mathcal{P} (espressa in *Watt* ovvero *joule/sec*) è definita come lavoro per unità di tempo, la *tensione* \mathcal{V} (o potenziale elettrico) come lavoro per unità di carica, e la *corrente* \mathcal{I} come carica per unità di tempo¹⁹. Da un punto di vista dimensionale possiamo dunque scrivere $\mathcal{P} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{I}$. Infatti, un circuito sottoposto ad una tensione $v(t)$ ed in cui scorre una corrente $i(t)$ assorbe una potenza *istantanea* $p(t) = v(t) \cdot i(t)$ Watt; se poi il circuito consiste in un resistore R , i valori di $v(t)$ ed $i(t)$ sono legati dalla legge di Ohm $i(t) = v(t)/R$ e dunque $p(t) = v^2(t)/R$; scegliendo infine $R = 1\Omega$ si ottiene $p(t) = v^2(t)$.



La dipendenza dal tempo per la potenza $p(t)$ *scompare* qualora $v(t)$ sia pari ad una costante A , ed in tal caso possiamo scrivere che la *potenza* \mathcal{P}_v del segnale $v(t) = A$ risulta $\mathcal{P}_v = A^2$. Se invece $v(t)$ varia nel tempo, se ne può valutare la *potenza media* assorbita in un intervallo T come valore medio $\overline{\mathcal{P}}_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v^2(t) dt$, e per $T \rightarrow \infty$ otteniamo la definizione di potenza di un generico segnale $s(t)$ come

$$\mathcal{P}_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt \quad (1.1)$$

applicabile anche al caso di segnali *complessi* scrivendo $|s(t)|^2 = s(t) \cdot s^*(t)$ in cui $s^*(t)$ indica il *coniugato* di $s(t)$.

Esercizio Calcoliamo la potenza del segnale periodico $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$. In questo caso il valore medio può ottenersi limitando l'integrale ad un solo periodo $T = 1/f_0$, e la (1.1) diviene $\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [A \cos(2\pi f_0 t)]^2 dt = \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} [1 + \cos(4\pi f_0 t)] dt = \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{A^2}{2}$ in cui si è applicata la relazione $\cos^2 \alpha = 1/2 (1 + \cos 2\alpha)$, e si è sfruttato il fatto che l'intervallo T di integrazione copre *esattamente* due periodi di $\cos(4\pi f_0 t)$, dando luogo ad un valor medio nullo.

Valore efficace E' definito come la radice quadrata della potenza \mathcal{P}_s di un segnale ovvero $s_{eff} = \sqrt{\mathcal{P}_s}$, e rappresenta il valore di un segnale *costante* con la stessa potenza di $s(t)$; è noto anche come *valore quadratico medio* o RMS (*root mean square*). Per una sinusoida di ampiezza A risulta quindi $s_{eff} = A/\sqrt{2} \simeq 0.707 \cdot A$.

¹⁸Si tratta di segnali che non si annullano, ma che neanche divergono, ed in questo caso possono rientrare i fenomeni naturali come il rumore del vento o delle onde del mare, ma anche segnali la cui durata eccede l'intervallo effettivo di osservazione, come un battito cardiaco, o perché no, l'audio di un televisore lasciato acceso giorno e notte!

¹⁹Vedi ad esempio [https://it.wikipedia.org/wiki/Potenza_\(fisica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Potenza_(fisica)), o (sempre su Wikipedia) Potenziale_elettrico, Corrente_elettrica, e Potenza_elettrica

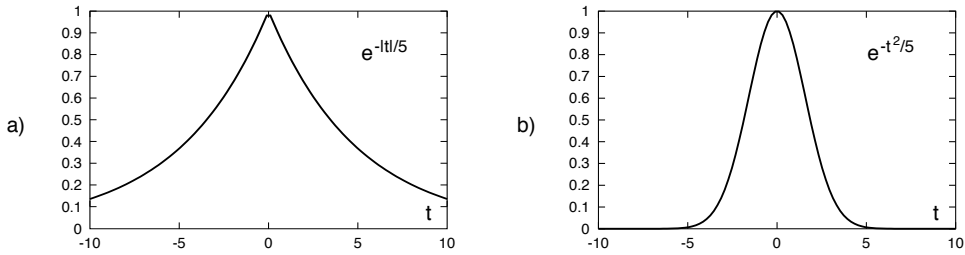


Figura 1.4: Segnale di energia: a) - impulso esponenziale bilatero; b) - impulso gaussiano

Se il segnale tende a zero per $t \rightarrow \infty$, al crescere di T il suo integrale $\int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2$ aumenta *più lentamente* di quanto non faccia T , e dunque il valore della potenza calcolato mediante la (1.1) risulta nullo, ovvero il segnale *non* è di potenza, e invece è un...

Segnale di energia Riprendiamo la citazione della fisica per cui la potenza è un lavoro per unità di tempo, e ricordiamo che il lavoro è definito come una variazione di energia²⁰. Definiamo dunque un segnale (reale o complesso) $s(t)$ di energia \mathcal{E}_s quando è diversa da zero la quantità²¹

$$\mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s^*(t) dt \quad (1.2)$$

indicata appunto come energia del segnale. Un paio di esempi di segnale di energia sono riportati in fig. 1.4. L'insieme di tutti i possibili segnali di energia costituisce uno *spazio vettoriale* indicato in matematica come spazio L^2 , e gode di particolari proprietà che approfondiremo più avanti²².

Segnale impulsivo E' un segnale che tende a zero più velocemente di $\frac{1}{t}$, ovvero per il quale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

E' il caso delle funzioni *assolutamente sommabili*, per le quali appunto $|s(t)|$ tende a zero più velocemente di $\frac{1}{t}$, e che dunque sono anche di energia.

²⁰Ad esempio si compie un lavoro quando si solleva un oggetto, aumentando la sua energia potenziale, o gli si imprime una accelerazione, aumentandone l'energia cinetica.

²¹Perché l'integrale (1.2) converga occorre che per $t \rightarrow \infty$ il segnale $s(t)$ tenda a zero più velocemente di $\frac{1}{\sqrt{t}}$, e perciò $|s(t)|^2$ vi tende più in rapidamente di $\frac{1}{t}$. In altre parole, un segnale di energia $s(t)$ è *quadraticamente sommabile*; infatti sappiamo dall'analisi che una funzione è detta *sommabile* (o integrabile) nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ se il suo integrale è finito, ed una condizione sufficiente perché ciò avvenga è che $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$ sia un infinitesimo di ordine *superiore* a 1, ovvero che $\lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot s(t) = 0$.

²²Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_a_quadrato_sommabile. La L che dà il nome allo spazio sta per *Lebesgue*, mentre il ² individua un caso particolare (*di Hilbert*) di spazio L^p che corrisponde a tutte le funzioni per le quali $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^p dt$ converge, noto come spazio di *Banach*, per il quale l'integrale costituisce una misura (norma) per i suoi elementi, il che induce una metrica, e quindi una topologia; per approfondimenti https://en.wikipedia.org/wiki/Lp_space

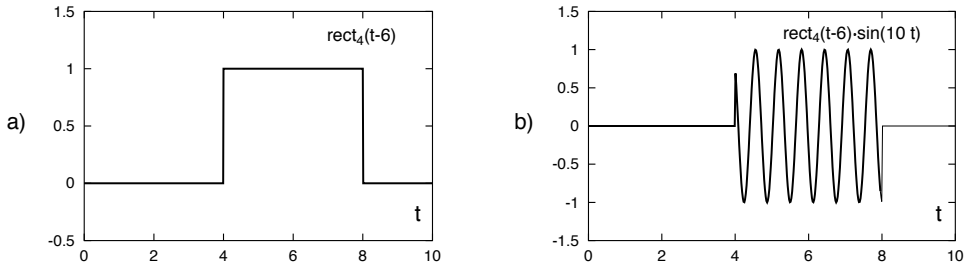


Figura 1.5: Segnale a durata limitata: a) - impulso rettangolare tra 4 ed 8; b) - sinusoide troncata

Segnale a durata limitata Risulta identicamente nullo per t al di fuori di un intervallo finito $[t_1, t_2]$, come esemplificato in fig. 1.5, e dato che per esso la (1.2) da un risultato finito, è anche di energia.

Riassumendo

- Un segnale *impulsivo* è di energia;
- Un segnale a *durata limitata* è impulsivo, e di energia;
- Un segnale *periodico* non è di energia, ma di potenza;

Vedi anche la rappresentazione insiemistica di fig. 1.6.

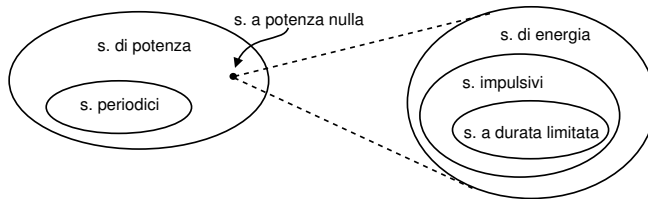


Figura 1.6: Visione insiemistica per le diverse classi di segnali

1.5.1 Spettro di segnale

Come anticipato al § 1.2.1.1, una caratteristica fondamentale dei segnali è quella di poterli descrivere nei termini del *contenuto spettrale* che compete a ciascuno di essi, ovvero come la potenza (o energia) complessiva sia distribuita su di un insieme di *frequenze*. La frequenza è l'inverso di un tempo, e rappresenta *quanto spesso* avviene una circostanza; i segnali sinusoidali sono gli unici a contenere *una sola* frequenza, pari all'inverso del loro periodo.

Esempio Ad una sinusoide di periodo 50 msec corrisponde una frequenza di $1/0.05 = 20$ *cicli/secondo* e si esprime come $\sin(2\pi f_0 t)$ con $f_0 = 20$ Hertz (Hz).

Un qualunque altro segnale è composto da più di una frequenza, il cui insieme è detto *spettro*²³ *del segnale* (nel dominio della frequenza). Può essere ottenuto mediante gli strumenti forniti dalla *analisi di Fourier* come la corrispondente serie (cap. 2) e

²³La parola spettro deriva dal latino *specĕre* (guardare) e viene utilizzato in molti campi della scienza per indicare la *gamma* dei costituenti di un qualcosa, vedi <https://it.wiktionary.org/wiki/spettro>

trasformata (cap. 3), che associano ad un segnale $x(t)$ un secondo segnale *complesso* $X(f)$ che è diverso da zero per tutti i valori di f presenti in $x(t)$. Dato che la stessa analisi può essere svolta anche per la risposta impulsiva $h(t)$ che caratterizza un sistema lineare e permanente (§ 1.6), tale rappresentazione si rivelerà unificante.

1.5.1.1 Segnale limitato in banda

Quando un segnale contiene solo frequenze comprese entro un intervallo finito viene detto *limitato in banda* (§ 1.2.1.1); se tale banda è contigua alla frequenza zero viene detto *di banda base*, oppure di banda *traslata* qualora l'intervallo delle frequenze presenti sia concentrato attorno ad una frequenza più elevata detta *portante*. La limitazione in banda è una condizione necessaria affinché un segnale analogico possa essere campionato e quantizzato (cap. 4); d'altra parte, un segnale non può essere contemporaneamente limitato sia in banda che nel tempo.

1.5.2 Operazioni sui segnali

Iniziamo discutendo le operazioni che coinvolgono *un solo* segnale, modificandone ad es. l'ampiezza, o che sono il risultato di una trasformazione *lineare* dell'argomento, ossia sono frutto di un cambio di variabile, come rappresentato in fig. 1.7.

Prodotto per una costante L'ampiezza del segnale $x(t)$ viene variata producendo un $y(t) = a \cdot x(t)$ che ne costituisce una copia *amplificata* ($|a| > 1$), *attenuata* ($|a| < 1$) o *capovolta* ($a < 0$).

Traslazione temporale Sostituisce ad un segnale $x(t)$ un secondo segnale $y(t)$ che ne rappresenta una copia *anticipata* o *ritardata* di un intervallo τ , ovvero

- anticipo: $y(t) = x(t + \tau)$ con $y(t)$ che si sposta *a sinistra* rispetto ad $x(t)$;
- ritardo: $y(t) = x(t - \tau)$ con $y(t)$ che si sposta *a destra* rispetto ad $x(t)$.

Per ricordare la concordanza tra il segno della traslazione τ e lo spostamento grafico, si pensi che se un treno è *in ritardo* significa che *non è ancora arrivato*, e dunque (il suo arrivo) si è spostato *in avanti* nel tempo, o nel futuro.

Ribaltamento Ruota il segnale rispetto all'asse delle ordinate, e si scrive $y(t) = x(-t)$.

Cambio di scala Comprime od espande *il grafico* rispetto all'asse dei tempi, ed è espresso come $y(t) = x(\alpha t)$. Si ha una *compressione* per $\alpha > 1$, ovvero una *espansione* per $\alpha < 1$. Infatti se ad es. $\alpha > 1$, una piccola variazione per l'argomento t corrisponde ad una variazione *più grande* per αt .

Cambio di variabile Indichiamo con questo termine la *combinazione* delle singole operazioni fin qui illustrate: in tal caso il risultato complessivo si ottiene applicandole una alla volta, eventualmente modificando l'espressione dell'argomento. Come esempio prendiamo il segnale $s(\alpha t + \beta)$: in questo caso conviene riscrivere l'argomento come $\alpha(t + \beta/\alpha)$ ottenendo così $s(\alpha(t + \beta/\alpha))$, in modo da poter prima anticipare $s(t)$ della quantità β/α , e quindi alterare la scala dell'asse dei tempi del fattore α , come mostrato

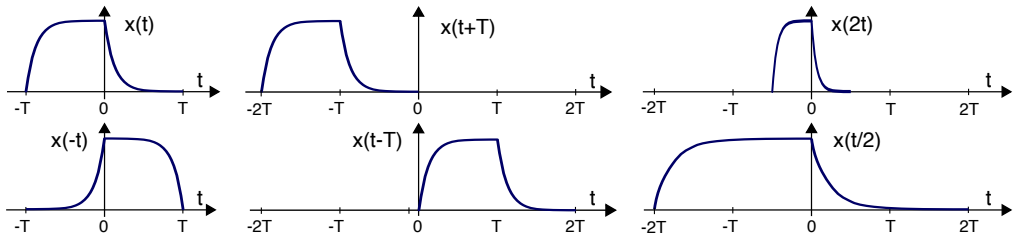


Figura 1.7: Operazioni di ribaltamento, traslazione e scalatura

in fig. 1.8-a). Una variante si verifica ponendo $\alpha = -1$ ottenendo così $s(-t + \beta)$ ovvero $s(\beta - t)$. In questo caso l'anticipo $\beta/\alpha = -\beta$ risulta essere in realtà *un ritardo* pari a β , mentre l'alterazione di scala $\alpha = -1$ corrisponde in realtà ad un *ribaltamento*, ottenendo in definitiva la situazione rappresentata in fig. 1.8-b), che ritroveremo in occasione dello studio della convoluzione (§ 3.4.3) e del filtro adattato (§ 7.6).

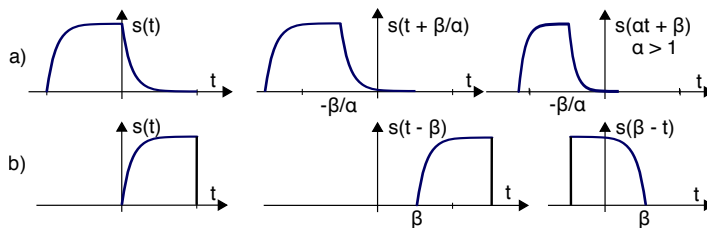


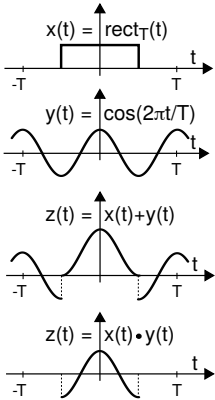
Figura 1.8: Casi particolari di cambio di variabile

1.5.2.1 Combinazione di segnali

Due segnali $x(t)$ ed $y(t)$ possono essere *sommati* tra loro, dopo un'eventuale alterazione di ampiezza, dando luogo ad un nuovo segnale $z(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t)$ *combinazione lineare* dei segnali di partenza. Potrebbe essere ovvio, ma è meglio dirlo: se la coppia di segnali appartiene ad una medesima classe (di energia, di potenza, di periodo T) anche il risultato vi appartiene, e ciò comporta che la classe è dotata della struttura algebrica di spazio vettoriale (§ 2.4).

E' altresì definito anche il *prodotto* $x(t) \cdot y(t)$ tra segnali, ma in generale il risultato non appartiene più alla classe di partenza: ad esempio il prodotto tra segnali di uguale periodo genera anche frequenze pari alla somma ed alla differenza delle *armoniche* presenti.

Grafico dei segnali Spesso ci si imbatte in espressioni analitiche il cui senso può essere meglio apprezzato passando dalla forma scritta a quella visiva, ovvero disegnando il grafico di come la variabile *dipendente* varia in funzione dei valori assunti da quella *indipendente* (tempo t o frequenza f) nell'intervallo di interesse. A questo fine il testo è corredato da innumerevoli grafici, ma lo studente dovrebbe essere in grado di visualizzare in modo autonomo l'andamento delle espressioni che incontra. Un metodo generale per ottenere i grafici di somma e prodotto tra segnali è



- disegnare gli assi cartesiani su di una scala graduata compatibile con i valori da graficare, indicando l'identità della variabile indipendente, e quella della grandezza che si intende graficare;
- disegnare un secondo sistema di assi sotto al primo, allineato e nella stessa scala, su cui disegnare il secondo termine della somma o prodotto;
- eseguire la somma (o prodotto) tra i valori dei due segnali per tutti i valori della variabile indipendente, e riportare il risultato su un terzo grafico, allineato ai primi due.

Per casi più complessi è senz'altro di grande aiuto l'uso di applicazioni software che generano grafici *esatti*. Tra queste citiamo

- **Gnuplot** <http://www.gnuplot.info/> Orientato a produrre grafici bi- e tridimensionali mediante una sintassi molto compatta, è in grado di generare uscite per un numero veramente notevole di dispositivi;
- **Octave** <https://www.gnu.org/software/octave/> Un linguaggio di programmazione completo e ad alto livello, con tipi di dato vettoriale e matriciale, equivalente OpenSource di *Matlab* e le cui funzionalità vengono estese da una vasta libreria di *package*. I grafici prodotti con Octave possono essere manipolati e ruotati in modo interattivo;
- **Geogebra** <https://www.geogebra.org/> Un insieme di applicazioni gratuite che girano oltre che su computer, anche via *javascript* nel browser e su smartphone, ognuna orientata ad uno specifico campo applicativo, compresa la grafica (interattiva) di funzioni tridimensionali, ottenibile senza programmare ma semplicemente scrivendo l'espressione analitica di ciò che si vuol graficare. E' molto attiva anche una community che condivide on-line codice di simulazioni animate;
- **Genius** <https://www.jirka.org/genius.html> Anch'esso pur disponendo di un linguaggio di programmazione, permette di generare grafici direttamente a partire dall'espressione analitica, ma in più rispetto ai precedenti, realizza anche grafici di funzioni complesse di variabile complessa! Sviluppato solamente per sistemi *Gnu/Linux*, è presente nelle *repository* di Debian e derivate.

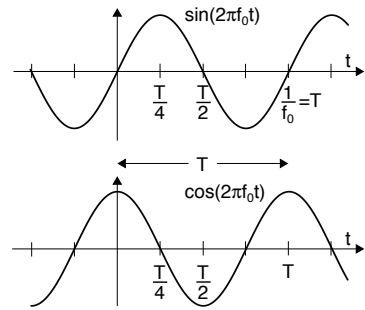
1.5.3 Segnali di uso frequente

Sinusoide E' un segnale periodico *dispari* con periodo $T = 1/f_0$ espresso come $s(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, ed in cui è presente l'unica frequenza f_0 . La medesima forma d'onda si ottiene anche ritardando una cosinusoide di un quarto di periodo, dato che

$$\sin(2\pi f_0 t) = \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\pi f_0\left(t - \frac{\pi}{2 \cdot 2\pi f_0}\right)\right) = \cos\left(2\pi f_0\left(t - \frac{T}{4}\right)\right)$$

In definitiva, un segnale di forma sinusoidale può essere descritto indifferentemente da un seno o da un coseno, con un termine di fase appropriato, legato alla traslazione temporale $\varphi/2\pi f_0$ necessaria ad ottenere la forma d'onda nella posizione richiesta.

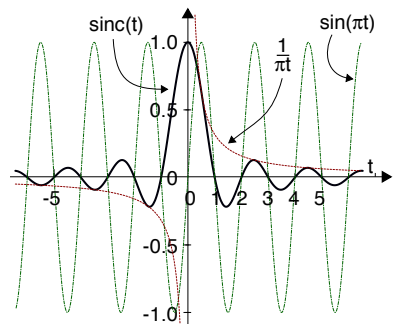
Le funzioni matematiche di seno e coseno derivano dalla espressione in coordinate cartesiane della posizione di un punto materiale animato da moto circolare uniforme, ossia che ruota su di un cerchio unitario²⁴ con velocità angolare $\omega_0 = 2\pi f_0$ radianti/secondo.



Seno cardinale Il nome deriva dall'uso che ne viene fatto nell'ambito del teorema del campionamento (§ 4.1), ed è definito come

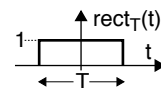
$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Si tratta dunque di un modo particolare di scrivere il rapporto $\frac{\sin(x)}{x}$ ben noto nei corsi di analisi per essere utilizzato come esempio di applicazione del teorema de l'Hôpital, che ne determina il valore pari ad 1 per $t \rightarrow 0$. La figura a lato ne mostra l'andamento, assieme a quello di $\sin(\pi t)$ e di $\frac{1}{\pi t}$: notiamo che avere espresso l'argomento del segnale come πt determina che esso passa per zero in corrispondenza dei valori interi dell'argomento, cioè per $t = 1, 2, \dots, n$ con n intero. La sua importanza in teoria dei segnali discende dal fatto che come vedremo, la sua trasformata di Fourier è un rettangolo (e viceversa).



Rettangolo E' un segnale di durata finita che vale uno nel suo intervallo di definizione e zero al di fuori, e viene espresso nella forma

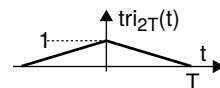
$$\text{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{con } |t| < T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



in cui il pedice T indica l'ampiezza dell'intervallo per la variabile indipendente, notazione adottata nel testo per segnali a durata limitata. Il rettangolo viene molto spesso utilizzato per idealizzare delle discontinuità di prima specie, ed in tal senso è il risultato di due gradini contrapposti $\text{rect}_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$; è spesso anche utilizzato moltiplicato con altri segnali, in modo da renderli a durata limitata.

Triangolo Ha funzioni simili al precedente, ma la sua ampiezza varia linearmente da zero ad un massimo (in zero), per poi diminuire di nuovo linearmente. E' definito come

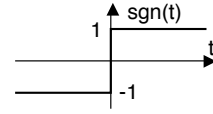
$$\text{tri}_{2T}(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T & \text{con } |t| < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



²⁴Per una simulazione animata, visita <https://www.geogebra.org/m/Enf5AEbT>

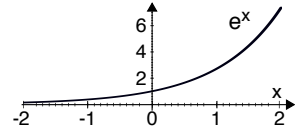
Segno E' definito come

$$\text{sgn}(t) = \frac{t}{|t|}$$

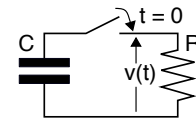


ovvero in modo equivalente $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{con } t > 0 \\ -1 & \text{con } t < 0 \end{cases}$, e spesso non viene usato come segnale a sé stante, ma applicato al valore di un secondo segnale: ad esempio $\text{sgn}(\cos(t))$ produce come risultato un'onda quadra, ed in tal caso viene detto *squadratore* e rappresenta un amplificatore che lavora in regime di saturazione.

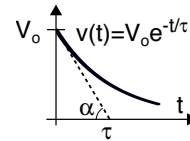
Esponenziale La funzione reale di variabile *reale* e^x ha un ruolo del tutto particolare nell'analisi per il fatto di essere la derivata di sé stessa, e dunque soluzione di equazioni differenziali del tipo $\frac{df(x)}{dx} = kf(x)$.



Ad esempio, la teoria dei circuiti ci insegna²⁵ che l'andamento della tensione $v(t)$ ai capi di un condensatore di capacità C che si scarica attraverso una resistenza R ha espressione $\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{v(t)}{RC}$; se aggiungiamo le condizioni al contorno che la scarica inizi all'istante $t = 0$ e che a tale istante il condensatore sia carico ad una tensione $v(t = 0) = V_0$, la soluzione dell'equazione differenziale fornisce $v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ in cui il segno meno ribalta l'asse dei tempi, e $\tau = RC$ è detta *costante di tempo* del circuito.



Tale denominazione è legata all'osservazione che nel disegno la *retta tangente* a $v(t)$ in $t = 0$, di espressione $y(t) = mt + V_0$, ha un *coefficiente angolare* m di valore $-\frac{V_0}{\tau}$, e collega il punto $v(0) = V_0$ con l'ascissa $t = \tau$ ²⁶; pertanto per realizzare un disegno approssimato conviene prima tracciare la retta, e quindi l'esponenziale tangente ad essa, come mostrato in figura.



1.5.3.1 Esponenziale complesso

Data la frequenza con cui nel testo viene fatto uso di questa particolare funzione, si è scelto di approfondirne debitamente lo studio. Il *numero di Nepero* e è di tipo irrazionale trascendente²⁷, ed il valore delle sue potenze e^x corrisponde a quello a cui converge sia il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ che la serie di Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; il bello è che tali formule mantengono validità anche per *argomento complesso* z , rendendo la funzione

$$w = e^z$$

²⁵Vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Scarica_di_un_condensatore

²⁶Il coefficiente angolare m è pari alla derivata di $v(t)$ calcolata per $t = 0$, dunque $v'(t) = \frac{d}{dt} V_0 e^{-t/\tau} = -\frac{V_0}{\tau} e^{-t/\tau}$ che fornisce appunto $v'(t)|_{t=0} = -\frac{V_0}{\tau}$. Inoltre come noto $m = \tan \alpha$ dove α è l'angolo tra la retta tangente e l'asse delle ascisse come mostrato in figura, ma a sua volta $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{V_0}{\tau}$.

²⁷Vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/E_\(costante_matematica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/E_(costante_matematica))

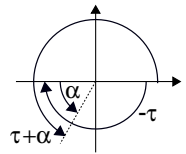
una *mappa conforme*²⁸ che fa corrispondere ad ogni numero complesso (§ 2.1.1) $\underline{z} = x + jy$ un diverso numero $\underline{w} = u + jv$. Anche l'uguaglianza $e^{\underline{z}+\underline{s}} = e^{\underline{z}} \cdot e^{\underline{s}}$ si mantiene valida per \underline{z} ed \underline{s} numeri complessi, permettendo di scrivere $\underline{w} = e^{\underline{z}} = e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy}$. Dato che x è la parte reale di \underline{z} , osserviamo dunque che quando la parte immaginaria y dell'argomento è nulla si ritrova la definizione di esponenziale di variabile *reale*, di cui l'esponenziale complesso costituisce il *prolungamento analitico*²⁹.

Ma che andamento ha $\underline{w} = e^{\underline{z}}$ al variare di \underline{z} nel piano complesso? Per farsene una idea, l'unica possibilità che abbiamo è quella di rappresentare separatamente le superfici descritte dalla parte reale $u(x, y)$ ed immaginaria $v(x, y)$ di $\underline{w} = u + jv = e^x \cdot e^{jy}$, oppure le superfici descritte da modulo $|\underline{w}|$ e fase $\arg\{\underline{w}\}$, come mostrato in fig. 1.9.

Osserviamo innanzitutto che il modulo $|e^{\underline{z}}|$ (in alto a destra) dipende solamente da $x = \Re(\underline{z})$, risultando³⁰ $|e^{\underline{z}}| = e^x$ ossia segue esattamente l'andamento dell'esponenziale reale, per qualunque y . D'altra parte, le parti reale $u = \Re(\underline{w})$ ed immaginaria $v = \Im(\underline{w})$ (a sinistra in figura) hanno un andamento del tutto simile tra loro, in quanto entrambe *oscillano* sinusoidalmente al variare di y con x costante, con la differenza che u oscilla come un coseno (è pari rispetto ad x) mentre v segue un seno (dispari), e dunque si annulla per $y = 0$ ³¹. Infine osserviamo che la fase (in basso a destra), sempre in virtù della formula di Eulero, si sviluppa come

$$\arctan 2 \left(\frac{v}{u} \right) = \arctan 2 \left(\frac{e^x \sin y}{e^x \cos y} \right) = \arctan (\tan (y)) = y$$

e quindi non dipende da x , replicando il valore della parte immaginaria y dell'argomento complesso \underline{z} . Pertanto la superficie che descrive la fase di \underline{w} è un piano, ma rientra dal valore $-\pi = -3.14\dots$ ogni volta che supera π , essendo un angolo pari a $\pi + \alpha$ indistinguibile da quello $-\pi + \alpha$. In definitiva, l'esponenziale complesso $\underline{w} = e^{\underline{z}}$ risulta periodico con periodo 2π nella componente immaginaria y dell'argomento \underline{z} .



Siamo ora in grado di comprendere *la magia* della costante $e = 2.71828\dots$. Se valutiamo infatti un esponenziale complesso $a^{\underline{z}}$ per una qualunque altra base $a \neq e$, il grafico che ne risulta è del tutto analogo a quello di fig. 1.9, a parte *per un fattore di scala*³², come illustrato nel grafico di $\Re(2^{\underline{z}})$ riportato alla figura seguente. Notiamo

²⁸Una mappa conforme è una trasformazione che preserva gli angoli ma non la forma degli oggetti (in questo caso delle curve nel piano complesso); tale proprietà deriva dall'essere la serie di potenze di $e^{\underline{z}}$ uniformemente convergente su ogni sottoinsieme limitato del campo complesso, e pertanto differenziabile ovunque con derivata non nulla, rendendo l'esponenziale complesso una *funzione analitica*, od *olomorfa*. Per approfondimenti: https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_esponenziale, https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_olomorfa,

https://it.wikipedia.org/wiki/Mappa_conforme, http://people.unipmn.it/catenacc/mec/compl_geometr_complessa.pdf

²⁹Vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Continuazione_analitica

³⁰Ciò si può dimostrare tenendo conto della *formula di Eulero* (§ 2.1.2) $e^{jy} = \cos y + j \sin y$, che permette di scrivere $|\underline{w}| = |e^x \cdot e^{jy}| = e^x \cdot \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x$.

³¹Anche questo è un comportamento atteso, sempre alla luce della *formula di Eulero* in base alla quale se \underline{z} è solamente immaginario $e^{jy} = \cos y + j \sin y$.

³²Tale fattore è pari al logaritmo naturale di a , in accordo alla serie di potenze che recita $a^{\underline{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z \ln a)^n}{n!}$

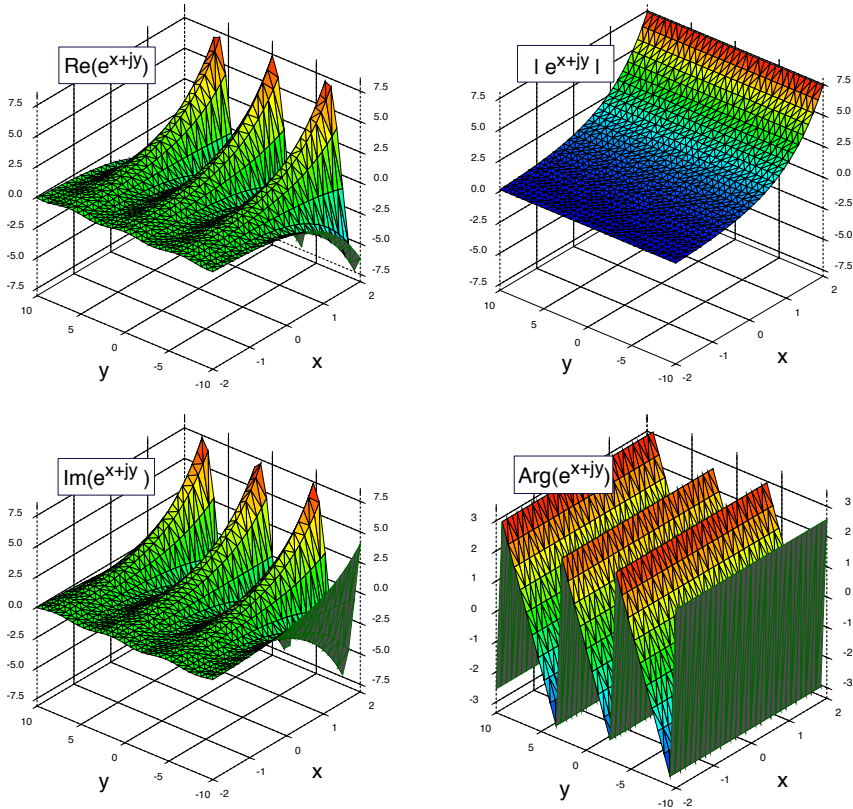


Figura 1.9: Superfici corrispondenti alle componenti dell'esponenziale complesso $u + jv = e^{x+jy}$. A sinistra le parti reale u ed immaginaria v , a destra il corrispondente modulo $\sqrt{u^2 + v^2}$ e fase $\arctan(v/u)$

infatti che in questo caso ($a = 2 < e$) l'ampiezza delle oscillazioni si è ridotta, ed il periodo è aumentato: ciò significa che la curva ottenuta al variare di y per $x = 0$ non è più un coseno, in quanto anche se l'ampiezza è ancora 1 ($2^0 = 1$), il periodo è maggiore di 2π . Dunque il numero e è l'unico³³ a soddisfare l'uguaglianza (2.3) $e^{jy} = \cos y + j \sin y$, che valutata per $y = \pi$ da luogo all'identità di Eulero

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$

giudicata una delle migliori espressioni di *bellezza matematica*³⁴.

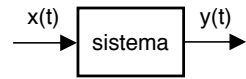
Affrontiamo ora la caratterizzazione degli oggetti che sono attraversati dai segnali.

³³In base all'osservazione di cui alla nota precedente, si ha $a^{jy} = \cos(y \ln a) + j \sin(y \ln a)$

³⁴Vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Identità_di_Eulero, https://it.wikipedia.org/wiki/Bellezza_matematica

1.6 Caratteristiche dei sistemi

In termini generali, un *sistema* è un dispositivo che opera su uno o più segnali di ingresso, od *eccitazione*, e produce uno o più segnali di uscita, o *risposta*. Il sistema può essere di natura elettrica, circuitale od elettronica, ma nulla impedisce che sia costituito da componenti meccaniche, pneumatiche, termiche, o di altra natura fisica, ed in generale i segnali di ingresso ed uscita saranno della stessa natura, anche se più spesso sono convertiti in segnali elettrici mediante appositi trasduttori e/o sensori. La relazione tra le grandezze di ingresso e quelle di uscita possono essere di tipo algebrico, o descritte da equazioni differenziali, ed è spesso rappresentata mediante un dominio trasformato (approfondiremo nel testo cosa ciò significa). I sistemi per telecomunicazioni rientrano in generale nella categoria dei *filtri*, ovvero sono lineari, permanenti, causali e stabili, terminologia che ora approfondiamo. La figura a lato mostra la rappresentazione di un sistema mediante uno *schema simbolico* che semplicemente individua i segnali di ingresso e di uscita, senza porre attenzione alla reale natura del sistema stesso.



Nel seguito descriviamo un sistema come una generica *trasformazione* $\mathcal{T} [\cdot]$, tale che ad ogni segnale di ingresso $x(t)$ corrisponde una uscita $y(t)$, ovvero $\mathcal{T} [x(t)] = y(t)$. Procediamo quindi a porre dei *paletti* concettuali entro cui classificare il tipo di sistema.

1.6.1 Sistema lineare e permanente

Un sistema è detto *lineare* se, in presenza di una combinazione lineare di ingressi, l'uscita è la combinazione lineare delle uscite, detta anche *legge di sovrapposizione degli effetti*, ovvero:

$$\mathcal{T} \left[\sum_i a_i x_i(t) \right] = \sum_i a_i \mathcal{T} [x_i(t)] \quad (1.3)$$

ed al § 2.4.4.3 vedremo come in questo caso l'insieme $\{\mathcal{T} [\cdot]\}$ di tutte le possibili trasformazioni possa essere descritto come uno spazio vettoriale, ed il suo funzionamento equiparato a quello del calcolo di un prodotto scalare.

La condizione (1.3) implica che il sistema *sia a riposo* prima dell'applicazione dell'ingresso, perché altrimenti la presenza di uno *stato interno* diverso da zero ne impedirebbe la linearità. Un sistema è *permanente* (o *stazionario*) se la risposta ad un ingresso traslato nel tempo è la traslazione temporale dell'uscita che si avrebbe per lo stesso ingresso non traslato, ovvero

$$\text{se } \mathcal{T} [x(t)] = y(t) \quad \text{allora } \mathcal{T} [x(t \pm \tau)] = y(t \pm \tau)$$

Nella letteratura anglosassone un tale sistema è indicato come LTI, acronimo di *Linear Time Invariant*. Nel caso contrario, il sistema è detto tempo-variante, non stazionario, o non permanente.

Filtro Al § 3.4.2 scopriremo che per un sistema lineare e permanente il legame $\mathcal{T} [x(t)] = y(t)$ tra le coppie di segnali di ingresso e di uscita è espresso dall'integrale

di convoluzione

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

in cui la *risposta impulsiva* $h(t)$ caratterizza completamente il sistema nei termini dell'uscita che corrisponde ad un ingresso impulsivo $x(t) = \delta(t)$. Alla convoluzione si associa il concetto di *filtraggio* del segnale, che verifichiamo essere un operatore *lineare* in virtù della distributività dell'integrale, e *permanente* in quanto $h(t)$ dipende solo dal tempo trascorso dalla applicazione del segnale³⁵.

Memoria Notiamo che un sistema descritto da una risposta impulsiva $h(t)$ con estensione temporale non nulla è detto *con memoria*, in quanto i singoli valori di uscita dipendono da tutti i valori di ingresso *pescati*³⁶ dalla risposta impulsiva, vedi § 3.4.3.

Realizzabilità ideale Un sistema è detto *idealmente realizzabile* se $h(t)$ è reale, nel senso che può essere realizzato un vero dispositivo con quella $h(t)$.

Realizzabilità fisica Questa proprietà viene anche indicata come *causalità*, poiché descrive l'impossibilità di osservare una uscita prima di aver applicato un qualunque ingresso. Una definizione alternativa asserisce che i valori di uscita $y(t)$ ad un istante $t = t_0$ non possono dipendere da valori di ingresso $x(t)$ per istanti futuri $t > t_0$. Ciò è automaticamente verificato se $h(t) = 0$ con $t < 0$, ovvero se la risposta impulsiva è causale. Osserveremo (nota 28 a pag. 449) come sistemi realizzabili idealmente *ma non* fisicamente possano essere approssimati da sistemi realizzabili, accettando *un ritardo* dell'uscita.

Stabilità E' definita come la proprietà di fornire uscite di ampiezza limitata per segnali di ingresso limitati, ed equivale alla condizione $\int |h(t)| dt < \infty$, ovvero che $h(t)$ sia un segnale *impulsivo*. Una tale circostanza garantisce l'esistenza della trasformata di Fourier di $h(t)$, detta *risposta in frequenza* $H(f)$, e definita per $-\infty < f < \infty$.

Risposta in frequenza Se un sistema, oltre che stabile, è anche idealmente realizzabile (cioè $h(t)$ è reale), allora per la risposta in frequenza sussiste la condizione di simmetria coniugata $H(f) = H^*(-f)$, e dunque è sufficiente conoscere la parte a frequenze positive indicata con $H^+(f)$, dato che quella a frequenze negative è ottenibile mediante una operazione di coniugazione. Questo fatto permette di misurare modulo e fase di $H(f) = M(f) e^{j\varphi(f)}$, che prende il nome di *risposta in frequenza*, utilizzando come ingresso una funzione sinusoidale $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ con ampiezza A e fase θ note, come illustrato a pag. 74.

³⁵In realtà nulla vieta ad un filtro di modificare la propria risposta impulsiva nel tempo, ma in tal caso in uscita compaiono componenti frequenziali non presenti in ingresso, e viene dunque persa la linearità.

³⁶Qualcuno, non a torto, mi ha scritto chiedendo se non intendessi dire *pescati*. No, ho scritto così immaginando come se la risposta impulsiva fosse una sorta di *rete a strascico* che pesca i valori di ingresso passati. Effettivamente questo concetto diviene chiaro solo a seguito della costruzione grafica riportata alla sezione citata e che illustra l'operazione di convoluzione, di cui si raccomanda la comprensione.

Spazio di stato Alcune discipline come ad es. i controlli automatici devono tener conto di fenomeni di instabilità, e del fatto che i sistemi su cui operano possono trovarsi in particolari condizioni iniziali; a tal fine ricorrono ad una rappresentazione nota come *spazio di stato* in cui si tiene esplicitamente conto della evoluzione dello stato interno del sistema. Dato che i sistemi di interesse per le telecomunicazioni si assumono privi di un particolare stato interno precedente l'applicazione di un segnale al loro ingresso, non approfondiremo un tale approccio.

1.6.2 Non linearità

Corrisponde ad un legame ingresso-uscita *senza memoria*³⁷ del tipo $y(t) = g(x(t))$, in cui $g(\cdot)$ è una generica funzione *non lineare*³⁸. Ad esempio, un operatore basato sulla elevazione a potenza del segnale di ingresso è *non lineare*. Come approfondiremo al § 8.3, una delle più evidenti conseguenze della non linearità è l'insorgenza in uscita di contenuti frequenziali assenti in ingresso.

³⁷Un operatore si dice *senza memoria* quando ogni valore dell'uscita dipende da un unico valore di ingresso.

³⁸Una funzione $y(x)$ è lineare quando il suo sviluppo in serie di potenze si arresta al primo ordine, ed è quindi esprimibile in forma $y = ax + b$, che è l'equazione di una retta.

Parte I

Teoria dei Segnali

Prefazione alla prima parte

CHE lo *smartphone* sia uno dei massimi emblemi dei nostri tempi è indubbio, ed il suo funzionamento può dirsi un equilibrato *mix* di elettronica, informatica e telecomunicazioni. Un tratto comune a queste discipline è la dipendenza dai dati, o segnali, attraverso i quali viene rappresentata l'informazione, in modo da poterla trasmettere anche a distanza.

Da sempre la *teoria dei segnali* riveste un ruolo cardine nelle discipline scientifiche, ed in questa parte ne affrontiamo lo studio, con un percorso che dopo aver posto le basi dell'analisi di *FOURIER* e delle sue applicazioni, e dopo aver discusso in modo completo gli aspetti di campionamento e quantizzazione, si dedica ad approfondire il *Digital Signal Processing* fino ad affrontare il *filtraggio polifase*.

E' quindi il turno del capitolo su probabilità e statistica, in modo da poter successivamente definire una densità spettrale (di potenza), oltre che per i segnali certi, anche per i *processi aleatori*, grazie al potente strumento del *teorema di WIENER*. Dopo aver investigato sulle caratteristiche frequenziali e statistiche delle grandezze di uscita per diversi tipi di filtro, viene aperto un nuovo capitolo per descrivere i fenomeni di distorsione e rumore per segnali di banda base, e che verranno particolarizzati nelle successive parti su modulazione (II) e trasmissione (III).

Gli ultimi due capitoli di questa prima parte sono *concatenati*, dato che il primo affronta gli argomenti di teoria dell'informazione e della codifica di sorgente, mentre nel secondo l'applicazione di tali principi viene particolarizzata al caso di sorgenti audio e video, ed ottenuta mediante una serie di tecniche del tutto particolari.

Ma proviamo a scendere ad un maggiore livello di dettaglio.

Nei capitoli 2 e 3 si affronta l'*analisi di Fourier*, inizialmente per segnali periodici e poi di energia, ed oltre alle sue proprietà se ne approfondisce anche l'aspetto geometrico ed energetico-topologico, introducendo lo *spazio dei segnali* come modello analitico di una qualunque trasformazione o sistema con memoria. Dopo aver introdotto il *delta di Dirac* $\delta(t)$ si elaborano i concetti di risposta impulsiva e convoluzione, subito messi in relazione con le proprietà di prodotto nel tempo e finestrazione, ed il duale prodotto in frequenza e filtraggio. Infine, viene sfruttata la rappresentazione dei segnali periodici

come convoluzione di un periodo per un treno di impulsi, per introdurre il concetto di *serie di Poisson*.

Il cap. 4 è dedicato al passaggio cruciale dal mondo analogico a quello digitale, reso possibile dal *teorema del campionamento*, per il quale sono illustrate condizioni e procedure necessarie ad evitare l'insorgenza di *aliasing*, ed approfondite le tecniche che ne permettono l'implementazione. Si passa quindi a discutere della necessità di *quantizzare* i campioni di segnale, altrimenti a precisione infinita, ed il criterio con cui valutare approssimativamente l'entità dell'errore di quantizzazione. Viene poi il turno della rappresentazione frequenziale per segnali campionati (la DTFT) e per sequenze (la DFT), la relazione con la *trasformata zeta* di queste ultime, e la possibilità di eseguire operazioni di filtraggio operando esclusivamente su dati campionati, mediante tecniche di *signal processing*.

Nel cap. 5 sui filtri analogici e numerici, il breve cenno alla natura fisica dei primi (basati su componenti elettrici ed elettronici) offre l'occasione di menzionare l'esistenza di consolidati metodi di *sintesi* che, a partire da una serie di specifiche, ottengono una forma razionale fratta $H(s)$ da cui derivare sia l'architettura circuitale che l'effettiva risposta in frequenza $H(f)$. Il passaggio ai filtri che operano direttamente su sequenze numeriche avviene dopo aver discusso dei filtri *digitali*, che agiscono su campioni dei segnali analogici mediante operazioni di somma e prodotto, e che per questo costituiscono una sorta di *ponte* tra il mondo analogico e quello numerico. Gli schemi architetture dei filtri numerici sono invece ottenuti dopo apposite trasformazioni tra piano s e piano z e che coinvolgono la $H(s)$ ottenibile per l'associato filtro tempo continuo. Infine, viene introdotto il tema del filtraggio *polifase* ovvero in cui la frequenza di campionamento del segnale in ingresso ad un filtro numerico è *diversa* da quella del segnale in uscita, con applicazione diretta alla *decimazione*, all'*interpolazione* ed all'ambito delle *software radio*.

Il capitolo 6 rappresenta una sorta di parentesi scientifico-letteraria, essendovi riassunti gli assiomi ed i teoremi del *calcolo delle probabilità*, richiamando i concetti di *variabile aleatoria*, *densità di probabilità* e *momenti*, che vengono immediatamente applicati ai *processi aleatori*, per i quali sono definite le proprietà di *stazionarietà* ed *ergodicità*. Dopo aver affrontato le trasformazioni di v.a. e le proprietà della funzione caratteristica, il focus passa all'approfondimento della v.a. gaussiana multivariata, studiata nel dettaglio sia dal punto di vista delle proprietà della matrice di covarianza, che attraverso la dimostrazione del teorema centrale del limite. Il capitolo termina quindi con cenni di *statistica*, definendo la *verifica di ipotesi*, la *verosimiglianza*, la *stima* di parametro, la *stima di intervallo*, il test χ^2 e la *stima di forma d'onda*.

Siamo ora culturalmente attrezzati per affrontare i concetti di *correlazione* di v.a., di segnali deterministici, e di processi stazionari, come illustrato al cap. 7, che prosegue nel definire il *periodogramma* e la stima spettrale basata sulla autocorrelazione come consentito dal *teorema di Wiener*. Sono quindi caratterizzati gli effetti del filtraggio, sia in termini di *trasferimento energetico* alle varie frequenze, sia per quanto riguarda le caratteristiche statistiche del segnale in uscita. Dopo aver approfondito gli effetti

di somma e prodotto tra segnali e tra processi, chiude il capitolo la trattazione del *filtro adattato* che giunge fino alla *segnalazione ortogonale*, mentre in appendice sono affrontati argomenti avanzati come la regressione lineare multipla e la densità spettrale di un segnale dati.

Nel cap. 8 viene introdotto il concetto di *canale perfetto*, si analizzano i peggioramenti introdotti sui segnali da parte dei dispositivi lineari e non lineari, vengono introdotte le misure in *decibel*, e si affronta la categorizzazione dei disturbi additivi, come in particolare il *rumore termico*.

Il penultimo argomento di questa prima parte riguarda approfondimenti spesso assenti in un testo introduttivo, ma pure legati alla descrizione dei segnali in maniera indissolubile. Al cap. 9 si parla dunque di *teoria dell'informazione*, che permette di discernere quanta parte di un messaggio trasporta vera informazione, quanta parte sia invece prevedibile, e in che misura l'informazione sia deteriorata dalla presenza di disturbi additivi. Tali concetti si applicano quindi allo studio della *codifica di sorgente* il cui scopo è quello di *ridurre la banda* necessaria, che in questa edizione si estende allo studio della minima velocità di trasmissione per una assegnata distorsione.

Infine, al capitolo 10 sono illustrati i principi della codifica di contenuti multimediali o audio-video, che permeano la nostra vita quotidiana, la cui codifica a si avvale di accorgimenti indissolubilmente legati alle particolarità percettive del sistema sensoriale umano.

Serie di Fourier e spazio dei segnali

SONO innanzitutto riviste alcune relazioni di *algebra complessa* e *trigonometria*, in quanto di fondamentale importanza per definire e comprendere la rappresentazione dei segnali periodici mediante lo sviluppo in *serie di Fourier*. Vengono quindi introdotte le proprietà di simmetria della serie per *segnali reali*, e sviluppato il calcolo dei coefficienti di Fourier per il caso dell'*onda rettangolare*. Dopo la dimostrazione del teorema di *Parseval* ed il concetto collegato di ortogonalità, viene sviluppato un approfondimento sullo *spazio dei segnali* per i quali sia definita una operazione di *prodotto interno*, costituendo quest'ultimo un approccio unificante per lo sviluppo dei prossimi capitoli.

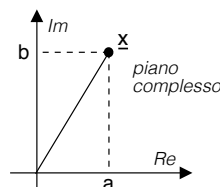
2.1 Prerequisiti trigonometrici

Dato che come vedremo un segnale periodico può essere espresso come una combinazione di funzioni trigonometriche, intraprendiamo i passi necessari a poterle descrivere nei termini di funzioni esponenziali complesse, che a loro volta intervengono in modo massiccio nella rappresentazione frequenziale di Fourier.

2.1.1 Numeri complessi

Un numero complesso \underline{x} è costituito da una coppia di valori a e b entrambi *reali*¹ che ne costituiscono la parte reale a e quella immaginaria² b , e viene scritto come

$$\underline{x} = a + jb = \Re \{ \underline{x} \} + j\Im \{ \underline{x} \} \quad (2.1)$$



detta rappresentazione in *coordinate cartesiane* o rettangolari, che lo mette in corrispondenza con un punto in un *piano complesso*. Le operazioni di somma e prodotto tra

¹L'insieme dei numeri reali è indicato con \mathbb{R} , vi fanno parte i numeri interi, razionali, irrazionali e trascendenti, e può essere messo in corrispondenza biunivoca con gli infiniti punti su di una retta.

²L'*unità immaginaria* trae origine dalla teoria dei numeri come la quantità $\sqrt{-1}$, in modo da poter esprimere nel *campo complesso* \mathbb{C} tutte le radici di un'equazione polinomiale. Mentre in *analisi matematica* è indicata dalla lettera i , nel seguito viene indicata con la lettera j in accordo alla notazione di *teoria dei circuiti*, in modo da evitare confusione con il simbolo utilizzato per la corrente elettrica. Risulta $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, $j^5 = j$ e così via ciclicamente.

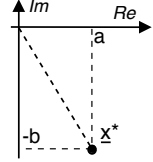
due numeri complessi $\underline{x} = a + jb$ e $\underline{y} = c + jd$ danno come risultato³

$$\underline{x} + \underline{y} = (a + c) + j(b + d) \quad \text{e} \quad \underline{x} \cdot \underline{y} = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

mentre l'inverso di un numero complesso risulta

$$\frac{1}{\underline{x}} = \frac{1}{a + jb} = \frac{a - jb}{(a + jb)(a - jb)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2}$$

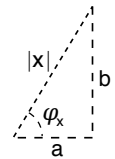
Coniugato Il numero complesso $\underline{x}^* = a - jb$ prende il nome di *coniugato* di \underline{x} , per il quale valgono le relazioni $\underline{x} + \underline{x}^* = 2a = 2\Re\{\underline{x}\}$ e $\underline{x} - \underline{x}^* = 2jb = 2j\Im\{\underline{x}\}$.



Coordinate polari Ricorrendo alle relazioni trigonometriche $a = |\underline{x}| \cos \varphi_x$ e $b = |\underline{x}| \sin \varphi_x$ un numero complesso \underline{x} può essere anche espresso in *coordinate polari* come

$$\underline{x} = |\underline{x}| (\cos \varphi_x + j \sin \varphi_x) \tag{2.2}$$

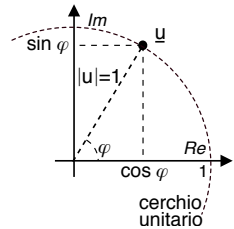
in cui⁴ $|\underline{x}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ prende il nome di *modulo* di \underline{x} e $\varphi_x = \arg\{\underline{x}\} = \arctan \frac{b}{a}$ prende il nome di *fase* o *argomento*. Risulta quindi evidente che $|\underline{x}|^2 = a^2 + b^2 = \underline{x} \cdot \underline{x}^*$, mentre $\frac{1}{\underline{x}} = \frac{\underline{x}^*}{|\underline{x}|^2}$. Infine, In virtù della periodicità di sin e cos, due numeri complessi con uguale modulo ma fase che differisce per multipli di 2π sono *indistinguibili*.



2.1.2 Formula di Eulero

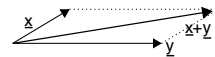
Si può mostrare⁵ che qualora la serie di potenze in cui può essere sviluppata la funzione esponenziale e^z (pag. 22) sia valutata per un argomento $z = jb$ completamente immaginario, essa eguaglia la somma delle serie di potenze in cui è possibile sviluppare la funzione $\cos b + j \sin b$. Questo risultato prende il nome di *formula di Eulero*, e mostra come l'esponenziale immaginario $e^{\pm j\varphi}$ sia un particolare numero complesso con modulo pari ad uno⁶ e fase φ espresso come

$$e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi \tag{2.3}$$



La relazione (2.3) consente di scrivere le funzioni trigonometriche

³Sommare tra loro le parti reali e quelle immaginarie equivale a realizzare una *somma vettoriale* tra \underline{x} e \underline{y} come mostrato a lato. Per il prodotto si applica invece la regola del prodotto tra binomi, ovvero $(a + jb)(c + jd) = ac + jad + jbd + j^2bd$ da cui il risultato, ricordando che $j^2 = -1$.



⁴Mentre l'espressione del modulo è una diretta conseguenza del teorema di Pitagora, quella della fase discende dall'osservare che $\frac{b}{a} = \frac{|\underline{x}| \sin \varphi_x}{|\underline{x}| \cos \varphi_x} = \tan \varphi_x$, per cui $\varphi_x = \arctan \frac{b}{a}$. Con l'avvertenza che, qualora risulti $a < 0$, al risultato φ_x va aggiunto il termine π in quanto la funzione $\arctan \varphi$ è definita per valori dell'argomento $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, vedi <https://www.geogebra.org/m/Enf5AEbT>. Nei linguaggi di programmazione esiste in genere la funzione $\text{atan2}(b, a)$ che effettua automaticamente tale considerazione, vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Arcotangente2>.

⁵Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Formula_di_Eulero#Funzioni_analitiche

⁶Più in generale, il valore $e^{\underline{x}}$ con $\underline{x} = a + jb$ è ancora un numero complesso, con fase b e modulo e^a . Infatti $e^{\underline{x}} = e^{a+jb} = e^a e^{jb} = e^a (\cos b + j \sin b)$.

in termini di esponenziali complessi come⁷

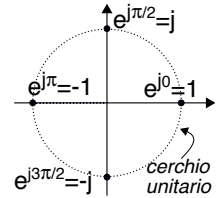
$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

Tali relazioni possono tornare utili nel semplificare i calcoli, trasformando i prodotti tra funzioni trigonometriche in somme di angoli⁸. Ma soprattutto, la rappresentazione di un numero complesso \underline{x} in coordinate polari (2.2) può essere riscritta in base alla (2.3) come

$$\underline{x} = |\underline{x}|e^{j\varphi_x} \tag{2.4}$$

detta anche *rappresentazione esponenziale* di \underline{x} .

In tal modo i numeri complessi di modulo unitario e che presentano la sola parte reale o che sono puramente immaginari possono essere rappresentati come in figura a lato, mentre il coniugato \underline{x}^* di un numero complesso \underline{x} viene ridefinito come quel numero complesso con uguale modulo e fase cambiata di segno, ovvero $\underline{x}^* = a - jb = |\underline{x}|e^{-j\varphi}$.



Infine, il prodotto tra due numeri complessi \underline{x} ed \underline{y} può essere agevolmente calcolato come

$$|\underline{x}|e^{j\varphi_x} \cdot |\underline{y}|e^{j\varphi_y} = |\underline{x}||\underline{y}| \cdot e^{j(\varphi_x + \varphi_y)} = |\underline{z}|e^{j\varphi_z} \quad \text{in cui} \quad |\underline{z}| = |\underline{x}||\underline{y}| \quad \text{e} \quad \varphi_z = \varphi_x + \varphi_y$$

o, detto in altri termini

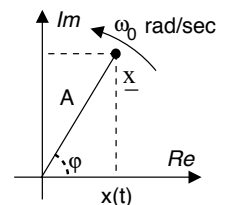
il modulo del prodotto tra numeri complessi è pari al prodotto tra i moduli, e la fase pari alla somma delle fasi

e dunque, come corollario, per il rapporto si ottiene $\frac{\underline{x}}{\underline{y}} = \frac{|\underline{x}|}{|\underline{y}|}e^{j(\varphi_x - \varphi_y)}$.

2.1.3 Fasore

Un segnale del tipo $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ è completamente rappresentato dal numero complesso $\underline{x} = Ae^{j\varphi}$ detto *fasore*, la cui conoscenza permette di riottenere il segnale originario mediante la relazione $x(t) = \Re \{ \underline{x} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \}$, che una volta sviluppata⁹ risulta infatti pari a

$$\begin{aligned} x(t) &= \Re \{ Ae^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \} = A \cdot \Re \{ e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \} = \\ &= A \cdot \Re \{ \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + j \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \} = \\ &= A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \end{aligned}$$



⁷Osserviamo infatti che $e^{j\varphi}$ ed $e^{-j\varphi}$ sono tra loro coniugati, e quindi applicando la (2.3) per la loro somma si ha $e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2\Re \{ e^{j\varphi} \} = 2 \cos \varphi$ mentre la differenza produce $e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = 2j\Im \{ e^{j\varphi} \} = 2j \sin \varphi$.

⁸L'affermazione nasce dalla relazione $e^\alpha e^\beta = e^{\alpha + \beta}$. Ad esempio quindi, il prodotto $\cos \alpha \cdot \sin \beta$ diviene $\frac{1}{4j} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) (e^{j\beta} - e^{-j\beta}) = \frac{1}{4j} [e^{j\alpha} e^{j\beta} - e^{j\alpha} e^{-j\beta} + e^{-j\alpha} e^{j\beta} - e^{-j\alpha} e^{-j\beta}] = \frac{1}{4j} [e^{j(\alpha + \beta)} - e^{j(\alpha - \beta)} + e^{-j(\alpha - \beta)} - e^{-j(\alpha + \beta)}] = \frac{1}{4j} [e^{j(\alpha + \beta)} - e^{-j(\alpha + \beta)} - (e^{j(\alpha - \beta)} - e^{-j(\alpha - \beta)})] = \frac{1}{4j} [2j \sin(\alpha + \beta) - 2j \sin(\alpha - \beta)] = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$

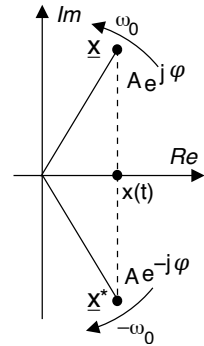
⁹Un modo alternativo di ottenere lo stesso risultato è quello di esprimere gli esponenziali complessi mediante la (2.3), ottenendo $x(t) = \Re \{ |\underline{x}| (\cos \varphi + j \sin \varphi) [\cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)] \}$, e sviluppare il calcolo facendo uso delle relazioni $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ e $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, ma avremmo svolto molti più passaggi.

Osserviamo che il risultato è interpretabile graficamente come aver impresso al fasore \underline{x} una rotazione di velocità angolare $\omega_0 = 2\pi f_0$ radianti/secondo in senso *antiorario*, ed aver proiettato il risultato sull'asse reale.

In alternativa, possiamo esprimere il segnale $x(t)$ di partenza anche come

$$x(t) = \frac{1}{2} \{ \underline{x} e^{j2\pi f_0 t} + \underline{x}^* e^{-j2\pi f_0 t} \} \quad (2.5)$$

coinvolgendo in tal modo anche le *frequenze negative*, cioè tenendo conto di un secondo vettore contro-rotante, coniugato al primo rotore e che si muove in senso *orario*, che quindi ha una parte immaginaria di segno sempre opposto al primo, e che è moltiplicato per il coniugato del fasore. Vedremo tra breve che la (2.5) coincide con l'espressione della *serie di Fourier* per il caso in questione.



2.2 Serie di Fourier

Come anticipato a pag. 14, un segnale $x(t)$ *periodico* è un segnale di potenza, reale o complesso, che assume ripetutamente gli stessi valori a distanza multipla di un intervallo temporale T denominato *periodo*, ovvero tale che

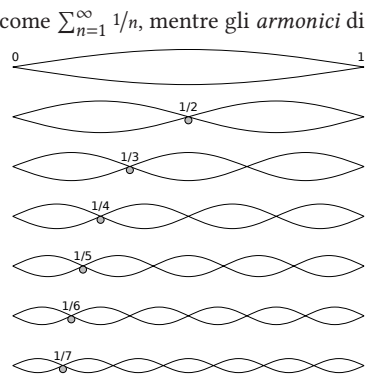
$$x(t) = x(t + T) \quad \forall t$$

L'inverso di T è detto *frequenza fondamentale* $F = \frac{1}{T}$ o *prima armonica*¹⁰ di $x(t)$, espressa in Hertz, dimensionalmente pari all'inverso di un tempo [sec^{-1}].

Per i segnali periodici esiste una forma di rappresentazione basata sulla conoscenza di una serie infinita di valori *complessi* $\{X_n\}$ denominati *coefficienti di Fourier*, calcolati a partire da un periodo di segnale come

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt \quad (2.6)$$

¹⁰Da un punto di vista etimologico, la serie *armonica* è definita come $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, mentre gli *armonici* di una corda di chitarra sono i suoni prodotti dopo averne bloccato la vibrazione in corrispondenza di $1/n$ -esimo della sua lunghezza. Dal punto di vista della teoria musicale le *armoniche* di una nota sono altre note a frequenza multipla della prima. In particolare la seconda armonica corrisponde ad un intervallo di *ottava*, mentre la quarta a due ottave. E la terza armonica? Partendo ad esempio dal la_4 , e sapendo che ogni semitono della scala *temperata* corrisponde ad un rapporto di frequenze pari a $2^{1/12}$ rispetto al semitono precedente, determiniamo il numero di semitoni N_s tra il la_4 e la sua terza armonica. Ad un rapporto di frequenze pari a $2^{N_s/12} = 3$ corrisponde $\frac{N_s}{12} = \log_2 3 \approx 1.5849$ e quindi $N_s = 19$ semitoni, ovvero un intervallo di *dodicesima*, cioè il mi_5 che viene dopo il la_5 dell'ottava successiva. Procedendo allo stesso modo si trova che la quinta, sesta e settima armonica corrispondono rispettivamente a $do\#_6$, mi_6 e sol_6 : pertanto, con le prime sette armoniche si compone un accordo di *settima di dominante*.



e che permettono¹¹ la *ricostruzione* di $x(t)$ nella forma di una combinazione lineare di infinite funzioni esponenziali complesse $e^{j2\pi nFt}$, mediante l'espressione nota come *serie di Fourier*:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi nFt} \quad (2.7)$$

Osserviamo che:

- la conoscenza di $\{X_n\}$ *equivale* a quella di $x(t)$ e *viceversa*, esistendo il modo di passare dall'una all'altra rappresentazione;
- le funzioni della base di rappresentazione $e^{j2\pi nFt}$ sono funzioni trigonometriche a frequenza multipla (*n-esima*) della fondamentale, detta anche *n-esima armonica*;
- la somma dei termini *simmetrici* $X_n e^{j2\pi nFt} + X_{-n} e^{-j2\pi nFt}$ è detta *componente armonica* di $x(t)$ a frequenza $f = nF$ e, se $x(t)$ è reale¹², risulta pari a $2|X_n| \cos(2\pi nFt + \varphi_n)$ in cui φ_n è la fase di X_n ;
- il coefficiente $X_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$ costituisce il *valor medio* di $x(t)$ (pag. 14);
- la serie di Fourier (2.7) dà valori esatti in tutti i punti in cui $x(t)$ è continuo, mentre in corrispondenza di discontinuità di prima specie fornisce un valore pari alla media dei valori agli estremi, vedi § 2.5.1;
- i coefficienti di Fourier X_n possono essere calcolati anche per un segnale di estensione finita T , ed antitrasformando, il segnale diventa periodico;
- i coefficienti X_n possono essere pensati anche come i valori assunti dalla funzione complessa di variabile continua $\bar{X}(f)$ per i valori discreti $f = nF$, ossia $X_n = \bar{X}(f = nF)$. $\bar{X}(f)$ prende il nome di *involuppo dello spettro di ampiezza (complessa)* di $x(t)$, e si ottiene riscrivendo la (2.6) come $\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$;
- i coefficienti complessi X_n possono essere espressi nei termini delle corrispondenti parti reale ed immaginaria come $X_n = \Re\{X_n\} + j\Im\{X_n\}$, oppure in forma esponenziale $X_n = M_n e^{j\varphi_n}$ in cui

$$\begin{cases} M_n = \sqrt{\Re\{X_n\}^2 + \Im\{X_n\}^2} = |X_n| & \text{spettro di modulo} \\ \varphi_n = \arctan \frac{\Im\{X_n\}}{\Re\{X_n\}} & \text{spettro di fase} \end{cases}$$

2.2.1 Serie di Fourier per segnali reali

Qualora il segnale periodico $x(t)$ di cui si calcola la serie di Fourier sia *reale*, si verificano le importanti conseguenze che ora analizziamo.

2.2.1.1 Simmetria coniugata o Hermitiana

Quando $x(t)$ è reale i relativi coefficienti di Fourier godono della importante proprietà di *simmetria coniugata*, che consiste nell'eguaglianza

$$X_n = X_{-n}^* \quad (2.8)$$

¹¹Per una discussione relativa alla convergenza della serie (2.7) si veda il § 2.5.1.

¹²vedi § 2.2.1.1 e 2.2.1.3

ovvero il coefficiente con indice n è il complesso coniugato di quello con indice $-n$, avendo uguale parte reale e parte immaginaria di segno opposto. Infatti scomponendo l'esponenziale complesso $e^{-j2\pi nFt}$ mediante la (2.3) come $\cos 2\pi nFt - j \sin 2\pi nFt$, ed essendo $x(t)$ reale, l'integrale (2.6) si suddivide in due integrali entrambi *reali*

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi nFt) dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi nFt) dt \quad (2.9)$$

relativi al calcolo rispettivamente della parte reale e di quella immaginaria di X_n , ovvero $\Re\{X_n\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi nFt) dt$ e $\Im\{X_n\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi nFt) dt$. Essendo il coseno una funzione pari, $\Re\{X_n\}$ ha lo stesso valore indipendentemente dal segno di n , mentre $\Im\{X_n\}$ cambia segno con n , essendo il seno una funzione dispari. Ciò comporta una proprietà analoga anche per modulo e fase di X_n , e quindi in definitiva

$$x(t) \text{ reale} \Leftrightarrow \begin{cases} \Re\{X_n\} = \Re\{X_{-n}\} \\ \Im\{X_n\} = -\Im\{X_{-n}\} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} |X_n| = |X_{-n}| \\ \arg\{X_n\} = -\arg\{X_{-n}\} \end{cases}$$

riassumibile nella frase

se $x(t)$ è reale i coefficienti X_n hanno parte reale pari e parte immaginaria dispari, ovvero modulo pari e fase dispari

da cui discende anche¹³

se $x(t)$ oltre ad essere reale è anche pari, i coefficienti X_n sono reali (pari), mentre se $x(t)$ è reale dispari, gli X_n sono immaginari (dispari).

2.2.1.2 Interpretazione dei coefficienti di Fourier come fasori

Confrontando la formula di ricostruzione (2.7) con la (2.5) ricavata al § 2.1.3 per il caso di un $x(t)$ sinusoidale, e tenendo conto della proprietà di simmetria coniugata (2.8),

è possibile pensare un segnale periodico reale come *la parte reale* del risultato di una somma vettoriale di un insieme infinito di fasori X_n (di modulo *doppio* di quello dei coefficienti X_n), ognuno rotante con una velocità angolare $\omega_n = 2\pi nF$ multipla della fondamentale $2\pi F$.

La figura 2.1 mostra¹⁴ *la somma vettoriale* dei primi

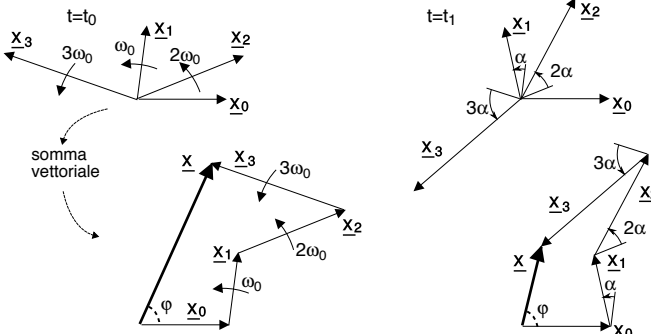


Figura 2.1: Somma vettoriale di fasori armonici per t_0 e t_1

¹³Notiamo infatti che se $x(t)$ è (reale) *pari*, allora il termine $x(t) \sin 2\pi nFt$ che compare nel secondo termine della (2.9) è *dispari*, ed il suo integrale esteso ad un intervallo simmetrico rispetto all'origine è *nullo*, e pertanto $\Im\{X_n\} = 0$. Se invece $x(t)$ è (reale) *dispari*, allora è $x(t) \cos 2\pi nFt$ nel primo termine ad essere *dispari*, e dunque per lo stesso motivo si annulla l'integrale che esprime $\Re\{X_n\} = 0$.

¹⁴Se la figura non appare del tutto chiara, non hai tutti i torti. Prova allora a dare un'occhiata a queste animazioni <https://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/phasor-addition.html>,

tre termini $X_n e^{j2\pi nFt}$ della (2.7) per $n \geq 0$, valutata per due istanti di tempo consecutivi t_0 e $t_1 > t_0$, ed evidenzia come nell'intervallo $\tau = t_1 - t_0$ i fasori \underline{X}_2 e \underline{X}_3 siano ruotati di un angolo $n\alpha$ multiplo di quello $\alpha = 2\pi F\tau$ di cui ha ruotato \underline{X}_1 .

Esercizio Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier per il segnale $x(t) = A \cos(2\pi Ft + \varphi)$. Esprimiamo innanzitutto l'integrale che fornisce i coefficienti nei termini della formula di Eulero per il coseno:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{j2\pi Ft} e^{j\varphi} + e^{-j2\pi Ft} e^{-j\varphi}}{2} e^{-j2\pi nFt} dt \\ &= \frac{A}{2T} \left(e^{j\varphi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi Ft} e^{-j2\pi nFt} dt + e^{-j\varphi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi Ft} e^{-j2\pi nFt} dt \right) \end{aligned}$$

in cui $F = \frac{1}{T}$, e consideriamo la funzione integranda $e^{\pm j2\pi Ft} e^{-j2\pi nFt}$ per i diversi valori di n :

- per $n = 0$, osserviamo che $e^{-j2\pi nFt} \Big|_{n=0} = e^0 = 1$, e dunque $X_0 = 0$ in quanto

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{\pm j2\pi Ft} dt = 0$$

poiché in un intervallo T entra esattamente un ciclo di (co)sinusoide a frequenza F , risultando in un valor medio nullo.

- per $n = 1$, si ha che $\int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi Ft} e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^0 dt = T$, mentre $\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi Ft} e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi 2Ft} dt = 0$, dato che in un periodo T entrano due cicli esatti della funzione periodica integranda, ottenendo quindi

$$X_1 = \frac{A}{2} e^{j\varphi}$$

- per $n = -1$ valgono considerazioni analoghe, ottenendo quindi

$$X_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\varphi}$$

- per $|n| > 1$ infine, si ottiene $X_{\pm n} = 0$ dato che $\int_{-T/2}^{T/2} e^{\pm j2\pi Ft} e^{-j2\pi nFt} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(\pm 1 - n)Ft} dt$ presenta sempre un numero intero di periodi entro l'intervallo di integrazione.

2.2.1.3 Serie trigonometrica

Qualora i coefficienti X_n presentino simmetria coniugata la (2.7) può essere riscritta¹⁵ come

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{X_n e^{j2\pi nFt} + X_{-n} e^{-j2\pi nFt}\} = M_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos(2\pi nFt + \varphi_n) \quad (2.10)$$

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Fourier_series_sawtooth_wave_circles_animation.gif
e https://en.wikipedia.org/wiki/File:Fourier_series_square_wave_circles_animation.gif

¹⁵Infatti $X_{\pm n} = M_n e^{\pm j\varphi_n}$ e dunque il termine entro parentesi graffe risulta pari a

$$M_n \left(e^{j(2\pi nFt + \varphi_n)} + e^{-j(2\pi nFt + \varphi_n)} \right) = M_n 2 \cos(2\pi nFt + \varphi_n)$$

ovvero in forma di una serie di coseni; notiamo che $X_0 = M_0$ è necessariamente reale, in quanto la fase deve risultare una funzione dispari della frequenza. Similmente, le proprietà relative alle parti reale ed immaginaria degli X_n permettono di scrivere¹⁶

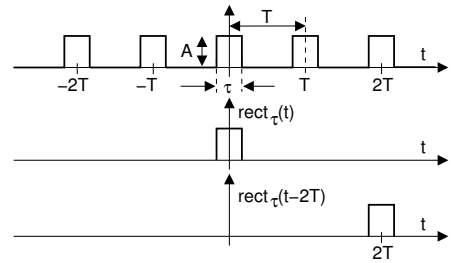
$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (R_n + jI_n) e^{j2\pi nFt} + (R_n - jI_n) e^{-j2\pi nFt} \} = \\ &= R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ 2R_n \cos(2\pi nFt) - 2I_n \sin(2\pi nFt) \} \end{aligned}$$

in cui $R_0 = M_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$ e $\begin{cases} R_n = \Re \{x_n\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi nFt) dt \\ I_n = \Im \{x_n\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi nFt) dt \end{cases}$.

Pertanto nel caso in cui $x(t)$ sia un segnale reale la serie di Fourier può essere ricondotta ad uno sviluppo in termini di funzioni trigonometriche, ed in particolare ad una serie di soli coseni (con fase nulla) nel caso in cui $x(t)$ sia pari, oppure una serie di soli seni (sempre con fase nulla), nel caso in cui sia dispari.

2.2.1.4 Serie di Fourier di un'onda rettangolare

Applichiamo quanto fin qui discusso ad un particolare segnale periodico, realizzato ripetendo con periodo T un impulso rettangolare (pag. 21) di base $\tau < T$, ottenendo il risultato mostrato a lato per un valore di *duty cycle*¹⁷ del 33%, la cui espressione analitica può essere scritta



$$x(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}_{\tau}(t - nT)$$

in cui si è adottata la notazione $\text{rect}_{\tau}(t)$ per rappresentare l'impulso, mentre l'argomento $(t - nT)$ indica una *traslazione temporale* di ciascun rettangolo *a destra* (vedi § 1.5.2)¹⁸ (ossia verso i valori *positivi* di t) di nT istanti, cosicché la sommatoria rappresenta appunto la replica dello stesso impulso rettangolare infinite volte in avanti ed all'indietro.

Il calcolo dei coefficienti di Fourier per il segnale in questione non presenta particolari difficoltà, ma l'esito si presta a considerazioni interessanti. Applicando un risultato

¹⁶In questo caso in virtù dell'uguaglianza $j^2 = -1$ il termine tra parentesi graffe diviene

$$\begin{aligned} &R_n \cos(2\pi nFt) + jR_n \sin(2\pi nFt) + jI_n \cos(2\pi nFt) - I_n \sin(2\pi nFt) + \\ &R_n \cos(2\pi nFt) - jR_n \sin(2\pi nFt) - jI_n \cos(2\pi nFt) - I_n \sin(2\pi nFt) \end{aligned}$$

che si semplifica nel risultato mostrato.

¹⁷Il termine DUTY CYCLE si traduce *ciclo di impegno*, ed è definito come il rapporto percentuale tra il tempo per cui l'onda quadra è diversa da zero, ossia $\text{duty cycle} = \frac{\tau}{T} * 100 \%$.

¹⁸Oppure *a sinistra*, qualora n sia negativo e quindi $-nT$ positivo.

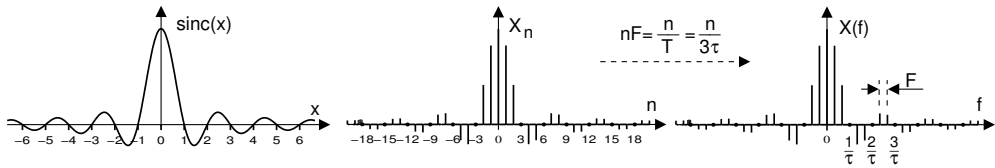


Figura 2.2: Funzione sinc (x) e coefficienti di Fourier dell'onda quadra

noto¹⁹, si ottiene

$$\begin{aligned}
 X_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi nFt} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi nFt} dt = \\
 &= A \frac{1}{T} \frac{e^{-j2\pi nFt}}{-j2\pi nF} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = A \frac{1}{T} \frac{\tau}{\pi nF\tau} \frac{e^{j2\pi nF\frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi nF\frac{\tau}{2}}}{2j} = \\
 &= A \frac{\tau}{T} \frac{\sin(\pi nF\tau)}{\pi nF\tau} = A \frac{\tau}{T} \text{sinc}(nF\tau)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

in cui nella seconda uguaglianza gli estremi di integrazione sono stati ristretti all'intervallo di effettiva esistenza del segnale, mentre la penultima uguaglianza si giustifica ricordando le formule di Eulero.

Il risultato (2.11) ottenuto mostra come i coefficienti X_n della serie di Fourier per l'onda rettangolare dipendano dai valori di $\frac{\sin(\pi nF\tau)}{\pi nF\tau}$ calcolati per n intero; tale espressione viene però rappresentata nei termini della funzione *seno cardinale* (vedi pag. 21)

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \tag{2.12}$$

che ricorre spesso nel testo, che è raffigurata nella parte sinistra di fig. 2.2, e che *passa da zero* per valori *interi* dell'argomento x , tranne che per $x = 0$, dove vale uno.

Nella parte centrale di fig. 2.2 è mostrato l'andamento degli X_n che, qualora si ponga $\tau = \frac{T}{3}$ (corrispondente al duty cycle del 33%) e ricordando che $F = 1/T$, valgono $X_n = \frac{A}{3} \text{sinc}(n/3)$, producendo dunque valori di X_n *nulli* in corrispondenza degli indici $n = 3, 6, 9, \dots$

La parte destra di fig. 2.2 mostra ancora il valore dei coefficienti X_n , ma lungo una scala in *Hertz*, dato che il coefficiente X_n di indice n individua l'ampiezza della componente a frequenza $nF = \frac{n}{T}$ relativa all' n -esima armonica, che per $\tau = \frac{T}{3}$ è pari ad $nF = \frac{n}{T} = \frac{n}{3\tau}$ Hz: quindi i valori di n per cui gli X_n si annullano corrispondono alle frequenze $1/\tau, 2/\tau, 3/\tau, \dots$ e dipendono dalla durata τ del singolo impulso, mentre la spaziatura tra le armoniche è pari ad $F = \frac{1}{T}$ e dipende esclusivamente dal *periodo* della forma d'onda. A partire da tali considerazioni, valutiamo come si modificano i coefficienti X_n al variare di τ e di T .

Relazione tra i coefficienti della serie ed i parametri dell'onda quadra La parte in alto di fig. 2.3 mostra quattro possibili modi di variare l'onda quadra di partenza: la colonna di sinistra rappresenta il caso in cui il periodo T si mantenga costante, mentre

¹⁹Sappiamo infatti che $\frac{\partial}{\partial x} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}$, e quindi $\int_a^b e^{f(x)} dx = 1/\frac{df(x)}{dx} \cdot e^{f(x)} \Big|_a^b$

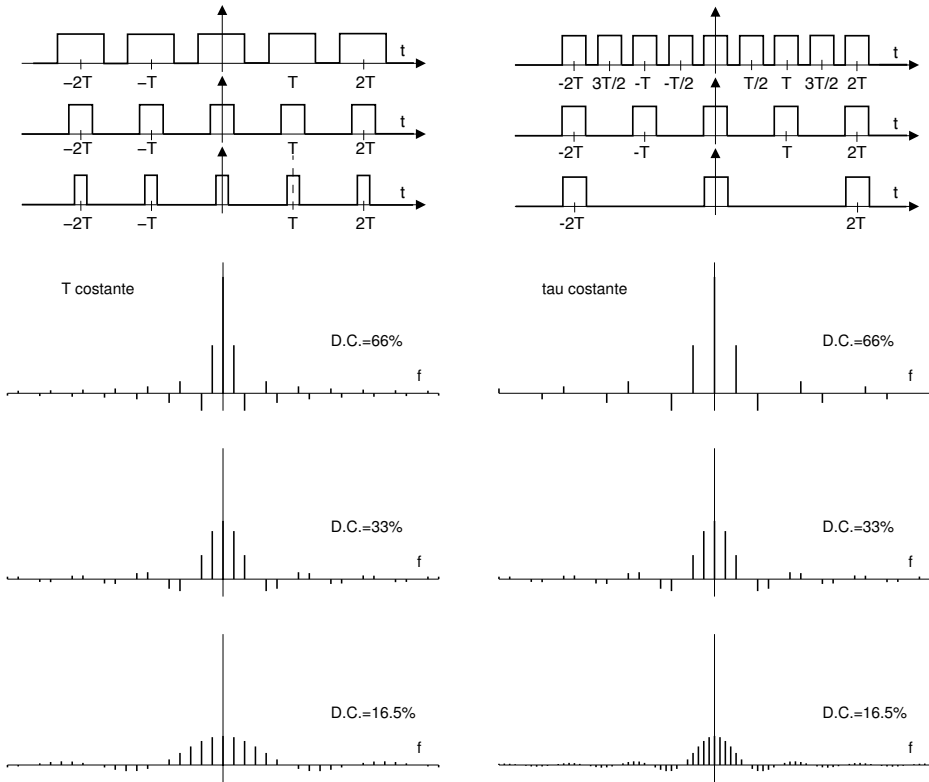


Figura 2.3: Modifiche allo spettro di ampiezza per variazioni della forma d'onda

la durata τ della fase attiva di ogni ciclo *raddoppia* (prima riga) o si *dimezza* (terza riga), mentre la colonna di destra considera il caso in cui τ si mantiene invariato, mentre il periodo T si dimezza o raddoppia in modo da ottenere lo stesso duty cycle $\frac{\tau}{T}$ di sinistra, ovvero pari al 66% (prima riga), 33% (al centro) o 12,5% (terza riga).

La parte inferiore di Fig. 2.3 mostra le corrispondenti variazioni per i valori dei coefficienti dello sviluppo in serie, calcolate facendo uso della (2.11), e raffigurati su di una scala in Hertz. Sul lato sinistro (caso del periodo costante) osserviamo che le armoniche mantengono la stessa spaziatura $\frac{1}{T}$, ma l'involuppo sinc ($nF\tau$) si *contrae* ed *espande* rispettivamente. Il lato destro della figura (caso di τ costante) mostra come sia l'involuppo degli X_n a rimanere costante, mentre le armoniche si *diradano* (sopra) ed *infittiscono* (sotto) rispettivamente all'aumentare ed al diminuire del periodo. Infine, notiamo come al diminuire del duty cycle si assista in entrambi i casi ad una riduzione dell'ampiezza degli X_n , legata alla riduzione di potenza del segnale (vedi sezione 2.3).

2.2.2 Serie di Fourier troncata

Come affermato al § 2.2, la serie di Fourier $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi nFt}$ permette di riottenere esattamente il segnale $x(t)$ a partire da *tutti* i valori X_n ; analizziamo ora cosa accade qualora la sommatoria sia invece *troncata*, ossia limitata ai $2N + 1$ termini

centrati attorno ad $n = 0$, utilizzando cioè solamente i coefficienti X_n con indice $-N \leq n \leq N$. A tal fine, consideriamo un'onda *quadra* con duty-cycle del 50%

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}_{T/2}(t - kT)$$

per la quale al § 2.2.1.4 abbiamo ottenuto l'espressione $X_n = \frac{\tau}{T} \text{sinc}(nF\tau)$ per i relativi coefficienti di Fourier, che per $\tau = \frac{T}{2}$ fornisce $X_n = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$, diverso da zero solo con n *dispari*²⁰. Dalla relazione (2.12) otteniamo che $\frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} n / \pi n$, e possiamo dunque esprimere i coefficienti di Fourier dell'onda quadra come

$$X_0 = \frac{1}{2}; \quad X_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi n} & \text{con } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{con } n \text{ pari} \end{cases}$$

Essendo inoltre $x(t)$ reale pari, sappiamo che $x(t)$ può essere espresso come serie di coseni

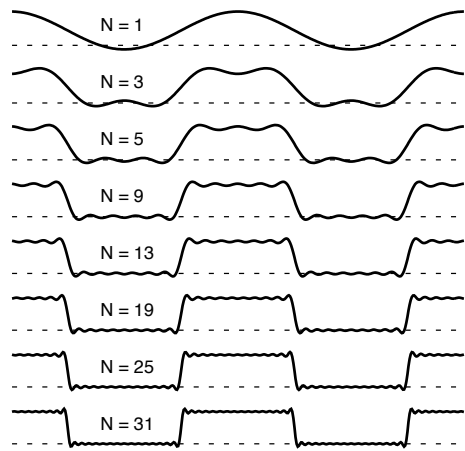
$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2X_n \cos(2\pi nFt)$$

che si presta ad essere facilmente calcolato numericamente e graficato arrestando ad N lo sviluppo in serie

$$\widehat{x}_N(t) = X_0 + \sum_{n=1}^N 2X_n \cos(2\pi nFt)$$

producendo il risultato mostrato in figura per diverse scelte di N .

Come era da aspettarsi al crescere di N la ricostruzione è sempre più accurata, tranne che per le oscillazioni in prossimità della discontinuità, che prendono il nome di *fenomeno di Gibbs*²¹. Da un punto di vista *informale*, accade che l'assenza delle componenti armoniche a frequenza $f = nF$ *più elevata* fa sì che l'errore si localizzi in prossimità degli istanti in cui $x(t)$ varia *più velocemente*. Da un punto di vista *pratico*, il caso studiato è un esempio di cosa può succedere quando un segnale viene privato delle sue componenti a frequenza più elevata, come ad esempio a seguito di un *filtraggio passa-basso*. Da un punto di vista *analitico*, si dimostra che l'errore $e_N(t) = x(t) - \widehat{x}_N(t)$ ha media quadratica $\frac{1}{T} \int e^2(t) dt$ minima, e risulta *ortogonale* (vedi § 2.4) a $\widehat{x}_N(t)$.



2.3 Teorema di Parseval

A pag. 15 abbiamo definito la potenza di un segnale $x(t)$ come il valor medio del suo quadrato, ovvero $\mathcal{P}_x = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |x(t)|^2 dt$, facendo poi osservare come nel caso di segnale periodico decada la necessità del passaggio al limite limitando l'integrale

²⁰Si può mostrare che le armoniche *pari* risultano nulle per *tutti* i segnali periodici *alternativi*, ovvero per i quali (a parte una eventuale componente continua) un semiperiodo eguaglia l'altro, cambiato di segno.

²¹Vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Fenomeno_di_Gibbs

ad un periodo T , ovvero $\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$. Il teorema di Parseval ci fornisce un modo alternativo di ottenere la stessa grandezza a partire dai coefficienti X_n del suo sviluppo in serie, risultando

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \quad (2.13)$$

Per provare che è vero, sviluppiamo i calcoli generalizzandoli al caso di un segnale complesso:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x^*(t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_n X_n e^{j2\pi n Ft} \right] \left[\sum_m X_m^* e^{-j2\pi m Ft} \right] dt = \\ &= \sum_n \sum_m X_n X_m^* \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(n-m)Ft} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n X_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (R_n^2 + I_n^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ortogonalità degli esponenziali complessi Nel passare dalla terza alla quarta riga della (2.14) si è fatto uso del risultato

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(n-m)Ft} dt = \begin{cases} 0 & \text{con } m \neq n \\ 1 & \text{con } m = n \end{cases} \quad (2.15)$$

che deriva dalla circostanza che, ponendo $k = n - m$, la funzione integranda è pari a $\cos(2\pi \frac{k}{T} t) + j \sin(2\pi \frac{k}{T} t)$ e dunque uguale ad 1 quando $k = 0$, e co-sinusoidale con periodo $\frac{T}{k}$ per $k \neq 0$. Mentre quindi per $m = n$ ovvero $k = 0$ l'integrale vale T , quando invece $k \neq 0$ presenta un numero intero k di periodi entro l'intervallo di integrazione T , dando luogo ad un valor medio nullo: ciò comporta la scomparsa dei termini con $m \neq n$ dalla sommatoria doppia in (2.14). In base ai principi di algebra vettoriale forniti al § 2.4, la proprietà appena illustrata viene indicata come *ortogonalità* degli esponenziali complessi.

Spettro di potenza per segnali periodici Tornando ad esaminare il risultato $\mathcal{P}_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$ espresso dal teorema di Parseval, notiamo che $|X_n|^2$ è la potenza \mathcal{P}_n della sola n -esima componente armonica $X_n e^{j2\pi n Ft}$ di $x(t)$:

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [X_n e^{j2\pi n Ft}] [X_n^* e^{-j2\pi n Ft}] dt = \frac{|X_n|^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt = |X_n|^2$$

e quindi

La potenza totale \mathcal{P}_x di un segnale periodico $x(t)$ è pari alla somma delle potenze delle sue componenti armoniche

Si presti attenzione che il risultato è una diretta conseguenza dell'ortogonalità degli esponenziali complessi: infatti la potenza di una somma *non* è in generale pari alla

somma delle potenze²²; l'uguaglianza ha luogo solo nel caso in cui gli addendi siano *ortogonali*.

La successione $\{\mathcal{P}_n\} = \{\dots, |X_{-k}|^2, \dots, |X_0|^2, \dots, |X_k|^2, \dots\}$ rappresenta dunque il modo con cui la potenza totale *si ripartisce* tra le diverse armoniche a frequenza $f = nF$, e prende il nome di *spettro di potenza* del segnale $x(t)$. Osserviamo che necessariamente i termini $\mathcal{P}_n = |X_n|^2$ risultano reali e positivi; inoltre se $x(t)$ è reale la proprietà di simmetria coniugata comporta che $|X_n|^2 = |X_{-n}^*|^2 = |X_{-n}|^2$, e quindi $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{-n}$; pertanto un segnale *reale* è caratterizzato da uno spettro di potenza *pari*.

Esempio Determiniamo lo spettro di potenza di un'onda quadra di ampiezza unitaria. Essendo $X_n = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$, si ottiene $\{\mathcal{P}_n\} = \{|X_n|^2\} = \frac{1}{4} \{\text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)\}$.

Potenza di un coseno Cogliamo l'occasione per verificare il risultato di pag. 15 relativo alla potenza di un coseno di ampiezza A . Applicando il teorema di Parseval ai coefficienti calcolati a pag. 41 si ottiene:

$$\mathcal{P}_x = |X_1|^2 + |X_{-1}|^2 = 2 \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$$

2.4 Spazio dei segnali

Esiste un modo di affrontare l'analisi dei segnali rappresentando gli stessi come elementi di uno *spazio vettoriale*²³, estendendo così ai primi le proprietà algebriche e geometriche valide per i secondi. In questa sezione viene prima sinteticamente rivisitata la teoria degli spazi algebrici per i quali è definito un operatore di prodotto scalare, e quindi individuate le possibili corrispondenze tra le proprietà dei vettori e quelle dei segnali, riuscendo così a realizzare una sintesi unificante in relazione ai concetti di *base di rappresentazione*, *ortogonalità*, e *trasformazione unitaria*. Si accenna infine a come molti degli integrali che sono studiati nel testo (trasformata di Fourier e di Hilbert, convoluzione, correlazione) possano essere ricondotti al calcolo di un *prodotto scalare*, a sua volta associato al concetto di *operatore funzionale*, ossia di funzioni che dipendono da una seconda funzione.

2.4.1 Spazio metrico

Consiste in un insieme \mathcal{A} di elementi (qualunque) per il quale esiste un modo per valutare la *distanza* (o *metrica*) tra elementi, ossia un operatore $d(x, y)$ che associa ad ogni coppia di elementi $x, y \in \mathcal{A}$ un numero *reale*, e per il quale²⁴

²²In generale risulta, con la notazione di prodotto scalare $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ tra vettori-segnali \bar{a} e \bar{b} introdotta al § 2.4: $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$.

²³Uno spazio vettoriale è la generalizzazione del ben noto *spazio euclideo*, i cui elementi sono descritti da una n -pla di numeri reali detto *vettore* $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$, e che estende quello mono-, bi- o tri-dimensionale rispettivamente legato a retta, piano e spazio in senso geometrico. Le quantità x_i costituiscono dunque le *coordinate* di un punto, ovvero dove si colloca *la testa* di un vettore che parte dall'origine, ed individuano *quanto* di quel vettore è dovuto al contributo di ciascuna delle *componenti* associate ai *versori* della base di rappresentazione.

²⁴Vedi anche [https://it.wikipedia.org/wiki/Distanza_\(matematica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Distanza_(matematica)). Un esempio di distanza particolarmente *poco utile*, ma che rispetta le condizioni mostrate, è definita come $d(x, y) =$

- $d(x, y) \geq 0$ nulla solo se $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ - simmetria
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ - disuguaglianza triangolare

La distanza è un concetto *topologico* che permette di definire *l'intorno* di un punto nello spazio.

Spazio completo Identifica uno spazio metrico in cui il limite a cui tende una successione fa parte dell'insieme stesso²⁵. Uno spazio metrico *non* completo è sempre contenuto in uno spazio completo *più grande*, che ne costituisce il completamento, come ad esempio l'insieme dei numeri razionali è contenuto nell'insieme (completo) dei numeri reali, ottenuto dal primo con l'aggiunta dei numeri irrazionali.

2.4.2 Spazio lineare

Un insieme \mathcal{A} di elementi viene detto *spazio lineare* (o *spazio vettoriale*) su di un campo K ²⁶, quando sono definite le operazioni di *somma* tra elementi $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{A}$ e di *moltiplicazione* degli stessi per dei coefficienti $\lambda \in K$, e queste due operazioni danno come risultato ancora un elemento dell'insieme²⁷, in modo che lo spazio acquisisca le proprietà di una *struttura algebrica*. Oltre al caso intuitivo dello *spazio euclideo* \mathbb{R}^n da cui la nozione di spazio trae origine, e quello \mathbb{C}^n i cui vettori sono descritti da elementi complessi, ricadono in questo caso anche lo spazio dei segnali con periodo T , quello dei segnali di energia, e quello dei segnali di potenza.

Base di rappresentazione Scegliendo un *qualsunque* sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ di n vettori \bar{u}_i *linearmente indipendenti*²⁸, la combinazione lineare

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

²⁵La definizione analitica di completezza consiste nell'affermare che tutte le successioni di Cauchy (o successioni fondamentali) sono convergenti, in cui una successione è di Cauchy se, comunque fissato un $\varepsilon > 0$, da un certo punto in poi tutti i suoi elementi sono tra loro più vicini di ε , e dunque la loro distanza tende ad annullarsi; se poi la successione converge *ad un elemento dello spazio stesso*, allora lo spazio è *completo*. Pertanto una successione convergente è di Cauchy, ma non è detto l'inverso. Vedi anche https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_metrico_completo

²⁶ K può essere il campo dei numeri reali \mathbb{R} , o quello dei numeri complessi \mathbb{C} , vedi anche [https://it.wikipedia.org/wiki/Campo_\(matematica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Campo_(matematica)). Qualora il campo sia complesso, anche le componenti del vettore lo sono; d'altra parte, le relazioni sviluppate per il caso complesso continuano a valere anche nel caso di vettori a componenti reali.

²⁷I perfezionisti possono volersi sentir anche dire che deve esistere l'elemento neutro (zero) rispetto alla somma, che quest'ultima deve essere commutativa, associativa, e distributiva rispetto al prodotto, e che ogni elemento \bar{x} deve avere il suo opposto $-\bar{x}$. Vedi anche https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_vettoriale

²⁸L'indipendenza lineare tra vettori comporta che $\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{u}_i = 0$ solo se $\lambda_i = 0$ per tutti gli i .

dei vettori \bar{u}_i con coefficienti $x_i \in K$ esprime un qualunque elemento $\bar{x} \in \mathcal{A}$ purché n sia pari alla *dimensione* dello spazio, ed in tal caso l'insieme \mathcal{B} dei vettori \bar{u}_i è indicato come sua *base di rappresentazione*²⁹.

Spazio normato Individua uno spazio vettoriale per il quale sia definita la *norma* (o *lunghezza*) $\|\bar{x}\|$ dei suoi elementi³⁰. Come si può verificare dalle proprietà che la definiscono

- $0 \leq \|\bar{x}\| < \infty$ con $\|\bar{x}\| = 0$ se e solo se $\bar{x} = 0$
- $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda| \|\bar{x}\|$ omogeneità con $\lambda \in K$
- $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ disuguaglianza triangolare

la norma corrisponde alla definizione di distanza $d(\bar{x}, \bar{y})$ data al § 2.4.1, semplicemente ponendo $d(\bar{x}, \bar{y}) \doteq \|\bar{x} - \bar{y}\|$. In tal modo lo spazio normato oltre che algebrico (perché lineare) diviene anche *metrico*, con una metrica che è *indotta* dalla norma; uno spazio normato che è anche completo è detto *spazio di Banach*³¹.

Norma per spazi euclidei Per uno spazio vettoriale con un numero finito n di dimensioni ed *isomorfo* ad \mathbb{R}^n si può definire norma $\|\bar{x}\|_p$ di ordine p (con $p = 0, 1, \dots, \infty$) del vettore $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ come la quantità

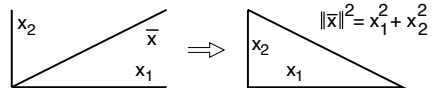
$$\|\bar{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n x_i^p} \quad (2.17)$$

che per $p = 2$ rappresenta una estensione del *teorema di Pitagora*, mentre la distanza di ordine p *indotta* tra coppie di vettori si scrive come

$$d_p(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p} \quad (2.18)$$

che nel caso $p = 2$ fornisce la ben nota *distanza euclidea*³² $d_2(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

Esempio Il teorema di Pitagora stabilisce che $(\|\bar{x}\|)^2 = x_1^2 + x_2^2$, ossia che il quadrato costruito sull'ipotenusa è pari alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, come in figura.



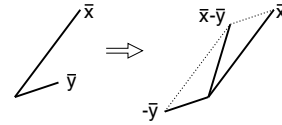
²⁹Per una simulazione bidimensionale si veda ad esempio <https://www.geogebra.org/m/mXkurnd>

³⁰Vedi anche [https://it.wikipedia.org/wiki/Norma_\(matematica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Norma_(matematica))

³¹Vedi anche https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_di_Banach

³²Per altri valori di p si ottengono risultati che hanno senso in particolari circostanze: ad esempio per $p = 1$ si ha $\|\bar{x} - \bar{y}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ detta distanza *Manhattan*, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Geometria_del_taxi, mentre per $p = \infty$ si ottiene $\|\bar{x} - \bar{y}\|_\infty = \max_i \{|x_i - y_i|\}$, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Distanza_di_Cebicev.

La geometria euclidea calcola la distanza tra due punti attraverso la costruzione grafica dei vettori le cui componenti sono le coordinate dei punti come in figura, e dunque $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$ ha componenti $z_1 = x_1 - y_1$ e $z_2 = x_2 - y_2$.



2.4.3 Spazio prodotto interno e spazio di Hilbert

Torniamo ora *indietro* e ripartiamo da un generico spazio lineare definito su di un campo K reale o complesso, per il quale non è definita alcuna norma, mentre invece è definito un operatore detto *prodotto scalare* o prodotto *interno*³³, indicato come $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, e che associa uno scalare $\lambda \in K$ a coppie di generici vettori \bar{x} ed \bar{y} in modo che

- $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle^*$ proprietà *Hermitiana*, ovvero *commutativa* se $K = \mathbb{R}$
- $\langle a\bar{x} + b\bar{y}, \bar{z} \rangle = a \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + b \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$ proprietà *lineare e distributiva*
- $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$ reale, con $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$ se e solo se $\bar{x} = 0$

da cui si ottiene che nel caso complesso deve risultare anche $\langle \bar{x}, a\bar{y} \rangle = a^* \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ detta proprietà *antilineare*³⁴. Osserviamo quindi che la relazione $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$ può essere efficacemente utilizzata come *norma* di \bar{x} , semplicemente ponendo³⁵

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \quad (2.19)$$

senza dover ricorrere a *definizioni* come per la (2.17). L'esistenza del prodotto interno pertanto *induce* una norma (e dunque una *distanza*) rendendo *metrico* lo spazio lineare, che viene detto di *Hilbert* qualora sia anche *completo*³⁶; inoltre, il prodotto interno aggiunge allo spazio anche la nozione di *angolo* θ tra vettori, come discutiamo ora.

Disuguaglianza di Schwartz Esprime la relazione³⁷

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|^2 \leq \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \cdot \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle \quad (2.20)$$

³³In genere il termine *prodotto interno* si riferisce al caso in cui lo spazio sia di natura *complessa*, mentre si dice *prodotto scalare* qualora sia definito sul campo dei numeri reali. Nel seguito potrà essere usato *prodotto scalare* anche nel caso complesso.

³⁴Infatti risulta $\langle \bar{x}, a\bar{y} \rangle = \langle a\bar{y}, \bar{x} \rangle^* = (a \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle)^* = a^* \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle^* = a^* \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$

³⁵Le proprietà $0 \leq \|\bar{x}\| < \infty$ e $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda| \|\bar{x}\|$ che definiscono una norma sono facilmente verificate, mentre per dimostrare che $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ ovvero $\sqrt{\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle} \leq \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} + \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle}$ occorre utilizzare il risultato (2.20). Scriviamo infatti

$$\begin{aligned} \langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle &= \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + 2\Re \{ \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \} + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \\ &= \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2 \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| = (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2 \end{aligned}$$

in quanto $\Re \{ \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \} \leq |\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$ dove la seconda disuguaglianza è appunto la (2.20). Dunque, dato che in base alla (2.19) si ha $\|\bar{x} + \bar{y}\| = \sqrt{\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle}$, si ottiene $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$.

³⁶Ogni spazio di Hilbert è quindi anche di Banach, ma il viceversa è vero solo se la metrica è indotta da un operatore di prodotto interno, che rispetti le proprietà su indicate; vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_di_Hilbert

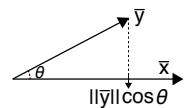
³⁷Innanzitutto osserviamo che deve risultare $\bar{x}, \bar{y} \neq 0$, altrimenti la (2.20) è banalmente $0 = 0$. Appliciamo quindi la relazione $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$ ad un vettore $\bar{x} - \lambda\bar{y}$ con un qualunque $\lambda \in K$ (sia per $K = \mathbb{R}$ che

ovvero $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$, e quindi afferma che il prodotto interno tra vettori non è mai maggiore del prodotto delle rispettive lunghezze, eguagliandolo solo se i vettori sono proporzionali, ossia $\bar{x} = \alpha \bar{y}$ ³⁸, o in termini geometrici, *paralleli*.

Angolo tra vettori Dopo aver notato che dalla (2.20) si ottiene $0 \leq \frac{|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|} \leq 1$, indichiamo i due estremi 0 e 1 come condizioni di *ortogonalità* e *parallelismo*, e dato che esiste un solo angolo θ tale che $\cos \theta = \frac{|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$, identifichiamo θ come l'angolo³⁹ tra \bar{x} e \bar{y} , in modo che la (2.20) possa essere letta nel consueto modo della fisica e della geometria, ovvero

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \cdot \cos \theta \quad (2.21)$$

dove $\|\bar{y}\| \cdot \cos \theta$ rappresenta la proiezione di $\|\bar{y}\|$ verso la direzione di \bar{x} . A parole, l'eq. (2.21) si legge come *il prodotto scalare è pari al prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso tra i vettori*, e grazie a questo nuovo risultato, possiamo affermare che



Due vettori si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo, ossia $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$.

Procediamo con l'individuare una *modalità di calcolo* per il prodotto scalare, restringendo per ora l'analisi al caso di spazi a dimensione n finita e *isomorfi* (in quanto con base ortogonale) ad uno spazio euclideo \mathbb{R}^n , ovvero \mathbb{C}^n nel caso più generale di vettori a componenti complesse.

Prodotto scalare tra vettori espressi su di una medesima base ortogonale Come espresso dalla (2.16) i vettori \bar{x} di uno spazio lineare n -dimensionale \mathcal{A} , tanto più se di Hilbert, possono essere espressi come una combinazione lineare

per $K = \mathbb{C}$, scrivendo

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\bar{x} - \lambda \bar{y}\|^2 &= \langle \bar{x} - \lambda \bar{y}, \bar{x} - \lambda \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - \langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle - \langle \lambda \bar{y}, \bar{x} \rangle + \lambda^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \\ &= \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - \langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle - \langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle^* + \lambda^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - 2\Re \{ \langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle \} + \lambda^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle \end{aligned}$$

Ponendo ora $\lambda = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle}$ e tenendo conto che $\langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle = \lambda^* \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ e che $\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle$ è reale, otteniamo

$$0 \leq \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - 2\Re \left\{ \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^*}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \right\} + \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle^2} \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - 2 \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} + \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle}$$

da cui si ottiene la (2.20). Approfondimenti su

https://it.wikipedia.org/wiki/Disuguaglianza_di_Cauchy-Schwarz.

³⁸Infatti in tal caso la (2.20) diviene

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| = |\langle \alpha \bar{y}, \bar{y} \rangle| = |\alpha \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle| = \left| \alpha \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} \right| = \sqrt{\alpha^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$

dato che $\alpha^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \alpha \alpha^* \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \langle \alpha \bar{y}, \alpha \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle$.

³⁹Come fatto notare si ottiene $\cos \theta = 1$ quando \bar{x} e \bar{y} sono paralleli per cui la (2.20) è un'uguaglianza. Dal canto suo $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ è un numero (complesso o reale a seconda se $K = \mathbb{C}$ o \mathbb{R}), e dunque l'operazione di modulo $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|$ limita il risultato a $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Quindi θ è un angolo *un po' per modo di dire*; ciononostante, il concetto di parallelismo e ortogonalità che ne deriva è molto utile.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i$$

di vettori $\bar{u}_i \in \mathcal{B}$ linearmente indipendenti, ovvero \mathcal{B} è la base di rappresentazione di \mathcal{A} mediante coefficienti $\{x_i\}$. Se ora aggiungiamo che tra gli elementi di \mathcal{B} debba sussistere la condizione di ortogonalità a coppie, ovvero $\langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = 0$ per tutti gli $i \neq j$, l'intera base è detta *ortonormale*, ed i coefficienti x_i si determinano⁴⁰ eseguendo il prodotto scalare tra \bar{x} ed ognuno di essi

$$x_i = \frac{\langle \bar{x}, \bar{u}_i \rangle}{\|\bar{u}_i\|^2} \quad (2.22)$$

Possiamo a questo punto valutare il *prodotto scalare* tra coppie di vettori $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i$ e $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i \bar{u}_i$ con coefficienti $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ ottenuti mediante la (2.22), nei termini del prodotto scalare tra i vettori dei coefficienti, ovvero:⁴¹

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \|\bar{u}_i\|^2 \quad (2.23)$$

Calcolo della norma su di una base ortonormale Se i vettori \bar{u}_i oltre ad essere ortogonali hanno tutti norma pari ad uno ovvero $\|\bar{u}_i\|^2 = \langle \bar{u}_i, \bar{u}_i \rangle = 1$ essi vengono detti *unitari*, la base è detta *ortonormale*⁴², e dalla (2.23) si ottiene per il prodotto scalare tra \bar{x} e \bar{y}

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \quad (2.24)$$

mentre la norma *quadratica* di un generico vettore \bar{x} si ottiene come

$$\|\bar{x}\|^2 = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i x_i^* = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \quad (2.25)$$

che corrisponde al quadrato della (2.17) per $p = 2$. Quindi, quando la base \mathcal{B} di rappresentazione è ortonormale, ed il prodotto interno è definito dalla (2.24), la norma indotta (2.25) assume la stessa forma della (2.17) corrispondente all'ordine $p = 2$, accomunando il comportamento degli spazi di Hilbert a quello noto per la geometria euclidea, in cui la base è appunto ortonormale.

Una forma più generale per indicare sia l'ortogonalità che l'unitarietà utilizza la notazione $\langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = \delta_{i,j}$, in cui $\delta_{i,j}$ è detto *delta di Kronecker* che vale 1 se $i = j$ e zero in caso contrario. La sua versione continua è il *delta di Dirac*, introdotto al § 3.4.

⁴⁰E sufficiente eseguire il prodotto scalare di ambo i membri di $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i$ per ciascuno dei vettori \bar{u}_j per ottenere $\langle \bar{x}, \bar{u}_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = x_j \langle \bar{u}_j, \bar{u}_j \rangle = x_j \|\bar{u}_j\|^2$ dato che $\langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ e che $\langle \bar{u}_j, \bar{u}_j \rangle = \|\bar{u}_j\|^2$.

⁴¹Scriviamo infatti $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i, \sum_{j=1}^n y_j \bar{u}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i \bar{u}_i, y_j \bar{u}_j \rangle$ ma, essendo \bar{u}_i e \bar{u}_j ortogonali la doppia sommatoria si riduce ad una sola, ovvero $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i \bar{u}_i, y_i \bar{u}_i \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \|\bar{u}_i\|^2$.

⁴²Da una qualsiasi base ortogonale se ne può ottenere una diversa ma con elementi di norma unitaria, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Base_ortonormale

Notiamo infine come il prodotto scalare $\langle \bar{x}, \bar{u}_i \rangle$ tra \bar{x} ed un vettore della base ortonormale sia una *proiezione ortogonale*, nel senso che potendo scrivere $\langle \bar{x}, \bar{u}_i \rangle = |x| \cdot |\bar{u}_i| \cdot \cos \theta$ (eq. (2.21)) ed essendo \bar{u}_i a lunghezza unitaria, si ottiene la lunghezza dell'ombra del primo nella direzione del secondo.

Distanza indotta dal prodotto scalare Si esprime come la *norma del vettore differenza* ovvero applicando la (2.25)

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\|\bar{x} - \bar{y}\|^2} = \sqrt{\langle \bar{x} - \bar{y}, \bar{x} - \bar{y} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

che a sua volta corrisponde a quella di ordine $p = 2$ che abbiamo definito per gli spazi euclidei (eq. (2.18)); si ricordi che nel caso di vettori complessi risulta $|x_i - y_i|^2 = (x_i - y_i)(x_i - y_i)^* = (\Re\{x_i - y_i\})^2 + (\Im\{x_i - y_i\})^2$.

Esercizio Dati due vettori complessi $\bar{x} = [1 + j2, 0]$ e $\bar{y} = [3 + j4, -j2]$ calcolare la norma di entrambi, e la loro distanza. Si ha $\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} = \sqrt{(1^2 + 2^2) + 0^2} = \sqrt{5}$ e $\|\bar{y}\| = \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} = \sqrt{(3^2 + 4^2) + 2^2} = \sqrt{29}$; mentre $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = [1 + j2 - 3 - j4, 0 + j2] = [-2 - j2, j2]$ e dunque $d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(2^2 + 2^2) + 2^2} = \sqrt{12}$.

2.4.4 Spazi a dimensionalità infinita

I risultati a cui siamo pervenuti, e che sono stati dimostrati per spazi con un numero n finito di dimensioni, mantengono validità anche qualora detto numero divenga infinito, come per gli spazi dei segnali periodici o di energia.

Un esempio di spazio con infinite (ma *numerabili*) dimensioni è quello indicato come l^p e descritto da un vettore le cui componenti sono elementi di una *successione* $\bar{x} = \{x_i\}$ con $i = 1, 2, \dots, \infty$, e per le quali la norma $\|\bar{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}$ converge ad un numero finito. La successione X_n dei coefficienti di una serie di Fourier rispecchia tale proprietà per $p = 2$, e la corrispondente norma quadratica $(\|\bar{x}\|_2)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |X_n^2|$ esprime⁴³ la potenza di \bar{x} nei termini del teorema di Parseval.

Un altro spazio ad infinite dimensioni (stavolta *non numerabili*) è quello L^p delle *funzioni* $\bar{x} = x(t)$ la cui p -esima potenza è sommabile⁴⁴; la norma di ordine p in questo caso viene definita come $\|x(t)\|_p = (\int x^p(t) dt)^{1/p}$ e per $p = 2$ ritroviamo la classe dei *segnali di energia*, alla cui energia corrisponde la *norma quadratica* $\mathcal{E}_x = (\|x(t)\|_2)^2 = \int x^2(t) dt$, mentre la distanza $d_2(x(t), y(t))$ tra segnali è la radice dell'errore quadratico $\int |x(t) - y(t)|^2 dt$.

Anche se non ci addentreremo nei dettagli analitici soggiacenti, il tipo di equivalenze appena menzionate sono una conseguenza dell'adattare la definizione di prodotto

⁴³A chi si sta chiedendo dove siano finiti gli indici *negativi*, rispondo che gli indici sono stati *riorganizzati* alterandone la numerazione, tanto rimangono comunque di una infinità numerabile.

⁴⁴La L usata per definire tali insiemi sta per *Lebesgue*, legata cioè al modo di calcolare l'integrale che prende nome da tale matematico, e che assegna uguale valore all'integrale di due funzioni che differiscono in un insieme di punti *a misura nulla*, dette funzioni *uguali quasi ovunque*, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Integrale_di_Lebesgue e https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_Lp

scalare (2.24) ai casi a dimensionalità infinita, rendendo possibile associare alle relazioni ottenibili una interpretazione geometrica unificante.

2.4.4.1 Spazio dei segnali periodici

È quello descritto dall'insieme dei segnali periodici di periodo T , dato che può essere dotato di un operatore di prodotto interno tra segnali $x(t)$ ed $y(t)$ nella forma

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt \quad (2.26)$$

che quando calcolato per $y(t) = x(t)$ permette di equiparare la *norma quadratica* di $x(t)$ alla relativa *potenza*

$$\|x(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

e dunque la sua norma corrisponde al relativo *valore efficace* (pag. 15). Osserviamo che

- la base ortonormale di rappresentazione dei segnali periodici è costituita dai segnali $u_n = e^{j2\pi n F t}$ con periodo $T = \frac{1}{F}$, in quanto per essi si ha $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(n-m)Ft} dt = \delta_{n,m}$ come ottenuto nella (2.15). Si riconosce allora che la relazione eq. (2.6) rappresenta il prodotto scalare tra il segnale ed i vettori della base (2.22), dato che dalla (2.26) si ottiene⁴⁵ $\langle \bar{x}, \bar{u}_n \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt = X_n$;
- l'espressione della serie di Fourier $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$ (eq. (2.7)) costituisce la rappresentazione del segnale nei termini delle sue componenti ortogonali su base ortonormale, come espresso dalla (2.16);
- il risultato fornito dal teorema di Parseval $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$ (eq. (2.13)) non è altro che la (2.25), ovvero il calcolo della norma quadratica come somma dei quadrati delle componenti X_n di $x(t)$ rispetto ai vettori $e^{j2\pi n F t}$ della base.

La differenza rispetto alla trattazione generale è che ora per descrivere lo spazio occorrono *infiniti* (ma numerabili) vettori della base; in tal senso, lo spazio (dei segnali con periodo T) è detto *separabile*, che nel contesto della teoria dei segnali significa che è costituito dalle sole frequenze *armoniche* della fondamentale.

Una seconda conseguenza dell'ortogonalità della base costituita dagli $e^{j2\pi n F t}$ è che qualora dalla serie venga ommesso qualche termine (ovvero qualche indice n) ottenendo un diverso segnale $\hat{x}(t) = \sum_{incompleta} X_n e^{j2\pi n F t}$, il corrispondente errore $x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, periodico anch'esso, giace su di un *sottospazio ortogonale* a quello esplorato dai vettori presenti nella serie, e (si dimostra che) ha la minima norma, e dunque potenza, possibile.

⁴⁵Ad esempio, la componente continua $X_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j0} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$ rappresenta il prodotto scalare tra $x(t)$ ed un segnale costante pari ad uno.

2.4.4.2 Spazio dei segnali di energia e di potenza

Definizione del prodotto interno Anche in questi due casi è possibile definire un operatore prodotto interno, che per segnali di energia prende la forma

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \quad (2.27)$$

a cui corrisponde una *norma quadratica* $\|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$ pari all'energia del segnale $\mathcal{E}_x = \|x(t)\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$. Per segnali di potenza invece il prodotto scalare si scrive come

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt \quad (2.28)$$

a cui corrisponde una *norma quadratica* che è pari alla potenza del segnale $\mathcal{P}_x = \|x(t)\|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$.

Disuguaglianza di Schwartz La (2.20) può essere applicata sia ai segnali di energia che a quelli di potenza, in quanto le relative espressioni per il prodotto interno, quando sostituite nella (2.20), permettono di scrivere (nel caso di energia)

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \quad (2.29)$$

ovvero che il quadrato del prodotto scalare (ovvero dell'energia mutua, § 3.2) tra segnali è sempre inferiore al prodotto delle rispettive energie (o potenze), oppure uguale nel caso in cui un segnale sia proporzionale all'altro, ovvero $x(t) = a y(t)$. Per il caso dei segnali di potenza valgono le stesse parole, dopo aver sostituito la (2.29) con

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt \right|^2 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |y(t)|^2 dt$$

Questi concetti troveranno applicazione ad es. al § 3.2 relativamente all'energia mutua, al § 7.1.4 nel definire la correlazione tra segnali, al § 7.6 per l'analisi del filtro adattato... Ma lanciamoci prima su di una ulteriore speculazione, di cui tralasciamo il rigore teorico: buona parte delle relazioni affrontate nella prima parte del testo sono una forma di prodotto interno.

2.4.4.3 Spazio dei funzionali lineari definiti da un prodotto interno

Al § 1.6 si è definito un sistema come una trasformazione $\mathcal{T}[\cdot]$ che produce segnali di uscita in funzione di segnali di ingresso ovvero $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$. Dal punto di vista dell'analisi $\mathcal{T}[\cdot]$ viene pensato come un operatore o funzionale⁴⁶ lineare (eq. (1.3)) che mappa i vettori \bar{x} dello spazio \mathcal{X} dei segnali di ingresso, in elementi \bar{y} di uno spazio \mathcal{Y} di segnali di uscita, eventualmente monodimensionale.

Qualora \mathcal{X} sia uno spazio di Hilbert (ossia completo e dotato di prodotto interno), allora qualunque funzionale $\mathcal{T}_\varphi[\bar{x}]$ può essere espresso nella forma di un prodotto interno

⁴⁶Vedi anche https://it.wikipedia.org/wiki/Analisi_funzionale

$$\mathcal{T}_{\bar{\varphi}}[\bar{x}] = \langle \bar{x}, \bar{\varphi} \rangle \quad (2.30)$$

tra il vettore $\bar{x} \in \mathcal{X}$ ed un altro vettore-segnale $\bar{\varphi}$ che caratterizza la trasformazione. La funzione $\bar{\varphi}$ è talvolta chiamata⁴⁷ la *funzione-kernel*, il *kernel integrale* o il *nucleo* di una trasformazione integrale, ma non in questo testo.

Se anche $\bar{\varphi} \in \mathcal{X}$ l'operatore (2.30) può fornire alcuni risultati ben noti discussi altrove nel testo. Ad esempio se $\bar{\varphi} = \bar{x}$ le espressioni per il prodotto scalare dei segnali (2.27) e (2.28) consentono di ottenere l'energia o la potenza di segnale \bar{x} ; in modo simile, se $\bar{\varphi} \neq \bar{x}$ si ottengono le formule per l'*energia mutua* (3.5) e l'*intercorrelazione* (7.6). Nell'intercorrelazione in particolare il vettore $\bar{\varphi}$ che caratterizza il funzionale dipende da *due* variabili $\bar{\varphi} = \varphi(t, \theta)$, in modo che il risultato del prodotto interno

$$\langle x(t), \varphi(t, \theta) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi^*(t, \theta) dt = y(\theta)$$

dipenda dalla nuova variabile θ . Dato che stiamo portando esempi che rimandano ad argomenti trattati nei capitoli successivi, può essere opportuno tornare qui dopo aver svolto una prima fase di studio, almeno fino al cap. 7.

Prendiamo ora ad esempio il caso della *trasformata di Fourier* (3.1), che calcola

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \langle x(t), e^{j2\pi ft} \rangle$$

e che costituisce dunque la proiezione di $x(t)$ nei confronti del segnale $e^{j2\pi ft}$, che a sua volta rappresenta il vettore $\varphi(t, f)$. A ben guardare, gli esponenziali complessi costituiscono una base *ortonormale* per i segnali di energia (§ 3.8.5), condizione che in questo spazio è definita come

$$\langle \varphi(t, f), \varphi(t, \lambda) \rangle = \delta(f - \lambda)$$

in cui δ è un *impulso di Dirac*. Da questa proprietà degli $e^{j2\pi ft}$ discende sia l'esistenza della *antitrasformata* nella forma (3.2), sia la proprietà di *unitarietà*⁴⁸ della trasformazione, ovvero di non alterare la lunghezza dei vettori nel passare dagli elementi dello spazio di segnale \mathcal{X} (funzione di t) a quelli dello spazio immagine \mathcal{Y} (funzione di f), e che dà luogo al teorema di Parseval.

In alcuni casi il vettore $\underline{\varphi}$ che caratterizza il funzionale (2.30) dipende da una *differenza* di variabili, ovvero

$$\varphi(t, \tau) = \varphi(t - \tau)$$

come nell'operazione di *setacciamento* (3.14), di *trasformata di Hilbert* (11.26), o di *convoluzione* (3.18): in quest'ultimo caso $\varphi(t, \tau) = h(t - \tau)$ è direttamente legato alla *risposta impulsiva* $h(t)$ che caratterizza completamente il *sistema*.

Se aver verificato che una convoluzione è dunque un *filtro* corrisponde ad un prodotto scalare e quindi ad un funzionale ovvero un *sistema* non ci è bastato, allarghiamo il discorso aggiungendo il fatto che l'insieme dei funzionali $\mathcal{T}_{\bar{\varphi}}$ che operano su di un medesimo spazio di Hilbert \mathcal{X} di ingresso costituisce *esso stesso* uno spazio di Hilbert,

⁴⁷Vedi ad esempio https://en.wikipedia.org/wiki/Integral_transform

⁴⁸Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Unitary_operator

detto *spazio duale*⁴⁹ \mathcal{X}^* , in cui la norma è definita come

$$\|\mathcal{T}_\varphi\| = \|\bar{\varphi}\| = \sqrt{\langle \bar{\varphi}, \bar{\varphi} \rangle}$$

e se $\|\bar{\varphi}\| < \infty$ il funzionale è *continuo*. Se inoltre \mathcal{X} possiede una base *ortonormale* $\{u_i(t)\}$ mediante la quale rappresentare i suoi vettori come $x(t) = \sum_{i=1}^n x_i u_i(t)$ in cui $x_i = \langle x(t), u_i(t) \rangle$, allora i funzionali di \mathcal{X}^* possono *a loro volta* essere rappresentati come una combinazione lineare di vettori-segnali.

Un modo diretto di procedere esprime il *segnale di uscita* $y(\theta) = \mathcal{T}_{\varphi, \theta}[x(t)]$ come

$$y(\theta) = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{T}_{\varphi, \theta}[u_i(t)] = \sum_{i=1}^n x_i v_i(\theta)$$

in cui⁵⁰ $v_i(\theta)$ è il risultato del funzionale \mathcal{T}_φ applicato ai vettori della base $u_i(t)$ di \mathcal{X} , che dunque opera sommando i suoi *vettori di risposta* $v_i(\theta)$ (che appartengono a \mathcal{Y}) con pesi pari alle componenti x_i di $x(t)$ *proiettate* sugli $u_i(t)$.

Esempio L'integrale di convoluzione $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$ esprime l'uscita $y(t)$ come combinazione lineare delle $h(t-\tau)$ effetto degli impulsi $\delta(t)$, che costituiscono una base ortonormale per $x(t)$ nei termini espressi dalla proprietà di setacciamento $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$, vedi § 3.4.

Non è però detto che $\{v_i(\theta)\}$ formi una base di vettori linearmente indipendenti per lo spazio di uscita \mathcal{Y} ; poniamo allora di conoscere una base ortonormale $\{\tilde{u}_i(\theta)\}$ per lo spazio \mathcal{Y} ⁽⁵¹⁾: in tal caso esiste un insieme di n vettori $\{z_i(t) \in \mathcal{X}\}$ che dipende sia da $\{\tilde{u}_i(\theta)\}$ che da $\{u_i(t)\}$ e dalla sua trasformata $\{v_i(\theta)\}$ ⁽⁵²⁾, e che individua altrettanti funzionali $\mathcal{T}_{z_i}[x(t)] = \langle x(t), z_i(t) \rangle$ in modo da poter scrivere

$$y(\theta) = \sum_{i=1}^n \langle x(t), z_i(t) \rangle \tilde{u}_i(\theta) = \sum_{i=1}^n \mathcal{T}_{z_i}[x(t)] \tilde{u}_i(\theta)$$

decomponendo quindi \mathcal{T}_φ in n funzionali dipendenti dalla scelta delle basi.

2.5 Appendici

Nei diversi capitoli la sezione di appendice ospita dettagli che possono meritare una attenzione particolare.

⁴⁹Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_duale

⁵⁰Infatti $v_i(\theta) = \mathcal{T}_{\varphi, \theta}[u_i(t)] = \langle u_i(t), \varphi(t, \theta) \rangle$. Ma è anche vero che $\langle u_i(t), \varphi(t, \theta) \rangle = \langle \varphi(t, \theta), u_i(t) \rangle^* = (\mathcal{T}_{u_i}[\varphi(t)])^*$ e dunque i segnali $v_i(\theta)$ sono anche coniugati alla proiezione di $\varphi(t)$ lungo il vettore della base $u_i(t)$.

⁵¹E dunque poter esprimere ogni suo vettore come $y(\theta) = \sum_{i=1}^n y_i \tilde{u}_i(\theta)$ in cui $y_i = \langle y(\theta), \tilde{u}_i(\theta) \rangle$ è la proiezione di $y(\theta)$ lungo $\tilde{u}_i(\theta)$.

⁵²La relazione che lega $z_j(t)$ alle altre grandezze dovrebbe risultare $z_j(t) = \sum_{i=1}^n \langle \tilde{u}_j(\theta), v_i(\theta) \rangle u_i(t)$, ma il testo *Signal Theory* di L.E. Franks che ho utilizzato per questa parte forse ha saltato qualche passaggio, o non ho avuto la pazienza di ricostruirli.

2.5.1 Convergenza della serie di Fourier

Illustriamo le condizioni *sufficienti* a garantire la convergenza della serie di Fourier (2.7), per ogni istante t , al segnale periodico $x(t)$ di partenza.

Condizioni di Dirichlet Qualora un segnale periodico $x(t)$, per t interno all'intervallo di un periodo $t \in (-T/2, T/2)$,

1. sia assolutamente integrabile, ovvero $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty$;
2. presenti un numero finito di discontinuità di prima specie⁵³, ovvero sia continuo a tratti;
3. contenga un numero finito di massimi e minimi, ovvero sia derivabile ovunque, esclusi al più un numero finito di punti in cui la derivata presenta discontinuità di prima specie;

allora la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$ eguaglia il valore $x(t)$ del segnale utilizzato per calcolarne i coefficienti $X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt$ in tutti i punti in cui $x(t)$ è continuo, mentre negli istanti di discontinuità di prima specie, fornisce un valore pari alla media dei valori limite destro e sinistro. Tali condizioni si applicano direttamente ai segnali $x(t)$ reali, mentre nel caso di segnali complessi, si applicano in modo indipendente alla parte reale ed a quella immaginaria. Inoltre le condizioni sono sufficienti e non necessarie, nel senso che anche se lo sviluppo di un segnale in serie di Fourier converge, non è detto che lo stesso soddisfi tali condizioni.

Nella pratica, i segnali che rappresentano fenomeni fisici sono *di energia*, cioè per essi si può assumere sempre verificata la condizione $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$, più debole della condizione $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty$, ma ciononostante quasi sempre è possibile ottenere lo sviluppo in serie; inoltre, tali segnali sono in pratica sempre continui, rendendo verificata la seconda condizione. Infine, nel caso ad esempio di un'onda triangolare (vedi § 2.5.3), la derivata soddisfa anche la terza condizione.

Rapidità di convergenza Svolgiamo ora qualche riflessione in merito alla velocità con cui i coefficienti X_n tendono a zero per $n \rightarrow \infty$. Si può mostrare che se un segnale soddisfa le condizioni di Dirichlet, allora le ampiezze dei relativi coefficienti di Fourier rispettano l'andamento $|X_n| \leq \frac{\alpha}{n}$, ovvero le armoniche presentano ampiezze che si riducono con legge *almeno* inversa del corrispondente ordine. Un caso in cui vale l'uguaglianza è quello relativo all'onda quadra studiata al § 2.2.1.4, in cui sono presenti discontinuità di prima specie. Al contrario, per un'onda triangolare (§ 2.5.3) la velocità di smorzamento delle ampiezze è maggiore, risultando infatti del tipo $|X_n| = \frac{\alpha}{n^2}$. Ciò significa che volendo approssimare il segnale troncando la serie ad un indice N , nel caso di un'onda triangolare la potenza dell'errore sarà molto minore, a parità di N , di quella osservabile per l'onda quadra. In generale, si può affermare che se la k -esima derivata di un segnale soddisfa le condizioni di Dirichlet, allora i corrispondenti coefficienti della serie vanno a zero con legge $|X_n| \leq \frac{\alpha}{n^{k+1}}$. Ciò in pratica significa che più un

⁵³Vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Punto_di_discontinuità.

segnale ha un andamento *dolce*, e minore sarà il suo contenuto armonico. Il caso limite è rappresentato dalla sinusoidale, alla quale è associata una unica armonica (la fondamentale), e difatti per essa tutte le derivate sono continue essendo, come noto, sinusoidi anch'esse.

2.5.2 Ri-definizione dei coefficienti di Fourier

Moltiplicando il segnale periodico per $e^{-j2\pi mFt}$ ed eseguendo l'integrale tra due istanti t_1 e t_2 presi a distanza di un multiplo intero di periodi (ossia $t_2 - t_1 = kT$), si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-j2\pi mFt} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi nFt} \right) e^{-j2\pi mFt} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \int_{t_1}^{t_2} e^{j2\pi(n-m)Ft} dt = (t_2 - t_1) \cdot X_m \end{aligned}$$

in quanto per $n \neq m$ la funzione integranda ha valor medio nullo, dato che nell'intervallo (t_1, t_2) (dovunque collocato dell'asse dei tempi) presenta un numero intero di periodi. Pertanto, il valore dei coefficienti della serie di Fourier può essere ottenuto a partire da un qualunque intervallo $[t_1, t_2]$ esteso su un numero intero di periodi ($t_2 - t_1 = mT$ con m intero):

$$X_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-j2\pi nFt} dt$$

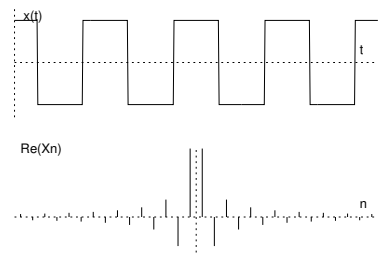
2.5.3 Sviluppo in serie per alcuni segnali

Nello schema che segue sono mostrate le ampiezze delle componenti armoniche X_n per alcuni segnali periodici di periodo T , di cui è fornita l'espressione nel tempo per $|t| < T/2$.

Onda quadra simmetrica

$$x(t) = \begin{cases} +1 & |t| < T/4 \\ -1 & T/4 \leq |t| < T/2 \end{cases}$$

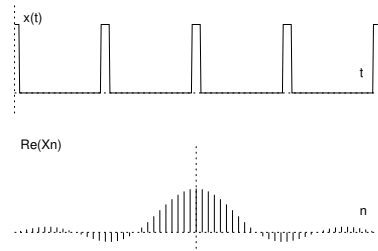
$$X_n = \begin{cases} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$



Treno di impulsi rettangolari

$$x(t) = \begin{cases} +1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & \tau/2 \leq |t| < T/2 \end{cases}$$

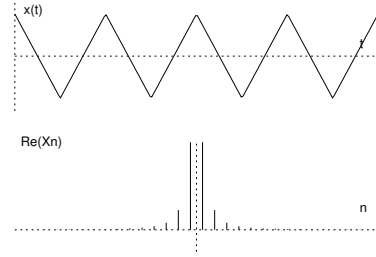
$$X_n = \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T}\right)$$



Onda triangolare simmetrica

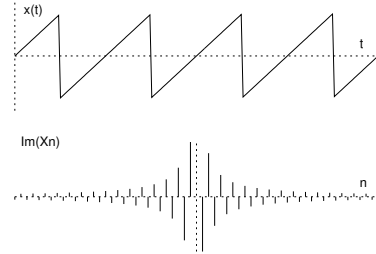
$$x(t) = 1 - 4\frac{|t|}{T} \quad |t| < T/2$$

$$X_n = \begin{cases} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

**Dente di sega simmetrico**

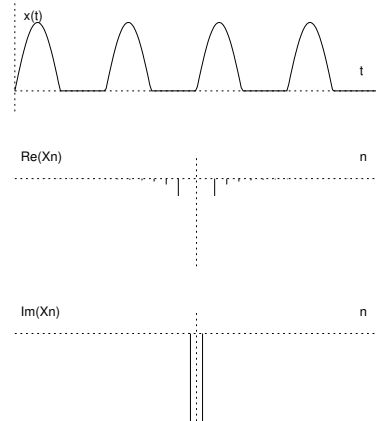
$$x(t) = 2\frac{t}{T} \quad |t| < T/2$$

$$X_n = \begin{cases} j\frac{(-1)^n}{n\pi} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

**Rettificata a singola semionda**

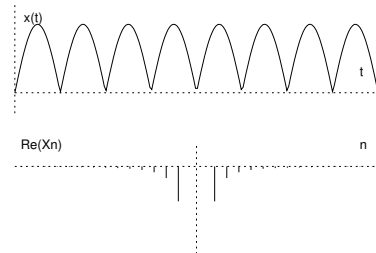
$$x(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t & 0 \leq t < T/2 \\ 0 & -T/2 \leq t < 0 \end{cases}$$

$$X_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi(1-n^2)} & n \text{ pari} \\ -j\frac{1}{4} & n = \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Rettificata a onda intera**

$$x(t) = |\sin \omega_0 t|$$

$$X_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1-n^2)} & n \text{ pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

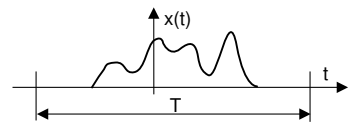


Trasformata di Fourier e convoluzione

SPECIALIZZA al caso di segnali aperiodici l'analisi in frequenza introdotta al § 2.2 per segnali periodici, dando ora luogo ad uno *spettro continuo*. Dopo l'estensione del teorema di Parseval e la definizione di *densità di energia* ed *energia mutua*, il capitolo procede investigando prima le proprietà della trasformata di Fourier, e quindi definendo l'impulso $\delta(t)$ (o delta di Dirac) e le sue applicazioni come la *risposta impulsiva* di un filtro e *l'integrale di convoluzione*. Si passa quindi ad illustrare l'equivalenza tra convoluzione e prodotto nel dominio trasformato, con le relative conseguenze sul *filtraggio*, la *modulazione* e la *finestratura*. Dopo aver discusso del risultato della trasformata di derivata ed integrale di un segnale, viene definito il *treno di impulsi*, subito applicato per estendere la trasformata di Fourier anche al caso di segnali periodici.

3.1 Dalla serie alla trasformata

A pag. 39 abbiamo osservato come lo sviluppo in serie di Fourier possa essere applicato ad un segnale *limitato nel tempo*, con il risultato che la formula di ricostruzione $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$ in tal caso rende *periodico* il segnale originario. Se allo stesso tempo il periodo *fittizio* T su cui sono calcolati i coefficienti $X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt$ viene fatto tendere ad infinito¹, le frequenze armoniche della serie di Fourier tendono ad avvicinarsi fino ad arrivare ad una distanza infinitesima; allo stesso tempo, il periodo del segnale antitrasformato tende anch'esso ad infinito, e dunque la ricostruzione nel tempo non è più periodica.



La *trasformata* di Fourier è adatta a rappresentare segnali privi di struttura periodica, e da un punto di vista formale può essere vista come un *operatore funzionale* che, applicato ad un segnale $x(t)$ funzione del tempo, ne individua *un secondo* $X(f)$ con valori complessi e funzione di variabile reale e continua, detta *frequenza* ed indicata con f ; tale passaggio da tempo a frequenza viene rappresentato attraverso il formalismo

¹Occorre però rimuovere il termine $1/T$ dell'eq. (2.6), altrimenti i coefficienti andrebbero a zero, essendo il segnale a durata limitata.

$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, indicando il segnale *trasformato* con la stessa lettera di quello di partenza, ma resa maiuscola. Dal punto di vista analitico la trasformata di Fourier è espressa come

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.1)$$

e la sua esistenza è garantita per segnali $x(t)$ *impulsivi* (pag. 16) ovvero tali che $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$, e per i quali le condizioni di Dirichlet (§ 2.5.1) sono verificate nell'intervallo $t \in (-\infty, \infty)$. Dato che un segnale impulsivo è anche *di energia* (vedi § 1.5), la (3.1) è valida anche per segnali di energia². Vedremo al § 3.7 che, grazie ad operazioni di passaggio al limite, la trasformata di Fourier può essere definita anche per segnali periodici, e dunque di potenza.

Antitrasformata Il passaggio inverso da f a t è detto *antitrasformata* di Fourier, viene indicato come $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$, e consente di ri-ottenere il segnale $x(t)$ di cui la (3.1) ha calcolato la trasformata $X(f)$. Da un punto di vista analitico l'antitrasformata di Fourier è definita in modo del tutto simile³ alla (3.1), ovvero

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (3.2)$$

valida ovunque $x(t)$ sia continuo, mentre nelle discontinuità di prima specie fornisce il valore intermedio tra quelli limite destro e sinistro. Il risultato $X(f)$ della trasformazione viene indicato anche come *spettro di ampiezza* complessa, e dato che $X(f)$ assume valori complessi, può esprimersi in forma esponenziale (2.4) $X(f) = M(f) e^{j\varphi(f)}$ in cui $M(f)$ ed $\varphi(f)$ sono indicati come spettri di *modulo* e di *fase* del segnale $x(t)$.

Spettro di ampiezza come densità L'espressione dell'antitrasformata (3.2) può essere messa a confronto con quella della serie di Fourier $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi nFt}$, evidenziando come la prima possa essere pensata *somma integrale* di infinite componenti $X(f) df$ di ampiezza *infinitesima*, in cui $X(f)$ si esprime come *segnale/Hz*, ovvero come una *densità di ampiezza*.

Spazio a dimensionalità infinita Al § 3.8.5 si mostra come gli esponenziali complessi $e^{j2\pi ft}$ corrispondano ad una base di rappresentazione *ortonormale* per uno spazio di Hilbert (§ 2.4.3) con un numero di dimensioni *infinito non numerabile*, e dunque $X(f)$ costituisce la rappresentazione di $x(t)$ su tale base.

Prima di procedere ad illustrare altre proprietà e caratteristiche della trasformata di Fourier, svolgiamo un semplice esercizio.

Trasformata di un rettangolo Disponendo del segnale $g(t) = \text{Arect}_\tau(t)$, se ne calcoli lo spettro di ampiezza $G(f)$. Si ottiene:

²Anche se un segnale di energia non è necessariamente impulsivo, ci viene in soccorso il https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Plancherel.

³Da un punto di vista *mnemonico*, cerchiamo di ricordare che l'esponenziale sotto il segno di integrale prende il segno *meno* nel passaggio $t \rightarrow f$, ed il segno *più* passando da f a t .

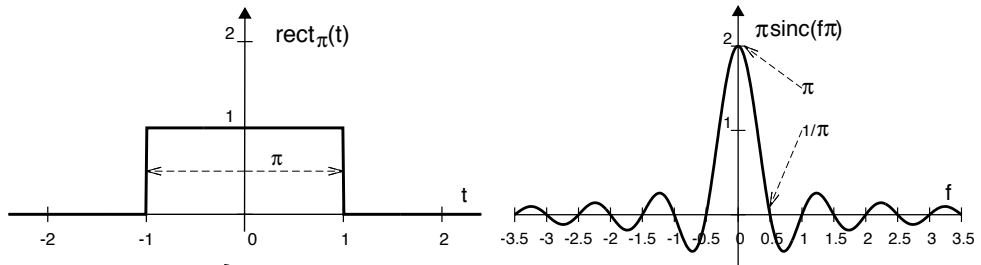


Figura 3.1: \mathcal{F} -trasformata di un rettangolo di base $\tau = 2$ ed ampiezza $A = 1$

$$\begin{aligned}
 G(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \text{rect}_{\tau}(t) e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = A \frac{e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}}{-j2\pi f} = \\
 &= \frac{A}{\pi f} \frac{e^{j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}}}{2j} = A\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} = A\tau \cdot \text{sinc}(f\tau) \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Il risultato è riportato in fig 3.1, dove possiamo notare come aumentando la durata τ del *rect* il relativo spettro di ampiezza $G(f)$ si *addensa* verso la regione delle frequenze più basse, dato che il suo primo passaggio per zero avviene a frequenza $f = \frac{1}{\tau}$; al contrario, qualora il *rect* sia più breve, $G(f)$ si *allarga*, estendendosi verso regioni di frequenza più elevata. Notiamo quindi come il risultato assomigli a quello già incontrato al § 2.2.1.4 per la serie di Fourier di un segnale periodico ottenuto ripetendo con periodo T un impulso rettangolare di base τ , tranne che ora l'andamento di $G(f)$ rappresenta una distribuzione in frequenza *continua* dello spettro di ampiezza.

La precedente osservazione può essere generalizzata come segue:

Relazione tra serie di Fourier e trasformata di un segnale a durata limitata

Consideriamo un segnale $g(t)$ a *durata limitata* $\tau \leq T$, ed un segnale *periodico* $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT)$ derivato da esso. I coefficienti X_n della serie di Fourier (2.6) ottenibili per $x(t)$ sono legati ai valori $G(f)|_{f=n/T}$ dello spettro di ampiezza (3.1) relativo a $g(t)$ calcolato in corrispondenza alle frequenze $f = \frac{n}{T}$ dalla relazione⁴

$$X_n = \frac{1}{T} G(f)|_{f=\frac{n}{T}} \quad (3.4)$$

Tornando all'esercizio, troviamo infatti che valutando la (3.3) per $f = \frac{n}{T}$ e dividendo per T si ottengono i valori $X_n = A \frac{\tau}{T} \text{sinc}(n \frac{\tau}{T})$ espressi dalla (2.11) relativa alla serie di Fourier di un'onda rettangolare ottenuta usando lo stesso rect_{τ} dell'esercizio.

3.2 Energia mutua, Parseval e densità di energia

In analogia a quanto osservato per la potenza dei segnali periodici (§ 2.3), l'*energia* totale \mathcal{E}_x di un segnale $x(t)$ si *distribuisce* nel dominio della frequenza come descritto

⁴Indicando $1/T$ con F in modo da uniformare la notazione a quella del § 2.2 otteniamo infatti

$$G\left(\frac{n}{T}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi n F t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi n F t} dt = T \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt = T \cdot X_n$$

dalla relativa *densità di energia* $\mathcal{E}_x(f)$, che si ottiene a partire da $X(f)$. Arriviamoci per gradi, illustrando prima due relazioni che sono diretta conseguenza delle considerazioni geometriche svolte al § 2.4.

Energia mutua⁵ Data una coppia di segnali di energia $x(t)$ e $y(t)$, è definita come il valore

$$\mathcal{E}_{xy} = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \quad (3.5)$$

e corrisponde al *prodotto scalare* (eq. (2.27)) tra $x(t)$ e $y(t)$ nello spazio a dimensionalità infinita dei segnali di energia. L'energia mutua \mathcal{E}_{xy} rappresenta una misura di *similarità* tra i due segnali, e qualora sia nulla i segnali $x(t)$ e $y(t)$ sono detti *ortogonali*. Osserviamo che per la disuguaglianza di Schwartz risulta $\mathcal{E}_{xy} \leq \sqrt{\mathcal{E}_x \cdot \mathcal{E}_y}$, vedi pag. 55.

Teorema di Parseval⁶ Se entrambi $x(t)$ e $y(t)$ possiedono trasformata di Fourier la (3.5) può essere scritta come

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{xy} &= \int \left[\int X(f) e^{j2\pi ft} df \right] y^*(t) dt = \int X(f) \left[\int y^*(t) e^{j2\pi ft} dt \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df \end{aligned}$$

e l'equivalenza

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df \quad (3.6)$$

esprime il *teorema di Parseval* per segnali di energia, ed implica che le trasformate di segnali ortogonali, sono anch'esse ortogonali, e viceversa.

Densità di energia Ponendo $y(t) = x(t)$ nella (3.5) otteniamo l'energia totale \mathcal{E}_x di $x(t)$, ovvero la sua *norma quadratica* in termini vettoriali. Combinando (3.5) con (3.6) si ottiene

$$\mathcal{E}_x = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \|x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (3.7)$$

che mette in luce come la trasformata di Fourier sia un operatore *unitario*, ossia che non altera la norma dei vettori trasformati. Osservando l'ultimo membro della (3.7) possiamo interpretare

$$\mathcal{E}_x(f) = |X(f)|^2$$

come lo *spettro di densità di energia* di $x(t)$. Infatti, l'integrale $\int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df$ rappresenta il contributo all'energia totale \mathcal{E}_x di $x(t)$, limitatamente alla banda di frequenze comprese tra f_1 ed f_2 .

3.3 Prime proprietà della trasformata di Fourier

Descriviamo cosa accade quando le (3.1) e (3.2) sono applicate a particolari classi di segnali, a loro combinazioni e/o trasformazioni, o più in generale, cosa lega le

⁵Nei testi anglofoni la (3.5) è indicata come *cross-energy*, a volte tradotta letteralmente come *energia incrociata*, ma qui invece più propriamente intesa come *in comune*, ovvero *mutua*.

⁶In realtà l'estensione del teorema di Parseval alla trasformata di Fourier è dovuta a *Plancherel*, vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Plancherel_theorem

trasformazioni in un verso, con quelle in senso opposto. Altre proprietà saranno illustrate a partire dal § 3.5.

Linearità Discende molto semplicemente dalla proprietà distributiva dell'integrale che definisce la trasformata, che consente di scrivere

$$\text{se } z(t) = ax(t) + by(t) \quad \text{allora } Z(f) = aX(f) + bY(f)$$

che permette di catalogare la trasformata di Fourier come *operatore lineare*⁷ (§ 2.4.4.3).

Simmetria coniugata Qualora $x(t)$ sia un segnale *reale* si ottiene⁸

$$X(f) = X^*(-f)$$

ovvero la parte reale di $X(f)$ è *pari* e quella immaginaria *dispari*, così come il modulo $|X(f)|$ è pari e la fase $\arg\{X(f)\}$ dispari. Si applica inoltre il corollario di pag. 40, ovvero se $x(t)$ oltre ad essere reale è anche pari, $X(f)$ è reale (pari), mentre se $x(t)$ è reale dispari, $X(f)$ è puramente immaginaria (dispari).

Dualità Trasformata ed antitrasformata differiscono solo per il segno dell'esponente. Ciò comporta che se sostituiamo alla variabile f del risultato $X(f)$ di una \mathcal{F} -trasformata, la variabile t , si ottiene una funzione del tempo $X(t)$ che, se nuovamente trasformata, fornisce ... il segnale originario $x(t)$, espresso come funzione della variabile f , cambiata di segno: $x(-f)$. Il concetto esposto, intricato a parole, è verificabile analiticamente con qualche *trucco*⁹, e si riassume come

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}\{\}} X(f) \quad \text{allora sostituendo } f \text{ con } t \quad X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}\{\}} x(-f) \\ \text{se } X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}\{\}} x(t) \quad \text{allora sostituendo } t \text{ con } f \quad x(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}\{\}} X(-t) \end{aligned}$$

e consente l'uso dei risultati ottenuti "in un senso" (ad es. da tempo a frequenza) per derivare senza calcoli i risultati nell'altro (da frequenza a tempo), o viceversa.

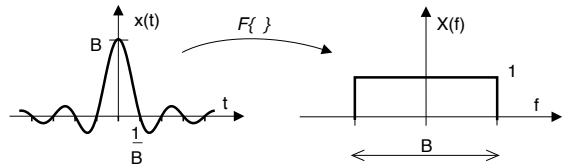
Esempio: Trasformata di un sinc(t) Supponiamo di voler trasformare il segnale $x(t) = B \frac{\sin(\pi t B)}{\pi t B} = B \text{sinc}(tB)$: l'applicazione cieca dell'integrale che definisce la trasformata di Fourier al segnale $x(t)$ appare un'impresa ardua, ma...

Ricordando che

$$\mathcal{F}\{\text{rect}_\tau(t)\} = \tau \text{sinc}(f\tau)$$

scriviamo direttamente

$$\mathcal{F}\{B \cdot \text{sinc}(tB)\} = \text{rect}_B(f)$$



Pertanto la trasformata di un *sinc* nel tempo, è un rettangolo in frequenza.

⁷Ovvero che mette in corrispondenza coppie di vettori-segnale $x(t)$ e $X(f)$ appartenenti allo spazio vettoriale dei segnali di energia definito rispettivamente sul dominio del tempo e della frequenza. Dato che gli esponenziali complessi $\{e^{j2\pi ft}\}$ costituiscono una base ortonormale per i segnali di energia (§ 3.8.5), osserviamo come la (3.1) valuti il *prodotto interno* tra il vettore $x(t)$ e un vettore della base, mentre la (3.2) rappresenta l'equivalente continuo della formula di ricostruzione (2.7).

⁸Infatti $X^*(f) = \left[\int x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right]^* = \int x^*(t) e^{j2\pi ft} dt = X(-f)$ dato che $x(t)$ è reale.

⁹Iniziamo dall'espressione dell'antitrasformata $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$ in cui *scambiamo tra loro le variabili* f e t ottenendo $x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{j2\pi ft} dt$; operando quindi un cambio di variabile $f \rightarrow -f$ si ha $x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt$ che coincide con il risultato mostrato alla prima riga nel testo.

Valore nell'origine (o iniziale) e area Stabilisce una eguaglianza che è subito verificabile una volta notato che la trasformata calcolata per $f = 0$ si riduce all'integrale di $x(t)$, e quindi alla sua *area*. Pertanto:

$$X(f=0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \quad \text{e, per dualità} \quad x(t=0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df \quad (3.8)$$

Esempio Come applicazione, troviamo subito l'area di un $\text{sinc}(\cdot)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(tB) dt = \frac{1}{B} \text{rect}_B(f=0) = \frac{1}{B} \quad (3.9)$$

Traslazione nel tempo Si tratta di una proprietà molto semplice, e che ricorre frequentemente nei calcoli sui segnali. Esprime la relazione tra la trasformata di un segnale e quella dello stesso qualora traslato, in accordo al predicato

$$\text{se } z(t) = x(t-T) \quad \text{allora} \quad Z(f) = X(f) e^{-j2\pi fT} \quad (3.10)$$

la cui dimostrazione è fornita sotto¹⁰.

Esempio Dato un segnale rettangolare $x(t) = \text{rect}_\tau(t)$, valutiamo la trasformata di $z(t) = x(t-T)$. L'applicazione diretta della (3.10) porta al risultato $Z(f) = \tau \text{sinc}(f\tau) e^{-j2\pi fT}$, e l'esercizio potrebbe dirsi concluso, se non per il desiderio aggiuntivo di disegnare $Z(f)$ nei termini del suo modulo e fase, ovvero in *notazione esponenziale* $Z(f) = |Z(f)| e^{j \arg\{Z(f)\}}$. Ci accorgiamo infatti che il termine $\text{sinc}(f\tau)$ non è pari a $|Z(f)|$, in quanto assume anche valori *negativi*, mentre il modulo, per definizione, è positivo o nullo. Per non appesantire la lettura, la soluzione a questo apparente problema viene svolta al § 3.8.1.

Il termine $-2\pi fT$ che risulta aggiunto allo spettro di fase originario prende il nome di *fase lineare*, in quanto la sua entità aumenta linearmente con f , e quindi le frequenze doppie, triple di una frequenza data, subiscono una variazione di fase doppia, tripla, ecc., ma tutte subiscono il medesimo ritardo temporale. Si noti inoltre che un ritardo temporale è associato ad un ritardo di fase, cioè una sottrazione, mentre un'anticipazione temporale dà un'addizione di fase, cioè un'anticipazione. Tali circostanze mettono in luce una interessante conseguenza anche nel passaggio da frequenza a tempo, ossia:

Affinché un segnale mantenga inalterato l'aspetto della propria forma d'onda anche a seguito di una modifica della corrispondente trasformata, l'unica alterazione possibile del suo spettro è una variazione costante per il modulo, e lineare per la fase¹¹

Esempio Consideriamo un segnale periodico $x(t)$ costituito da due sole armoniche

$$x(t) = a \sin(\omega t) + b \sin(2\omega t)$$

¹⁰La dimostrazione si basa sul semplice cambio di variabile $\theta = t - T$:

$$Z(f) = \int x(t-T) e^{-j2\pi ft} dt = \int x(\theta) e^{-j2\pi f(T+\theta)} d\theta = e^{-j2\pi fT} \int x(\theta) e^{-j2\pi f\theta} d\theta = X(f) e^{-j2\pi fT}$$

¹¹Tali condizioni corrispondono a quelle descritte a pag. 231 come quelle di un *canale perfetto*.

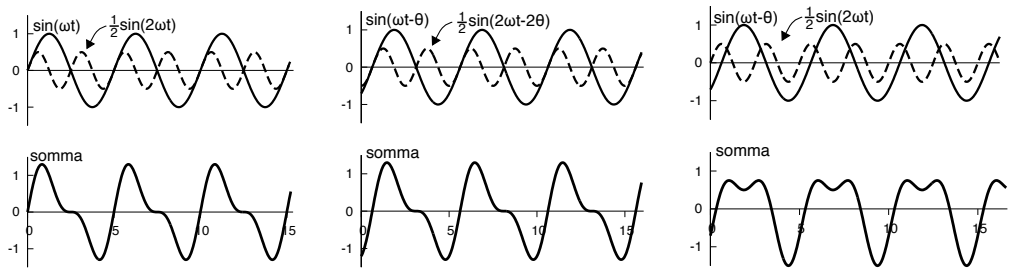


Figura 3.2: Confronto tra diversi spettri di fase

in cui si è posto $2\pi F = \omega$. La sua versione ritardata è

$$x(t - T) = a \sin(\omega(t - T)) + b \sin(2\omega(t - T)) = a \sin(\omega t - \omega T) + b \sin(2\omega t - 2\omega T)$$

Ponendo ora $\omega T = \theta$, otteniamo

$$x(t - T) = a \sin(\omega t - \theta) + b \sin(2\omega t - 2\theta)$$

e verifichiamo che la seconda armonica subisce un ritardo di fase esattamente doppio.

In fig. 3.2 si è posto $a = 1$, $b = 0.5$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\omega = 0.2$, ed è mostrato sia il segnale somma originario, sia quello ottenuto considerando un contributo di fase lineare per le due armoniche. Verifichiamo come nel secondo caso la forma d'onda sia la stessa ottenibile per $T = 0$, in quanto le armoniche sono traslate del medesimo intervallo temporale. A destra invece, la fase della seconda armonica viene annullata, ottenendo dalla somma un segnale $a \sin(2\pi Ft - \theta) + b \sin(2\pi 2Ft)$. Come è evidente, in questo caso il risultato assume una forma d'onda completamente diversa¹².

Traslazione in frequenza (Modulazione) E' la proprietà duale della precedente, e stabilisce che

$$\text{se } Z(f) = X(f - f_0) \quad \text{allora } z(t) = x(t) e^{j2\pi f_0 t}$$

la cui dimostrazione è del tutto analoga a quanto visto alla nota 10. Da un punto di vista mnemonico, distinguiamo la traslazione temporale da quella in frequenza per il fatto che, nel primo caso, i *segni* della traslazione e dell'esponenziale complesso sono *uguali*, e nel secondo, *opposti*.

Da un punto di vista pratico, può sorgere qualche perplessità per la comparsa di un segnale *complesso* nel tempo. Mostriamo però che anti-trasformando uno spettro ottenuto dalla somma di due traslazioni (in frequenza) opposte, si ottiene un segnale *reale*:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(f - f_0) + X(f + f_0)\} = x(t) e^{j2\pi f_0 t} + x(t) e^{-j2\pi f_0 t} = 2x(t) \cos 2\pi f_0 t$$

Pertanto lo sdoppiamento e la traslazione di $X(f)$ in $\pm f_0$ sono equivalenti ad un segnale cosinusoidale di frequenza f_0 , la cui ampiezza è *modulata* dal segnale $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$. E' proprio per questo motivo, che la proprietà è detta di *modulazione* (vedi anche a fig. 3.5).

¹²Nel seguito (§ 15.1.2.2) illustreremo come il risultato discusso determini la sensibilità delle trasmissioni numeriche alle distorsioni di fase.

Coniugato Deriva direttamente¹³ dalla definizione di trasformata:

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-f); \quad \mathcal{F}^{-1}\{X^*(f)\} = x^*(-t) \quad (3.11)$$

Se $x(t)$ è reale ciò equivale alla proprietà di simmetria coniugata $X(f) = X^*(-f)$.

Cambiamento di scala Quantifica l'effetto che una variazione nella velocità di scorrimento del tempo ha sullo spettro. Possiamo ad esempio pensare come, ascoltando un nastro magnetico¹⁴ a velocità maggiorata, si ascolta un segnale di durata più breve, e dal timbro più *acuto*. Questo fenomeno viene espresso analiticamente come:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

in cui se $|a| > 1$ si ottiene una *accelerazione* temporale, ed un *allargamento* dello spettro, oppure il contrario quando $|a| < 1$. La dimostrazione (per $a > 0$) è riportata alla nota¹⁵. Un corollario di questa proprietà è che se $a = -1$, allora

$$\mathcal{F}\{x(-t)\} = X(-f)$$

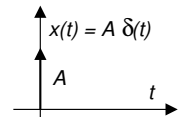
Sospendiamo per ora l'elencazione delle proprietà della trasformata di Fourier per introdurre un *nuovo segnale* del tutto particolare, grazie al quale potremo definire un ulteriore strumento analitico come *l'integrale di convoluzione*, e con questo caratterizzare l'attraversamento di un sistema da parte dei segnali.

3.4 Impulso di Dirac

Il simbolo $\delta(t)$, chiamato impulso (o *delta*) di Dirac, descrive un segnale *ideale* che vale zero ovunque, tranne per $t = 0$ dove vale infinito; per contro, l'area di $\delta(t)$ è *unitaria*:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{con } t = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Da un punto di vista analitico $\delta(t)$ *non* è una funzione bensì una *distribuzione*¹⁶, definita come il limite a cui tende una *successione* di funzioni, come discusso appresso. E' prassi comune rappresentare graficamente $A \cdot \delta(t)$ come una freccia (vedi figura) con scritto accanto il valore dell'area A .



Procediamo con l'analisi di alcune importanti applicazioni dell'impulso ora definito.

Trasformata di una costante Anche se per un segnale costante $x(t) = A$ l'integrale (3.1) non converge, grazie al $\delta()$ otteniamo che

La trasformata di Fourier di una costante è un impulso di Dirac con area pari al valore della costante

¹³Infatti $\mathcal{F}\{x^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j2\pi ft} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt \right]^* = X^*(-f)$

¹⁴Ebbene sì, c'è stato un tempo in cui i suoni venivano registrati su nastri, come bobine e cassette, vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Audiocassetta>

¹⁵Risulta $\int x(at) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a} \int x(at) e^{-j2\pi \frac{f}{a} at} d(at) = \frac{1}{a} \int x(\beta) e^{-j2\pi \frac{f}{a} \beta} d\beta = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$

¹⁶Detta anche *funzione generalizzata*, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Delta_di_Dirac e [http://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_\(matematica\)](http://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_(matematica))

Tale proprietà è valida per entrambi i domini (f e t) di partenza, fornendo

$$\mathcal{F}\{A\} = A \cdot \delta(f) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^{-1}\{A\} = A \cdot \delta(t)$$

Osserviamo infatti che la costante A può essere vista come il limite, per $\tau \rightarrow \infty$, di un segnale rettangolare:

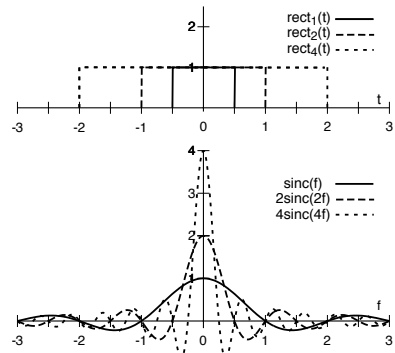
$$A = \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \text{rect}_\tau(t)$$

la cui trasformata per $\tau \rightarrow \infty$ risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\lim_{\tau \rightarrow \infty} A \text{rect}_\tau(t)\right\} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{F}\{A \text{rect}_\tau(t)\} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \tau \text{sinc}(f\tau) = \begin{cases} \infty & \text{con } f = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \end{aligned}$$

Ci troviamo pertanto nelle esatte circostanze che definiscono un impulso di Dirac, e resta da verificare

che $\int_{-\infty}^{\infty} \tau \text{sinc}(f\tau) df = 1$: a pag. 66 (eq. (3.9)) si è effettivamente mostrato che tale integrale vale uno per qualunque τ , e dunque possiamo scrivere $\mathcal{F}\{A\} = A \cdot \delta(f)$.



Trasformata di segnali periodici Consideriamo ora un segnale periodico $x(t)$, del quale conosciamo lo sviluppo in serie

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$$

Applicando la proprietà di linearità, il risultato per la trasformata di una costante, e ricordando la proprietà della traslazione in frequenza, troviamo¹⁷ che la \mathcal{F} -trasformata di $x(t)$ vale:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - nF) \tag{3.12}$$

Lo spettro di ampiezza di un segnale periodico è quindi costituito da *impulsi matematici*, situati in corrispondenza delle frequenze armoniche, e di area pari ai rispettivi coefficienti della serie di Fourier, significando che la densità di ampiezza è concentrata solo su tali frequenze. Un modo alternativo di calcolare la trasformata di segnali periodici è illustrato alla sezione 3.7.

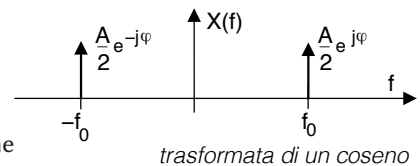
Trasformata di un coseno Applichiamo il risultato (3.12) nel verso opposto, ossia per individuare le componenti armoniche, a partire dall'espressione della trasformata di Fourier.

Nel caso di un coseno, che scriviamo $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)}}{2}$, la

relativa trasformata di Fourier risulta

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{2} (e^{j2\pi f_0 t} e^{j\varphi} + e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\varphi})\right\} \\ &= \frac{A}{2} \{e^{j\varphi} \delta(f - f_0) + e^{-j\varphi} \delta(f + f_0)\} \end{aligned}$$

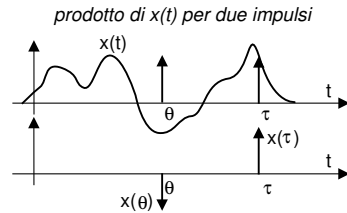
in cui riconosciamo $X_1 = \frac{A}{2} e^{j\varphi}$ e $X_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\varphi}$ come mostrato in figura.



¹⁷Infatti $X(f) = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \mathcal{F}\{1 \cdot e^{j2\pi n F t}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cdot \delta(f - nF)$

Proprietà di campionamento Esprime il prodotto di un segnale per un impulso unitario, che produce come risultato¹⁸ lo stesso impulso, con area pari al valore del segnale nell'istante in cui è centrato l'impulso, ovvero

$$x(t) \delta(t - \tau) = x(\tau) \delta(t - \tau) \quad (3.13)$$



Operatore di setacciamento Integrando ambo i membri della (3.13) otteniamo $x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt$ che, dopo un (s)cambio di variabile, consente di scrivere il segnale $x(t)$ nella forma

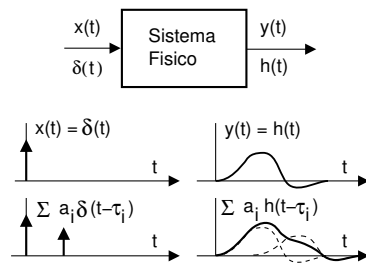
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau \quad (3.14)$$

ovvero come una somma¹⁹ di infiniti termini di valore $x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau$. La relazione (3.14) è detta operatore di *setacciamento* (in inglese, SIFTING) in quanto consiste nel passare (metaforicamente) al setaccio $x(t)$, che compare in entrambi i membri della (3.14), così come la farina compare *su entrambi i lati* del setaccio stesso. Che ci facciamo? La usiamo tra poco, al § 3.4.2.

Descriviamo ora come grazie all'impulso $\delta(t)$ sia possibile definire un particolare segnale noto come risposta impulsiva $h(t)$, che descrive completamente un sistema lineare e permanente, la cui uscita può essere calcolata per un qualunque segnale di ingresso grazie all'uso di $h(t)$, che agisce come *nucleo* di un operatore integrale noto come *convoluzione*.

3.4.1 Risposta impulsiva

Consideriamo un sistema fisico (elettrico, meccanico, pneumatico...) che venga sollecitato, in un punto considerato come ingresso, da un segnale impulsivo $\delta(t)$ centrato in $t = 0$, ed osserviamo l'andamento temporale di una grandezza (meccanica, pneumatica, elettrica...) che possiamo considerare una *uscita*. Questo segnale di uscita prende il nome di *risposta impulsiva* (ossia all'impulso) ed è indicato con $h(t)$. L'evoluzione di $h(t)$ rappresenta quella della grandezza di uscita, dopo che è passato un tempo pari a t da quando si è applicato in ingresso l'impulso $\delta(t)$, e se il sistema è *causale* (vedi § 1.6) risulta $h(t) = 0$ con $t < 0$, come raffigurato a lato.



¹⁸La (3.13) si dimostra esprimendo $\delta(t)$ come $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}_T(t)$ in modo da scrivere il primo membro come $x(t) \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}_T(t - \tau)$. Al tendere di T a zero il rettangolo di ampiezza $\frac{1}{T}$ converge ad un impulso, la cui area resta moltiplicata per il valore che $x(t)$ assume per $t = \tau$, dove è centrato il rettangolo.

¹⁹Senza voler entrare nei dettagli analitici, diciamo che la (3.14) rappresenta l'equivalente della formula di ricostruzione (2.16) per uno spazio a cardinalità infinita, in cui $\delta(\tau - t)$ al variare di τ costituisce una base di rappresentazione ortonormale, ed i cui coefficienti $x(\tau)$ sono calcolati come prodotto scalare $x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt$.

Aggiungiamo ora l'ipotesi che il sistema sia anche *lineare e permanente* (§ 1.6.1), per cui applicando un ingresso costituito da *più impulsi*, ognuno con differente area a_i e centrato ad un diverso istante τ_i

$$x(t) = \sum_{i=1}^N a_i \delta(t - \tau_i) \quad (3.15)$$

si ottiene una uscita pari a

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i h(t - \tau_i) \quad (3.16)$$

Riflettiamo sul significato della sommatoria, con l'aiuto della figura precedente: il valore dell'uscita $y(t)$ ad un dato istante t è il risultato della somma di N termini, ognuno legato (a meno del fattore a_i) al valore della risposta impulsiva calcolata con argomento $t - \tau_i$ pari al tempo trascorso tra l'istante di applicazione dell' i -esimo impulso τ_i , e l'istante di osservazione t .

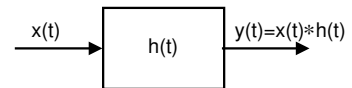
3.4.2 Integrale di convoluzione

Consideriamo ancora lo stesso sistema fisico, lineare e permanente, al cui ingresso sia ora posto un generico segnale $x(t)$ che, grazie alla proprietà di setacciamento (3.14) ed al fatto che $\delta(t)$ è *pari*, rappresentiamo scomposto in infiniti termini, ossia in una somma integrale di impulsi centrati in τ (variabile) ed area $x(\tau) d\tau$ (infinitesima)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \delta(t - \tau) \quad (3.17)$$

L'andamento della grandezza di uscita si ottiene in base allo stesso ragionamento che ha portato dalla (3.15) alla (3.16), essendo infatti pari alla sovrapposizione di *infinite* risposte impulsive, ognuna relativa ad un diverso impulso $x(\tau) d\tau \delta(t - \tau)$ in cui la (3.17) scompone l'ingresso, ovvero

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.18)$$



Calcolo dell'uscita per un ingresso qualunque

in cui $h(t - \tau)$ è l'uscita all'istante t causata dall'impulso in ingresso centrato all'istante τ . Il risultato

ottenuto prende il nome di *integrale di convoluzione*, e viene indicato in forma simbolica da un asterisco (*), in modo che ci si possa riferire ad esso anche come *prodotto di convoluzione*, ossia $g(t) = x(t) * h(t)$. Come anticipato $h(t)$ caratterizza *completamente* il sistema fisico, dato che permette di calcolarne l'uscita per un qualsiasi ingresso.

Proprietà commutativa Se un segnale $h(t)$ è posto in ingresso ad un sistema con risposta impulsiva $x(t)$, si ottiene ancora la stessa uscita, in quanto l'integrale di convoluzione è *commutativo*²⁰:

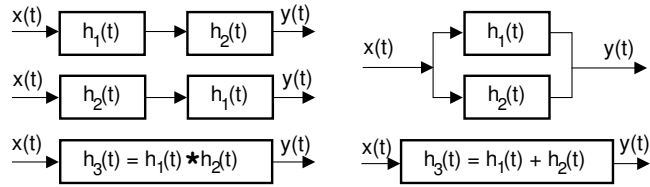
²⁰Adottando il cambio di variabile $t - \tau = \theta$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = - \int_{\infty}^{-\infty} x(t - \theta) h(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \theta) h(\theta) d\theta$$

Infatti il cambio di variabile determina quello degli estremi di integrazione, che vengono poi scambiati ripristinando il segno, vedi ad es. <https://it.wikipedia.org/wiki/Convoluzione>

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = h(t) * x(t)$$

Questa proprietà, assieme a quella di linearità, consente di stabilire le equivalenze a lato, dove si mostra come l'attraversamento *in serie* ed *in parallelo* di più sistemi lineari



Risposta impulsiva equivalente per sistemi in serie e parallelo

è equivalente a quello di un unico sistema con risposta impulsiva rispettivamente pari alla convoluzione ed alla somma delle singole risposte impulsive.

3.4.3 Risposta impulsiva come funzione memoria

Diamo ora un'importante valutazione grafica del modo in cui funziona l'operatore di convoluzione, con l'aiuto della fig. 3.3: poniamo che $h(t)$ (prima riga) sia un esponenziale decrescente e $x(t)$ (terza riga) un segnale triangolare. Si vuole arrivare a disegnare la funzione integranda $x(\tau) h(t - \tau)$ (quarta riga) che compare nel calcolo della convoluzione, per uno specifico istante di uscita $t = \bar{t}$.

La seconda riga in figura mostra (con l'ausilio di quanto anticipato a pag. 18) l'aspetto di $h(\bar{t} - \tau)$ con τ come variabile indipendente, ottenuta prima invertendo $h(t)$ rispetto all'origine dei tempi, e quindi traslandola a destra di una quantità \bar{t} ²¹. Il prodotto dei segnali della seconda e terza riga è quindi pari (come desiderato) a $x(\tau) h(\bar{t} - \tau)$ la cui area, ombreggiata in figura, fornisce infine il risultato dell'integrale di convoluzione all'istante $t = \bar{t}$, ovvero

$$y(\bar{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\bar{t} - \tau) d\tau$$

Per altri valori di \bar{t} il termine $h(\bar{t} - \tau)$ sarà traslato di una diversa quantità, fornendo un diverso valore dell'integrale, cioè un diverso valore di uscita²².

Il calcolo dell'area di $x(\tau) h(\bar{t} - \tau)$ ha il significato di sommare le risposte causate da tutti i valori di ingresso già entrati, e per ogni termine della somma $h(\bar{t} - \tau)$ pondera l'ingresso $x(\tau)$ all'istante

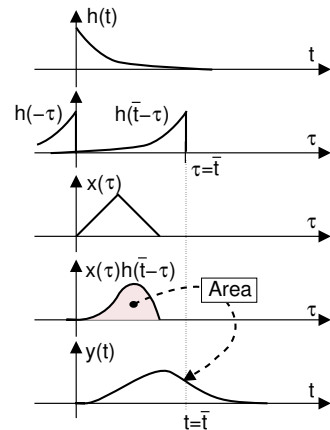


Figura 3.3: Convoluzione per via grafica

²¹Per convincerci dell'operazione, verifichiamo che per $\tau < \bar{t}$ l'argomento $\bar{t} - \tau$ di h è positivo, e infatti il valore di $h(\bar{t} - \tau) \neq 0$.

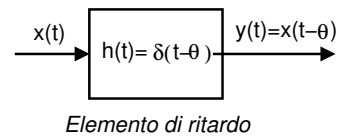
²²Osserviamo che un integrale calcola un numero, e la convoluzione produce un segnale solo perché l'integrale è calcolato per tutte le possibili traslazioni di $h(t - \tau)$, vedi anche § 2.4.4.3. Alcune animazioni che illustrano l'operazione di convoluzione in questi termini sono reperibili ad es. presso <https://it.wikipedia.org/wiki/Convoluzione> e <https://mathworld.wolfram.com/Convolution.html>, mentre presso https://teoriadeisegnali.it/story/pub/stud/script/test/conv_corr_fa.m è disponibile un programma interattivo *Octave* per visualizzare questa ed altre animazioni collegate.

τ in base al tempo trascorso $\bar{t} - \tau$ tra l'istante (passato) $\tau \leq \bar{t}$ di applicazione del valore di ingresso, e l'istante \bar{t} di osservazione. I valori di $h(t)$ rappresentano pertanto il peso che la memoria del sistema fisico attribuisce agli ingressi precedenti.

Estensione temporale della convoluzione In base alla costruzione grafica discussa è facile verificare che se $x(t)$ ed $h(t)$ presentano entrambi una durata limitata, ovvero $x(t) \neq 0$ con $t \in [0, T_x]$ e $h(t) \neq 0$ con $t \in [0, T_h]$, allora il risultato $y(t) = x(t) * h(t)$ ha estensione compresa tra $t = 0$ e $t = T_x + T_h$, ossia presenta una durata pari alla somma delle durate di $x(t)$ ed $h(t)$.

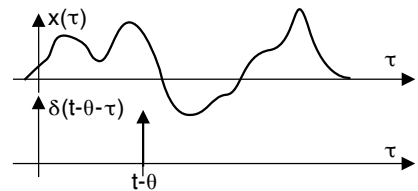
3.4.4 Convoluzione con l'impulso traslato

Consideriamo ora un sistema fisico che operi un semplice ritardo θ sui segnali in ingresso: in tal caso scriveremo $h(t) = \delta(t - \theta)$, ossia la risposta impulsiva corrisponde all'impulso ritardato. Per calcolare l'uscita, che sappiamo essere pari a $y(t) = x(t - \theta)$, possiamo ricorrere all'integrale di convoluzione, ottenendo



$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t - \theta) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \theta - \tau) d\tau = x(t - \theta) \end{aligned} \quad (3.19)$$

La figura a lato rappresenta graficamente i termini che compaiono nell'eq. (3.19), la quale ci permette di enunciare un principio generale, che verrà utilizzato di frequente, e che recita:



La convoluzione tra un segnale $x(t)$ ed un impulso $\delta(t - \theta)$ centrato ad un istante θ provoca la traslazione di $x(t)$ all'istante in cui è centrato l'impulso

3.5 Moltiplicazione in frequenza e nel tempo

Forti dei nuovi strumenti in nostro possesso, riprendiamo la discussione sulle proprietà della trasformata di Fourier. Infatti, la descrizione di un sistema fisico per mezzo della sua risposta impulsiva è di fondamentale utilità soprattutto per merito della proprietà

La trasformata di Fourier della convoluzione tra due segnali è pari al prodotto delle trasformate dei segnali

ovvero

$$\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(f) Y(f) \quad (3.20)$$

la cui dimostrazione è riportata alla nota²³. Sussiste inoltre anche la proprietà *duale*, ovvero ad un *prodotto nel tempo* corrisponde una *convoluzione in frequenza*, cioè

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot y(t)\} = X(f) * Y(f) \quad (3.21)$$

²³
$$\begin{aligned} Z(f) &= \mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) Y(f) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= Y(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = Y(f) \cdot X(f) \end{aligned}$$

La fig. 3.4 mostra come l'ultima relazione individui un *isomorfismo* tra spazi di segnale; chiaramente la (3.20) rappresenta un isomorfismo analogo. Nel seguito, trattiamo delle conseguenze e dei risvolti legati alla coppia di proprietà ora introdotte, iniziando dalla prima.

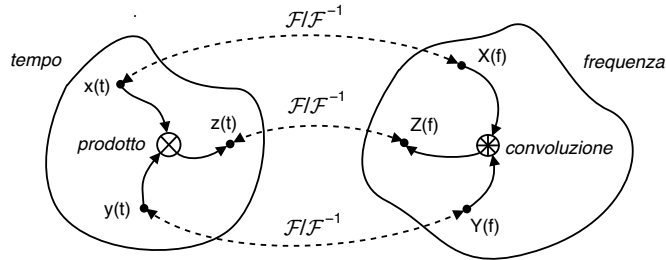


Figura 3.4: Isomorfismo tra gli spazi di segnale nel tempo e nella frequenza

3.5.1 Moltiplicazione in frequenza (filtraggio)

La proprietà (3.20) consente una diversa modalità di calcolo dell'uscita da un sistema fisico, che può infatti essere ricavata operando nel dominio della frequenza, calcolando prima

$$Y(f) = \mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = X(f)H(f) \quad (3.22)$$

e quindi valutando $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\}$. La trasformata della risposta impulsiva $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ prende il nome di *risposta in frequenza*, per il motivo esposto di seguito, assieme ad un paio di esempi di applicazione di questa proprietà a casi già noti al lettore. Approfondimenti sulle operazioni di filtraggio possono essere trovati al cap. 7, da affrontare dopo lo studio dei processi ergodici al § 6.3.

Risposta in frequenza Ponendo in ingresso al sistema un segnale esponenziale complesso $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$, in cui è presente l'unica frequenza f_0 (infatti $X(f) = \delta(f - f_0)$), la proprietà del prodotto per un impulso permette di valutare una uscita $Y(f) = H(f)\delta(f - f_0) = H(f_0)\delta(f - f_0)$, ossia un impulso centrato in f_0 e di area complessa $H(f_0)$, da cui

$$y(t) = H(f_0)e^{j2\pi f_0 t}$$

Quindi, il segnale in ingresso si ripropone in uscita, alterato in modulo e fase in base al valore complesso $|H(f_0)|e^{j\arg\{H(f_0)\}}$ che $H(f)$ assume alla frequenza f_0 : per questo motivo $H(f)$ è detta *risposta in frequenza* del sistema.

Autovettori di $H(f)$ Ricordando come in algebra lineare l'applicazione di una trasformazione lineare ad un proprio autovettore produce l'autovettore stesso, moltiplicato per il rispettivo autovalore, osserviamo che per un sistema con risposta in frequenza $H(f)$ gli autovettori (o *autofunzioni*) sono i segnali esponenziali complessi $e^{j2\pi f_0 t}$, ai quali risulta associato l'autovalore $H(f_0)$.

Misura della risposta in frequenza Se un filtro è idealmente realizzabile (pag. 26) risulta $H(f) = H^*(-f)$, e considerando per $H(f)$ la sua espressione in termini

di modulo e fase $H(f) = M(f) e^{j\varphi(f)}$, risulta $M(f)|_{f<0} = M(f)|_{f>0}$ e $\varphi(f)|_{f<0} = -\varphi(f)|_{f>0}$. Ciò consente di misurare modulo $M(f)$ e fase $\varphi(f)$ della risposta in frequenza per tutti i valori di f , utilizzando come ingresso una funzione sinusoidale con ampiezza A e fase θ note: $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$. Il segnale in uscita è ancora una cosinusoide²⁴ con ampiezza $A \cdot M(f_0)$ e fase $\theta + \varphi(f_0)$; pertanto ricaviamo

$$M(f_0) = \frac{\max\{y(t)\}}{\max\{x(t)\}}, \quad \text{e} \quad \varphi(f_0) = \arg\{y(t)\} - \arg\{x(t)\}$$

Ripetendo il procedimento per diverse f_0 , possiamo “campionare” $H(f)$. Al § 3.8.2 si illustra una modalità operativa per la misura della differenza di fase tra sinusoidi.

Sistema passa tutto Poniamo di avere $H(f) = 1$, e che quindi risulti $h(t) = \delta(t)$. In questo caso le componenti di $X(f)$ alle diverse frequenze non subiscono alcuna alterazione, ottenendo

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = x(t)$$

ed il sistema viene detto di tipo *passa tutto*. Per verifica possiamo scrivere l'espressione dell'integrale di convoluzione, ovvero $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$: ritroviamo quindi la proprietà di setacciamento (3.14).

Fase lineare e ritardo Se invece $H(f) = e^{-j2\pi f\tau}$ abbiamo un sistema caratterizzato da una *fase lineare* (pag. 66) e che equivale ad un elemento di ritardo, riproducendo in uscita il valore che era presente in ingresso τ istanti prima. Infatti in base alla (3.10) risulta:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f) e^{-j2\pi f\tau}\} = x(t - \tau)$$

D'altra parte, scrivendo l'integrale di convoluzione, e ricordando che $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-j2\pi f\tau}\} = \delta(t - \tau)$, avremmo ottenuto $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \delta(t - \tau - \theta) d\theta = x(t - \tau)$, ritrovando la proprietà della convoluzione per un impulso traslato. Un sistema siffatto è indicato a pag. 231 come *canale perfetto*, in quanto privo di distorsioni lineari (vedi § 8.2).

Sistemi in cascata Ponendo l'uscita $y(t) = x(t) * h(t)$ di un primo sistema con risposta impulsiva $h(t)$ in ingresso ad un secondo filtro con risposta impulsiva

²⁴Svolgiamo i calcoli nel dominio della frequenza, partendo dal risultato di pag. 69:

$$X(f) = \frac{A}{2} \left(e^{j\theta} \delta(f - f_0) + e^{-j\theta} \delta(f + f_0) \right);$$

$$Y(f) = X(f) H(f) = \frac{A}{2} M(f_0) \left(e^{j\theta} e^{j\varphi(f_0)} \delta(f - f_0) + e^{-j\theta} e^{-j\varphi(f_0)} \delta(f + f_0) \right)$$

e antitrasformando si ottiene

$$y(t) = A \cdot M(f_0) \cos(2\pi f_0 t + \theta + \varphi(f_0))$$

$g(t)$, e ricordando che (pag. 71) la cascata dei due sistemi è equivalente ad un terzo sistema con risposta impulsiva $h'(t) = h(t) * g(t)$, si ottiene come risultato complessivo $z(t) = y(t) * g(t) = x(t) * h(t) * g(t)$, la cui trasformata di Fourier risulta $Z(f) = X(f) H(f) G(f)$. Pertanto, la risposta in frequenza di sistemi posti in serie è il prodotto delle relative risposte in frequenza.

3.5.2 Moltiplicazione nel tempo (*modulazione e finestatura*)

La relazione (3.21)

$$Z(f) = \mathcal{F}\{x(t)y(t)\} = X(f) * Y(f) \quad (3.23)$$

ci permette di investigare le conseguenze frequenziali del prodotto temporale di due segnali.

Esempio Prendiamo il caso in cui $z(t) = A \text{rect}_T(t) \cos 2\pi f_0 t$, ovvero pari alla forma d'onda graficata a sinistra nella fig. 3.5. Applicando i risultati noti e la proprietà di traslazione in frequenza, risulta:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \frac{A}{2} \mathcal{F}\left\{\text{rect}_T(t) \left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right)\right\} \\ &= \frac{AT}{2} (\text{sinc}[(f - f_0)T] + \text{sinc}[(f + f_0)T]) \end{aligned}$$

in cui $\mathcal{F}\{\text{rect}_T(t)\} = T \text{sinc}(fT)$ si è traslato in $\pm f_0$.

Il risultato dell'esempio, mostrato a destra in fig. 3.5, coincide con quello previsto: l'espressione di $Z(f)$ infatti è anche pari alla convoluzione tra $\mathcal{F}\{\text{rect}_T(t)\} = T \text{sinc}(fT)$ ed i due impulsi traslati $\mathcal{F}\{\cos 2\pi f_0 t\} = \frac{1}{2} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$, determinando quindi la replica dello spettro del *rect*, traslata alla frequenza del coseno.

Modulazione Il prodotto tra segnali nel tempo prende il nome di modulazione quando uno dei due fattori è una (co)sinusoide, la cui ampiezza viene appunto variata (o *modulata*) dal secondo fattore²⁵. La *modulazione di ampiezza* (cap. 11) dei radio ricevitori si riferisce esattamente a questo processo, svolto allo scopo di condividere tra più emittenti la banda prevista per le trasmissioni, assegnando a ciascuna di esse una diversa frequenza portante f_0 su cui trasmettere: infatti come mostrato dall'esempio, lo spettro del rettangolo si è spostato da $f = 0$ a $f = f_0$.

Finestratura Questo termine fa riferimento al caso in cui uno dei due fattori della (3.23) sia un segnale a durata limitata (detto *finestra*), come nel caso del $\text{rect}_T(t)$ di fig. 3.5. Con riferimento all'esempio si può osservare che per T crescente $Z(f)$ tende sempre più ad assomigliare ad una coppia di impulsi, ossia al risultato noto per un coseno di durata *infinita*. Qualora si consideri invece solo un *breve intervallo* di un segnale il suo spettro si modifica a seguito della *convoluzione in frequenza* con la trasformata della *finestra* di analisi. L'estrazione di un segmento di durata limitata da un segnale comunque esteso prende dunque il nome di *finestratura* (WINDOWING),

²⁵Nel caso dell'esempio il rettangolo è costante e dunque l'ampiezza del coseno *non varia*, ma il termine modulazione si riferisce al prodotto di una sinusoide per un segnale dall'andamento qualsiasi.

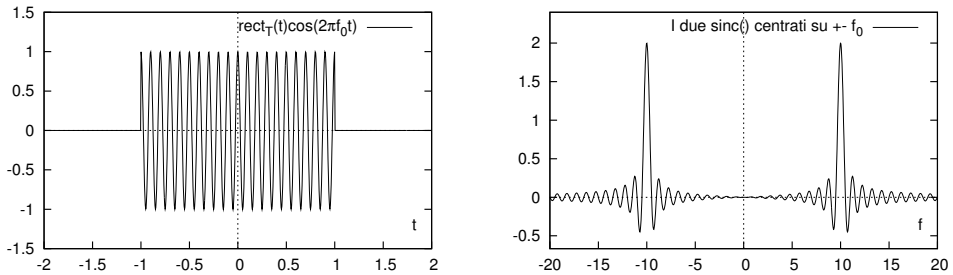


Figura 3.5: Trasformata di un coseno finestrato con $T = 2, f_0 = 10$

ed in appendice 3.8.4 sono svolte considerazioni relative alla scelta di una finestra rettangolare, o con *altro andamento*.

3.6 Derivazione ed integrazione nel tempo

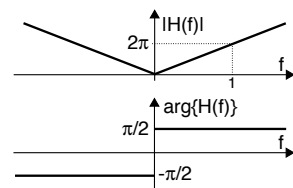
Queste due proprietà sono di applicazione meno frequente, ma talvolta utile. In particolare, si verifica che le operazioni di derivata ed integrale di un segnale possono essere realizzate mediante il passaggio dello stesso attraverso un filtro, dato che derivata ed integrale nel tempo sono equivalenti a prodotti in frequenza, e quindi realizzabili come convoluzione del segnale con una appropriata risposta impulsiva.

Derivazione nel tempo La trasformata $Y(f)$ di un segnale $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ è esprimibile in funzione della trasformata di $x(t)$ come²⁶

$$Y(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j2\pi f \cdot X(f) \tag{3.24}$$

e più in generale si ha $\mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right\} = (j2\pi f)^n \cdot X(f)$. L'andamento del modulo dello spettro originario $|X(f)|$ risulta pertanto *esaltato* alle frequenze più elevate, con legge proporzionale ad f , come risulta dal prodotto per $2\pi|f|$.

Osservando poi che il numero *immaginario puro* $j2\pi f = 2\pi f e^{j\frac{\pi}{2} \text{sgn}(f)}$ ha fase $\pm\frac{\pi}{2}$ con segno uguale a quello di f , troviamo che la fase di $X(f)$ subisce un incremento di $\frac{\pi}{2}$ per frequenze positive, ed un eguale decremento per quelle negative. Pertanto, la derivata di un segnale corrisponde all'uscita di un filtro descritto dalla risposta in frequenza riportata a lato.



Esercizio Calcolare $Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\}$, considerando $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ e $x(t) = \cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t$. Valutare poi $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\}$ nel caso in cui $f_1 = 10$ e $f_2 = 100$ Hz.

²⁶La dimostrazione viene svolta per segnali di energia, applicando in modo diretto la regola di integrazione per parti $\int [f'(t)g(t)]dt = f(t)g(t) - \int [f(t)g'(t)]dt$:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt = x(t) e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = j2\pi f X(f)$$

in quanto il termine $x(t) e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{\infty}$ si annulla, dato che se $x(t)$ è un segnale di energia, tende a zero per $t \rightarrow \infty$.

Anziché applicare le regole di derivazione e quindi effettuare la trasformata, scegliamo di calcolare prima $X(f)$, e quindi applicare la (3.24):

$$X(f) = 1/2 [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1) + \delta(f - f_2) + \delta(f + f_2)]$$

Dato che (pag. 70) $f \cdot \delta(f \pm a) = \mp a \cdot \delta(f \pm a)$, il prodotto $Y(f) = j2\pi f \cdot X(f)$ fornisce

$$Y(f) = \frac{j2\pi}{2} \{f_1 [\delta(f - f_1) - \delta(f + f_1)] + f_2 [\delta(f - f_2) - \delta(f + f_2)]\}$$

Considerando infine che $\frac{j2\pi}{2} = -\frac{2\pi}{2j}$, si ottiene $y(t) = -2\pi f_1 \sin 2\pi f_1 t - 2\pi f_2 \sin 2\pi f_2 t$ e quindi, per $f_1 = 10$ e $f_2 = 100$, si ha

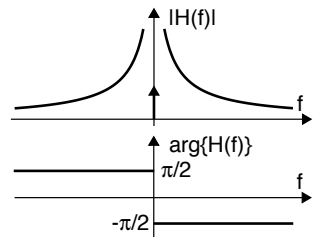
$$y(t) = -2\pi [10 \sin \omega_1 t + 100 \sin \omega_2 t]$$

Il doppietto Viene da chiedersi quale sia la risposta impulsiva $h(t)$ di un filtro derivatore. Dato che per definizione $h(t)$ rappresenta l'uscita corrispondente ad un ingresso impulsivo $\delta(t)$, evidentemente deve risultare $h(t) = \delta'(t)$, ovvero pari alla derivata dell'impulso. ok, ma come è fatto $\delta'(t)$, e perché viene detto doppietto? Per rispondere occorre fare un passo indietro, e tornare a pensare l'impulso come una distribuzione, ad es. $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \text{rect}_\tau(t)$, e considerare che $\frac{d}{dt} \text{rect}_\tau(t) = \delta(t + \frac{\tau}{2}) - \delta(t - \frac{\tau}{2})$, ossia due impulsi di segno opposto, centrati in corrispondenza delle discontinuità²⁷. Pertanto risulta $\delta'(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [\delta(t + \frac{\tau}{2}) - \delta(t - \frac{\tau}{2})]$, ovvero due impulsi di area infinita e segno opposto, entrambi centrati in $t = 0$.

Integrazione nel tempo Indicando il segnale integrale (o primitiva) come $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta$, il legame tra integrale e derivata permette di scrivere²⁸

$$Y(f) = \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta \right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f} \tag{3.25}$$

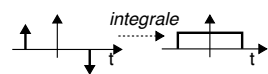
In analogia alla derivata, la (3.25) rappresenta l'uscita di un filtro integratore con risposta in frequenza $H(f) = -j \frac{1}{2\pi f}$, che quindi *esalta* le frequenze più basse del segnale originario in accordo all'andamento iperbolico di $|H(f)| = 1/2\pi|f|$, mentre la fase $\arg\{H(f)\} = -\frac{\pi}{2} \text{sgn}(f)$ subisce una alterazione *opposta* al caso della derivata, dato che ora j ha cambiato segno.



Notiamo però che il risultato (3.25) manifesta la comparsa di una *singolarità* in $f = 0$ se $X(0) \neq 0$: come mostrato a pag. 66, ciò corrisponde ad un segnale $x(t)$ che sottende un'area non nulla, e quindi $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta$ non si azzerava per $t \rightarrow \infty$. In questo caso $y(t)$ non è di energia, ed il calcolo della sua trasformata richiede qualche

²⁷

Se infatti valutiamo $\int_{-\infty}^t [\delta(\theta + \frac{\tau}{2}) - \delta(\theta - \frac{\tau}{2})] d\theta$ con $t > \frac{\tau}{2}$, otteniamo due gradini $u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})$, che combinati assieme, riproducono il rect_τ di partenza.



²⁸Essendo $x(t) = \frac{d}{dt}y(t)$, ed applicando la (3.24) otteniamo $X(f) = j2\pi f Y(f)$, da cui la (3.25).

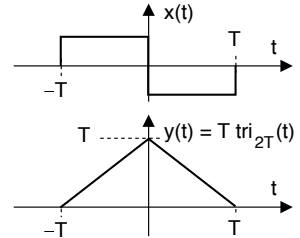
espediente²⁹, che aggiunge ad $H(f) = -j \frac{1}{2\pi f}$ il termine $\frac{1}{2} \delta(f)$, anch'esso mostrato in figura.

Esercizio Trasformata di un triangolo. Consideriamo un segnale ad area nulla

$$x(t) = \text{rect}_T \left(t + \frac{T}{2} \right) - \text{rect}_T \left(t - \frac{T}{2} \right)$$

ed il suo integrale

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta = T \text{tri}_{2T}(t)$$



entrambi rappresentati in figura: $y(t)$ è nullo fino a $t < -T$, cresce linearmente fino a $t = 0$, e quindi il contributo all'integrale dato dall'area del *rect* negativo torna ad annullarne il valore.

Per calcolare la trasformata di $y(t)$, calcoliamo prima quella di $x(t)$, e poi applichiamo la proprietà dell'integrazione. Applicando la proprietà di traslazione nel tempo, scriviamo

$$\begin{aligned} X(f) &= T \cdot \text{sinc}(fT) \cdot e^{+j2\pi f \frac{T}{2}} - T \cdot \text{sinc}(fT) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} = \\ &= T \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \cdot 2j \sin \pi f T = j2T \frac{\sin^2(\pi f T)}{\pi f T} \end{aligned}$$

Essendo $x(t)$ ad area nulla, la trasformata del suo integrale si ottiene dividendo $X(f)$ per $j2\pi f$, ovvero

$$Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} = \frac{j2T \sin^2(\pi f T)}{j2\pi f} \frac{T}{T} = \left(T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2 = (T \text{sinc}(fT))^2$$

il cui andamento è mostrato in figura 3.6. Da questo risultato consegue infine che $\mathcal{F}\{\text{tri}_{2T}(t)\} = T \text{sinc}^2(fT)$, come riportato al § 3.8.8.

²⁹Si può giungere ad un risultato anche nel caso in cui $X(0) \neq 0$, ricorrendo all'impulso $\delta(t)$. Occorre scrivere l'integrale di $x(t)$ nella forma di una convoluzione con un *gradino unitario* $u(t)$, cioè $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) u(t - \theta) d\theta$ (si pensi alla costruzione grafica del § 3.4.3). Al § 3.8.6 si ricava che la trasformata del gradino vale $U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$, ed applicando la proprietà della trasformata della convoluzione si ottiene $Y(f) = X(f) U(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} X(0)$ che è la formula più generale per l'integrazione, ed in cui l'ultimo termine scompare per segnali ad area nulla, riottenendo la (3.25).

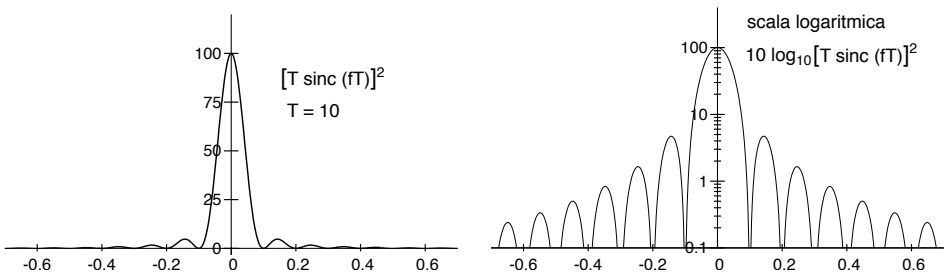


Figura 3.6: Andamento di $(T \text{sinc}(fT))^2$ in scala lineare e logaritmica; $T = 10$.

Densità di energia del rettangolo Lo stesso risultato mostrato nell'esempio può essere ottenuto per altra via, notando che il triangolo è il risultato della convoluzione di due rettangoli:

$$y(t) = T \cdot \text{tri}_{2T}(t) = \text{rect}_T(t) * \text{rect}_T(t) \quad (3.26)$$

Come verifica, si ripercorra la costruzione grafica riportata alla sezione 3.4.3. E' quindi ora sufficiente applicare la proprietà del prodotto in frequenza, per ottenere:

$$Y(f) = \mathcal{F}\{T \cdot \text{tri}_{2T}(t)\} = [\mathcal{F}\{\text{rect}_T(t)\}]^2 = [T \text{sinc}(fT)]^2 \quad (3.27)$$

Il risultato (3.27) è anche pari alla densità di energia $\mathcal{E}_z(f)$ di un segnale rettangolare $z(t) = \text{rect}_T(t)$: infatti per il teorema di Parseval (eq. (3.7)) si ha $\mathcal{E}_z(f) = Z(f) Z^*(f)$, in cui $Z(f) = \mathcal{F}\{\text{rect}_T(t)\} = T \text{sinc}(fT)$, e pertanto

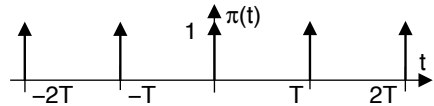
$$\mathcal{E}_z(f) = [T \text{sinc}(fT)]^2 \quad (3.28)$$

Prima di terminare il capitolo, definiamo un nuovo importante tipo di segnale *tuttofare*.

3.7 Treno di impulsi

La ripetizione periodica di un impulso di Dirac $\delta(t)$ dà luogo ad un segnale del tutto particolare, il cui ruolo si rivelerà fondamentale in diversi aspetti trattati nel testo, come il campionamento (cap. 4) e la trasmissione numerica (cap. 15); nel seguito ne mostriamo una prima applicazione orientata ad ottenere la descrizione della trasformata per un segnale periodico, senza necessità di calcolare i relativi coefficienti di Fourier.

Definizione Un treno di impulsi (o segnale *a pettine*) di periodo T viene rappresentato dal simbolo $\pi_T(t)$ ed è realizzato come una serie infinita di impulsi di Dirac



$$\pi_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad (3.29)$$

Serie di Fourier Il segnale $\pi_T(t)$ è periodico, e dunque può essere rappresentato mediante la relativa serie come $\pi_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_n e^{j2\pi n F t}$ con $F = \frac{1}{T}$ ed i cui coefficienti Π_n sono pari a

$$\begin{aligned} \Pi_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \right] e^{-j2\pi n F t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n F t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \delta(t) dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

in quanto tra tutti gli impulsi della sommatoria ne resta solo uno, quello centrato in zero, dato che tutti gli altri cadono al di fuori dei limiti di integrazione, mentre la penultima eguaglianza tiene conto della (3.13). Tutti i coefficienti risultano pertanto

avere lo stesso valore, pari ad $\frac{1}{T}$, ottenendo lo sviluppo

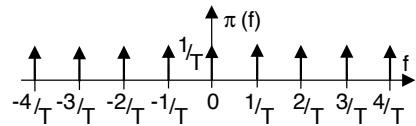
$$\pi_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n F t} \quad (3.30)$$

Notiamo inoltre che, essendo $\pi_T(t)$ un segnale reale pari, l'eq. (3.30) può essere riscritta³⁰ come una serie di coseni (vedi il § 2.2.1.3) $\pi_T(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2\pi n F t$.

Trasformata del treno di impulsi Si può ottenere applicando la (3.12) alla (3.30), ovvero

$$\mathcal{F}\{\pi_T(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n F t}\right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \Pi_{\frac{1}{T}}(f) \quad (3.31)$$

ottenendo così il risultato che la trasformata di un treno di impulsi è a sua volta un treno di impulsi, di ampiezza $1/T$, e con periodo (in frequenza) che è l'inverso di quello originario, cioè $\mathcal{F}\{\pi_T(t)\} = \frac{1}{T} \Pi_{\frac{1}{T}}(f)$.



Trasformata di un segnale periodico Utilizziamo ora il risultato (3.31) per ottenere una formula alternativa alla (3.12) per un generico segnale $x(t)$ periodico con periodo T , che innanzitutto scriviamo come una serie infinita di ripetizioni di un suo periodo $g(t)$

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT) \quad (3.32)$$

Sfruttando la proprietà (3.19) di convoluzione con l'impulso traslato, la (3.32) può essere scritta nei termini della (3.29) come

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t) * \delta(t - mT) = g(t) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = g(t) * \pi_T(t)$$

dove nel secondo passaggio si è sfruttata la linearità della convoluzione. Ricordando ora la proprietà della moltiplicazione in frequenza (3.22) otteniamo che lo spettro di $x(t)$ si esprime come

$$X(f) = G(f) \cdot \mathcal{F}\{\pi_T(t)\} \quad (3.33)$$

e quindi, sostituendo l'espressione di $\mathcal{F}\{\pi_T(t)\}$ ottenuta con la (3.31) nella (3.33) otteniamo

$$X(f) = G(f) \cdot \frac{1}{T} \Pi_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (3.34)$$

ovvero la trasformata di un segnale periodico $x(t)$ è pari al prodotto tra la trasformata $G(f) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ di un suo periodo, ed un treno di impulsi in frequenza di periodo $\frac{1}{T}$ ed ampiezza $\frac{1}{T}$.

³⁰Sembra strano che $\pi_T(t)$ si ottenga come somma di infiniti coseni a frequenza armonica e tutti della stessa ampiezza $\frac{2}{T}$? Per verificare il risultato, visitare <https://dspillustrations.com/pages/posts/misc/the-dirac-comb-and-its-fourier-transform.html>

Riprendendo in considerazione il caso dell'onda quadra affrontato al § 2.2.1.4, non è difficile riconoscere come, ponendo $g(t) = A \text{rect}_\tau(t)$, a cui corrisponde $G(f) = A\tau \text{sinc}(f\tau)$, il prodotto di $G(f)$ per il treno di impulsi $\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF)$ (con $F = \frac{1}{T}$) fornisce il risultato già incontrato:

$$X(f) = A \frac{\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(nF\tau) \delta(f - nF)$$

Somma di Poisson Il risultato ottenuto è un aspetto dell'uguaglianza nota come *somma di Poisson*³¹ e che permette di esprimere una somma infinita basata su di una funzione nel tempo, nei termini di una somma infinita basata su di una funzione della frequenza, che è la trasformata di quella nel tempo. Nel caso in esame, antitrasformando entrambi i membri della (3.34) si ottiene

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} G\left(\frac{n}{T}\right) e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$$

che riconosciamo corrispondere all'espansione in serie di Fourier del segnale periodico $x(t)$, non appena constatato come i termini $\frac{1}{T} G\left(\frac{n}{T}\right)$ altro non sono che i suoi coefficienti Fourier, come d'altra parte risulta anche dalla (3.4).

3.8 Appendici

3.8.1 Grafico della trasformata di un rettangolo ritardato

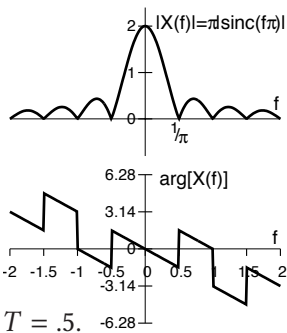
Affrontiamo il problema definito a pag. 66. Conviene iniziare esprimendo $X(f) = \tau \text{sinc}(f\tau)$ come

$$X(f) = \tau |\text{sinc}(f\tau)| e^{j\phi(f)}$$

in cui, adottando la funzione $\text{sgn}(x) = x/|x|$ (pag. 1.5.3),

$$\phi(f) = \frac{\pi}{2} \{1 - \text{sgn}[\text{sinc}(f\tau)]\} \cdot \text{sgn}(f)$$

alterna valori tra 0 e π in funzione del segno del *sinc*, in modo che quando *sinc* è negativo la fase sia π e dunque il fattore $e^{j\pi} = -1$ ristabilisce il suo corretto valore. Inoltre, il prodotto per $\text{sgn}(f)$ rende la fase un segnale *dispari*.



L'esercizio chiedeva di calcolare la trasformata di $z(t) = x(t - T) = \text{rect}_\tau(t - T)$, e dunque possiamo dire che la traslazione temporale del *rect* determina per $Z(f)$ uno spettro di modulo ancora pari a $|Z(f)| = \tau |\text{sinc}(f\tau)|$, mentre alla fase $\phi(f)$ si aggiunge il contributo *lineare* in f pari a $\varphi(f) = -2\pi fT$, ottenendo quindi

$$Z(f) = \tau |\text{sinc}(f\tau)| e^{j(\phi(f) - 2\pi fT)}$$

che viene rappresentato in figura, avendo posto $\tau = 2$ e

³¹Per un approfondimento si veda ad es.

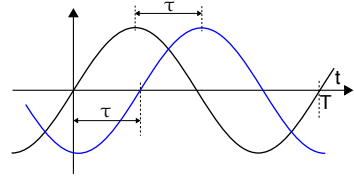
3.8.2 Misura di una differenza di fase

Come suggerito a pagina 75, esaminiamo come valutare una differenza di fase tra due sinusoidi, ad esempio quando vogliamo misurare la risposta di fase di un sistema. A questo scopo, prendiamo il grafico (letto su un oscilloscopio a doppia traccia) dove due sinusoidi con periodo uguale T hanno un ritardo τ . Dobbiamo in effetti valutare la semplice *proporzione*

$$\tau : T = \varphi : 2\pi$$

in modo da ottenere

$$\varphi = 2\pi \frac{\tau}{T}$$



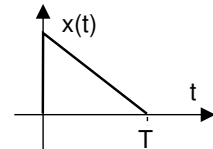
ma ora notiamo che la curva blu ha *un ritardo*, quindi la sua fase rispetto al seno nero è $-\varphi$. Ma forse la domanda a monte è: perché un intero periodo T equivale a un angolo uguale a 2π ? Ecco...

- in primo luogo si noti³² che il rapporto tra la circonferenza C e il diametro d di ogni cerchio è $3.14159\dots = \pi$, ovvero $\frac{C}{d} = \pi$;
- si consideri quindi che il diametro d è doppio del raggio, cioè $d = 2r$, cosicché $\frac{C}{r} = 2\pi$;
- in conclusione quando un punto, ruotando su una circonferenza *di raggio unitario*, ha compiuto un giro completo, ha percorso una distanza di 2π .

3.8.3 Quanti sono i possibili modi di calcolare una trasformata?

Sia dato il segnale

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{T} & \text{con } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



mostrato in figura. Descrivere quanti più modi possibili di calcolarne lo spettro di densità di energia $\mathcal{E}_x(f)$.

1. Si calcola $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$ e quindi $\mathcal{E}_x(f) = |X(f)|^2$;
2. Notando che $x(t) = y(t) \cdot z(t)$ con $y(t) = \text{tri}_{2T}(t)$ e $z(t) = \text{rect}_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$, possiamo scrivere $X(f) = Y(f) * Z(f)$, e quindi si procede come in 1);
3. Notiamo che la derivata³³ di $x(t)$ vale $g(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \delta(t) - \frac{1}{T}\text{rect}_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$; questo ci permette di calcolare $G(f)$ come $G(f) = \mathcal{F}\{g(t)\} = 1 - \text{sinc}(fT) \cdot e^{-j\pi fT}$. Otteniamo quindi $X(f) = \frac{G(f)}{j2\pi f}$, e quindi come in 1);
4. Anticipando un risultato del § 7.2.1, è possibile calcolare $\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t + \tau) dt$, e quindi $\mathcal{E}_x(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$.

³²Vedi <https://www.geogebra.org/m/sgBZefns> per una animazione

³³La derivata di una discontinuità di prima specie è pari ad un impulso di Dirac, di area uguale all'altezza della discontinuità. Infatti l'integrale dell'impulso $\int_{-\infty}^t \delta(\theta) d\theta$ è proprio un gradino. Questa considerazione consente di risolvere in modo semplice le trasformate di segnali in cui è presente una discontinuità.

3.8.4 Finestratura e stima spettrale

Applichiamo ora la teoria svolta al § 3.5.2 per speculare sull'interpretazione della trasformata di $x(t)$ svolta a partire da un segmento $y(t)$ ottenuto delimitando $x(t)$ nel tempo mediante moltiplicazione per una *funzione finestra* di durata limitata $w(t)$. La trasformata di $y(t) = x(t)w(t)$ fornisce infatti il valore $Y(f) = X(f) * W(f)$, e quindi il *vero spettro* $X(f)$ di $x(t)$ non può essere conosciuto, se non tramite l'effetto della convoluzione con quello $W(f)$ della funzione finestra $w(t)$: in questo caso si parla dunque più propriamente di *stima spettrale* (vedi § 7.3). Già a pagina 76 si è fatto notare come, se $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t$ e $w(t) = \text{rect}_T(t)$, si ottiene che $W_{\text{rect}}(f) = T \text{sinc}(fT)$, e pertanto

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot w(t)\} = \frac{AT}{2} (\text{sinc}[(f - f_0)T] + \text{sinc}[(f + f_0)T])$$

tanto più diverso dai due impulsi del coseno (vedi Fig. 3.5), quanto più è piccolo T .

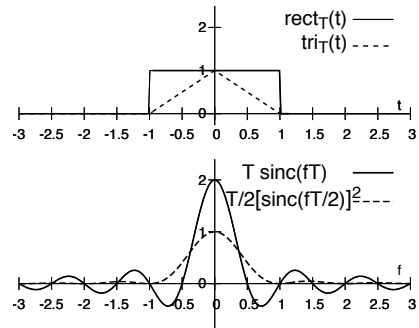
Valutiamo ora gli effetti derivanti dall'uso di una funzione finestra diversa da quella rettangolare. Se ad esempio si sceglie di adottare una finestra *triangolare* di eguale durata T , a partire dalla (3.27) si ottiene

$$W_{\text{tri}}(f) = \mathcal{F}\{w(t) = \text{tri}_T(t)\} = \frac{T}{2} \left[\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) \right]^2$$

Come può essere verificato dalla figura a fianco, la finestra triangolare esibisce un andamento nel tempo *più dolce* (non ha discontinuità di prima specie) rispetto al $\text{rect}(t)$, e ciò si riflette in una maggiore concentrazione della sua trasformata alle frequenze più basse. Infatti $W_{\text{tri}}(f)$ ha un *lobo principale* di estensione *doppia* rispetto a $W_{\text{rect}}(f)$ (il primo zero si trova ad $f = \frac{2}{T}$ anziché ad $\frac{1}{T}$), mentre le *code laterali* decrescono *più rapidamente*, andando a zero come $\frac{1}{f^2}$; infine, il valore $W_{\text{tri}}(f = 0)$ risulta dimezzato, così come l'area della $w_{\text{tri}}(t)$.

L'andamento del *lobo principale* e delle *code* di $W(f)$ si riflette nell'andamento della trasformata del segnale finestrato qualora il segnale originario contenga, ad esempio, più di una frequenza: per la linearità della trasformata, il risultato sarà la replica di $W(f)$ centrata alle frequenze presenti. La Fig. 3.7 confronta il risultato ottenibile per un segnale contenente due sinusoidi di frequenza $f_0 = 10$ e $f_1 = 15$ Hz, quando delimitato (a sinistra) mediante una finestra rettangolare di durata (dall'alto in basso) $T = 2, 0.5$, e 0.25 secondi³⁴, oppure (a destra) mediante una finestra triangolare della stessa durata. E' possibile distinguere due effetti.

Risoluzione spettrale Osserviamo che al diminuire del prodotto $(f_1 - f_0) \cdot T$, le due trasformate $W(f)$ *interagiscono*, fino ad esibire un andamento complessivo in cui non è più possibile *distinguere* la presenza di due diversi toni. Il fenomeno illustrato avviene



³⁴Queste durate corrispondono quindi ad utilizzare 20 cicli di sinusoidi, oppure 5, oppure due e mezzo.

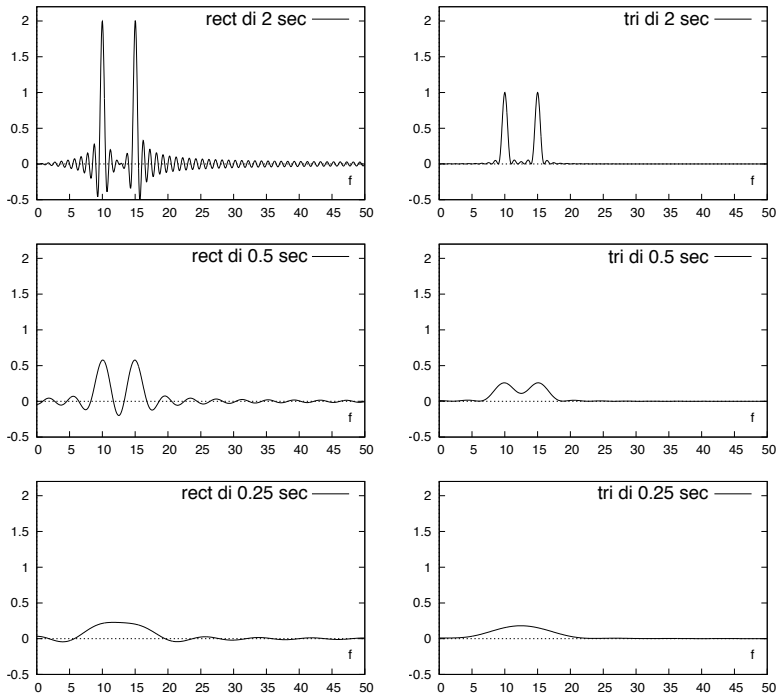


Figura 3.7: Trasformata di due toni a 10 e 15 Hz, con finestra temporale $\text{rect}_T(t)$ e $\text{tri}_T(t)$ di durata 2, 0.5 e 0.25 secondi

tanto prima, quanto più il lobo principale di $W(f)$ è esteso; pertanto, l'uso di una finestra triangolare peggiora la situazione: in effetti, la finestra rettangolare è quella che permette la migliore capacità di distinguere due toni.

Infiltrazione spettrale Detto *leakage* in inglese, indica l'influenza che una determinata componente spettrale ha nei confronti delle altre porzioni dello spettro: ad esempio, la prima riga di fig. 3.7 mostra come adottando $w(t) = \text{tri}_T(t)$ si ottiene un $Y(f)$ più simile a quello di due toni, piuttosto che con un $\text{rect}_T(t)$. Ciò è dovuto alle ampie code di $W_{\text{rect}}(f) = T \text{sinc}(fT)$ che appunto *infiltrano* il contenuto energetico di ciascun tono a frequenze anche distanti, mentre nel caso di $w(t) = \text{tri}_T(t)$ ciò avviene in forma assai ridotta, evitando di mostrare *artefatti*.

Considerazioni di questo tipo possono far preferire una tra le diverse possibili proposte³⁵ di funzione finestra, in dipendenza dal particolare obiettivo della stima spettrale (§ 7.3).

³⁵Nel tempo sono state definite un elevato numero di finestre temporali, ognuna *migliore* sotto certi aspetti, e *peggiore* sotto altri. Consultando Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Window_function, possiamo elencare le finestre di *Hamming*, *Hann*, *Cosine*, *Lanczos*, *Bartlett*, *Gauss*, *Blackman*, *Kaiser*, *Nuttall*, *Bessel*, *Dolph-Chebyshev*, *Exponential*, *Tukey*...

3.8.5 Gli esponenziali complessi come base ortogonale

Al § 3.1 sono esposte similitudini tra la serie e la trasformata di Fourier; chiediamoci ora se le funzioni $e^{j2\pi ft}$ possano anche in questo caso essere considerate come una base *ortonormale* (pag. 52), e se la (3.1) sia una *proiezione* di $x(t)$ lungo tali vettori.

Un primo ostacolo è rappresentato dal fatto che ora la cardinalità dello spazio di rappresentazione risulta veramente *infinita*, e non più infinita *numerabile* come per la serie. Ma l'ostacolo maggiore sembra essere che le funzioni $e^{j2\pi ft}$ non sono segnali impulsivi, e neanche di energia: infatti $e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi ft} = 1$, e dunque la definizione di prodotto scalare (3.5) e di norma fornisce $\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi ft} dt = \infty$. Ma se proviamo ad effettuare il calcolo del prodotto scalare tra due esponenziali $e^{j2\pi ft}$ ed $e^{j2\pi \lambda t}$ come risultato di un passaggio al limite, otteniamo

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi \lambda t} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{j2\pi (f-\lambda)t} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \cdot \text{sinc}((f-\lambda)\tau) = \delta(f-\lambda)$$

in cui si è fatto uso del risultato (3.3) e del fatto che l'ultimo limite tende ad un impulso di Dirac, come mostrato al § 3.4, ottenendo che $\langle e^{j2\pi ft}, e^{j2\pi \lambda t} \rangle = \delta(f-\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se } f \neq \lambda \\ \infty & \text{se } f = \lambda \end{cases}$. Se poi applichiamo agli esponenziali la definizione di prodotto interno *per segnali di potenza* (2.28), si ottiene che

$$\langle e^{j2\pi ft}, e^{j2\pi \lambda t} \rangle_{pot} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \text{sinc}((f-\lambda)\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } f \neq \lambda \\ 1 & \text{se } f = \lambda \end{cases}$$

permettendo dunque di dichiarare la base $\{e^{j2\pi ft}\}$ come *ortonormale* per lo spazio dei segnali di potenza.

Effettivamente, visto che l'introduzione dell'impulso $\delta(\cdot)$ permette di estendere l'operatore di trasformata di Fourier anche al caso dei segnali periodici (pag. 69), che sono di potenza, sembra sensato considerare quest'ultimo come lo spazio corretto in cui individuare le funzioni della base che permette la rappresentazione $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$ dei segnali $x(t)$ nei termini della corrispondente trasformata di Fourier $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$.

3.8.6 Trasformata di un gradino

Definiamo la funzione gradino³⁶ come $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{per } t = 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$ che, fornendo $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt =$

∞ , non dovrebbe avere una trasformata $U(f)$. Proviamo allora a gestire il gradino nelle vesti di una *distribuzione*, ed in modo simile a quanto fatto al § 3.4 per la costante, lo rappresentiamo come il limite a cui tende una *successione* $u(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u_{\alpha}(t)$, dei cui elementi valutare la trasformata $U_{\alpha}(f) = \mathcal{F}\{u_{\alpha}(t)\}$, e adottare $U(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} U_{\alpha}(f)$ come trasformata di $u(t)$. Scegliamo quindi $u_{\alpha}(t) = e^{-\alpha t}$ per $t > 0$ che effettivamente

³⁶Nota anche come funzione di Heaviside, vedi

https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_gradino_di_Heaviside

converge a $u(t)$ per $\alpha \rightarrow 0$, e troviamo

$$U_\alpha(f) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{e^{-(\alpha+j2\pi f)t}}{-(\alpha+j2\pi f)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha+j2\pi f} = \frac{\alpha-j2\pi f}{\alpha^2+(2\pi f)^2} \quad (3.35)$$

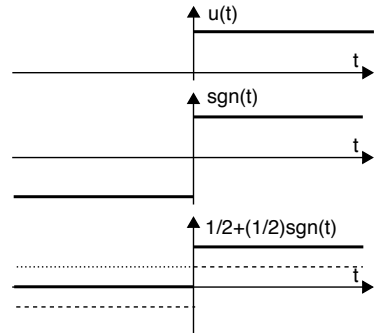
Mentre per la parte immaginaria risulta che

$$U^{Im}(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Im \{U_\alpha(f)\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-2\pi f}{\alpha^2+(2\pi f)^2} = -\frac{1}{2\pi f}$$

e *va bene così*, il limite della parte reale della (3.35) $U^{Re}(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$ assume invece la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ se anche $f \rightarrow 0$. Per tentare di capire *cosa manca*, proviamo ad antitrasformare $jU^{Im}(f)$, ottenendo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left\{ -\frac{j}{2\pi f} \right\} &= \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi f} df = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2\pi f t}{j2\pi f} df + j \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin 2\pi f t}{j2\pi f} df = \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin 2\pi f t}{2\pi f} df = t \int_{-\infty}^\infty \text{sinc}(2ft) df = \frac{t}{2|t|} = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \end{aligned}$$

dato che $\frac{\cos 2\pi f t}{j2\pi f}$ è una funzione dispari e dunque dà integrale nullo³⁷, mentre la penultima uguaglianza sfrutta il risultato (3.9). *Ci siamo quasi!* Infatti, il gradino può essere riscritto come $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$ (vedi la figura a lato), e in questo modo ci accorgiamo che mentre $jU^{Im}(f) = -\frac{j}{2\pi f}$ è la trasformata di $\frac{1}{2} \text{sgn}(t)$, $U^{Re}(f)$ deve necessariamente convergere alla trasformata di $\frac{1}{2}$, ovvero ad un impulso di area $\frac{1}{2}$, permettendo finalmente di scrivere



$$U(f) = \mathcal{F} \{u(t)\} = \frac{1}{2} \left(\delta(f) - \frac{j}{\pi f} \right)$$

Sembrano conti troppo contorti? In realtà l'abbiamo *fatta semplice*...³⁸.

3.8.7 Proprietà della trasformata di Fourier

Di seguito, uno schema riassuntivo delle relazioni illustrate nel capitolo

³⁷Ciò è vero purché si consideri il metodo di calcolo dell'integrale noto come *valore principale di Cauchy*, in quanto $\frac{\cos 2\pi f t}{j2\pi f}$ tende a $\frac{1}{0}$ per $f \rightarrow 0$, con valori opposti per 0^+ e 0^- , vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Valore_principale_di_Cauchy.

³⁸Vedi ad es. <http://bueler.github.io/M611F05/M611heaviside.pdf>

PROPRIETÀ	$z(t)$	$Z(f) = \mathcal{F}\{z(t)\}$
Linearità	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Coniugato	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Cambiamento di scala	$x(at)$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$
Ritardo	$x(t-T)$	$X(f)e^{-j2\pi fT}$
Traslazione in frequenza	$x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f-f_0)$
Modulazione di ampiezza	$x(t)\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0)$
Prodotto in frequenza	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Prodotto nel tempo	$x(t)y(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma)Y(f-\sigma)d\sigma$
Dualità	$X(t)$	$x(-f)$
Simmetria coniugata	$x(t)$ reale	$X(f) = X^*(-f)$
Derivazione	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j2\pi f \cdot X(f)$
Integrazione	$\int_{-\infty}^t x(\theta)d\theta$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)X(0)$

3.8.8 Trasformate di segnali

Un sommario dei risultati per alcune trasformate

$x(t)$	$X(f)$	\mathcal{P}/\mathcal{E}	$\mathcal{P}(f)/\mathcal{E}(f)$	Pot/En
$\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$	$\frac{1}{2}e^{j\varphi}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi}\delta(f+f_0)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\delta(f-f_0) + \frac{1}{4}\delta(f+f_0)$	P
A	$A \cdot \delta(f)$	A^2	$A^2 \cdot \delta(f)$	P
$A \cdot \text{rect}_\tau(t)$	$A \cdot \tau \text{sinc}(f\tau)$	$A^2 \cdot \tau$	$A^2 \cdot \tau^2 \text{sinc}^2(f\tau)$	E
$A \cdot \text{tri}_{2\tau}(t)$	$A \cdot \tau \text{sinc}^2(f\tau)$ ⁽¹⁾	$A^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \tau$	$A^2 \cdot \tau^2 \text{sinc}^4(f\tau)$	E
$e^{-\beta t}, t \geq 0$	$\frac{1}{\beta + j2\pi f}$ ⁽²⁾		$\frac{1}{\beta^2 + 4(\pi f)^2}$	E
$e^{-\beta t }$	$\frac{2\beta}{\beta^2 + 4(\pi f)^2}$ ⁽³⁾		$\frac{4\beta^2}{\beta^4 + 8(\pi\beta f)^2 + 16(\pi f)^4}$	E
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{(\sigma 2\pi f)^2}{2}}$ ⁽⁴⁾		$2\pi\sigma^2 e^{-(\sigma 2\pi f)^2}$	E
$\begin{cases} 1 & \text{con } t > 0 \\ 0 & \text{con } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{2}\left(\delta(f) - \frac{j}{\pi f}\right)$ ⁽⁵⁾			
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$ ⁽⁶⁾			

1. Per il risultato di $\mathcal{F}\{\text{tri}_{2\tau}(t)\}$, vedi esercizio a pag. 79;
2. per il risultato di $\mathcal{F}\{e^{-\beta t}\}$, vedi nota 14 a pag. 123;
3. per il risultato di $\mathcal{F}\{e^{-\beta|t|}\}$, vedi nota 33 a pag. 206;
4. per il risultato di $\mathcal{F}\{e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\}$, vedi nota 25 a pag. 156;
5. per la trasformata della funzione gradino, vedi § 3.8.6;
6. per la trasformata del treno di impulsi, vedi § 3.7.

Campionamento quantizzazione ed elaborazione numerica

SONO esposti i metodi che consentono di rappresentare un segnale per mezzo dei suoi *campioni*¹ temporali, permettendone la codifica in forma numerica: infatti i campioni sono una sequenza di *numeri*² e quindi (dopo la *quantizzazione*) *bit*. Le operazioni descritte ai precedenti capitoli e che operano sul segnale $x(t)$, possono essere pertanto eseguite direttamente sulla sua rappresentazione numerica, dando luogo alle tecniche indicate come *elaborazione numerica* dei segnali, di cui anche si fornisce qualche accenno, relativo alla rappresentazione frequenziale di sequenze, ed al suo impiego nelle operazioni di filtraggio.

4.1 Teorema del campionamento

Esprime la possibilità di ricostruire un segnale *limitato in banda* a partire dai suoi campioni:

Un segnale con spettro nullo a frequenze maggiori di W è completamente descritto dai suoi valori prelevati ad intervalli temporali regolari $t_n = nT_c$, con n intero e periodo di campionamento $T_c \leq \frac{1}{2W}$; da questi è possibile risalire ai suoi valori per qualunque altro istante

La frequenza $f_{c_{min}} = \frac{1}{T_{c_{Max}}} = 2W$, chiamata *velocità di Nyquist*³, corrisponde alla *minima* velocità con cui occorre campionare un segnale $x(t)$ limitato in banda, ed è pari al doppio della massima frequenza W presente nel segnale. Se questa condizione è

¹Al termine *campione* è associato il *valore* di un segnale ad un determinato istante, e può essere considerato come sinonimo di esemplare, o esempio, ovvero *sample* in inglese; da non confondere con *champion*, o primatista!

²*Digits* in inglese, che a sua volta deriva dal latino *digitus*, da cui il termine *digitale* come sinonimo di *numerico*. In effetti il *dito* era una unità di misura utilizzata prima che nell'impero Romano, in Grecia, Egitto e Mesopotamia.

³Questo teorema è stato derivato indipendentemente e in tempi diversi da *Borel*, *Whittaker*, *Kotelnikov* e *Shannon*. Il contributo di Nyquist è in realtà relativo al problema di determinare la massima velocità di segnalazione f_s su di un canale limitato in banda, vedi § 15.2.2.2.

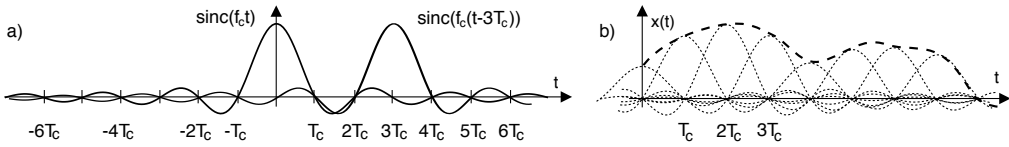


Figura 4.1: a) - Funzione sinc $(f_c t)$ centrata in $t = 0$ e traslata in $t = 3T_c$; b) - ricostruzione del segnale limitato in banda mediante la formula (4.1)

rispettata, il segnale originario può essere (ad esempio⁴) ricostruito ricorrendo ad una formula di *interpolazione*⁵ (detta *cardinale*) che utilizza i campioni di segnale $x(nT_c)$ nell'espressione

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c) \cdot \text{sinc}(f_c(t - nT_c)) \quad (4.1)$$

che si basa sulla ripetizione ritmica del segnale $\text{sinc}(f_c t) = \frac{\sin \pi f_c t}{\pi f_c t}$, detto per questo motivo *seno cardinale* (pag. 1.5.3). Come richiamato in fig. 4.1-a), $\text{sinc}(f_c t)$ passa da zero per gli istanti $t = n/f_c = nT_c$, e dunque sommando i termini $\text{sinc}(f_c(t - nT_c))$ centrati a multipli di T_c e con ampiezza $x(nT_c)$ si ottiene il risultato di 4.1-b), ovvero un segnale che per $t = nT_c$ vale *esattamente* $x(nT_c)$, mentre negli istanti intermedi il valore si forma come *somma* di tutte le “code” dei sinc adiacenti.

Osserviamo ora che la (4.1) può essere realizzata mediante lo schema simbolico mostrato in fig. 4.2, ovvero moltiplicando il segnale $x(t)$ per un treno di impulsi $\pi_{T_c}(t)$ con periodo $T_c \leq 1/2W$, ed il risultato $x^\bullet(t)$ fatto passare attraverso un filtro con risposta impulsiva $h(t) = \text{sinc}(f_c t)$. Il segnale $x^\bullet(t) = x(t) \cdot \pi_{T_c}(t)$ è dunque costituito (eq. (3.13)) da impulsi con area pari ai campioni di segnale, ossia

$$x^\bullet(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c) \delta(t - nT_c)$$

e per ogni impulso $x(nT_c) \delta(t - nT_c)$ presente in ingresso al filtro si otterrà in uscita una replica della risposta impulsiva centrata sulla posizione dell'impulso, ovvero $x(nT_c) \cdot \text{sinc}(f_c(t - nT_c))$, e cioè

$$\begin{aligned} y(t) &= x^\bullet(t) * h(t) = \left[\sum_n x(nT_c) \delta(t - nT_c) \right] * \text{sinc}(f_c t) = \\ &= \sum_n x(nT_c) \text{sinc}(f_c(t - nT_c)) \end{aligned}$$

che corrisponde alla (4.1). Per dimostrare che il segnale $y(t)$ così ottenuto eguaglia il segnale originario $x(t)$, deriviamo l'espressione di $X^\bullet(f) = \mathcal{F}\{x^\bullet(t)\}$. Ricordando il risultato a pag. 81 per la trasformata di un treno di impulsi, possiamo scrivere

⁴Al § 4.2.2 troveremo che in realtà la formula (4.1) non è l'unica possibile.

⁵L'*interpolazione* individua un insieme di metodi per ottenere un segnale che passi per N punti (istante, valore) prefissati, vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Interpolazione>. Qualora i punti siano *prelevati* a frequenza $f_c \geq f_{c_{min}}$ da un segnale limitato in banda, la (4.1) fornisce i suoi valori *esatti* anche per istanti $t \neq nT_c$, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Formula_di_interpolazione_di_Whittaker-Shannon.

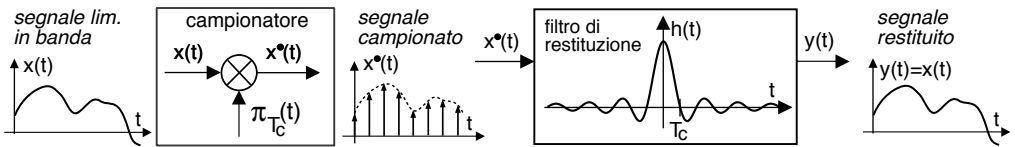


Figura 4.2: Campionamento del segnale $x(t)$ e sua ricostruzione mediante filtraggio del segnale campionato $x^*(t)$

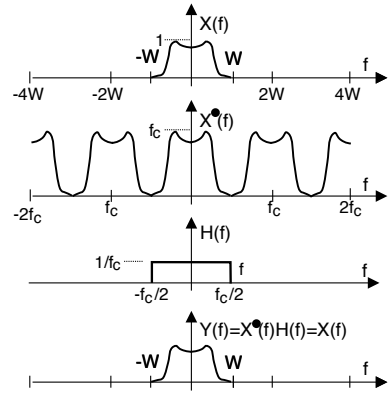
$$\begin{aligned} X^*(f) &= \mathcal{F} \{ x(t) \cdot \pi_{T_c}(t) \} = X(f) * \frac{1}{T_c} \Pi_{\frac{1}{T_c}}(f) = X(f) * \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T_c} \right) = \\ &= f_c \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f - nf_c) = f_c \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_c) \end{aligned} \quad (4.2)$$

dove il penultimo passaggio scambia l'integrale (di convoluzione) di una somma con una somma di integrali, e l'ultimo passaggio tiene conto della proprietà di convoluzione con un impulso (§ 3.4.4).

Lo spettro di $x^*(t)$ è dunque un segnale *periodico in frequenza* costituito da infinite repliche di $X(f)$, centrate a multipli della frequenza di campionamento f_c , e che *nel caso in cui* si sia scelto $f_c = 2W$ ovvero pari al suo valore *minimo*, appare come mostrato a lato⁶.

A questo punto osserviamo che al filtro con $h(t) = \text{sinc}(f_c t)$ corrisponde una risposta in frequenza

$$H(f) = \frac{1}{f_c} \text{rect}_{f_c}(f) \quad (4.3)$$



ovvero quella di un *passa basso ideale*, che permette l'attraversamento delle sole frequenze nell'intervallo $(-f_c/2, f_c/2)$, e dunque dell'unica replica spettrale di $X^*(f)$ centrata in $f = 0$. In uscita è quindi presente un segnale $y(t)$ con spettro di ampiezza

$$Y(f) = H(f) X^*(f) = \frac{1}{f_c} f_c X(f) = X(f)$$

che è perfettamente equivalente al segnale originario, ma ricostruito sulla base dei suoi soli campioni $x(nT_c)$. Per questo motivo il filtro $H(f)$ è anche noto come *filtro di restituzione*.

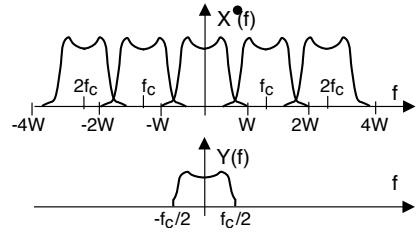
Abbiamo così verificato la correttezza della (4.1) che esprime il teorema del campionamento nella sua forma *cardinale*, ossia quando f_c è *esattamente* pari a $2W$, cioè pari al suo valore minimo. Analizziamo ora cosa accade se la condizione $f_c \geq 2W$ non è rispettata.

⁶Il risultato ottenuto replica in frequenza quello della trasformata di segnali periodici nel tempo: ad un segnale periodico *in frequenza* con periodo f_c corrisponde una *antitrasformata* di Fourier costituita da impulsi *nel tempo* distanziati dall'inverso $T_c = 1/f_c$ del periodo f_c .

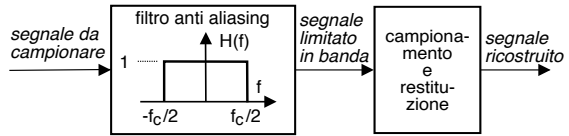
4.1.1 Aliasing

Questo termine ha origine dalla parola inglese⁷ *alias* (copia, clone) e sta ad indicare il fenomeno che si produce nell'applicare il teorema del campionamento quando i requisiti non sono soddisfatti, e cioè quando la frequenza di campionamento è inferiore alla velocità di Nyquist, ossia $f_c = \frac{1}{T_c} < 2W$ (ovvero $T_c > \frac{1}{2W}$). In questo caso la (4.2) indica come le repliche spettrali che compongono $X^*(f)$ siano più ravvicinate, e si sovrappongono, come rappresentato dalla figura a lato: l'aliasing è infatti indicato anche come FOLD-OVER, o *ripiegamento*.

Quando questo avviene il filtro passa-basso di restituzione non è più in grado di estrarre la replica centrata in $f = 0$, e dunque il segnale $y(t)$ alla sua uscita si differenzia da $x(t)$ in particolar modo per i contenuti energetici nella regione delle frequenze più elevate⁸.



Filtro anti-aliasing Il fenomeno dell'aliasing può insorgere, oltre che nel caso in cui si commetta il banale errore di adottare $f_c < 2W$, anche a causa di una imperfetta limitazione in banda del segnale da campionare, che infatti viene sempre preventivamente filtrato, in modo da assicurarsi che non contenga componenti a frequenze maggiori della metà di quella di campionamento.



4.1.2 Ortogonalità delle funzioni sinc

Si può dimostrare⁹ che le funzioni *sinc* costituiscono una base di rappresentazione ortogonale per segnali limitati in banda, in quanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(f_c(t - kT_c)) \text{sinc}(f_c(t - hT_c)) dt = T_c \cdot \delta(h, k) = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k \\ T_c & \text{se } h = k \end{cases} \quad (4.4)$$

Pertanto sussiste un *equivalente* del teorema di Parseval (2.3), ed il valore dell'energia di un segnale limitato in banda è calcolabile a partire dai suoi campioni, e vale

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \sum_k \sum_h x_k x_h^* \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(f_c(t - kT_c)) \text{sinc}(f_c(t - hT_c)) dt \\ &= \sum_k \sum_h x_k x_h^* T_c \delta(h, k) = T_c \sum_k |x_k|^2 \end{aligned}$$

⁷In realtà *alias* è di origine latina !!!

⁸In un segnale audio, ad esempio, ci si accorge che c'è aliasing quando è udibile una distorsione (rumore) congiuntamente ai passaggi con maggior contenuto di alte frequenze, vedi ad es.

<https://dspillustrations.com/pages/posts/misc/aliasing-and-anti-aliasing-filter.html>

⁹Applicando il teorema di Parseval (§ 3.2) e la proprietà di traslazione temporale, la (4.4) diviene

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_c \text{rect}_{f_c}(f) e^{-j2\pi f k T_c} T_c \text{rect}_{f_c}(f) e^{+j2\pi f h T_c} df = (T_c)^2 \int_{-f_c/2}^{f_c/2} e^{-j2\pi f \frac{k-h}{f_c}} df$$

in cui l'esponenziale complesso sotto integrale compie un numero *intero* di oscillazioni a media nulla per $f \in [-f_c/2, f_c/2]$ se $k \neq h$, e dunque in tal caso l'integrale è nullo; al contrario, l'esponenziale vale 1 se $k = h$, ed il suo integrale definito vale f_c , determinando il risultato mostrato, in cui $\delta(h, k)$ è il simbolo di *Kronecker*, che vale uno quando $h = k$ e zero altrimenti.

4.2 Aspetti realizzativi del campionamento

Mentre lo schema discusso al § 4.1 illustra gli aspetti teorico-matematici del teorema del campionamento e ne fornisce uno schema operativo di riferimento, nelle implementazioni reali si attuano una serie di stratagemmi volti ad ovviare agli aspetti che in pratica non è possibile realizzare.

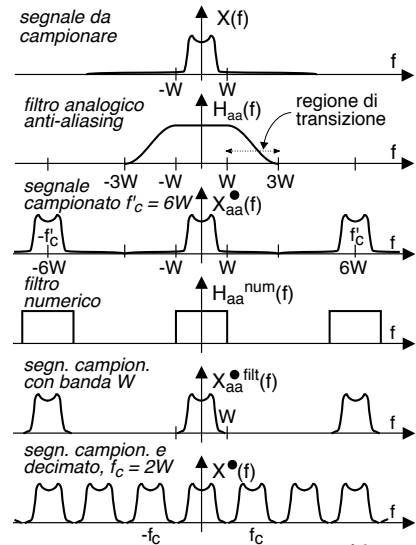
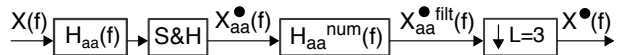
Un primo fattore di criticità sono i due filtri *analogici* previsti, quello *anti-aliasing* e l'altro *di restituzione*. Anticipando parte di ciò che sarà discusso al cap. 5, qualsiasi specifica particolarmente stringente si traduce per essi in un aumento del numero di componenti necessari, e quindi del suo costo, oltre che del suo volume. In particolare è pressoché impossibile realizzare una risposta in frequenza $H(f)$ esattamente rettangolare, mentre ciò che si può fare è un filtro che presenti una *regione di transizione* (pag. 121) tra banda passante e banda soppressa di ampiezza non nulla, a cui corrisponde una complessità del filtro tanto minore quanto più la regione è estesa.

4.2.1 Sovracampionamento e decimazione numerica

Anziché tentare di realizzare un filtro anti-aliasing che lasci passare *intatte* le frequenze inferiori alla metà della f_c desiderata e blocchi quelle strettamente superiori, se ne adotta uno con una regione di transizione *più graduale* (seconda riga della fig. a lato), dunque più facilmente realizzabile, e si adotta una freq. di campionamento pari al doppio della massima frequenza passante ($3W$ nell'esempio, e dunque $f'_c = 6W$), producendo un primo segnale campionato $X_{aa}^\bullet(f)$ privo di aliasing.

I campioni così ottenuti sono quindi elaborati mediante un filtro *numerico*, che come vedremo al § 5.2.1 presenta una $H_{aa}^{num}(f)$ periodica in frequenza, può realizzare una regione di transizione assai *più ripida*, e soprattutto non altera lo spettro di fase se non per un contributo *lineare* (pag. 239). Il segnale campionato $X_{aa}^\bullet(f)$ che ne risulta ha ora l'occupazione di banda desiderata di W (5^a riga di fig.), e la sua frequenza di campionamento può essere *ridotta* a quella prevista $f_c = 2W$ operando esclusivamente nel dominio numerico grazie ad uno speciale elemento *decimatore* (§ 5.4.1), che nel nostro esempio provvede a rimuovere due campioni su tre.

La figura a lato riassume la sequenza delle operazioni descritte.



4.2.2 Generalizzazione del filtro di restituzione

Anche per questo secondo filtro *analogico* la teoria prevede l'adozione di un passa basso ideale, ed anche per questo caso valgono le obiezioni già discusse, e dunque la

soluzione *semplice* a questo problema è quella di adottare una $f_c = 2W' > 2W$ di lavoro maggiore della minima, ovvero *sovracampionare* il segnale, in modo che le repliche spettrali siano più distanziate tra loro, e quindi anche un filtro *non ideale* con una regione di transizione non nulla possa ancora isolare l'unica replica di $X^*(f)$ in banda base, come si osserva in figura 4.3.

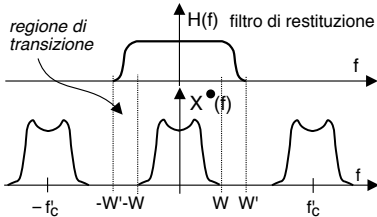
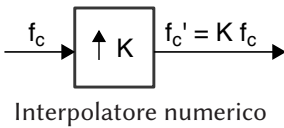


Figura 4.3: Distanziamento delle repliche spettrali mediante innalzamento della f_c

La conseguenza diretta di questo modo di operare è che non essendo più $H(f)$ rettangolare, la risposta impulsiva di questo nuovo filtro di restituzione non è più un $\text{sinc}(f_c t)$! Ciò significa che in questo caso la formula di interpolazione non ha più l'espressione *cardinale* fornita dalla (4.1), nella quale evidentemente il $\text{sinc}(f_c t)$ può essere sostituito da una qualunque $h(t)$ purchè la relativa trasformata $H(f)$ si annulli *prima di incontrare* una replica spettrale del segnale originario.

4.2.3 Interpolazione numerica

Anziché procedere come appena descritto, si è fatta strada una soluzione ancora differente, che evita di sovracampionare il segnale, dato che questo significherebbe appesantire tutte le operazioni da svolgere nel dominio numerico. La frequenza di campionamento f_c viene invece mantenuta al suo valore minimo consentito dalla selettività del filtro numerico $H_{aa}^{num}(f)$ discusso al (§ 4.2.1), ma prima di effettuare la restituzione la freq. di campionamento f_c viene *innalzata* per un fattore intero K , ovvero $f'_c = K \cdot f_c$, ad opera di un apposito *filtro numerico interpolatore* (§ 5.4.2) che ogni due campioni



ne inserisce nel mezzo altri $K - 1$ con valori *intermedi*. In tal modo il distanziamento mostrato in fig. 4.3 risulta essere ben maggiore, e le specifiche (pag. 121) per il filtro di restituzione divengono ancora meno stringenti.

4.2.4 Approssimazione degli impulsi

Un ultimo importante aspetto in cui la pratica differisce dalla teoria è che nella fase di restituzione *non è possibile* generare il segnale $x^*(t)$ a causa dell'impossibilità di realizzare gli impulsi $\delta(t)$; al suo posto viene prodotto un segnale $x^o(t)$ (leggi *x cerchietto* anziché *pallino*) mediante l'uso di un circuito *Sample and Hold* (s&H, ovvero *campiona e mantiene*) il cui schema di principio è mostrato in fig. 4.4-a)¹⁰.

Quando s_1 si chiude il valore di tensione di ingresso viene trasferito ai capi del condensatore, dopodiché s_1 si apre e lo stesso valore viene mantenuto costante per un

¹⁰Non entriamo nei dettagli del funzionamento del *buffer* (vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Amplificatore_separatore) qui esemplificato dall'amplificatore operazionale a controreazione unitaria: è sufficiente dire che agisce come un *adattatore di impedenza*, consentendo al condensatore di caricarsi in modo pressoché istantaneo, e di non scaricarsi prima che s_2 sia chiuso, in quanto il secondo amplificatore presenta una impedenza di ingresso pressoché infinita.

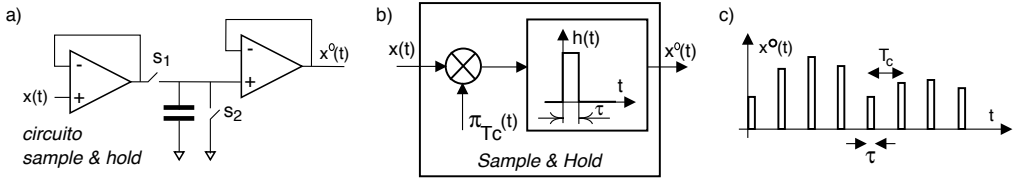


Figura 4.4: a) - realizzazione elettronica di un *sample & hold*; b) - schema simbolico relativo; c) - segnale di uscita

tempo $\tau \leq T_c$ e reso disponibile in uscita; trascorso il tempo τ si chiude s_2 , il condensatore si scarica, e l'uscita si annulla. Alle operazioni appena descritte corrisponde lo schema simbolico illustrato in fig. 4.4-b), per il quale il segnale di uscita è descritto nella forma

$$x^\circ(t) = \sum_n x(nT_c) \cdot \text{rect}_\tau(t - nT_c)$$

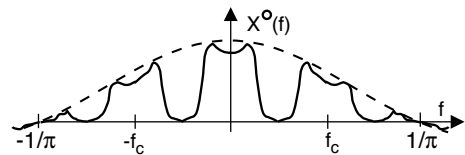
in cui al posto degli impulsi *matematici* viene adottato un treno di impulsi *rettangolari* modulati in ampiezza (vedi fig. 4.4-c)). Il filtro passa basso di restituzione $H(f)$ viene ora alimentato da $x^\circ(t)$ anziché da $x^\bullet(t)$, e per determinare quale sia la sua nuova uscita, riscriviamo¹¹ $x^\circ(t)$ nella forma

$$\begin{aligned} x^\circ(t) &= \sum_n x(nT_c) \cdot \text{rect}_\tau(t) * \delta(t - nT_c) = \\ &= \text{rect}_\tau(t) * \sum_n x(nT_c) \cdot \delta(t - nT_c) = \text{rect}_\tau(t) * x^\bullet(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

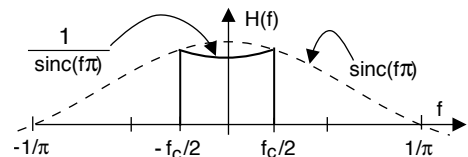
il cui spettro risulta pari a

$$X^\circ(f) = \tau \text{sinc}(f\tau) \cdot X^\bullet(f) \quad (4.6)$$

Osserviamo quindi che usare rettangoli di base $\tau < T_c$ al posto degli impulsi equivale a moltiplicare $X^\bullet(f)$ per un involuppo $\tau \text{sinc}(f\tau)$ che, seppure con $\tau \ll T_c$ non causa grossi inconvenienti (gli zeri posti ad $\frac{1}{\tau}$ si allontanano dall'origine, e $\text{sinc}(f\tau)$ nei pressi di $f = 0$ è praticamente costante), per τ prossimo a T_c produce una alterazione dell'ampiezza della replica in banda base, ovvero un fenomeno di *distorsione lineare di ampiezza* (§ 8.2).



Contromisure Una strada per compensare la distorsione lineare dovuta ai *rect* del s&H si basa sulla conoscenza di τ per progettare un filtro di restituzione con una $H(f)$ che presenta un andamento *reciproco* di quello del $\text{sinc}(f\tau)$, in modo che $H(f) \cdot \tau \text{sinc}(f\tau) = \text{costante}$. Tale accorgimento prende il nome di *sinc correction*¹².



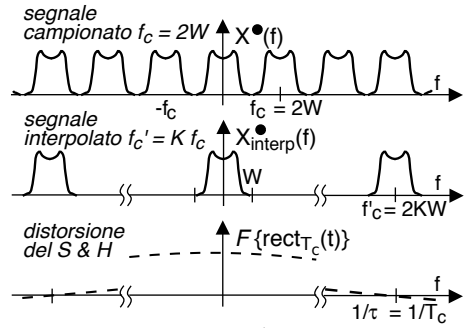
Un'alternativa per ridurre l'entità delle distorsione lineare introdotta dal s&H anche qualora si scelga la durata τ dei *rect* pari al periodo di campionamento T_c ¹³ passa per

¹¹Anche la fig. 4.4-b) conferma l'eq. (4.5)

¹²Vedi ad es. <https://www.maximintegrated.com/en/app-notes/index.mvp/id/3853>

¹³Scegliere $\tau = T_c$ può semplificare la progettazione del s&H, riducendone i costi.

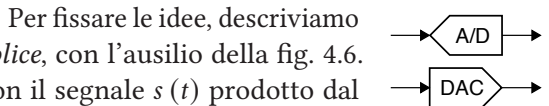
l'adozione dell'interpolazione numerica descritta al § 4.2.3 ed approfondita al § 5.4.2, attuata con un fattore di interpolazione K sufficientemente elevato da rendere tale distorsione praticamente trascurabile, come illustrato in figura



4.2.5 Conversione A/D e D/A

Dopo aver discusso gli aspetti teorici e realizzativi della conversione da segnale analogico $s(t)$ a sequenza di campioni $s^*(n)$ (vedi fig. 1.2 a pag. 3), per completare il processo di digitalizzazione non resta che occuparci del passaggio da $s^*(n)$ a segnale quantizzato s_q , e da questo a sequenza numerica s_n . Infatti, perché il segnale possa essere memorizzato, trasmesso od elaborato in forma numerica, occorre rappresentare i valori dei campioni $x(nT_c)$, che sono grandezze a precisione infinita, mediante un numero finito di M bit per campione. La fig. 4.5 inquadra questo ultimo passaggio noto come *conversione analogico-digitale* (A/D) nel contesto di quanto discusso finora, rappresentando anche l'operazione inversa (DAC) che ricostruisce il valore analogico (sia pur quantizzato) a partire dalla sua codifica binaria. A lato, i simboli usati per rappresentare tutto l'insieme di operazioni in maniera concisa. Senza alcuna pretesa di completezza¹⁴, illustriamo ora una possibile implementazione dei due dispositivi citati.

Quantizzatore A/D a rampa lineare



Per fissare le idee, descriviamo il funzionamento di uno schema semplice, con l'ausilio della fig. 4.6. Il valore $x^\circ(nT_c)$ viene confrontato con il segnale $s(t)$ prodotto dal generatore di rampa, e finché il secondo non supera il valore del primo, il comparatore emette un livello logico vero (il *gate*) e quindi il segnale di clock in ingresso all'AND si ripresenta in uscita, facendo avanzare il contatore binario ad M bit. Quando $s(t)$ supera $x^\circ(nT_c)$ il *gate* si annulla e l'AND viene interdetto, in modo che il conteggio si arresti. Prima di iniziare un nuovo periodo della rampa il valore presente nel contatore

¹⁴Per approfondimenti sulla conversione A/D e D/A vedi ad es.

http://sms.unipv.it/misure/ME/Conversione_A-D_Slides.pdf

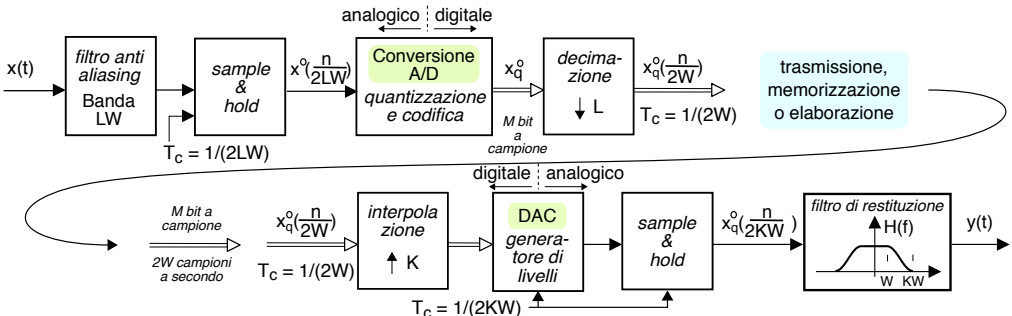


Figura 4.5: Campionamento, quantizzazione e restituzione nel mondo reale

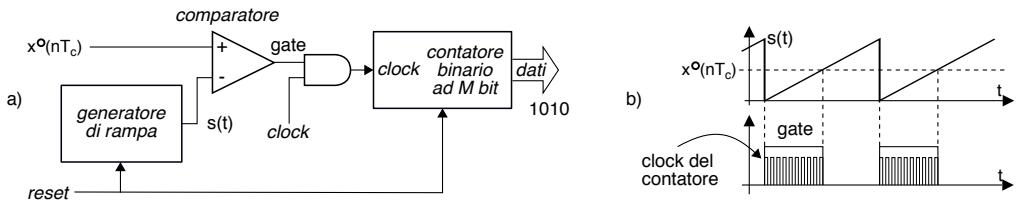


Figura 4.6: Quantizzatore a rampa lineare: a) - schema circuitale; b) - forme d'onda

(pari a *dieci* nell'esempio in figura) viene letto ed adottato come *codifica binaria* $c(x_q)$ del valore $x^\circ(nT_c)$ in ingresso, ed il processo può ripartire per il campione successivo.

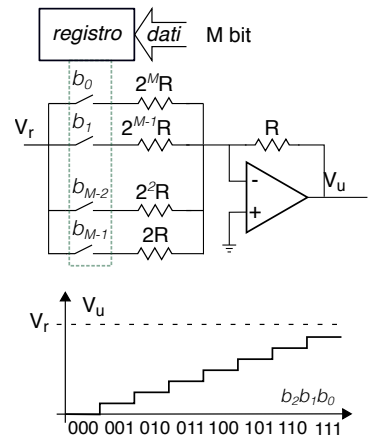
Convertitore D/A a resistenze pesate Il generatore di livelli DAC presente in fig. 4.5 consiste in un circuito elettronico in grado di produrre una tensione V_u proporzionale al valore V_b codificato da una *parola binaria* ad M bit

$$V_b = b_{M-1}2^{M-1} + \dots + b_32^3 + b_22^2 + b_12 + b_0$$

posta in ingresso al DAC. Una soluzione *semplice* fa uso di un amplificatore operazionale *sommatore* come in figura, con ciascuna delle resistenze di ingresso R_i di valore $2^i R$ (i da 1 a M) collegata o meno alla tensione di riferimento V_r a seconda se il bit b_{M-i} sia uno o zero. In uscita sarà presente una tensione¹⁵

$$V_u = -V_r \sum_{i=1}^M b_{M-i} 2^{-i}$$

in cui cioè il bit più significativo b_{M-1} pesa per $1/2$, quello successivo per $1/4$, e così via, dando luogo alla funzione ad $L = 2^M$ livelli mostrata in figura.



4.3 Quantizzazione e codifica binaria

Al di là degli aspetti tecnologici, dal punto di vista dei segnali il processo di quantizzazione e conversione D/A va studiato in relazione all'effetto che la scelta del numero M di bit/campione produce sulla *qualità* del segnale ricostruito. Maggiore è M , e più elevata risulta la velocità binaria $f_b = f_c \cdot M$ bit/sec, a cui corrisponde un maggior impegno di risorse trasmissive o di memoria. Ma riducendo il valore di M aumenta l'entità dell'errore di quantizzazione $\varepsilon_q = x - x_q$, di cui aumenta la potenza, e dunque peggiora il *rapporto segnale rumore*, come ora andiamo a studiare. Notiamo inoltre che essendo la quantizzazione un processo *non lineare* (§ 8.3) la densità spettrale di ε_q

¹⁵Per effetto della massa virtuale dell'amplificatore operazionale, in ciascuno dei resistori per cui $b_{M-i} = 1$ scorre una corrente $I_i = \frac{V_r}{2^i R}$, la cui somma I_T scorre anche nella R di controreazione, per cui

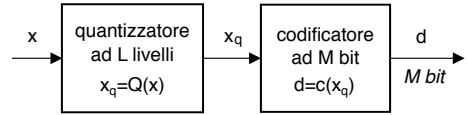
$$V_u = -R \cdot I_T = -R \sum_{i=1}^M b_{M-i} \frac{V_r}{2^i R} = -V_r \sum_{i=1}^M b_{M-i} 2^{-i}$$

e moltiplicando e dividendo per 2^M si ha $V_r = -\frac{V_r}{2^M} \sum_{i=1}^M b_{M-i} 2^{M-i}$, ossia compresa tra 0 e $-V_r \frac{2^M - 1}{2^M}$.

A parte il segno meno, ad esempio con $M = 3$ bit e $V_r = 10$ si ha un *quanto* di $10/8 = 1.25$, e valori 0.0, 1.25, 2.5, ..., 8.75, vedi anche

presenta anche frequenze *assenti* nel segnale originario, rendendo *bianco* il processo di errore¹⁶ (§ 7.2.4).

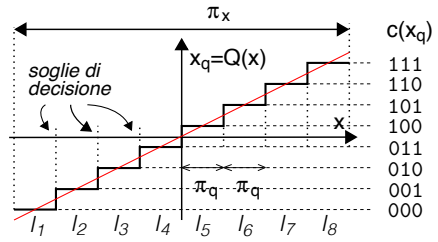
Ai fini della discussione che segue separiamo la funzione svolta da un dispositivo come il quantizzatore a rampa di fig. 4.6 nei due blocchi concettuali disegnati a fianco, in cui i valori dei campioni prima vengono *quantizzati* dal dispositivo $x_q = Q(x)$, e successivamente espressi (o *codificati*) mediante una sequenza di M bit $d = c(x_q)$. Il tipo di codifica $c(x_q)$ realizzato dal quantizzatore a rampa prende il nome di...



4.3.1 Quantizzazione uniforme

In questo caso l'intervallo dei valori che l'ingresso x può assumere, indicato come *dinamica* $\Delta_x = x_{max} - x_{min}$, viene suddiviso in $L = 2^M$ intervalli I_k di eguale ampiezza¹⁷ $\Delta_q = \frac{\Delta_x}{L}$, separati da $L - 1$ *soglie di decisione*, come riportato in figura per $M = 3$ bit.

Dato che L è pari¹⁸, la curva di quantizzazione $x_q = Q(x)$ che associa il valore $x_q(k)$ a tutti gli x che ricadono in uno stesso intervallo I_k risulta *a scaletta* come in figura, e fornisce valori quantizzati¹⁹



$$x_q = \Delta_q \cdot \left(\left\lfloor \frac{x}{\Delta_q} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right)$$

che rispetto alla *linea rossa* (che esprime la retta $x_q = x$), sono *esatti* solo *a metà* dell'intervallo, mentre all'interno dello stesso l'errore $\varepsilon_q = x - x_q$ si mantiene compreso tra $-\Delta_q/2$ e $\Delta_q/2$. Dato poi che con M bit si possono descrivere le $L = 2^M$ configurazioni binarie corrispondenti a numeri compresi da 0 a $2^M - 1$, sulla destra è riportata la corrispondenza dei codici $d = c(x_q)$ che è possibile assegnare ai livelli quantizzati.

Per proseguire con l'analisi della distorsione, aggiungiamo ora l'ipotesi che il campione x da quantizzare sia stato prelevato da un membro di processo *stazionario ergodico*²⁰ con d.d.p. uniforme a media nulla, ovvero pari a $p_X(x) = \frac{1}{\Delta_x} \text{rect}_{\Delta_x}(x)$.

¹⁶In realtà per valori particolarmente bassi di M il segnale di errore ε_q tende a divenire fortemente correlato (§ 7.1.4) a quello del segnale originale, vedi ad es.

<https://dspillustrations.com/pages/posts/misc/how-does-quantization-noise-sound.html>

¹⁷Se invece gli intervalli hanno ampiezze differenti il quantizzatore è detto *non uniforme*, vedi il § 4.3.2.

¹⁸Il caso di L pari, diretta conseguenza dell'essere $L = 2^M$ una potenza di due, è detto *mid-rise* in quanto il grafico $x = Q(x)$ sale per $x = 0$, mentre ad L dispari (caso *mid-tread*) corrisponde una regola di quantizzazione basata sull'*arrotondamento* di x , ed esiste un valore quantizzato che esprime un *valore nullo*. Per approfondimenti, vedi ad es.

https://www.tutorialspoint.com/digital_communication/digital_communication_quantization.htm

¹⁹La notazione $\left\lfloor \frac{x}{\Delta_q} \right\rfloor$ individua un *troncamento*, ovvero il numero intero subito inferiore ad $\frac{x}{\Delta_q}$. Ad esempio, se $-4 < x < 4$, allora avremo $x_q = -3.5, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3.5$.

²⁰Nel seguito della sezione sono usati i concetti definiti al capitolo 6, a cui si rimanda per le definizioni mancanti.

4.3.1.1 SNR di quantizzazione

La distorsione in cui si incorre a seguito del processo di quantizzazione è tanto minore quanto maggiore risulta il valore del *rapporto segnale-rumore* $SNR_q = \mathcal{P}_x / \mathcal{P}_\epsilon$, ovvero il rapporto tra la potenza del segnale da quantizzare \mathcal{P}_x , e quella \mathcal{P}_ϵ dell'errore $\epsilon_q = x - x_q$. La fig. 4.7 mostra un possibile andamento temporale per $x(t)$, assieme alla sua versione quantizzata $x_q^\circ(t)$, ed al corrispondente errore $\epsilon_q(t)$, per il quale si fa l'ulteriore ipotesi che anch'esso sia un processo ergodico a media nulla, anch'esso descritto da una d.d.p. uniforme $p(\epsilon) = \frac{1}{\Delta_q} \text{rect}_{\Delta_q}(\epsilon)$ ma con dinamica $\Delta_q = \Delta_x/L$, e che sia anche *statisticamente indipendente*²¹ da $x(t)$.

In queste ipotesi, la potenza \mathcal{P}_x è pari alla varianza della v.a. x , e risulta²²

$$\mathcal{P}_x = \sigma_x^2 = \frac{\Delta_x^2}{12}$$

mentre per quanto riguarda la potenza del segnale di errore $\epsilon_q(t)$ il risultato è lo stesso, ma espresso nei termini di Δ_q , ovvero

$$\mathcal{P}_\epsilon = \sigma_\epsilon^2 = \frac{\Delta_q^2}{12} = \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta_x}{L} \right)^2$$

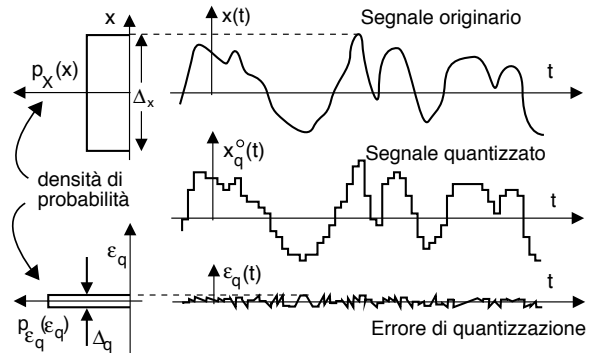


Figura 4.7: Processo di quantizzazione per segnali a distribuzione di ampiezza uniforme

Siamo dunque in grado di valutare l' SNR di quantizzazione come

$$SNR_q = \frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_\epsilon} = \frac{\Delta_x^2}{12} 12 \left(\frac{L}{\Delta_x} \right)^2 = L^2$$

e dunque SNR_q cresce in modo *quadratico* con l'aumentare dei livelli, ovvero se L raddoppia SNR_q quadruplica. Ricorrendo alla notazione in decibel²³ per l' SNR , otteniamo il risultato $SNR_q(L)|_{dB} = 10 \log_{10} L^2 = 20 \log_{10} L$ e, ricordando che $L = 2^M$, si ottiene

$$SNR_q(M)|_{dB} = M \cdot 20 \log_{10} 2 \simeq 6 \cdot M \quad \text{dB} \quad (4.7)$$

dato che $\log_{10} 2 \simeq 0.3$. Pertanto è possibile concludere che²⁴

²¹Questa ipotesi, come anche quella delle v.a. uniformi, sono manifestamente *non vere* in generale, ma permettono di giungere ad un risultato abbastanza semplice, e che può essere molto utile nei progetti di dimensionamento.

²²Assumendo che il processo sia ergodico, la potenza (media temporale) eguaglia (eq. (6.15)) la corrispondente media di insieme, ovvero il momento di secondo ordine $m_x^{(2)}$, che a sua volta è pari alla varianza σ_x^2 , essendo $m_x = 0$. Vedi § 6.2.3 per il calcolo di $\sigma_x^2 = \Delta_x^2/12$.

²³Una discussione relativa alla misura delle grandezze in decibel, è fornita al § 8.1. Qui ci limitiamo ad usare i dB come misura relativa di un rapporto, ossia

$$SNR_q(\text{dB}) = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_\epsilon} = 10 \log_{10} \mathcal{P}_x - 10 \log_{10} \mathcal{P}_\epsilon = \mathcal{P}_x[\text{dBV}^2] - \mathcal{P}_\epsilon[\text{dBV}^2]$$

in cui le grandezze espresse in dBV^2 rappresentano potenze di segnale di tensione, in unità logaritmiche.

²⁴In alcuni testi alla (4.7) viene aggiunto un termine costante di 1.76 dB, derivante dall'adozione di un segnale sinusoidale con dinamica Δ , anziché un processo uniforme. Ma non ho mai afferrato il senso di

La qualità del quantizzatore uniforme espressa da $SNR_q [dB]$ aumenta linearmente con il numero M di bit/campione, con un incremento di 6 dB per ogni bit utilizzato in più.

Consideriamo ora cosa accade qualora il segnale in ingresso x abbia una dinamica minore a quanto previsto: in tal caso σ_x^2 si riduce, mentre $\sigma_\epsilon^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta_x}{L}\right)^2$ non cambia, e dunque SNR_q peggiora, come se avessimo ridotto il numero di livelli. Viceversa, la tecnica illustrata di seguito è in grado di mantenere un SNR_q accettabile anche con bassi livelli di segnale.

4.3.2 Quantizzazione non uniforme

La tecnica di cui al titolo nasce sia come risposta al problema appena evidenziato, ossia il peggioramento di SNR_q in presenza di bassi segnali, sia in considerazione del fatto che in realtà il processo x non ha distribuzione di ampiezza uniforme come fino ad ora ipotizzato, rendendo il risultato (4.7) di ridotta utilità pratica. Ma svolgiamo prima una breve digressione su come, conoscendo con esattezza la $p_X(x)$ del processo da quantizzare, si possa giungere al miglior risultato.

Minimizzazione dell'errore di quantizzazione Si può mostrare²⁵ che per una $p_X(x)$ generica il quantizzatore ottimo (che rende massimo SNR_q) non suddivide la dinamica Δ_x in $L - 1$ intervalli di uguale estensione $\Delta_q = \frac{\Delta_x}{L}$, ma l'estensione $\Delta_q(k)$ varia ed è diversa per ogni intervallo I_k con $k = 1, 2, \dots, L$, adottando in particolare intervalli di estensione ridotta nelle regioni in cui i valori x sono più probabili, ovvero più frequenti, e dunque per i quali la $p_X(x)$ è più grande. In tal modo ai valori x più probabili corrisponde un errore di quantizzazione $\sigma_q^2(k) = \Delta_q^2(k)/12$ ridotto; viceversa, le regioni corrispondenti a valori di x più rari adottano intervalli di estensione $\Delta_q(k)$ più grande, e conseguentemente un $\sigma_q^2(k)$ maggiore. Il risultato è quello di variare il contributo alla \mathcal{P}_ϵ complessiva, riducendolo per i valori più frequenti, ed aumentandolo per quelli meno: infatti, \mathcal{P}_ϵ può essere valutata anche come un valore atteso, pesando i contributi $\sigma_q^2(k)$ con le rispettive probabilità

$$\mathcal{P}_\epsilon = E_k \left\{ \sigma_q^2(k) \right\} = \sum_{k=1}^L p_k \sigma_q^2(k)$$

in cui $p_k = \int_{I_k} p_X(x) dx$ è la probabilità che $x \in I_k$. Il modo ottimo di disporre le soglie (θ_{k-1}, θ_k) che delimitano I_k in modo da rendere minima \mathcal{P}_ϵ , è noto come algoritmo di LLOYD-MAX²⁶, ed il risultato che si ottiene è legato alla teoria esposta al § 9.6.

un SNR positivo con $M = 0$ bit/campione.

²⁵Vedi ad es. [http://en.wikipedia.org/wiki/Quantization_\(signal_processing\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Quantization_(signal_processing))

²⁶Il metodo è iterativo, ed inizia suddividendo l'intervallo Δ_x in modo uniforme. Per ogni iterazione:

- si determinano i valori quantizzati x_k (detti centroidi) come $x_k = E \{x \in I_k\} = \int_{I_k} x \cdot p_X(x/k) dx =$

$\frac{\int_{I_k} x p_X(x) dx}{p_k}$ in cui $p_k = \int_{I_k} p_X(x) dx$. In tal modo, i valori x_k si spostano (internamente a I_k) verso la regione in cui $p_X(x)$ ha un valore più elevato, ovvero dove la v.a. si addensa;

- si ri-calcolano i confini di decisione θ_k come $\theta_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$, seguendo lo spostamento degli x_k .

Le iterazioni si arrestano quando non si riscontrano cambiamenti apprezzabili.

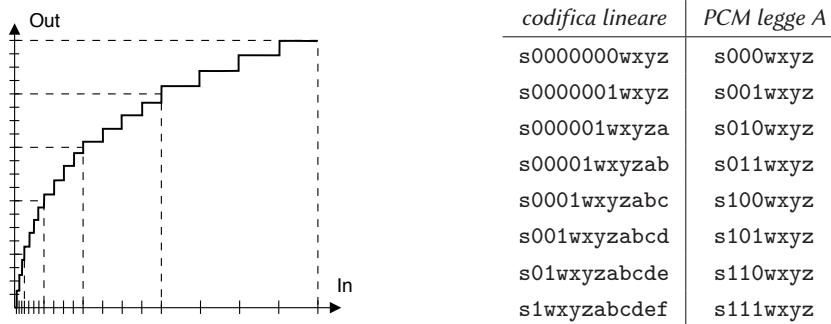


Figura 4.8: Caratteristica i/o di un quantizzatore logaritmico e relativa tabella di codifica

Codifica PCM Nella quantizzazione del segnale vocale, anche se è arbitrario identificare con esattezza una $p_X(x)$, si verifica strumentalmente che quest'ultima è addensata nelle regioni con valori più piccoli. Per questo motivo la legge di quantizzazione che si è adottata per ottenere gli 8 bit a campione utilizzati nel PCM²⁷ segue un andamento logaritmico²⁸, e dimezza progressivamente la pendenza della caratteristica di ingresso-uscita del quantizzatore all'aumentare dei valori in ingresso.

La fig. 4.8 mostra un esempio di tale realizzazione (per i soli valori positivi), in cui l'andamento logaritmico viene approssimato individuando (a partire dall'origine) *regioni* di valori della x la cui ampiezza di volta in volta raddoppia, e suddividendo ogni regione in un uguale numero di intervalli equispaziati. La caratteristica non lineare è realizzabile per via completamente numerica: per prima cosa si realizza un campionamento uniforme con $M = 12$ bit a campione, a cui corrispondono $L = 2^{12} = 4096$ livelli. Per ogni campione, il numero di bit pari a zero nella parte più significativa degli M individua la *regione* dei valori di ingresso, mentre i bit rimanenti sono *shiftati* a destra, per mantenere costante il numero di *intervalli* per regione, ottenendo in definitiva una rappresentazione in *virgola mobile* del valore del campione.

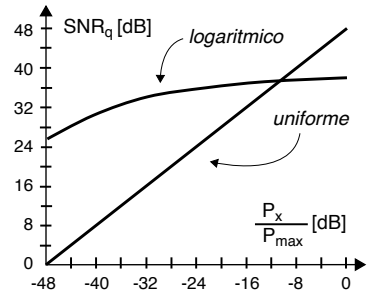
Esempio La tabella a destra di fig. 4.8 esemplifica il processo di conversione PCM *legge A*, in cui a partire dalla quantizzazione uniforme a 12 bit (colonna di sinistra) si ottengono gli 8 bit della codifica PCM (colonna di destra), ripartiti in un bit di segno (s), tre bit di esponente, e quattro di mantissa (wxyz). Il bit più significativo dei 12 rappresenta il segno, e resta inalterato. Il numero di zeri più significativi dei 12 individua in quale delle 8 regioni²⁹ cade il valore di ingresso, e tale regione è codificata mediante i 3 bit del codice PCM che seguono quello del segno. Delle restanti cifre della codifica uniforme, se ne conservano solo le 4 più significative. Ad esempio, il valore 10000001010 diviene 1-000-1010 (come risulta dalla prima riga della tabella), mentre 000110011010 diventa 0-101-1001, come riporta la sesta riga.

²⁷La sigla PCM sta per *Pulse Code Modulation*, e trae origine dalla tecnica di quantizzazione di un segnale vocale di qualità telefonica (§ 11.1.2), anche se è stato poi adottato per indicare l'intera gerarchia di moltiplicazione plesiocrona (§ 24.3.1). Etimologicamente il termine deriva dall'*onda PAM* (§ 7.7.4) in cui degli impulsi sono *Modulati in Ampiezza*, mentre in questo caso le ampiezze degli impulsi sono *Codificate*.

²⁸L'andamento esatto della curva segue uno di due standard, denominati legge μ (per USA e Giappone) e legge A (per gli altri), lievemente diverse nella definizione, ma sostanzialmente equivalenti.

²⁹Per motivi grafici, nella parte sinistra della figura sono mostrate solo 5 regioni, divise in 4 intervalli.

I risultati del *mapping* illustrato possono essere inseriti in una ROM come coppie di *ingresso-uscita*, utilizzando dunque 4096 posizioni di memoria da 8 bit ciascuna; al contrario presso il DAC di restituzione, sono sufficienti 256 posizioni, di 12 bit ciascuna. Nella figura che segue si mostra l'andamento di SNR_q al variare della potenza di segnale rispetto al massimo possibile, nei due casi del quantizzatore uniforme, oppure con compressione logaritmica. Come si può notare, l'effetto della quantizzazione logaritmica penalizza l' SNR per i segnali a piena dinamica, ma peggiora molto più lentamente al diminuire della stessa. Al cap. 10 l'argomento della codifica di sorgente audio viene ripreso, e debitamente approfondito.



Le prossime sezioni non tengono più conto delle questioni relative alla quantizzazione dei campioni, anche se nella realizzazione di dispositivi reali può rivestire interesse di progetto.

4.4 Trasformata di Fourier di sequenze

Avendo illustrato come sia sufficiente la conoscenza dei soli campioni temporali $x_n = x(nT_c)$ per descrivere completamente un segnale tempo continuo e limitato in banda $x(t)$, e come alla sequenza tempo-discreta dei suoi campioni x_n corrisponda una *periodizzazione* in frequenza $X^\bullet(f)$, notiamo come ciò sia in qualche modo *speculare* alla proprietà dei segnali *periodici nel tempo*, che possiedono una rappresentazione equivalente nel dominio della frequenza, costituita dalla sequenza dei coefficienti X_n noti come serie di Fourier. L'analogia è più stringente di quanto non possa apparire, dato che è assolutamente lecito ed esatto usare l'espressione della serie di Fourier (2.7) nella direzione *opposta*³⁰, ossia per ottenere lo spettro periodico di ampiezza $X^\bullet(f)$ a partire dalla sequenza dei campioni temporali x_n :

$$X^\bullet(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_c} \quad (4.8)$$

definendo così una *trasformata di Fourier a tempo discreto*³¹ o **DTFT**, che produce una $X^\bullet(f)$ periodica in frequenza di periodo $f_c = \frac{1}{T_c}$ ³², in cui T_c è il periodo di campiona-

³⁰A prima vista può sembrare *ardito* accettare che i coefficienti di Fourier (4.9) siano pari ai campioni di segnale x_n , ma se proviamo a calcolare

$$\begin{aligned} X^\bullet(f) &= \mathcal{F}\{x^\bullet(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - nT_c) \right) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t} \delta(t - nT_c) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_c} \end{aligned}$$

otteniamo esattamente la (4.8).

³¹Condizione sufficiente per la convergenza della serie (4.8) è che risulti $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty$, in quanto

$$|X^\bullet(f)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_c} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|$$

³²Infatti se applichiamo la (4.8) per calcolare $X^\bullet(f + f_c)$ si ottiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi(f+f_c)nT_c} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_c} e^{-j2\pi f_c n T_c} = X^\bullet(f)$$

mento con cui sono prelevati i valori x_n ³³. Alla (4.8) è associata una *antitrasformata*, in grado di valutare i campioni temporali x_n a partire dalla conoscenza di un periodo di $X^\bullet(f)$, definita come

$$x_n = \frac{1}{f_c} \int_{-\frac{f_c}{2}}^{\frac{f_c}{2}} X^\bullet(f) e^{j2\pi f n T_c} df \quad (4.9)$$

e che è del tutto analoga (a parte il segno) alla (2.6) che calcola i coefficienti della serie di Fourier. Molte delle proprietà già note per la serie e la trasformata di Fourier sono valide anche in questo caso, come ad esempio

- simmetria coniugata per $X^\bullet(f)$ nel caso di x_n reale;
- linearità: $ax_n + by_n \iff aX^\bullet(f) + bY^\bullet(f)$;
- ritardo: $x_{n-k} \iff X^\bullet(f) e^{-j2\pi f k T_c}$;
- modulazione: $x_n e^{j2\pi f_0 n T_c} \iff X^\bullet(f - f_0)$;
- convoluzione: $z_n = x_n * y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k} \iff Z^\bullet(f) = X^\bullet(f) \cdot Y^\bullet(f)$;
- prodotto: $z_n = x_n \cdot y_n \iff Z^\bullet(f) = \frac{1}{f_c} \int_{-f_c/2}^{f_c/2} X^\bullet(\sigma) Y^\bullet(f - \sigma) d\sigma$.

Ciò permette di svolgere operazioni sui segnali (come analisi spettrale e filtraggio) senza dover svolgere calcoli analitici (integrali e trasformate), bensì operando direttamente sui campioni di segnale mediante appositi algoritmi di calcolo numerico eseguiti su dispositivi ottimizzati a tale scopo³⁴, e quindi effettuare il processo di conversione D/A per riottenere un risultato tempo-continuo, come mostrato in fig. 4.9.

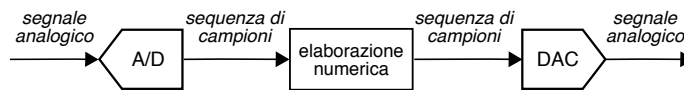


Figura 4.9: Elaborazione numerica di segnale analogico

Resta comunque il fatto che nelle (4.8) e (4.9) compaiono tuttora una somma di infiniti termini ed un integrale di funzione continua, mentre per effettuare le operazioni di elaborazione numerica possono essere usate solo sequenze di durata finita e somme. Per questo motivo affrontiamo la sezione successiva, che illustra come ciò possa essere risolto eseguendo il campionamento anche in frequenza, e limitando i segnali ad una durata limitata.

4.5 Trasformata discreta di Fourier

Disponendo di una sequenza di lunghezza *finita* composta da N valori x_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$, corrispondenti a campioni di un segnale $x(t)$ prelevati con ritmo $f_c = \frac{1}{T_c}$, si indica

dato che, essendo $f_c = \frac{1}{T_c}$, risulta $e^{-j2\pi f_c n T_c} = e^{-j2\pi n} = 1$ per qualsiasi n .

³³Proprio come ai coefficienti della serie di Fourier per segnali periodici, intervallati di F Hz, corrisponde un segnale periodico nel tempo, di periodo $T = \frac{1}{F}$.

³⁴I chip progettati appositamente per svolgere calcoli di elaborazione numerica del segnale sono detti DSP (*Digital Signal Processor*), che tipicamente eseguono somme di prodotti. Nel caso di dati multidimensionali, sono invece adottate le GPU nate per scopi di accelerazione grafica, vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Multidimensional_DSP_with_GPU_Acceleration

come DISCRETE FOURIER TRANSFORM (DFT) la nuova sequenza³⁵

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{m}{N} n} \quad (4.10)$$

univocamente definita per $m = 0, 1, \dots, N - 1$, e che costituisce una approssimazione³⁶ del campionamento in frequenza della trasformata $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, calcolata per $f = \frac{m}{N}f_c$, e moltiplicata per f_c :

$$X_m \simeq f_c X\left(f = \frac{m}{N}f_c\right) \quad (4.11)$$

Notiamo subito che la (4.10) è valida per qualsiasi m , ed ha un andamento periodico con periodo N , a cui corrisponde la frequenza $f_c = \frac{1}{T_c}$ (vedi fig. 4.10), in accordo con la periodicità in frequenza evidenziata per $X^\bullet(f)$ (vedi (4.8) e (4.2)); per questo motivo, qualora il segnale originario $x(t)$ contenga componenti a frequenze maggiori di $\frac{f_c}{2}$, gli X_m con indici prossimi ad $\frac{N}{2}$ presenteranno errore di aliasing³⁷. Notiamo inoltre come i valori X_m siano tutti relativi a frequenze ≥ 0 , ma nel caso di una sequenza x_n reale la proprietà di simmetria coniugata, associata alla periodicità in frequenza, rende il risultato interessante solo per indici $m \leq \frac{N}{2}$, dato che successivamente si trovano valori coniugati a quelli della prima metà.

³⁵La (4.10) può essere fatta discendere dalla (4.8) vincolando f ad assumere i soli valori discreti $f = \frac{m}{N} \frac{1}{T_c}$, e limitando l'indice della sommatoria ad un insieme finito di campioni, vedi fig. 4.10.

³⁶Una prima fonte di approssimazione deriva dall'operazione di finestatura legata all'uso di un numero finito di campioni, operando quindi su $x_w(t) = x(t)w(t_c)$ anziché su $x(t)$. Per analizzare le altre fonti di approssimazione, iniziamo a scrivere l'espressione di $X_w(f) = \mathcal{F}\{x_w(t)\}$ per $f = \frac{m}{N}f_c$:

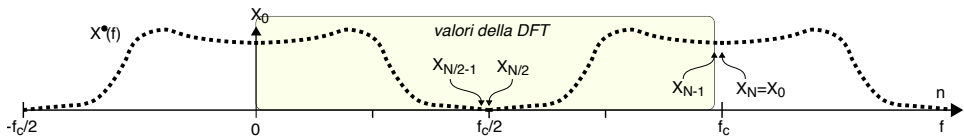
$$X_w\left(f = \frac{m}{N}f_c\right) = \int_0^{(N-1)T_c} x(t) e^{-j2\pi \frac{m}{N} f_c t} dt \simeq \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \int_0^{(N-1)T_c} \text{sinc}(f_c(t - nT_c)) e^{-j2\pi \frac{m}{N} f_c t} dt$$

in cui la seconda eguaglianza utilizza l'interpolazione cardinale $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot \text{sinc}(f_c(t - nT_c))$ fornita dalla (4.1), ed introduce una seconda fonte di approssimazione legata all'intervallo *finito* di variazione per n : infatti, benché l'integrale abbia estensione limitata, i valori di $x(t)$ che cadono entro tale estensione, dovrebbero dipendere da *tutti* i suoi campioni. L'ultimo integrale è a sua volta una approssimazione (a causa degli estremi di integrazione limitati, e peggiore per i sinc centrati in prossimità dei confini della finestra) della trasformata (calcolata in $f = \frac{m}{N}f_c$) di $\text{sinc}(f_c(t - nT_c))$, pari quest'ultima a $T_c \text{rect}_{f_c}(f) e^{-j2\pi f n T_c}$, che quando valutata per $f = \frac{m}{N}f_c$, fornisce il risultato

$$X_w\left(f = \frac{m}{N}f_c\right) \simeq T_c \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{m}{N} n}$$

per valori $|m| \leq \frac{N}{2}$, a causa della estensione limitata (in frequenza) di $\text{rect}_{f_c}(f)$. E' però facile verificare che $X_w\left(\frac{m}{N}f_c\right)$ è periodica in m con periodo N , cosicché i valori assunti per $m = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots$ sono uguali a quelli per $m = -\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \dots$

³⁷Come osservato al § 4.1.1, lo spettro $X^\bullet(f)$ di un segnale campionato a frequenza f_c è costituito dalle repliche del segnale originario, distanziate di multipli di f_c : $X^\bullet(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_c)$, e coincide con $X(f)$ per $-f_c/2 < f < f_c/2$, se $X(f)$ è limitata in banda tra $\pm W$ ed $f_c \geq 2W$. Al contrario, se $f_c < 2W$, allora le repliche $X(f - nf_c)$ si sovrappongono, e la (4.11) si riscrive come $X_m \simeq f_c X^\bullet\left(f = \frac{m}{N}f_c\right)$.

Figura 4.10: Valori della DFT e campioni di $X^*(f)$ associati per $f = \frac{n}{N}f_c$

DFT come prodotto matriciale Notiamo infine che la (4.10) può essere espressa in forma matriciale: ad esempio, per $N = 4$ si ottiene

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{\pi}{2}} & e^{-j\pi} & e^{-j\frac{3\pi}{2}} \\ 1 & e^{-j\pi} & e^{-j2\pi} & e^{-j3\pi} \\ 1 & e^{-j\frac{3\pi}{2}} & e^{-j3\pi} & e^{-j\frac{9\pi}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

da cui notiamo la proprietà di *simmetria* per la matrice dei coefficienti.

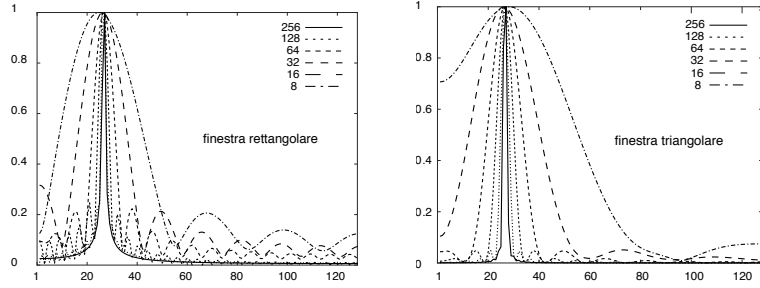
Esempio Allo scopo di *concretizzare* le differenze tra la trasformata di Fourier ed i valori forniti dalla DFT, in fig. 4.11-a sono riportati i valori $|X_m|$, normalizzati in ampiezza, per la DFT di una sinusoidale a 10 Hz, adottando due diverse finestre di analisi (vedi § 3.8.4), prelevando alla medesima frequenza di campionamento (100 Hz) un numero variabile di campioni (mostrato in figura), e ponendo i rimanenti a zero, per calcolare in tutti i casi la medesima DFT a 256 punti³⁸. Il risultato è quindi confrontato (fig. 4.11-b) con quello ottenibile per via analitica calcolando la \mathcal{F} -trasformata dello stesso segnale, adottando le medesime finestre temporali, di durata uguale al primo caso. Le curve ottenute nel caso di 80 msec (e 8 campioni!) dipendono da meno di un periodo di segnale, e perciò presentano una componente continua apprezzabile. Aumentando la durata della finestra, l'approssimazione di calcolare una $\mathcal{F}\{\}$ mediante la DFT migliora, anche se persiste un ridotto potere di risoluzione spettrale.

Osservazione Qualche lettore potrebbe stupirsi di non trovare due linee spettrali, come da attendersi per una sinusoidale. Ma questo può accadere a patto che il numero di campioni N su cui si effettua la DFT sia un multiplo intero k del numero di campioni $M = T/T_c$ che ricadono entro uno stesso periodo T della sinusoidale³⁹, con k che esprime quanti periodi entrano in N campioni, ed M quanti campioni/periodo. In tal caso l'applicazione della IDFT (4.13) produce una sequenza ancora periodica. Nel nostro esempio, essendo $T = 1/10 = 100$ msec e scegliendo $N = 64$ punti e $k = 6$ periodi, il vincolo $N = kM = kTf_c$ permette di ottenere $f_c = \frac{N}{kT} = \frac{64}{6 \cdot 10^{-1}} = 106,6$ Hz, ovvero $M = Tf_c = 10^{-1} \cdot 106,6 = 10,6$ campioni/periodo. La fig. 4.12 mostra questo risultato, evidenziando come la riga spettrale si manifesti per $m = 6$, ossia alla frequenza $f = \frac{m}{N}f_c = \frac{6}{64}106,6 = 10$ Hz, mentre la riga presente in $m = 58$ è in realtà il ripiegamento periodico di quella a -10 Hz.

³⁸Il metodo esposto di porre a zero i campioni fino al raggiungimento di una potenza di due è detto ZERO PADDING. Il calcolo della DFT su di un numero di punti pari ai campioni di segnale disponibili non avrebbe dato luogo all'effetto finestra, ma avrebbe fornito in tutti i casi andamenti simili a quello osservabile per 256 punti. Infine, notiamo che nelle figure sono mostrati solo i primi 128 valori, essendo i rimanenti speculari.

³⁹Con la ovvia condizione che sia $M > 2$ per rispettare il vincolo $f_c > 2/T$

a) - modulo della DFT di una sinusoide a 10 Hz, $f_c = 100$ Hz, con finestre di diversa lunghezza



b) - modulo della trasformata di Fourier di una sinusoide a 10 Hz, con finestre di diversa lunghezza

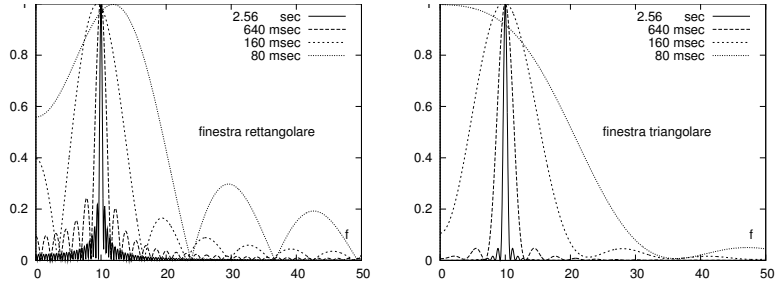


Figura 4.11: Confronto tra DFT ed \mathcal{F} -trasformata con uguale estensione temporale

Il passaggio dai campioni nel tempo x_n a quelli in frequenza X_m è invertibile⁴⁰, ricorrendo alla INVERSE DISCRETE FOURIER TRANSFORM (IDFT)

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{j2\pi \frac{m}{N} n} \tag{4.13}$$

che per n esterno a $[0, N - 1]$ continua a valere, ed assume valori periodici, coerentemente a quanto accade per lo sviluppo in serie di Fourier. Infatti il legame tra DFT e serie di Fourier è molto stretto, in quanto i valori X_m rappresentano una approssimazione⁴¹

⁴⁰Sostituendo infatti la (4.10) nella (4.13), otteniamo

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi \frac{m}{N} k} \right) e^{j2\pi \frac{m}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m}{N} (n-k)}$$

ma, dato che $\sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m}{N} (n-k)} = \begin{cases} N & \text{se } k = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, nella sommatoria esterna sopravvive solo il termine x_n , dimostrando l'uguaglianza.

⁴¹La relazione (4.14) si dimostra combinando le relazioni (3.4) e (4.11):

$$X_n \simeq f_c X \left(\frac{n}{N} f_c \right) = f_c X \left(\frac{n}{NT_c} \right) = f_c X \left(\frac{n}{T} \right) = f_c X (nF) = f_c T X_n^{SF} = \frac{1}{T_c} T X_n^{SF} = N X_n^{SF}$$

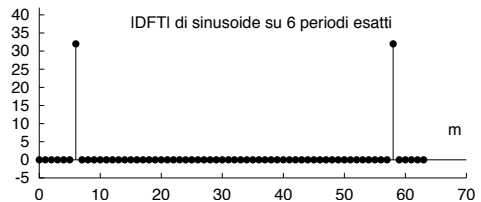
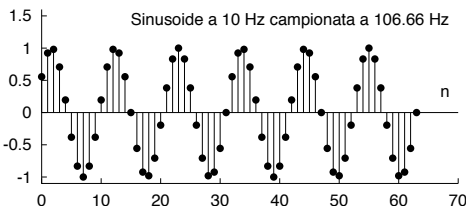


Figura 4.12: Sinusoide campionata su di un numero intero di periodi e relativo modulo di DFT

dei rispettivi coefficienti della serie di Fourier $X_m^{SF} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-j2\pi \frac{m}{T} t} dt$, calcolati a partire da un segmento $x_T(t)$ estratto da $x(t)$, e moltiplicati per N :

$$X_m \simeq N \cdot X_m^{SF} \tag{4.14}$$

Per approfondire i risvolti di questo risultato, affrontiamo la sezione successiva.

4.5.1 Relazione tra DTFT, DFT e trasformata zeta

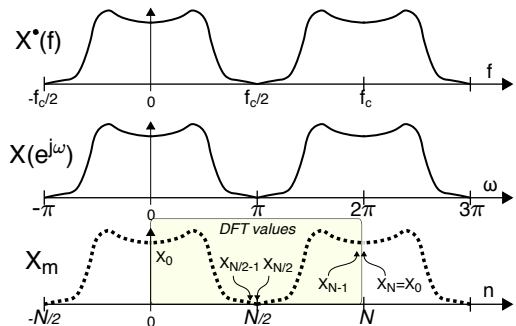
Così come per i segnali analogici sussiste una relazione (vedi pag. 119) tra la trasformata di FOURIER e quella di LAPLACE, così nel contesto delle sequenze, esistono legami tra DTFT e *trasformata zeta*, definita quest'ultima come $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$, funzione complessa della variabile complessa *zeta*, e valutata come

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \tag{4.15}$$

che, nel caso in cui per $|z| = 1$ la (4.15) converga, può essere fatta corrispondere alla DTFT (4.8) della stessa sequenza x_n semplicemente ponendo $z = e^{j\omega}$, ovvero calcolando $X(z)$ sul *cerchio unitario*:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n} = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X^*(f)|_{f=\frac{\omega}{2\pi T_c}} \tag{4.16}$$

Infatti, nelle consuete condizioni in cui gli x_n sono i campioni di un segnale $x(t)$ limitato in banda tra $\pm W$ e prelevati con ritmo $f_c \geq 2W$, la (4.16) effettivamente coincide (per $-\pi \leq \omega < \pi$) con la $X^*(f)$ (eq. (4.8), per $-f_c/2 \leq f \leq f_c/2$) in cui si ponga $f = \frac{\omega}{2\pi T_c}$, mettendo cioè in corrispondenza le frequenze $\pm f_c/2$ di $X^*(f)$ con le pulsazioni $\pm \pi$ di $X(e^{j\omega})$. Al di fuori dell'intervallo $-\pi \leq \omega < \pi$ la $X(e^{j\omega})$ è periodica in ω con periodo 2π , analogamente a ciò che risulta (con periodo f_c) per la trasformata di Fourier $X^*(f)$ di sequenze; se invece x_n è sottocampionata, ossia $f_c < 2W$, anche $X(e^{j\omega})$ è affetta da aliasing, così come avviene per $X^*(f)$.



Esempio Consideriamo la sequenza $x_n = \begin{cases} a^n & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$ il cui andamento per $a = 0.7$

è mostrato in fig. 4.13, la cui trasformata zeta $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n z^{-n}$ risulta pari a⁴² $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, ed il cui modulo, dopo aver scritto la variabile complessa z come $z = x+jy$, è espresso come $|X(z)| = 1/\sqrt{\left(\frac{x^2-ax+y^2}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{ay}{x^2+y^2}\right)^2}$. Facendo ora variare z nell'intervallo $[-2-j2, 2+j2]$ si ottiene per il modulo di $X(z)$ l'andamento mostrato nella figura a lato, in cui è anche raffigurato un cilindro di raggio unitario, la cui intersezione con

⁴²Il risultato si ottiene ricordando che $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ qualora $|\alpha| < 1$.

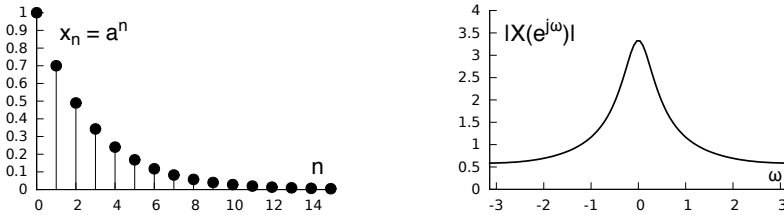
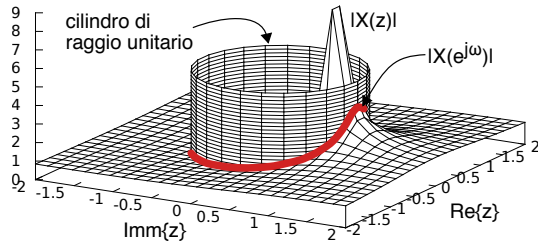


Figura 4.13: Sequenza $x_n = a^n$ e modulo della relativa trasformata di Fourier a tempo discreto

$|X(z)|$ individua la forma di

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}} \quad (4.17)$$

ossia della DFT della sequenza a^n , che a sua volta è mostrata in fig. 4.13 per $-\pi < \omega < \pi$, e nella figura a lato come una linea rossa.



Se la $X(e^{j\omega})$ ottenuta per una sequenza x_n *aperiodica* nel tempo è *campionata* in N punti equispaziati e disposti sul cerchio unitario, ossia ponendo $\omega = 2\pi \frac{m}{N}$ con $m = 0, 1, \dots, N - 1$, allora si ottiene una sequenza periodica in frequenza⁴³

$$\tilde{X}_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi \frac{m}{N} n} = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi \frac{m}{N}} = X^*(f) \Big|_{f=f_c \frac{m}{N}} \quad (4.18)$$

che può coincidere con la sequenza X_m ottenuta calcolando la DFT (4.10) di una sequenza x_n , qualora questa abbia una durata limitata $\leq N$. D'altro canto, è possibile applicare la IDFT (4.13) ad un periodo della sequenza \tilde{X}_m , ed ottenere quindi una nuova sequenza di valori nel tempo, anch'essa periodica di periodo N , espressa come

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_m e^{j2\pi \frac{m}{N} n} \quad (4.19)$$

Infatti, i valori \tilde{x}_n dipendono da quelli $x_n = x(t)|_{t=nT_c}$ del segnale originario $x(t)$, campionato agli istanti $t = nT_c$, mediante la relazione⁴⁴

$$\tilde{x}_n = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{n+rN} \quad (4.20)$$

⁴³ Infatti $e^{-j2\pi \frac{m+N}{N} n} = e^{-j2\pi \frac{m}{N} n} e^{-j2\pi n}$, ed il secondo termine vale 1 per qualsiasi n . Indichiamo qui ed al prossimo §, una sequenza periodica mediante la tilde $\tilde{\cdot}$.

⁴⁴ Infatti, sostituendo la (4.18) in (4.19), otteniamo $\tilde{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{h=-\infty}^{\infty} x_h e^{-j2\pi \frac{k}{N} h} e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$. Scambiando ora l'ordine delle sommatorie risulta

$$\tilde{x}_n = \sum_{h=-\infty}^{\infty} x_h \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N} (h-n)} \right)$$

Dato che $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N} (h-n)} = \begin{cases} 1 & \text{se } h = n + rN \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, con r intero, si ottiene il risultato (4.20).

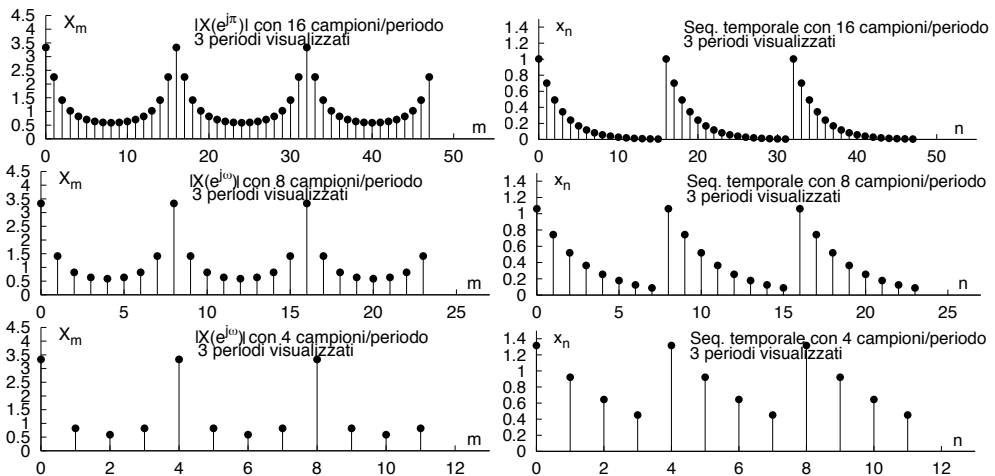


Figura 4.14: Aliasing temporale al diminuire della risoluzione del campionamento in frequenza

e quindi i primi N valori di \tilde{x}_n coincidono con i campioni di $x(t)$ solo se quest'ultimo ha durata limitata, con estensione minore di NT_c , ossia se N è sufficientemente elevato in modo che NT_c copra tutta la durata di $x(t)$, e la (4.15) si riconduca alla somma di un numero finito di termini. D'altra parte, se $x(t)$ ha durata maggiore di NT_c , ovvero $X(z)$ è stata campionata su di un numero di campioni troppo ristretto, allora l'applicazione della IDFT (4.19) ad $\tilde{X}(k)$ provoca il fenomeno di *aliasing temporale*.

Esempio Nella parte sinistra di fig. 4.14 viene mostrato il modulo della sequenza X_m ottenuta campionando la $X(e^{j\omega})$ dell'esempio precedente, utilizzando 16, 8 o 4 campioni/periodo. Nella parte destra della stessa figura sono quindi rappresentate le corrispondenti sequenze x_n ottenute mediante IDFT. Si può notare che, mentre con 16 campioni/periodo la ricostruzione della sequenza $x_n = a^n$ è piuttosto fedele, con 8 campioni si inizia a verificare il fenomeno di aliasing temporale, che diviene ancor più evidente per 4 campioni/periodo.

Riepilogo La figura 4.15 riassume le relazioni che legano la trasformata di Fourier per segnali limitati in banda ai suoi campioni ed alla relativa DTFT, così come viene illustrata la relazione tra DTFT, DFT, e trasformata zeta.

4.5.2 Fast Fourier Transform

La sigla FFT descrive una classe di algoritmi di calcolo della DFT e della sua inversa, caratterizzati dall'uso di un numero molto ridotto di operazioni, rendendo così computazionalmente praticabile l'elaborazione numerica dei segnali. Analizziamo innanzitutto come il calcolo di ognuno degli N termini X_m della (4.10), considerando i valori e $-j2\pi \frac{m}{N}n$ precalcolati (vedi (4.12)), richieda N moltiplicazioni complesse (equivalenti ognuna a 4 moltiplicazioni e 2 somme reali) ed $N - 1$ somme complesse (ognuna pari a 2 somme reali): pertanto una DFT richiede $N(N(4+2) + 2(N-1)) = N(8N-2) \approx 8N^2$ operazioni.

Al contrario, gli algoritmi FFT più efficienti riducono il numero di operazioni ad $8N \log_2 N$: ad esempio, ponendo $N = 1024$, si ottiene un miglioramento di $2^3(2^{10})^2 / 2^{3 \cdot 2^{10} \cdot 10} =$

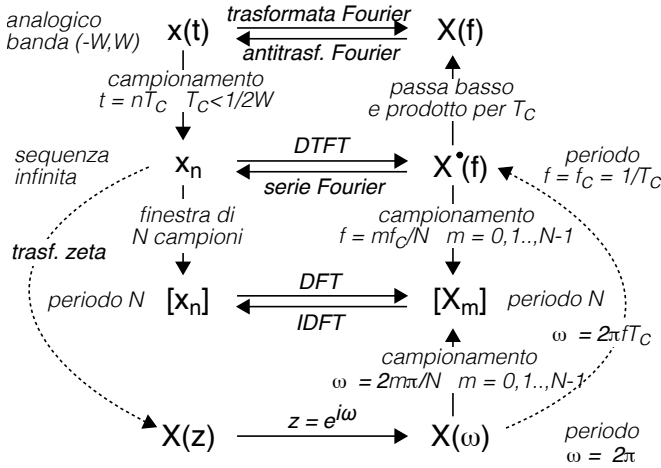


Figura 4.15: Grafo di corrispondenza tra trasformate continue e discrete

$2^{10}/10 \approx 100$ volte! Queste prestazioni sono legate all'adozione di un valore di N che sia una potenza di due (ossia $N = 2^M$ con M intero), ma successivamente sono stati individuati metodi⁴⁵ che permettono una efficienza di calcolo comparabile anche per finestre di analisi di lunghezza qualsiasi.

4.5.3 Relazione tra DFT e DCT

Anche per la DFT risulta valida la proprietà di simmetria coniugata (§ 3.3) e quindi, se i valori della sequenza x_n di lunghezza N che compare nella (4.10) sono reali anziché complessi, allora i coefficienti di DFT X_m presentano parte reale pari e parte immaginaria dispari. In particolare, se immaginiamo di *estendere* la lunghezza della sequenza a $2N$ punti, ottenuti ribaltando sugli indici negativi la sequenza di partenza come $x_{-n} = x_n$ (vedi prima riga di fig. 4.16), allora siamo nelle condizioni di sequenza *reale pari*, che determina una trasformata solo reale (e pari), con parte immaginaria nulla.

Per arrivare a definire la DISCRETE COSINE TRANSFORM (DCT) si calcola una DFT *bilatera* sulla sequenza lunga $2N$ ottenuta *traslando* quella descritta al passo precedente in modo da renderla effettivamente pari (seconda riga di fig. 4.16). Considerando che per segnali reali pari le componenti sinusoidali della base della

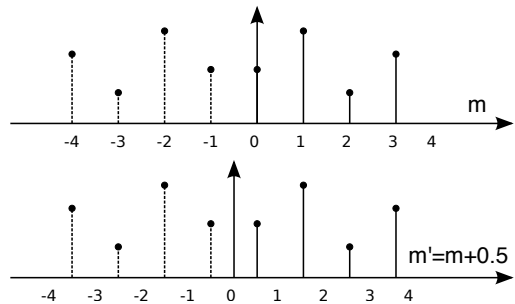


Figura 4.16: Estensione pari di sequenza reale

⁴⁵Vedi ad es. http://it.wikipedia.org/wiki/Trasformata_di_Fourier_veloce

DFT non danno contributi al risultato⁴⁶, e adottando un nuovo cambio di variabile, si ottiene in definitiva la formula di calcolo della DCT come

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos \left[\frac{\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2} \right) m \right] \quad (4.21)$$

a cui è associata la trasformazione inversa IDCT

$$x_n = \frac{1}{2} X_0 + \sum_{m=1}^{N-1} X_m \cos \left[\frac{\pi}{N} \left(m + \frac{1}{2} \right) n \right] \quad (4.22)$$

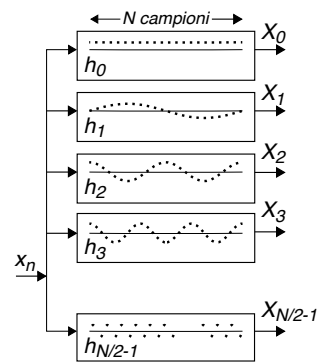
La DCT verrà usata nell'ambito della compressione di immagini (§ 10.2.4). Infatti, i valori di luminanza dei pixel in cui si scompone una immagine sono tutti valori reali.

4.5.4 DFT come un banco di filtri

Un banco di filtri è qualcosa che esegue simultaneamente diverse operazioni di filtraggio sullo stesso segnale, emettendo tutti i risultati contemporaneamente. I valori

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{m}{N} n}$$

di una DFT ad N punti per una sequenza x_n *equivalgono* all'output decimato di N filtri, ciascuno con risposta impulsiva $h_m(n) = e^{j\frac{2\pi}{N} m \cdot n}$ con $m, n = 0, 1, \dots, N-1$, rappresentate nella figura a lato:



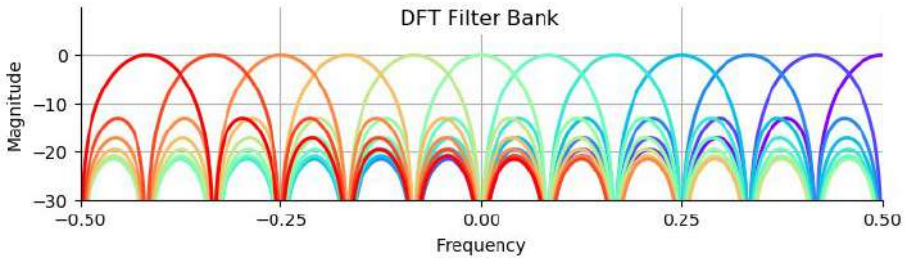
- viene mostrata solo la parte reale di $h_m(n)$;
- la decimazione avviene con periodo pari alla separazione delle finestre di segnale (sovrapposte o meno);
- ogni filtro h_m ha il modulo della risposta in frequenza approssimativamente pari ad un *sinc* (dovuto ad una finestra rettangolare) centrato alla frequenza digitale $2\pi \frac{m}{N}$ (vedi figura seguente);
- un progetto *più specifico* del filtro può ottenere una risposta in frequenza più selettiva, vedi cap. 5.

⁴⁶Scriviamo la (4.10) come

$$\begin{aligned} X_m &= \sum_{n'=-N+1/2}^{N-1/2} x_{n'-1/2} e^{-j2\pi \frac{n'}{2N} m} = \sum_{n'=-N+1/2}^{N-1/2} x_{n'-1/2} \cos \left(2\pi \frac{n'}{2N} m \right) - j \sum_{m'=-N+1/2}^{N-1/2} x_{n'-1/2} \sin \left(2\pi \frac{n'}{2N} m \right) = \\ &= 2 \sum_{n'=1/2}^{N-1/2} x_{n'-1/2} \cos \left(2\pi \frac{n'}{2N} m \right) = 2 \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos \left(2\pi \frac{n+1/2}{2N} m \right) = 2 \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos \left[\frac{\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2} \right) m \right] \end{aligned}$$

in cui $x_{n'}$ è quella disegnata per seconda in fig. 4.16. La quarta eguaglianza tiene conto del fatto che il termine immaginario si annulla, in quanto sommatoria bilaterale di una funzione dispari (ottenuta come prodotto di $x_{n'-1/2}$ pari e $\sin \left(2\pi \frac{n'}{2N} m \right)$ dispari), e del fatto che essendo i termini coseno pari, la sommatoria può essere ristretta ai soli indici positivi, raddoppiati. La penultima eguaglianza rappresenta il semplice cambio di variabile $n = n' - 1/2$, mentre l'ultima è (a parte il fattore 2) la definizione della DCT data in (4.21).

Un'analisi più approfondita di ciò che accade può essere fatta partendo dal filtro che produce X_0 e che è un filtro *a media mobile* (pagina 133), la cui uscita è esattamente uguale a $X_0 = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{0}{N} n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n$, che è *la media* dei valori dei campioni: pertanto il filtro risultante ha una risposta in frequenza *passa-basso* della forma mostrata a pagina 133, con $N - 1$ zeri disposti sul cerchio unitario. Per gli altri elementi della DFT con $m \neq 0$ la risposta impulsiva a media mobile viene *modulata* moltiplicandola per $e^{-j2\pi \frac{0}{N} n}$, in modo che la sua risposta in frequenza *trasli* verso l'indice m , corrispondente alla frequenza digitale $\omega = 2\pi \frac{m}{N}$. In definitiva, la risposta in frequenza composta viene mostrata sotto⁴⁷ con una scala verticale in dB, per il caso di una DFT con 12 punti.



4.6 Filtraggio numerico via DFT

La definizione di DFT illustrata al § 4.5 ben si presta a calcolare il risultato relativo ad un integrale di convoluzione, a patto di seguire alcune accortezze.

4.6.1 Convoluzione discreta

Dati due segnali $x(t)$ e $h(t)$ limitati in banda tra $-W$ e W , anche il risultato della convoluzione $y(t) = x(t) * h(t)$ è limitato in banda, ed i suoi campioni $y_n = y(nT_c)$ (con $T_c < \frac{1}{2W}$) possono essere calcolati⁴⁸ a partire da quelli di $x(t)$ e $h(t)$, come

⁴⁷Immagine presa da <https://wirelesspi.com/discrete-fourier-transform-dft-as-a-filter-bank/>

⁴⁸Infatti, esprimendo l'integrale di convoluzione $x(t) * h(t)$ nei termini dei campioni di $x(t)$ e $h(t)$ (eq. 4.1), e sfruttando la proprietà di ortogonalità dei segnali sinc ($f_c(t - kT_c)$) (vedi § 4.1.2), per i campioni dell'uscita possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
 y(nT_c) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(nT_c - \tau) d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \cdot \text{sinc}(f_c(\tau - kT_c)) \right] \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} h(jT_c) \cdot \text{sinc}(f_c(nT_c - \tau - jT_c)) \right] d\tau = \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(kT_c) h(jT_c) \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(f_c(\tau - kT_c)) \text{sinc}(f_c(\tau - (n - j)T_c)) d\tau = \\
 &= \frac{1}{f_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) h((n - k)T_c) = \frac{1}{f_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k}
 \end{aligned}$$

in cui alla seconda uguaglianza si è applicata la formula di ricostruzione *cardinale* $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \cdot \text{sinc}(f_c(t - kT_c))$ e dunque $h(t - \tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(jT_c) \cdot \text{sinc}(f_c(t - \tau - jT_c))$, quest'ultima valutata per $t = nT_c$; alla terza uguaglianza si è considerato che $\text{sinc}(x)$ è una funzione *pari*, permettendo di scrivere $\text{sinc}(f_c((n - j)T_c - \tau)) = \text{sinc}(f_c(\tau - (n - j)T_c))$, ed alla quarta si è applicata la proprietà di

$$y_n = T_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} \quad (4.23)$$

Nel caso in cui le sequenze x_n e h_n abbiano durata finita e pari rispettivamente a N ed M campioni, si otterrà una sequenza y_n di durata pari a $N + M - 1$ campioni.

Esempio: il lato sinistro di fig. 4.17 mostra una sequenza triangolare ed una rettangolare con un numero di elementi non nulli rispettivamente pari a 5 e 4, la cui convoluzione si estende su 8 valori.

4.6.2 Convoluzione circolare

Date due sequenze x_n ed h_n di durata finita N , il prodotto $Y_m = X_m H_m$ delle rispettive DFT

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{m}{N} n} \quad \text{ed} \quad H_m = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j2\pi \frac{m}{N} n}$$

possiede antitrasformata $\tilde{y}_n = \text{IDFT} \{Y_m\}$ periodica in n di periodo N , e pari a

$$\tilde{y}_n = \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{x}_p \tilde{h}_{n-p} \quad (4.24)$$

in cui \tilde{x}_n e \tilde{h}_n sono le sequenze periodiche di periodo N ottenute replicando infinitamente le sequenze originali x_n ed h_n (⁴⁹). La convoluzione (4.24) è detta *circolare* perché è possibile immaginare le sequenze x_n ed h_n *incollate* su due cilindri concentrici, e la somma svolta sui prodotti degli elementi coincidenti. Ogni valore di p corrisponde ad una diversa rotazione relativa (con angolo multiplo di $2\pi/N$) dei cilindri, ed il campione di h_n che era allineato ad x_{N-1} rientra dall'altro lato, per corrispondere ad x_0 .

La colonna centrale di fig. (4.17) mostra il risultato della periodicizzazione delle stesse sequenze dell'esempio precedente, assieme al risultato della convoluzione circolare tra esse, considerando un periodo $N = 6$ per entrambe: come evidente, il risultato è abbastanza differente da quello ottenuto nel caso della convoluzione discreta.

ortogonalità tra sinc ($f_c t$) traslati di multipli di $T_c = 1/f_c$ (vedi § 4.1.2), per cui l'integrale vale $T_c = 1/f_c$ solo quando $k = n - j$, ovvero $j = n - k$.

⁴⁹Infatti, ad x_n ed h_n corrispondono le DFT periodiche \tilde{X}_m ed \tilde{H}_m , che hanno per antitrasformata \tilde{x}_n ed \tilde{h}_n . Il prodotto $\tilde{X}_m \tilde{H}_m$, espresso in termini di \tilde{x}_n ed \tilde{h}_n , risulta pari a $\tilde{Y}_m = \tilde{X}_m \tilde{H}_m = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{x}_p \tilde{h}_q e^{-j2\pi \frac{m}{N} (p+q)}$, ed applicando a questo la IDFT (4.13), otteniamo:

$$\tilde{y}_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{Y}_m e^{j2\pi \frac{m}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{x}_p \tilde{h}_q \left(\sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m}{N} (n-p-q)} \right)$$

Dato che $\sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m}{N} (n-p-q)} = \begin{cases} N & \text{se } q = (n-p) + lN \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, con l intero, risulta allora $\tilde{y}_n = \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{x}_p \tilde{h}_{n-p}$, come espresso dalla (4.24).

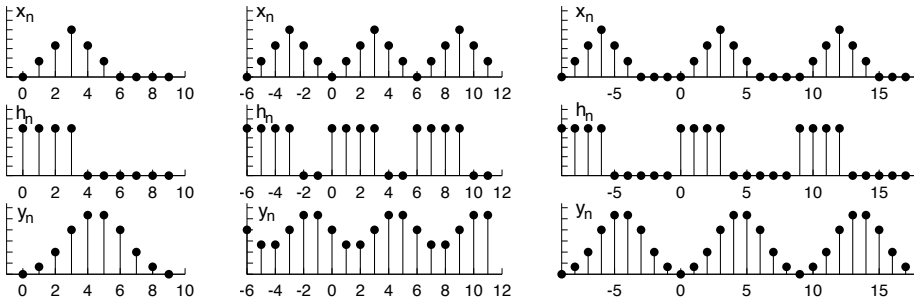


Figura 4.17: Confronto tra convoluzione discreta, circolare, e via DFT

4.6.3 Convoluzione tra sequenze di durata finita via DFT

Sappiamo che la convoluzione produce un risultato di durata pari alla somma delle durate degli operandi; come anticipato, nel caso di due sequenze x_n ed h_n di durata N ed M , il risultato della convoluzione discreta $y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k h_{n-k}$ produce valori non nulli per indici $n = 0, 1, \dots, N + M - 1$. Pertanto, per fare in modo che la (4.24) produca lo stesso effetto di una convoluzione discreta, occorre costruire delle sequenze x'_n e h'_n di lunghezza almeno pari ad $N + M - 1$, ottenute a partire dai valori di x_n ed h_n , a cui si aggiungono $M - 1$ ed $N - 1$ valori nulli, rispettivamente. In tal modo, il prodotto $X'_m H'_m$ tra le DFT ad $N + M - 1$ punti di queste due nuove sequenze può essere antitrasformato, per fornire il risultato corretto.

La parte destra di fig. (4.17) mostra come estendendo con zeri le due sequenze di esempio fino ad una stessa lunghezza $N = 9$, il risultato della loro convoluzione circolare anch'esso di periodo N ora fornisca con esattezza lo stesso risultato ottenuto calcolando direttamente la convoluzione discreta.

4.6.4 Convoluzione di segnali via DFT

Due segnali $x(t)$ e $h(t)$ limitati in banda non possono, a rigore, essere limitati nel tempo. Viceversa, una finestra di segnale non può, a rigore, essere rappresentata dai suoi campioni: infatti, l'effetto della convoluzione in frequenza tra la trasformata della finestra (nominalmente illimitata in banda) e lo spettro del segnale, produce una dispersione frequenziale di quest'ultimo.

Ciononostante, disponendo di un numero di campioni sufficientemente elevato, si può assumere che la trasformata della finestra si attenni più velocemente in frequenza, fino a rendersi trascurabile oltre un certo valore. Inoltre, l'adozione di una frequenza di campionamento più elevata provoca un allontanamento delle repliche spettrali del segnale campionato. In queste due ipotesi è lecito ritenere l'elaborazione condotta sui campioni di segnale, equivalente a quella da svolgere sul segnale originario.

Consideriamo quindi il caso di operare su campioni prelevati alla frequenza opportuna, e di voler determinare la risposta di un filtro caratterizzato dai campioni⁵⁰ $h_n = T_c \cdot h(nT_c)$ di durata finita M , ad un ingresso descritto dai campioni $x_n = x(nT_c)$ di durata indefinita. Per applicare i risultati fin qui descritti occorre suddividere la

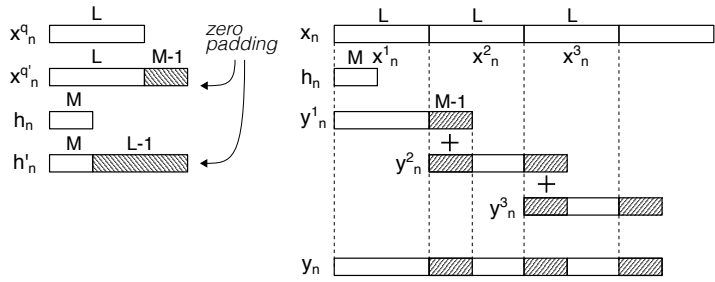
⁵⁰La normalizzazione per T_c discende dalla (4.23)

sequenza x_n in segmenti x_n^q di lunghezza L

$$x_n^q = \begin{cases} x_n & \text{per } qL \leq n < (q+1)L \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

in modo da poter scrivere $x_n = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_n^q$, operare una serie di convoluzioni discrete $y_n^q = x_n^q * h_n$, ed infine ottenere $y_n = x_n * h_n = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_n^q * h_n$ per la linearità della convoluzione.

Osserviamo ora (vedi figura) che ognuno dei termini y_n^q risulta di estensione $N = M + L - 1$ punti, e può essere calcolato mediante la DFT inversa ad N punti del prodotto $X_m^q H_m'$ tra le DFT ad N punti delle versioni *allungate con zero* (ZERO PADDED) di x_n^q ed h_n .



Infine, notiamo che l'estensione temporale $N = M + L - 1$ dei termini y_n^q è maggiore di quella dei segmenti originali x_n^q , di lunghezza L : pertanto la sequenza y_n si ottiene sommando ai primi $M - 1$ valori di ognuna delle y_n^q , gli ultimi $M - 1$ valori risultanti dalle operazioni precedenti. Per questo motivo, il metodo prende il nome di OVERLAP AND ADD.

4.7 Riassumendo

La DFT (4.10) e la IDFT (4.13) costituiscono una coppia di relazioni invertibili che permettono di passare da una sequenza complessa di lunghezza N ad un'altra di pari lunghezza. Ma:

- calcolando la DFT (4.10) su di una finestra di N campioni x_n di un segnale $x(t)$ limitato in una banda $W < f_c/2$, si ottengono delle stime X_m dei campioni della sua trasformata di Fourier $X(f)$ per $f = \frac{m}{N}f_c$, ossia $X_m \approx f_c X(\frac{m}{N}f_c)$ con $m = 0, 1, \dots, N - 1$;
- calcolando la IDFT (4.13) degli X_m si ri-ottengono i campioni di $x(t)$ di partenza;
- sia gli X_m che gli x_n sono in realtà sequenze periodiche di periodo N ;
- i calcoli indicati dalle (4.10) e (4.13) sono in realtà svolti mediante un diverso algoritmo, chiamato *Fast Fourier Transform* o FFT, che ha il vantaggio di richiedere una complessità $O(N \log_2 N)$ ridotta rispetto a quella della DFT, che è $O(N^2)$.

Se la sommatoria (4.10) della DFT venisse applicata, anziché ad un numero finito N di campioni x_n , ad un loro numero infinito, allora

- si otterrebbe una sequenza periodica \tilde{X}_m (4.18) di periodo N , corrispondente al campionamento dello spettro periodico $X^*(f)$;

- l'applicazione della IDFT a \tilde{X}_m produrrebbe una sequenza periodica \tilde{x}_n (4.19), coincidente con la sequenza originaria x_n solo nel caso in cui questa fosse di durata finita, minore o uguale ad N ;
- segmentando un segnale $x(t)$ in sotto-intervalli disgiunti, si può eseguire la convoluzione tra $x(t)$ ed una $h(t)$ di durata finita (§ 4.6.4), operando esclusivamente nel dominio digitale, e sommando tra loro le IDFT dei prodotti tra la DFT dei campioni di $T_c \cdot h(t)$, e le DFT dei campioni di $x(t)$ prelevati in corrispondenza ai suoi segmenti.

L'interpretazione dei valori che risultano dalla applicazione della DFT su dei campioni di segnale, come stima della trasformata di Fourier del segnale, deve tenere conto oltre che delle fonti di approssimazioni evidenziate nella nota 36, anche dei corretti valori da assegnare alla scala delle frequenze e delle ampiezze, ossia:

4.7.1 Le frequenze della DFT

Occorre tener presente il valore della frequenza di campionamento e della periodicità degli X_m . Infatti i valori X_m per $m = 0, 1, \dots, N - 1$ corrispondono ai campioni di $X^\bullet(f)$ per $f = \frac{m}{N}f_c$, ma se $x(t)$ è reale, $X^\bullet(f)$ oltre ad essere periodico presenta simmetria coniugata, e dunque per valori $f > \frac{f_c}{2}$, ossia per $m > \frac{N}{2}$, $X^\bullet(f)$ assume valori *speculari* a quelli risultanti per $f < \frac{f_c}{2}$.

Esempio Se $N = 512$, i primi 256 valori (con m da 0 a 255, ossia per $m = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$) sono da mettere in corrispondenza con quelli di $X(f)$ con $f = 0, \frac{1}{N}f_c, \frac{2}{N}f_c, \dots, \frac{N/2-1}{N}f_c$; mentre i restanti 256 valori (da 256 a 511, ossia per $m = N/2, N/2 + 1, \dots, N - 1$, e corrispondenti a $f = \frac{1}{2}f_c, \frac{N/2+1}{N}f_c, \dots, \frac{N-1}{N}f_c$) esibiscono un comportamento speculare a quello dei precedenti.

4.7.2 Le ampiezze della DFT

Come espresso dalla (4.14), i valori X_m rappresentano una approssimazione dei coefficienti della serie di Fourier calcolati sulla finestra temporale da cui provengono i campioni di segnale, e moltiplicati per il numero di campioni utilizzati nel calcolo: $X_m \simeq N \cdot X_m^{SF}$. Pertanto, i valori ottenuti dalla DFT devono essere normalizzati, dividendoli per N .

4.8 Sottocampionamento

Questo capitolo ha messo fin da subito in chiaro come per poter ricostruire un segnale limitato in banda $x(t)$ a partire dai suoi campioni è necessario che la frequenza di campionamento f_c superi il doppio della massima frequenza W contenuta in $x(t)$, ovvero $f_c \geq 2W$. In realtà, ciò è vero solamente per segnali di banda base. Nel caso di segnali limitati in banda e centrati attorno ad una frequenza f_0 detti *segnali modulati* (cap. 11), la cui massima frequenza è $f_0 + W$, la ricostruzione è *possibile* purché si scelga $2W \leq f_c < f_0/k$ con k intero, nel senso che in tal caso il segnale con spettro periodico in frequenza $X^\bullet(f)$ che si viene a creare non presenta aliasing, e quello di partenza può essere recuperato mediante una operazione di filtraggio *passa banda*.

Per illustrare ciò che accade, facciamo riferimento alla figura che segue. Partiamo da un segnale $x(t)$ limitato in banda, e consideriamo un secondo segnale con spettro $Y(f) = X^+(f) + X^-(f)$ in cui $X(f)$ si è scisso in due parti, quella a frequenze positive ed a frequenze negative, centrate rispettivamente ad f_0 e $-f_0$.⁵¹

Anche se in teoria dovremmo campionare $y(t)$ a frequenza almeno pari a $2(f_0 + W)$, scegliamo di adottare $f_c = f_0/2$. Sappiamo che il risultato sarà un segnale con spettro periodico

$$Y^*(f) = \sum_n Y(f - nf_c)$$

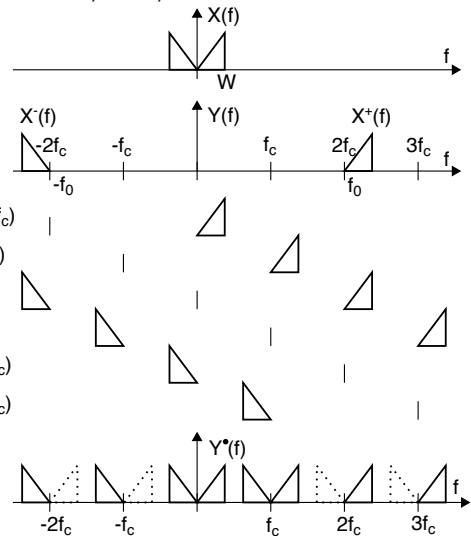
e dunque disegniamo le repliche di $Y(f)$ traslate in $\pm nf_c$, per poi all'ultima riga sovrapporle tra loro e verificare il risultato. Osserviamo allora che non solo gli spettri $X^+(f)$ e $X^-(f)$ sono ancora al loro posto e possono essere recuperati mediante un filtraggio passa banda, ma addirittura si è ricomposto anche il segnale $x(t)$ di banda base, estraibile da $Y^*(f)$ mediante filtraggio passabasso, da realizzare ovviamente per via numerica, avendo già a disposizione i campioni.

Ci si può ora chiedere se il *trucco* funzioni solo per segnali BLU. La risposta è no, funziona anche per segnali a modulazione con *banda laterale doppia*, come ad esempio $y(t) = x(t) \cos \omega_0 t$, a cui corrisponde $Y(f) = \frac{1}{2} [X(f + f_0) + X(f - f_0)]$. Scegliendo $f_c = f_0/k$ otteniamo

$$\begin{aligned} Y^*(f) &= \sum_n Y\left(f - n\frac{f_0}{k}\right) = \frac{1}{2} \left[\sum_n X\left(f - n\frac{f_0}{k} + f_0\right) + \sum_n X\left(f - n\frac{f_0}{k} - f_0\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_n X\left(f - \left(\frac{n}{k} - 1\right)f_0\right) + \sum_n X\left(f - \left(\frac{n}{k} + 1\right)f_0\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_n X\left(f - (n - k)\frac{f_0}{k}\right) + \sum_n X\left(f - (n + k)\frac{f_0}{k}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_m X\left(f - m\frac{f_0}{k}\right) + \sum_m X\left(f - m\frac{f_0}{k}\right) \right] = \sum_m X\left(f - m\frac{f_0}{k}\right) \end{aligned}$$

ovvero lo stesso risultato a cui saremmo pervenuti campionando direttamente il segnale $x(t)$ di banda base di partenza.

Quanto esposto costituisce di fatto una strada alternativa per demodulare (sia in forma omodina che eterodina) un segnale modulato e passare alla sua rappresentazione digitale *in un colpo solo*, secondo un approccio chiamato *software defined radio*⁵² in cui tutta l'elaborazione del segnale avviene in forma numerica. Oltre ad avere ovvia



⁵¹In effetti, questo è ciò che succede nel caso di modulazione in *banda laterale unica* o BLU, vedi § 12.1.2

⁵²Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Software-defined_radio

applicazione nella tecnologia dei nostri attuali telefonini e schede WiFi, il sottocampionamento di segnali radio è uno degli avanzamenti tecnologici che contribuiscono alla progettazione della telefonia 5G, in cui i segnali radio ricevuti dalle *base station* collegate alle antenne collocate sopra palazzi e torri, anziché essere elaborati in loco, vengono subito campionati e *spediti* su fibra ottica presso il *data center* più vicino, dove ciò che una volta era una *centrale telefonica* si è trasformato in un *centro di elaborazione dati*.

Vi sono alcune accortezze di cui tenere conto:

- la precisione con cui è necessario generare f_c è del tutto comparabile a quella con la quale è necessario ricostruire la portante in un ricevitore omodina;
- la banda di rumore in ingresso al campionatore si estende fino a $f_0 + W$, mentre la funzione del filtro anti-aliasing è ora svolta da un filtro passa banda che isola la porzione di spettro su cui effettuare il sottocampionamento;
- la durata τ della *fase di lettura* da parte del *sample & hold* deve essere una frazione del periodo di campionamento teorico $T_c \leq 1/2(f_0+W)$.

Filtri analogici e numerici

IN questo capitolo si approccia la natura fisica dei dispositivi filtranti che fino ad ora abbiamo considerato solamente dal punto di vista analitico. Accenniamo prima ai filtri *analogici*, ossia quelli che agiscono su di un segnale $x(t)$ *tempo-continuo*, basati su componenti elettrici ed elettronici, e per i quali esistono consolidati metodi di *analisi* e di *sintesi*, rispettivamente per determinare la risposta in frequenza di un dato circuito, o viceversa per ottenere l'architettura ed il dimensionamento dei componenti di un circuito a partire da una descrizione della $H(f)$ desiderata; in questo contesto, si affronta la relazione tra le trasformate di FOURIER e di LAPLACE. E' quindi il turno dei filtri *digitali*, che pur continuando ad operare su segnali analogici sono caratterizzati da una architettura *computazionale* basata su semplici operazioni di somma e prodotto di campioni del segnale presi ad intervalli regolari, e che per questo costituiscono una sorta di *ponte* tra il mondo analogico e quello numerico. Qualora invece l'azione filtrante sia realizzata operando direttamente sulla rappresentazione numerica di segnali campionati, significa che ci siamo spostati nel dominio dei filtri *numerici*, a cui corrispondono schemi architetturali implementabili indifferentemente sia in hardware che in software, e per i quali torneremo ad utilizzare gli strumenti analitici della trasformata *zeta* e della sua correlata DTFT (§ 4.5). Infine, viene introdotto il tema del filtraggio *polifase* ovvero in cui la frequenza di campionamento in ingresso ad un filtro è diversa da quella in uscita, con applicazione diretta alla decimazione, all'interpolazione ed all'ambito delle *software radio*.

5.1 Filtri analogici

Affrontiamo questa classe di filtri senza addentrarci in molti dettagli (svolti in altri corsi), limitandoci a descrivere la metodica di studio. Come anticipato, i filtri analogici operano esclusivamente su segnali tempo-continui¹, e sono realizzati mediante una varietà di tecniche. Il tipo più comune è quello basato su circuiti RLC a costanti concentrate, detto *filtro passivo* in quanto non richiede alimentazione, essendo costituito da condensatori, induttori e resistori. La difficoltà di ottenere elementi di elevata induttanza ma di piccole

¹Compreso quindi un segnale analogico che trasporta informazione numerica, § 15.1.2.

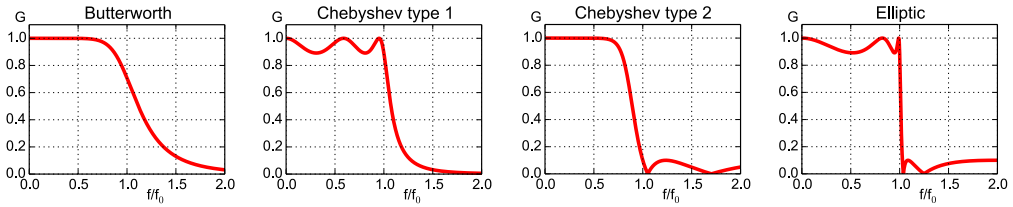


Figura 5.1: Risposta in frequenza di un filtro passa basso per diverse famiglie polinomiali

dimensioni necessari alle frequenze più basse ha portato a realizzarne la funzione per mezzo di amplificatori operazionali² dando luogo (fino a circa 1 MHz) ai *filtri attivi*, mentre a frequenze più elevate oltre agli RLC si possono realizzare filtri a *crystallo*, *elettromeccanici*, a *guida d'onda*, a *microstrisce*³.

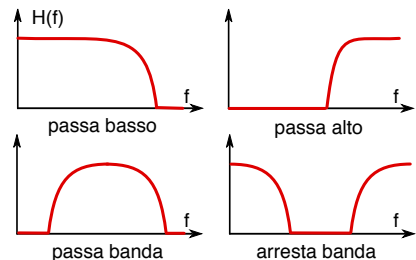
In tutti i casi è possibile svolgere *l'analisi* del circuito e pervenire⁴ all'espressione di una *funzione di trasferimento* razionale del tipo

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i s^i}{\sum_{j=0}^N b_j s^j} \quad (5.1)$$

(in cui $M < N$), definita su di un piano complesso $s = \sigma + j2\pi f$, e ponendo $s = j2\pi f$ si ottiene la risposta in frequenza⁵ $H(f) = H(s = j2\pi f)$. Il grado N del denominatore di (5.1) (uguale al numero delle sue radici o *poli*) definisce *l'ordine* del filtro, ed è legato sia alla sua complessità realizzativa, sia alla rapidità di variazione della $H(f)$.

Tipo di polinomio e di filtro Lo spazio di progetto del filtro viene delimitato vincolando i polinomi $N(s)$ e $D(s)$ ad appartenere ad una delle *famiglie* dette di *Bessel*, di *Butterworth*, di *Chebyshev* o di *Cauer* (o filtri ellittici)⁶, che essenzialmente differiscono tra loro per la posizione delle radici del polinomio nel piano s ; la figura 5.1 mostra il modulo della risposta in frequenza $H(f)$ di un filtro *passa-basso* ottenibile nei diversi casi per uno stesso ordine $N = 5$.

Per ogni famiglia esistono *tabelle* di coefficienti *precalcolati* per diversi valori di N e che danno luogo ad un filtro *passo-basso prototipo* ovvero con frequenza di taglio (vedi sotto) *unitaria*, dai quali si ottengono (mediante operazioni di cambio di variabile) i nuovi coefficienti per frequenze di



²Vedi ad es. <https://it.wikipedia.org/wiki/Giratore>

³Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Filter_\(signal_processing\)#Technologies](https://en.wikipedia.org/wiki/Filter_(signal_processing)#Technologies)

⁴Ad esempio, applicando la trasformata di Laplace alle equazioni differenziali che descrivono la relazione ingresso-uscita di un circuito RLC.

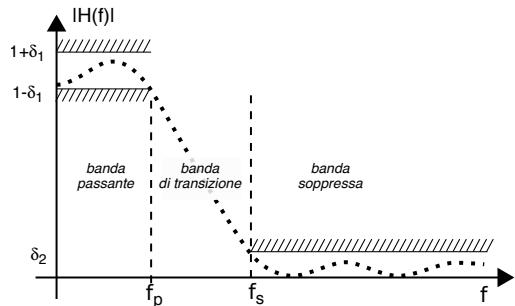
⁵Difatti se $s = j\pi 2f$ la definizione di trasformata di Laplace $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$ diviene identica a quella di Fourier, ed equivale a calcolare la $H(s)$ lungo l'asse immaginario. Questa equivalenza è valida solo se il filtro è *stabile*, che nel dominio di Laplace significa richiedere che tutti i poli di $H(s)$ siano a *sinistra* di tale asse.

⁶Per approfondimenti, si può consultare <http://ens.di.unimi.it/dispensa/cap3.pdf> e https://en.wikipedia.org/wiki/Network_synthesis_filters.

taglio qualsiasi e per filtri con altro tipo di banda passante, ossia passa-alto, passa-banda e arresta-banda (o *notch*)⁷; gli ultimi due casi sono inoltre realizzabili anche rispettivamente come cascata o parallelo di un passa-alto più un passa-basso, con frequenze di taglio opportune.

Specifiche di progetto, ordine del filtro e scelta del polinomio L'ordine del filtro viene individuato come quello per il quale il modulo della risposta in frequenza $|H(f)|$ (o meglio, il suo quadrato) associata al polinomio prescelto rientra all'interno

della *maschera* definita da uno *schema di tolleranza* del tipo⁸ mostrato nella figura a lato. La specifica è tanto più stringente quanto più $|H(f)|$ varia rapidamente, cosa possibile solo aumentando l'ordine N . Ma non tutti i polinomi si comportano allo stesso modo, anzi, come evidente guardando la fig. 5.1 da sin. a destra, a parità di ordine alcuni permettono transizioni assai più rapide rispetto ad altri. D'altra parte per molte applicazioni è anche necessario garantire una buona *linearità di fase* (pag. 66, § 8.2.2) da parte del filtro, ma in linea generale questa seconda esigenza è incompatibile con una elevata *selettività* (vedi sotto) del filtro. In particolare i filtri di *Bessel*⁹ sono gli unici ad esibire una fase lineare, ma decadono lentamente con la frequenza; per gli altri tipi di fig. 5.1 la linearità di fase peggiora all'aumentare della selettività, specie in prossimità della frequenza di taglio. Quindi in definitiva la scelta del polinomio viene effettuata in base alla specifica sulla fase, e l'ordine N del filtro determinato in base alla maschera di attenuazione.



La maschera di tolleranza è definita da uno schema di tolleranza del tipo⁸ mostrato nella figura a lato. La specifica è tanto più stringente quanto più $|H(f)|$ varia rapidamente, cosa possibile solo aumentando l'ordine N . Ma non tutti i polinomi si comportano allo stesso modo, anzi, come evidente guardando la fig. 5.1 da sin. a destra, a parità di ordine alcuni permettono transizioni assai più rapide rispetto ad altri. D'altra parte per molte applicazioni è anche necessario garantire una buona *linearità di fase* (pag. 66, § 8.2.2) da parte del filtro, ma in linea generale questa seconda esigenza è incompatibile con una elevata *selettività* (vedi sotto) del filtro. In particolare i filtri di *Bessel*⁹ sono gli unici ad esibire una fase lineare, ma decadono lentamente con la frequenza; per gli altri tipi di fig. 5.1 la linearità di fase peggiora all'aumentare della selettività, specie in prossimità della frequenza di taglio. Quindi in definitiva la scelta del polinomio viene effettuata in base alla specifica sulla fase, e l'ordine N del filtro determinato in base alla maschera di attenuazione.

Frequenza di taglio, selettività e fattore di qualità Sono parametri che descrivono un filtro in modo grossolano ma indicativo. La frequenza di *taglio* f_T è quella per la quale

$$|H(f_T)|^2 = \frac{1}{2} |H(f)|_{Max}^2 \quad (5.2)$$

e dunque individua una sorta di *frontiera* tra la banda passante e quella soppressa. La *selettività* di un passa basso è misurata dal rapporto

$$k = \frac{f_p}{f_s} \leq 1$$

⁷Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Prototype_filter

⁸La descrizione della maschera in figura avviene nei termini della specifica di

- una *banda passante* $f < f_p$ che individua la regione di frequenze da lasciar passare;
- il valore percentuale δ_1 entro cui $H(f)$ può oscillare nella banda passante;
- una *banda soppressa* $f > f_s$ in cui vorremmo che le corrispondenti componenti frequenziali in ingresso fossero attenuate di almeno il $\delta_2\%$ rispetto a quelle della banda passante;
- una *banda di transizione* $f_s - f_p$ in cui la risposta in frequenza varia;
- se sia richiesta o meno al filtro la proprietà di *linearità di fase* (vedi § 13.1.3).

⁹Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_filter

(l'inverso per un passa-alto) ed è tanto più grande quanto meno estesa è la regione di transizione. Nel caso di un passa-banda centrato in f_0 il filtro può inoltre essere caratterizzato nei termini del suo *fattore di qualità*

$$Q = \frac{f_0}{B}$$

in cui $B = f_{T_2} - f_{T_1}$ è la banda compresa tra le due frequenze di taglio inferiore e superiore; Q rappresenta pertanto quanto il filtro è *stretto* attorno alla sua risonanza, ed il suo inverso B/f_0 è chiamato *banda frazionaria*.

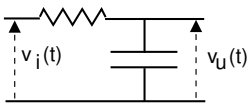
Realizzazione del filtro Mentre i filtri di Bessel, Butterworth e Chebyshev-I sono filtri a soli poli, quelli di Chebyshev-II ed Ellittici possiedono anche zeri. Ma in entrambi i casi una volta noti i coefficienti, la (5.1) si riscrive in forma fattorizzata¹⁰ $H(s) = \prod_{j=1}^{N/2} H_j(s)$ con ogni termine $H_j(s)$ che presenta una coppia di poli coniugati e che corrisponde ad un circuito risonante del secondo ordine o *cella circuitale*¹¹, producendo il massimo per $|H_i(j2\pi f)|^2$ alla frequenza di risonanza f_0^i . Ponendo le diverse celle *in cascata* si ottiene così la $H(f)$ che soddisfa i requisiti stabiliti dallo schema di tolleranza.

Nonostante quanto discusso appaia direttamente applicabile al solo caso di segnale analogico, al § 5.3 mostreremo come i risultati ottenuti siano applicabili anche al caso di segnali numerici, dato che esistono tecniche (basate su cambi di variabile che *mappano* il semipiano sinistro della variabile s all'interno del *cerchio unitario* del piano z) che permettono di passare da una $H(s)$ ad una $H(z)$, e di lì ad una realizzazione del filtro in forma *numerica*.

5.1.1 Filtro analogico ad un polo

A titolo di esempio esemplificativo di quanto fin qui illustrato, occupiamoci del più semplice tipo di filtro analogico, costituito dal partitore RC rappresentato alla figura seguente, e che realizza una funzione di passa-basso¹².

Considerando la tensione $v_i(t)$ come il segnale di ingresso al filtro, mostriamo che la corrispondente uscita $v_u(t)$ può essere espressa come convoluzione tra $v_i(t)$ ed una risposta impulsiva



$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{con } t \geq 0 \quad (5.3)$$

L'analisi del circuito porta infatti¹³ ad una espressione per la risposta in frequenza pari

¹⁰Un polinomio $P(s) = \sum_{j=0}^N b_j s^j$ si azzerava per gli N valori $s = \beta_j$, noti come *gli zeri* di $P(s)$. Lo stesso polinomio può quindi essere scritto come $P(s) = \prod_{j=1}^N (s - \beta_j)$, oppure raggruppando gli zeri a coppie (eventualmente coniugate) si ottiene uno sviluppo in termini di secondo grado $P(s) = \prod_{j=1}^{N/2} (s^2 + c_j s + d_j)$ a cui, se N è dispari, va aggiunto un fattore di primo grado.

¹¹Tradizionalmente di tipo RLC, oppure realizzata mediante amplificatori differenziali.

¹²Mnemonicamente possiamo ricordare il passa-basso come quello "con il condensatore *in basso*"; d'altra parte un filtro RC passa-alto presenta la posizione di R e C scambiate, ovvero con C *in alto*.

¹³Sappiamo che le tensioni ai capi di R e C valgono $v_R(t) = R \cdot i(t)$ e $v_C(t) = v_u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$ che, trasformate con Fourier forniscono $V_R(f) = R \cdot I(f)$ e $V_u(f) = \frac{1}{C} \frac{1}{j2\pi f} I(f)$. Per la legge di Kirchoff

a

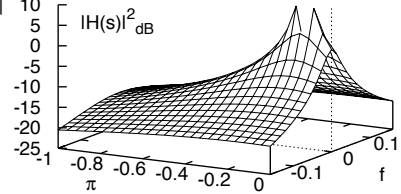
$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \tag{5.4}$$

di cui la (5.3) è l'antitrasformata¹⁴. Estendendo questo risultato al dominio di Laplace si ottiene

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC}$$

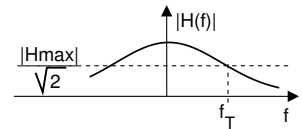
Pertanto, $H(s)$ presenta un polo in $s = -\frac{1}{RC}$, e dunque risulta $H(s)|_{s=-\frac{1}{RC}} = \infty$.

A lato è raffigurato l'andamento di $10 \log_{10} |H(s)|^2$ calcolato per un valore $RC = 8$. Come evidente, $|H(s)|^2$ può essere pensata come una sorta di *cono vulcanico* attorno al polo sito in $1/RC = 0.125$ e la cui sezione, ottenuta dall'intersezione con un piano verticale passante per l'asse $j2\pi f$, individua la risposta in frequenza $H(f) = H(s = j2\pi f)$. Come si vede dalla figura, $H(f)$ risulta di tipo passa basso, con fianchi tanto più ripidi quanto più il polo è vicino all'origine.



Frequenza di taglio Nel caso del filtro RC risulta che $|H_{Max}| = H(0) = 1$, ed esprimendo il modulo della (5.4) nella forma¹⁵

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_T}\right)^2}}$$



si pone in evidenza che $f_T = \frac{1}{2\pi RC}$ rappresenta proprio la frequenza di taglio: infatti, $|H(f_T)| = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cogliamo l'occasione per notare che risultando (eq.- (5.2)) $|H(f_T)|^2 = \frac{1}{2} H_{Max}^2$ si ottiene¹⁶ che $|H(f_T)|^2|_{dB} = H_{Max}^2 (dB) - 3$; per questo la frequenza di taglio è indicata anche come *frequenza a 3 dB*.

5.2 Filtri digitali

Con questo termine indichiamo una classe di filtri definita mediante uno *schema computazionale* anziché circuitale, espresso unicamente nei termini di unità elementari di elaborazione *prodotto, somma e ritardo* (§ 7.5) che (in combinazione tra loro) producono effetti filtranti sul segnale in transito. Essi possono rappresentare un modello di cause

alle maglie si ha $V_i(f) = V_R(f) + V_u(f) = R \cdot I(f) + \frac{1}{j2\pi fC} I(f)$; la risposta in frequenza sarà pertanto

$$H(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)} = \frac{\frac{1}{j2\pi fC} I(f)}{R \cdot I(f) + \frac{1}{j2\pi fC} I(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

¹⁴Infatti

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \right\} = \int_0^\infty \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty e^{-t/\tau - j2\pi f t} dt = \frac{1}{\tau} \frac{e^{-t/\tau - j2\pi f t}}{-1/\tau - j2\pi f} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{1/\tau + j2\pi f} = \frac{1}{1 + j2\pi f\tau}$$

¹⁵Ricordiamo che il modulo è il rapporto dei moduli, e quello del denominatore è $\sqrt{\Re^2 + \Im^2}$ in cui dalla (5.4) $\Re = 1$ e $\Im = 2\pi fRC$.

¹⁶Vedi § 8.1

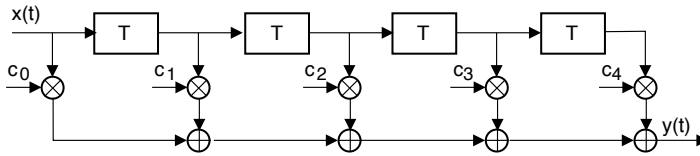


Figura 5.2: Schema simbolico di un filtro trasversale di ordine $N = 5$

naturali¹⁷, oppure si può progettare una specifica architettura in modo da combinare questi elementi per ottenere l'effetto desiderato. Per questa classe di filtri l'integrale di convoluzione si riduce ad una sommatoria, e sebbene l'analisi che segue si basi su segnali *tempo-continui*, i filtri digitali sono di particolare rilievo perché permettono di svolgere le operazioni di filtraggio operando direttamente sui *campioni* dei segnali (vedi § 4.6.1), e dunque possono essere realizzati via software o hardware¹⁸.

5.2.1 Filtro trasversale

Prende questo nome dal modo in cui è rappresentato lo schema di calcolo, vedi la fig. 5.2, in cui l'uscita $y(t)$ (in basso a destra) è ottenuta sommando valori di ingresso $x(t)$ (in alto a sinistra) presi (grazie alla cascata di ritardi) ad istanti $t = nT$ con $n = 0, 1, \dots, N$, ognuno moltiplicato per un diverso coefficiente c_n , ovvero

$$y(t) = \sum_{n=0}^N c_n x(t - nT) \quad (5.5)$$

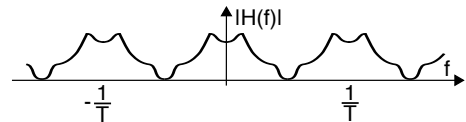
Analisi Se poniamo in ingresso $x(t) = \delta(t)$, l'uscita $y(t)$ riprodurrà la *risposta impulsiva* del filtro, pari a

$$h(t) = \sum_{n=0}^N c_n \delta(t - nT) \quad (5.6)$$

costituita da $N + 1$ copie dell'impulso posizionate in $t = nT$ e con area pari ai rispettivi coefficienti c_n o *rubinetti*¹⁹ del filtro. All'intero N viene conferito il senso di *ordine* del filtro, ed essendo finito, permette di classificare questa architettura come un filtro FIR (*finite impulse response*)²⁰. Applicando le relazioni note della trasformata, è facile valutare la risposta in frequenza corrispondente alla $h(t)$ (5.6), ovvero

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \sum_{n=0}^N c_n e^{-j2\pi f nT} \quad (5.7)$$

Come esemplificato dalla figura a lato, $H(f)$ risulta periodica (in frequenza) con periodo $F = \frac{1}{T}$: infatti tutti gli esponenziali $e^{-j2\pi f nT}$



¹⁷Ad esempio l'acustica di un ambiente (del bagno di casa, come di un teatro) è il risultato dei contributi legati alle diverse riflessioni dei suoni su pareti ed altri elementi, ognuna più o meno attenuata, e con un diverso ritardo di propagazione tra sorgente e ascoltatore. Un fenomeno simile avviene anche alle onde radio di WiFi e telefonia mobile, vedi § 20.3.3.

¹⁸Il tema delle realizzazioni numeriche dei filtri digitali è approcciata al § 5.3, e citiamo come fonte di approfondimento <http://www.dspsguide.com/ch14/6.htm>.

¹⁹Uso questo termine per tradurre il termine *taps* (rubinetti) utilizzato nei testi inglesi per indicare i coefficienti c_n : come se i sommatrici in basso in fig. 5.2 raccogliessero l'acqua (o la birra!) *spillata* dai rubinetti c_n , e proveniente dai *serbatoi di ritardo* T . La cosa buffa è che può accadere di trovare in letteratura riferimenti ai rubinetti o *taps* come a dei... *tappi!*

²⁰Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_impulse_response

della sommatoria (5.7) presentano la stessa periodicità.

Sintesi Al § 4.4 abbiamo già incontrato segnali con spettri periodici: la trasformata discreta di Fourier DTFT (eq. (4.8)) $H^\bullet(f)$ calcolata a partire da un segnale campionato $h^\bullet(t)$ espresso nella forma (5.6) ha esattamente l'aspetto della (5.7), che quindi riscriviamo come

$$H(f) = H^\bullet(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

ovvero come risposta in frequenza *periodizzata* del filtro $G(f)$ limitato nella banda $(-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T})$ che intendiamo ottenere. A questo punto i coefficienti c_n che definiscono $h(t)$ altro non sono che quelli (*nel tempo*) dello sviluppo in serie di Fourier di $H^\bullet(f)$ (periodica *in frequenza* con periodo $1/T$), ovvero (eq. (4.9))

$$c_n = T \int_{-1/2T}^{1/2T} G(f) e^{j2\pi f n T} df \quad (5.8)$$

Approssimazione Ora però sorgono due problemi. Il primo è che la (5.8) è valida con $n = -\infty, \dots, \infty$, mentre noi vorremmo solamente $N + 1$ coefficienti c_n . A questo c'è rimedio a patto di accettare una approssimazione, *finestrando*²¹ la sequenza dei c_n e tenendo così solo quelli per $n = -N/2, \dots, N/2$: ovviamente più è piccolo N , e peggiore sarà l'approssimazione $\hat{H}(f)$ di $H(f)$. Il secondo problema è che nella (5.7) ed in fig. 5.2 i coefficienti hanno indici ≥ 0 , e non negativi, come deve essere per ottenere un sistema *fisicamente realizzabile* (pag. 26). A ciò si risponde eseguendo *uno scorrimento* a destra dei c_n di $N/2$ posizioni, assegnando $c_{n'} = c_{n+N/2}$ in modo da avere $n' \in [0, \dots, N]$: questo corrisponde ad introdurre un ritardo nell'uscita pari a $\frac{N}{2}T$, ottenendo così un segnale $\tilde{y}(t) = y\left(t - \frac{N}{2}T\right)$.

Fase lineare Un vantaggio della approssimazione ora descritta è la possibilità di ottenere facilmente un filtro detto a *fase lineare*, ovvero per cui $\arg\{H(f)\} = e^{-j2\pi f \tau}$ e che dunque non presenta distorsione di fase (§ 13.1.3). Infatti scegliendo $H(f)$ *reale pari* si ottengono valori c_n reali pari (vedi § 2.2.1.1), e lo scorrimento per produrre i $c_{n'}$ è l'unico contributo alla fase della $\tilde{H}(f) = \hat{H}(f) e^{-j2\pi f \frac{N}{2}T}$ risultante. In definitiva, operare in questo modo determina valori dei c_n *simmetrici* rispetto ad $N/2$.

5.2.2 Realizzazione numerica del filtro trasversale

Lo schema di fig. 5.2 è completamente *analogico*, nel senso che sia $x(t)$ che $y(t)$ sono definiti per ogni t . D'altra parte, la presenza degli N ritardi T *tutti uguali* permette di derivarne uno schema *di calcolo* operante su segnali campionati con frequenza $f_c = \frac{1}{T_c}$. A questo scopo è sufficiente scegliere $T = T_c = \frac{1}{f_c}$ e calcolare $y(t)$ ai soli istanti $t = nT$, così come *caricare la memoria* del filtro con i soli campioni $x(nT)$: infatti, al § 4.6.1 si

²¹Ricordando i risultati del § 3.8.4, a seguito della finestratura la reale risposta in frequenza risulterà $\hat{H}(f) = H(f) * W(f)$. Per questo, si sono individuate alcune finestre *migliori* della rettangolare, vedi ad es. <http://www.labbookpages.co.uk/audio/firWindowing.html>. E' chiaro che adottando invece una finestra rettangolare, la finestratura equivale a calcolare la (5.8) solo per gli indici n necessari; l'effetto di tale troncamento sarà la comparsa di *oscillazioni* in prossimità della regione di transizione di $H(f)$, del tutto analoghe a quelle evidenziate al § 2.2.2.

mostra che se due segnali $x(t)$ ed $h(t)$ sono limitati in una banda W , e se $T_c < 1/2W$ la convoluzione discreta

$$y_k = T_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n x_{k-n} \tag{5.9}$$

tra i relativi campioni x_n ed h_n produce una terza sequenza y_k da cui, applicando il teorema del campionamento, si ottiene lo stesso risultato della convoluzione analogica $y(t) = x(t) * h(t)$.

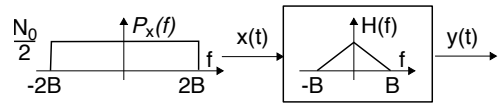
Se ora limitiamo l'indice n tra zero ed N (la durata di h_n), la (5.9) equivale alla (5.5) calcolata per $t = kT_c$ ovvero $y(kT_c) = \sum_{n=0}^N c_n x((k-n)T_c)$, dopo aver posto

$$c_n = T_c h_n$$

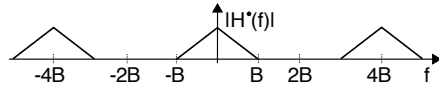
Sebbene la condizione di limitatezza *temporale* dovrebbe escludere quella di limitazione *in banda*, i valori h_n possono essere associati in prima approssimazione ai *campioni* (presi per $t = nT_c$) della risposta impulsiva $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$ corrispondente alla $H(f)$ desiderata²². Ovviamente, i campioni (di $x(t)$, $y(t)$ e $h(t)$) devono essere presi ad intervalli $T = T_c \leq 1/2W$, in cui ora W è la *massima frequenza massima* tra $x(t)$ ed $h(t)$.

Esempio Si desidera realizzare un filtro trasversale che approssimi una $H(f) = \text{tri}_{2B}(f)$, considerando che al suo ingresso è posto un processo bianco

$x(t)$ con densità di potenza $\mathcal{P}_x(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}_{4B}(f)$.

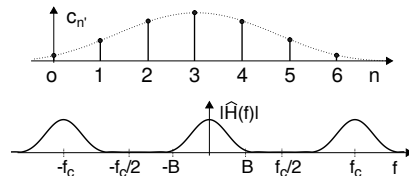


Per realizzare il filtro numerico operante su dati campionati occorre adottare una frequenza di campionamento $f_c \geq 2W = 4B$, e dunque un ritardo tra gli stadi del FIR pari a $T_c \leq 1/4B$, in modo che la corrispondente $H^*(f)$ presenti la periodicità $f_c = 4B$ mostrata in figura.



In base alle considerazioni precedenti, dopo aver ottenuto $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = B \text{sinc}^2(tB)$, ne calcoliamo i campioni per $t = nT_c = n/4B$ ovvero $h_n = B \text{sinc}^2(\frac{n}{4})$, da cui otteniamo $c_n = T_c h_n = \frac{1}{4} \text{sinc}^2(\frac{n}{4})$. A questo punto non resta che *troncare* la serie a pochi termini centrati in zero (ad es. con $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ tutti i campioni di $h(t)$ sono prelevati dal *lobo principale* del sinc^2) accettando l'approssimazione conseguente, e *traslarli a destra* in modo da ottenere un filtro causale con sette rubinetti, nell'esempio

$c_{n'}$ con $n' = 0, 1, \dots, 6$, con coefficienti simmetrici rispetto ad $n = 3$, e dunque il filtro è a *fase lineare*. A lato sono mostrati i coefficienti ottenuti, assieme alla $\hat{H}(f)$ risultante dalla loro finestrata.

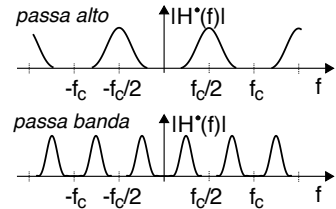


Filtro a media mobile Quando i coefficienti c_n sono tutti uguali tra loro e con valore pari ad $\frac{1}{N+1}$ le operazioni condotte dal filtro sono dette di *media mobile* (da *moving average* o MA) dato che di fatto si calcola una media aritmetica tra gli ultimi

²²In pratica, questa $h(t)$ è quella che dà origine alla $h^*(t) = h(t) \cdot \sum_{n=0}^N \delta(t - nT)$ espressa dalla (5.6), vedi anche nota 30 a pag. 102.

valori di ingresso, ovvero $y_k = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N x_{k-n}$. E' il metodo comunemente usato per *smussare* serie temporali discrete, come per es. temperature (giornaliere od orarie) o quotazioni dei titoli di borsa. Corrisponde ad un filtro tempo-continuo la cui $h(t)$ è una $rect_{(N+1)T_c}(t)$, ha un effetto passa-basso, e la relativa $H(f)$ è ottenuta a pag. 133.

Filtro passa-alto e passa-banda Il filtro trasversale può essere configurato come un *passa-alto* considerando un segnale in ingresso limitato in banda $W = \frac{f_c}{2} = \frac{1}{2T}$ ed impostando la $H^*(f)$ in modo da tener conto della sua periodicità in frequenza pari ad f_c , come mostrato in figura. Può altresì divenire un filtro *passa-banda* sempre per il medesimo tipo di segnale²³, con il vincolo di lasciar passare le frequenze centrate attorno ad $\frac{f_c}{4}$.



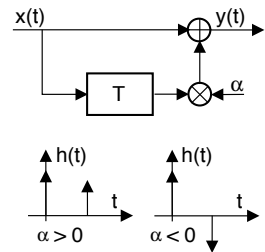
Occupiamoci ora di un paio di architetture particolarmente semplici: la prima è ancora un FIR ma con $N = 1$, mentre la seconda introduce la classe di filtri di tipo *infinite impulse response* o IIR. Anche se per entrambi è chiaramente possibile realizzare una implementazione numerica qualora il ritardo $T = 1/f_c$ sia tale da permettere il campionamento del segnale in ingresso, qui analizziamo solo gli aspetti tempo-continui.

5.2.3 Filtro trasversale del primo ordine

Con $N = 1$ il filtro di fig. 5.2 può essere ridisegnato come mostrato a lato, avendo posto $c_0 = 1$ e $c_1 = \alpha$. Ad esso corrisponde una risposta impulsiva

$$h(t) = \delta(t) + \alpha \delta(t - T) \tag{5.10}$$

il cui andamento è mostrato a fianco per i casi $\alpha \geq 0$, ed a cui corrisponde²⁴ una risposta in frequenza pari a $H(f) = 1 + \alpha e^{-j2\pi fT}$. Da questa espressione è facile ottenere²⁵ quella



²³A prima vista la realizzazione *numerica* del passa-banda *non sembrerebbe possibile*, dato che per ottenere una $H^*(f)$ con periodo in frequenza di $f_c/2$ come in figura il ritardo T tra i rubinetti dovrebbe essere $T = 2/f_c$ cioè il doppio del massimo periodo di campionamento $T_c = 1/f_c$ necessario ad un segnale di ingresso con frequenza massima $f_c/2$. Ma in realtà è molto semplice: basta che il filtro FIR adotti un ritardo $T = T_c = 1/f_c$ in modo da soddisfare il requisito per il segnale in ingresso, ma *raggruppi* i ritardi *a due a due*, ossia inserisca un rubinetto ogni due ritardi.

²⁴In questo caso $H(f)$ risulta a simmetria coniugata ($H(f) = H^*(-f)$), ma è complessa. Pertanto i coefficienti c_k ottenibili dalla (5.8) sono reali, ma non necessariamente pari. Svolgendo i calcoli:

$$c_k = T \int_{-1/2T}^{1/2T} (1 + \alpha e^{-j2\pi fT}) e^{j2\pi f k T} df = T \int_{-1/2T}^{1/2T} e^{j2\pi f k T} df + \alpha T \int_{-1/2T}^{1/2T} e^{j2\pi f (k-1) T} df$$

Il primo integrale è nullo per $k \neq 0$, mentre il secondo per $k \neq 1$, in quanto le funzioni integrande hanno media nulla sull'intervallo $1/T$; pertanto $c_0 = 1$ e $c_1 = \alpha$, esattamente come è definita la (5.10).

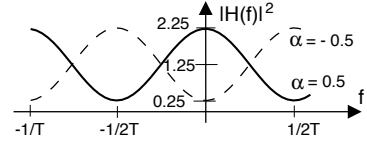
²⁵Per ogni valore di f , $H(f)$ è pari ad un valore complesso \underline{z} con $H(f) = \underline{z} = a + jb$, e dunque il suo quadrato è pari a $|\underline{z}|^2 = a^2 + b^2$, in cui a e b sono le parti reale ed immaginaria di $H(f)$, pari rispettivamente a $1 + \alpha \cos 2\pi fT$ e $-\alpha \sin 2\pi fT$.

del guadagno di potenza $|H(f)|^2$, che risulta

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= (\Re \{H(f)\})^2 + (\Im \{H(f)\})^2 = (1 + \alpha \cos 2\pi fT)^2 + (\alpha \sin 2\pi fT)^2 = \\ &= 1 + 2\alpha \cos 2\pi fT + \alpha^2 (\cos^2 2\pi fT + \sin^2 2\pi fT) = \\ &= 1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\pi fT \end{aligned}$$

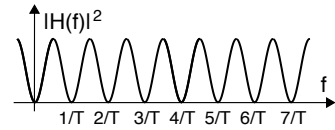
La figura che segue mostra l'andamento di $|H(f)|^2$ per due valori di $\alpha = \pm 0.5$, di cui a pag. 238 si trova la rappresentazione in dB oltre che la risposta di fase; questo schema verrà inoltre ripreso al § 20.3.3 come modello della presenza di una eco tra sorgente e destinatario.

Prima di approfondire due applicazioni del filtro, notiamo che nell'intervallo $|f| < \frac{1}{2T}$ la $|H(f)|^2$ può comportarsi sia da passa-basso che da passa-alto, in funzione del segno di α .



Differenziatore Ponendo $\alpha = -1$ nella (5.10) si ottiene un *differenziatore numerico*, dato che in tal caso la sequenza di uscita $y_n = x_n - x_{n-1}$ rappresenta la *differenza finita* di quella di ingresso. Nel caso tempo-continuo se oltre a porre $\alpha = -1$, il valore di T diviene piccolo al punto da poter considerare $T \rightarrow 0$, $h(t)$ inizia ad approssimare un *doppio* (§ 3.6), e dunque (a parte un fattore di scala) l'uscita è proprio la derivata dell'ingresso.

Filtro a pettine Sempre nel caso $\alpha = -1$ e con un segnale di ingresso tempo-continuo con banda $W \gg 1/T$ il filtro è in grado di rimuovere una *componente periodica* di periodo T , poiché in tal caso $|H(f)|^2 = 0$ con $f = n/T$, in corrispondenza delle armoniche. Un filtro del genere è detto *filtro a pettine*²⁶ o COMB FILTER.



Esempio Un segnale vocale viene acquisito su di un elicottero e presenta un forte disturbo additivo periodico legato al rumore del motore e delle pale, che si desidera eliminare adottando un filtro a pettine, implementato come un FIR del primo ordine.

1. Considerando un regime di crociera di 300 giri/minuto, determinare l'espressione della risposta impulsiva del filtro;
2. volendo implementare il filtro per via numerica, e considerando una frequenza di campionamento di 16 KHz e campioni quantizzati a 16 bit, valutare la memoria in Kbyte necessaria a realizzare il filtro.

Risposta 300 giri/min equivalgono a $300/60 = 5$ giri/sec, ovvero ad una fondamentale di 5 Hz, ed un ritardo del filtro pari a $T = 1/5 = 200$ msec.

1. Per ottenere $|H(f)|^2 = 1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\pi fT = 0$ per $f = nT$ occorre porre $\alpha = -1$, dunque deve risultare $h(t) = \delta(t) - \delta(t - 0.2)$;
2. l'implementazione numerica del filtro consiste nel sottrarre ad ogni campione di ingresso quello pervenuto 200 msec prima, e dunque occorre adottare un

²⁶Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Filtro_comb

buffer circolare²⁷ con memoria sufficiente ad accogliere $f_c \left[\frac{\text{campioni}}{\text{sec}} \right] \cdot T [\text{sec}] = 16 \cdot 10^3 \cdot 0.2 = 3200$ campioni. Essendo infine necessari due byte per memorizzare i 16 bit di ogni campione, occorrono 6400 bytes.

5.2.4 Filtro a risposta impulsiva infinita (IIR) del primo ordine

La caratteristica più importante che differenzia lo schema di calcolo disegnato appresso da quello precedente è la presenza di un *feedback* all'indietro, per cui il valore in uscita dipende, oltre che dall'ingresso, anche dalle *uscite precedenti*. Per questo motivo la corrispondente risposta impulsiva (graficata a lato per i casi $\alpha \leq 0$) ha una *durata infinita*²⁸, ed è pari a

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \delta(t - nT) \quad (5.11)$$

Applicando le consuete regole di trasformazione otteniamo l'espressione della risposta in frequenza come $H(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j2\pi f n T}$ che fortunatamente converge ad una espressione più compatta, grazie all'utilizzo del risultato noto per la serie geometrica²⁹ $\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n = \frac{1}{1-\beta}$ con $|\beta| < 1$, che permette di scrivere

$$H(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j2\pi f T})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi f T}} \quad (5.12)$$

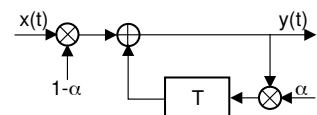
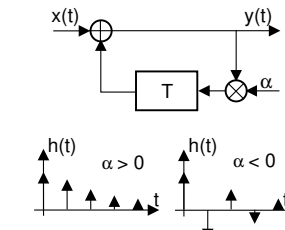
Nel caso in cui $|\alpha| > 1$ il filtro diviene *instabile*, dato che qualunque disturbo infinitesimo in ingresso produce una uscita che via via si amplifica in modo esponenziale. Per ciò che riguarda il guadagno di potenza $|H(f)|^2$, passaggi simili a quelli della nota 25 portano ad ottenere

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{(1 - \alpha \cos 2\pi f T)^2 + (\alpha \sin 2\pi f T)^2} = \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos 2\pi f T}$$

Applicazioni In fig. 5.3 è mostrato l'andamento del guadagno di potenza in decibel, ovvero $10 \log_{10} |H(f)|^2$, calcolato per $T = 1$ e diversi valori di α , positivi e negativi. Osserviamo che solo con $0 < \alpha < 1$ si può realizzare un passa-basso, e solo con $-1 < \alpha < 0$ un passa-alto. Notiamo inoltre che più $|\alpha|$ si avvicina ad uno, e più aumenta il divario tra il guadagno in banda passante e quello in banda attenuata (circa 20 dB per $|\alpha| = .8$), riuscendo così a realizzare un filtro *a banda stretta*, detto anche *risuonatore*. Osserviamo infine che il caso $\alpha = 1$ corrisponde ad avere un *integratore perfetto* che ad esempio produce una rampa in uscita, se in ingresso c'è un gradino.

Media mobile esponenziale Una variante dell'IIR di primo ordine si ottiene scrivendo la relazione ingresso-uscita (vedi figura) come

$$y(t) = \alpha y(t - T) + (1 - \alpha) x(t) \quad (5.13)$$



²⁷Con questa espressione si intende un array lineare di dimensione N ed un puntatore che si incrementa modulo N e che ne indicizza l'ultima posizione. Dopo aver utilizzato l'ultimo campione, questo viene sovrascritto da quello nuovo, ed il puntatore incrementato.

²⁸In questo caso si parla di filtro *ricorsivo*, o filtro *infinite impulse response* (IIR).

²⁹Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Serie_geometrica

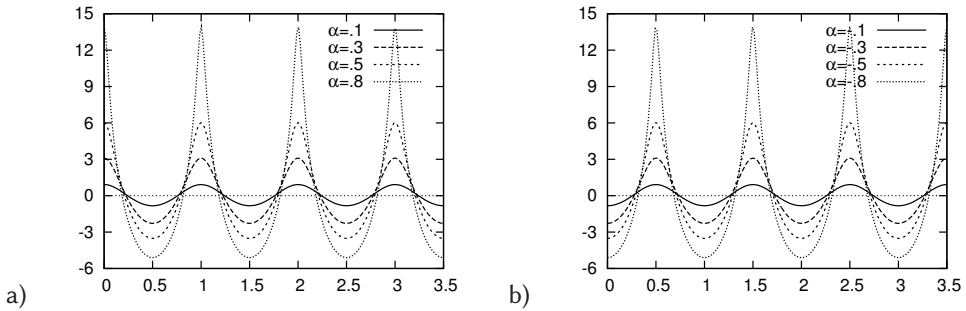
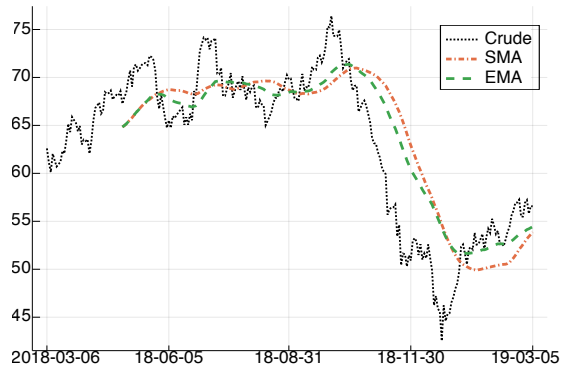


Figura 5.3: Guadagno di potenza in dB di un filtro IIR di primo ordine con ritardo $T = 1$:
a) $0 < \alpha < 1$, b) $-1 < \alpha < 0$

a cui corrisponde una risposta impulsiva della forma $h(t) = (1 - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \delta(t - nT)$, che ha il vantaggio rispetto alla (5.11) di presentare guadagno unitario a frequenza zero³⁰, ovvero in presenza di un ingresso costante (a parte un transitorio) in uscita si troverà la stessa costante. Impostando $0 < \alpha < 1$ il filtro si comporta come un passa basso, e ciò permette di usare la (5.13) per eseguire una operazione di media mobile detta *esponenziale*³¹ ed ottenere valori y *depurati* dalle variazioni più o meno casuali sovrapposte alla grandezza x .

Un tipico contesto di utilizzo è nel campo dei mercati finanziari, in cui si opera su di una sequenza tempo-discreta x_n riscrivendo³² la (5.13) come $y_n = \alpha y_{n-1} + (1 - \alpha) x_n$. La risultante sequenza y_n viene allora indicata come *EMA-N*³³, con N che rappresenta il numero *medio* di valori precedenti su cui è operata la media. In realtà come sappiamo l'IIR opera su di una memoria infinita, ma il valore di N serve a porre in relazione *EMA-N* con *SMA*³⁴ di lunghezza N : infatti scegliendo un valore $\alpha = \frac{N-1}{N+1}$ si ottiene la stessa *età media* dei valori di ingresso utilizzati. La fig. a lato mostra il confronto tra una SMA ed una EMA a parità di N . Dato che *EMA* attribuisce un peso maggiore ai valori di ingresso più recenti, viene spesso preferita alla *SMA* in quanto si dimostra *più reattiva* alle brusche variazioni di tendenza. Infine, notiamo che qualora si scelga di porre $\alpha = \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N}$ la *EMA-N* può essere calcolata



³⁰Infatti la (5.12) valutata per $f = 0$ fornirebbe il valore $H(f = 0) = \frac{1}{1-\alpha}$

³¹In quanto gli ingressi ad n istanti precedenti hanno peso α^n che decresce esponenzialmente con l'età, vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_smoothing

³²In realtà quasi ovunque la (5.13) viene riscritta come $y_n = \beta x_n + (1 - \beta) y_{n-1}$, in cui $\beta = 1 - \alpha$.

³³Da *Exponential Moving Average*

³⁴Con *SMA-N* (*simple moving average*) si intende una media mobile eseguita da un filtro FIR di lunghezza N e coefficienti tutti uguali e pari ad $1/N$.

come $y_n = \alpha y_{n-1} + (1 - \alpha) x_n = \frac{N-1}{N} y_{n-1} + \frac{1}{N} x_n = \frac{(N-1)y_{n-1} + x_n}{N}$.

5.3 Filtri numerici

Affrontiamo³⁵ ora il tema di come passare dai concetti esposti al § 5.2 agli schemi di calcolo da adottare nel caso di una implementazione completamente numerica, associata all'elaborazione di dati campionati. Come descritto al § 5.2.2, i campioni y_k del risultato di una convoluzione $y(t) = x(t) * h(t)$ tra segnali limitati in banda $x(t)$ e $h(t)$ si ottengono mediante la convoluzione discreta (5.9)

$$y_k = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n x_{k-n}$$

equivalente a campionare l'uscita $y(t)$ di un filtro trasversale con coefficienti $c_n = T \cdot h_n$ proporzionali ai campioni h_n della risposta impulsiva $h(t)$ del filtro analogico di partenza. Anziché campionare l'uscita del filtro digitale, l'operazione di filtraggio viene implementata per via HW o SF in modo da eseguire direttamente la convoluzione discreta

```
x = randn(1,1000); # segnale di ingresso
Nx = 1000; # campioni di ingresso
h = [1 0.5 0.25 0.125 0.0625]; # coeff. filtro
Nc = 5; # numero coeff.
Ny = Nx+Nc-1; # campioni di uscita
y = zeros(1,Ny); # vettore di uscita
for k = 1:Ny # campioni di uscita
    for n = 1:Nc # convoluzione
        if ( (k-n+1)<=Nx && n<=k ) # controllo
            y(k) = y(k) + h(n)*x(k-n+1);
        endif
    end
end
```

$y_k = \sum_{n=0}^N h_n x_{k-n}$, come ad es. svolto dal codice Octave mostrato sopra. Notiamo esplicitamente che nel filtraggio numerico viene omesso il fattore $T = 1/f_s$, che è inserito autonomamente dal filtro di restituzione (eq. (4.3)) nel momento del passaggio da numerico ad analogico.

5.3.1 Sintesi FIR a partire dalla descrizione tempo continua

Acquisiamo innanzitutto due metodi per ricavare un insieme *finito* di coefficienti h_n per il filtro numerico, a partire dalla descrizione *analogica* del comportamento desiderato in termini di $h(t)$ o di $H(f)$.

Finestratura della risposta impulsiva In questo approccio i valori di h_n si ottengono campionando una versione *finestrata* $h_w(t) = h(t) \cdot w(t)$ della $h(t)$ desiderata, e quindi ritardando gli stessi al fine di ottenere un filtro causale, come discusso all'esempio di pag. 126. Come noto dal § 3.8.4, l'operazione di finestratura produce una risposta in frequenza per il filtro sintetizzato pari a $H_w(f) = H(f) * W(f)$, e dunque va posta particolare attenzione nella scelta della funzione finestra $w(t)$.

Oscillazione uniforme in frequenza E' una tecnica iterativa³⁶ volta a rendere *minimo il massimo* errore di approssimazione tra l'andamento desiderato per $|H(f)|$,

³⁵Senza pretesa di rigore e completezza, essendo questi argomenti trattati anche in diversi altri corsi.

³⁶Vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Parks-McClellan_filter_design_algorithm

espresso nella forma di uno schema di tolleranza (vedi pag. 121), e l'andamento ottenibile esprimendo $|H(f)|$ come una combinazione di polinomi di Chebyshev³⁷. Il risultato è una $\hat{H}(f)$ che presenta oscillazioni ridotte ma a tutte le frequenze³⁸, mentre i coefficienti h_n si ottengono mediante DFT inversa (§ 4.5) della sequenza H_n ottenuta campionando $\hat{H}(f)$.

5.3.2 Trasformata zeta e filtraggio

Al § 4.5.1 abbiamo già discusso come una sequenza di campioni $x_n = x(t)|_{t=nT}$ di un segnale limitato in banda $W = \frac{1}{2T}$ possa essere descritta dalla sua *trasformata zeta*

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$$

e come calcolando quest'ultima per $z = e^{j\omega}$ si ottenga una rappresentazione spettrale

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n}$$

di $\{x_n\}$ che corrisponde alla periodizzazione della $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, in cui l'intervallo di frequenze $-f_c/2 < f < f_c/2$ si mappa in quello $-\pi < \omega < \pi$, ovvero $f = \frac{\omega}{2\pi T}$.

Allo stesso modo si possono definire le trasformate zeta della sequenza di uscita da un filtro $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}$ e dei campioni della risposta impulsiva $H(z) = \mathcal{Z}\{h_n\}$ del filtro stesso, e dato che anche ora vale la corrispondenza tra convoluzione nel tempo e prodotto delle trasformate³⁹, si può scrivere

$$Y(z) = H(z) X(z) \quad (5.14)$$

in cui $H(z)$ è l'analogo della $H(s)$ (eq. (5.1)) tempo-continuo e per questo prende il nome di *funzione di trasferimento* tempo-discreto. Sostituendo $z = e^{j\omega}$ si ottiene la *risposta in frequenza* tempo-discreto (4.16) $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-j\omega n}$ periodica in ω con periodo 2π , relativa alla sequenza risposta impulsiva h_n , e che corrisponde alla DTFT (§ 4.4) $H^*(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-j2\pi f n T}$ della stessa sequenza h_n qualora si ponga $\omega = 2\pi f T$, vedi anche la fig. 4.15 a pag. 110.

5.3.2.1 Filtri a risposta impulsiva finita

Affrontiamo la descrizione di un filtro FIR mediante la trasformata zeta rifacendoci dapprima al caso del filtro del primo ordine (§ 5.2.3) descritto da una $h(t) = \delta(t) + \alpha\delta(t - T)$, e consideriamo al suo ingresso una *sequenza impulsiva* $\delta_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$ al posto dell'impulso matematico $\delta(t)$. Il filtro è ora caratterizzato nei termini della *sequenza di risposta all'impulso* $h_n = \delta_n + \alpha\delta_{n-1}$ la cui trasformata zeta risulta⁴⁰

³⁷Vedi http://www.ee.ic.ac.uk/hp/staff/dmb/courses/DSPDF/00700_OptimalFIR.pdf

³⁸Il filtro risultante è detto per questo *equiripple*.

³⁹Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Trasformata_zeta

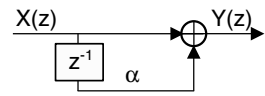
⁴⁰E' sufficiente applicare la definizione $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta_n + \alpha\delta_{n-1}) z^{-n} = 1 + \alpha z^{-1}$, dato che $\mathcal{Z}\{\delta_n\} = 1$ e che un ritardo di m indici ha trasformata

$$\mathcal{Z}\{x_{n-m}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-m} z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k-m} = z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} = z^{-m} X(z)$$

(si è posto $n - m = k$). In particolare, un ritardo unitario corrisponde al prodotto per z^{-1} della sequenza trasformata, e dunque $\mathcal{Z}\{\delta_{n-1}\} = z^{-1}$.

$$H(z) = 1 + \alpha z^{-1} \tag{5.15}$$

Allo schema computazionale di pag. 127 si affianca quindi quello *algoritmico* mostrato a lato, in cui il blocco z^{-1} rappresenta il ritardo di un campione, mentre il prodotto per α è ora raffigurato come una etichetta posta sull'arco da cui passa la sequenza in transito, cosicché possiamo scrivere



$$Y(z) = X(z) + \alpha z^{-1} X(z) = (1 + \alpha z^{-1}) X(z)$$

ossia la (5.15) applicata alla (5.14). Estendendo ora la trattazione ad un generico filtro FIR di ordine N descritto da una $h_n = \sum_{k=0}^N a_k \delta_{n-k}$ otteniamo

$$H_{FIR}(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = a_0 \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{a_0} z^{-k} = a_0 \prod_{n=1}^N (1 - c_n z^{-1}) \tag{5.16}$$

in cui gli N valori c_n rappresentano gli zeri⁴¹ (reali, od in coppie complesse coniugate) di $H(z)$.

Esercizio: media mobile E' il filtro numerico definito a pag. 126 come un *rect* discreto, ovvero con $h_n = 1$ per $n = 0, 1, \dots, N - 1$ e zero altrimenti. Tenendo conto che

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a} \tag{42}, \quad \text{si ottiene} \quad H_{MA}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

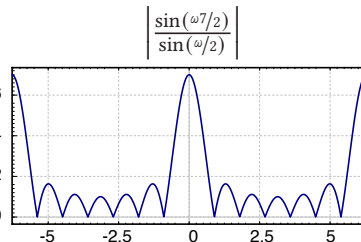
che calcolata per $z = e^{j\omega}$ fornisce

$$H_{MA}(\omega) = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2}}{e^{-j\omega/2}} \cdot \frac{e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

di cui il primo fattore è un termine di fase lineare mentre dal secondo se ne ricava il modulo

$$|H_{MA}(\omega)| = \left| \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right|$$

rappresentato in figura per $N = 7$, e che si dimostra



periodico, con *sette zeri* equidistribuiti nell'intervallo $0 < \omega < 2\pi$. Infatti dall'espressione di $H(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$ si ottengono *sette zeri* sul cerchio unitario in posizione $c_n = e^{j2\pi n/(N-1)}$ di cui il primo in $z = 1$ si *cancela* con l'unico polo nella stessa posizione.

5.3.2.2 Risposta impulsiva infinita

Partendo anche questa volta dal caso del primo ordine (§ 5.2.4) notiamo che campionando l'uscita si osserva la sequenza $y_n = x_n + \alpha y_{n-1}$ da cui, trasformando ambo i

⁴¹Si dicono zeri di un polinomio $P(z) = \sum_{k=0}^N \beta_k z^k$ di grado N le radici $z = c_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$) dell'equazione $P(z) = 0$. La (5.16) può essere riscritta come $H(z) = z^{-N} \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}{z^N}$ e dunque si azzera per $N(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k} = 0$, che è un polinomio a potenze *positive*. Una volta trovate le sue radici c_n possiamo scrivere $N(z) = a_0 \prod_{n=1}^N (z - c_n)$ o equivalentemente $H(z) = \frac{N(z)}{z^N} = a_0 \prod_{n=1}^N (1 - c_n z^{-1})$.

⁴²Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Serie_geometrica

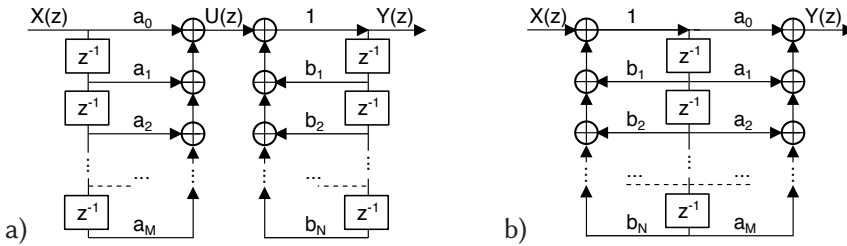


Figura 5.4: Architettura di filtri IIR: a) forma diretta; b) forma canonica

membri, si ottiene $Y(z) = X(z) + \alpha z^{-1}Y(z)$ ovvero $Y(z)(1 - \alpha z^{-1}) = X(z)$ e dunque

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

con un polo⁴³ in $z = \alpha$. Ad un generico filtro IIR di ordine N corrisponde una

$$H_{IIR}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{k=0}^M a_k z^{M-k}}{z^M (z^N - \sum_{k=1}^N b_k z^{N-k})} = \frac{a_0 \prod_{n=1}^M (1 - c_n z^{-1})}{\prod_{n=1}^N (1 - d_n z^{-1})} \quad (5.17)$$

in cui (a_k, b_k) sono i coefficienti di numeratore e denominatore⁴⁴, e (c_n, d_n) le rispettive radici. Mentre il numeratore di (5.17) esprime la componente FIR, la presenza del denominatore che conferisce alla $H(z)$ poli diversi da $z = 0$ determina la componente con risposta *infinita*. Scrivendo infatti (5.17) come rapporto tra polinomi $H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ la relazione $Y(z) = H(z)X(z)$ diviene $Y(z)B(z) = X(z)A(z)$ che, antitrasformata⁴⁵, dà origine all'equazione *alle differenze finite* $y_n - \sum_{k=1}^N b_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^M a_k x_{n-k}$ ovvero

$$y_n = \sum_{k=1}^N b_k y_{n-k} + \sum_{k=0}^M a_k x_{n-k} \quad (5.18)$$

Questa espressione permette di descrivere il funzionamento del filtro in base al diagramma di fig. 5.4. Il secondo termine della (5.18) individua la sequenza *intermedia* $u_n = \sum_{k=0}^M a_k x_{n-k}$ in modo da poter scrivere $y_n = \sum_{k=1}^N b_k y_{n-k} + u_n$. La *forma diretta* di fig. 5.4-a) altro non è che lo schema di un filtro trasversale *ruotato* in verticale e che calcola u_n a partire da x_n , seguito dal blocco che calcola y_n a partire da se stesso e da u_n . Dato che i due blocchi esprimono relazioni lineari tempo invarianti sussiste per essi la proprietà commutativa, espressa dalla *forma canonica* di fig. 5.4-b), in cui gli elementi di ritardo sono stati messi in comune, a tutto vantaggio della memoria necessaria ad implementare il filtro numerico.

Stabilità I poli del denominatore della (5.17) devono giacere tutti all'interno del cerchio unitario $|z| < 1$ pena l'instabilità del filtro, sebbene siano ammessi poli con modulo unitario qualora posti in corrispondenza di uno zero, in modo da *cancellarne* l'effetto.

⁴³Ossia una radice del denominatore $D(z)$ di $H(z)$, che scritta come $H(z) = \frac{z}{z-\alpha}$ vale $D(z) = z - \alpha$, e si azzerava in $z = \alpha$.

⁴⁴Il rapporto tra polinomi viene normalizzato in modo da far risultare $b_0 = 1$.

⁴⁵I passaggi iniziano con lo scrivere $Y(z)(1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}) = X(z) \sum_{k=0}^M a_k z^{-k}$ ovvero $Y(z) - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} X(z)$; dato ora che $Z^{-1} \{z^{-k} X(z)\} = x_{n-k}$, si arriva al risultato mostrato.

Sensibilità alla quantizzazione La precedente considerazione rende evidente il problema legato alla realizzazione del filtro mediante operazioni a *precisione finita*: l'effetto di quantizzazione subito dai coefficienti porta a variazioni delle posizioni di poli e zeri che possono determinare effetti indesiderati. Anche per questo motivo esistono architetture alternative⁴⁶ a quella canonica, legate a modi di diversi di scrivere la (5.17) come ad esempio nel prodotto di fattori, che dà luogo ad una architettura di celle in cascata.

Comportamento della fase e complessità Mentre per i filtri FIR esiste la possibilità di ottenere una fase lineare (vedi pag. 239) e dunque non distorcente, per i filtri IIR questo non è possibile; d'altra parte i secondi permettono di ottenere una buona rapidità di variazione della risposta in frequenza pur mantenendo basso l'ordine, e dunque il carico computazionale.

5.3.3 Sintesi di un filtro IIR a partire da un filtro analogico

Il progetto di filtri analogici si basa su metodi consolidati ed efficienti (§ 5.1), che danno luogo ad una rappresentazione nella variabile s del tipo della (5.1)⁴⁷

$$H_a(s) = \frac{\sum_{m=0}^M a_m s^m}{\sum_{n=0}^N b_n s^n}$$

a cui corrisponde una risposta impulsiva $h_a(t)$, ed una equazione differenziale⁴⁸

$$\sum_{n=0}^N b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^M a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \quad (5.19)$$

A partire da queste grandezze sono stati individuati metodi che consentono di definire un filtro numerico *più o meno* equivalente⁴⁹ ad uno analogico, alcuni dei quali illustriamo appresso.

5.3.3.1 Invarianza della risposta impulsiva

Questo approccio ottiene i campioni h_n per il filtro numerico come $h_n = h_a(nT)$, ovvero campionando $h_a(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_a(f)\}$. Qualora $H_a(s)$ abbia N poli in $s = d_k$, per essa sussiste lo sviluppo in frazioni parziali⁵⁰ $H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s-d_k}$, a cui corrisponde una $h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{d_k t}$ e dunque una

$$h_n = h(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{d_k nT}$$

⁴⁶Vedi ad es. http://raffaeleparisi.site.uniroma1.it/didattica/circuiti-a-tempo-discreto/discreto/capitolo_8. Alcune architetture si dimostrano (a parità di precisione) migliori di altre nel definire la posizione di zeri e poli nel piano z .

⁴⁷Per ridurre le possibilità di confusione, adottiamo il pedice a per riferirci al *mondo analogico*.

⁴⁸Vedi ad es. <https://lpsa.swarthmore.edu/Representations/SysRepTransformations/TF2SDE.html>

⁴⁹Nel senso che alimentando il filtro numerico con i campioni di un segnale si ottiene circa lo stesso risultato che campionando l'uscita del filtro analogico di partenza.

⁵⁰Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Decomposizione_in_fratti_semplici

la cui trasformata zeta vale⁵¹

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{d_k T} z^{-1}}$$

ovvero con poli in $z = e^{d_k T} = e^{sT} \Big|_{s=d_k}$ (52). L'ultima osservazione comporta l'aver fatto uso della trasformazione⁵³ $z = e^{sT}$, che garantisce il mantenimento della stabilità⁵⁴.

La trasformazione $z = e^{sT}$ mette inoltre in corrispondenza *periodica* l'asse immaginario nel piano s ($s = j\Omega = j2\pi f$) con la circonferenza del cerchio unitario nel piano z ($z = e^{j\omega}$), nel senso che ad ogni $-\pi < \omega < \pi$ corrisponde una pulsazione $\Omega = 2\omega \frac{1}{2T} = \frac{\omega}{T}$; pertanto la fascia del piano s compresa tra $-\frac{f_c}{2} < f < \frac{f_c}{2}$ viene mappata all'interno del cerchio unitario del piano z (vedi tab. 5.1), ed anche le fasce superiori ed inferiori subiscono la medesima sorte. Questo aspetto è una manifestazione del fenomeno *dell'aliasing* che si manifesta per segnali campionati, ed avviene qualora $H_a(f)$ non soddisfi le condizioni di stretta limitazione in banda, rendendo il metodo idoneo solo alla progettazione di filtri passa basso o passa banda.

Un modo alternativo di vedere il problema si basa sulla considerazione che al filtro numerico corrisponde una $\hat{h}_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \delta(t - nT)$, a cui come noto (§ 4.1) a sua volta corrisponde una $H_a^\bullet(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_a(f - \frac{n}{T})$; dunque se $H_a(f)$ non è limitata in banda tra $\pm \frac{1}{2T}$ si verifica aliasing.

5.3.3.2 Corrispondenza di poli e zeri

In questo metodo la relazione $z = e^{sT}$ si estende⁵⁵ anche alla trasformazione degli zeri di $H_a(s)$ in quelli di $H(z)$: in pratica, dopo essere arrivati alla forma fattorizzata

$$H_a(s) = k \frac{\prod_{n=1}^M (s - c_n)}{\prod_{n=1}^N (s - d_n)}$$

⁵¹Vedi esempio a pag. 107

⁵²Infatti con alcuni passaggi

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{d_k T} z^{-1}} = \sum_{k=1}^N \frac{z A_k}{z - e^{d_k T}}$$

può essere riscritta come

$$H(z) = k \frac{\prod_{n=1}^M (z - c_n)}{\prod_{n=1}^N (z - e^{d_n T})}$$

in cui però gli zeri c_n vanno calcolati.

⁵³Seppur limitata alla sola corrispondenza per la posizione dei poli, in quanto gli zeri di $H(s)$ non si mappano nel piano z allo stesso modo di come fanno i poli, vedi nota precedente.

⁵⁴Infatti scrivendo s come $s = \sigma + j\Omega$ si ottiene $z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$, e dunque i poli $d_k = \sigma_k + j\Omega_k$ di $H_a(s)$ che giacciono nel semipiano negativo del piano s , ovvero con $\sigma_k < 0$, vengono mappati all'interno del cerchio unitario nel piano z , in quanto ad essi corrispondono poli per $H(z)$ in $z = z_k = e^{\sigma_k T} e^{j\Omega_k T}$, per i quali $|z_k| = e^{\sigma_k T} < 1$.

⁵⁵Vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Matched_Z-transform_method. Che ci sia qualcosa di sensato nello scrivere $z = e^{sT}$ è motivato anche dal fatto che applicando la definizione di trasformata di Laplace ad $h_a(t)$ otteniamo

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \mathcal{L}\{h_a(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} h_n \delta(t - nT) \right] e^{-st} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{-snT} \end{aligned}$$

e, dato che $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n}$, ne discende che $H_a(s) = H(z) \Big|_{z=e^{sT}}$.

metodo	invarianza $h(t)$, poli e zeri	eq. alle differenze	trasf. bilineare
relazione	$z = e^{sT}$	$s = \frac{1-z^{-1}}{T}$	$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
mapping			
debolezze	aliasing	si può agire solo a basse frequenze	distorsione dell'asse della frequenza

Tabella 5.1: Aspetti peculiari delle trasformazioni $H(s) \Rightarrow H(z)$

ogni zero c_n (o polo d_n) si trasforma in $e^{c_n T}$ (o $e^{d_n T}$) dando luogo a

$$H(z) = k \frac{\prod_{n=1}^M (z - e^{c_n T})}{\prod_{n=1}^N (z - e^{d_n T})} = k \frac{z^M \prod_{n=1}^M (1 - e^{c_n T} z^{-1})}{z^N \prod_{n=1}^N (1 - e^{d_n T} z^{-1})}$$

Sono mantenute le stesse corrispondenze tra piano s e piano z del § 5.3.3.1, così come la possibilità di aliasing. D'altra parte, i valori della risposta impulsiva h_n non corrispondono più ai campioni di $h(t)$.

5.3.3.3 Equazioni alle differenze

Qui si parte dalle equazioni differenziali (5.19) che sono *a monte* della $H(s)$, e che vengono approssimate come equazioni alle differenze finite (5.18). Ciò porta alla equivalenza

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

che permette di ottenere la $H(z)$ a partire dalla $H(s)$ mediante un cambio di variabile, e che dà luogo alla corrispondenza mostrata al centro di tab. 5.1, in cui i punti dell'intero semipiano negativo del dominio s si mappano in punti interni alla circonferenza nel piano z di raggio 0.5 e centrata in $z = 0.5$. Pertanto ora sono evitati i problemi legati all'aliasing, ma la presenza dei poli solo nel semipiano destro del piano z impedisce l'uso del metodo per la progettazione di filtri passa-alto.

5.3.3.4 Trasformazione bilineare

Anche quest'ultimo metodo, detto *di Tustin*, trae origine dalla approssimazione numerica di una equazione differenziale, ma può essere anche visto come una approssimazione

di primo ordine⁵⁶ della relazione $z = e^{sT}$ analizzata in precedenza. Il metodo di Tustin si basa sul cambio di variabile

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

che corrisponde a mappare l'intero semipiano destro del piano s all'interno della circonferenza di raggio unitario del piano z , come mostrato alla destra di tab. 5.1.

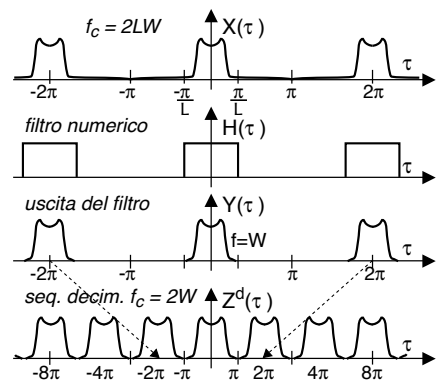
Anche in questo caso il risultato è stabile e privo di aliasing; d'altra parte si verifica invece una distorsione dell'asse delle frequenze, dato che la fase ω di $z = e^{j\omega}$ è ora legata alla frequenza f del filtro analogico tramite la relazione $\omega = 2 \arctan\left(\pi \frac{f}{f_c}\right)$ per cui va adottata una $f_c = 1/T$ abbastanza più elevata delle frequenze di interesse del filtro⁵⁷, oppure si progetta un filtro analogico che tenga conto in partenza della distorsione a cui verrà sottoposta la sua risposta in frequenza.

5.4 Filtraggio polifase

Con questo termine si indica un tipo di elaborazione numerica che comporta la variazione per un rapporto intero della frequenza di campionamento⁵⁸. La circostanza in cui abbiamo incontrato questa stranezza è stata la discussione degli aspetti realizzativi del teorema del campionamento, più precisamente in relazione alle operazioni di *decimazione* (§ 4.2.1) ed *interpolazione* (§ 4.2.3), in cui un filtro numerico che approssima quanto più possibile un passa-basso ideale con risposta in frequenza $H(f) \approx \text{rect}_{2W}(f)$ con W pari alla massima frequenza del segnale viene rispettivamente *anteposto* o *posto a valle* di un elemento che rimuove od aggiunge elementi alla sequenza numerica in transito. Analizziamo ora come la realizzazione di tale filtro possa essere semplificata in modo che funzioni alla minima frequenza possibile.

5.4.1 Filtro di decimazione

Riprendiamo quanto discusso al § 4.2.1, in cui una sequenza x_n è ottenuta *sovracampionando* alla frequenza $f_c = 2LW$ un segnale $x(t)$ di cui si desidera limitare la banda in $\pm W$, ma che ne occupa una pari a $\pm LW$ a causa di un filtro analogico antialiasing che per mantenere una fase lineare deve possedere una ampia regione di transizione. La sequenza x_n viene limitata nella banda $\pm W = \pm \frac{f_c}{2L}$ mediante un filtro numerico ideale $H(\omega) = \text{rect}_{2\pi/L}$, che produce una nuova sequenza y_n alla stessa velocità, vedi figura a



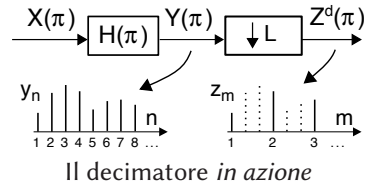
⁵⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear_transform

⁵⁷In tal caso infatti si può ritenere l'arcotangente approssimativamente lineare.

⁵⁸Un buon approfondimento si può trovare in *Multirate Digital Filters, Filter Banks, Polyphase Networks, and Applications: A Tutorial*, 1990, di P.P.Vaidyanathan, reperibile presso <https://authors.library.caltech.edu/6798/1/VAIprocieee90.pdf>

lato. I valori y_n attraversano quindi un *decimatore* con rapporto $L : 1$ che produce una sequenza z_m^d tale che $z_m^d = y_{n=Lm}$, saltando cioè $L - 1$ valori ogni L , come mostrato alla figura seguente per $L = 3$.

Dopo aver notato che il decimatore è un elemento lineare, ma *non* stazionario, osserviamo che per ottenere una buona approssimazione di un filtro ideale a fase lineare, $H(\omega)$ deve essere un FIR simmetrico (pag. 125) con ordine sufficientemente elevato, che indichiamo con N . Dunque per ogni valore di uscita il filtro deve eseguire $N + 1$ prodotti ed N somme (fig. 5.2) in un tempo $T = \frac{1}{2LW}$. Notiamo però che $L - 1$ volte su L i suoi calcoli sono *sprecati* perché eliminati dal decimatore: c'è un modo per risparmiare tutto questo lavoro inutile? La risposta è positiva, vediamo come.



5.4.1.1 Decomposizione polifase

Consideriamo per primo il caso in cui la decimazione dimezzi f_c , ovvero $L = 2$. La f.d.t. $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n}$ del filtro descritto dai coefficienti h_n può allora essere riscritta come

$$\begin{aligned}
 H(z) &= [\dots + h_{-4}z^4 + h_{-2}z^2 + h_0 + h_2z^{-2} + h_4z^{-4} + \dots] + \\
 &+ z^{-1} [\dots + h_{-3}z^4 + h_{-1}z^2 + h_1 + h_3z^{-2} + h_5z^{-4} + \dots] = \\
 &= E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)
 \end{aligned}
 \tag{5.20}$$

in cui

$$E_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{2n}z^{-n} \quad \text{e} \quad E_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{2n+1}z^{-n}$$

sono rispettivamente le f.d.t dei filtri con coefficienti $e_n^0 = h_{2n}$ (indici pari di h_n) e $e_n^1 = h_{2n+1}$ (indici dispari), chiamate congiuntamente *decomposizione bifase* del filtro. Tale decomposizione è valida sia per filtri FIR che IIR, ma attualmente siamo interessati al primo caso, per il quale la fig. 5.5 fornisce un esempio dello schema di calcolo.

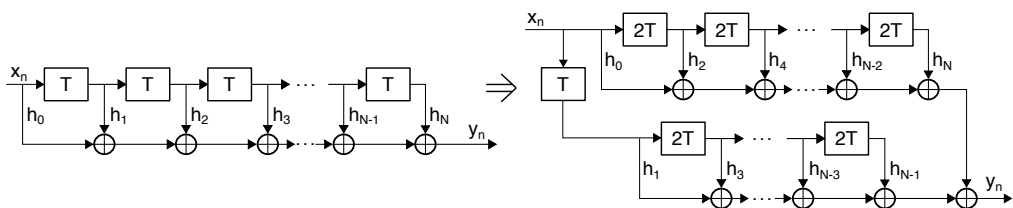


Figura 5.5: Decomposizione bifase di un filtro FIR

La (5.20) individua per il filtro l'equivalenza tra il primo ed il secondo diagramma computazionale mostrati in fig. 5.6, in cui il filtro originale $H(z)$ si scinde nel parallelo di due filtri E_0 ed E_1 , ognuno dei quali con la metà dei coefficienti di H , e con ritardi di durata doppia. Fin qui nella sostanza è cambiato poco, ma invocando la sussistenza della *prima nobile identità*⁵⁹ lo schema si può di nuovo trasformare in quello di destra,

⁵⁹E' una proprietà che si applica solamente a filtri la cui risposta impulsiva h_n contiene $L - 1$ elementi nulli tra due non nulli e la cui f.d.t. è quindi esprimibile nella forma $H(z^L)$; può essere enunciata come $H(z^L)(\downarrow L) = (\downarrow L)H(z)$. Per verificarne la veridicità, pensiamo ad un impulso δ_n che entra

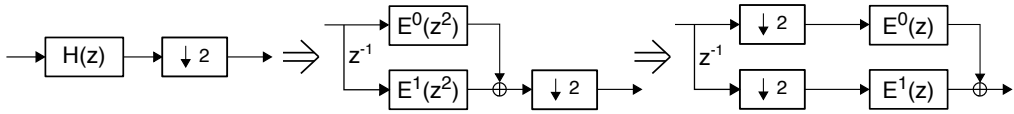


Figura 5.6: Trasformazioni di architettura per il decimatore 2:1

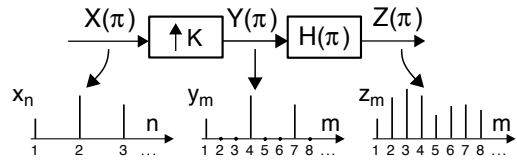
in cui il decimatore si sposta a monte dei filtri, che adesso operano a metà della velocità precedente. Notiamo che il passaggio dell'argomento delle f.d.t. da z^2 a z è solo *apparente*, dato che il decimatore *raddoppia* la durata di T .

Nel caso più generale di un decimatore $L : 1$ lo stesso ragionamento può essere ripetuto decomponendo la f.d.t $H(z)$ nella somma di L componenti polifase, ossia nella forma $H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} E_k(z^L)$ in cui $E_k(z)$ è la f.d.t. della sequenza $e_n^k = h_{nL+k}$ ottenuta prelevando un elemento ogni L dalla h_n di partenza. In questo modo la complessità computazionale si riduce di un fattore L dato che, seppure il numero totale di somme e prodotti resti lo stesso, il tempo a disposizione per effettuarli è L volte maggiore.

5.4.2 Filtro interpolatore

Al § 4.2.3 abbiamo discusso come, allo scopo di distanziare le repliche del segnale campionato (fig. 4.3), sia opportuno *innalzare* la frequenza di campionamento f_c di un fattore K ovvero $f'_c = Kf_c$, e qualora K sia sufficientemente elevato, ottenere anche il vantaggio (§ 4.2.4) di ridurre la distorsione lineare legata ad un convertitore D/A che adotta un s&H con impulso rettangolare.

In tale sede abbiamo però *sorvolato* sul fatto che il semplice inserimento di un interpolatore $1 : K$ che aggiunge $K - 1$ valori nulli tra ogni coppia di elementi della sequenza originaria x_n non risolve il problema. In realtà l'interpolatore *numerico* deve essere seguito da un filtro (anch'esso numerico) detto *filtro interpolatore*⁶⁰, secondo lo schema mostrato in figura per il caso di $K = 3$, ed il motivo è presto detto. La trasformata zeta della sequenza interpolata y_m risulta



$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{\frac{m}{K}} z^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-nK} = X(z^K)$$

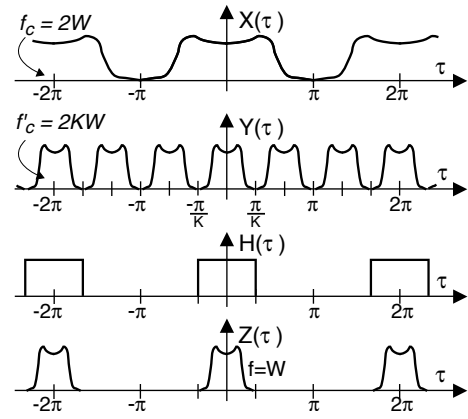
in cui, essendo $y_m = x_{m/K}$ se $m = Kn$ e zero altrimenti, al terzo termine la sommatoria è valutata per $m = \dots, -2K, -K, 0, K, 2K, \dots$, da cui il cambio di variabile.

La relazione tra i relativi spettri periodici si ottiene ponendo $z = e^{j\omega}$ e dunque possiamo scrivere $Y(e^{j\omega}) = X(e^{jK\omega})$ ovvero si assiste ad una *compressione* dell'asse

in $H(z^L)$ producendo in uscita la sequenza $h_0, 0, \dots, 0, h_L, \dots, h_{2L}, \dots$ che, dopo decimazione, diviene h_0, h_L, h_{2L}, \dots . Nel caso in cui invece δ_n attraversi prima il decimatore ($\downarrow L$) la sequenza δ_n non muta, ed il successivo passaggio per $H(z)$ produce nuovamente la stessa h_0, h_L, h_{2L}, \dots . Vedi anche http://www.ee.ic.ac.uk/hp/staff/dmb/courses/DSPDF/01100_Multirate.pdf#slide.5

⁶⁰Da non confondere con il filtro di restituzione (§ 4.2.2) che è di natura analogica.

delle frequenze di un fattore K , come rappresentato nella seconda riga della figura a lato. Ciò posto, per ottenere la sequenza z_m *smussata* (cioè senza gli zeri in mezzo) e che rappresenta i campioni di un segnale limitato in banda $\pm W$ occorre elaborare y_m mediante il filtro *interpolatore* $H(\omega)$ mostrato alla terza riga.

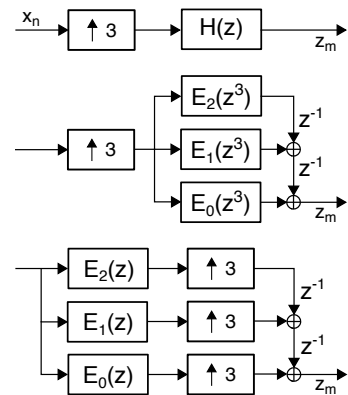


5.4.2.1 Semplificazione polifase

Lo schema precedente mostra come $H(\omega)$ debba lavorare a frequenza $f'_c = 2KW$ pur dovendo elaborare un segnale limitato nella banda $\pm W$, e dunque ci chiediamo se non vi sia un modo per ridurne il carico computazionale come già avvenuto al § 5.4.1.1 per il caso della decimazione.

Il questo caso il ragionamento inizia dalla considerazione che nella sequenza y_m un solo elemento ogni K è diverso da zero, e dunque il FIR di ordine N che implementa $H(z)$ effettua $K - 1$ moltiplicazioni *per zero* ogni K : pertanto $H(z)$ può anche qui essere scomposto in K filtri in parallelo di ordine ridotto, secondo l'espressione $H(z) = \sum_{k=0}^{K-1} z^{-k} E_k(z^K)$ in cui $E_k(z)$ è la f.d.t. di un FIR con coefficienti $e_n^k = h_{2n+k}$. Tali filtri operano sulla base di elementi di ritardo pari a K/f'_c , e solamente uno di essi (a rotazione) produce una uscita diversa da zero, come rappresentato nella seconda riga della figura a lato nel caso di $K = 3$, con gli elementi di ritardo z^{-1} posti sulla destra che *ciclano* le uscite dei filtri verso l'uscita.

A questo punto è possibile invocare l'applicabilità della *seconda nobile identità*⁶¹ che permette di scambiare la posizione dell'interpolatore numerico con quella dei filtri E_k in modo che questi possano operare alla velocità ridotta $f_c = 2W$, riducendo anche in questo caso la complessità computazionale.



5.4.3 Filtro integratore-pettine in cascata

Il termine originale inglese è *cascaded integrator-comb* o filtro di *Hogenauer* (dal nome del suo ideatore) o brevemente filtro CIC, e trova impiego negli stadi di decimazione ed interpolazione numerica, permettendo di semplificare ulteriormente la realizzazione circuitale in quanto risulta *privo di moltiplicatori*, e consentendo la *programmabilità* del rapporto di variazione della frequenza di campionamento; il suo uso è particolarmente vantaggioso nel caso di tassi di variazione elevati.

⁶¹E' la duale di quella espressa alla nota 59 e come quella si applica a filtri la cui risposta impulsiva h_n contiene $K - 1$ elementi nulli tra due non nulli e la cui f.d.t. è quindi esprimibile nella forma $H(z^K)$; consiste nella uguaglianza $(\uparrow K) H(z^L) = H(z) (\uparrow K)$.

Integratore Questo componente (detto anche *accumulatore*) implementa l'equazione alle differenze

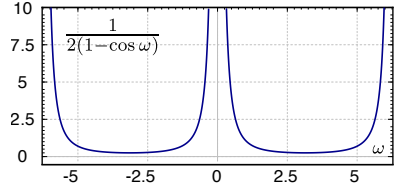
$$y_n = y_{n-1} + x_n$$

da cui $Y(z) = z^{-1}Y(z) + X(z)$ ed è quindi descritto da una funzione di trasferimento

$$H_I(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

a cui corrisponde il guadagno di potenza⁶² (pag. 206)

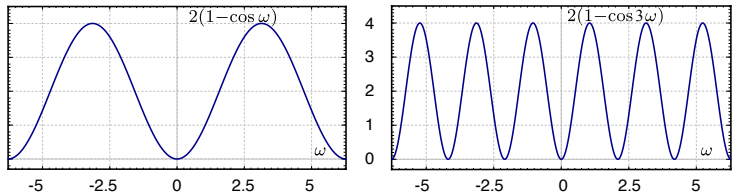
$|H_I(\omega)|^2 = \frac{1}{2(1-\cos\omega)}$ mostrato in figura: si comporta pertanto come un passa basso, presentando guadagno infinito per $\omega = 0$.



Comb Come sarà chiaro tra breve, per ottenere un tasso di decimazione (od interpolazione) L occorre impostare una equazione alle differenze $y_n = x_n - x_{n-L}$ a cui corrisponde una f.d.t.

$$H_C(z) = 1 - z^{-L}$$

ed un guadagno di potenza $|H_C(\omega)|^2 = 2(1 - \cos L\omega)$ di cui alla figura seguente viene mostrato l'andamento per $L = 1$ ed $L = 3$, coerentemente con quanto ottenuto a pag. 128.

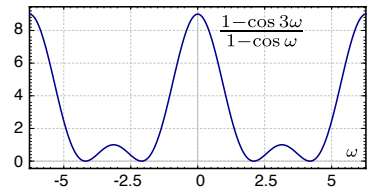


Integratore e Comb

Concatenando i due filtri in cascata si realizza una funzione di trasferimento

$$H_{IC}(z) = \frac{1 - z^{-L}}{1 - z^{-1}} \tag{5.21}$$

in cui il polo in $z = 0$ dell'integratore viene *cancellato* dallo zero del comb nella medesima posizione, producendo un guadagno di potenza $|H_{IC}(\omega)|^2 = \frac{1 - \cos L\omega}{1 - \cos \omega}$ mostrato in figura per $L = 3$, dimostrandosi un passa basso, con zeri alle frequenze $f_i = i \cdot \frac{f_c}{L}$ con $i = 1, \dots, L - 1$.



Equivalente a media mobile Ricordando nuovamente l'uguaglianza $\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$ si ottiene che la (5.21) può essere riscritta come

$$H_{IC}(z) = \sum_{n=0}^{L-1} z^{-n}$$

ossia (a meno del coefficiente $1/L$) la f.d.t. di un filtro a *media mobile* (pag. 133) con

⁶²Essendo $H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - \cos\omega + j \sin\omega}$, si ha $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(1 - \cos\omega)^2 + (\sin\omega)^2} = \frac{1}{1 - 2\cos\omega + \cos^2\omega + \sin^2\omega} = \frac{1}{2 - 2\cos\omega + 1} = \frac{1}{2(1 - \cos\omega)}$

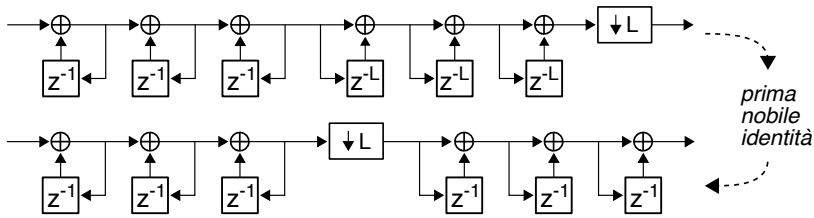
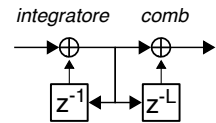


Figura 5.7: Decimatore $L : 1$ realizzato mediante cascaded integrator-comb a tre stadi

risposta impulsiva $h_n = \sum_{k=0}^{L-1} \delta_{n-k}$, in quanto tale a fase lineare, e con gli stessi zeri. Evidentemente l'architettura del filtro i&c, mostrata a lato, costituisce una implementazione *particolarmente efficiente*⁶³ di un filtro a media mobile.

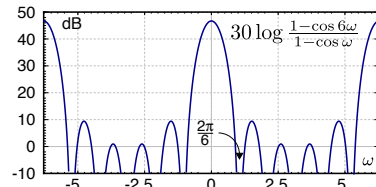


CIC L'attenuazione della banda soppressa ovvero delle frequenze per cui $|f| > \frac{f_c}{L}$ ossia $|\omega| > \frac{\pi}{L}$ viene largamente migliorata qualora si pongano N celle i&c in cascata, in modo da realizzare un filtro con f.d.t.

$$H_{CIC}(z) = \left(\frac{1-z^{-L}}{1-z^{-1}} \right)^N$$

e dunque con guadagno di potenza

$$|H_{CIC}(\omega)|^2 = \left(\frac{1-\cos L\omega}{1-\cos \omega} \right)^N$$



di cui la figura mostra l'andamento per $L = 6$ ed $N = 3$ su di una scala in dB (§ 8.1).

Filtro cic e decimazione Approfondiamo ora come quanto esposto si integri con la teoria discussa al § 5.4.1. La fig. 5.7 mostra uno schema di decimazione $L : 1$ realizzato mediante filtro cic, che rientrando nel criterio di applicazione della *prima nobile identità* permette di posizionare il decimatore *a monte* degli elementi *comb* come mostrato alla seconda riga, consentendo a questi di operare alla velocità minima. Osserviamo quindi come in questa configurazione gli elementi di ritardo risultino *indipendenti* dal rapporto di decimazione L , e dunque lo stesso schema può essere riutilizzato modificando unicamente l'elemento decimatore vero e proprio.

Compensazione A fronte dei vantaggi discussi, l'uso di un filtro cic presenta risvolti che richiedono una attenta progettazione. Infatti la risposta in frequenza pre-decimazione $|H_{CIC}(\omega)| = \left| L \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right|^N$ (vedi pag. 133 per la sua derivazione) risulta essere tutt'altro che piatta nella banda passante corrispondente ad una pulsazione $|\omega| = \frac{\pi}{L}$ (o inferiore), e dunque deve essere *compensata* mediante uno stadio di equalizzazione realizzato con un ulteriore filtro FIR (per mantenere la linearità di fase) di ordine elevato, e che opera alla velocità *decimata* a valle dei comb, con l'effetto mostrato in fig. 5.8-a).

Lo stesso filtro di compensazione viene utilizzato anche per *aumentare* l'attenuazione nella banda soppressa $\frac{1}{L}\pi < |\omega| < \frac{2L-1}{L}\pi$, come mostrato in fig. 5.8-b). Infatti in tale regione il filtro cic presenta un'attenuazione di decine di dB ma non nulla, e ciò

⁶³Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Cascaded_integrator-comb_filter

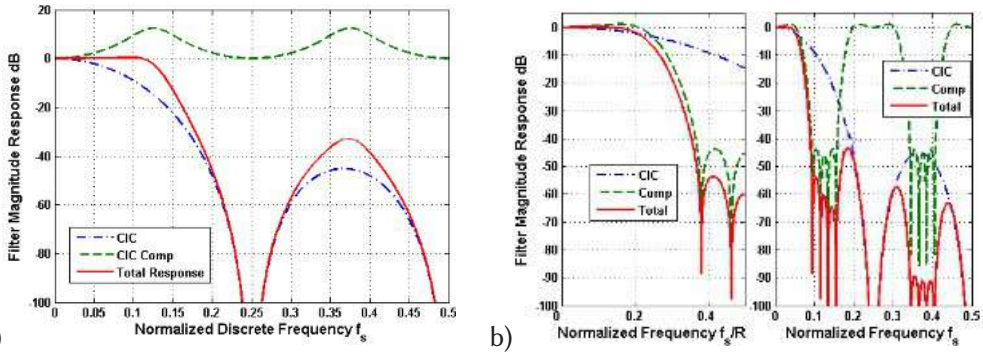
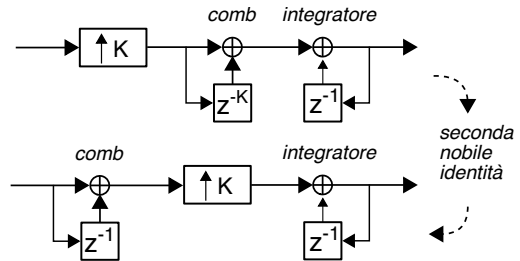


Figura 5.8: Risposta in frequenza in dB del filtro cic ($L = 4$) compensato: a) - compensazione in banda passante; b) - compensazione estesa alla banda soppressa

causa la manifestazione di aliasing a seguito della decimazione, con il segnale presente nelle bande $n \cdot \frac{2\pi}{L} \pm \frac{\pi}{4}$ con $n = 1, 2, \dots, L - 1$ che si *ripiega* sulla frequenza zero.

Aspetti numerici Un ultimo aspetto notevole è che l’elaborazione del filtro cic deve essere svolta con operazioni in virgola fissa senza segno, dato che in tal modo è garantita la cancellazione del polo dell’integratore con lo zero del comb. Non solo, occorre anche tenere conto che la dinamica del segnale aumenta sensibilmente con il numero di stadi posti in cascata, e dunque il numero di bit dei registri di calcolo deve essere dimensionato adeguatamente. Per approfondire il tema, si possono consultare i riferimenti riportati in nota⁶⁴.

Interpolazione Il filtro cic può svolgere altrettanto bene la funzione del filtro passabasso utilizzato in uno schema di interpolazione numerica (§ 5.4.2). In questo caso il cic è nominalmente posto a valle dell’interpolatore numerico, ma scambiando tra loro di posto gli stadi comb con quelli di integrazione, è possibile applicare la seconda nobile identità per pervenire anche in questo caso ad una architettura dalla complessità computazionale minima, come mostrato alla figura precedente in cui per semplicità si è limitato ad uno il numero di stadi i&c.



Valgono anche in questo caso le considerazioni precedenti, ovverosia la necessità di un ulteriore filtro di compensazione della distorsione in banda passante e di attenuazione della banda soppressa, che questa volta viene posto *prima* dello stadio comb in modo da operare a velocità ridotta, assieme alle accortezze sulla necessaria dimensione dei registri di calcolo a virgola fissa.

⁶⁴<https://www.dsprelated.com/showarticle/1337.php>, <https://dspguru.com/files/cic.pdf>, <http://www.tsdconseil.fr/log/scriptscilab/cic/cic-en.pdf>, <https://www.intel.com/content/dam/www/programmable/us/en/pdfs/literature/an/an455.pdf>

Probabilità processi e statistica

PRIMA di proseguire con lo studio dei segnali, affrontiamo la teoria delle probabilità, i cui risultati saranno utilizzati molto estesamente nei capitoli seguenti. Dopo aver brevemente riassunto assiomi, teoremi base e concetti di *calcolo* delle probabilità, viene definita la *variabile aleatoria*, caratterizzata mediante distribuzioni e momenti, e discusse le v.a. uniforme e gaussiana. Si passa quindi a descrivere i *processi aleatori*, le diverse modalità di definirne delle medie, e le proprietà di stazionarietà ed ergodicità. Viene poi sviluppata la teoria che consente di ottenere la descrizione probabilistica di una *trasformazione* di variabile aleatoria, ed introdotta la densità gaussiana multidimensionale con le sue proprietà. Infine si affrontano temi di statistica, come la teoria della decisione, la stima di parametro e di intervallo, i test di verifica di ipotesi.

6.1 Teoria delle probabilità

Tratta delle caratteristiche *regolari* di fenomeni *irregolari* o *casuali*. Una prima *definizione* di probabilità è quella fornita dalla teoria *frequentista*, che la associa al limite a cui tende il rapporto tra numero di casi favorevoli rispetto al numero di casi totali: se ripetendo N volte un esperimento la circostanza A si verifica per n_A volte la sua frequenza relativa vale n_A/N , da cui si deriva la probabilità di A come

$$Pr_A = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_A}{N}$$

In termini più astratti, l'insieme di tutte le circostanze possibili può essere pensato come un insieme algebrico, i cui elementi (o punti) sono appunto le diverse circostanze. I punti possono essere raggruppati in sottoinsiemi (eventualmente vuoti o di un solo punto) per i quali valgono le proprietà di unione, intersezione, complemento, inclusione...

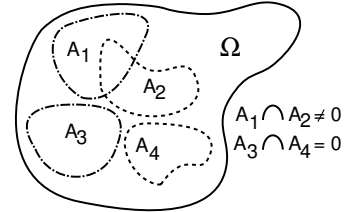
I fenomeni fisici sono posti in relazione con i punti degli insiemi suddetti mediante il concetto di *spazio campione* Ω , che è l'unione di tutti i possibili risultati di un *fenomeno aleatorio*, mentre i sottoinsiemi dello spazio campione sono detti *eventi*. L'intero spazio è l'*evento certo*, mentre l'insieme vuoto corrisponde all'evento impossibile ϕ (od evento *nullo*). Una *unione* \cup di eventi corrisponde all'evento che si verifica ogni qualvolta se ne verifichi *un suo componente*, mentre l'*intersezione* \cap è verificata se *tutti* i componenti lo

sono. Ad esempio, il lancio di un dado genera uno spazio con 6 punti (eventi) disgiunti. Uno spazio campione può avere un numero di punti finito, infinito numerabile, o infinito.

6.1.1 Assiomi delle probabilità

Costituiscono le basi da cui derivano i teoremi successivi, affermando che

- $0 \leq Pr(A) \leq 1$: la probabilità di un evento è compresa tra 0 ed 1;
- $Pr(\Omega) = 1$: la probabilità dell'evento certo è 1;
- Se $Pr(A_i \cap A_j) = \emptyset$ allora $Pr(\cup A_i) = \sum Pr(A_i)$: la probabilità dell'unione di eventi *disgiunti* è la somma delle singole probabilità.



6.1.2 Teoremi di base

- $Pr(\emptyset) = 0$: la probabilità dell'evento impossibile è nulla;
- $Pr(A \cap B) + Pr(A \cap \bar{B}) = Pr(A)$, e $Pr(B) + Pr(\bar{B}) = 1$: un evento ed il suo complemento riempiono lo spazio (detto anche teorema delle *probabilità totali*¹);
- $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$: la probabilità dell'evento intersezione si conta una volta sola. Esempio alla nota²;
- Se $B \subseteq A$ allora $Pr(B) \leq Pr(A)$: quando l'evento B è contenuto in A il verificarsi del primo implica il secondo.

6.1.3 Probabilità congiunta, condizionata e marginale

Può avvenire che il verificarsi di un evento *influenzi* il verificarsi o meno di un altro. Si dice allora che lo condiziona, ovvero che l'evento influenzato è *condizionato*. La probabilità che avvenga A , noto che B (evento *condizionante*) si sia verificato, si scrive $Pr(A/B)$, e si legge probabilità (condizionata) di A dato B , definita³ come

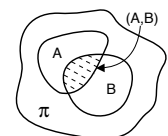
$$Pr(A/B) = \frac{Pr(A, B)}{Pr(B)} \tag{6.1}$$

in cui $Pr(A, B) = Pr(A \cap B)$ è la probabilità *congiunta* che A e B si verifichino entrambi, ed a patto che $Pr(B) \neq 0$ (altrimenti anche $Pr(A/B)$ è zero!). Viceversa, le probabilità dei singoli eventi $Pr(A)$ e $Pr(B)$ sono indicate come probabilità *marginali*.

¹Utile per scrivere la probabilità di un evento come "1 meno" quella dell'evento complementare.

²Lanciando un dado, la probabilità $Pr(\text{pari} \cup > 2)$ di ottenere un numero pari, *oppure* più grande di due, è la *somma* delle probabilità dei singoli eventi $Pr(\text{pari}) = \frac{3}{6}$ e $Pr(> 2) = \frac{4}{6}$, meno quella che si verifichino assieme $Pr(\text{pari} \cap > 2) = \frac{2}{6}$. Pertanto: $Pr(\text{pari} \cup > 2) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

La relazione può essere verificata ricorrendo al diagramma in figura, ed interpretando $Pr(A/B)$ come il rapporto tra la misura di probabilità dell'evento congiunto, rispetto a quella dell'evento condizionante.



Esercizio Valutare la probabilità condizionata $Pr(A/B)$ che lanciando un dado si ottenga un numero pari (evento $A = (\text{pari})$), condizionatamente all'evento B che il numero sia > 2 .
Soluzione alla nota⁴.

Invertendo la definizione (6.1) la probabilità *congiunta* può essere ottenuta anche come $Pr(A, B) = Pr(A/B) Pr(B)$; inoltre, gli eventi condizionante e condizionato si possono invertire di ruolo, permettendo di scrivere anche: $Pr(A, B) = Pr(B/A) Pr(A)$. Eguagliando le due ultime espressioni per la probabilità congiunta si ottiene la via per calcolare una probabilità *condizionata* a partire dall'altra, qualora si conoscano entrambe le *marginali*:

$$Pr(A/B) = \frac{Pr(B/A) Pr(A)}{Pr(B)} \quad \text{ed anche} \quad Pr(B/A) = \frac{Pr(A/B) Pr(B)}{Pr(A)} \quad (6.2)$$

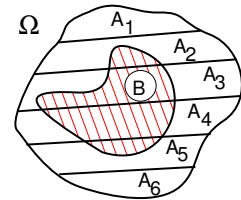
6.1.4 Probabilità a priori e a posteriori, teorema di Bayes

A volte un determinato evento A non può essere osservato direttamente, ma se A è in qualche modo legato ad un secondo evento B , che invece possiamo osservare, la probabilità condizionata $Pr(A/B)$ prende il nome di probabilità *a posteriori*, poiché indica un valore di probabilità valutato *dopo* la conoscenza di B . Viceversa, in tale contesto la probabilità marginale $Pr(A)$ viene ora indicata come *a priori*, ovvero *presunta* senza aver potuto osservare nulla.

In generale si conosce solamente $Pr(A)$ e $Pr(B/A)$, mentre per calcolare $Pr(A/B)$ occorre conoscere $Pr(B)$, vedi (6.2). Quest'ultima quantità si determina *saturando* la probabilità congiunta $Pr(A, B)$ rispetto a tutti i possibili eventi marginali A_i :

$$Pr(B) = \sum_i Pr(B, A_i) = \sum_i Pr(B/A_i) Pr(A_i)$$

a patto che risulti $Pr(A_i, A_j) = 0$ e $\cup A_i = \Omega$, ovvero che gli eventi A_i siano disgiunti e che il loro insieme $\{A_i\}$ costituisca una partizione dello spazio degli eventi Ω , come rappresentato in figura.



L'ultima relazione ci permette di enunciare il *teorema di Bayes*, che mostra come ottenere le probabilità *a posteriori* a partire da quelle *a priori* e da quelle condizionate *in senso opposto*:

$$Pr(A_i/B_j) = \frac{Pr(B_j/A_i) Pr(A_i)}{\sum_k Pr(B_j/A_k) Pr(A_k)}$$

⁴Il risultato è pari alla probabilità $Pr(A, B) = Pr(\text{pari}, > 2)$ che i due eventi si verifichino contemporaneamente, divisa per la probabilità $Pr(B) = Pr(> 2)$ che il numero sia > 2 .

Si rifletta sulla circostanza che la probabilità del pari $Pr(A) = \frac{1}{2}$, quella $Pr(B) = \frac{4}{6}$, o quella congiunta di entrambi $Pr(A, B) = \frac{2}{6}$, sono tutte riferite ad *un qualunque* lancio di dado, mentre $Pr(\text{pari} / > 2)$ è relativa ad un numero ridotto di lanci, solo quelli che determinano un risultato > 2 . Pertanto, essendo $Pr(B) \leq 1$, si ottiene $Pr(A/B) \geq Pr(A, B)$; infatti per l'esempio del dado si ottiene $Pr(\text{pari} / > 2) = Pr(\text{pari}, > 2) / Pr(> 2) = \frac{2/6}{4/6} = \frac{1}{2}$, che è maggiore di $Pr(\text{pari}, > 2) = \frac{1}{3}$.

Si ottiene invece $Pr(A/B) = Pr(A, B)$ solo se $Pr(B) = 1$, ossia se B corrisponde all'unione di tutti gli eventi possibili.

Al § 17.1.1 è mostrata l'applicazione di queste considerazioni ad un problema di decisione statistica tipico delle telecomunicazioni, relativo alla ricezione binaria. Di seguito, invece, è illustrato un esempio più diretto di applicazione del teorema di Bayes.

Esempio Un sistema di comunicazione radio è affetto da attenuazioni supplementari causate da pioggia. Indicando con FS l'evento che il sistema vada fuori servizio, e conoscendo le probabilità condizionate $Pr(FS/piove) = 0.5$, $Pr(FS/non\ piove) = 0.05$ e la probabilità marginale $Pr(piove) = 0.03$, determinare:

1. La probabilità di fuori servizio $Pr(FS)$, indipendentemente dal verificarsi o meno dell'evento piovoso;
2. La probabilità che stia piovendo, sapendo che il sistema è fuori servizio.

Risposte alla nota⁵).

6.1.5 Indipendenza statistica

Si verifica quando

$$Pr(A/B) = Pr(A)$$

in quanto il verificarsi di B non influenza A . Come conseguenza, per due eventi statisticamente indipendenti avviene che

$$Pr(A, B) = Pr(A) Pr(B) \quad (6.3)$$

Esempi

- Quale è la probabilità che, lanciando 3 volte un dado, esca 3 volte 1? Risultato (⁶).
- Un'urna contiene 2 biglie bianche e 3 nere. Qual è la probabilità che su 2 estrazioni consecutive *senza reinserimento*, escano le 2 biglie bianche? Risultato (⁷).
- Qual è la probabilità che 2 carte, estratte a caso da un mazzo da bridge da 52, siano K e Q? Risultato (⁸).

6.2 Variabili aleatorie

Finora si è parlato di *eventi* in modo astratto, mentre spesso ci si trova ad associare ad ogni punto dello spazio campione un valore numerico: lo spazio campione Ω diventa

⁵La probabilità marginale di fuori servizio si calcola applicando il teorema delle probabilità totali

$$Pr(FS) = Pr(FS/piove) \cdot Pr(piove) + Pr(FS/non\ p.) \cdot Pr(non\ p.) = .5 \cdot .03 + .05 \cdot .97 = .0635 = 6.35\%$$

dato che $Pr(non\ piove) = 1 - Pr(piove) = .97$. Applicando il teorema di Bayes si trova quindi

$$Pr(piove/FS) = \frac{Pr(FS/piove) \cdot Pr(piove)}{Pr(FS)} = \frac{.5 \cdot .03}{.0635} = .236 = 23.6\%$$

Si noti come la probabilità *a priori* che piova (3%) venga rimpiazzata dal suo valore *a posteriori* (23.6%) grazie alla nuova informazione di cui disponiamo (collegamento fuori servizio). Per una definizione più precisa delle probabilità *a priori* ed *a posteriori* si veda il § ??.

⁶E' pari al prodotto delle probabilità marginali, essendo i lanci statisticamente indipendenti, visto che il dado è "senza memoria". Pertanto il risultato è $(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216} \approx 4.6296 \cdot 10^{-3}$.

⁷Anche l'urna è senza memoria, ma non l'esperimento aleatorio, visto che dopo la prima estrazione le biglie restano in 4! Pertanto ora il prodotto delle probabilità marginali risulta $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.

⁸ $Pr(K, Q) = Pr(K\ prima, Q\ seconda) + Pr(Q\ prima, K\ seconda) = Pr(K\ prima) \cdot Pr(Q\ seconda/K\ prima) + Pr(Q\ prima) \cdot Pr(K\ seconda/Q\ prima) = 2 \left(\frac{4}{52} \frac{4}{51} \right) = \frac{8}{663} \approx 1.2 \cdot 10^{-2}$

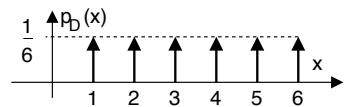
allora l'insieme dei numeri e prende il nome di *variabile aleatoria*, d'ora in poi spesso abbreviato in *v.a.* Il verificarsi di un evento corrisponde ora all'assegnazione di un valore (tra i possibili) alla v.a.; tale valore "prescelto" prende dunque il nome di *realizzazione* della v.a. Distinguiamo poi tra variabili aleatorie *discrete* e *continue*, a seconda se la grandezza che descrivono abbia valori numerabili o continui⁹. La caratterizzazione della variabile aleatoria in termini probabilistici si ottiene indicando come la "massa di probabilità" si distribuisce sull'insieme di valori che essa può assumere, per mezzo delle due funzioni (di v.a.) seguenti.

6.2.1 Densità di probabilità e funzione di distribuzione

Come la massa di un oggetto *non omogeneo* è distribuita in modo più o meno denso in regioni differenti del suo volume complessivo, così la *densità di probabilità* (o *d.d.p.*) indica su quali valori della variabile aleatoria si concentra la probabilità. Ad esempio, la densità della v.a. discreta associata al lancio di un dado può essere scritta:

$$p_D(x) = \sum_{n=1}^6 \frac{1}{6} \delta(x-n) \quad (6.4)$$

il cui significato discutiamo subito, con l'aiuto del grafico a lato, in cui D indica la v.a. (il numero che uscirà), e x una sua realizzazione (una delle 6 facce). I 6 impulsi centrati in $x = n$ rappresentano una *concentrazione* di probabilità nei sei possibili valori, e l'area di tali impulsi è esattamente pari alla probabilità di ognuno dei sei risultati. È facile verificare che



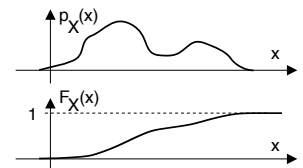
$$\int_{-\infty}^{\infty} p_D(x) dx = 1 \quad \text{e che risulta} \quad \int_a^b p_D(x) dx = \Pr\{a < D \leq b\}$$

ovvero pari alla probabilità che la v.a. D assuma un valore tra a e b . In particolare, non potendosi verificare una probabilità negativa, si ha $p_D(x) \geq 0$ con $\forall x$.

Una funzione di v.a. strettamente collegata alla densità è la funzione di *ripartizione* o di *distribuzione*¹⁰, definita come

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(\xi) d\xi = \Pr\{X \leq x\} \quad (6.5)$$

e che risulta una funzione non decrescente di x , limitata ad un valore massimo di 1, ed il cui andamento mostriamo a lato sotto a quello di $p_X(x)$, per la quale ovviamente risulta $p_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$; nel caso invece della v.a. discreta D , la



⁹Un esempio classico di v.a. discreta è quello del lancio di un dado, un altro sono i numeri del lotto. Una v.a. continua può essere ad esempio un valore di pressione atmosferica in un luogo, oppure l'attenuazione di una trasmissione radio dovuta a fenomeni atmosferici.

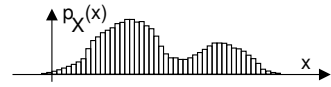
¹⁰In realtà, l'ordine storico è quello di definire prima $F_X(x)$ come la probabilità che X sia non superiore ad un valore x , ovvero $F_X(x) = \Pr\{X \leq x\}$, e quindi $p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$. Il motivo di tale "priorità" risiede nel fatto che $F_X(x)$ presenta minori "difficoltà analitiche" di definizione (ad esempio presenta solo discontinuità di prima specie, anche con v.a. discrete).

relativa funzione di distribuzione è discontinua¹¹.

Ora è ancora più evidente la circostanza che $p_X(x)$ è una *densità*, e diviene una probabilità solo quando moltiplicata per un intervallo di x ⁽¹²⁾.

Istogramma Qualora non si disponga di una espressione analitica idonea a rappresentare il modo con cui si distribuiscono i valori di una v.a., può essere utile svolgerne una *stima* mediante un *istogramma*. Questo assume l'aspetto di una versione per così dire *quantizzata* della d.d.p. incognita, e si ottiene a partire da una serie di realizzazioni¹³ della v.a., suddividendo il campo di variabilità della grandezza X in sotto-intervalli, e disegnandovi rettangoli verticali, ognuno di altezza pari al numero di volte che (nell'ambito del campione statistico a disposizione) X assume un valore in quell'intervallo, come rappresentato in figura.

Dividendo l'altezza di ogni rettangolo per il numero di osservazioni N , si ottiene una approssimazione di $p_X(x)$, via via più precisa con $N \rightarrow \infty$, e con una contemporanea riduzione dell'estensione degli intervalli.



6.2.2 Valore atteso, momento e momento centrato

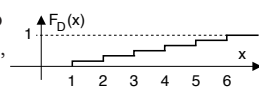
Si tratta di grandezze per così dire *riassuntive* del modo con cui si distribuiscono i valori di una v.a., e sono definite a partire da una *generica funzione di variabile aleatoria*¹⁴ che indichiamo con $g(x)$.

Valore atteso Si definisce *valore atteso* (o *media di insieme*¹⁵) di $g(x)$ rispetto alla variabile aleatoria X la quantità

$$E_X \{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_X(x) dx \tag{6.6}$$

che corrisponde ad una *media pesata*, in cui i valori assunti da $g(x)$ in corrispondenza ad un certo x sono *pesati* mediante il corrispettivo valore di probabilità $p_X(x) dx$; tale operazione di media integrale è indicata con la notazione $E_X \{.\}$ ¹⁶, mediante la quale

A fianco è mostrata la $F_D(x)$ relativa al lancio di un dado: ricordiamo ¹¹infatti che la derivata di un gradino è un impulso di area pari al dislivello, e dunque applicando la (6.5) alla (6.4) si ottiene il risultato illustrato.



¹²Infatti la probabilità che X cada tra x_0 e $x_0 + \Delta x$ vale $\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} p_X(x) dx \approx p_X(x_0) \Delta x$.

¹³Ricavate ad esempio da basi di dati anagrafici, sanitari, meteorologici o quant'altro, oppure effettuando una apposita *campagna di misura* basata su di un *campione statistico* di adeguata numerosità (vedi anche § 6.6).

¹⁴Un esempio di funzione di v.a. potrebbe essere il valore della vincita associata ai 13 in schedina, che dipende dalla v.a. rappresentata dai risultati delle partite, una volta noto il montepremi e le giocate. Infatti, per ogni possibile vettore di risultati, si determina un diverso numero di giocate vincenti, e quindi un diverso modo di suddividere il montepremi. Essendo i risultati improbabili giocati da un ridotto numero di schedine, a queste compete un valore maggiore in caso di vincita, ben superiore al suo *valore atteso*, indicativo invece della vincita *media*.

¹⁵Per *insieme* ci si riferisce allo *spazio campione* Ω , costituito dai possibili valori assunti dalla v.a. X .

¹⁶In effetti, la E simboleggia la parola *Expectation*, che è il termine inglese usato per indicare il valore atteso.

si indica a pedice la v.a. (X) rispetto a cui eseguire la pesatura.

Nel caso di una funzione di più v.a. $g(x, y)$ il relativo valore atteso è calcolato in base alla d.d.p. *congiunta*, ovvero

$$E_{X,Y} \{g(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) p_{XY}(x, y) dx dy$$

in cui $p_{XY}(x, y)$ si ottiene a partire dalle d.d.p. condizionate e marginali, come esposto al § 6.1.3. Infine, la (6.6) può essere calcolata utilizzando una d.p.p. condizionata $p_{X/Y}(x/y)$, ed in tal caso anche il valore atteso $E_{X/Y} \{g(x)\}$ è detto *condizionato*, risultando funzione di y .

Momento Qualora si ponga $g(x) = x^n$, ovvero pari alla n -esima potenza della v.a., il valore atteso prende il nome di *momento di ordine n* , e si indica come

$$m_X^{(n)} = E \{x^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx \quad (6.7)$$

Nel caso di variabili aleatorie discrete, i momenti sono definiti come $m_X^{(n)} = \sum_i x_i^n p_i$, in cui $p_i = Pr \{x = x_i\}$, pesando quindi le possibili realizzazioni x_i con le rispettive probabilità. Notiamo subito che $m_X^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1$. Ragioniamo ora su due importanti momenti.

Valor medio e media quadratica Il momento di *primo* ordine

$$m_X = m_X^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx \quad (6.8)$$

prende il nome di *valor medio* della v.a., a volte denominato *centroide*, e coincide con la *media aritmetica* ottenibile a partire dalla conoscenza delle realizzazioni della v.a. ottenute ripetendo all'infinito l'esperimento aleatorio. Viceversa il momento di secondo ordine

$$m_X^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx$$

viene indicato come *media quadratica*.

Esempio Supponiamo che la v.a. X rappresenti l'altezza degli individui: l'altezza *media* m_X può essere *stimata* come media aritmetica delle relative misurazioni

$$\hat{m}_X = \frac{\overbrace{x_1 + x_1 + \dots}^{N_1 \text{ volte}} + \overbrace{x_2 + x_2 + \dots}^{N_2 \text{ volte}} + \dots + \overbrace{x_n + x_n + \dots}^{N_n \text{ volte}}}{N} = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + \dots + x_n N_n}{N}$$

Al tendere di $N = \sum_{i=1}^n N_i$ ad ∞ , la stima \hat{m}_X viene a coincidere con il risultato m_X fornito dalla (6.8) qualora al posto delle probabilità $p_X(x) dx$ si sostituiscano i valori $Pr(x_i)$ ottenuti tramite un istogramma $Pr(x_i) = \frac{N(x_i < x \leq x_i + \Delta x)}{N} = \frac{N_i}{N}$, tramutando così l'integrale in una sommatoria, ovvero $\int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx \Rightarrow \sum_i x_i Pr(x_i)$. Tale punto di vista motiva il senso del concetto di *pesatura* dei possibili valori di x con le rispettive frequenze.

Momento centrato Nel caso in cui $g(x) = (x - m_X)^n$ il relativo valore atteso è chiamato *momento centrato* di ordine n , ed indicato come

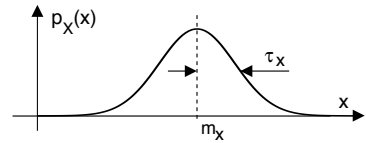
$$\mu_X^{(n)} = E \{ (x - m_X)^n \} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^n p_X(x) dx$$

E' immediato constatare che $\mu_X^{(0)} = 1$ e che $\mu_X^{(1)} = 0$.

Varianza E' il nome dato al momento centrato del 2° ordine, corrispondente a

$$\sigma_X^2 = \mu_X^{(2)} = E \{ (x - m_X)^2 \} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 p_X(x) dx$$

La radice quadrata σ_X della varianza σ_X^2 prende il nome di deviazione standard, e mentre la media m_X indica dove si colloca il "centro statistico" della densità di probabilità, σ_X indica quanto le singole determinazioni della v.a. siano disperse attorno ad m_X .

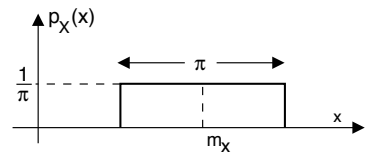


Una relazione notevole che lega i primi due momenti (centrati e non) è ⁽¹⁷⁾:

$$\sigma_X^2 = m_X^{(2)} - (m_X)^2 \tag{6.9}$$

6.2.3 Variabile aleatoria uniforme

E' caratterizzata dal presentare uno stesso valore di probabilità per tutto l'intervallo delle possibili realizzazioni, comprese tra un valore minimo ed uno massimo, come rappresentato in figura; pertanto la densità di probabilità è esprimibile mediante una funzione rettangolare



$$p_X(x) = \frac{1}{\Delta} \text{rect}_{\Delta}(x - m_X)$$

in cui Δ rappresenta l'estensione dell'intervallo di esistenza della variabile aleatoria, mentre il parametro m_X , che indica l'ascissa a cui è centrato il rettangolo, corrisponde esattamente al momento di primo ordine di X . Il calcolo della varianza¹⁸ invece fornisce: $\sigma_X^2 = \frac{\Delta^2}{12}$.

¹⁷Infatti risulta

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E \{ (x - m_X)^2 \} = E \{ x^2 + (m_X)^2 - 2xm_X \} = E \{ x^2 \} + (m_X)^2 - 2m_X E \{ x \} = \\ &= m_X^{(2)} + (m_X)^2 - 2(m_X)^2 = m_X^{(2)} - (m_X)^2 \end{aligned}$$

Si è preferito usare la notazione $E \{ x \}$, più compatta rispetto all'indicazione degli integrali coinvolti; i passaggi svolti si giustificano ricordando la proprietà distributiva degli integrali (appunto), ed osservando che il valore atteso di una costante è la costante stessa.

¹⁸Anziché calcolare σ_X^2 per la $p_X(x)$ data, calcoliamo $m_X^{(2)}$ per una v.a. uniforme a media nulla, ovvero con $m_X = 0$, sfruttando il fatto che in base alla (6.9) in tal caso risulta $m_X^{(2)} = \sigma_X^2$. Si ottiene:

$$m_X^{(2)} = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 \frac{1}{\Delta} dx = \frac{x^3}{3\Delta} \Big|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{3\Delta} \left(\frac{\Delta^3}{8} + \frac{\Delta^3}{8} \right) = \frac{1}{3\Delta} 2 \frac{\Delta^3}{8} = \frac{\Delta^2}{12}$$

6.2.4 Variabile aleatoria gaussiana

A differenza del caso uniforme, la v.a. gaussiana presenta valori più probabili in prossimità del valor medio m_x , in accordo alla d.d.p. con espressione

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \quad (6.10)$$

ed il cui grafico dalla caratteristica forma *a campana* è mostrato a lato per diversi valori dei parametri m_x e σ_x che compaiono nella (6.10), pari rispettivamente a media e deviazione standard della v.a. (vedi § 6.7.1), e che descrivono completamente la d.d.p. dal punto di vista analitico: pertanto la stima di m_x e σ_x (a partire da un buon numero di realizzazioni¹⁹) è sufficiente per descrivere completamente il fenomeno aleatorio. La v.a. gaussiana emerge in molti fenomeni naturali, ed è dimostrabile analiticamente che la sua densità è tipica²⁰ per grandezze ottenute dalla somma di un numero molto elevato di cause aleatorie, tutte statisticamente indipendenti e con la medesima d.d.p.²¹ (*teorema centrale del limite*²²).

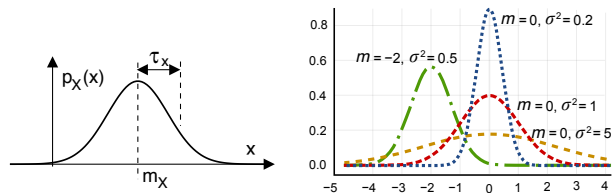
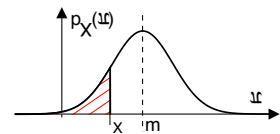


Figura 6.1: Grafico di una d.d.p. gaussiana

La v.a. gaussiana emerge in molti fenomeni naturali, ed è dimostrabile analiticamente che la sua densità è tipica²⁰ per grandezze ottenute dalla somma di un numero molto elevato di cause aleatorie, tutte statisticamente indipendenti e con la medesima d.d.p.²¹ (*teorema centrale del limite*²²).

6.2.4.1 Probabilità di un evento gaussiano

Accade che il valore dell'integrale $\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\theta-m)^2}{2\sigma^2}} d\theta$ mostrato in figura e che corrisponde alla funzione di distribuzione $F_X(x)$ della v.a. gaussiana x non sia esprimibile in forma chiusa, e dunque per $F_X(x)$ non esiste una formula precisa. Al contrario, il suo valore viene *calcolato* per via numerica²³, e reso disponibile mediante tabelle e grafici. Per evitare di dover ripetere il calcolo per ogni possibile valore di media e varianza, l'estensione dell'area tratteggiata viene valutata per una v.a. gaussiana *normalizzata* Z a media nulla e varianza $\frac{1}{2}$, ed espressa nei termini della



¹⁹Disponendo di un insieme $\{x_n\}$ di N realizzazioni di una variabile aleatoria X , possiamo effettuare le stime $\widehat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$ e $\widehat{m}_x^{(2)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n^2$, il cui valore tende *asintoticamente* a quello delle rispettive medie di insieme, come N (la dimensione del campione statistico) tende a ∞ . Al proposito, vedi § 6.6.3.1.

²⁰Tanto che la (6.10) è anche detta *Normale*, e per questo è indicata anche come $N(m, \sigma^2)$.

²¹Questa condizione è anche detta di v.a. *indipendenti e identicamente distribuite*, ovvero *i.i.d.*

²²Il teorema viene dimostrato al § 6.7.2, ma può essere divertente ed utile sperimentarne la validità ricorrendo alla applet presente presso

<http://www.randomservices.org/random/apps/DiceExperiment.html>

Inoltre, considerando che al § 6.2.5 si mostra come la d.d.p. di una somma di v.a. indipendenti sia pari alla convoluzione tra le rispettive d.d.p., osserviamo che la convoluzione ripetuta di una stessa d.d.p. con se stessa, la *gaussianizza*.

²³Ovvero mediante del software che implementa uno dei metodi descritti ad es. presso

https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_integration

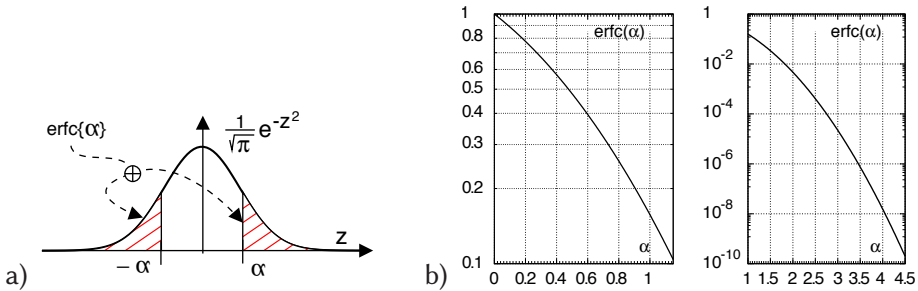


Figura 6.2: Valore di $\text{erfc}\{\alpha\}$ per una gaussiana a media nulla e varianza $1/2$

funzione $\text{erfc}\{\alpha\}$ ²⁴ definita come rappresentato in fig. 6.2-a), ovvero

$$\text{erfc}\{\alpha\} = \Pr\{|z| > \alpha\} = 2 \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz$$

il cui andamento è graficato in fig. 6.2-b) per i diversi valori dell'argomento $\alpha \geq 0$. In questi termini, la funzione di distribuzione di z si ottiene come

$$F_Z(z) = \Pr\{Z \leq z\} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \text{erfc}\{z\} & z > 0 \\ \frac{1}{2} \text{erfc}\{-z\} & z \leq 0 \end{cases}$$

Tale risultato può quindi essere usato per calcolare il valore di probabilità $\Pr\{X > \beta\}$ con cui una v.a. X con media m e varianza σ^2 supera una soglia $\beta \geq m$, applicando il cambio di variabile $z = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$, che fornisce

$$\Pr\{X > \beta\} = \frac{1}{2} \text{erfc}\left\{\frac{\beta - m}{\sqrt{2}\sigma}\right\} \quad (6.11)$$

Esempio Valutare la probabilità che una v.a. gaussiana X con $m = 2$ e $\sigma^2 = 4$ superi il valore $x = 2.5$. Il cambio di variabile $\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$ determina per la v.a. normalizzata il nuovo valore di soglia $\frac{2.5-2}{1.41 \cdot 2} \approx 0.17$, e dalla fig. 6.2-b) si ottiene $\Pr\{X > \beta\} = \frac{1}{2} \text{erfc}\{0.17\} \approx \frac{1}{2} 0.82 = 0.41$.

Ma proviamo a svolgere i calcoli: il valore di probabilità richiesto dall'esercizio corrisponde a $\Pr\{X > \beta\} = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\theta-m)^2}{2\sigma^2}} d\theta$; ponendo $\frac{\theta-m}{\sqrt{2}\sigma} = \eta$ risulta $d\theta = \sqrt{2}\sigma \cdot d\eta$ mentre l'estremo inferiore di integrazione diviene $\eta = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$, ottenendo così

$$\Pr\{X > \beta\} = \int_{\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\eta^2} \sqrt{2}\sigma \cdot d\eta = \int_{\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{1}{2} \text{erfc}\left\{\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}\right\}$$

Questo risultato tornerà utile al § 15.4, quando dovremo valutare la probabilità di errore nelle trasmissioni numeriche.

La funzione Q Alcuni autori esprimono la probabilità di evento gaussiano come $Q\{x\} = \Pr\{X > x\} = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\theta^2}{2}} d\theta$, riferita dunque ad *una sola coda* di una v.a. gaus-

²⁴Il termine *erfc* sta per *funzione di errore complementare*, e trae origine dai risultati della misura di grandezze fisiche, in cui l'errore di misura, dipendente da cause molteplici, si assume appunto gaussiano. Vedi anche https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_degli_errori.

siana a media nulla e varianza *unitaria*. Tra le due notazioni sussiste pertanto la relazione $Q\{x\} = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left\{\frac{x}{\sqrt{2}}\right\}$.

Valori notevoli Per avere una idea della rapidità di azzeramento della campana gaussiana, può essere utile tenere conto che in un intervallo di estensione 2σ centrato attorno alla media si trova il 68,3% della probabilità, che sale al 95,5% per un intervallo che si estende per $\pm 2\sigma$ attorno alla media, ed arriva al 99,7% per un intervallo $\pm 3\sigma$. Vedi anche la tabella a pag. 176.

Mentre ai §§ 6.5 e 6.7.1 sono approfonditi ulteriori aspetti della v.a. gaussiana, altri tipi di v.a. sono descritti assieme ai rispettivi casi di utilizzo, come nel caso della v.a. esponenziale § 22.2.1, di Bernoulli § 22.1, Poisson § 22.2, Rayleigh e Rice pag. 427. Qui invece il capitolo prosegue introducendo una descrizione di v.a. *complementare* a quella fornita da d.d.p. e distribuzione, mediante la quale dimostrare il comportamento di una somma di v.a. indipendenti.

6.2.5 Funzione caratteristica

La funzione caratteristica $\Phi_X(\omega)$ di una v.a. X è definita come l'antitrasformata di Fourier della sua densità di probabilità, ovvero (equivalentemente) come il valore atteso di $e^{j\omega x}$:

$$\Phi_X(\omega) = \mathcal{F}^{-1}\{p_X(x)\} = E_X\{e^{j\omega x}\} = \int p_X(x) e^{j\omega x} dx \quad (6.12)$$

Intuitivamente, possiamo pensare che si sia scelta l'anti-trasformata anziché la trasformata in quanto una d.d.p. è una *densità* (di probabilità), similmente ad una densità *spettrale*. Tra una d.d.p. $p_X(x)$ e la relativa $\Phi_X(\omega)$ intercorre una relazione *biunivoca*, nel senso che se due d.d.p. hanno la stessa $\Phi_X(\omega)$, esse coincidono. Affrontiamo subito due importanti applicazioni di questo nuovo strumento.

6.2.5.1 Densità di probabilità della somma di v.a. indipendenti

Osserviamo che, se $z = x + y$ è la somma di v.a. *indipendenti*, per la sua funzione caratteristica si ottiene

$$\begin{aligned} \Phi_z(t) &= E_Z\{e^{j(x+y)t}\} = E_Z\{e^{jxt}e^{jyt}\} = E_X\{e^{jxt}\} E_Y\{e^{jyt}\} \\ &= \Phi_x(t) \Phi_y(t) \end{aligned}$$

in quanto sotto tale ipotesi la d.d.p. congiunta $p_{XY}(x, y)$ si fattorizza nel prodotto delle d.d.p. marginali $p_X(x)$ e $p_Y(y)$ (vedi § 6.1.5), ed il valore atteso si scompone nel prodotto di due integrali. Pertanto, la funzione caratteristica di una somma di v.a. indipendenti è pari al prodotto delle funzioni caratteristiche.

Effettuando ora l'operazione inversa (trasformata di Fourier della funzione caratteristica della somma), e ricordando che ad un prodotto in un dominio corrisponde una convoluzione nell'altro, si ottiene il risultato $p_Z(z) = \mathcal{F}\{\Phi_z(t)\} = \mathcal{F}\{\Phi_x(t) \Phi_y(t)\} = p_X(x) * p_Y(y)$ che ci permette di enunciare:

La densità di probabilità della somma di v.a. indipendenti è pari alla convoluzione tra le rispettive densità di probabilità marginali.

Esempio Se x ed y sono due v.a. a distribuzione uniforme tra $\pm\Delta$, la loro somma ha densità di probabilità triangolare con base 2Δ . Pertanto, nel lancio di 2 dadi il risultato più probabile è 7. Infatti può essere ottenuto come $6+1$, $5+2$, $4+3$, $3+4$, $2+5$, $1+6$, ovvero in 6 modi diversi, ognuno con probabilità $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ e dunque $Pr\{7\} = 6 \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$.

6.2.5.2 Funzione caratteristica di una v.a. gaussiana

Consideriamo il caso di una v.a. gaussiana a valor medio nullo e varianza σ^2 : si tratta di eseguire il calcolo $\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{j\omega x} dx$, il cui svolgimento²⁵ porta al risultato

$$\Phi_X(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2} \quad (6.13)$$

ovvero ancora un andamento gaussiano, con dispersione (varianza) inversamente proporzionale a quella della gaussiana di partenza. Qualora la v.a. abbia invece valore medio $m_x \neq 0$ la proprietà di traslazione della \mathcal{F} -trasformata fornisce $\Phi_X(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2} \cdot e^{j\omega m_x}$.

Ma per non farci mancare nulla, citiamo ulteriori proprietà della funzione caratteristica:

Valore massimo Osserviamo che

$$|\Phi_X(\omega)| = |E_X \{e^{j\omega x}\}| \leq E_X \{|e^{j\omega x}|\} = \int p_X(x) dx = \Phi_X(\omega)|_{\omega=0} = 1$$

dunque $\Phi_X(\omega)$ ha un massimo nell'origine.

Relazione con i momenti Se $\Phi_X(\omega)$ è derivabile k volte, dalla (6.12) si ottiene $\frac{d^k \Phi_X(\omega)}{d\omega^k} = E \{(jx)^k e^{j\omega x}\}$ che calcolata per $\omega = 0$ fornisce

$$\left. \frac{d^k \Phi_X(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} = j^k E \{x^k\} = j^k m_x^{(k)}$$

Pertanto conoscendo i primi n momenti $m_x^{(1)}, m_x^{(2)}, \dots, m_x^{(n)}$ della v.a. x è possibile ottenere una approssimazione $\hat{\Phi}_X(\omega)$ della relativa funzione caratteristica $\Phi_X(\omega)$ nella forma di una espansione in serie di potenze, ovvero

$$\Phi_X(\omega) \simeq \sum_{k=0}^n \left. \frac{d^k \Phi_X(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=0} \frac{\omega^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n m_x^{(k)} \frac{(j\omega)^k}{k!}$$

²⁵Ricordando che $e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}$ possiamo scrivere $\Phi_X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x - \frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$; riformuliamo quindi l'esponente $j\omega x - \frac{x^2}{2\sigma^2}$ come

$$-\frac{x^2}{2\sigma^2} + j\omega x - \frac{(j\omega\sigma)^2}{2} + \frac{(j\omega\sigma)^2}{2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 2j\omega x + (j\omega\sigma)^2 \right) + \frac{(j\omega\sigma)^2}{2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma} - j\omega\sigma \right)^2 + \frac{(j\omega\sigma)^2}{2}$$

in modo da ottenere

$$\Phi_X(\omega) = e^{\frac{1}{2}(j\omega\sigma)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma} - j\omega\sigma)^2} dx = e^{-\frac{1}{2}(\omega\sigma)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y)^2} dy = e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2}$$

avendo effettuato il cambio di variabile $y = \frac{x}{\sigma} - j\omega\sigma$ che dà luogo agli stessi estremi di integrazione, mentre $dx = \sigma dy$, ed avendo notato come l'integrale ora calcoli l'area di una gaussiana con varianza unitaria, pari a ad uno.

Inversione Conoscendo una stima $\hat{\Phi}_X(\omega)$ della f.c. della v.a. x si può ottenere una approssimazione $\hat{p}_X(x)$ della relativa d.d.p. calcolandone la trasformata di Fourier, ovvero

$$\hat{p}_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\Phi}_X(\omega) e^{-j\omega x} d\omega$$

Estendiamo ora i concetti fin qui esposti al caso di v.a. vettoriali o multivariate, le cui realizzazioni corrispondono ad una n -upla di valori.

6.2.6 Variabile aleatoria multivariata

In questo caso la v.a. rappresenta congiuntamente un intero *vettore* \mathbf{x} di variabili aleatorie monodimensionali, ossia una loro collezione ordinata, in numero finito (ad es. N), in relazione o meno tra loro in base a legami di tipo probabilistico.

Densità di probabilità Indicando con \mathbf{X} la v.a. vettoriale, e con \mathbf{x} una sua realizzazione costituita dalle N componenti x_1, x_2, \dots, x_N , la v.a. multivariata è descritta per mezzo della d.d.p. $p_X(\mathbf{x}) = p_X(x_1, x_2, \dots, x_N)$ funzione di N variabili, per la quale deve risultare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \cdots dx_N = 1$$

Distribuzione Anche nel caso multivariato può essere definita una funzione di distribuzione $F_X(\mathbf{x})$, anch'essa N -dimensionale, il cui valore $F_X(\bar{\mathbf{x}}) = Pr\{\mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}\}$ nel punto $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)$ si calcola come

$$F_X(\bar{\mathbf{x}}) = \int_{-\infty}^{\bar{x}_1} \int_{-\infty}^{\bar{x}_2} \cdots \int_{-\infty}^{\bar{x}_N} p_X(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \cdots dx_N$$

Densità di probabilità marginale La d.d.p. *marginale* $p_{X_i}(x_i)$ della singola v.a. *monodimensionale* x_i che prende parte al sistema di coordinate su cui \mathbf{X} è definita, può essere calcolata a partire dalla d.d.p. *congiunta* $p_X(\mathbf{x})$ mediante *saturazione* delle altre v.a., ovvero

$$p_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_N \quad (6.14)$$

$N-1$ integrali

Densità di probabilità condizionata La d.d.p. di un sotto-gruppo di v.a. $\mathbf{x}_a = (x_1, x_2, \dots, x_a)$, qualora il valore delle restanti coordinate $\mathbf{x}_b = (x_{a+1}, x_{a+2}, \dots, x_N)$ di \mathbf{x} sia da ritenersi noto, si ottiene dividendo la d.d.p. congiunta $p_X(\mathbf{x})$ per quella marginale $p_X(\mathbf{x}_b)$ che descrive gli eventi condizionanti, ovvero

$$p_X(\mathbf{x}_a/\mathbf{x}_b) = \frac{p_X(\mathbf{x})}{p_X(\mathbf{x}_b)}$$

in cui $p_X(\mathbf{x}_b)$ è ottenuta per saturazione (6.14). La separazione *ordinale* tra i due gruppi di variabili ha lo scopo di semplificare la notazione di questa definizione; in realtà, le v.a. dei due gruppi possono essere prese con un ordine qualsiasi.

Valore atteso e momenti Nel caso in cui si tratti del valore atteso di una funzione di una sola v.a. marginale, si utilizza ancora la (6.6) in cui la d.d.p. è quella marginale $p_{X_i}(x_i)$ relativa alla v.a. rispetto alla quale si sta eseguendo la media di insieme. Per questa via è possibile ottenere un vettore $m_X = (m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_N})$ che rappresenta il valor medio della v.a. multivariata \mathbf{X} , le cui componenti m_{x_i} sono i momenti di primo ordine delle v.a. marginali, ovvero

$$m_{x_i} = E_X \{x_i\} = \int x_i p_{X_i}(x_i) dx_i$$

Notiamo che sebbene la notazione $E_X \{x_i\}$ indichi un valore atteso calcolato rispetto alla variabilità di tutte le componenti della v.a. multivariata \mathbf{X} , il calcolo è svolto ricorrendo alla d.d.p. marginale, in quanto le altre v.a. x_j con $j \neq i$ saturano (6.14).

D'altra parte, è possibile ora valutare anche i cosiddetti momenti *misti*, in cui cioè la media di insieme considera tutti i possibili valori di due o più componenti di \mathbf{X} , pesando ognuno di questi con il relativo valore di probabilità. Ad esempio, un momento misto di ordine (n, m) è definito come

$$m_{x_i x_j}^{(n, m)} = E_X \{x_i^n x_j^m\} = \int \int x_i^n x_j^m p_{X_i X_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j$$

ed un momento misto *centrato* di ordine (n, m) come

$$\mu_{x_i x_j}^{(n, m)} = E_X \{(x_i - m_{x_i})^n (x_j - m_{x_j})^m\} = \int \int (x_i - m_{x_i})^n (x_j - m_{x_j})^m p_{X_i X_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j$$

in cui la $p_{X_i X_j}(x_i, x_j)$ bidimensionale è ottenuta saturando la $p_X(\mathbf{x})$ sulle dimensioni diverse da i e j .

E' ora il turno di estendere i concetti probabilistici allo spazio dei segnali.

6.3 Processi stazionari ed ergodici

Dopo aver descritto come caratterizzare statisticamente i valori di v.a. singole o vettoriali, occupiamoci del caso in cui si voglia descrivere da un punto di vista probabilistico *un intero segnale*, la cui reale identità non sia nota a priori²⁶.

Un segnale siffatto viene detto *membro* (o realizzazione) di un *processo aleatorio*, e può essere indicato come $x(t, \theta)$, mediante una descrizione formale che prevede una coppia di insiemi: il primo di questi è l'insieme \mathcal{T} degli istanti temporali (tipicamente entro un intervallo) su cui sono definiti i membri del processo, mentre il secondo è relativo ad una variabile aleatoria Θ , i cui valori θ identificano ognuno una particolare realizzazione del processo. Pertanto, una specifica realizzazione θ_i della v.a. Θ *indicizza* il processo, i cui membri $x(t, \theta_i)$, con $t \in \mathcal{T}$, sono noti solo dopo la conoscenza di $\theta_i \in \Theta$ (²⁷). Il processo aleatorio è quindi definito come l'insieme dei segnali $\{x(t, \theta)\}$,

²⁶Chiaramente, la maggioranza dei segnali trasmessi da apparati di TLC sono di questo tipo.

²⁷Per fissare le idee, conduciamo parallelamente al testo un esempio "reale" in cui il processo aleatorio è costituito da.... la selezione musicale svolta da un DJ. L'insieme \mathcal{T} sarà allora costituito dall'orario di apertura delle discoteche (dalle 22 all'alba ?), mentre in θ faremo ricadere tutte le caratteristiche di variabilità (umore del dj, i dischi che ha in valigia, la discoteca in cui ci troviamo, il giorno della

con $t \in \mathcal{T}$ e $\theta \in \Theta$.

Se viceversa fissiamo un particolare istante temporale t_j , il valore $x(t_j, \theta)$ è una variabile aleatoria, la cui realizzazione dipende da quella di $\theta \in \Theta$; pertanto, è definita la densità $p_X(x(t_j))$ (indipendente da θ), che possiamo disegnare in corrispondenza dell'istante t_j in cui è prelevato il campione²⁸; a tale riguardo, si faccia riferimento alla figura 6.3, che mostra le densità di probabilità definite e riferite a membri di un processo.

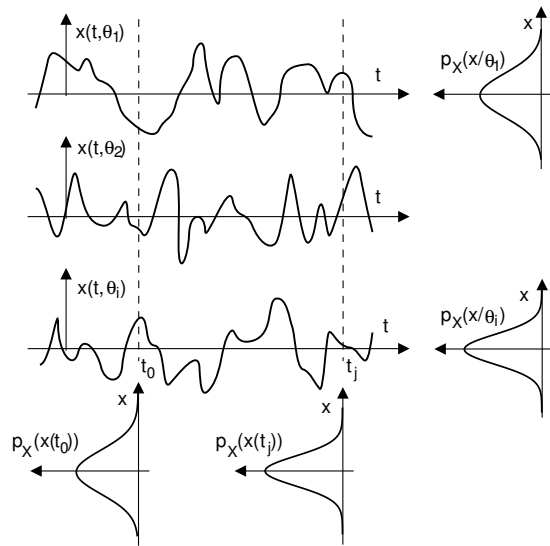


Figura 6.3: Un processo *non ergodico*

6.3.1 Momento come media di insieme

Consiste nel *valore atteso* di una *potenza n-esima* dei valori del segnale, eseguito rispetto alla variabilità dovuta a Θ , ed è pertanto calcolata come

$$m_X^{(n)}(t_j) = E_{\Theta} \{x^n(t_j, \theta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n(t_j, \theta) p_{\Theta}(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x(t_j)) dx$$

in cui l'ultima eguaglianza indica come la variabilità statistica di x^n sia completamente descritta dalla d.d.p. $p_X(x(t_j))$ di $x(t_j, \theta)$ al variare di $\theta \in \Theta$, mostrata in basso in fig. 6.3. Notiamo che secondo questo approccio, la media di insieme dipende dall'istante t_j in cui è prelevato un valore²⁹.

6.3.2 Media temporale

In alternativa, possiamo fissare una particolare realizzazione θ_i di Θ , e quindi concentrare l'attenzione su di un singolo membro $x(t, \theta_i)$, che è ora un segnale *certo*³⁰: per esso possono quindi essere calcolate le *medie temporali*, indicate con una linea sopra alla quantità di cui si calcola la media $\overline{(\cdot)}$:

$$\overline{x^n(t, \theta_i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^n(t, \theta_i) dt$$

settimana...).

²⁸Nell'esempio, $x(t_0, \theta)$ è il valore di pressione sonora rilevabile ad un determinato istante (es. le 23.30) al variare di θ (qualunque dj, discoteca, giorno...).

²⁹Ad esempio, se in tutte le serate il volume aumenta progressivamente nel tempo, la $p_X(x(t_j))$ si *allargherà* per t_j crescenti.

³⁰ $x(t, \theta_i)$ rappresenta, nel nostro esempio, l'intera selezione musicale (detta *serata*) proposta da un ben preciso dj, in un preciso locale, un giorno ben preciso.

In particolare, troviamo il *valore medio* (pag. 14)

$$\overline{x(t, \theta_i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, \theta_i) dt$$

e la *potenza*³¹ (eq. (1.1)) (o *media quadratica*)

$$\overline{x^2(t, \theta_i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t, \theta_i) dt$$

Notiamo che una generica media temporale:

- non dipende dal tempo;
- è una variabile aleatoria, in quanto dipende dalla realizzazione di Θ .

6.3.3 Media temporale calcolata come media di insieme

L'estrazione da $x(t, \theta_i)$ di un valore ad un istante casuale $t \in \mathcal{T}$ definisce una ulteriore variabile aleatoria, descritta dalla densità di probabilità (condizionata) $p_X(x/\theta_i)$, che disegniamo a fianco dei singoli membri mostrati in fig. 6.3. Qualora la $p_X(x/\theta_i)$ sia nota, le medie temporali di ordine n possono essere calcolate (per quel membro) come i rispettivi momenti:

$$\overline{x^n(t, \theta_i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^n(t, \theta_i) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x/\theta_i) dx = E_{X/\Theta=\theta_i} \{x^n\} = m_X^{(n)}(\theta_i)$$

Ciò equivale infatti ad effettuare una media ponderata, in cui ogni possibile valore di x è pesato per la sua probabilità $p_X(x/\theta_i) dx$ (vedi l'esempio a pag. 151).

6.3.4 Processo stazionario

Qualora $p_X(x(t_j))$ non dipenda da t_j , ma risulti $p_X(x(t_j)) = p_X^{\mathcal{T}}(x)$ per qualsiasi $t_j \in \mathcal{T}$, il processo $\{x(t, \theta)\}$ è detto stazionario³² *in senso stretto*. In tal caso tutte le medie di insieme non dipendono più dal tempo, ossia $m_X^{(n)}(t) = m_X^{(n)}$ per $\forall t \in \mathcal{T}$, e le $p_X(x(t_j))$ in basso in fig. 6.3 sono tutte uguali.

Se invece sono solamente le prime due medie di insieme $m_X(t)$ e $m_X^{(2)}(t)$ a non dipendere da t , il processo $\{x(t, \theta)\}$ è detto stazionario *in media* ed *in media quadratica*, od anche stazionario *in senso lato*³³. Nel caso di un processo gaussiano (§ 6.5.3), la stazionarietà in senso lato implica quella in senso stretto³⁴.

³¹ $m_X^{(2)}(\theta_i)$ in questo caso rappresenta la potenza media con cui è suonata la musica nella particolare serata θ_i .

³²La "serata in discoteca" stazionaria si verifica pertanto se non mutano nel tempo il genere di musica, il volume dell'amplificazione... o meglio se eventuali variazioni in alcune particolari discoteche-realizzazioni sono compensate da variazioni opposte in altrettanti differenti membri del processo.

³³In questo caso la $p_X(x(t))$ non è nota, oppure non è stazionaria, ma le maggiori applicazioni della proprietà di stazionarietà dipendono solo da $m_X(t)$ e $m_X^{(2)}(t)$, che possono essere misurati (o per meglio dire *stimati*, vedi § 6.6.3.1), e risultare stazionari anche se $p_X(x(t))$ non lo è.

³⁴Infatti la d.d.p. gaussiana è completamente definita qualora siano noti i valori di media e (co)varianza, vedi §§ 6.2.4 e 6.5.

Supponiamo ora di suddividere il membro $x(t, \theta_i)$ in più intervalli temporali, e di calcolare per ciascuno di essi le medie temporali, limitatamente al relativo intervallo. Nel caso in cui queste risultino uguali tra loro, e di conseguenza uguali alla media temporale $m_X^{(n)}(\theta_i)$, il membro è (individualmente) stazionario³⁵. Ovviamente, se tutti i membri sono individualmente stazionari, lo è anche il processo a cui appartengono.

6.3.5 Processo stazionario ed ergodico

Questa importante sottoclasse di processi stazionari identifica la circostanza che *ogni membro del processo è statisticamente rappresentativo di tutti gli altri*. Ciò si verifica quando la densità di probabilità (a destra in fig. 6.3) dei valori estratti da un singolo membro $p_X(x/\theta_i)$ è sempre la stessa, indipendentemente dal particolare θ_i , ottenendo in definitiva $p_X(x/\theta_i) = p_X^\ominus(x)$ indipendentemente dalla realizzazione e , per la stazionarietà, anche $p_X(x/t_j) = p_X^\top(x)$, e dunque $p_X^\ominus(x) = p_X^\top(x) = p_X(x)$. In questo caso le medie temporali $m_X^{(n)}(\theta_i)$, calcolabili come momenti sulla singola realizzazione come illustrato al § 6.3.3, sono identiche per tutti i membri³⁶ θ_i , ed identiche anche alle medie di insieme $m_X^{(n)}(t_j)$ calcolate per un qualunque istante. Enunciamo pertanto la definizione:

Un processo stazionario è ergodico se la media temporale calcolata su di una qualunque realizzazione del processo, coincide con la media di insieme relativa ad una variabile aleatoria estratta ad un istante qualsiasi (per la stazionarietà) dall'insieme dei suoi membri.

Esempio: la potenza di segnale Mostriamo come il calcolo della potenza di un membro di un processo ergodico sia equivalente a quello del momento di 2° ordine del processo:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_X(\theta) &= \overline{x^2(\theta)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t, \theta) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x/\theta) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx = m_X^{(2)} = E\{x^2\} = \mathcal{P}_X \end{aligned}$$

Questo risultato mostra come sia possibile calcolare la potenza di una realizzazione di un processo, senza conoscere la forma d'onda dei suoi membri.

Esempio: il valore medio A pag. 14 è stato definito come $\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$, ovvero come una media *temporale* del primo ordine. Qualora $x(t)$ sia membro di un processo ergodico, tale valore può esser calcolato anche come *valore atteso* di $x(t)$, ovvero momento di *primo ordine* m_x della v.a. x estratta dal processo:

$$\begin{aligned} \bar{x}(\theta) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, \theta) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x/\theta) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = E\{x\} = m_x \end{aligned}$$

³⁵Questo accade se la selezione musicale di una particolare serata si mantiene costante (es. solo raggamuffin) oppure variata ma in modo omogeneo (es. senza tre "lenti" di fila).

³⁶Volendo pertanto giungere alla definizione di una serata *ergodica* in discoteca, dovremmo eliminare quei casi che, anche se individualmente stazionari, sono decisamente "fuori standard" (tutto metal, solo liscio...).

Potenza, varianza, media quadratica e valore efficace In particolare osserviamo che in base alla (6.9) possiamo scrivere

$$\mathcal{P}_X = m_X^{(2)} = \sigma_x^2 + (m_x)^2 \quad (6.15)$$

e per i segnali a media nulla ($m_x = 0$) si ottiene $\mathcal{P}_X = \sigma_x^2$; in tal caso il valore efficace (pag. 15) $\sqrt{\mathcal{P}_X}$ coincide con la deviazione standard σ_x . La radice della potenza è inoltre spesso indicata come *valore RMS* (ROOT MEAN SQUARE), definito come $x_{RMS} = \sqrt{\overline{x^2(t)}}$, ovvero la radice della *media quadratica* (nel tempo). Se il segnale è a media nulla, x_{RMS} coincide quindi con il valore efficace; se $x(t)$ è membro di un processo ergodico a media nulla, x_{RMS} coincide con la deviazione standard.

6.3.6 Riassumendo

- Se un processo è ergodico, è anche stazionario, ma non il viceversa. Esempio: se $x(t, \theta) = C_\theta$ pari ad una costante (aleatoria), allora è senz'altro stazionario, ma $p_X(x/\theta) = \delta(x - C_\theta)$, e quindi non ergodico.
- Se un processo è ergodico è possibile:
 - calcolare le medie di insieme in forma di medie temporali a partire da una singola realizzazione *oppure*
 - ottenere le medie temporali di una qualunque realizzazione a partire dalle medie di insieme, disponendo della statistica $p_X(x)$, e *anche*
 - stimare la d.d.p. a partire dall'istogramma dei valori estratti da un qualunque membro.
- Se l'eguaglianza tra medie di insieme e temporali sussiste solo fino ad un determinato ordine e non oltre, il processo *non* è ergodico *in senso stretto*. Per ciò che concerne le telecomunicazioni, è spesso sufficiente la proprietà di ergodicità *in senso lato*, ovvero limitata al 2° ordine, che garantisce $\overline{x(t)} = E\{x\} = m_x$; $\overline{x^2(t)} = E\{x^2\} = m_x^{(2)}$.

6.3.7 Processo ad aleatorietà parametrica

A volte può convenire pensare un segnale certo come rappresentante di una intera classe di segnali che definiscono un processo ergodico, in modo da poter calcolare le medie temporali che lo riguardano mediante delle medie di insieme. In tal caso si rientra nella categoria di processi *parametrici* $\{x(t, \theta)\}$ in cui la v.a. θ compare in modo *esplicito* nella espressione analitica dei segnali membri. Ad esempio, il segnale periodico

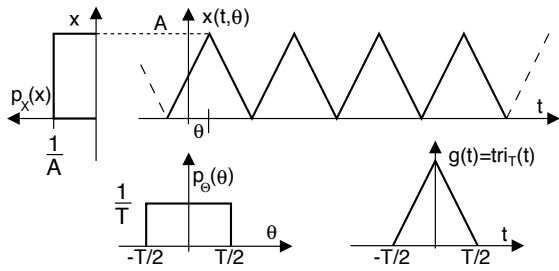
$$x(t, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot g_T(t - \theta - nT) \quad (6.16)$$

rappresentato alla figura seguente, ha come parametro aleatorio un ritardo θ , che ne rende imprecisata la fase iniziale. Se θ è (come in figura) una v.a. a distribuzione uniforme tra $-T/2$ e $T/2$ (ovvero $p_\Theta(\theta) = \frac{1}{T} \text{rect}_T(\theta)$), allora il processo (6.16) risulta

stazionario ed ergodico. Infatti scegliendo ad esempio una $g(t) = \text{tri}_T(t)$ la d.d.p. per una v.a. estratta dal processo ad un istante qualunque diviene pari a³⁷

$$p_X(x) = \frac{1}{A} \text{rect}_A(x - \frac{A}{2}) \quad (6.17)$$

uguale cioè alla d.d.p. ottenibile estraendo una v.a. da un membro qualunque.



Esercizio Possiamo verificare la coincidenza tra medie temporali e di insieme, osservando che il valor medio $m_X = E\{x\}$ di un qualunque membro di (6.16) è pari alla media temporale $\frac{A}{2}$, la varianza è pari a quella della d.d.p. uniforme $\sigma_X^2 = \frac{A^2}{12}$ (§ 6.2.3), e la potenza vale³⁸

$$\mathcal{P}_X = \sigma_X^2 + m_X^2 = \frac{A^2}{12} + \frac{A^2}{4} = \frac{4A^2}{12} = \frac{A^2}{3} \quad (6.18)$$

Se la $p_\Theta(\theta)$ fosse stata diversa, il processo avrebbe perso stazionarietà e quindi ergodicità. Infatti, ponendo ad esempio $p_\Theta(\theta) = \frac{2}{T} \text{rect}_{T/2}(\theta)$ e volendo ottenere una media di insieme considerando i possibili membri del processo nell'intervallo temporale $-T/4 < t < T/4$, tutte le realizzazioni avrebbero valori maggiori del valor medio $\frac{A}{2}$.

Processo armonico Si tratta di un processo ad aleatorietà parametrica, i cui membri hanno espressione

$$x(t, \theta) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

dove θ è una v.a. uniforme con d.d.p. $p_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \text{rect}_{2\pi}(\theta)$. In tal caso il processo è stazionario ed ergodico, ed a pag. 166 si dimostra che un valore estratto a caso da un membro qualsiasi è una v.a. con d.d.p.

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}} \quad (6.19)$$

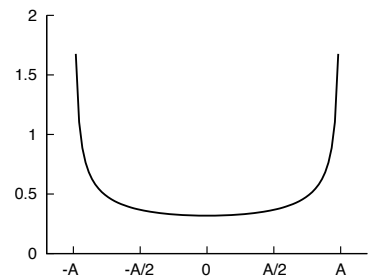


Figura 6.4: Densità di prob. per un processo armonico

mostrata in figura 6.4, la cui sagoma è detta *a vasca da bagno* (BATH TUBE).

³⁷La (6.17) non è frutto di un calcolo, bensì di un ragionamento: l'impulso $g_T(t)$ triangolare non "passa più tempo" su di un valore o su di un altro, ma passa *lo stesso* tempo su un qualunque valore tra 0 ed A. Pertanto i diversi membri del processo, ognuno relativo ad un diverso θ , qualora valutati ad un medesimo istante t , assumono uno qualsiasi dei valori tra 0 ed A con d.d.p. uniforme.

³⁸Verifichiamo per esercizio che il valore (6.18) corrisponda a quello calcolato come media temporale. Calcoliamo innanzitutto l'energia \mathcal{E}_g di $g(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_g &= 2 \int_0^{-T/2} [g(t)]^2 dt = 2 \int_0^{-T/2} \left[1 - \frac{2t}{T}\right]^2 dt = 2 \int_0^{-T/2} \left[1 + \frac{4t^2}{T^2} - \frac{4t}{T}\right]^2 dt = \\ &= 2 \left(\frac{T}{2} + \frac{4}{T^2} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{-T/2} - \frac{4}{T} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{-T/2} \right) = T + \frac{8}{T^2} \frac{T^3}{3 \cdot 8} - \frac{8}{T} \frac{T^2}{2 \cdot 4} = T + \frac{T}{3} - T = \frac{T}{3} \end{aligned}$$

da cui la potenza di $x(t)$ si ottiene come $\mathcal{P}_X = A^2 \cdot \mathcal{E}_g/T = \frac{A^2}{3}$.

Segnale dati Anticipiamo l'espressione (15.1) a cui aggiungiamo un elemento di indeterminazione per quanto riguarda la relazione temporale tra l'origine dei tempi e gli istanti caratteristici, scrivendo

$$x(t, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT + \theta) \quad (6.20)$$

con θ v.a. a distribuzione uniforme tra $\pm \frac{T}{2}$, in modo da rendere il processo ergodico³⁹. Mentre il calcolo della sua densità di potenza sarà affrontato al § 7.2.5, qui ci limitiamo ad osservare che, considerando i valori a_n come determinazioni di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite, la densità di probabilità di $x(t)$ può euristicamente essere desunta dalla analisi del corrispondente diagramma ad occhio (§ 15.1.2.3). Ad esempio, nel caso di $g(t)$ rettangolare e a_n a due livelli equiprobabili (vedi fig. 15.3 a pag. 444) la $p_X(x)$ sarà costituita da due impulsi di area $1/2$, mentre nei casi di limitazione in banda e/o adozione di un impulso con caratteristica a coseno rialzato, la stessa assumerà un andamento continuo⁴⁰.

6.4 Trasformazione di v.a. e cambio di variabili

Quando più v.a. si combinano con leggi diverse dalla somma, il risultato del § 6.2.5 non è più sufficiente a fornire una espressione per la d.d.p. risultante. Illustriamo quindi il procedimento analitico generale, necessario ad ottenere una espressione per la d.d.p. di una generica funzione di v.a.

6.4.1 Caso unidimensionale

Consideriamo una prima v.a. X , ed una seconda Y da essa derivata per mezzo della relazione $y = f(x)$, che si applica alle determinazioni x di X . Nel caso in cui $f(x)$ sia monotona non decrescente (vedi fig. 6.5-a), e indicando con $x = g(y)$ la corrispondente funzione inversa, la caratterizzazione probabilistica di Y nei termini della sua d.d.p. $p_Y(y)$ può essere ottenuta a partire da quella di X nei termini della funzione di distribuzione di Y , come

$$F_Y(y) = Pr\{Y \leq y\} = Pr\{X \leq g(y)\} \quad (6.21)$$

e calcolando poi $p_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$. D'altra parte, qualora la trasformazione $f(x)$ non sia monotona come nel caso mostrato in fig. 6.5-b), la (6.21) non è più usabile, in quanto i valori $y \leq \tilde{y}$ hanno origine da due diversi intervalli di X , in corrispondenza dei quali l'area sottesa dalla $p_X(x)$ individua la probabilità cercata.

Procedendo con ordine, trattiamo prima il caso di $f(x)$ monotona crescente come in fig. 6.5-a), in cui per ogni valore di \tilde{y} esiste un solo intervallo di $\tilde{X} \subset X$ tale che

³⁹In assenza del parametro θ , e considerando la sequenza aleatoria degli a_n stazionaria ed ergodica, $x(t, \theta = 0)$ costituisce un processo *ciclostazionario* in senso stretto (vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Cyclostationary_process), ossia per il quale le medie di insieme di qualsiasi ordine sono periodiche di periodo T . La presenza della v.a. uniforme θ rende $x(t, \theta)$ un processo stazionario, ed anche ergodico.

⁴⁰In una futura edizione, potrei calcolare le ddp corrispondenti ai diagrammi ad occhio di fig. 15.8

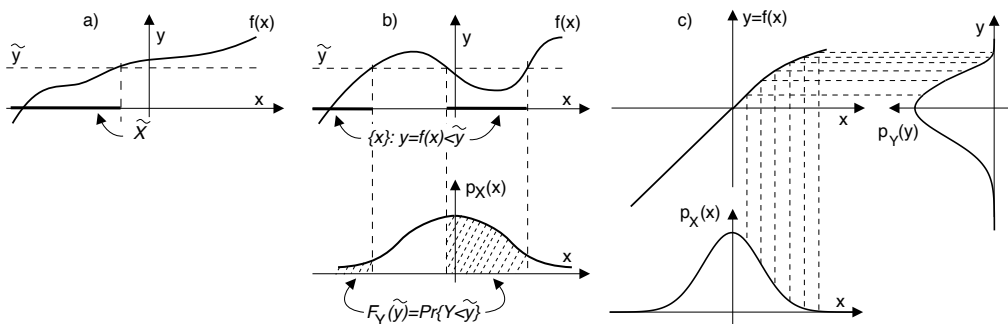


Figura 6.5: Trasformazioni tra variabili aleatorie

$y = f(x)|_{x \in \tilde{X} \leq \tilde{y}}$, e la (6.21) può essere riscritta come

$$F_Y(y) = Pr\{X \leq g(y)\} = F_X(x = g(y))$$

che, derivata, permette di giungere alla espressione che consente il calcolo della $p_Y(y)$:

$$p_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(x)}{dx} \Big|_{x=g(y)} \frac{dg(y)}{dy} = p_X(g(y)) \frac{dg(y)}{dy} \quad (6.22)$$

La (6.22) indica che la nuova v.a. $y = f(x)$ possiede una d.d.p. pari a quella di x , calcolata con argomento pari alla funzione inversa $x = g(y)$, moltiplicata per la derivata di $g(y)$. La d.d.p. della v.a. risultante si presta anche ad un processo di costruzione grafica, come esemplificato in fig. 6.5-c).

Esempio Determinare $p_Y(y)$, qualora risulti $y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{con } x \leq 0 \\ x^2 & \text{con } x > 0 \end{cases}$, nel caso in cui

$p_X(x) = \frac{1}{\Delta} \text{rect}_{\Delta}(x)$. Osserviamo innanzitutto che tutte le determinazioni

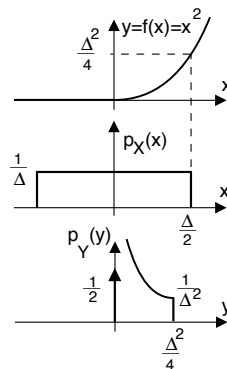
$x \leq 0$ danno luogo ad un unico valore $y = 0$; pertanto si ottiene

$p_Y(0) = \frac{1}{2} \delta(y)$. Per $0 < y \leq \frac{\Delta^2}{4}$ (corrispondente ad $0 < x \leq \frac{\Delta}{2}$)

si applica la teoria svolta, ottenendo $F_Y(y) = Pr\{x \leq \sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y})$, e dunque

$$p_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(x)}{dx} \Big|_{x=\sqrt{y}} \frac{d(x = \sqrt{y})}{dy} = \frac{1}{\Delta} \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

in cui l'ultima eguaglianza tiene conto che $\frac{dF_X(x)}{dx} = p_X(x)$, che vale $\frac{1}{\Delta}$ per tutti gli x nell'intervallo in considerazione. L'ultima curva mostra la d.d.p risultante per questo esempio.



Se invece la $f(x)$ è monotona *ma decrescente*, consideriamo semplicemente che le probabilità $Pr\{x \leq X \leq x + dx\} = p_X(x) dx$ e $Pr\{y \leq Y \leq y + dy\}|_{y=f(x)} = p_Y(y) dy$ devono essere uguali, ma dato che con $f(x)$ decrescente ad un dx positivo corrisponde un dy negativo, prendiamo il valore assoluto di entrambi: $p_X(x) |dx| = p_Y(y) |dy|$; sostituendo quindi x con la sua funzione inversa $x = g(y)$ e ri-arrangiando si ottiene

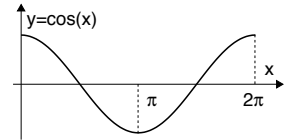
$$p_Y(y) = p_X(g(y)) \left| \frac{dg(y)}{dy} \right| \quad (6.23)$$

che è la versione più generale del risultato (6.22).

Esempio Qualora $f(x)$ sia una relazione lineare $y = ax + b$ possiamo scrivere $x = g(y) = \frac{y-b}{a}$ e $\frac{d}{dy}g(y) = \frac{1}{a}$; pertanto la (6.23) si traduce in $p_Y(y) = \frac{1}{|a|}p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$, ovvero la nuova v.a. Y possiede una d.d.p. con lo stesso andamento di $p_X(x)$, ma traslata di b e compressa o espansa di a .

Trasformazione non monotona In questa circostanza due o più valori di X producono lo stesso valore di Y (vedi fig. 6.5-b)), e non esiste una funzione inversa $x = g(y)$ univoca. In tal caso si suddivide la variabilità di X in più intervalli i , in modo che per ciascuno di essi possa definirsi una $f_i(x)$ monotona: tali intervalli individuano eventi mutuamente esclusivi, e dunque si può calcolare il lato destro di (6.23) per ogni funzione inversa $g_i(y) = f_i^{-1}(x)$, e quindi sommare i risultati per ottenere $p_Y(y)$.

Esempio Consideriamo la funzione $y = f(x) = \cos(x)$ in cui x è una v.a. con d.d.p. uniforme $p_X(x) = \frac{1}{2\pi}rect_{2\pi}(x - \pi)$. Dato che per $0 \leq x \leq \pi$ il coseno è decrescente, mentre per $\pi \leq x \leq 2\pi$ è crescente, applichiamo la (6.23) su questi due intervalli. Per il primo si ha $x = g_1(y) = \arccos(y)$, la cui derivata vale $\frac{dg_1(y)}{dy} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$, mentre $p_X(x)$ è costante e pari a $\frac{1}{2\pi}$ indipendentemente da x , dunque $p_X(g_1(y)) = \frac{1}{2\pi}$. Per il secondo intervallo la funzione inversa vale ancora $x = g_2(y) = \arccos(y)$, così come medesime sono le altre considerazioni. Pertanto si ottiene



$$\begin{aligned}
 p_Y(y) &= p_X(g_1(y)) \left| \frac{dg_1(y)}{dy} \right| + p_X(g_2(y)) \left| \frac{dg_2(y)}{dy} \right| = \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \right| = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}
 \end{aligned}$$

6.4.2 Caso multidimensionale

Descriviamo questo caso per mezzo del vettore di v.a. $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, a cui è associata una d.d.p. congiunta $p_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, e di un secondo vettore aleatorio \mathbf{Y} dipendente dal primo mediante la trasformazione $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, ovvero

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \tag{6.24}$$

Se esiste la relazione inversa $\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{Y}) = \mathbf{G}(\mathbf{Y})$ univoca, composta dall'insieme di funzioni $x_i = g_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$ per $i = 1, 2, \dots, n$, allora per la d.d.p di \mathbf{Y} sussiste⁴¹ un risultato formalmente molto simile a quello valido nel caso monodimensionale, e cioè

$$p_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_X(\mathbf{X} = \mathbf{G}(\mathbf{Y})) \cdot |\det(\mathbf{J}(\mathbf{X}/\mathbf{Y}))| \tag{6.25}$$

⁴¹La dimostrazione segue le medesime linee guida del caso precedente, ed è impostata sulla base della considerazione che la funzione di distribuzione di \mathbf{Y} , calcolata in un generico punto $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)$, rappresenta la probabilità che \mathbf{Y} appartenga alla regione (dominio) delimitata dal punto $\tilde{\mathbf{y}}$, indicata con $\mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{y}}}$:

$$F_Y(\tilde{\mathbf{y}}) = Pr\{\mathbf{Y} \leq \tilde{\mathbf{y}}\} = Pr\{\mathbf{Y} \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{y}}}\}$$

in cui $p_X(\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}))$ è la d.d.p. di \mathbf{X} calcolata con argomento dipendente da \mathbf{Y} , e $|\det(\mathbf{J}(\mathbf{X}/\mathbf{Y}))|$ è il modulo del *jacobiano* della trasformazione inversa \mathbf{G} , ossia del determinante della matrice costituita da tutte le derivate parziali di \mathbf{G} , detta *jacobiana*⁴²:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}/\mathbf{Y}) = \left[\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

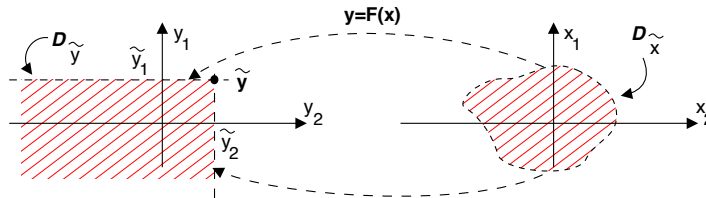
Un esempio di applicazione della teoria appena discussa viene svolta al § 14.4, allo scopo di descrivere in termini probabilistici il problema della detezione di una sinusoide immersa nel rumore; tale descrizione è quindi usata al § 6.6.1 per impostare il problema della decisione statistica. Un altro caso applicativo si riferisce alla d.d.p. del prodotto tra v.a. (pag. 211).

6.5 Gaussiana multidimensionale

Questo termine individua una v.a. vettoriale \mathbf{X} ottenuta a partire da n v.a. marginali x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ tutte gaussiane. La d.d.p. *congiunta* in questo caso è espressa in modo formalmente simile a quello del caso unidimensionale, come

$$p_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma_x)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) \Sigma_x^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^\top \right\} \quad (6.26)$$

in cui $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ è il vettore riga che rappresenta le n v.a. marginali, \mathbf{m}_x è il vettore dei rispettivi valori medi, Σ_x è la *matrice di covarianza* (vedi § 7.1.2) i cui $n \times n$ elementi risultano pari a $\sigma_{x_i, x_j} = E\{(x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j})\}$, e $^\top$ rappresenta l'operatore di



Alla stessa regione $\mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{y}}}$, ne corrisponde una diversa $\mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{x}}}$ nello spazio \mathbf{X} , tale che per ogni valore $\mathbf{x}^\circ \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{x}}}$ risulti $\mathbf{y}^\circ = \mathbf{F}(\mathbf{x}^\circ) \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{y}}}$. Con queste posizioni, la $F_Y(\tilde{\mathbf{y}}) = Pr\{\mathbf{Y} \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{y}}}\}$ si calcola a partire dalla d.d.p. $p_X(\mathbf{x})$, integrata sul dominio $\mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{x}}}$:

$$F_Y(\tilde{\mathbf{y}}) = Pr\{\mathbf{X} \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{x}}}\} = \int_{\mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{x}}}} p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Infine, osservando che

$$p_Y(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\partial^n F_Y(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_n}$$

si ottiene il risultato mostrato.

⁴² $\mathbf{J}(\mathbf{X}/\mathbf{Y})$ è indicata come *matrice jacobiana*, ed il suo determinante come *jacobiano*, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Matrice_jacobiana

trasposizione. In tal caso le v.a. marginali x_i vengono dette *congiuntamente gaussiane*, e la conoscenza di \mathbf{m}_x e Σ_x ne definisce in modo *completo* la densità di probabilità. Per un approfondimento delle proprietà analitiche di Σ_x , si veda il § 6.7.3.

Notiamo che il termine $1/\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma_x)}$ rappresenta l'altezza di $p_X(\mathbf{x})$ per $\mathbf{x} = \mathbf{m}_x$, in cui l'esponente di (6.26) si annulla. Per $\mathbf{x} \neq \mathbf{m}_x$ lo stesso esponente è una *forma quadratica* (pag. 186) sempre positiva, e che cresce all'aumentare di $|\mathbf{x} - \mathbf{m}_x|$.

Esempio In figura 6.6-a) è rappresentato il grafico 3D di una d.d.p. gaussiana bidimensionale

$p_{XY}(x, y)$, con $\mathbf{m} = (0, 1)$ e $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$: si può notare l'asimmetria legata ai valori $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, e la centratura dovuta ad $m_y \neq 0$. La fig. 6.6-b) mostra la stessa d.d.p. da un punto di vista corrispondente agli assi, mentre la fig. 6.6-c) ne riporta le *curve di livello*, che mostrano come la forma quadratica dell'esponente determini per la superficie di $p_{XY}(x, y)$ dei contorni *ellittici*, in cui la lunghezza degli assi delle ellissi è legata a σ_x e σ_y , mentre l'inclinazione dipende dalla covarianza σ_{xy} .

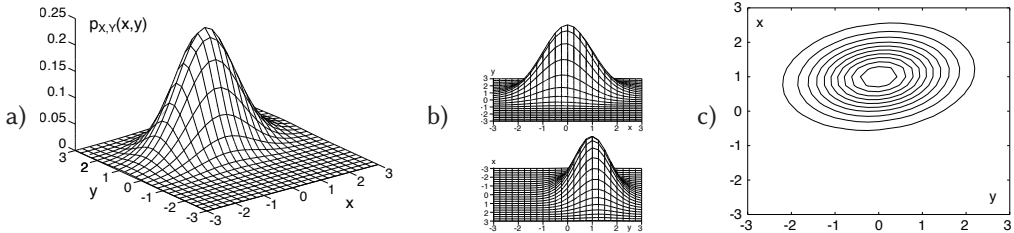


Figura 6.6: a) - d.d.p. gaussiana bidimensionale; b) - vista frontale e laterale; c) - curve di livello

6.5.1 Indipendenza statistica per v.a. gaussiane incorrelate

Affrontiamo la dimostrazione di quanto affermato in fondo al § 7.1.2, ovvero che, *unicamente nel caso di v.a. congiuntamente gaussiane*, il sussistere di incorrelazione tra le stesse ne implica l'indipendenza statistica. Osserviamo infatti che nel caso in cui le v.a. marginali siano incorrelate, ossia $\sigma_{x_i x_j} = 0$ con $i \neq j$, la matrice di covarianza Σ_x risulta essere *diagonale*, così come la sua inversa, i cui elementi risultano in tal caso essere pari a $1/\sigma_{x_i}^2$; inoltre, si ottiene che $\det(\Sigma_x) = \prod_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2$. Pertanto in questo caso la (6.26) si esprime come

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \prod_{i=1}^n \sigma_{x_i}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_{x_i})^2}{\sigma_{x_i}^2} \right] \right\} \quad (6.27)$$

che evidentemente equivale al *prodotto* delle singole d.d.p. marginali⁴³

$$p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_i}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x_i - m_{x_i})^2}{\sigma_{x_i}^2} \right\}$$

Ma dato che questo risultato è proprio la definizione di indipendenza statistica (§ 7.1.2) tra le v.a. marginali, abbiamo ottenuto la dimostrazione cercata.

⁴³Si verifichi per esercizio che nel caso di una coppia di v.a. congiuntamente gaussiane, a media nulla ed uguale varianza, si ottiene l'espressione (14.11) di pag. 427.

Infine, osserviamo che nel caso in cui le v.a. marginali siano indipendenti, eguagliando l'esponente della (6.27) ad una costante si ottiene l'equazione di una ellisse riferita agli assi principali, ossia le curve di livello di fig. 6.6-c) si dispongono con gli assi paralleli a quelli del dominio descritto dal vettore aleatorio \mathbf{x} .

6.5.2 Trasformazione lineare di v.a. gaussiane

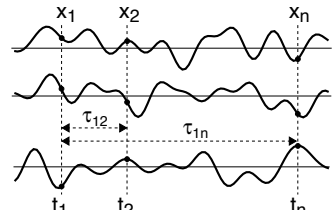
Un'altra importante proprietà di questo tipo di v.a. è la sua *invarianza* rispetto alle operazioni di combinazione lineare. Se infatti indichiamo con \mathbf{X} una v.a. gaussiana multivariata, e con $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{A}$ un secondo vettore aleatorio ottenuto mediante moltiplicazione di \mathbf{X} per una matrice \mathbf{A} , fornendo $y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i$, possiamo mostrare che anche \mathbf{Y} risulta descrivere una v.a. gaussiana. In accordo con la trattazione svolta al § 6.4.2, scriviamo la trasformazione inversa come $\mathbf{X} = \mathbf{Y}\mathbf{B}$ in cui $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, mentre per la d.d.p. della nuova v.a. \mathbf{Y} , in base alla (6.25) otteniamo $p_Y(\mathbf{y}) = p_X(\mathbf{x} = \mathbf{y}\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{B})$, in quanto la matrice jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{X}/\mathbf{Y})$ corrisponde alla trasposta della matrice \mathbf{B} stessa⁴⁴; inoltre, risulta che $\mathbf{m}_x = \mathbf{m}_y\mathbf{B}$. Sostituendo questi risultati nella (6.26) si ottiene pertanto

$$\begin{aligned} p_Y(\mathbf{y}) &= \frac{\det(\mathbf{B})}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma_x)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}\mathbf{B} - \mathbf{m}_y\mathbf{B}) \Sigma_x^{-1} (\mathbf{y}\mathbf{B} - \mathbf{m}_y\mathbf{B})^\top \right\} \\ &= \frac{\det(\mathbf{B})}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma_x)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y) \mathbf{B} \Sigma_x^{-1} \mathbf{B}^\top (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)^\top \right\} \end{aligned}$$

che è nuovamente l'espressione di una d.d.p. gaussiana multivariata \mathbf{y} , con media $\mathbf{m}_y = \mathbf{m}_x\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{m}_x\mathbf{A}$ e covarianza $\Sigma_y = \mathbf{A}^\top \Sigma_x \mathbf{A}$ ⁴⁵.

6.5.3 Processo gaussiano

Una importante classe di segnali aleatori è costituita da un processo stazionario in senso lato, la cui d.d.p. di primo ordine è gaussiana, e dai cui membri è possibile estrarre ad istanti diversi una o più v.a. gaussiane, che indichiamo collettivamente con il vettore aleatorio \mathbf{x} , descritto dalla d.d.p. multivariata (6.26).



La stazionarietà garantisce che il corrispondente vettore dei valori medi \mathbf{m}_x presenti tutti gli elementi uguali e pari a $m_x = E\{x(t)\}$, e che la matrice di covarianza Σ_x presenti elementi ottenuti valutando la covarianza $\sigma_x(\tau) = E\{(x(t) - m_x)(x(t + \tau) - m_x)\}$ del processo (vedi eq. 7.3) in corrispondenza degli intervalli temporali τ_{ij} tra gli istanti di campionamento nei quali sono estratte le coppie di v.a. marginali x_i e x_j descritte dalla gaussiana multivariata. In altre parole, i valori σ_{ij} che compaiono in Σ_x sono ottenuti come $\sigma_{ij} = \sigma_x(\tau_{ij})$, mentre su tutta la diagonale compare la varianza $\sigma_x^2 = \sigma_x(0)$.

Essendo il processo gaussiano, le due grandezze \mathbf{m}_x e Σ_x lo descrivono completamente, e se si verifica anche l'ipotesi di ergodicità, possono essere stimate a partire da una qualunque realizzazione, vedi eq. (6.28) a pag. 173.

⁴⁴Infatti, potendo scrivere $x_i = \sum_{j=1}^n b_{ji}y_j$, l'elemento i, j della matrice \mathbf{J} risulta pari a $j_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = b_{ji}$.

⁴⁵Infatti risulta $(\mathbf{B}\Sigma_x^{-1}\mathbf{B}^\top)^{-1} = (\mathbf{B}^\top)^{-1}\Sigma_x\mathbf{B}^{-1}$ che, essendo $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}$, fornisce il risultato per Σ_y .

6.6 Elementi di statistica

La statistica si occupa dell'utilizzo numerico di osservazioni e misure, il cui esito viene pensato come il risultato di un fenomeno aleatorio, al fine ad es. di prendere delle decisioni, o *inferire*⁴⁶ dai dati la plausibilità di ipotesi. Ma le cose *si rendono interessanti* per il fatto che

- potendo ripetere la misura e/o l'osservazione più volte, è possibile ridurre il margine di errore, e migliorare l'affidabilità della decisione;
- non è detto che la d.d.p. del fenomeno in esame sia completamente definita.

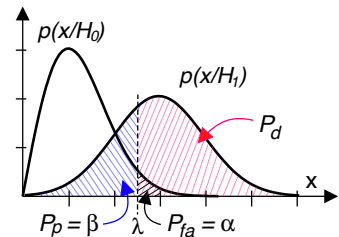
Ad esempio, la d.d.p. che produce i valori di osservazione può essere nota, a meno del valore dei suoi parametri media e varianza: compito della statistica è allora anche quello di *stimare* grandezze altrimenti ignote. Senza alcuna ambizione di affrontare compiutamente l'argomento, limitiamoci qui ad esporre brevemente questi particolari campi applicativi.

6.6.1 Test di verifica di ipotesi

Si tratta di stabilire se sia da ritenere valida una ipotesi H_1 , oppure se al contrario non si debba ritenere valida l'ipotesi *alternativa* H_0 (o ipotesi *nulla*); la decisione viene presa confrontando un grandezza di osservazione x (che *incarna* una realizzazione di v.a. X) con un valore-soglia (*di decisione*) λ : se $x > \lambda$ si decide per H_1 , mentre viceversa se $x < \lambda$ si decide per H_0 . Allo stesso tempo, si desiderano valutare i margini probabilistici che indicano il grado di affidabilità della decisione.⁴⁷

Sviluppiamo il ragionamento basandoci sui risultati dell'analisi svolta al § 14.4.2 e riassunti dalla figura a lato, che illustra come nei due casi H_0 ed H_1 la v.a. x presenti due diverse d.d.p. condizionate $p(x/H_0)$ e $p(x/H_1)$. Sempre in figura sono indicate le aree di valore P_d e $P_p = 1 - P_d$ rispettivamente pari alla probabilità (di *detezione*) che x superi la soglia λ nel caso in cui sia vera H_1 , e (di *perdita*) che non la superi. La P_{fa} è invece detta di prob. di *falso allarme* in quanto rappresenta la prob. che $x > \lambda$ nel caso in cui sia vera H_0 , ovvero di decidere per H_1 quando è vera H_0 , evento detto anche *errore di primo tipo* o *livello di significatività* del test, e indicata con α . La prob. di *detezione* P_d è invece detta *potenza* del test ed indicata come $1 - \beta$, dove β evidentemente è la probabilità di *perdita* P_p o *errore di secondo tipo*.

Conoscendo la d.d.p. $p(x/H_0)$ della grandezza di osservazione quando è vera H_0 , si pone la soglia λ ad un valore tale che $Pr(x > \lambda/H_0) = \int_{\lambda}^{\infty} p(x/H_0) dx = \alpha$, tale cioè da rendere $P_{fa} = \alpha$, in genere posto pari a 0.05 (ovvero il 5%). Qualora l'osservazione



⁴⁶Vedi ad es. http://it.wikipedia.org/wiki/Inferenza_statistica

⁴⁷Un modello del genere si applica tanto al caso di detezione di un bersaglio radar, che può essere presente o meno, quanto ai casi di una diagnosi medica a partire dai risultati degli esami clinici, a quello di attuare o meno un investimento finanziario a partire dall'andamento delle borse, a quello se prendere o meno l'ombrello prima di uscire di casa a partire dallo scrutare il cielo...

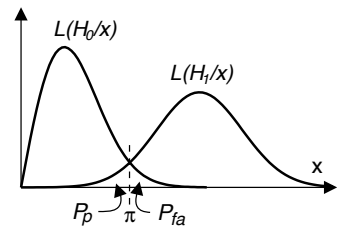
di $\check{x} > \lambda$ faccia decidere per H_1 , spesso al risultato si aggiunge anche la probabilità $\int_{\check{x}}^{\infty} p(x/H_0) dx$ detta *p-value*⁴⁸, che descrive quanto sia *poco probabile* osservare un valore di x che si discosti ancor più da H_0 di quanto non sia avvenuto per la “nostra” osservazione \check{x} , e che perciò indica meglio di α la significatività del test, ovvero la *discrepanza* tra i dati osservati e l’ipotesi nulla H_0 . Naturalmente, per tutte le possibili osservazioni $x > \lambda$ risulta un *p-value* $< \alpha$.

6.6.2 Funzione di verosimiglianza

Viene definita a partire da una probabilità condizionata, qualora nella stessa espressione siano *invertiti* i ruoli di evento condizionato e condizionante, nel senso che ora illustriamo. Rimanendo nel campo della verifica di ipotesi, il valore assunto dalle d.d.p. condizionate $p_X(\check{x}/H_0)$ e $p_X(\check{x}/H_1)$ qualora valutate in $x = \check{x}$ (l’osservazione) può essere interpretato come la *verosimiglianza* di H_0 ed H_1 una volta noto che $x = \check{x}$, ribaltando il ruolo delle ipotesi da quello di evento condizionante a quello di variabile indipendente. Ma attenzione, una verosimiglianza *non* è una probabilità, in quanto $p_X(\check{x}/H_0) + p_X(\check{x}/H_1) \neq 1$! La funzione di verosimiglianza (o *likelihood*) è spesso indicata con la lettera \mathcal{L} , in modo da poter scrivere $\mathcal{L}(H_{0,1}/\check{x}) = p_X(\check{x}/H_{0,1})$.

6.6.2.1 Decisione di massima verosimiglianza

Riprendendo il tema della verifica di ipotesi § 6.6.1, osserviamo che qualora la soglia di decisione λ *non sia* assegnata in base al livello di significatività $P_{fa} = \alpha$ desiderato, ma in corrispondenza della intersezione tra $p_X(x/H_0)$ e $p_X(x/H_1)$ come mostrato alla figura che segue, la decisione stessa è detta di *massima verosimiglianza*, dato che sceglie l’ipotesi H_i per la quale la funzione di verosimiglianza $\mathcal{L}(H_i/\check{x})$ è massima. Notiamo che un tale criterio di decisione comporta $P_p = P_{fa}$ solo nel caso in cui la d.d.p. sia la stessa per entrambe le ipotesi (vedi ad es. § 15.4.2); inoltre, anche in questo caso alla decisione effettuata si può *allegare* il relativo *p-value*. A volte, anziché confrontare tra di loro i valori di \mathcal{L} , se ne esegue *il rapporto*, decidendo quindi in base all’esito maggiore o minore di uno (vedi ad es. pag. 556).

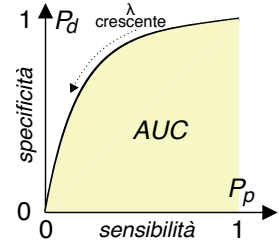


6.6.2.2 Curva operativa

Per quanto fino ad ora esposto, all’aumentare della soglia λ si assiste ad un aumento della P_{fa} a cui corrisponde una diminuzione della P_d , da cui la possibilità di tracciare una curva parametrica sui cui assi sono riportati entrambi i valori, al variare appunto di λ . Tale rappresentazione fu ideata ai fini della detezione radar e per tale motivo denominata ROC o *Receiver Operating Characteristic*, e da allora viene adottata anche in altri ambiti come ad esempio quelli clinici, psicologici, o meteorologici. In tali contesti la prob. di detezione P_d viene anche indicata come *specificità* del test o percentuale di *veri positivi*, mentre la prob. di perdita $P_p = 1 - P_{fa}$ è detta *sensibilità* o % di *falsi positivi*.

⁴⁸Vedi ad es. <http://en.wikipedia.org/wiki/P-value>

Ovviamente l'andamento esatto della curva, esemplificato a lato, dipende dalla conoscenza delle due probabilità condizionate $p_X(x/H_0)$ e $p_X(x/H_1)$. Il classificatore che si basa sulla osservazione x viene quindi giudicato come *migliore* o *peggiore* rispetto ad un secondo, basato su di un altro parametro y in base al computo dell'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse (AUC, *Area Under the Curve*), pari⁴⁹ alla probabilità che per un evento (a caso) della classe H_1 si osservi un valore x maggiore di quello per un evento (a caso) appartenente alla classe H_0 .



6.6.3 Stima di parametro

Nel caso in cui si conosca il tipo di v.a. che caratterizza il fenomeno aleatorio in esame, ma non i suoi parametri (es. media m_x e varianza σ_x^2), una sequenza di valori osservati $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ può essere usata per effettuare la *stima*, ovvero la valutazione sperimentale (ma imprecisa) del valore di \hat{m}_x e $\hat{\sigma}_x^2$. Indicando con θ il vero (incognito) valore di un parametro da stimare, il suo *stimatore* $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ dipende dalla variabilità di \mathbf{x} e quindi è *esso stesso* una v.a., che può essere caratterizzata nei termini della relativa d.d.p. $p_{\hat{\theta}}(\hat{\theta})$, nonché di media $m_{\hat{\theta}}$ e varianza $\sigma_{\hat{\theta}}^2$.

Anche se per uno specifico vettore di osservazione \mathbf{x} lo stimatore commette un errore

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta$$

desidereremmo che il valore atteso di tale errore fosse nullo, ovvero che

$$m_{\hat{\theta}} = E\{\hat{\theta}(\mathbf{x})\} = \theta$$

Qualora ciò si verifichi lo stimatore è detto *non polarizzato*⁵⁰, o *centrato*. Per quanto riguarda la varianza della stima

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2 = E\{(\hat{\theta}(\mathbf{x}) - m_{\hat{\theta}})^2\}$$

vorremmo che fosse la più piccola possibile. Uno stimatore non polarizzato e che consegue la minima varianza tra i possibili stimatori è detto *efficiente* ed eguaglia il limite di Cramér-Rao⁵¹; viene inoltre detto *consistente* se $\lim_{N \rightarrow \infty} Pr\{\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \theta\} = 1$, ovvero se all'aumentare della dimensione N del campione, *sicuramente* $\hat{\theta}(\mathbf{x}) \rightarrow \theta$. Infine, uno stimatore consistente è anche *asintoticamente normale* se all'aumentare di N la sua d.d.p. tende ad una gaussiana⁵² con valor medio θ , e varianza $\sigma_{\hat{\theta}}^2$ che si riduce come $1/N$.

Prendiamo dunque in esame una tra le diverse tecniche⁵³ che consentono di arrivare ad un procedimento di stima.

⁴⁹Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Receiver_operating_characteristic

⁵⁰Dall'inglese *unbiased*, ove con *bias* si intende una forma di *errore sistematico*. Diversi testi usano il termine *non distorto*, che qui non è adottato onde evitare confusioni concettuali con il cap. 8.

⁵¹Vedi ad es. http://it.wikipedia.org/wiki/Disuguaglianza_di_Cramér-Rao

⁵²Ad esempio, il teorema centrale del limite (§ 6.7.2) fa sì che la *media campionaria* (6.28) $\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$, in quanto somma di v.a. indipendenti e identicamente distribuite, tenda ad una v.a. gaussiana per $N \rightarrow \infty$.

⁵³Vedi ad es. http://en.wikipedia.org/wiki/Point_estimation

6.6.3.1 Stima di massima verosimiglianza

In questo caso il valore stimato è quello che massimizza la funzione di verosimiglianza (§ 6.6.2) calcolata in corrispondenza ai dati campionari \check{x} , ovvero $\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \{ \mathcal{L}(\theta/\check{x}) \}$. Ad esempio, nel caso in cui i valori osservati $\check{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ siano ottenuti da un fenomeno aleatorio caratterizzato da una d.d.p. gaussiana con media m_x e varianza σ_x^2 (incognite), e gli esperimenti siano statisticamente indipendenti, la funzione di verosimiglianza risulta⁵⁴

$$\mathcal{L}(m_x, \sigma_x^2/\check{x}) = p_X(\check{x}/m_x, \sigma_x^2) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - m_x}{\sigma_x}\right)^2\right\}$$

ma a questa espressione si preferisce il suo logaritmo naturale $L = \ln \mathcal{L}$, che essendo *monotono* non altera la massimizzazione cercata:

$$L(m_x, \sigma_x^2|\check{x}) = \ln \mathcal{L}(m_x, \sigma_x^2|\check{x}) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma_x^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m_x}{\sigma_x}\right)^2$$

Per trovare le stime \hat{m}_x e $\hat{\sigma}_x^2$ di massima (log)verosimiglianza, si eguagliano a zero le derivate parziali di L

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial m_x} &= \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^N (x_i - m_x) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_x^2} &= -\frac{N}{2} \frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{2\sigma_x^4} \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2 = 0 \end{aligned}$$

ottenendo gli stimatori (o *statistiche*)⁵⁵

$$\begin{cases} \hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i & \text{media campionaria} \\ \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m}_x)^2 & \text{varianza campionaria} \end{cases} \quad (6.28)$$

di cui ora discutiamo uno alla volta.

Stima della media La media campionaria \hat{m}_x risulta *non polarizzata*⁵⁶ e la sua varianza decresce⁵⁷ con N , ovvero

$$E\{\hat{m}_x\} = m_x; \quad \sigma_{\hat{m}_x}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N} \quad (6.29)$$

⁵⁴Vedi § 6.5.1 per l'espressione di una gaussiana multidimensionale.

⁵⁵Per quanto riguarda \hat{m}_x , imponendo $\sum_i (x_i - \hat{m}_x) = 0$ si perviene facilmente al risultato, mentre per $\hat{\sigma}_x^2$ l'eguaglianza a zero di $\frac{\partial L}{\partial \sigma_x^2}$ produce

$$\frac{1}{2\hat{\sigma}_x^4} \sum_i (x_i - \hat{m}_x)^2 = \frac{N}{2} \frac{1}{\hat{\sigma}_x^2} \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{\hat{\sigma}_x^2} \sum_i (x_i - \hat{m}_x)^2 = N$$

e dunque il risultato (6.28).

⁵⁶Infatti

$$E\{\hat{m}_x\} = E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{x_i\} = \frac{1}{N} N m_x = m_x$$

⁵⁷In questo caso riscriviamo \hat{m}_x come $\hat{m}_x = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$, consideriamo che la varianza di una somma di v.a. i.i.d. è la somma delle varianze (vedi § 7.5.2), e che $\sigma_{aX}^2 = a^2 \sigma_X^2$: pertanto si ottiene $\sigma_{\hat{m}_x}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_x^2}{N^2} = \frac{\sigma_x^2}{N}$.

risulta pertanto essere uno stimatore *consistente e asintoticamente normale*. In particolare

- la proprietà $\sigma_{\hat{m}_x}^2 = \sigma_x^2/N$ ci permette di ridurre a piacimento la variabilità della stima, ripetendo le osservazioni per un adeguato numero di volte;
- all'aumentare di N ed in presenza di indipendenza statistica tra i campioni, il teorema centrale del limite (§ 6.7.2) stabilisce che \hat{m}_x è una v.a. gaussiana, indipendentemente dalla natura della v.a. x da cui è estratto il campione.

Esercizio Si desidera stimare il valor medio \hat{m}_x di una v.a. x di cui si conosce il valore della relativa varianza $\sigma_x^2 = 4$; determinare la dimensione N del campione statistico affinché la varianza della stima sia pari a 0.1. Dalla seconda delle (6.29) risulta $N = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{\hat{m}_x}^2} = \frac{4}{0.1} = 40$ campioni della v.a.

Stima della varianza I calcoli per determinare il valore atteso $m_{\hat{\sigma}_x^2} = E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m}_x)^2\right\}$ della varianza campionaria $\hat{\sigma}_x^2$ passano prima per la dimostrazione⁵⁸ che $\sum_i (x_i - \hat{m}_x)^2 = \sum_i (x_i - m_x)^2 - N(\hat{m}_x - m_x)^2$, in modo da ottenere

$$\begin{aligned} m_{\hat{\sigma}_x^2} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{(x_i - m_x)^2\} - \frac{N}{N} E\{(\hat{m}_x - m_x)^2\} = \\ &= \frac{1}{N} N \sigma_x^2 - \frac{\sigma_x^2}{N} = \sigma_x^2 \frac{N-1}{N} \end{aligned}$$

dato che il primo termine corrisponde all'espressione della varianza di X , ed il secondo alla varianza di \hat{m}_x , calcolata prima. Il risultato ottenuto indica come la varianza campionaria si riveli uno stimatore *polarizzato*. Per questo, la formula dello stimatore (di massima verosimiglianza) della varianza viene ordinariamente sostituita dall'espressione

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m}_x)^2 \quad (6.30)$$

attuando così la *correzione di Bessel*⁵⁹.

6.6.4 Stima di intervallo

L'esercizio precedente conferma la proprietà di *consistenza* per la media campionaria, ma mette anche in luce come per dimensioni N del campione finite, la sua accuratezza sarà necessariamente limitata. Allora, dato che la stima del parametro θ sarà comunque

⁵⁸Occorre innanzitutto riscrivere $x_i - \hat{m}_x$ come $x_i - m_x + m_x - \hat{m}_x = (x_i - m_x) - (\hat{m}_x - m_x)$, in modo da ottenere $(x_i - \hat{m}_x)^2 = (x_i - m_x)^2 - 2(x_i - m_x)(\hat{m}_x - m_x) + (\hat{m}_x - m_x)^2$. Eseguendo ora la sommatoria su i si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_i (x_i - \hat{m}_x)^2 &= \sum_i (x_i - m_x)^2 - 2(\hat{m}_x - m_x) \sum_i (x_i - m_x) + \sum_i (\hat{m}_x - m_x)^2 \\ &= \sum_i (x_i - m_x)^2 - 2N(\hat{m}_x - m_x)^2 + N(\hat{m}_x - m_x)^2 = \sum_i (x_i - m_x)^2 - N(\hat{m}_x - m_x)^2 \end{aligned}$$

in quanto $\sum_i (x_i - m_x) = \sum_i x_i - \sum_i m_x = N\hat{m}_x - Nm_x = N(\hat{m}_x - m_x)$.

⁵⁹Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Correzione_di_Bessel

erronea, può invece avere interesse stimare entro quale intervallo (detto *intervallo di confidenza*) di valori (θ_1, θ_2) possa ricadere θ con sufficiente certezza, espressa quest'ultima dalla probabilità $Pr\{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\} = 1 - \alpha$, detta *livello di confidenza*, mentre α è la probabilità *di errore*.

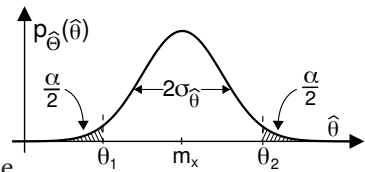
Intervallo per la media con varianza nota Nel caso in cui lo stimatore $\hat{\theta}$ sia espresso dalla media campionaria

$$\hat{\theta} = \hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

a pag. 174 si è osservato che per N sufficientemente elevato $\hat{\theta}$ è una v.a. gaussiana⁶⁰ con media $m_{\hat{\theta}} = m_x$ e deviazione standard $\sigma_{\hat{\theta}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$, come mostrato alla figura seguente; consideriamo quindi σ_x nota a priori.

Adottando il cambio di variabile $z = \frac{\hat{\theta} - m_x}{\sigma_{\hat{\theta}}}$ ci riconduciamo a risultati ottenibili per una v.a. gaussiana normalizzata⁶¹, in modo che la condizione $Pr\{\theta_1 \leq m_x \leq \theta_2\} = 1 - \alpha$ possa essere riscritta⁶² come

$$Pr\left\{-z_{\alpha/2} \leq z = \frac{\hat{\theta} - m_x}{\sigma_{\hat{\theta}}} \leq z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha \quad (6.31)$$



in cui $z_{\alpha/2}$ è il *percentile*⁶³ $\alpha/2$ per z , e rappresenta il valore che l'errore *normalizzato* di stima $\frac{|\hat{\theta} - m_x|}{\sigma_{\hat{\theta}}}$ supera con probabilità α , vedi fig. 6.7-a). Una serie di riscritture⁶⁴ della (6.31) porta al risultato

$$Pr\left\{\hat{m}_x - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} < m_x < \hat{m}_x + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}\right\} = 1 - \alpha \quad (6.32)$$

in cui a $\sigma_{\hat{\theta}}$ si è sostituito il suo valore $\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$, che dipende dalla varianza della popolazione e dalla dimensione del campione. Il valore di $z_{\alpha/2}$ relativo al livello di confidenza α si ottiene tramite apposite tabelle⁶⁵ come quella di fig. 6.7-b).

Esempio Avendo deciso il livello di confidenza $1 - \alpha$ desiderato, dalla tabella mostrata in

⁶⁰Indipendentemente alla natura di x

⁶¹Ossia a media nulla e varianza unitaria come a pag. 154, mentre la normalizzazione del § 6.2.4.1 prevede $\sigma^2 = 1/2$.

⁶²Anche grazie a fatto che la gaussiana è simmetrica, dando luogo ad intervalli centrati rispetto a $\hat{\theta}$.

⁶³Il percentile η per una v.a. *gaussiana normalizzata* z è definito come il valore z_η tale che $Pr\{z \leq z_\eta\} = \eta$ e quindi corrisponde alla inversa $z_\eta = F_Z^{-1}(\eta)$ della funzione di distribuzione della v.a. $F_Z(z_\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \eta$. Alternativamente, è definito come $1 - Q\{z_\eta\} = \eta$ (vedi pag. 154). Il termine *percentile* scaturisce dall'essere $\eta \cdot 100\%$ pari alla percentuale delle volte che una determinazione della v.a. z risulta inferiore a z_η .

⁶⁴

$$-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\theta} - m_x}{\sigma_{\hat{\theta}}} \leq z_{\alpha/2}$$

$$-z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}} \leq \hat{\theta} - m_x \leq z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}}$$

$$-\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}} \leq -m_x \leq -\hat{\theta} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}}$$

$$\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}} \leq m_x \leq \hat{\theta} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}}$$

⁶⁵https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_di_ripartizione_della_variabile_casuale_normale

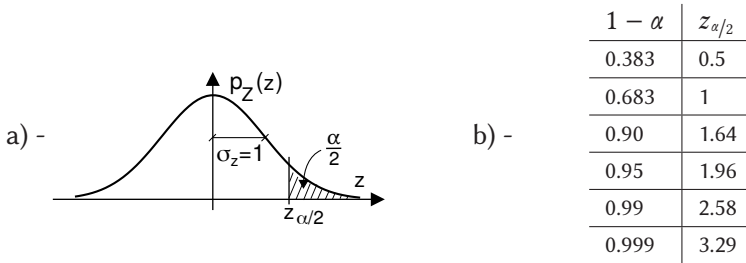


Figura 6.7: Gaussiana normalizzata: a) - percentile; b) - livello di confidenza

fig. 6.7-b) si determina il corrispondente valore di $z_{\alpha/2}$. Ad un valore normalizzato $z_{\alpha/2} = 1$ corrisponde un errore massimo di stima pari a $\sigma_{\hat{\theta}}$, che comporta un livello di confidenza $1 - \alpha = 68.3\%$; aumentando il livello fino al 95% si ottiene un valore di percentile $z_{\alpha/2}$ pari 1.96, mentre ad un livello del 99% corrisponde un percentile di 2.58, ossia un intervallo complessivo esteso per $2 \cdot 2.58 = 5.16$ volte la $\sigma_{\hat{\theta}}$.

Notiamo che per ridurre l'ampiezza dell'intervallo di confidenza dell'errore di stima non normalizzato $|\hat{m}_x - m_x|$ esistono due vie. La prima consiste nell'accettare un minore livello di confidenza $1 - \alpha$, ma ciò equivale ad aumentare la prob. α che l'errore *effettivo* sia maggiore di $z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}}$. La seconda via (se praticabile) è migliore e consiste nell'aumentare la dimensionalità N del campione statistico, sfruttando così la riduzione con legge $1/\sqrt{N}$ della deviazione standard della media campionaria $\sigma_{\hat{\theta}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$.

Per approfondire il significato del risultato ottenuto alla (6.32) consideriamo che per ogni campione \mathbf{x} di N elementi si ottiene una *diversa* stima \hat{m}_x , a cui corrisponde un intervallo (θ_1, θ_2) centrato in \hat{m}_x della stessa ampiezza ma *ogni volta differente*. Ciò significa che essendo per ogni campione \mathbf{x} la probabilità che il valore vero della media m_x cada all'interno di (θ_1, θ_2) pari ad $1 - \alpha$, esiste una probabilità α che un diverso campione \mathbf{x}' produca un intervallo (θ_1, θ_2) che *NON* contiene la vera media m_x .

Esercizio Si voglia stimare l'età media m degli utenti di una biblioteca civica. A questo scopo si intervista un campione casuale composto da $N = 100$ persone, da cui si ottiene una media campionaria pari ad $\hat{m} = 29$ anni. Adottando un valore di deviazione standard per l'età pari a $\sigma = 8$ anni, valutare gli intervalli di confidenza per m , con un livello pari al 95% ed al 99%. **Risposta** Essendo N sufficientemente grande, assumiamo vera l'ipotesi di gaussianità per la v.a. \hat{m} e dunque applicabile la teoria esposta. Dunque il percentile $z_{\alpha/2}$ nei due casi $1 - \alpha = 95$ e 99% vale rispettivamente $z_{0.025} = 1.96$ e $z_{0.005} = 2.58$, mentre la varianza della media campionaria risulta $\sigma_{\hat{m}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0.8$ fornendo in definitiva $z_{0.025} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = 1.96 \cdot 0.8 = 1.57$ e $z_{0.005} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = 2.58 \cdot 0.8 = 2.06$ nei due casi; pertanto si ottiene

$$\begin{cases} 27.43 < m < 30.57 & \text{con confidenza 95\%} \\ 26.94 < m < 31.06 & \text{con confidenza 99\%} \end{cases}$$

ovvero la fascia di età entro cui collocare la *vera età media* m , in base al campione a disposizione, al diminuire della probabilità che m sia in realtà *esterno* all'intervallo. **Nel caso** in cui il campione venga ridotto a sole $N = 30$ persone, ammettendo gli stessi valori di $\hat{m} = 29$ anni e $\sigma = 8$ anni, dato che $\sqrt{30} = 5.48$, ora risulta $z_{0.025} \cdot \sigma_{\hat{m}} = 2.86$ e $z_{0.005} \cdot \sigma_{\hat{m}} = 3.77$, a cui corrispondono intervalli (26.14 - 31.86) e (25.23 - 32.77) con

confidenza 95 e 99% rispettivamente. **Poniamo infine** che un *diverso* campione sempre di 30 persone produca una stima $\hat{m} = 27$ anni anziché 29. In tal caso l'intervallo di confidenza al 95% diviene (24.14 - 29.86).

Caso di varianza incognita Qualora la varianza σ_x della v.a. x di cui vogliamo stimare la media m_x non sia nota, ad essa viene sostituito il valore della varianza campionaria non polarizzata $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m}_x)^2$. Una prima conseguenza è che ora $\hat{\sigma}_x^2$ è anch'essa una v.a., ed il suo valore cambia per ogni diversa scelta del campione N , producendo intervalli di confidenza di *estensione variabile*. Essendo $\hat{\sigma}_x^2$ uno stimatore non polarizzato e consistente, per N sufficientemente elevato l'intervallo può ancora essere ottenuto come indicato dalla (6.32).

Accade inoltre che al diminuire di N la variabilità di $\hat{\sigma}_x^2$ causa (a parità di livello di confidenza) *un aumento* dell'estensione dell'intervallo, in quanto ora il cambio di variabile che porta ad una v.a. normalizzata⁶⁶ $t = \frac{\hat{\theta} - m_x}{\hat{\sigma}_\theta}$ dà luogo ad una v.a. non più gaussiana bensì di Student⁶⁷ con $N - 1$ gradi di libertà, rappresentata in fig. 6.8. Per $N \rightarrow \infty$ la v.a. $t^{(N)}$ di Student tende ad una gaussiana, mentre per N più piccoli la sua velocità di azzeramento è ridotta, o come si dice presenta *code più pesanti*. Ciò comporta che il percentile da utilizzare nella (6.32) non è più lo $z_{\alpha/2}$ relativo alla gaussiana normalizzata, bensì il valore $t_{\alpha/2}^{(N-1)}$ relativo alla nuova d.d.p., e tabulato in fig. 6.8-b).

Come è possibile notare confrontando con la tabella in fig. fig. 6.7-b), a parità di livello di confidenza $1 - \alpha$ i valori di $t_{\alpha/2}^{(N-1)}$ sono sempre maggiori di quelli per $z_{\alpha/2}$, tanto più per bassi N , in quanto in tal caso la d.d.p. di Student è più *bassa e larga*, e per catturare la stessa area α occorre *allontanarsi di più* dal valor medio. Nel caso di σ_x^2 incognita l'espressione dell'intervallo di confidenza risulta pertanto

$$Pr \left\{ \hat{m}_x - t_{\alpha/2}^{(N-1)} \cdot \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{N}} < m_x < \hat{m}_x + t_{\alpha/2}^{(N-1)} \cdot \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{N}} \right\} = 1 - \alpha \quad (6.33)$$

⁶⁶Ossia con media nulla e varianza unitaria.

⁶⁷Vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_t_di_Student. La v.a. $t = \frac{\hat{\theta} - m_x}{\hat{\sigma}_\theta}$ è definita come il rapporto di due v.a.: il numeratore $\hat{\theta} - m_x$ si comporta come una gaussiana centrata in quanto la media di insieme è una somma di v.a. gaussiane, mentre il denominatore $\hat{\sigma}_\theta = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2/N}$ dipende da $\hat{\sigma}_x^2$ che è una somma di quadrati di gaussiane, e dunque assume d.d.p. *chi quadro* o χ^2 , vedi § 6.6.5.

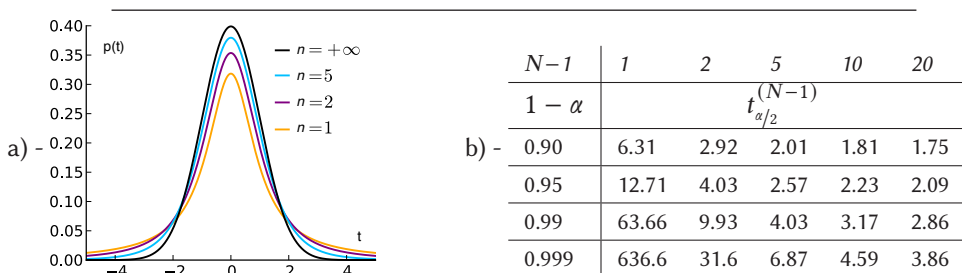


Figura 6.8: Densità di probabilità di Student al variare dei gradi di libertà m e relativi percentili

in cui i percentili $t_{\alpha/2}$ di Student sono ricavati dalla tabella precedente⁶⁸, e $\hat{\sigma}_x^2$ è la varianza campionaria non polarizzata.

Esempio Torniamo al problema della stima dell'età media dei frequentatori di una biblioteca, e svolgiamo le interviste su di un campione di soli 6 individui. I nuovi percentili per un livello di confidenza $1 - \alpha$ pari al 95% e 99% sono rispettivamente $t_{\alpha/2} = 2.57$ e 4.03. Pertanto, ponendo di aver anche stavolta stimato una media campionaria pari ad $\hat{m} = 29$ anni ed una deviazione standard di $\hat{\sigma} = 8$ anni, i nuovi intervalli di confidenza per l'età media risultano (20.6 - 37.39) e (15.83 - 42.16).

Dimensione del campione Il risultato (6.33) è valido, anche per per valori di N piccoli, purché la v.a. di osservazione x sia essa stessa gaussiana, dato che in tal caso la media campionaria $\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ valuta la somma di gaussiane, anch'essa gaussiana (vedi § 6.5.2); viceversa ($p_X(x)$ qualsiasi) è valida solo per N elevato, perché in tal caso la gaussianità di \hat{m}_x è garantita dal teorema centrale del limite. Altrimenti (N piccolo e x non gaussiana), l'intervallo di confidenza può essere determinato a seguito di una analisi specifica per le diverse d.d.p., che in alcuni casi⁶⁹ permettono soluzioni agevoli, mentre un caso di particolare rilevanza è trattato al § seguente.

Abbiamo altresì osservato come all'aumento di N corrisponda una riduzione dell'intervallo di confidenza: nel caso di v.a. x gaussiana trattato finora, qualora si desideri mantenere l'ampiezza dell'intervallo $d = \theta_2 - \theta_1$ inferiore ad un valore d_M , dovrà risultare $2 \cdot z_{\alpha/2} \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \leq d_M$, e dunque $N \geq 4 \cdot \sigma_x^2 \cdot \left(\frac{z_{\alpha/2}}{d_M}\right)^2$. Qualora la σ_x non sia nota, cautelativamente si usa al suo posto un multiplo fino a 4-6 volte la variabilità osservata nel campione.

Esempio Una precedente analisi ci informa che la durata x delle telefonate in un call center è approssimativamente una v.a. gaussiana con media m_x incognita e deviazione standard $\sigma_x = 4$ minuti; si calcoli la dimensione minima N del campione necessaria a stimare la durata media m_x entro una precisione d_M pari a due minuti⁷⁰, con confidenza del 95%. Si ottiene allora $N \geq 4 \cdot 16 \left(\frac{1.96}{2}\right)^2 = 61.46$, dunque $N \geq 62$.

6.6.4.1 Intervallo di confidenza per una frazione

Consideriamo ora una v.a. discreta booleana (o *dicotomica*) x che assume il valore 1 o 0 con probabilità p e $q = 1 - p$ rispettivamente, e che può rappresentare un evento di errore, una scelta politica, o una qualunque domanda di un sondaggio, ovvero p rappresenta *la frazione* di una certa caratteristica rispetto al totale dei casi. Dato che il valore medio risulta pari a $m_x = E\{x\} = \sum_{i=0}^1 p_i x_i = q \cdot 0 + p \cdot 1 = p$, la media campionaria $\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ rappresenta una stimatore \hat{p} di p . Invocando nuovamente una dimensione del campione N sufficientemente elevata, $\hat{m}_x = \hat{p}$ è assimilabile ad una v.a. gaussiana con media p e varianza⁷¹ $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{p(1-p)}{N}$, che quindi dipende dalla stessa

⁶⁸Oppure dalla tabella presente nella pagina Wikipedia citata prima.

⁶⁹Ad esempio, per la d.d.p. esponenziale (§ 22.2.1) e per quella poissoniana (§ 22.2), vedi Papoulis.

⁷⁰Come dire, minuto più, minuto meno... ;-)

⁷¹Infatti, calcoliamo prima $E\{x^2\} = p \cdot 1^2 + (1-p) \cdot 0^2 = p$ e dunque troviamo $\sigma_x^2 = E\{x^2\} - (E\{x\})^2 = p - p^2 = p(1-p)$; inoltre, tuttora risulta $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}$.

quantità da stimare; utilizziamo dunque al suo posto $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}$. Ci troviamo pertanto nelle condizioni di poter applicare il risultato (6.32) con l'accortezza di sostituire a $\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$ il termine $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}$, dando luogo ad un intervallo di confidenza espresso come $(\theta_1, \theta_2) = \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}$ in cui $z_{\alpha/2}$ è il quantile per la gaussiana normalizzata, con il livello di confidenza $1 - \alpha$ desiderato. Osserviamo ora che, a parità di N , l'estensione dell'intervallo risulta maggiore per valori di p attorno allo 0.5, e si riduce fino ad annullarsi per $p \rightarrow 0$ e $p \rightarrow 1$.

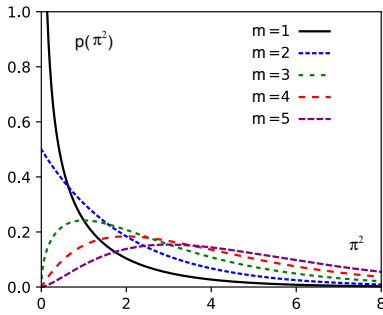
Esempio A seguito di una campagna pubblicitaria viene svolto un sondaggio mediante $N = 200$ interviste chiedendo se il prodotto oggetto della campagna viene ricordato. 85 di queste rispondono affermativamente, determinando una media campionaria pari a $\hat{p} = 85/200 = 0.425$, affetta dalla varianza $\sigma_{\hat{p}}^2 = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}} = \sqrt{\frac{0.425 \cdot 0.575}{200}} = 0.035$. L'intervallo di confidenza al 95% corrisponde pertanto a $(\theta_1, \theta_2) = \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}} = 0.425 \pm 1.96 \cdot 0.035 = 0.425 \pm 0.0686$ ovvero dal 36 al 49%, ossia uno *spread* di 13 punti. Se invece le risposte affermative fossero state solo 15, avremo ottenuto $\hat{p} = 15/200 = 0.075$ e dunque $\sigma_{\hat{p}}^2 = \sqrt{\frac{0.075 \cdot 0.925}{200}} = 0.019$, fornendo un intervallo $p = 0.075 \pm 1.96 \cdot 0.019 = 0.075 \pm 0.036$ ovvero dal 3.9 all'11.1%, cioè uno *spread* di 7.2 punti.

Dimensione campionaria Abbiamo osservato come la variabilità $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$ per la stima di frazione dipenda, oltre che da N , anche dallo stesso parametro p oggetto di stima. Ci si pone allora nel caso peggiore, ovvero si suppone $p = 0.5$ a cui corrisponde $p(1-p) = 0.25$ e una massima deviazione standard $\sigma_{\hat{p}} = \frac{0.5}{\sqrt{N}}$, da cui $(\theta_1, \theta_2) = \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{0.5}{\sqrt{N}}$; pertanto il valore N minimo che permette di ottenere un intervallo di estensione $d_M = 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{0.5}{\sqrt{N}}$ al livello $1 - \alpha$ risulta in prima approssimazione pari a $N \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}}{d_M}\right)^2$.

Esempio Si intende svolgere un sondaggio per stimare la proporzione degli elettori che voteranno per un certo partito politico, desiderando un intervallo di confidenza che al livello $1 - \alpha = 0.95$ non superi l'ampiezza di 2 punti percentuali (la cosiddetta *forchetta*), ovvero $d_M = 0.02$. Avremo allora bisogno di un campione composto da almeno $N \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}}{d_M}\right)^2 = \left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 = 9604$ soggetti.

6.6.5 Test chi quadro e verifica di distribuzione

Alcuni degli aspetti discussi fino ad ora pongono come condizione quella di avere a che fare con grandezze gaussiane. La tecnica che discutiamo appresso è spesso utilizzata per verificare che la frequenza dei valori osservati rispecchi quella prevista da una distribuzione di probabilità prefissata. A tale scopo, consideriamo una v.a. x di cui sono state collezionate N determinazioni, mediante le quali si costruisce un istogramma (pag. 150) suddividendo il campo di variabilità di x in m intervalli I_i , ed indichiamo con k_i il numero di realizzazioni di x che ricadono entro l'intervallo I_i , $i = 1, 2, \dots, m$, risultando $\sum_{i=1}^m k_i = N$.



m	1	2	5	10	20
$1 - \alpha$	$\chi^2_\alpha(m)$				
0.9	0.016	0.211	1.61	4.86	12.44
0.95	0.004	0.103	1.15	3.94	10.85
0.99	0	0.02	0.554	2.56	8.26
0.995	0	0.01	0.412	2.16	7.43

Figura 6.9: Densità di probabilità χ^2 al variare dei gradi di libertà m e relativi percentili

Il test tenta di verificare l'ipotesi H_0 che la v.a. x abbia effettivamente origine dalla d.d.p. prevista, nel cui caso i valori k_i dovrebbero essere molto prossimi a Np_i , in cui $p_i = \int_{I_i} p_X(x) dx$ è la probabilità che la d.d.p. assegna all'evento $x \in I_i$. Pertanto se l'ipotesi H_0 è vera il valore della nuova v.a.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(k_i - Np_i)^2}{Np_i} \tag{6.34}$$

dovrebbe essere vicino allo zero, mentre valori più elevati (di un valore di soglia λ) suggeriscono di rigettare l'ipotesi. Se N è sufficientemente elevato⁷² i valori k_i sono grandezze gaussiane con valore atteso $m_{k_i} = Np_i$ e varianza $\sigma_{k_i}^2 \simeq (Np_i)^2$ ⁽⁷³⁾, dunque la (6.34) rappresenta la somma dei quadrati di v.a. gaussiane normalizzate, e χ^2 risulta essere una v.a. detta *chi quadro* ad $m - 1$ gradi di libertà⁷⁴, la cui d.d.p. assume l'andamento riportato in figura 6.9.

L'ipotesi sulla d.d.p. di x viene dunque accettata con un intervallo di confidenza $1 - \alpha$ nel caso in cui il valore calcolato per χ^2 risulti inferiore ad una soglia stabilita in base alle tabelle⁷⁵ del percentile $\chi^2_\alpha(m - 1)$, che corrisponde ad una probabilità di errore (decidere H_0 quando invece non è vera) pari ad α . Notiamo che, a differenza dei casi precedenti, il percentile si riferisce *all'intera* area α anziché alla sua metà, in quanto l'intervallo di confidenza è comunque delimitato a sinistra dallo zero.

Esempio Una moneta viene lanciata 200 volte, producendo 115 volte testa e 85 croce. Si può ritenere la moneta *non truccata*, con un livello di significatività del 95% ? Evidentemente in questo caso $m = 2$ e $p_1 = p_2 = 0.5$, cosicché il calcolo della (6.34)

⁷²Effettivamente è richiesto anche un numero di osservazioni k_i maggiori di 5-10 per qualunque i ; se ciò non fosse vero, è possibile ridurre il numero m degli intervalli I_i , raggruppando tra loro quelli meno popolati.

⁷³In realtà essendo k_i il numero di casi favorevoli $x \in I_i$ rispetto al totale N , esso ha una d.d.p. *binomiale* (§ 22.1) per la quale $m_{k_i} = Np_i$ e varianza $\sigma_{k_i}^2 = Np_i(1 - p_i)$. Al crescere di N , e dunque degli intervalli m , i termini $1 - p_i$ divergono circa unitari, e la binomiale viene approssimata da una *poissoniana* (§ 22.2), per la quale appunto $\sigma^2 = Np_i$. Tale approssimazione è descritta come test di *Pearson*, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Test_chi_quadrato_di_Pearson

⁷⁴Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_chi_quadrato. I gradi di libertà sono $m - 1$ anziché m in virtù del vincolo $\sum_i p_i = 1$.

⁷⁵Vedi ad es.

https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_chi_quadrato#Tabella_dei_valori_critici

porta a $\chi^2 = \frac{(115-100)^2}{100} + \frac{(85-100)^2}{100} = 4.5$. Per $m - 1 = 1$ grado di libertà la tabella dei percentili fornisce $\chi_{0,05}^2(1) = 0.004$, pertanto dato che $\chi^2 = 4.5 > 0.004 = \chi_{0,05}^2(1)$ il test rigetta l'ipotesi, che può essere ammissibile solo accettando una probabilità di errore α maggiore del 95%, vedi tabella di cui all'ultima nota.

Come ultimo argomento di questa sezione, vediamo come poter ridurre il rumore sovrapposto ad un segnale *ripetuto*.

6.6.6 Stima di forma d'onda

Il problema è quello di voler stimare, anziché un singolo valore (o parametro), una intera forma d'onda, ovvero l'andamento di un segnale limitato nel tempo, di cui si può disporre di più repliche, ognuna affetta da una fonte di rumore additivo (§ 8.4), oppure qualora la realizzazione del segnale possa essere influenzata da fattori diversi da quelli che si intendono studiare. Un esempio tipico di tale esigenza si ha in campo biomedico, in cui deboli segnali elettrici (dell'ordine dei μV) di natura biologica sono captati mediante elettrodi disposti sul corpo, alla ricerca ad es. di particolarità in un segnale elettrocardiografico semi-periodico⁷⁶, che per sua natura presenta fisiologiche variazioni ed oscillazioni, o nel caso dei *potenziali evocati*⁷⁷ che si producono nelle vie nervose a seguito di stimolazione.

Allo scopo di ridurre per quanto possibile la variabilità dovuta alle cause di disturbo che potrebbero impedire il riscontro di caratteristiche del segnale $s(t)$ di significato diagnostico, le N repliche del segnale osservato $x_i(t) = s(t) + n_i(t)$ con $i = 1, 2, \dots, N$ in cui $n_i(t)$ rappresenta il disturbo ogni volta diverso, vengono *mediate* tra loro producendo

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [s(t) + n_i(t)] = s(t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i(t)$$

Osserviamo subito che se il processo $n(t)$ è a media nulla allora il risultato è *non polarizzato*, in quanto $E\{\hat{s}(t)\} = s(t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{n_i(t)\} = s(t)$. Per quanto riguarda la varianza di $\hat{s}(t)$, aggiungendo l'ipotesi di *incorrelazione* (vedi § 7.1.2) tra le possibili coppie (i, j) di realizzazioni del processo $n(t)$ otteniamo un risultato del tutto simile a quello della media campionaria eq. (6.29), ovvero

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{s}(t)}^2 &= E\{(\hat{s}(t) - s(t))^2\} = E\left\{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i(t)\right)^2\right\} = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E\{n_i(t) n_j(t)\} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E\{n_i^2(t)\} = \frac{1}{N^2} N \sigma_n^2 = \frac{\sigma_n^2}{N} \end{aligned}$$

e quindi anche in questo caso la varianza di rumore risulta ridotta grazie all'operazione di media.

Assumendo ora che le realizzazioni del disturbo $n(t)$ appartengano ad un processo gaussiano bianco con densità di potenza $P_n(f) = \frac{N_0}{2}$ (vedi § 7.2.4), osserviamo che la corrispondente varianza σ_n^2 risulta dipendere dalla banda W del filtro passa basso che precede l'amplificatore di ingresso allo strumento di acquisizione, ovvero $\sigma_n^2 = N_0 W$ (vedi § 15.4.1). Essendo i segnali di interesse limitati in banda a non più di ~ 60 Hz,

⁷⁶<https://it.wikipedia.org/wiki/Elettrocardiogramma>

⁷⁷https://it.wikipedia.org/wiki/Potenziali_evocati

viene tipicamente usato un filtro con frequenza di taglio pari a 100 Hz. Tale filtro diviene però fonte di correlazione tra realizzazioni di rumore⁷⁸ tra loro vicine, per cui le osservazioni $x_i(t) = s(t) + n_i(t)$ devono essere effettuate facendo intercorrere tra una acquisizione e la seguente un intervallo almeno pari al doppio della durata della $h(t)$.

Per rimanere nel campo biomedico, difficilmente il segnale $s(t)$ è sempre lo stesso per tutte le acquisizioni $x_i(t)$, bensì presenta una variabilità intrinseca legata sia alla durata dell'esame sia ad alee di origine biologica, come ad es. la latenza variabile per le risposte dei potenziali evocati: in tal caso sono necessarie ulteriori tecniche, la cui discussione trascende dagli scopi di questo testo.

6.7 Appendici

6.7.1 Approfondimento sulla gaussiana

Sviluppiamo qui i passaggi relativi ad alcuni risultati riguardanti la v.a. gaussiana monodimensionale presentata al § 6.2.4.

Integrale di Gauss Si dimostra⁷⁹ che $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, da cui $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi}$. Pertanto il fattore di scala $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ che compare nell'espressione della gaussiana è necessario per rendere la (6.10) una d.d.p.: infatti con il cambio di variabile $z = \frac{x-m}{\sigma}$ da cui $dx = \sigma \cdot dz$ si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1$$

Calcolo del valor medio Sebbene dal grafico di fig.6.1 sia evidente, data la simmetria di $p_X(x)$, che il suo valor medio sia pari al parametro m che compare nella (6.10), volendo una conferma analitica si può applicare la definizione $E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$ da cui, operando il cambio di variabile $\frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma} = t$ si ottiene $dx = \sqrt{2}\sigma dt$ e quindi

$$E\{x\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma t + m) e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = m$$

in quanto il primo termine risulta nullo dato che la funzione integranda è dispari, mentre il secondo termine vale m in quanto $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, vedi *integrale di Gauss* al paragrafo precedente.

⁷⁸Al § 7.4 si mostra come l'autocorrelazione $R_{nn}(\tau)$ di un processo $n(t)$ che attraversa un filtro divenga pari a $R_{yy}(\tau) = R_{nn}(\tau) * R_{hh}(\tau)$, in cui $R_{hh}(\tau)$ è l'autocorrelazione della risposta impulsiva del filtro.

⁷⁹Vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Integrale_di_Gauss, in cui si fa uso della teoria esposta al § 6.4.

Calcolo della varianza Anche in questo caso applichiamo il cambio di variabile $\frac{x-m}{\sqrt{2\sigma}} = t$ alla definizione $E\{(x-m)^2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$ ottenendo

$$\begin{aligned} E\{(x-m)^2\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} 2\sigma^2 t^2 e^{-t^2} \sqrt{2\sigma} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot 2te^{-t^2} dt = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left[-te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = \sigma^2 \end{aligned}$$

dove alla seconda riga si è applicata la tecnica di integrazione per parti⁸⁰ in cui prima si è integrato $2te^{-t^2} \rightarrow -e^{-t^2}$ e quindi si è derivato $t \rightarrow 1$. A questo punto si osserva che $-te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty}$ è pari a zero dato che per $t \rightarrow \pm\infty$ il fattore e^{-t^2} decresce più rapidamente di quanto cresca t , mentre anche qui $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Momenti centrati di ordine superiore Per una v.a. gaussiana x sussiste la relazione $E\{(x-m_x)^p\} = \begin{cases} 0 & p \text{ dispari} \\ \sigma^p (p-1)!! & p \text{ pari} \end{cases}$ in cui $n!!$ indica il *semifattoriale*, pari a $n(n-2)(n-4)\dots$ in cui l'ultimo fattore sarà un 2 oppure un 1 a seconda se n è pari o dispari.

Posizione dei flessi I punti di flesso di (6.10) si trovano in corrispondenza dei valori $x = m \pm \sigma$: infatti l'azzeramento della derivata seconda⁸¹ determina la condizione $(x-m)^2 = \sigma^2$ ovvero $x-m = \pm\sigma$.

6.7.2 Teorema centrale del limite

Fornisce la dimostrazione che la somma di v.a. statisticamente indipendenti ed identicamente distribuite, ovvero con d.d.p. qualsiasi ma uguale per tutte, tende ad assumere una d.d.p. gaussiana qualora il loro numero n sia molto elevato, e dunque permette di ritenere valida l'ipotesi di gaussianità per molti fenomeni naturali, come ad es. il rumore termico (§ 8.4.2.1). Indichiamo con m e σ^2 i valori di media e varianza (finita) per ciascuna delle v.a. x_i che prendono parte alla somma, e consideriamo la nuova v.a. $x^S = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{n}}$: il teorema afferma che $x^S \rightarrow N(n \cdot m, \sigma^2)$ qualora $n \rightarrow \infty$.

Per semplificare la dimostrazione conviene definire $y_i = x_i - m$ come nuove v.a. a media nulla e varianza σ^2 , ed affrontare lo studio della v.a. somma $z = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sqrt{n}}$. Iniziamo

⁸⁰Si ricorda che la regola di integrazione per parti stabilisce che $\int_a^b [f'(x)g(x)] dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b [f(x)g'(x)]$

⁸¹La derivata prima di $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ risulta pari a $p'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \left[-\frac{(x-m)}{\sigma^2} \right]$ e dunque

$$p''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \left\{ e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \left[\frac{(x-m)^2}{\sigma^2} \right]^2 + e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} - \frac{1}{\sigma^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \left[\frac{(x-m)^2}{\sigma^2} - 1 \right]$$

con il verificare che

$$\sigma_z^2 = E \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sqrt{n}} \right)^2 \right\} = \sum_{i=1}^n E \left\{ \frac{y_i^2}{n} \right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{1}{n} n \sigma^2 = \sigma^2$$

in cui la seconda eguaglianza sussiste in virtù dell'indipendenza statistica⁸² tra le y_i , e la terza in quanto identicamente distribuite. Passiamo ora a calcolare la *funzione caratteristica* (§ 6.2.5) $\Phi_z(\omega)$ di z , ovvero

$$\Phi_z(\omega) = E_z \{ e^{j\omega z} \} = E_z \left\{ e^{j\omega \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sqrt{n}}} \right\} = \prod_{i=1}^n E_{y_i} \left\{ e^{j\omega \frac{y_i}{\sqrt{n}}} \right\} = \prod_{i=1}^n \Phi_{y_i}(\omega) = [\Phi_y(\omega)]^n \quad (6.35)$$

dove anche per questo caso la terza eguaglianza sussiste in virtù dell'indipendenza statistica tra le y_i , e la quinta in quanto identicamente distribuite, essendo $\Phi_y(\omega)$ la f.c. di ciascuna delle v.a. y_i normalizzate, ovvero $\Phi_y(\omega) = E_y \left\{ e^{j\omega \frac{y}{\sqrt{n}}} \right\} = \int p_Y(y) e^{j\omega \frac{y}{\sqrt{n}}} dy$ in cui $p_Y(y)$ è la d.d.p. comune a tutte le y_i . La dimostrazione procede sostituendo all'esponenziale $e^{j\omega \frac{y}{\sqrt{n}}}$ il relativo sviluppo in serie di potenze $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ arrestato al secondo ordine ovvero

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

in cui $o\left(\frac{x^2}{2}\right)$ significa un infinitesimo di ordine superiore (per x molto piccolo) a $\frac{x^2}{2}$, in modo da ottenere

$$\begin{aligned} \Phi_y(\omega) &= E_y \left\{ e^{j\omega \frac{y}{\sqrt{n}}} \right\} = E_y \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j\omega y)^k}{(\sqrt{n})^k k!} \right\} = E_y \left\{ 1 + \frac{j\omega y}{\sqrt{n}} + \frac{(j\omega y)^2}{2n} + o\left[\frac{(\omega y)^2}{2n} \right] \right\} = \\ &= 1 + \frac{j\omega}{\sqrt{n}} m_y - \frac{1}{n} \frac{\omega^2 m_y^2}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \frac{\omega^2 \sigma^2}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (6.36)$$

in quanto $E_y \{ y \} = m_y = 0$ per ipotesi, e $E_y \{ y^2 \} = m_y^2 = \sigma^2$ per lo stesso motivo. A questo punto non resta che sostituire la (6.36) nella (6.35) per ottenere $\Phi_z(\omega) = [\Phi_y(\omega)]^n = \left[1 - \frac{1}{n} \frac{\omega^2 \sigma^2}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n$ e ricordare (!) che $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right)^n = e^\alpha$, per arrivare a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_z(\omega) = e^{-\frac{\omega^2 \sigma^2}{2}}$$

che è esattamente pari alla funzione caratteristica (6.13) di una v.a. gaussiana con media nulla e varianza σ^2 , e quindi il teorema è dimostrato.

Qualora le n v.a. i.i.d. x_i abbiano media m e la loro somma avvenga senza il fattore di normalizzazione $\frac{1}{\sqrt{n}}$, la nuova v.a. $x^S = \sum_{i=1}^n x_i$ per $n \rightarrow \infty$ risulta tendere ad una $N(n \cdot m, n \cdot \sigma^2)$.

⁸²Infatti, per il caso semplice di due v.a. y_1 ed y_2 a media nulla si ottiene

$$\sigma_y^2 = E \{ (y_1 + y_2)^2 \} = E \{ y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 y_2 \} = E \{ y_1^2 \} + E \{ y_2^2 \} + 2E \{ y_1 y_2 \} = \sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2$$

in cui la terza eguaglianza è conseguenza della proprietà distributiva dell'integrale (6.7) che definisce il valore atteso, e la quarta discende dal fatto che l'indipendenza statistica implica incorrelazione (§ 7.1.2).

6.7.3 Matrice di covarianza e forma quadratica associata

La matrice di covarianza Σ_x introdotta ai §§ 6.5 e seguenti ha dimensione $n \times n$ con elementi σ_{ij} definiti come

$$\sigma_{ij} = E \left\{ (x_i - m_{x_i}) (x_j - m_{x_j}) \right\}$$

in cui x_i con $i = 1, 2, \dots, n$ sono v.a. e m_{x_i} è la rispettiva media. Se le x_i sono congiuntamente gaussiane, la stessa Σ_x compare nell'espressione (6.26) della relativa d.d.p. Peraltro, Σ_x mantiene il suo significato indipendentemente dalla natura delle v.a. a cui si riferisce, e presenta interessanti proprietà di cui ora discutiamo, e la cui conoscenza può tornare utile in alcune circostanze, come ad esempio nella analisi delle prestazioni del *filtro di Wiener*, vedi pag. 18.4.2.

Simmetria e autovettori Notiamo innanzitutto che Σ_x è una matrice *simmetrica*, in quanto $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. In questo caso è possibile dimostrare che i suoi autovalori λ sono *reali*⁸³, ed in numero pari al suo rango. Ricordiamo che gli autovalori λ sono definiti come le possibili radici del *polinomio caratteristico* $q(\lambda) = |\Sigma_x - \lambda \mathbf{I}|$ di Σ_x , di grado n ; ad ogni autovalore λ corrisponde un autovettore $\boldsymbol{\gamma}$ ⁽⁸⁴⁾ tale che

$$\Sigma_x \boldsymbol{\gamma} = \lambda \boldsymbol{\gamma} \quad (6.37)$$

Per le matrici simmetriche si dimostra⁸⁵ che gli autovettori $\boldsymbol{\gamma}_i$ e $\boldsymbol{\gamma}_j$ associati ad autovalori *distinti* sono *ortogonali*, ovvero $\boldsymbol{\gamma}_i^\top \boldsymbol{\gamma}_j = 0$. Pertanto è possibile *assemblare* una matrice $\Gamma = [\boldsymbol{\gamma}_1 \boldsymbol{\gamma}_2 \dots \boldsymbol{\gamma}_p]$ di n righe e p colonne pari agli autovettori $\boldsymbol{\gamma}_i$, per la quale risulta⁸⁶

$$\Gamma^\top \Gamma = \Gamma \Gamma^\top = \mathbf{I}, \quad \Gamma^{-1} = \Gamma^\top, \quad \text{e} \quad \Gamma^\top \Sigma_x \Gamma = \Lambda \quad (6.38)$$

in cui Λ è una matrice quadrata $p \times p$ diagonale, con i valori degli autovettori λ_i sulla diagonale. Sia Σ_x che Λ hanno lo stesso determinante⁸⁷, e quindi $\det(\Sigma_x) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, che dunque si annulla se qualche $\lambda_i = 0$; pertanto, il numero $p \leq n$ di autovalori non nulli determina il rango di Σ_x .

⁸³Facciamo uso del *prodotto Hermitiano* definito come $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$, in cui la soprilineatura rappresenta l'operazione di coniugazione. In generale per matrici e vettori reali risulta $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \rangle$, ma se oltre a ciò \mathbf{A} è simmetrica si ha $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$ e dunque $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle$. Indicando ora con $\bar{\lambda}$ il coniugato di un autovalore di \mathbf{A} (per assurdo) complesso, possiamo scrivere $\bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \bar{\lambda} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{A}\bar{\lambda} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$, ma dato che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ è positivo, dovrebbe essere $\lambda = \bar{\lambda}$, il che è impossibile: dunque tutti gli autovalori sono reali.

⁸⁴Gli autovettori si considerano normalizzati, ovvero $\boldsymbol{\gamma}^\top \boldsymbol{\gamma} = 1$, altrimenti ad uno stesso autovalore ne corrisponderebbero infiniti. Gli autovettori sono inoltre definiti a meno di un termine di fase, dato che se $\boldsymbol{\gamma}$ è un autovettore, lo è anche $\boldsymbol{\gamma} e^{j\theta}$ con $0 < \theta < 2\pi$.

⁸⁵Vedi ad es. <https://www.marcellochiodi.com/mylessons/MLA2020matriciaA4.pdf>

⁸⁶La prima relazione è conseguenza dell'ortogonalità, la seconda discende dalla prima, e la terza deriva dalla premoltiplicazione di ambo i membri della (6.37) per $\boldsymbol{\gamma}_j^\top$, che produce $\begin{cases} \boldsymbol{\gamma}_i^\top \Sigma_x \boldsymbol{\gamma}_i = \lambda_i & \text{se } i = j \\ \boldsymbol{\gamma}_j^\top \Sigma_x \boldsymbol{\gamma}_i = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

⁸⁷In quanto $\det(\Sigma_x) = \det(\Gamma) \det(\Lambda) \det(\Gamma^\top)$, e $\det(\Gamma) = \det(\Gamma^\top) = \det(\Gamma^{-1}) = 1$.

Forma quadratica e segno Una *forma quadratica* individua l'espressione

$$Q(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \sigma_{ij} = \mathbf{c}^\top \Sigma_x \mathbf{c} \quad (6.39)$$

che rappresenta il valore di un polinomio *omogeneo* di secondo grado nelle variabili c_i . Qualora per qualsiasi scelta di $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ risulti $Q(\mathbf{c}) \geq 0$, sia Σ_x che $Q(\mathbf{c})$ vengono dette di segno *semidefinito positivo*⁸⁸.

Condizione necessaria e sufficiente per avere $Q(\mathbf{c}) \geq 0$ è che Σ_x sia una *matrice di covarianza*: infatti, la varianza σ_y^2 (non negativa per definizione) di una combinazione lineare $y = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ di v.a. x_i può essere espressa⁸⁹ in notazione matriciale appunto come $\sigma_y^2 = \mathbf{c}^\top \Sigma_x \mathbf{c}$. Inoltre, se $\det(\Sigma_x) \neq 0$ ovvero Σ_x ha rango pieno⁹⁰, sia Σ_x che $Q(\mathbf{c})$ sono *definite positive*, ovvero $Q(\mathbf{c}) > 0$, in quanto in tal caso tutti gli n autovalori λ_i sono *positivi*⁹¹. Se viceversa $\det(\Sigma_x) = 0$ il rango di Σ_x risulta $p < n$, con $n - p$ autovalori nulli, e sia Σ_x che $Q(\mathbf{c})$ sono *semidefinite positive*.

Analisi della convessità La ricerca di un punto *di minimo* \mathbf{c}_m per $Q(\mathbf{c})$ tale che $Q(\mathbf{c}_m) < Q(\mathbf{c})$ è molto semplice. Occorre innanzitutto verificare che in tale punto si annulli il vettore gradiente $\mathbf{g}(\mathbf{c})|_{\mathbf{c}=\mathbf{c}_m}$ con elementi $g_i(\mathbf{c}) = \frac{\partial Q(\mathbf{c})}{\partial c_i} = 2\Sigma_x \mathbf{c}$, che corrisponde ad impostare un sistema omogeneo $\Sigma_x \mathbf{c} = \mathbf{0}$, che come noto ammette soluzioni $\neq \mathbf{0}$ solo se $\det(\Sigma_x) = 0$. Quindi, se Σ_x non ha autovalori nulli ed è definita positiva, $\mathbf{c}_m = \mathbf{0}$ è l'unico punto singolare.

Per stabilire se si tratti di un minimo od un massimo, occorre valutare il segno della matrice *Hessiana* $\mathbf{H}(\mathbf{c})$ con elementi $h_{ij}(\mathbf{c}) = \frac{\partial^2 Q(\mathbf{c})}{\partial c_i \partial c_j}$: si dimostra che se $\mathbf{H}(\mathbf{c}_m)$ è *definita positiva* allora $Q(\mathbf{c})|_{\mathbf{c}=\mathbf{c}_m}$ è *convessa*⁹², e \mathbf{c}_m corrisponde ad un minimo, oppure ad un massimo se $\mathbf{H}(\mathbf{c}_m)$ è definita negativa. Ma dato che per $Q(\mathbf{c})$ risulta $\mathbf{H}(\mathbf{c}) = 2\Sigma_x$ indipendentemente da \mathbf{c} , il segno di \mathbf{H} è lo stesso di Σ_x , e dunque se quest'ultima è definita positiva, $Q(\mathbf{c})$ è *convessa* per ogni \mathbf{c} , e $\mathbf{c}_m = \mathbf{0}$ corrisponde ad un *minimo globale*.

Nel caso di $n = 2$ è possibile classificare $Q(\mathbf{c})$ come un *paraboloide ellittico*⁹³,

⁸⁸Vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Matrice_definita_positiva

⁸⁹
$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E \left\{ (y - m_y)^2 \right\} = E \left\{ \left(\sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{i=1}^n c_i m_i \right)^2 \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j E \{ x_i x_j \} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j m_i m_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \sigma_{ij} \end{aligned}$$

⁹⁰Ossia nessuna tra le v.a. x_i presenta dipendenza *lineare* da una o più delle altre.

⁹¹Tenendo infatti conto che dalla (6.38) si ottiene $\Sigma_x = \Gamma \Lambda \Gamma^\top$, possiamo scrivere $Q(\mathbf{c}) = \mathbf{c}^\top \Sigma_x \mathbf{c} = \mathbf{c}^\top \Gamma \Lambda \Gamma^\top \mathbf{c}$, che ponendo $\mathbf{d} = \Gamma^\top \mathbf{c}$ riscriviamo ancora come $Q(\mathbf{c}) = \mathbf{d}^\top \Lambda \mathbf{d} = \sum_{i=1}^p \lambda_i d_i^2$. Se qualche λ_i fosse negativo o nullo, si potrebbe trovare un vettore \mathbf{d} nullo tranne per l'unica componente corrispondente al $\lambda_i \leq 0$, e produrre una $Q(\mathbf{c}) \leq 0$, in contrasto con l'ipotesi. Pertanto è vero anche il viceversa, cioè Σ_x è definita positiva se $\lambda_i > 0 \quad \forall i$.

⁹²Vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_convessa. La condizione sulla matrice Hessiana definita positiva è *analoga* alla proprietà nota per la derivata seconda di una funzione monovariata, ma per una dimostrazione si può visitare ad es.

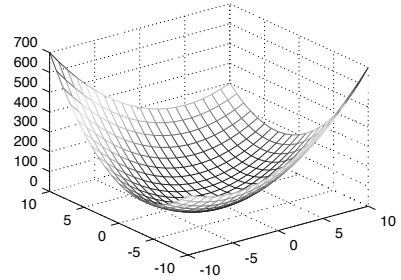
https://mate.unipv.it/gualandi/metodi/capitolo_1.pdf.

⁹³Vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Quadrica>. In particolare, la proprietà di una matrice definita positiva di avere n autovalori positivi è quella che in due dimensioni determina questo risultato,

raffigurato nella figura a lato per il caso

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ovvero $Q(\mathbf{c}) = z = 2x^2 - 2xy + 3y^2$. La superficie si dice ellittica dato che una sua intersezione con il piano $Q(\mathbf{c}) = \text{cost}$ individua un *iper-ellissoide*.



Interpretazione geometrica Notiamo ora che $Q(\mathbf{c}) = \mathbf{c}^\top \Sigma_x \mathbf{c}$ può essere riscritta in forma di prodotto scalare $\langle \Sigma_x \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle$ tra \mathbf{c} e $\mathbf{d} = \Sigma_x \mathbf{c}$, il cui valore risulta $|\mathbf{c}| |\mathbf{d}| \cos \alpha$, ovvero positivo o negativo a seconda se \mathbf{c} e \mathbf{d} condividono o meno lo stesso semipiano, oppure nullo se sono ortogonali.

In definitiva, una matrice Σ_x definita positiva individua una trasformazione che mappa un *qualunque* vettore \mathbf{c} in uno $\mathbf{d} = \Sigma_x \mathbf{c}$ che giace nello *stesso semipiano*, o in quello opposto per una matrice definita *negativa*.

Correlazione, densità spettrale e filtraggio

QUESTO capitolo *intreccia* la teoria dei segnali (capp. 2 e 3) con quella delle probabilità (cap. 6) per descrivere in modo unitario il passaggio sia dei segnali certi che dei processi aleatori attraverso un sistema fisico, dal punto di vista delle modifiche spettrali come da quello delle proprietà statistiche. Mentre per segnali certi siamo già in grado (vedi § 3.5.1, 3.2 e 3.7) di determinare lo spettro di ampiezza e di densità di energia presenti in uscita, se il segnale in ingresso al filtro è membro di un processo deve essere svolta una nuova parte di teoria, volta a definire la *funzione di autocorrelazione* $\mathcal{R}_x(\tau)$ come strumento unificante con il mondo dei segnali certi, la cui trasformata (grazie al teorema di WIENER) fornisce lo spettro di densità di potenza cercato. Il resto del capitolo procede applicando i risultati ottenuti a casi pratici, determinando lo spettro di densità di potenza per alcuni segnali di interesse, così come la relativa stima basata su osservazioni sperimentali. Al § 7.4 si perviene ad una impostazione unitaria per il filtraggio di segnali di energia, periodici e aleatori, mentre al § 7.5 lo stesso schema è applicato alla loro somma e prodotto. Una sezione a parte è dedicata alla teoria del *filtro adattato*, alle prestazioni relative, ed alla sua applicazione nel contesto delle segnalazione ortogonale, mentre in appendice si affronta il tema della *regressione lineare*.

7.1 Correlazione, covarianza e autocorrelazione

Al § 6.3.5 abbiamo discusso come per un processo stazionario ed ergodico $\{x(t, \theta)\}$ la conoscenza della d.d.p. $p_X(x)$ che descrive la variabilità dei suoi valori indipendentemente da t e θ consenta il calcolo dei corrispondenti valori attesi media m_X e varianza σ_X^2 , nonché della potenza $\mathcal{P}_X = E_X\{x^2\} = \sigma_X^2 + (m_x)^2$ di ogni suo membro. Tali medie di insieme sono descrizioni statistiche *del primo ordine*, in quanto legate alla d.d.p. di *un singolo* valore estratto.

In questa sezione definiamo invece una descrizione statistica *del secondo ordine* ossia un momento misto (pag. 158), che come vedremo al § 7.2.1 ci metterà in grado di ottenere lo *spettro di densità di potenza* dei membri del processo. Tale descrizione si basa sulla

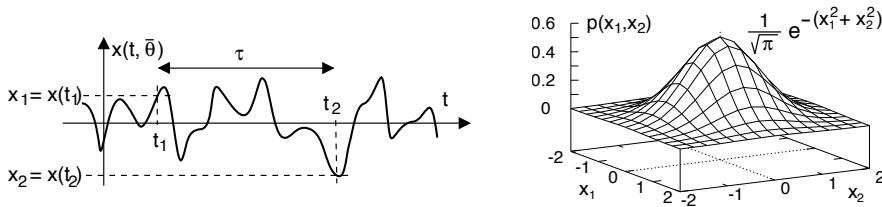


Figura 7.1: Estrazione di due v.a. da un processo, e possibile d.d.p. congiunta

considerazione di due istanti t_1 e $t_2 = t_1 + \tau$, in corrispondenza dei quali sono estratte le variabili aleatorie $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ a partire da una qualunque realizzazione θ del processo $\underline{x}(t, \theta)$, di cui al lato sinistro di fig. 7.1 si mostra il caso per uno specifico membro $x(t, \theta)$. Al variare della realizzazione $\theta \in \Theta$ tutte le coppie di valori campionati sono altrettante determinazioni di una variabile aleatoria *bidimensionale*, descritta da una densità di probabilità *congiunta* $p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; t_1 t_2)$, che dipende anche dagli istanti t_1 e t_2 , e che è esemplificata nella parte destra di fig. 7.1; tale d.d.p. *bidimensionale* sottende un volume unitario ovvero $\int \int p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$, e il suo grafico 3D descrive le regioni del piano $x_1 x_2$ in cui ciascuna coppia di possibili valori è più o meno probabile.

7.1.1 Correlazione tra variabili aleatorie

Ora che abbiamo a disposizione la d.d.p. congiunta $p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; t_1 t_2)$ di due v.a. x_1 e x_2 estratte dal processo $x(t, \theta)$ a distanza temporale τ , possiamo calcolare il loro *momento misto*, ovvero un valore atteso (§ 6.2.2) in cui, a differenza del caso monodimensionale, i possibili valori sono ponderati mediante la probabilità che si verifichino *assieme*. In particolare, il momento misto *di ordine (1,1)* (vedi pag. 158) $m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2)$ tra le v.a. prende il nome di *correlazione*, ed è definito come

$$m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2) = E_{X_1 X_2} \{x_1 x_2\} = \iint x_1 x_2 \cdot p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; t_1 t_2) dx_1 dx_2 \quad (7.1)$$

Prima di proseguire, proviamo ad approfondire il significato di questa nuova descrizione statistica nel suo contesto più ampio di due v.a. di tipo qualsiasi, non necessariamente estratte da un medesimo processo aleatorio, ma che descrivono due eventi in qualche modo interdipendenti¹.

Segno Osserviamo innanzitutto che *il segno* della correlazione fra due v.a. x_1 e x_2 riflette la loro *concordanza*, nel senso che se $m_{X_1 X_2}^{(1,1)} > 0$ le due v.a. hanno frequentemente lo stesso segno², oppure opposto qualora la correlazione sia negativa.

¹Il termine *correlazione* risale a studi sull'ereditarietà genetica, e via via è stato adottato da tutte le discipline (economiche, cliniche, sociologiche...) che analizzano da un punto di vista statistico la dipendenza (*co-relazione*) tra due o più grandezze, vedi ad es.

[https://it.wikipedia.org/wiki/Correlazione_\(statistica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Correlazione_(statistica)).

²Come intuitivamente verificabile pensando $m_{X_1 X_2}^{(1,1)}$ come media pesata in probabilità dei possibili valori del prodotto $x_1 x_2$; i termini di eguale ampiezza e segno opposto possono elidersi se equiprobabili.

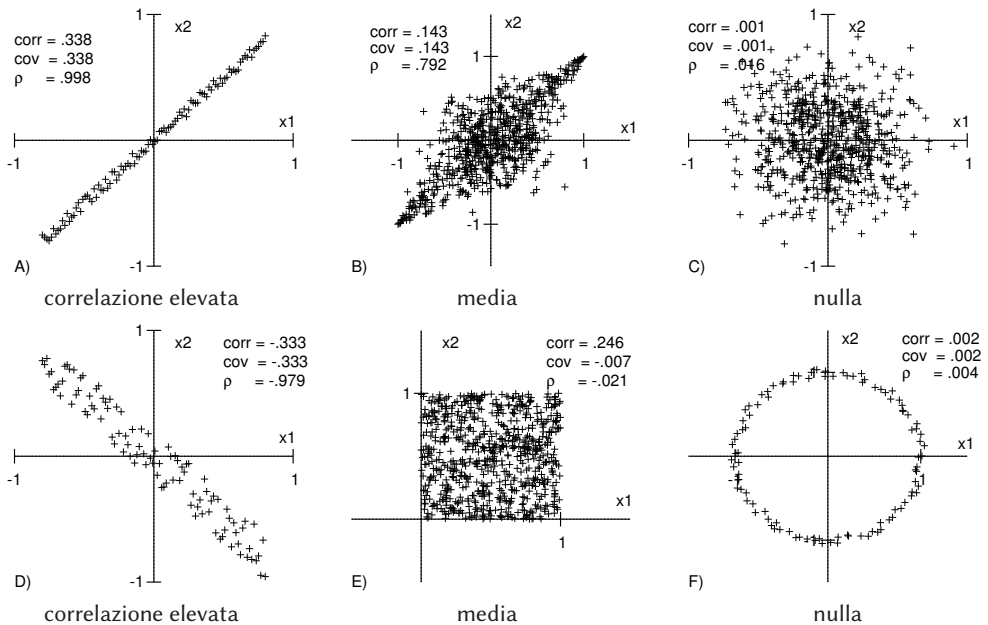


Figura 7.2: Diagramma di dispersione per coppie di variabili aleatorie

Regressione Individua un concetto simile³, ma orientato al problema di *predire* il valore atteso di una grandezza (es. x_2) a partire dalla conoscenza di un'altra (in questo caso x_1): possiamo infatti pensare che le grandezze siano legate da una relazione del tipo $x_2 = f(x_1) + \varepsilon$ dove ε rappresenta la componente aleatoria, a media nulla e statisticamente indipendente sia da x_1 che da x_2 . Qualora $f(x_1) = a \cdot x_1 + b$ si parla di *regressione lineare* in quanto $f(x_1)$ è l'equazione di una retta in cui $a = \tan \alpha$ è il coefficiente angolare e b l'intercetta, ed al § 7.7.1 si mostra come risulti $a = \frac{\sigma_{x_1 x_2}}{\sigma_{x_1}}$ e dunque (eq. (7.3)) sia legato a $m_{X_1 X_2}^{(1,1)}$, mentre $b = m_{x_2} - a m_{x_1}$.

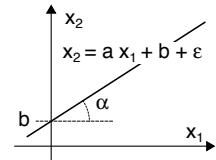


Diagramma di scattering L'ultima riflessione prima di passare al lato analitico riguarda i diagrammi di dispersione (o *scattering*⁴) mostrati in fig. 7.2 che mappano la *posizione* di un numero elevato⁵ di coppie di valori x_1 e x_2 secondo sei possibili leggi di dipendenza stocastica. Assieme alle nuvole, i diagrammi riportano anche i valori *stimati*⁶ di correlazione $m_{X_1 X_2}^{(1,1)}$ (corr), covarianza $\sigma_{x_1 x_2}$ (cov) (eq. (7.3)), e coefficiente di correlazione ρ (§ 7.7.2).

Nei casi A) e F) le coppie di valori sono legate da una legge ben poco casuale, ma nel

³Il termine si rifà al concetto di *regredire*, ovvero da un punto di vista genetico, veder riaffiorare tratti remoti. Per approfondimenti si veda https://it.wikipedia.org/wiki/Regressione_lineare, ma anche il § 7.7.1.

⁴Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Grafico_di_dispersione

⁵I grafici A, D ed F sono realizzati con 100 punti, mentre B, C ed E con 700.

⁶Ovvero ottenuti a partire dal campione statistico, per cui ad es. $\hat{m}_{X_1 X_2}^{(1,1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_1(i) x_2(i)$.

secondo caso la correlazione è nulla poiché la dipendenza *non è lineare*. Nei casi B) e D) c'è più variabilità, ma si nota ancora una certa dipendenza tra le due v.a. Nei casi C) ed E) siamo invece al cospetto di due v.a. *statisticamente indipendenti*, dato che $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ è fattorizzabile come $p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2)$, e per le quali tra breve si mostra che risulta $m_{X_1 X_2}^{(1,1)} = m_{X_1} m_{X_2}$, come infatti riscontriamo per il caso E) in cui le v.a. sono indipendenti, e la correlazione risulta 0.25 cioè pari al prodotto delle medie $m_{X_1} = m_{X_2} = 0.5$. Per gestire questo caso, occorre introdurre la *covarianza*, descritta di seguito.

7.1.2 Covarianza, indipendenza statistica e incorrelazione

Nel caso in cui le due v.a. siano *statisticamente indipendenti*, ovvero per le quali si possa scrivere $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = p(x_1) p(x_2)$ ⁽⁷⁾, l'integrale che definisce la correlazione *si fattorizza*, fornendo come risultato il prodotto delle medie delle v.a.:

$$\begin{aligned} m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2) &= E\{x_1, x_2\} = \iint x_1 x_2 p(x_1) p(x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int x_1 p(x_1) dx_1 \cdot \int x_2 p(x_2) dx_2 = E\{x_1\} E\{x_2\} = m_{X_1} m_{X_2} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Covarianza E' indicata come $\sigma(x_1, x_2)$ e consiste nella correlazione $m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2)$ a cui è sottratto il termine $m_{X_1} m_{X_2}$, ottenendo il momento misto *centrato* tra le due v.a. Infatti:⁸

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, x_2) &= E\{(x_1 - m_{X_1})(x_2 - m_{X_2})\} = \\ &= E\{x_1 x_2\} - E\{x_1 m_{X_2}\} - E\{m_{X_1} x_2\} + E\{m_{X_1} m_{X_2}\} = \\ &= E\{x_1 x_2\} - m_{X_1} m_{X_2} = m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2) - m_{X_1} m_{X_2} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Siamo ora in grado di enunciare un'importante conseguenza dell'indipendenza statistica:

Incorrelazione Combinando i risultati (7.2) e (7.3) possiamo verificare che

Se due variabili aleatorie x_1 ed x_2 sono statisticamente indipendenti, la loro covarianza $\sigma(x_1, x_2)$ è nulla, e sono pertanto dette INCORRELATE⁹.

Questa proprietà è valida in *una sola* direzione, in quanto se per due v.a. si verifica una covarianza $\sigma(x_1, x_2)$ nulla, *non è detto* che esse siano statisticamente indipendenti¹⁰. L'unica circostanza in cui l'incorrelazione tra variabili aleatorie *ne implica* l'indipendenza statistica è quella relativa al *caso gaussiano*, come mostrato al § 6.5.1.

⁷Omettiamo per brevità di indicare la variabile aleatoria a pedice della densità di probabilità, così come gli istanti temporali.

⁸Ancora una semplificazione di notazione, da intendersi ricordando che un valore atteso è in realtà un integrale che pesa l'argomento per la rispettiva d.d.p., a cui si applica la proprietà distributiva del prodotto per una somma.

⁹Notiamo immediatamente che il termine più corretto sarebbe "incovarianzate"; l'uso (ormai storico e consolidato) dell'espressione *incorrelate* deriva probabilmente dal considerare usualmente grandezze a media nulla, per le quali le due espressioni coincidono.

¹⁰Vedi ad esempio il caso F) di fig. 7.2, in cui le variabili aleatorie risultano incorrelate, ma non sono per nulla indipendenti, dato che le coppie di valori si dispongono su di un cerchio. Ciò rappresenta un caso di dipendenza *non lineare*, in quanto l'equazione che descrive la circonferenza è quadratica.

7.1.3 Correlazione di un processo stazionario ergodico

Qualora il processo da cui si estraggono x_1 e x_2 sia *stazionario* almeno *in senso lato* (§ 6.3.4), la relativa d.d.p. congiunta dipende solamente dalla differenza $\tau = t_2 - t_1$ tra gli istanti t_2 e t_1 (vedi fig. 7.1), e dunque anche la correlazione (7.1) dipende solamente da τ :

$$m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2) = E\{x_1 x_2\} = \iint x_1 x_2 \cdot p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; \tau) dx_1 dx_2 = m_{XX}^{(1,1)}(\tau) \quad (7.4)$$

che quindi viene ora indicata come $m_{XX}^{(1,1)}(\tau)$.

Se poi il processo oltre che stazionario è anche *ergodico* (§ 6.3.5), allora la media di insieme $m_{XX}^{(1,1)}(\tau)$ assume lo stesso valore della corrispondente media temporale. Pertanto nel caso in cui non si conosca la $p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; \tau)$ ma si disponga invece di qualche realizzazione del processo, anziché tramite la (7.4) la correlazione può essere ottenuta dalla *media temporale* $x(t, \theta_i) x(t + \tau, \theta_i)$ (vedi § 6.3.2) calcolata per una qualunque realizzazione θ_i . Tale media temporale viene ora indicata come $\mathcal{R}_x(\tau)$, e corrisponde a

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, \theta_i) x(t + \tau, \theta_i) dt \quad \forall \theta_i \in \Theta \quad (7.5)$$

Dato che per processi stazionari ed ergodici le (7.4) e (7.5) forniscono lo stesso risultato, per essi anche la correlazione (7.4) viene indicata con la notazione $\mathcal{R}_x(\tau)$ anziché $m_{XX}^{(1,1)}(\tau)$. Fermo restando che nel caso in cui non si disponga di realizzazioni del processo, ma si conosca la $p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; \tau)$, la correlazione deve essere ottenuta dall'espressione (7.4).

Prima di utilizzare (al § 7.2.1) il nuovo descrittore statistico *correlazione* $\mathcal{R}_x(\tau)$ per giungere ad una espressione della densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ per processi ergodici, partiamo dal punto di contatto tra questi ultimi ed i segnali certi rappresentato dalle (7.4) e (7.5), per approfondire l'interpretazione di $\mathcal{R}_x(\tau)$ nel contesto *deterministico*.

7.1.4 Autocorrelazione e intercorrelazione di segnali certi

Quando la media temporale (7.5) è calcolata per un segnale *deterministico* $x(t)$ ovvero

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \overline{x(t) x(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t + \tau) dt$$

viene chiamata *integrale di autocorrelazione* ed ancora indicata con $\mathcal{R}_x(\tau)$ come per la (7.5), entrambe valide per segnali *di potenza*. Nel caso invece di un segnale *di energia* la (7.5) darebbe risultato nullo, e per i segnali di energia la definizione di *autocorrelazione* diviene

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t + \tau) dt \quad (7.6)$$

in cui l'operatore di coniugato generalizza l'espressione anche al caso di segnali complessi.

Confrontando le (7.6) e (7.5) con la (3.5) di pag. 64, notiamo come l'autocorrelazione valuti l'energia (o potenza) *mutua* (ovvero un *prodotto scalare*) tra un segnale $x(t)$ ed una sua *copia anticipata*: in questo senso, un valore elevato di $\mathcal{R}_x(\tau)$ indica che per quel valore di τ (o di anticipo) le due copie del segnale *si somigliano*, mentre un suo valore nullo è indice (per quella scelta di τ) di *ortogonalità*.

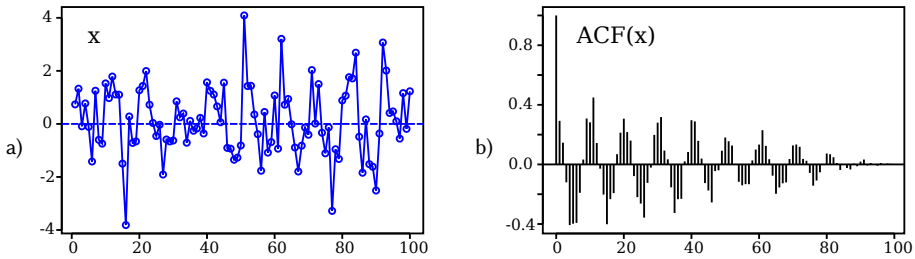


Figura 7.3: a) - sequenza sinusoidale immersa nel rumore; b) - sua autocorrelazione

Esempio In fig. 7.3-a) è raffigurata una sequenza numerica x_n a media nulla ottenuta da una sinusoida a cui è sovrapposto rumore, mentre a destra si mostra la relativa autocorrelazione, che nel caso numerico si valuta come $\mathcal{R}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n x_{n+k}$. Notiamo come $\mathcal{R}_x(k)$ presenti dei massimi per k multiplo del periodo della sinusoida, effetto della *sincronizzazione* tra il segnale e la sua copia traslata.

Intercorrelazione Lo stesso concetto di similitudine legato ad uno scorrimento temporale è tanto più valido qualora il prodotto scalare¹¹ sia calcolato tra due *diversi* segnali $x(t)$ ed $y(t)$; in tal caso l'operazione prende il nome di integrale di *intercorrelazione*, che per segnali *di energia* ha espressione:

$$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt \quad (7.7)$$

mentre per quelli *di potenza* è definito come $\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) y(t + \tau) dt$.

Nel caso in cui $\mathcal{R}_{xy}(\tau) = 0$ per qualsiasi τ i segnali sono detti *ortogonali*, con riferimento allo spazio dei segnali per il quale $\mathcal{R}_{xy}(\tau)$ è un prodotto scalare, ma anche *incorrelati*, con riferimento all'aspetto statistico (7.2) per segnali a media nulla.

Legame con la convoluzione Le espressioni (7.6) e (7.7) sono anche indicate come *funzioni di autocorrelazione* e *intercorrelazione*, e dato che il loro argomento è un tempo (l'intervallo tra due campioni) $\mathcal{R}_x(\tau)$ e $\mathcal{R}_{xy}(\tau)$ possono essere anche viste come *segnali* (funzione di τ anziché di t). Nello studio abbiamo già incontrato un integrale (di convoluzione) il cui risultato è una funzione del tempo; la somiglianza tra i due è più profonda di una semplice analogia, in quanto risulta essere¹²

$$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt = x^*(-t) * y(t) \quad (7.8)$$

in cui $*$ è il consueto simbolo di convoluzione.

¹¹In effetti in base alle definizioni date al § 2.4.3 risulta $\langle \bar{a}(t), \bar{b}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) b^*(t) dt$ in cui è il secondo segnale ad essere coniugato, e non il primo come per la (7.7): dunque quest'ultima espressione corrisponde (in termini di prodotto scalare) a

$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt = \langle y(t + \tau), x(t) \rangle = \langle y(t), x(t - \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) x^*(t - \tau) dt$ equivalente alla (7.7) in quanto anziché anticipare $y(t)$, viene ritardato $x(t)$. Si preferisce comunque la definizione (7.7) per la sua somiglianza formale a quella di una convoluzione.

¹²Il risultato (7.8) si basa sul cambio di variabile $\theta = t + \tau$ che permette di scrivere

$$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\theta - \tau) y(\theta) d\theta = x^*(-\tau) * y(\tau)$$

Costruzione grafica L'ultima osservazione invita a realizzare la costruzione grafica di fig. 7.4, che illustra la procedura per il calcolo di un valore dell'integrale di autocorrelazione di $x(t) = \text{rect}_{2T}(t)$, molto simile a quella già illustrata per la convoluzione (vedi § 3.4.3), con la differenza che ora *non si effettuano* ribaltamenti di asse, e la traslazione è *all'indietro* (anticipo temporale) anziché in avanti. Per un rettangolo reale risulta $x(t) = x^*(-t)$, e dunque l'operazione equivale a calcolare $x(t) * x(t)$, ma a differenza della convoluzione alla seconda riga di fig.7.4 il termine $x(t + \tau)$ per $\tau > 0$ si trasla *a sinistra*. Alla terza riga è mostrato il prodotto dei segnali soprastanti, di cui l'integrale calcola l'area, fornendo il valore di $\mathcal{R}_x(\tau)$ *a destra*, come in figura.

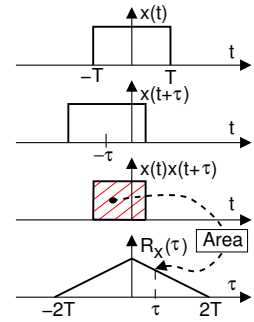


Figura 7.4: Autocorrelazione di un rettangolo

Per un esempio *animato*, vedi l'ultimo link della nota 22 a pag. 72.

7.1.5 Proprietà dell'autocorrelazione

Dedichiamoci ora ad approfondire alcuni aspetti che caratterizzano la funzione di autocorrelazione, fondamentali per meglio comprendere le indicazioni che $\mathcal{R}_x(\tau)$ può fornire a riguardo del segnale $x(t)$.

Invarianza rispetto alle traslazioni temporali Le funzioni di autocorrelazione $\mathcal{R}_x(\tau)$ ed $\mathcal{R}_y(\tau)$ di due segnali $x(t)$ e $y(t) = x(t + \theta)$ sono identiche¹³. Notando ora che i due segnali hanno uguale modulo $|X(f)| = |Y(f)|$ e spettro di fase che differisce per un termine lineare (pag. 66), osserviamo che l'invarianza rispetto alle traslazioni è un aspetto di un risultato più generale, ossia

l'autocorrelazione non tiene conto dell'informazione legata allo spettro di fase dei segnali

In effetti $x(t)$ e $y(t)$ hanno anche la stessa densità spettrale di energia $\mathcal{E}_x(f) = \mathcal{E}_y(f) = |X(f)|^2$, come approfondiremo tra breve al § 7.2.1.

Estensione temporale L'autocorrelazione di un segnale di durata limitata è anch'essa di durata limitata, di estensione doppia rispetto a quella del segnale originario, come mostrato in fig. 7.4. Nel caso di un segnale di energia a durata illimitata, dato che per ottenere $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$ occorre che $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, $\mathcal{R}_x(\tau)$ tende a zero allo stesso modo.

Nel caso infine di un segnale di potenza, come per un membro di processo ergodico in cui la $\mathcal{R}_x(\tau)$ (7.5) eguaglia la media di insieme $m_{XX}^{(1,1)}(\tau)$, dato che quest'ultima tende a zero per $\tau \rightarrow \infty$, lo stesso avviene anche per $\mathcal{R}_x(\tau)$, ad eccezione dei due casi seguenti di segnale periodico, oppure a media non nulla.

¹³Infatti otteniamo

$$\mathcal{R}_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t) y(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t + \theta) x(t + \theta + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(a) x(a + \tau) da = \mathcal{R}_x(\tau)$$

Segnali periodici L'autocorrelazione di un segnale periodico di periodo T è anch'essa periodica, con lo stesso periodo. Infatti per $\tau = nT$ il secondo fattore integrando in (7.5) è traslato di un numero intero di periodi. Pertanto non occorre calcolare l'integrale su tutto l'asse dei tempi, e l'autocorrelazione dei segnali periodici è definita come

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_x^T(\tau - nT) \quad \text{in cui} \quad \mathcal{R}_x^T(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t + \tau) dt \quad (7.9)$$

Componente continua Qualora un segnale di potenza $x(t)$, od un processo stazionario, possa essere scritto come $x(t) = x_0(t) + a$ in cui $E\{x_0(t)\} = 0$ ed a una costante, troviamo che $m_x = a$, e che¹⁴ $\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{R}_{x_0}(\tau) + a^2$: dunque in questo caso l'autocorrelazione non si annulla per $t \rightarrow \infty$, ma tende al valore m_x^2 .

Massimo nell'origine Per una autocorrelazione risulta $\mathcal{R}_x(0) = \max_{\tau} \{\mathcal{R}_x(\tau)\}$, ovvero il suo valore per $\tau = 0$ è il massimo rispetto a qualunque altro τ . In particolare, $\mathcal{R}_x(0)$ è uguale all'energia del segnale $x(t)$, od alla sua potenza se $x(t)$ è di potenza, ossia

$$\mathcal{R}_x(0) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \mathcal{E}_x > |\mathcal{R}_x(\tau \neq 0)| & \text{se } x(t) \text{ è di energia} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \mathcal{P}_x \geq |\mathcal{R}_x(\tau \neq 0)| & \text{se } x(t) \text{ è di potenza} \end{cases}$$

Notiamo inoltre che se $x(t)$ è periodico, l'ultimo segno \geq è una eguaglianza per τ multiplo di un periodo.

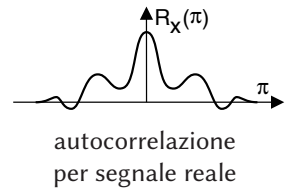
Simmetria coniugata E' possibile verificare¹⁵ che risulta

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{R}_x^*(-\tau) \quad (7.10)$$

e ciò consente (vedi § 3.3) di affermare che $\mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$ è reale. Per l'intercorrelazione si ottiene un risultato simile, ovvero

$$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \mathcal{R}_{yx}^*(-\tau)$$

Nel caso in cui $x(t)$ sia reale, si ottiene $\mathcal{R}_x(-\tau) = \mathcal{R}_x(\tau)$, ovvero l'autocorrelazione di un segnale reale è reale pari, alla stregua (come mostreremo ora) della sua trasformata di Fourier.



¹⁴Adottando la notazione adatta al caso di un processo, in virtù della stazionarietà possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(\tau) &= E\{(x_0(t) + a)(x_0(t + \tau) + a)\} = \\ &= E\{x_0(t)x_0(t + \tau)\} + aE\{x_0(t)\} + aE\{x_0(t + \tau)\} + a^2 = \\ &= \mathcal{R}_{x_0}(\tau) + 2a \cdot 0 + a^2 = \mathcal{R}_{x_0}(\tau) + a^2 \end{aligned}$$

¹⁵Iniziamo con il riscrivere l'espressione $\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t + \tau) dt$ operando il cambio di variabile $t + \tau = \alpha$, da cui $t = \alpha - \tau$ e $dt = d\alpha$, ottenendo

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\alpha - \tau) x(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) x^*(\alpha - \tau) d\alpha = \mathcal{R}_x^*(-\tau)$$

mentre il risultato per $\mathcal{R}_{xy}(\tau)$ si ottiene in modo simile.

7.2 Spettro di densità di potenza

Siamo finalmente in grado di caratterizzare questa densità spettrale sia per il caso dei processi che per gli altri tipi di segnale, di potenza, periodico, o di energia. Lo strumento che lo consente è il...

7.2.1 Teorema di Wiener

Si enuncia senza troppe complicazioni¹⁶:

Lo spettro di densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ (o di energia $\mathcal{E}_x(f)$) di un segnale $x(t)$ certo o aleatorio è pari alla trasformata di Fourier della relativa funzione di autocorrelazione, ovvero $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$

La dimostrazione del teorema per segnali di energia è straordinariamente semplice:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) X(f) e^{j2\pi f\tau} df = \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{X^*(f) X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{E}_x(f)\}\end{aligned}$$

in cui abbiamo prima applicato il teorema di Parseval (pag. 64), poi la proprietà di traslazione nel tempo, e quindi (vedi § 3.2) riconosciuta $X^*(f) X(f)$ come la densità di energia $\mathcal{E}_x(f)$.

Come anticipato, il teorema è valido anche per segnali di potenza, per i quali la funzione di autocorrelazione $\mathcal{R}_x(\tau)$ da cui partire è quella espressa dalla (7.5) ⁽¹⁷⁾. Nel caso di processi ergodici, ogni membro del processo possiede la stessa $\mathcal{P}_x(f)$, che dunque può essere calcolata a partire dalla $\mathcal{R}_x(\tau)$ di uno qualunque di essi. Nel caso di processi stazionari almeno in senso lato, infine, l'autocorrelazione da cui partire¹⁸ è il momento misto $m_{XX}^{(1,1)}(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\}$ calcolato come media di insieme dalla (7.4), e rappresenta il modo più generale di procedere, come applicato al § 7.7.4 per il caso di un segnale dati.

Discussione Il teorema di Wiener è (nella sua semplicità) uno strumento molto potente che può costituire una *strada alternativa* per verificare ed estendere risultati noti.

¹⁶In realtà le attribuzioni di questo risultato sono molteplici, comprendendo anche *Khinchin, Einstein e Kolmogorov* - fonte https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Wiener-Khinchin

¹⁷In tal caso una stima della densità di potenza può essere ottenuta mediante periodogramma (§ 7.3.1) calcolato su di un segmento di segnale $x_T(t)$ di durata T estratto da $x(t)$, e facendo tendere $T \rightarrow \infty$, ovvero $\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$. Dato che $|X_T(f)|^2$ è proprio la densità di energia $\mathcal{E}_{x_T}(f)$ di $x_T(t)$, per il teorema di Wiener la sua anti-trasformata corrisponde alla funzione di autocorrelazione $\mathcal{R}_{x_T}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{E}_{x_T}(f)\}$ di $x_T(t)$, come definita dalla (7.6). Operando il passaggio al limite, si ottiene che

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{P}_x(f)\} = \mathcal{F}^{-1} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \right\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathcal{E}_{x_T}(f) \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathcal{R}_{x_T}(\tau)$$

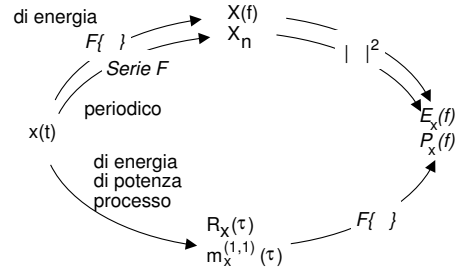
corrispondente alla autocorrelazione $\mathcal{R}_x(\tau)$ dell'intero segnale, come espressa dalla (7.5).

¹⁸La dimostrazione del caso dei processi viene svolta al § 7.7.3; la sua validità è vincolata a processi per i quali $\int |\tau \cdot m_{XX}^{(1,1)}(\tau)| d\tau < \infty$, ed è basata sulla considerazione che se la $\mathcal{P}_x^\theta(f)$ di un particolare membro θ è valutabile come $\mathcal{P}_x^\theta(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T^\theta(f)|^2$, allora la sua media di insieme può scriversi come $\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_\Theta \left\{ |X_T^\theta(f)|^2 \right\}$.

Ad esempio, la proprietà di massimo nell'origine per l'autocorrelazione $\mathcal{R}_x(0) = \mathcal{P}_x$ può ora essere ricavata da quella del valore iniziale eq. (3.8):

$$\mathcal{R}_x(0) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{P}_x(f) \} \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f) df = \mathcal{P}_x$$

D'altra parte, la validità del teorema anche per segnali periodici e di energia consente di intraprendere per essi *due percorsi alternativi* per il calcolo delle corrispondenti $\mathcal{P}_x(f)$ e $\mathcal{E}_x(f)$, come illustrato nella figura a lato.



Dato che in virtù del teorema di Wiener è ora possibile definire una $\mathcal{P}_x(f)$ anche per processi e segnali di potenza, molto spesso nel testo ci si riferirà alle densità di potenza o di energia anziché alle trasformate dei segnali, in modo da applicare i risultati a tutti i casi possibili.

Applichiamo ora ad alcuni casi notevoli di segnale certo e processo aleatorio la relazione tra $\mathcal{P}_x(f)$ e $\mathcal{R}_x(\tau)$ espressa dal teorema di WIENER.

7.2.2 Segnale periodico

In questo caso $x(t)$ con periodo T può essere espresso mediante la relativa serie di Fourier (2.7) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$ riferita alla frequenza fondamentale $F = 1/T$ (o prima armonica), e sviluppando in tal senso¹⁹ la (7.9) si ottiene che l'autocorrelazione di $x(t)$ ha espressione $\mathcal{R}_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 e^{j2\pi n F \tau}$, ovvero può essere espressa in serie di Fourier, e quindi è a sua volta periodica, come già osservato. La relativa densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ risulta dunque pari a

$$\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_x(\tau) \} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \delta(f - nF) \tag{7.11}$$

che costituisce una conferma del teorema di Parseval (2.13). A pag. 229 sono riportati alcuni esempi di autocorrelazione e densità di potenza per segnali periodici.

Componente continua Come osservato a pag. 196, se il segnale può essere scritto come $x(t) = x_0(t) + a$ in cui $E \{ x_0(t) \} = 0$ ed a è una costante, si ottiene $\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{R}_{x_0}(\tau) + a^2$ e dunque $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_x(\tau) \} = \mathcal{P}_{x_0}(f) + a^2 \delta(f)$, ossia la relativa densità spettrale presenta un impulso nell'origine di area a^2 . Ovvero, dal punto di vista *opposto*,

¹⁹Partendo dalla (7.9) $\mathcal{R}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t + \tau) dt$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^* e^{-j2\pi n F t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m e^{j2\pi m F (t+\tau)} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_n^* X_m \frac{1}{T} e^{j2\pi m F \tau} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi (m-n) F t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 e^{j2\pi n F \tau} \end{aligned}$$

in cui l'ultima uguaglianza è frutto della proprietà di ortogonalità degli esponenziali (2.3).

un impulso nell'origine di $\mathcal{P}_x(f)$ indica la presenza di una componente continua in $x(t)$.

7.2.3 Processo armonico

Si tratta del segnale sinusoidale introdotto a pag. 163 e la cui fase iniziale è aleatoria, espresso come

$$x(t, \theta) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) \tag{7.12}$$

in cui il parametro θ è una v.a. con d.d.p. uniforme tra $-\pi$ e π , ovvero $p_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \text{rect}_{2\pi}(\theta)$. In tal caso $x(t, \theta)$ costituisce un processo ergodico (vedi § 6.3.7), la cui d.d.p.

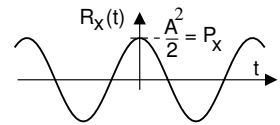
$$p_X(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}$$

è graficata a pagina 163.

Dato che a ciascuna realizzazione del processo armonico (ad esempio quella con $\theta = 0$) corrisponde la medesima²⁰ densità di potenza²¹ $\mathcal{P}_x(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$, possiamo ottenere l'autocorrelazione $\mathcal{R}_x(t)$ (7.12) senza dover svolgere l'integrale (7.9), e neanche la media di insieme (7.4). Infatti, per il teorema di Wiener si ha

$$\mathcal{R}_x(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{P}_x(f) \} = \frac{A^2}{4} [e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}] = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 t)$$

Questo risultato conferma che l'autocorrelazione di un segnale periodico è periodica; riflettiamo dunque sulla circostanza che anche un seno, od un coseno con qualunque altra fase, avrebbe avuto la stessa $\mathcal{R}_x(t)$. Ciò è d'altra parte evidente, avendo tutti questi segnali uguale densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$.



7.2.4 Processo gaussiano bianco limitato in banda

Un processo $n(t)$ è chiamato *bianco* quando la densità di potenza è *costante* in frequenza, ovvero quando si esprime come

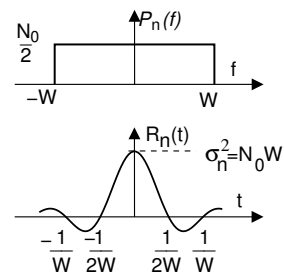
$$\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}_{2W}(f)$$

in cui W è l'occupazione di banda a frequenze positive. Per questo caso l'autocorrelazione vale

$$\mathcal{R}_n(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{P}_n(f) \} = N_0 W \text{sinc}(2Wt) \tag{7.13}$$

e possiamo pertanto constatare che si ottiene

$$\mathcal{R}_n(0) = \mathcal{P}_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_n(f) df = \int_{-W}^W \frac{N_0}{2} df = N_0 W = \sigma_n^2$$



²⁰Infatti le diverse realizzazioni (7.12) al variare di θ differiscono solo per una traslazione temporale, a cui in frequenza corrisponde un termine di fase lineare, che non incide sulla $\mathcal{P}_x(f)$.

²¹Il risultato si ottiene applicando la (7.11) all'unica armonica presente, e considerando che la potenza totale $\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2}$ si distribuisce per metà a frequenza positiva e per metà negativa.

in cui l'ultima eguaglianza sussiste (vedi eq. (6.9) a pag. 152) in quanto l'assenza di impulsi nell'origine per $\mathcal{P}_n(f)$ corrisponde ad un $n(t)$ a media nulla. Inoltre, dato che $\mathcal{R}_n(t)$ si azzerava per $t = k/2W$, osserviamo che campionando $n(t)$ con periodo $T_c = 1/2W$ si ottengono valori *incorrelati*, e se il processo è gaussiano, anche statisticamente indipendenti (vedi § 6.5.1). Questo risultato giustifica, almeno da un punto di vista teorico, una ipotesi che viene spesso fatta: quella di trovare, sovrapposti ai campioni di un segnale limitato in banda, dei campioni di rumore *statisticamente indipendenti*.

All'aumentare di W , $\mathcal{R}_n(t)$ tende a zero più rapidamente, cosicché il rumore si mantiene correlato per un tempo sempre minore, ovvero due campioni separati da uno stesso intervallo temporale t hanno una correlazione sempre minore. Un risultato simile vale anche più in generale, in quanto l'autocorrelazione $\mathcal{R}_x(t)$ di un qualsiasi processo a media nulla (tranne nel caso periodico, riconducibile ad una combinazione di processi armonici) tende a 0 con $t \rightarrow \infty$, ovvero da un certo t in poi la correlazione è trascurabile.

Infine, se immaginiamo il rumore bianco limitato in banda come il risultato del transito di un processo gaussiano a banda infinita (quindi, con $\mathcal{R}_n(t) = \delta(t)$) attraverso un filtro passa basso ideale con $H(f) = \text{rect}_{2W}(f)$ (vedi § 15.4.1), ci accorgiamo che la correlazione (7.13) tra campioni di rumore in uscita presi ad istanti diversi ($t \neq 0$) è una diretta conseguenza della memoria introdotta dalla risposta impulsiva $h(t) = 2W \text{sinc}(2Wt)$ sul segnale in transito, dato che l'operazione di convoluzione tra $n(t)$ e $h(t)$ rende i valori in uscita una *combinazione lineare* di quelli (passati) in ingresso (vedi § 3.4.3).

Esercizio Sia dato un processo gaussiano ergodico a media nulla e con densità di potenza

$$\mathcal{P}_x(f) = P_x \frac{2\beta}{\beta^2 + 4(\pi f)^2} \text{ in cui } \beta = 0.2 \text{ e } P_x = 5.$$

1. Esprimere la relativa funzione di autocorrelazione $\mathcal{R}_x(\tau)$;
2. esprimere la d.d.p. $p_X(x)$ di una v.a. x estratta dal processo ad un istante casuale;
3. esprimere vettore medio \mathbf{m}_x e matrice di covarianza Σ_x di una coppia di v.a. x_1 e x_2 estratte con un intervallo τ , ovvero $x_1 = x(t)$ e $x_2 = x(t + \tau)$, per un valore di $\tau = 10$.

Svolgimento In base alla tabella al § 3.8.8 risulta che $\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2\beta}{\beta^2 + 4(\pi f)^2} \right\} = e^{-\beta|t|}$, dunque

1. $\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{P}_x(f) \} = P_x e^{-\beta|\tau|} = 5 \cdot e^{-0.2|\tau|}$;
2. abbiamo evidentemente a che fare con una v.a. gaussiana, dunque $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$ in cui $\sigma_x^2 = P_x = 5$ in quanto a media nulla, e pari al massimo di $\mathcal{R}_x(\tau)$ per $\tau = 0$;
3. la coppia $x_1 x_2$ è un vettore aleatorio gaussiano bidimensionale, il cui valor medio è nullo in base alla stazionarietà ed all'essere il processo a media nulla, mentre Σ_x è una matrice 2×2 sulla cui diagonale compare $\mathcal{R}_x(0) = \sigma_x^2$ mentre nelle altre due posizioni compare la covarianza $\sigma_{x_1 x_2} = m_{x_1 x_2}^{(1,1)}(\tau = 10) = \mathcal{R}_x(\tau = 10) = 5 \cdot e^{-0.2 \cdot 10} = 0.68$, dunque $\mathbf{m}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\Sigma_x = \begin{bmatrix} 5 & 0.68 \\ 0.68 & 5 \end{bmatrix}$.

7.2.5 Processo di segnale dati

Al § 15.1.2 descriveremo un generico segnale numerico come una somma di repliche di una funzione $g(t)$, ognuna moltiplicata per un diverso valore a_n rappresentativo delle informazioni da trasmettere:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT + \theta) \quad (7.14)$$

La presenza della variabile aleatoria θ a distribuzione uniforme tra $\pm \frac{T}{2}$ (per cui $p_\theta(\theta) = \frac{1}{T} \text{rect}_T(\theta)$), rende $x(t)$ un processo ergodico (vedi pag. 164).

Si mostrerà in appendice (§ 7.7.4) che, nelle ipotesi in cui le ampiezze a_n siano determinazioni di variabili aleatorie *indipendenti ed identicamente distribuite*, a *media nulla* e varianza σ_A^2 ⁽²²⁾, la densità spettrale di potenza del processo (7.14) risulta

$$\mathcal{P}_x(f) = \sigma_A^2 \frac{\mathcal{E}_g(f)}{T} \quad (7.15)$$

mentre nel caso in cui gli a_n siano *statisticamente dipendenti*, e/o a *media non nulla*, il risultato è più complesso (vedi eq. (7.43)). Limitandoci ad *interpretare* il risultato *semplice* espresso dalla (7.15), notiamo che $\mathcal{E}_g(f)$ è la densità di energia di una singola replica di $g(t)$, la cui ripetizione, con periodo T , fornisce una densità di potenza *media* $\frac{\mathcal{E}_g(f)}{T}$. Se ogni replica di $g(t)$ è moltiplicata per una v.a. indipendente a media nulla e varianza (potenza) σ_A^2 , la densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ aumenta di egual misura (vedi § 7.5.3).

7.3 Stima spettrale

Il teorema di Wiener (§ 7.2.1) ci aiuta qualora si desideri conoscere la densità di potenza per un processo ergodico, e se ne conosca l'autocorrelazione $m_X^{(1,1)}(\tau) = \mathcal{R}_X(\tau)$. Ma si ha spesso a che fare con processi di cui, pur ricorrendo le ipotesi di ergodicità, si ignorano le statistiche di insieme: un approccio può allora essere quello di *stimare* $\mathcal{R}_X(\tau)$ a partire dalle realizzazioni, come mostrato al § 7.5.4, e da quella ottenere $\mathcal{P}_x(f)$. Un diverso caso tipico è quello di un segnale che, seppur rappresentativo di molti altri, presenta caratteristiche spettrali variabili nel tempo, e sono proprio queste *variazioni* a convogliare informazione²³. In tal caso conviene allora stimare direttamente $\mathcal{P}_x(f)$ senza passare dall'autocorrelazione, a partire da un segmento temporale del segnale. Esistono al riguardo tecniche differenti, come ad es. quella riportata al § 10.1.2; per ora ci limitiamo ad un caso *semplice* ma di rilievo teorico.

²²Media m_A e varianza σ_A^2 sono qui riferite ai valori multilivello a^k (con $k = 1, 2, \dots, L$) che un generico simbolo a_n può assumere, pesati con le rispettive probabilità p_k , ossia

$$m_A = \sum_{k=1}^L p_k a^k \quad \text{e} \quad \sigma_A^2 = \sum_{k=1}^L p_k (a^k - m_A)^2$$

²³Un esempio può essere un segnale sonoro, ad esempio una voce recitante, per il quale vogliamo studiare le caratteristiche spettrali *dei diversi suoni* della lingua (i fonemi), per confrontarle con quelle di un altro individuo, o per ridurre la quantità di dati necessaria a trasmettere il segnale in forma numerica (vedi § 10.1.2), o per realizzare un dispositivo di riconoscimento vocale.

7.3.1 Periodogramma

Data una realizzazione $x(t, \theta_i)$ di un processo, individuamo un intervallo temporale T su cui definire un segnale a durata limitata $x_T(t) = x(t, \theta_i) \text{rect}_T(t)$. Questo segnale è di energia, con trasformata $X_T(f)$ e densità di energia $\mathcal{E}_{x_T}(f) = |X_T(f)|^2$, e sotto le ipotesi di stazionarietà, da questo si può ottenere una stima $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ della densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ dell'intero segnale, semplicemente dividendo $\mathcal{E}_{x_T}(f)$ per la durata del segmento, ovvero

$$\widehat{\mathcal{P}}_x(f) = \mathcal{P}_{x_T}(f) = \frac{|X_T(f)|^2}{T} \quad (7.16)$$

ottenendo una funzione della frequenza indicata come *periodogramma*, nome legato all'uso che ne fu inizialmente fatto, per scoprire tracce di periodicità in un segnale *rumoroso*. Al tendere di T ad ∞ , la (7.16) tende alla *vera* densità di potenza $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} = \mathcal{P}_x(f)$ della realizzazione $x_T(t, \theta_i)$ e, se questa appartiene ad un processo ergodico²⁴, a quella di un qualunque altro membro.

Polarizzazione e risoluzione spettrale Nel caso reale in cui T non tende ad infinito, si può mostrare²⁵ che usando $\mathcal{P}_{x_T}(f)$ (eq. (7.16)) come una *stima* $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ della vera densità $\mathcal{P}_x(f)$ del processo, si ottiene al suo posto

$$\widehat{\mathcal{P}}_x(f) = \mathcal{P}_x(f) * T (\text{sinc}(fT))^2 \quad (7.17)$$

ossia una distorsione della stessa natura di quella osservato al § 3.8.4 a riguardo del procedimento di *finestratura temporale*, e che mostra come lo stimatore è *polarizzato*²⁶, e caratterizzato da una *risoluzione spettrale*²⁷ (§ 3.8.4) dell'ordine di $1/T$ Hz.

²⁴Nel caso contrario in cui $x(t, \theta)$ non sia ergodico, la sua densità spettrale può essere definita come $\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left\{\frac{|X_T(f)|^2}{T}\right\}$.

²⁵Per una determinata frequenza f_0 , il valore $\mathcal{P}_{x_T}(f_0) = \frac{|X_T(f_0)|^2}{T}$ è una variabile aleatoria (dipende infatti da θ), il cui valore atteso $m_T = E_\theta\{\mathcal{P}_{x_T}(f_0)\}$ vorremmo fosse pari alla vera densità $\mathcal{P}_x(f_0)$, e la cui varianza $\sigma_T^2 = E_\theta\{(\mathcal{P}_{x_T}(f_0) - \mathcal{P}_x(f_0))^2\}$ vorremmo che diminuisse al crescere di T . Per verificare se tali proprietà siano soddisfatte, valutiamo innanzitutto il *valore atteso* del periodogramma, a partire dalle relazioni fornite dal teorema di Wiener applicato ad $X_T(f)$, e cioè $|X_T(f)|^2 = \mathcal{E}_{x_T}(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_{x_T}(\tau)\}$:

$$\begin{aligned} E_\theta\{\mathcal{P}_{x_T}(f)\} &= E_\theta\left\{\mathcal{F}\left\{\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t, \theta) \text{rect}_T(t) x(t + \tau, \theta) \text{rect}_T(t + \tau) dt\right\}\right\} = \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} E_\theta\{x(t, \theta) x(t + \tau, \theta)\} \text{rect}_T(t) \text{rect}_T(t + \tau) dt\right\} = \\ &= \mathcal{F}\left\{\mathcal{R}_x(\tau) \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_T(t) \text{rect}_T(t + \tau) dt\right\} = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau) \cdot \text{tri}_{2T}(\tau)\} = \\ &= \mathcal{P}_x(f) * T (\text{sinc}(fT))^2 \end{aligned}$$

Osserviamo quindi come una finestra di segnale rettangolare ne produca una triangolare sull'autocorrelazione. Ma c'è comunque di buono che all'aumentare di T lo stimatore tende al valore vero, dato che $\lim_{T \rightarrow \infty} T (\text{sinc}(fT))^2$ tende ad un impulso.

²⁶Quando il valore atteso di uno stimatore tende al valore vero si dice (vedi § 6.6.3) che lo stimatore è *non polarizzato* (o *unbiased*); se poi aumentando la dimensione del campione, la varianza della stima tende a zero, lo stimatore è detto *consistente*. Ci consola verificare che, come commentato alla nota precedente, per $T \rightarrow \infty$ la polarizzazione tende a scomparire, rendendo la stima *asintoticamente non polarizzata*.

²⁷La risoluzione spettrale in questo caso dipende dalla larghezza del lobo principale della densità di energia della funzione finestra applicata a $\mathcal{R}_x(\tau)$, che nel caso del $\text{tri}_{2T}(\tau)$ risulta $(\text{sinc}(fT))^2$, il cui lobo

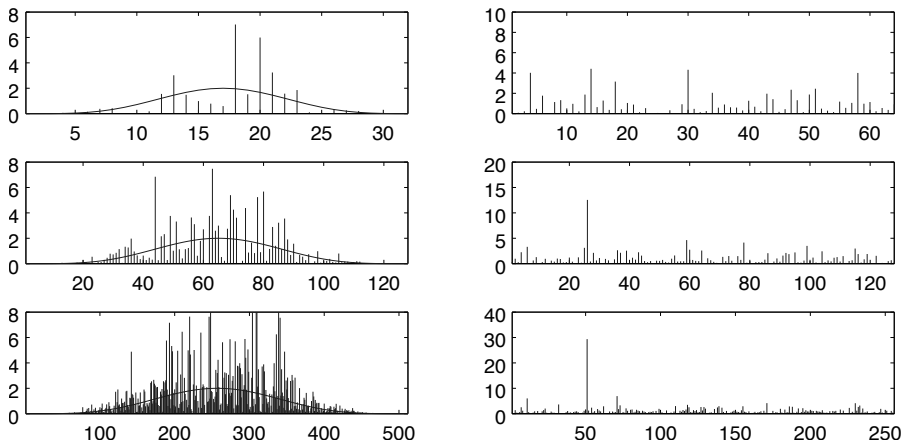


Figura 7.5: Periodogramma calcolato via FFT per rumore colorato (a sinistra) e per sinusoide immersa nel rumore (a destra), su intervalli di segnale di durata (o numero di punti) crescente (dall'alto in basso)

Varianza della stima Come discusso, la stima $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ tende al vero $\mathcal{P}_x(f)$ per T che aumenta, migliorando allo stesso tempo il potere di risoluzione in frequenza; d'altra parte però i valori di $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ per una determinata f sono pur sempre delle v.a., e la loro varianza... *non diminuisce* all'aumentare di T , rendendo lo stimatore *inconsistente!* Riprendendo la notazione della nota (25), si può infatti dimostrare²⁸ che la varianza σ_T^2 della stima (7.16) è pari al valore di $\mathcal{P}_x(f)$ stesso, ossia per ogni valore di frequenza, la deviazione standard del valore di $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ è pari a $\sqrt{\mathcal{P}_x(f)}$, indipendentemente da quanto sia grande T . Anche se la teoria prevede che la varianza di uno stimatore diminuisca con l'aumentare dei dati a disposizione (vedi (6.30) a pag. 174), questo non avviene. Il motivo può essere spiegato considerando che in una implementazione numerica mediante DFT (§ 4.5), all'aumentare di T aumenta anche il numero di valori in frequenza che sono calcolati, e dunque non si determina un reale *accumulo* di dati per uno stesso valore stimato.²⁹

Esempio Approfondiamo il senso di quanto illustrato con l'aiuto di fig. 7.5, in cui mostriamo l'esito del calcolo del periodogramma ottenuto mediante una FFT (§ 4.5.2) su di un numero variabile di punti, indicati in ascissa. Sul lato sinistro della figura, il processo $x(t, \theta_i)$ è costituito da un *rumore colorato* con $\mathcal{P}_x(f) = (1 - \cos(4\pi f T_c))^2$, che pure è mostrato in figura: come anticipato, il valore stimato $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ si discosta da quello atteso $\mathcal{P}_x(f)$ in modo tanto maggiore quanto più $\mathcal{P}_x(f)$ è grande, per qualunque durata di osservazione.

principale è appunto ampio $1/T$. Anche la risoluzione, quindi, migliora all'aumentare di T .

²⁸Vedi ad es. http://risorse.dei.polimi.it/dsp/courses/ens_l1/books/libro07secondaparte.pdf

²⁹Esistono diverse soluzioni a questo problema, tutte legate ad una riduzione della risoluzione spettrale. La prima è quella di *smussare* il $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ ottenuto, mediando i valori su frequenze vicine: tale operazione corrisponde ad un *filtraggio in frequenza*. Un secondo metodo prevede di suddividere l'intervallo di osservazione in diversi sottointervalli, calcolare il periodogramma su ciascuno di essi, e mediare i risultati.

Viceversa, la colonna di destra di fig. 7.5 mostra l'effettiva utilità del periodogramma per individuare segnali a banda stretta immersi nel rumore. In questo caso una senoide con frequenza $f_0 = \frac{f_c}{10}$ e potenza $\frac{1}{2}$ è stata sommata ad un rumore gaussiano bianco con $\sigma_n^2 = 4$, ottenendo così un SNR pari a $\frac{1}{8}$, ovvero -9 dB. Utilizzando (in alto a destra) una FFT a 128 punti (e dunque se ne mostrano la metà, vedi pag. 116), il tono presente appare difficilmente distinguibile dai valori su cui può oscillare la stima per il rumore bianco. Ma è sufficiente raddoppiare (e quadruplicare) il numero di campioni per migliorare la situazione: mentre l'ampiezza della riga alla frequenza della senoide raddoppia (ma non la varianza della sua stima), il livello di rumore si mantiene costante (notare la diversa scala verticale). Ecco dunque spiegato il motivo del suo nome ☺

7.4 Filtraggio di segnali e processi

Il teorema di WIENER § 7.2.1 ha fornito un approccio unificato alla definizione di spettro di potenza in virtù del suo legame con la funzione di autocorrelazione per tutti i tipi di segnale, compresi i processi. Riprendiamo quindi l'analisi iniziata al § 3.5.1 estendendola alla classe dei segnali aleatori, per arrivare a descrivere dal punto di vista spettrale e statistico l'uscita di un filtro con risposta impulsiva $h(t)$, ovvero ad $y(t) = x(t) * h(t)$, per i casi di segnale in ingresso di energia, periodico od aleatorio.

7.4.1 Densità spettrale in uscita da un filtro

Valutiamo innanzitutto il risultato per la densità di energia $\mathcal{E}_y(f)$ di uscita (e la rispettiva energia \mathcal{E}_y) per ingresso di energia, oppure $\mathcal{P}_y(f)$ e \mathcal{P}_y qualora in ingresso sia presente un segnale $x(t)$ di tipo periodico, di potenza, od un processo.

Segnali di energia Sappiamo che per il teorema di Parseval risulta $\mathcal{E}_y(f) = Y(f) Y^*(f)$; dato poi che $Y(f) = X(f) H(f)$, allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_y(f) &= X(f) H(f) X^*(f) H^*(f) = |X(f)|^2 |H(f)|^2 = \\ &= \mathcal{E}_x(f) |H(f)|^2 \end{aligned}$$

e dunque la densità di energia dell'uscita è pari al prodotto tra quella in ingresso e $|H(f)|^2$. A questo punto, eseguendo l'antitrasformata di Fourier di ambo i membri e ricordando la (3.22), si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{E}_y(f) \} = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{E}_x(f) |H(f)|^2 \} = \\ &= \mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau) \end{aligned}$$

ovvero

l'autocorrelazione dell'uscita di un filtro è pari alla convoluzione tra l'autocorrelazione dell'ingresso e quella della risposta impulsiva

Anticipiamo che questo risultato è valido (nei rispettivi termini) anche per i casi di segnale periodico ed aleatorio. Quindi, notiamo che $|H(f)|^2$ può essere anche vista come la densità di energia del filtro, ovvero $|H(f)|^2 = \mathcal{E}_h(f) = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_h(\tau) \}$.

A corollario sussistono le seguenti uguaglianze³⁰, tutte equivalenti ai fini del calcolo

³⁰La quarta uguaglianza sussiste in virtù del teorema di Parseval associato a quello di Wiener, mentre

dell'energia totale:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_y &= \mathcal{R}_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_y(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_x(f) |H(f)|^2 df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_x(\tau) \mathcal{R}_h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_x(\tau) \mathcal{R}_h^*(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (7.18)$$

Segnali periodici In questo caso il segnale di ingresso $x(t)$ si può esprimere nei termini di una serie di Fourier

$$x(t) = \sum_n X_n e^{j2\pi n F t}$$

a cui corrisponde una trasformata $X(f) = \sum_n X_n \delta(f - nF)$ (vedi eq. (3.12) a pag. 69) ed una densità di potenza $\mathcal{P}_x(f) = \sum_n |X_n|^2 \delta(f - nF)$ (vedi eq. (7.11)).

Anche il segnale di uscita $y(t)$ è periodico³¹, ed i suoi coefficienti di Fourier Y_n possono esprimersi nei termini di quelli dell'ingresso X_n e dei valori della risposta in frequenza (vedi § 3.5.1) come $Y_n = X_n H(nF)$, ovvero in modulo e fase come

$$|Y_n| = |X_n| |H(nF)|; \quad \arg(Y_n) = \arg(X_n) + \arg(H(nF))$$

Dato che la densità di potenza di $y(t)$ risulta pari a $\mathcal{P}_y(f) = \sum_n |Y_n|^2 \delta(f - nF)$, si ottiene

$$\mathcal{P}_y(f) = \sum_n |X_n|^2 |H(nF)|^2 \delta(f - nF) = |H(f)|^2 \mathcal{P}_x(f)$$

Di nuovo, antitrasformando si ottiene $\mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau)$.

Esercizio Sia dato il filtro in figura con

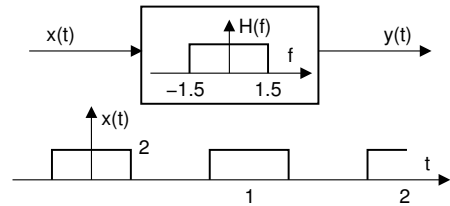
$$H(f) = \text{rect}_3(f)$$

ed al cui ingresso viene posto il segnale

$$x(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}_{\frac{1}{2}}(t - n)$$

Calcolare:

- 1) la potenza in ingresso \mathcal{P}_x ,
- 2) la potenza in uscita \mathcal{P}_y ,
- 3) l'espressione di $y(t)$.



Risposte

- 1) Calcoliamo la media temporale: $\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-1/4}^{1/4} 2^2(t) dt = \frac{4}{2} = 2$, dato che $T = 1$;
- 2) Sappiamo che $\mathcal{P}_y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(f) df$, in cui $\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2$, ed essendo $x(t)$ periodico, si ha $\mathcal{P}_x(f) = \sum_n |X_n|^2 \delta(f - nF)$. Per determinare i coefficienti della serie X_n , calcoliamo

$$X(f) = \mathcal{F}\{2\text{rect}_{\tau}(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\} = 2\tau \cdot \text{sinc}(f\tau) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$$

ed essendo $\tau = \frac{1}{2}$ e $T = 1$, risulta

$$X(f) = \text{sinc}\left(\frac{f}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - n)$$

con $X_n = \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$. Dunque, dato che gli unici impulsi che cadono entro la risposta in frequenza $H(f)$ sono quelli per $f = -1, 0$ e 1 , si ha:

l'ultima è valida se $\mathcal{R}_H(\tau)$ è reale, ossia se $h(t)$ è idealmente realizzabile e dunque reale, vedi il § 1.6.

³¹Tenendo conto della natura *lineare e permanente* del filtro, l'uscita è la combinazione degli effetti degli ingressi, che per un segnale periodico corrispondono alle armoniche.

$$\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 = \sum_{n=-1}^1 |X_n|^2 |H(n)|^2 \delta(f - n)$$

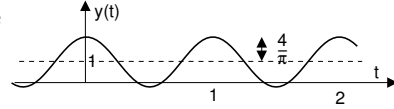
e pertanto si ottiene

$$\mathcal{P}_y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(f) df = \left(\frac{\sin -\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 1 + 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 1.811$$

3) Considerando nuovamente che $T = 1/F = 1$, e che risulta $X_n = \left\{\frac{2}{\pi}, 1, \frac{2}{\pi}\right\}$, si ottiene

$$y(t) = \sum_{n=-1}^1 X_n H(n) e^{j2\pi n t} = 1 + \frac{2}{\pi} (e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) = 1 + \frac{4}{\pi} \cos 2\pi t$$

Notiamo come il filtro lasci passare solamente la componente continua e la prima armonica.



Processi ergodici e segnali di potenza Anche in questo caso (in appendice 7.7.5) si verifica che $m_Y^{(1,1)}(\tau) = m_X^{(1,1)}(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau)$, e dunque

$$\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 \tag{7.19}$$

Il risultato ovviamente si applica a qualunque membro del processo, per i quali come noto risulta $m_X^{(1,1)}(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau)$, e dunque la (7.19) è valida anche per un qualunque segnale di potenza.

Esercizio Un processo gaussiano bianco con densità di potenza $\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2}$ attraversa un filtro causale con $h(t) = e^{-at}$. Determinare la $\mathcal{P}_y(f)$ in uscita.

Svolgimento Sebbene al § 3.8.8 sia riportato che per questo caso risulta $|H(f)|^2 = \frac{1}{a^2 + 4(\pi f)^2}$ e dunque $\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2a^2 + 8(\pi f)^2}$, verifichiamo di ottenere lo stesso risultato passando per la $\mathcal{R}_h(\tau)$, che risulta pari³² a $\frac{1}{2a} e^{-a|\tau|}$, da cui di nuovo otteniamo³³ $|H(f)|^2 = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_h(\tau)\} = \frac{1}{a^2 + 4(\pi f)^2}$.

Guadagno di potenza E' il nome con cui viene più spesso indicato (vedi § 8.2.1) il rapporto

$$|H(f)|^2 = \frac{\mathcal{P}_y(f)}{\mathcal{P}_x(f)} \tag{7.20}$$

³²Essendo $h(t)$ reale sappiamo che $\mathcal{R}_h(\tau)$ è reale pari (pag. 196), dunque è sufficiente calcolarla solamente per $\tau \geq 0$; inoltre, essendo $h(t) = 0$ per $t < 0$ l'estremo inferiore di integrazione parte da zero, ottenendo

$$\mathcal{R}_h(\tau)|_{\tau > 0} = \int_0^{\infty} h(t) h(t + \tau) dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-a(t+\tau)} dt = e^{-a\tau} \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = e^{-a\tau} \cdot \left. \frac{e^{-2at}}{-2a} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{2a} e^{-a\tau}$$

e dunque $\mathcal{R}_h(\tau) = \frac{1}{2a} e^{-a|\tau|}$

³³Tralasciando il termine $\frac{1}{2a}$ risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{-a|\tau|}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\tau|} e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{(a-j2\pi f)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)\tau} d\tau = \left. \frac{e^{(a-j2\pi f)\tau}}{a-j2\pi f} \right|_{-\infty}^0 + \left. \frac{e^{-(a+j2\pi f)\tau}}{-(a+j2\pi f)} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{a+j2\pi f + a-j2\pi f}{(a-j2\pi f)(a+j2\pi f)} = \frac{2a}{a^2 - (j2\pi f)^2} = \frac{2a}{a^2 + 4(\pi f)^2} \end{aligned}$$

ovvero $|H(f)|^2 = \frac{\mathcal{E}_y(f)}{\mathcal{E}_x(f)}$ nel caso di segnali di energia. La $|H(f)|^2$ ripropone in termini energetici il legame ingresso-uscita rappresentato da $H(f)$ (vedi § 3.5.1). Altre volte $|H(f)|^2$ è anche indicato come *risposta in potenza*, od anche *densità spettrale della risposta in potenza*, mentre la sua identificazione con la *densità di energia del filtro* $\mathcal{E}_h(f)$ usata a pag. 204 è una mia definizione *originale* (che io sappia).

7.4.2 Caratteristiche statistiche in uscita da un filtro

Approfondiamo ora lo studio della caratterizzazione statistica dell'uscita di un filtro quando in ingresso è presente un membro di un processo ergodico, per quanto riguarda la media, la varianza, e la d.d.p. del processo in uscita.

Media è pari a quella dell'ingresso moltiplicata per il *guadagno in continua* $H(0)$ del filtro, in quanto

$$\begin{aligned} m_y &= E\{y(t)\} = E\{x(t) * h(t)\} = E\{x(t)\} * h(t) = \\ &= m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = m_x H(0) \end{aligned}$$

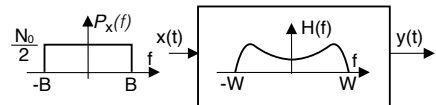
Varianza la condizione di ergodicità consente di scrivere $\mathcal{P}_y = \overline{y^2(t)} = E\{y^2\} = m_y^{(2)}$ e dunque, ricordando l'eq. (6.9), si ha

$$\sigma_y^2 = m_y^{(2)} - (m_y)^2 = \mathcal{P}_y - (m_y)^2$$

in cui per valutare \mathcal{P}_y si può far uso di relazioni analoghe alle (7.18):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_y &= \mathcal{R}_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_x(\tau) \mathcal{R}_h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Esempio In ingresso ad un filtro $H(f)$ viene posto un processo $x(t)$ bianco con $m_x = 0$ e banda B , ovvero $\mathcal{P}_x(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}_{2B}(f)$ e quindi $\mathcal{R}_x(\tau) = N_0 B \cdot \text{sinc}(2Bt)$.



Essendo il processo a media nulla, per la varianza di uscita si ottiene

$$\sigma_y^2 = \mathcal{P}_y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-B}^B |H(f)|^2 df \leq \frac{N_0}{2} \mathcal{R}_h(0)$$

con il segno di uguale se la *larghezza di banda* W di $H(f)$ è minore di B ³⁴. Per quanto riguarda la densità spettrale di potenza $\mathcal{P}_y(f)$ di uscita si applica la (7.19), ottenendo $\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2$ con $|f| \leq B$: dunque il relativo processo $y(t)$ di uscita *non è più bianco*, ed in questo caso si dice *colorato*. A ciò corrisponde anche una modifica della funzione di autocorrelazione, che non è più un sinc, ma ora vale $\mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau) = N_0 B \cdot \text{sinc}(2Bt) * \mathcal{R}_h(\tau)$. Ciò significa che mentre prima del filtro (per il processo bianco) due valori estratti in istanti multipli di $1/2B$ erano incorrelati, l'operazione di filtraggio ha introdotto *un legame* tra i valori estratti a tali intervalli³⁵.

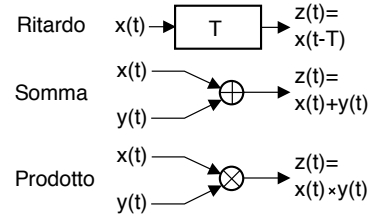
³⁴Infatti in tal caso $\int_{-W}^W |H(f)|^2 df$ è proprio pari all'energia della $h(t)$; se viceversa $W > B$ una parte di $|H(f)|^2$ cade *al di fuori* degli estremi di integrazione $(-B, B)$, e non contribuisce al risultato.

³⁵Questo risultato può essere analizzato ricordando che l'integrale di convoluzione calcola i singoli valori in uscita da un filtro, come dipendenti da tutti gli ingressi passati, ognuno pesato con il valore della risposta impulsiva relativo al ritardo tra ingresso passato ed uscita presente (vedi § 3.4.3). Pertanto, anche

Densità di probabilità A riguardo della $p_Y(y)$ del processo di uscita non si può dire nulla di generale, tranne che evidentemente dipende dalla $p_X(x)$ di ingresso e dalle operazioni compiute dal filtro; la sua espressione esatta va però determinata di volta in volta. Ad esempio, nel caso di un filtro trasversale (§ 5.2.1) possono applicarsi le regole di cambio variabile (§ 6.4). Un caso a parte è quello dei processi gaussiani, che se posti in ingresso ad un filtro, producono in uscita un processo anch'esso gaussiano³⁶.

7.5 Operazioni elementari sui segnali

Al § 5.2 abbiamo visto come gli elementi filtranti possano essere realizzati mediante una combinazione delle tre operazioni elementari mostrate in figura, ovvero *ritardo*, *somma* e *prodotto*. Prima di proseguire, approfondiamo dunque il risultato della combinazione di segnali certi ed aleatori mediante gli operatori introdotti. Iniziamo osservando che per i due casi di somma e prodotto si possono verificare le seguenti combinazioni:



- $x(t)$ segnale certo e $y(t)$ processo aleatorio: il risultato è (*in generale*) un processo *non stazionario*, infatti ora le medie d'insieme dipendono, istante per istante, dal valore che il segnale certo assume in quell'istante;
- $x(t)$ segnale periodico e $y(t)$ processo aleatorio: si ottiene un processo detto *ciclostazionario*, in quanto anche se le statistiche variano nel tempo, esse assumono valori *identici* con periodicità uguale a quella del segnale certo;
- $x(t)$ segnale costante pari ad a e $y(t)$ processo aleatorio: $z(t)$ è un processo della stessa natura di $y(t)$, con media m_z pari alla somma (od il prodotto) tra m_y ed a , potenza $\mathcal{P}_z = \mathcal{P}_y + a^2$ (oppure $\cdot a^2$), e autocorrelazione $\mathcal{R}_z(\tau) = \mathcal{R}_y(\tau) \cdot a^2$ (o $+a^2$).

Notiamo inoltre che spesso si può trattare un segnale periodico alla stregua di un processo, semplicemente ipotizzando per lo stesso una fase uniforme nell'arco di un periodo, in modo da ricondursi al caso del processo armonico, vedi § 7.2.3. Dunque, nel seguito trattiamo solo il caso dei processi.

se i singoli valori in ingresso sono statisticamente indipendenti, quelli di uscita (distanti tra loro per meno della durata della risposta impulsiva) condividono una porzione di storia comune, e quindi i loro valori non sono più incorrelati.

³⁶Questo risultato è una diretta conseguenza della proprietà di invarianza dei processi gaussiani rispetto alle trasformazioni lineari discussa al § 6.5.2. Infatti, riscrivendo l'operazione di convoluzione $y(t) = \int x(\tau) h(t-\tau) d\tau$ in forma approssimata come una somma di infiniti termini $y(t) = \sum_i x(\tau_i) h(t-\tau_i) \Delta\tau_i$ appare evidente come, nel caso in cui $x(t)$ sia un processo gaussiano, l'uscita sia costituita da una combinazione lineare di v.a. gaussiane, e dunque anch'essa gaussiana.

7.5.1 Ritardo

Questo costituisce un caso particolare di canale perfetto (pag. 231), ed analiticamente corrisponde alla convoluzione con un impulso traslato $z(t) = x(t) * \delta(t - T)$. Pertanto, l'unica cosa che si modifica³⁷ in uscita è lo spettro di fase, in cui compare un termine lineare, ovvero $Z(f) = X(f) \cdot e^{-j2\pi fT}$, mentre valor medio, autocorrelazione e densità di potenza/energia restano invariate, così come non cambiano la varianza e la d.d.p. per il caso di processi.

7.5.2 Somma tra segnali aleatori

Procediamo nel calcolo delle grandezze rappresentative avvalendoci (a parte per il valor medio) della ipotesi di indipendenza statistica tra $x(t)$ e $y(t)$:

Valore medio

$$m_z = E\{x(t) + y(t)\} = E\{x(t)\} + E\{y(t)\} = m_x + m_y$$

Notiamo che questo risultato è valido anche in assenza di indipendenza statistica³⁸.

Potenza totale

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_z &= E\{(x(t) + y(t))^2\} = E\{x^2(t)\} + E\{y^2(t)\} + 2E\{x(t) \cdot y(t)\} = \\ &= \mathcal{P}_x + \mathcal{P}_y + 2m_x m_y \end{aligned}$$

dato che per processi statisticamente indipendenti la d.d.p. congiunta $p_{XY}(x, y)$ si fattorizza nel prodotto delle marginali $p_X(x) p_Y(y)$, così come si fattorizza il valore atteso del prodotto³⁹; anche i prossimi risultati valgono unicamente sotto l'ipotesi di *indipendenza statistica*.

Varianza Dalle due relazioni precedenti otteniamo

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E\{(z(t) - m_z)^2\} = \mathcal{P}_z - (m_z)^2 = \mathcal{P}_x + \mathcal{P}_y + 2m_x m_y - (m_x + m_y)^2 = \\ &= \mathcal{P}_x - (m_x)^2 + \mathcal{P}_y - (m_y)^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \end{aligned}$$

Autocorrelazione

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_z(\tau) &= E\{z(t) z(t + \tau)\} = E\{(x(t) + y(t))(x(t + \tau) + y(t + \tau))\} = \\ &= E\{x(t) x(t + \tau)\} + E\{y(t) y(t + \tau)\} + E\{x(t) y(t + \tau)\} + E\{x(t + \tau) y(t)\} = \\ &= \mathcal{R}_x(\tau) + \mathcal{R}_y(\tau) + 2m_x m_y \end{aligned}$$

³⁷Vedi §§ 3.3 e 3.4.4.

³⁸Infatti in virtù della proprietà distributiva è possibile la saturazione di una v.a. alla volta, ovvero

$$\begin{aligned} \int \int (x + y) p(x, y) dx dy &= \int \int x \cdot p(x, y) dx dy + \int \int y \cdot p(x, y) dx dy = \\ &= \int x \cdot p(x) dx + \int y \cdot p(y) dy \end{aligned}$$

³⁹Infatti risulta

$$\begin{aligned} E\{x(t) \cdot y(t)\} &= \int \int x \cdot y \cdot p(x, y) dx dy = \int x \cdot p(x) dx \cdot \int y \cdot p(y) dy = \\ &= E\{x(t)\} E\{y(t)\} = m_x m_y \end{aligned}$$

dato che per processi indipendenti, stazionari e congiuntamente ergodici⁴⁰ risulta $E \{x(t)y(t+\tau)\} = \mathcal{R}_{xy}(\tau)$ pari cioè al prodotto delle medie $m_x m_y$, vedi eq. (7.2). Osserviamo anche come per $\tau = 0$ si ritrovi il valore della potenza totale \mathcal{P}_z .

Spettro di densità di potenza

$$\mathcal{P}_z(f) = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_z(\tau) \} = \mathcal{P}_x(f) + \mathcal{P}_y(f) + 2m_x m_y \delta(f)$$

e rimarchiamo ancora una volta che in caso di processi *non indipendenti* il risultato *non* è valido.

Densità di probabilità Nel caso di $x(t)$ ed $y(t)$ indipendenti si ottiene che il processo somma è caratterizzato da una densità *di ampiezza* pari a⁴¹

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(\theta) p_Y(z-\theta) d\theta = p_X(x) * p_Y(y) \quad (7.21)$$

Tale risultato conferma quello già ottenuto al § 6.2.5 e relativo alla somma di variabili aleatorie, ovvero che la d.d.p. di una somma di v.a. indipendenti si ottiene per *convoluzione* tra le densità dei termini della somma.

Notiamo infine che se vengono sommati due processi gaussiani il risultato è ancora gaussiano, come discusso al § 6.5.2: infatti la convoluzione tra funzioni gaussiane è ancora una gaussiana, con media pari alla somma delle medie, e varianza alla somma delle varianze.

7.5.3 Prodotto tra segnali aleatori

Anche per il prodotto tra segnali valgono le considerazioni svolte al § 7.5. Qualora i fattori $x(t)$ ed $y(t)$ del prodotto $z(t)$ siano processi statisticamente indipendenti, stazionari e congiuntamente ergodici, si ha

Valor medio

$$m_z = E \{z(t)\} = E \{x(t)y(t)\} = E \{x(t)\} E \{y(t)\} = m_x \cdot m_y$$

dato che come già osservato risulta $p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$ permettendo così la fattorizzazione del valore atteso del prodotto, ossia $\iint x y p(x,y) dx dy = \int x p(x) dx \cdot \int y p(y) dy$.

Potenza totale

$$\mathcal{P}_z = E \{z^2(t)\} = E \{x^2(t)y^2(t)\} = E \{x^2(t)\} E \{y^2(t)\} = \mathcal{P}_x \cdot \mathcal{P}_y$$

⁴⁰La proprietà di ergodicità congiunta corrisponde a verificare le condizioni ergodiche anche per i momenti misti $m_{XY}^{(1,1)}(x,y)$ relativi a coppie di valori estratti da realizzazioni di due differenti processi.

⁴¹Dimostriamo la (7.21) con un ragionamento forse poco ortodosso ma efficace. Dalla definizione di d.d.p. abbiamo che $z = x + y$ risulta compresa tra z e $z + dz$ con probabilità $p_Z(z) dz$, ma affinché ciò accada è necessario che, per ogni possibile valore di x , risulti $y = z - x$; per l'ipotesi di indipendenza statistica tra x ed y ciò avviene con probabilità congiunta $p_X(x) dx \cdot p_Y(z-x) dz$. Per ottenere $p_Z(z) dz$ occorre quindi sommare la probabilità congiunta su tutti i possibili valori di x , ovvero $p_Z(z) dz = \int_{\Omega_X} p_X(x) p_Y(z-x) dx dz$ in cui Ω_X è lo spazio campione per la v.a. x . Pertanto in definitiva si ottiene $p_Z(z) = \int_{\Omega_X} p_X(x) p_Y(z-x) dx$ che corrisponde alla convoluzione espressa nel testo.

Varianza

$$\sigma_z^2 = E \{ (z(t) - m_z)^2 \} = \mathcal{P}_z - (m_z)^2 = \mathcal{P}_x \cdot \mathcal{P}_y - (m_x \cdot m_y)^2$$

Funzione di autocorrelazione

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_z(\tau) &= E \{ z(t) z(t+\tau) \} = E \{ x(t) y(t) x(t+\tau) y(t+\tau) \} = \\ &= E \{ x(t) x(t+\tau) \} E \{ y(t) y(t+\tau) \} = \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \mathcal{R}_y(\tau) \end{aligned}$$

In particolare, notiamo che l'incorrelazione di uno dei due processi, per un certo valore di τ , provoca l'incorrelazione del prodotto, allo stesso istante τ .

Spettro di densità di potenza

$$\mathcal{P}_z(f) = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_z(\tau) \} = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \mathcal{R}_y(\tau) \} = \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_y(f)$$

ossia è pari alla convoluzione tra le densità spettrali dei fattori. Notiamo quindi che la densità di potenza del prodotto presenta una occupazione di banda maggiore di quella dei singoli fattori.

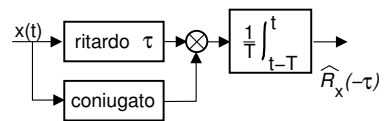
Densità di probabilità Si calcola con le regole per il cambiamento di variabile, illustrate al § 6.4. Nel caso in cui i due processi x e y siano statisticamente indipendenti, il risultato è⁴²

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(\theta) p_Y\left(\frac{z}{\theta}\right) \frac{d\theta}{|\theta|} \quad (7.22)$$

7.5.4 Stima della autocorrelazione

Come primo esempio dell'uso degli operatori elementari, la figura che segue mostra l'architettura di uno schema di elaborazione idoneo a effettuare una stima⁴³ $\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau)$ della funzione di autocorrelazione (§ 7.1.4) di un segnale $x(t)$ per un *anticipo* τ assegnato: infatti calcola $\widehat{\mathcal{R}}_x(-\tau) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x^*(t) x(t-\tau) dt$ per $\tau \geq 0$, da cui $\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau)$ si ottiene applicando l'eq. (7.10). Il blocco integratore è un filtro passa-basso con una $h(t) = \frac{1}{T} \text{rect}_T(t)$.

Variando τ si ottiene $\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau)$ per i diversi valori dell'argomento, e se $x(t)$ è stazionario possiamo calcolare $\widehat{\mathcal{P}}_x(f) = \mathcal{F} \{ \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \}$; se infine $x(t)$ è un



⁴²Dimostriamo la (7.22) ricorrendo al metodo illustrato al § 6.4.2, scrivendo il sistema (6.24) come $\begin{cases} z = xy \\ w = y \end{cases}$ in modo che la trasformazione inversa risulti $\begin{cases} x = z/w \\ y = w \end{cases}$. A questo punto si ottiene la

matrice Jacobiana $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{bmatrix}$ come $\begin{bmatrix} 1/w & z/w^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a cui corrisponde il modulo del determinante (jacobiano) $|\det(J)| = \frac{1}{|w|}$. Dunque la d.d.p. congiunta di z e w si ottiene come $p_{ZW}(z, w) = |\det(J)| \cdot p_{XY}(x, y = f(z, w)) = \frac{1}{|w|} \cdot p_{XY}\left(\frac{z}{w}, w\right) = \frac{1}{|w|} \cdot p_X\left(\frac{z}{w}\right) p_Y(w)$ in virtù della indipendenza statistica tra x e y . Non resta quindi che *saturare* la $p_{ZW}(z, w)$ rispetto a w , ovvero $p_Z(z) = \int \frac{1}{|w|} \cdot p_X\left(\frac{z}{w}\right) p_Y(w) dw$, che corrisponde alla (7.22) qualora avessimo posto $\theta = x$ anziché $w = y$.

⁴³Si tratta di una *stima* (vedi § 6.6.3) in quanto l'intervallo di integrazione T è limitato.

membro di un processo ergodico, $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ rappresenta una stima della densità di potenza per una qualunque realizzazione.

7.6 Filtro adattato

Dopo aver illustrato le trasformazioni subite da un segnale generico che attraversa un filtro generico, affrontiamo lo studio di un caso in cui il filtro viene *progettato* per essere al servizio di uno *specifico segnale*.

Allo scopo di anticipare *come va a finire*, diciamo subito che questa tecnica è un modo per calcolare l'intercorrelazione $\mathcal{R}_{yg}(\tau)$ tra il segnale (rumoroso) in ingresso $y(t)$ e quello $g(t)$ che ci aspettiamo di ricevere in assenza di rumore. Tale compito è svolto mediante un filtro⁴⁴ detto appunto *adattato* a $g(t)$ e posto all'ingresso ad un *detettore di impulso*, ovvero un dispositivo che deve decidere per la presenza o l'assenza di una forma d'onda *nota* immersa nel rumore, in modo da rendere minima la probabilità di sbagliare. Un problema simile verrà affrontato al § 14.4.2 in relazione alla detezione *incoerente* di sinusoidi, mentre ora ci riferiamo ad una *detezione coerente*, ovvero in cui il segnale è completamente specificato, compresa la sua temporizzazione o fase.

Schema di trasmissione

Indichiamo il segnale trasmesso come $x(t)$, ottenuto facendo transitare un impulso $\delta(t)$ attraverso un filtro con risposta impulsiva $h_T(t) = g(t)$, con durata limitata $0 < t < T$. Viene

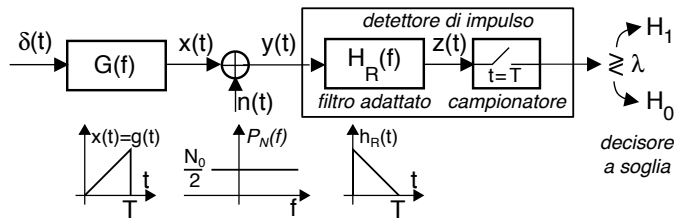


Figura 7.6: Detezione di impulso mediante filtro adattato

ricevuto il segnale $y(t)$, somma di $x(t)$ (*presente o meno*) e di un processo gaussiano bianco a media nulla $n(t)$, indicato come rumore, con densità spettrale $\mathcal{P}_N(f) = \frac{N_0}{2}$.

Decisore a soglia Un ricevitore basato sul filtro adattato effettua una decisione di *massima verosimiglianza* (vedi § 6.6.2.1) a riguardo della presenza (ipotesi H_1) o assenza (ipotesi H_0) del segnale $x(t)$ in base all'osservazione della grandezza $z(T)$ ottenuta (vedi figura 7.6) campionando all'istante $t = T$ l'uscita $z(t)$ del filtro di ricezione $H_R(f)$, che opera sul segnale ricevuto $y(t)$. Il valore osservato per $z(T)$ è quindi confrontato con *una soglia* λ , determinando la decisione per H_1 o H_0 a seconda se λ sia superata o meno, e commettendo *errore* sia nel decidere per H_1 in assenza di segnale, sia decidendo per H_0 in sua presenza⁴⁵.

Legame tra i filtri di trasmissione e ricezione A pag. 214 si dimostra che la probabilità di errore del decisore viene resa *minima* se $H_R(f)$ è realizzato in modo che

⁴⁴Sfruttando le analogie tra integrale di convoluzione e calcolo dell'intercorrelazione, vedi § 7.1.4.

⁴⁵Indicando rispettivamente con P_{e0} e P_{e1} i due tipi di errore, pari a (vedi fig. 7.7)

$$P_{e0} = \int_{\lambda}^{\infty} p_Z(z/H_0) dz \quad e \quad P_{e1} = \int_{-\infty}^{\lambda} p_Z(z/H_1) dz$$

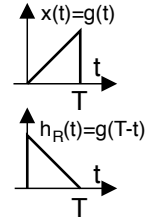
la probabilità di errore complessiva vale $P_e = P_{e0}P_0 + P_{e1}P_1$, in cui $P_0 = Pr(H_0)$ e $P_1 = Pr(H_1)$.

risultati

$$H_R(f) = G^*(f) e^{-j2\pi fT} \quad (7.23)$$

a cui corrisponde una risposta impulsiva $h_R(t)$ esprimibile come⁴⁶

$$h_R(t) = g^*(T-t) \quad (7.24)$$



risultato che, nel caso di $g(t)$ reale come in fig. 7.6, corrisponde ad una $h_R(t)$ ottenuta ribaltando $g(t)$ rispetto all'asse delle ordinate, e ritardando il risultato di T , in modo da pervenire ad una $h_R(t)$ causale.

Prima di individuare il valore da utilizzare per la soglia λ , valutiamo le caratteristiche statistiche dei possibili valori per $z(T)$ in uscita da $h_R(t)$, che a causa della presenza del rumore, è una realizzazione di variabile aleatoria.

Segnale assente In questo caso (ipotesi H_0) nel segnale ricevuto è presente solo rumore, ovvero $y(t) = n(t)$, e dunque la grandezza di decisione $z(T)$ è una v.a. gaussiana⁴⁷ il cui valore si calcola come

$$z^{H_0}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\tau) y(T-\tau) d\tau = \int_0^T g^*(T-\tau) n(T-\tau) d\tau = \mathcal{R}_{GN}(0)$$

ossia è pari all'intercorrelazione (eq. 7.7) calcolata nell'origine tra $g(t)$ ribaltata ed una finestra di una realizzazione del processo $n(t)$. Indicando con $m_{z(T)}^{H_0}$ il valore atteso di $z(T)$, troviamo⁴⁸ che $m_{z(T)}^{H_0} = 0$, mentre la varianza di $z(T)$ vale⁴⁹ $\sigma_{z(T)}^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$, in cui \mathcal{E}_G è l'energia dell'impulso $g(t)$.

Segnale presente Se invece il segnale è presente (ipotesi H_1) allora $y(t) = g(t) + n(t)$, e si ottiene

$$\begin{aligned} z^{H_1}(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\tau) y(T-\tau) d\tau = \int_0^T g^*(T-\tau) [g(T-\tau) + n(T-\tau)] d\tau = \\ &= \int_0^T g^*(T-\tau) g(T-\tau) d\tau + \int_0^T g^*(T-\tau) n(T-\tau) d\tau = \\ &= \mathcal{R}_G(0) + \mathcal{R}_{GN}(0) = \mathcal{E}_G + \mathcal{R}_{GN}(0) \end{aligned}$$

⁴⁶Potendo scrivere $G_T^*(f) e^{-j2\pi fT} = (G(f) e^{j2\pi fT})^*$ e ricordando la proprietà (3.11) espressa a pag. 68 $\mathcal{F}^{-1}\{X^*(f)\} = x^*(-t)$, dalla (7.23) otteniamo

$$\begin{aligned} h_R(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H_R(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{G^*(f) e^{-j2\pi fT}\} = \mathcal{F}^{-1}\{(G(f) e^{j2\pi fT})^*\} = \\ &= g^*(\theta+T)|_{\theta=-t} = g^*(T-t) \end{aligned}$$

⁴⁷Ricordiamo (vedi § 7.4.2) che l'uscita di un filtro al cui ingresso è posto un processo gaussiano, è anch'essa gaussiana.

⁴⁸Infatti

$$m_{z(T)}^{H_0} = E\{z(T) / H_0\} = E\{\mathcal{R}_{GN}(0)\} = E\left\{\int_0^T g^*(t) n(t) dt\right\} = \int_0^T g^*(t) E\{n(t)\} dt$$

pari a zero se $E\{n(t)\} = 0$.

⁴⁹Dato che $m_{z(T)}^{H_0} = 0$, risulta $\sigma_{z(T)}^2 = E\{z^2(T)\} = \mathcal{R}_Z(\tau)|_{\tau=0}$. Sappiamo inoltre che

$$\mathcal{R}_Z(\tau) = \mathcal{R}_N(\tau) * \mathcal{R}_{H_R}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) * \mathcal{R}_{H_R}(\tau) = \frac{N_0}{2} \mathcal{R}_{H_R}(\tau)$$

pertanto

$$\sigma_{z(T)}^2 = \mathcal{R}_Z(\tau)|_{\tau=0} = \frac{N_0}{2} \mathcal{R}_{H_R}(0) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_R^*(t) h_R(t) dt = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$$

dato che $h_R(t)$ ha la stessa energia di $g(t)$.

producendo ancora una grandezza di decisione $z(T)$ gaussiana, con la stessa $\sigma_{z(T)}^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$ (dovuta al rumore) ma con valor medio $m_{z(T)}^{H_1} = \mathcal{E}_G \neq 0$, dovuto alla presenza di segnale⁵⁰. Notiamo esplicitamente che $m_{z(T)}^{H_1} = \mathcal{E}_G$ non dipende dalla particolare $g(t)$ adottata, né dalla sua durata T , ma solo dalla sua energia, proprio in virtù dell'aver adottato in ricezione un filtro *adattato* a quello di trasmissione.

Soglia di decisione La figura 7.7 mostra l'esito dei nostri calcoli nella forma della d.d.p. della v.a. $z(T)$ nelle ipotesi H_0 ed H_1 , e pertanto il criterio di massima verosimiglianza (vedi § 6.6.2.1) individua come soglia di decisione ottima il valore $\lambda = \frac{\mathcal{E}_G}{2}$, a cui compete una probabilità di errore P_e minima qualora $Pr(H_0) = Pr(H_1)$, ovvero se la probabilità a priori delle due ipotesi è uguale, vedi nota 45.

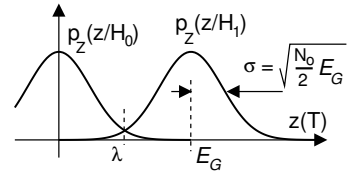


Figura 7.7: D.d.p. condizionate e soglia di decisione

Ottimalità Mostriamo ora che il risultato ottenuto permette la migliore separazione tra le d.d.p. condizionate alle due ipotesi, nel senso che qualsiasi altra scelta per $H_R(f) \neq G^*(f) e^{-j2\pi fT}$ con energia $\mathcal{E}_{H_R} = \mathcal{E}_G$ avrebbe prodotto delle d.d.p. più ravvicinate. La separazione tra le gaussiane è legata⁵¹ al rapporto $m_{z(T)}^{H_1}/\sigma_{z(T)}$ che viene reso massimo⁵² dalla scelta (7.23), che porta a $m_{z(T)}^{H_1} = \mathcal{E}_G = \max$. Il quadrato $(m_{z(T)}^{H_1}/\sigma_{z(T)})^2$ del rapporto suddetto viene indicato anche come *rapporto segnale rumore* all'istante di decisione⁵³,

⁵⁰Infatti, ora risulta $m_{z(T)}^{H_1} = E\{\mathcal{R}_G(0) + \mathcal{R}_{GN}(0)\} = \mathcal{E}_G + E\{\mathcal{R}_{GN}(0)\}$ in cui il secondo termine è nullo come già osservato, mentre il primo è un valore certo, pari all'energia $\mathcal{E}_G = \mathcal{R}_G(0)$ dell'impulso $g(t)$.

Per ciò che riguarda $\sigma_{z(T)}^2$, osserviamo che $z^{H_1}(T) = \mathcal{E}_G + z^{H_0}(T)$, dunque le v.a. *centrate* sono le stesse, e così la varianza $\sigma_{z^{H_1}(T)}^2 = \sigma_{z^{H_0}(T)}^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$: infatti la componente aleatoria dell'uscita è dovuta al solo $n(t)$.

⁵¹Il rapporto $m_{z(T)}^{H_1}/\sigma_{z(T)}$ confronta l'uscita attesa $m_{z(T)}^{H_1} = E\{\mathcal{R}_{GH_R}(0)\}$ di H_R per $t = T$ nell'ipotesi H_1 , che dipende dall'energia mutua tra $g(t)$ ed $h_R(t)$, con la sua deviazione standard $\sigma_{z(T)} = \frac{N_0}{2} \mathcal{R}_{H_R}(0)$ dovuta al rumore.

⁵²Consideriamo il caso di avere una $H_R(f)$ generica. In presenza di solo segnale, si ottiene

$$|z(T)|^2 = |F^{-1}\{Z(f)\}|_{t=T}|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_R(f) G(f) e^{j2\pi fT} df \right|^2$$

A questa espressione può essere applicata la disuguaglianza di Schwartz (a pag. 50 si enuncia la relazione $|\int_{-\infty}^{\infty} a(\theta) b^*(\theta) d\theta|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |a(\theta)|^2 d\theta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |b(\theta)|^2 d\theta$, con l'eguaglianza solo se $a(\theta) = k \cdot b(\theta)$), qualora si faccia corrispondere $H_R(f)$ ad $a(\theta)$, e $G(f) e^{j2\pi fT}$ a $b^*(\theta)$, ottenendo così

$$|z(T)|^2 = \left(m_{z(T)}^{H_1}\right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$$

con l'eguaglianza solo se $H_R(f) = kG^*(f) e^{-j2\pi fT}$, ovvero se $h_R(t) = kg(T-t)$ (eqq. (7.23) e (7.24)), ossia se $H_R(f)$ è *adattata* a $G(f)$. Scegliendo $k = 1$, i due integrali a prodotto hanno lo stesso valore, pari a \mathcal{E}_G , e dunque $\left(m_{z(T)}^{H_1}\right)^2 = |z(T)|^2 = \mathcal{E}_G^2$.

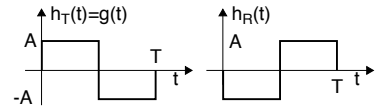
⁵³In effetti la (7.25) non è adimensionale ma è esprimibile come [sec], dunque non è un vero e proprio SNR, ma dato che il termine rende l'idea, questa accezione è entrata nell'uso comune.

e qualora $H_R(f)$ sia adattato vale

$$SNR_{FA} = \frac{(\mathcal{E}_G)^2}{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G} = \frac{2\mathcal{E}_G}{N_0} \tag{7.25}$$

Anticipiamo subito la (7.25) è valida solo in presenza di rumore bianco, mentre se questo è *colorato*, l' SNR diminuisce, ed il filtro ottimo va determinato nel modo specificato poco più avanti.

Esempio Applichiamo i risultati fin qui ottenuti al caso in cui si utilizzi la $g(t)$ mostrata a lato, in cui poniamo $A = 2$ e $T = 10^{-1}$.



Un decisore a filtro adattato sarà allora caratterizzato dalla risposta impulsiva $h_R(t)$ mostrata a fianco di $g(t)$. Se campioniamo l'uscita $z(t)$ di h_R all'istante $t = T$, nel caso di *assenza* di rumore e *presenza* di segnale, si ottiene il valore

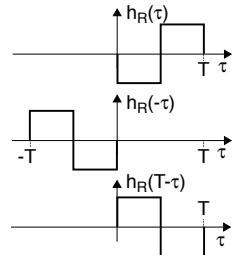
$$m_z = z(t)|_{t=T} = g(t) * h_R(t)|_{t=T} = \int_0^T g(\tau) h_R(T - \tau) d\tau$$

Dato che $h_R(T - \tau) = g(\tau)$, come rappresentato nella figura a lato, allora $m_z = \int_0^T [g(\tau)]^2 d\tau = \mathcal{E}_G$, pari a

$$\mathcal{E}_G = \int_0^T [g(t)]^2 dt = A^2 \int_0^T dt = A^2 T = 4 \cdot 10^{-1}.$$

Il valore di $m_z = \mathcal{E}_G$ rappresenta il contributo di segnale all'uscita, indipendente dal rumore.

Consideriamo ora in ingresso a h_R anche un processo di rumore gaussiano ergodico bianco, a media nulla, e densità di potenza $\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2} = \frac{1}{2} 10^{-1}$. Il *valore atteso* $m_z^{H_1}$ dell'uscita campionata rimane lo stesso $m_z = \mathcal{E}_G$, ma ora ad esso si sovrappone la componente aleatoria dovuta al rumore, anch'essa gaussiana e caratterizzata da una varianza pari a $\sigma_z^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G = \frac{N_0}{2} A^2 T = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} \cdot 4 \cdot 10^{-1} = 2 \cdot 10^{-2}$. Le d.d.p. condizionate mostrate in fig. 7.7 hanno dunque espressione



$$p(z/H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} \quad p(z/H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}}$$

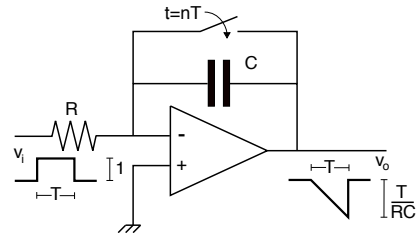
in cui $\sigma_z = \sqrt{\sigma_z^2} = \sqrt{0.02} = 1.41 \cdot 10^{-1}$, $m_z = \mathcal{E}_G = 4 \cdot 10^{-1}$, mentre per la soglia di decisione, si trova il valore $\lambda = \mathcal{E}_G/2 = 2 \cdot 10^{-1}$.

Integrate and dump Si tratta di una soluzione circuitale⁵⁴ in grado di conseguire le prestazioni di detezione del filtro adattato nel caso di un $g(t) = \text{rect}_T(t)$, a cui corrisponde una $h_R(t)$ anch'essa rettangolare.

Infatti, il segnale in uscita vale

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_i(t) dt + v_o(0)$$

in cui $v_o(0)$ può essere reso nullo e quindi, a parte il segno ed il fattore $\frac{1}{RC}$, il valore $v_o(T)$ corrisponde a quello che si trova allo stesso istante in uscita



⁵⁴Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Op_amp_integrator

da un filtro adattato⁵⁵ alla $g(t)$ rettangolare. L'interruttore che scarica (*dump*) la capacità C per $t = nT$ ha lo scopo di azzerare la $v_o(0)$ prima della ricezione di un successivo impulso, rendendo possibile l'uso dello schema per la detezione ottima di flussi binari a velocità $f_b = 1/T$.

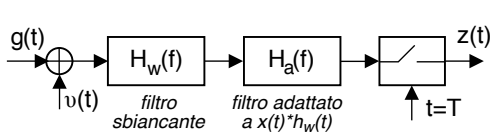
Rumore colorato Nel caso in cui $\mathcal{P}_N(f)$ non sia pari ad una costante, la condizione per massimizzare (7.25) non è più la (7.23), bensì deve risultare⁵⁶

$$H_R(f) = \frac{G^*(f) e^{-j2\pi fT}}{\mathcal{P}_N(f)} \tag{7.26}$$

in modo che $H_R(f)$, oltre ad *esaltare* le frequenze per le quali lo spettro del segnale è maggiore, riesce anche ad *attenuare* quelle per le quali la potenza di rumore è più grande. Riscrivendo la (7.26) come

$$H_R(f) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}_N(f)}} \frac{G^*(f)}{\sqrt{\mathcal{P}_N(f)}} e^{-j2\pi fT} = H_w(f) H_a(f)$$

si può giungere alla interessante interpretazione illustrata in figura: il segnale ricevuto, in cui è presente sia il segnale $g(t)$ che il rumore colorato $v(t)$, attraversa innanzitutto



un *filtro sbiancante*⁵⁷ con risposta in frequenza $H_w(f) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}_N(f)}}$ e risposta impulsiva $h_w(t)$, così chiamato perché ha lo scopo di rendere il rumore *bianco*. Quindi,

viene attraversato il filtro adattato all'impulso *sbiancato*, ossia alla forma d'onda $g_w(t) = g(t) * h_w(t)$ con trasformata $G_w(f) = \frac{G(f)}{\sqrt{\mathcal{P}_N(f)}}$, risultato del transito di $g(t)$ attraverso $H_w(f)$.

Assenza di rumore Qualora non sia presente rumore, l'andamento dell'uscita del filtro adattato è proprio pari (a meno del ritardo T) alla funzione di autocorrelazione di $g(t)$, che viene campionata in corrispondenza del suo massimo.

⁵⁵Il circuito non lineare mostrato non è un filtro adattato, dato che per $t > T$ non produce la stessa uscita (vedi <http://dsp.stackexchange.com/questions/9094/understanding-matched-filter>).

⁵⁶La condizione (7.26) si ottiene anche in questo caso imponendo la massimizzazione di $SNR = (m_{z(T)}^{H_1})^2 / \sigma_{z(T)}^2 = \frac{|\int_{-\infty}^{\infty} H_r(f) G(f) e^{j2\pi fT} df|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H_r(f)|^2 \mathcal{P}_N(f) df}$ il cui denominatore tiene conto che $\sigma_{z(T)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_Z(f) df$ è dovuta al solo rumore. Applichiamo ora a SNR la diseuguaglianza di Schwartz posta nella forma

$$\frac{|\int_{-\infty}^{\infty} a(\theta) b^*(\theta) d\theta|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |a(\theta)|^2 d\theta} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |b(\theta)|^2 d\theta$$

e identifichiamo $a(\theta)$ con $H_R(f) \sqrt{\mathcal{P}_N(f)}$ e $b^*(\theta)$ con $G(f) e^{j2\pi fT} / \sqrt{\mathcal{P}_N(f)}$. Imponendo di nuovo la condizione $a(\theta) = k \cdot b(\theta)$ con $k = 1$, otteniamo il massimo SNR come $SNR = \int_{-\infty}^{\infty} |b(\theta)|^2 d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(f)|^2}{\mathcal{P}_N(f)} df$, e quindi scrivendo $a(\theta) = b(\theta)$ ossia $H_R(f) \sqrt{\mathcal{P}_N(f)} = G^*(f) e^{-j2\pi fT} / \sqrt{\mathcal{P}_N(f)}$ si ottiene il risultato (7.26).

⁵⁷Detto *whitening filter* in inglese.

Probabilità di errore Tornando al caso di rumore bianco, in base al ragionamento esposto alla nota 45 nel caso di equiprobabilità delle due ipotesi H_1 e H_0 , la P_e è pari alla probabilità che una v.a. gaussiana con media nulla e varianza $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$ sia maggiore di $\frac{\mathcal{E}_G}{2}$; tale valore può essere calcolato applicando l'eq. (6.11) a pag. 154, in modo da ottenere $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\mathcal{E}_G/2}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G}} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_G}{N_0}} \right\}$.

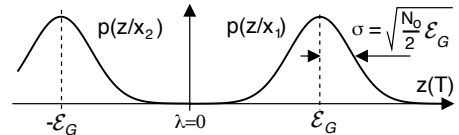
Esempio con i dati riportati nell'esempio di pag. 215, per la probabilità di errore nel caso di H_0 e H_1 equiprobabili si ottiene $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_G}{N_0}} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-1}}{10^{-1}}} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \{1\} \simeq 1.5 \cdot 10^{-1}$ (si utilizzi la fig. 6.2 a pag. 154).

Ma questa non è la *minima* P_e conseguibile, che si ottiene invece nel caso di *segnalazione antipodale*, molto più indicata nel caso in cui lo scopo del ricevitore non sia di individuare un solo impulso isolato, ma una sequenza simbolica binaria.

7.6.1 Segnalazione antipodale

Volendo distinguere tra due possibili messaggi (ad es, x_1 ed x_2), la scelta *ottima* per rendere minima la probabilità di errore consiste nell'adottare $x_1(t) = g(t)$, $x_2(t) = -x_1(t)$, e di porre in ingresso al ricevitore un filtro adattato a $g(t)$.

In questo modo l'uscita del filtro all'istante di campionamento rappresenta una v.a. gaussiana z con media $m_z = \pm \mathcal{E}_G$ (a seconda se sia stato trasmesso x_1 o x_2) e varianza $\sigma_z^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$. Pertanto ora la soglia di decisione è pari a *zero*, e nel caso di simboli equiprobabili, in base alla nota 45, la probabilità di errore P_e corrisponde a quella di eccedere \mathcal{E}_G per una v.a. gaussiana a media nulla: in conseguenza del risultato (6.11) di pag. 154 si ottiene quindi



$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\mathcal{E}_G}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G}} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_G}{N_0}} \right\} \quad (7.27)$$

che, come vedremo all'eq. (15.18), rappresentano anche le prestazioni ottenibili per un segnale dati binario a banda minima.

7.6.2 Segnalazione ortogonale

Dovendo trasmettere N diversi messaggi (x_1, x_2, \dots, x_N), possiamo associare ad ognuno di essi una forma d'onda $x_i(t)$ tale che $\int x_i(t) x_j(t) dt = 0$ con $i \neq j$, ovvero in modo che i segnali $x_i(t)$ siano *ortogonali*. In tal caso il ricevitore ottimo è costituito da un *banco* di filtri, ognuno adattato ad una diversa $x_i(t)$, in modo che, in assenza di rumore, la ricezione di una delle forme d'onda $x_i(t)$ non produca nessuna uscita sui filtri del banco per $j \neq i$. In presenza di rumore, la decisione su cosa sia stato trasmesso viene presa valutando quale dei filtri presenti il valore massimo in corrispondenza dell'istante di campionamento, realizzando così un *ricevitore a correlazione* (vedi § 16.5 a pag. 514).

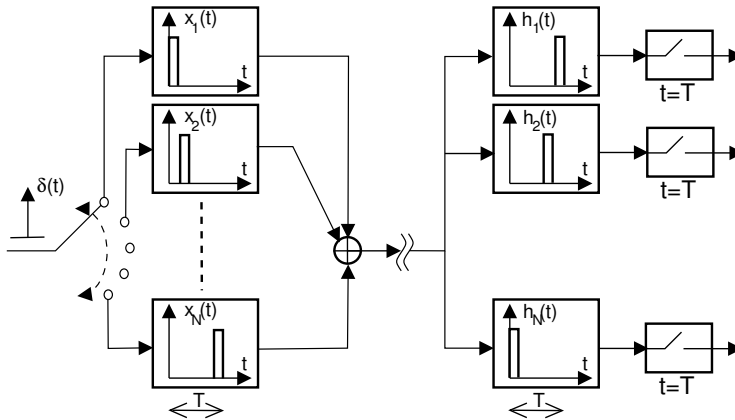
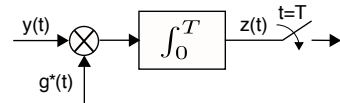


Figura 7.8: Schema di ricevitore a correlazione

Esempio L'impulso $\delta(t)$ entra in uno di filtri mostrati nella figura 7.8, le cui risposte impulsive $x_i(t)$ realizzano una famiglia di funzioni ortogonali, dato che le rispettive forme d'onda non si sovrappongono nel tempo. In ricezione, solo uno dei filtri adattati con risposta impulsiva $h_i(t)$ produce una uscita diversa da zero per $t = T$, come verificabile ricordando la costruzione grafica dell'operazione di convoluzione mostrata a pag. 72.

Multiplicazione a divisione di codice La trasmissione mediante forme d'onda ortogonali può essere applicata alla tecnica di accesso multiplo a divisione di codice o CDMA⁵⁸, qualora ogni utente usi una forma d'onda ortogonale a quella degli altri, ed il ricevitore usi un filtro adattato programmabile in modo da discriminare uno solo tra tutti i codici ricevuti contemporaneamente.

Correlatore Si tratta di un modo alternativo di realizzare un filtro adattato, derivante dall'osservazione che il suo ruolo essenzialmente si riduce al calcolo della *intercorrelazione* (eq. (7.7)) tra il segnale ricevuto e quello atteso. Tale funzione può essere realizzata anche ricorrendo allo schema in figura, dove un integratore (implementato ad es. mediante il circuito *integrate and dump*, pag. 215) opera sul prodotto tra il segnale in arrivo ed una copia locale del coniugato⁵⁹ della forma d'onda trasmessa. Un caso di applicazione di questo schema si trova al § 16.5.1 a proposito del ricevitore FSK ortogonale, mentre una variante idonea a stimare l'*autocorrelazione* di $y(t)$ è proposta al § 7.5.4.



7.7 Appendici

Un capitolo così ad ampio respiro non può che ospitare una serie di appendici altrettanto variate!

⁵⁸(vedi § 11.1.1.3, § 16.9.2.5)

⁵⁹Anche se nel caso di banda base il segnale trasmesso è reale, volendo applicare la teoria esposta ad un involuppo complesso (§ 11.2.1) si rende necessario tener conto dell'operazione di coniugato.

7.7.1 Regressione lineare

Riprendiamo il modello accennato a pag. 191 per approfondire il metodo di predizione del valore atteso di una v.a. y a partire dalla conoscenza di una v.a. x (il *regressore*) correlata alla prima, in base alla relazione

$$y = ax + b + \varepsilon \tag{7.28}$$

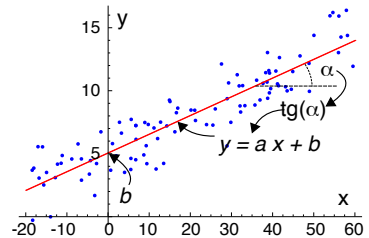
in cui ε rappresenta un errore additivo anch'esso aleatorio, a media nulla e statisticamente indipendente sia da x che da y . Per determinare il valore dei parametri del modello a e b , si imposta un problema di minimizzazione a carico della varianza dell'errore $\sigma_\varepsilon^2 = E \{(y - ax - b)^2\}$ risolvibile eguagliando a zero le derivate di σ_ε^2 rispetto ad a e b . ovvero

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_\varepsilon^2}{da} &= \frac{d}{da} E \{(y - ax - b)^2\} = 2E \{(y - ax - b)(-x)\} = \\ &= 2E \{-xy + ax^2 - bx\} = 2(-m_{xy} + am_x^{(2)} + bm_x) = 0 \\ \frac{d\sigma_\varepsilon^2}{db} &= 2E \{(y - ax - b)(-1)\} = 2(-m_y + am_x + b) = 0 \end{aligned} \tag{7.29}$$

Dalla seconda delle (7.29) otteniamo $b = m_y - am_x$ che sostituito nella prima dopo pochi passaggi permette di ottenere $a[m_x^{(2)} - (m_x)^2] = m_{xy} - m_x m_y$. Sostituendo ora $[m_x^{(2)} - (m_x)^2]$ con σ_x^2 (vedi eq. (6.9)), e $m_{xy} - m_x m_y$ con σ_{xy} (eq. (7.3)), si ottiene per a l'espressione riportata sotto, che a sua volta sostituita nella seconda delle (7.29) produce

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \quad \text{e} \quad b = m_y - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} m_x \tag{7.30}$$

che sono i valori da utilizzare nella *retta di regressione* $y = ax + b$ esemplificata nella figura a lato assieme ad una *nuvola* (o meglio *set*) di coppie (x_i, y_i) di misurazioni sperimentali, che vengono utilizzate per effettuare una *stima campionaria* (vedi § 6.6.3.1)



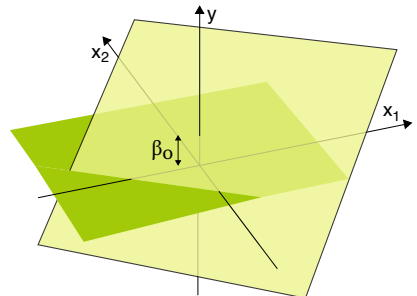
$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \hat{m}_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad \hat{m}_x^{(2)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad \text{e} \quad \hat{m}_{x,y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

delle correlazioni che compaiono in (7.30).

Regressione multipla Costituisce una versione *vettoriale* del precedente problema esteso al caso in cui i regressori siano più di uno, ovvero qualora al posto della (7.28) si supponga una relazione del tipo

$$y = \beta_0 + \sum_{h=1}^p \beta_h x_h + \varepsilon \tag{7.31}$$

in modo che per $p = 2$ la retta di regressione divenga un *piano* con β_0 pari all'intercetta sull'asse delle quote y quando i regressori x sono nulli, mentre per $p > 2$ si ha un *iperpiano*. L'individuazione dei coefficienti $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$ (detti ora *predittori*) viene nuovamente affidato al criterio di



minimizzare il valore quadratico atteso della grandezza di errore, ovvero cercando

$$\boldsymbol{\beta}^* = \arg \min \{E \{ \varepsilon^2 \} \} \quad (7.32)$$

in cui

$$E \{ \varepsilon^2 \} = E \left\{ (y - \sum_{h=0}^p \beta_h x_h)^2 \right\} = E \{ (y - \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta})^2 \} \quad (7.33)$$

avendo aggiunto un regressore *fittizio* $x_0 = 1$, ovvero adottato un vettore *aumentato* di regressori $\mathbf{x} = (1, x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Azzerando le derivate parziali di (7.33) rispetto ai predittori β_k si ottiene il sistema di $p + 1$ equazioni in $p + 1$ incognite⁶⁰ simile a quello di § 18.4.2:

$$\mathbf{R}_x \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{R}_{yx} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & \cdots & r_{0p} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p0} & r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{yx_0} \\ r_{yx_1} \\ \vdots \\ r_{yx_p} \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

in cui \mathbf{R}_x è la matrice *simmetrica* $(p + 1) \times (p + 1)$ delle correlazioni tra i regressori x_h ed x_k con elementi $r_{hk} = r_{kh} = m_{x_h x_k}^{(1,1)}$ ed \mathbf{R}_{yx} è il vettore delle intercorrelazioni tra i regressori ed il valore y , con elementi $r_{yx_h} = m_{yx_h}^{(1,1)}$.

La matrice di progetto Prima di continuare formalizziamo la notazione con cui descrivere i dati da utilizzare nella stima delle correlazioni \mathbf{R}_x e \mathbf{R}_{yx} . Pensiamo cioè di collezionare N coppie (y_i, \mathbf{x}_i) con $N \gg p$, in cui y_i è la variabile di osservazione ed \mathbf{x}_i è il vettore $(1, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$ dei regressori osservati congiuntamente, e di allineare i vettori \mathbf{x}_i in altrettante righe di una matrice \mathbf{X} di formato $N \times (p + 1)$, in modo da poter scrivere la (7.31) (priva del termine di errore ε) nella forma di un sistema

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N0} & x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

⁶⁰Osserviamo infatti che

$$\frac{\partial}{\partial \beta_k} E \{ \varepsilon^2 \} = 2E \left\{ (y - \sum_{h=0}^p \beta_h x_h) (-x_k) \right\} = -2E \{ y x_k \} + 2 \sum_{h=0}^p \beta_h E \{ x_h x_k \} = -2m_{yx_k} + 2 \sum_{h=0}^p \beta_h m_{x_h x_k} = 0$$

che per $k = 0, 1, \dots, p$ danno luogo al sistema

$$\begin{cases} \beta_0 m_{x_0 x_0} + \beta_1 m_{x_1 x_0} + \cdots + \beta_p m_{x_p x_0} = m_{yx_0} \\ \beta_0 m_{x_0 x_1} + \beta_1 m_{x_1 x_1} + \cdots + \beta_p m_{x_p x_1} = m_{yx_1} \\ \cdots \\ \beta_0 m_{x_0 x_p} + \beta_1 m_{x_1 x_p} + \cdots + \beta_p m_{x_p x_p} = m_{yx_p} \end{cases}$$

di N equazioni nelle $p + 1$ incognite $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$. Con questa notazione, le stime $\hat{\mathbf{R}}_x$ e $\hat{\mathbf{R}}_{yx}$ degli elementi che compaiono nella (7.34) possono essere espresse come

$$\hat{m}_{x_h x_k}^{(1,1)} = \hat{r}_{hk} \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ih} x_{ik} \quad \text{e} \quad \hat{m}_{y x_h}^{(1,1)} = \hat{r}_{y x_h} \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i x_{ih} \quad (7.36)$$

In modo da ottenere un valore per β^* ottimo pari a

$$\beta^* = \hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \cdot \hat{\mathbf{R}}_{yx} \quad (7.37)$$

Metodo dei minimi quadrati⁶¹ Affronta la stima dei predittori β adottando il criterio di minimizzare la norma quadratica $\|\epsilon\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{X} \cdot \beta\|^2$ della differenza tra i due membri di (7.35), ovvero tra il vettore delle osservazioni \mathbf{y} e quello delle relative predizioni sulla base dei regressori. In questo caso scriviamo pertanto

$$\beta^* = \arg \min \|\mathbf{y} - \mathbf{X} \cdot \beta\|^2 \quad (7.38)$$

Questa espressione si presta ad una interessante interpretazione geometrica, che consente di arrivare in modo agevole allo stesso risultato già trovato (7.37).

Errore ortogonale alla predizione Indicando con $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X} \cdot \beta^*$ il vettore ottenuto applicando il risultato (7.38) alla relazione (7.35), osserviamo che $\hat{\mathbf{y}}$ è vincolato a giacere nell'iper-piano \mathcal{X} generato dalle (sole) $(p + 1)$ colonne ξ_h di \mathbf{X} , combinate linearmente dai predittori β^* , potendo scrivere

$$\hat{\mathbf{y}} = \sum_{h=0}^p \beta_h^* \xi_h$$

mentre \mathbf{y} può variare in uno spazio di dimensione $N \gg p$. Dunque scrivere

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \epsilon$$

significa che il vettore di errore ϵ spiega ciò che non può essere descritto da una

combinazione lineare delle colonne ξ_h , ovvero ha *proiezione nulla* in \mathcal{X} , ossia giace in uno spazio *ortogonale* ad \mathcal{X} in cui è costretto a stare $\hat{\mathbf{y}}$. Come conseguenza si ottiene che ϵ è ortogonale a *tutte* le colonne ξ_h ovvero possiamo scrivere $\mathbf{X}^\top \cdot \epsilon = \mathbf{0}$, il che ci viene comodo perché se premoltiplichiamo ambo i membri di

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \epsilon = \mathbf{X} \cdot \beta^* + \epsilon$$

per \mathbf{X}^\top si ottiene $\mathbf{X}^\top \mathbf{y} = \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \cdot \beta^* + \mathbf{X}^\top \epsilon = \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \cdot \beta^*$ e dunque

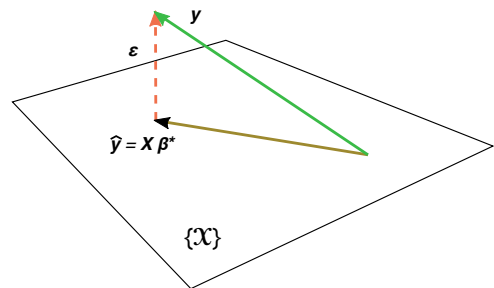
$$\beta^* = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y} \quad (7.39)$$

in cui $\mathbf{X}^+ = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top$ prende il nome di *pseudoinversa* in quanto pur NON essendo \mathbf{X} quadrata e dunque invertibile, oltre ad essere il sistema (7.35) *sovradeterminato* avendo più equazioni che incognite, permette di giungere comunque ad una soluzione a *minima distanza*⁶² (7.38).

⁶¹https://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_dei_minimi_quadrati

⁶²Per approfondimenti vedere

https://it.wikipedia.org/wiki/Regressione_lineare#Regressione_lineare_multipla



Unicità della soluzione Mostriamo ora che il valore di β^* ottenuto con la (7.39) in base al criterio (7.38) è esattamente lo stesso di quello ottenuto dalla (7.37) con il criterio (7.32). A tal fine notiamo che le (7.37) e (7.39) sono equivalenti tra loro, in quanto l'applicazione delle regole del prodotto tra matrici porta alle stesse espressioni (7.36), a meno di un fattore N che poi si elide, potendo dunque scrivere

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{N} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \quad e \quad \hat{\mathbf{R}}_{yx} = \frac{1}{N} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$$

come anche illustrato alla figura seguente.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (p+1) \times N & N \times (p+1) & (p+1) \times (p+1) \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}^\top \end{array} \right] & \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{X} \end{array} \right] & = N \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{R}}_x \end{array} \right] \end{array} & \begin{array}{ccc} (p+1) \times N & N \times 1 & (p+1) \times 1 \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}^\top \end{array} \right] & \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{Y} \end{array} \right] & = N \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{R}}_{yx} \end{array} \right] \end{array} \end{array}$$

7.7.2 Coefficiente di correlazione di Pearson

I diagrammi di esempio presentati alla fig. 7.2 basano la valutazione di quanto una coppia di v.a. x ed y siano correlate anche sul calcolo del *coefficiente di correlazione*⁶³ ρ_{xy} , che ha valori compresi tra $+1$ e -1 , ed è definito come

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

In tal modo, si opera una normalizzazione del valore della covarianza σ_{xy} , rispetto alle deviazioni standard σ_x e σ_y delle due v.a., rendendo così il valore di ρ indipendente dalla dinamica dei valori assunti da x ed y .

Anche il coefficiente ρ si presta ad una interessante interpretazione geometrica, una volta messe in relazione la deviazione standard σ_x con la norma $\|\bar{x}\|$ di x (vedi § 2.4), e la covarianza σ_{xy} con il prodotto scalare $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ tra x ed y ⁶⁴. In tale contesto possiamo definire due v.a. come *ortogonali* se risulta $\sigma_{xy} = \rho_{xy} = 0$, mentre un valore $\rho_{xy} = \pm 1$ indica che una delle due v.a. è sempre proporzionale all'altra, con un fattore costante. Ricordiamo che l'ortogonalità $\rho_{xy} = 0$ esprime unicamente l'assenza di legami di tipo *lineare* tra x ed y , come esemplificato dal caso F) di fig. 7.2.

Citiamo inoltre l'estensione formale del risultato noto come *disuguaglianza di Schwartz* (pag. 50), una volta che al coefficiente di correlazione ρ_{xy} sia stato associato il concetto di coseno tra x ed y : una tale identificazione deriva dall'essere $-1 < \rho_{xy} < 1$, e permette di asserire che $|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$.

⁶³Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Indice_di_correlazione_di_Pearson

⁶⁴L'analogia non è poi troppo *peregrina*, considerando che se x è estratta da un processo ergodico a media nulla, la sua varianza σ_x^2 coincide con la potenza del segnale da cui è estratta, mentre se x ed y sono estratte da segnali congiuntamente ergodici, la covarianza σ_{xy} coincide con la funzione di intercorrelazione (eq. (7.7)), ovvero con la loro *potenza mutua*.

7.7.3 Teorema di Wiener per processi

Sviluppiamo qui la dimostrazione⁶⁵ che $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_x(\tau) \}$ anche se $x(t)$ rappresenta un generico membro di un processo, nelle condizioni espresse alla nota 18. Considerando un segmento $x_T(t) = x(t) \text{rect}_T(t)$ di durata T estratto da un membro del processo, iniziamo dalla definizione (§ 7.3.1) $\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \{ |X_T(f)|^2 \}$ in cui $X_T(f) = \mathcal{F} \{ x_T(t) \}$, e dunque

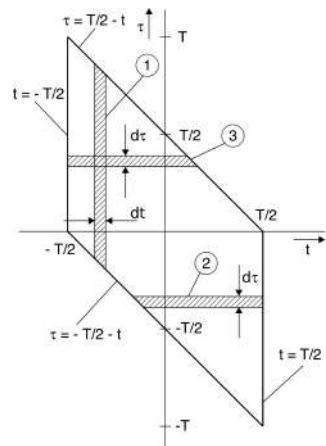
$$\begin{aligned} E \{ |X_T(f)|^2 \} &= E \left\{ \left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 \right\} = \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} E \{ x^*(t_1) x(t_2) \} e^{j2\pi ft_1} e^{-j2\pi ft_2} dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (7.40)$$

dove riconosciamo $E \{ x^*(t_1) x(t_2) \}$ essere pari al momento misto (7.1), che indichiamo per uniformità come $\mathcal{R}_x(t_1, t_2)$ ovvero come $\mathcal{R}_x(t, t + \tau)$ dopo aver posto l'istante t_1 pari ad un generico valore t , ed aver espresso t_2 come $t_2 = t + \tau$. Con la nuova notazione, l'espressione (7.40) diviene⁶⁶

$$\underbrace{\int_{t=-T/2}^{t=T/2} \int_{\tau=-T/2-t}^{\tau=T/2-t} \mathcal{R}_x(t, t + \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau dt}_{\textcircled{1}}$$

Teniamo ora in considerazione il dominio di integrazione mostrato a lato, dove l'area $\textcircled{1}$ rappresenta quella dell'integrale interno, per il differenziale dt : se scambiamo l'ordine di integrazione, suddividendo l'integrale su τ in due parti, per le quali $\tau < 0$ e $\tau > 0$, e corrispondenti alle aree $\textcircled{2}$ e $\textcircled{3}$ in figura, otteniamo

$$\begin{aligned} &\int_{-T}^0 \underbrace{\left[\int_{t=-T/2-\tau}^{t=T/2} \mathcal{R}_x(t, t + \tau) e^{-j2\pi f\tau} dt \right]}_{\textcircled{2}} d\tau + \\ &\int_0^T \underbrace{\left[\int_{t=-T/2}^{t=T/2-\tau} \mathcal{R}_x(t, t + \tau) e^{-j2\pi f\tau} dt \right]}_{\textcircled{3}} d\tau \end{aligned}$$



Considerando ora il processo stazionario, scriviamo $\mathcal{R}_x(t, t + \tau) = \mathcal{R}_x(\tau)$, che portiamo

⁶⁵Tratta da D. Leon, W. Couch, *Fondamenti di telecomunicazioni*, 2004 Apogeo

⁶⁶Per quanto riguarda i nuovi estremi di integrazione, osserviamo che se $\tau = t_2 - t_1$, allora per $t_2 = \pm T/2$, τ vale $\pm T/2 - t_1$. Inoltre, la somma degli esponenti risulta pari a $-j2\pi f(t_2 - t_1) = -j2\pi f\tau$.

fuori dall'integrale su t :

$$\begin{aligned} E \{|X_T(f)|^2\} &= \int_{-T}^0 \left[\int_{-T/2-\tau}^{T/2} dt \right] \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_0^T \left[\int_{-T/2}^{T/2-\tau} dt \right] \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= \int_{-T}^0 (T+\tau) \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_0^T (T-\tau) \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= \int_{-T}^T (T-|\tau|) \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{aligned}$$

dato che per $\tau < 0$ risulta $\tau = -|\tau|$. Sostituiamo l'ultimo risultato nell'espressione $\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \{|X_T(f)|^2\}$, ottenendo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{T-|\tau|}{T} \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{|\tau|}{T} \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{aligned}$$

in cui il secondo termine si annulla se $\int_{-\infty}^{\infty} |\tau \mathcal{R}_x(\tau)| d\tau < \infty$, e ciò dimostra il teorema discusso al § 7.2.1.

7.7.4 Densità spettrale per onda PAM

L'acronimo PAM sta per *Pulse Amplitude Modulation* (pag. 442), e individua una classe di segnali realizzati ripetendo indefinitivamente uno stesso impulso elementare $g(t)$ con periodo T , ognuno moltiplicato (o *modulato in ampiezza*) per un diverso coefficiente a_n . Sebbene in questa definizione possa rientrare anche il caso in cui gli a_n siano campioni di un segnale analogico (§ 4.1), focalizziamo la trattazione al caso in cui rappresentino invece *i simboli* di una trasmissione numerica con periodo di simbolo T , a valori reali nel caso di banda base (§ 15.1.2), o complessi nel caso di una modulazione numerica⁶⁷, mentre $g(t)$ rappresenta un *impulso dati*, del tipo a banda infinita (§ 15.2.1) oppure di Nyquist (§ 15.2.2).

Scriviamo pertanto l'onda PAM nella forma

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT - \theta) \quad (7.41)$$

in cui θ è una v.a. uniformemente distribuita tra $\pm \frac{T}{2}$ in modo che la (7.41) rappresenti un membro di un processo stazionario ergodico (vedi pag. 164), e verifichiamo il risultato *semplice* riportato al § 7.2.5, ossia che nel caso in cui i valori discreti a_n siano realizzazioni di v.a. statisticamente indipendenti, a media nulla, identicamente distribuite e con varianza⁶⁸ $\sigma_A^2 = E \{a_n^2\}$, il segnale dati è a media nulla, e ad esso

⁶⁷In tal caso i valori degli a_n corrispondono ai *punti di una costellazione* nel piano dell'involuppo complesso, vedi cap. 16.

⁶⁸Considerando gli a_n come elementi di una sequenza aleatoria stazionaria ergodica A , con valori a^i appartenenti ad un alfabeto finito di cardinalità L , ovvero $i = 1, 2, \dots, L$, si definisce per essi

- un valor medio $m_A = E_A \{a^i\} = \sum_{i=1}^L p_i a^i$ ed
- una varianza $\sigma_A^2 = E_A \{(a^i - m_A)^2\} = \sum_{i=1}^L p_i (a^i - m_A)^2$

corrisponde uno spettro di densità di potenza pari a

$$\mathcal{P}_x(f) = \sigma_A^2 \frac{|G(f)|^2}{T} \quad (7.42)$$

Allo scopo di arrivare ad un risultato più generale, sviluppiamo i calcoli rimuovendo le ipotesi restrittive di indipendenza statistica e media nulla per gli a_n , per poi riapplicarle una alla volta.

Valor medio Essendo $x(t)$ membro di un processo ergodico, il valor medio di una sua realizzazione può essere calcolato come valore atteso rispetto alle fonti di aleatorietà, ossia i simboli a_n ed il ritardo θ

$$m_X = E_{A,\Theta} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT - \theta) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_A \{a_n\} E_{\Theta} \{g(t - nT - \theta)\}$$

avendo assunto l'indipendenza statistica tra A e Θ . Ponendo $E_A \{a_n\} = m_A$, sviluppando il valore atteso di $g(\cdot)$, e ricordando che $p_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{T} \text{rect}_T(\theta)$, otteniamo

$$\begin{aligned} m_X &= m_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - nT - \theta) p_{\Theta}(\theta) d\theta = \\ &= \frac{m_A}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} g(t - nT - \theta) d\theta = \frac{m_A}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t-nT-T/2}^{t-nT+T/2} g(u) du = \\ &= \frac{m_A}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du = \frac{m_A}{T} G(0) \end{aligned}$$

avendo posto al terzo passaggio⁶⁹ $u = t - nT - \theta$, ad avendo notato al penultimo che gli estremi di integrazione entro la sommatoria sono contigui ed abbracciano tutto il dominio di integrazione. Una prima osservazione che traiamo è che anche se la sequenza degli a_n non fosse a media nulla, è possibile ottenere $m_X = 0$ adottando una $g(t)$ ad area nulla, come ad esempio per un codice Manchester o differenziale (pag. 448), o per le forme d'onda adottate nell'FSK ortogonale incoerente (§ 16.12.1).

Spettro di densità di potenza In accordo al teorema di Wiener (§ 7.2.1), procediamo con il calcolo del momento misto $\mathcal{R}_X(\tau) = E \{x(t) x(t + \tau)\}$ e quindi ne effettuiamo la trasformata di Fourier. Anche qui l'indipendenza statistica tra Θ ed A permette di

in cui p_i rappresenta la probabilità dell' i -esimo valore. Qualora $m_A = 0$, si ottiene $\sigma_A^2 = E_A \{(a^i)^2\}$.

⁶⁹Risultando $d\theta = -du$, gli estremi di integrazione si invertono; quando poi $\theta = T/2$ si ha $u = t - nT - T/2$, mentre a $\theta = -T/2$ corrisponde $u = t - nT + T/2$.

scrivere

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_X(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{a_n a_m\} E\{g(t-nT-\theta)g(t+\tau-mT-\theta)\} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(m-n) \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t-nT-\theta)g(t+\tau-mT-\theta) d\theta = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) \int_{-T/2}^{T/2} g(t-nT-\theta)g(t+\tau-(k+n)T-\theta) d\theta = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t-nT-T/2}^{t-nT+T/2} g(u)g(u+\tau-kT) du = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) \int_{-\infty}^{\infty} g(u)g(u+\tau-kT) du = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) \mathcal{R}_G(\tau-kT)
 \end{aligned}$$

in cui al secondo passaggio si è sfruttata la stazionarietà della sequenza a_n per cui $E\{a_n a_m\} = \mathcal{R}_A(m-n)$, al terzo si è posto $k = m-n$, al quarto si è posto $u = t-nT-\theta$, al penultimo si sono riuniti gli infiniti integrali su domini contigui in uno solo, ed all'ultimo si è riconosciuto l'integrale come quello che definisce l'autocorrelazione (traslata) di $g(t)$, indicata come $\mathcal{R}_G(\tau-kT)$. La trasformata di Fourier del risultato finale produce

$$\mathcal{P}_X(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) |G(f)|^2 e^{-j2\pi f k T} = \frac{1}{T} |G(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) e^{-j2\pi f k T} \quad (7.43)$$

in cui $|G(f)|^2 = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_G(\tau)\}$ è lo spettro di densità di energia dell'impulso $g(t)$, ed il termine $e^{-j2\pi f k T}$ consegue dalla traslazione temporale di $\mathcal{R}_G(\tau)$. L'espressione

$$\mathcal{P}_A(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) e^{-j2\pi f k T} \quad (7.44)$$

rappresenta la DTFT (§ 4.4) di $\mathcal{R}_A(k)$ e prende il nome di *spettro del codice*, mostrando come le caratteristiche statistiche degli a_n contribuiscano a determinare la densità spettrale per il segnale dati associato.

Simboli incorrelati Iniziamo a semplificare il risultato (7.43) considerando il caso in cui i simboli a_n siano statisticamente indipendenti, ma a media non nulla. In questo caso si ottiene⁷⁰

$$\mathcal{R}_A(k) = \begin{cases} m_A^2 + \sigma_A^2 & k = 0 \\ m_A^2 & k \neq 0 \end{cases}$$

⁷⁰Se la sequenza a_n è stazionaria ed a simboli indipendenti, per $k \neq 0$ si ottiene

$$\mathcal{R}_A(k) = E\{a_n a_{n+k}\} = E\{a_n\} E\{a_{n+k}\} = m_A^2$$

mentre per $k = 0$ si ha

$$\mathcal{R}_A(0) = E\{(a_n)^2\} = m_A^{(2)} = m_A^2 + \sigma_A^2$$

come mostrato dalla (6.9) a pag. 152.

e quindi la (7.44) diviene

$$\mathcal{P}_A(f) = \sigma_A^2 + m_A^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f k T} = \sigma_A^2 + \frac{m_A^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (7.45)$$

avendo sfruttato il risultato (3.31) a pag. 81 relativo alla trasformata di un treno di impulsi⁷¹. Sostituendo ora la (7.45) nella (7.44) e quindi in (7.43), per quest'ultima si ottiene

$$\mathcal{P}_X(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \left[\sigma_A^2 + m_A^2 \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right] \quad (7.46)$$

che evidenzia la presenza nello spettro di una componente *continua*, assieme ad una componente *a righe* sulle frequenze armoniche di quella di simbolo $f_s = \frac{1}{T}$, descritta agli impulsi di area $\frac{m_A^2}{T^2} |G(f)|^2$; scegliendo dunque un impulso dati tale che $G(f)$ si annulli per $f = \frac{k}{T}$, tali righe possono essere eliminate. E' per questo motivo che (ad es.) la segnalazione di tipo RZ (vedi § 15.2.1) presenta la componente ad $f = f_s$, vedi l'esercizio seguente.

Simboli a valor medio nullo Nel caso in cui la sequenza a_n oltre ad essere incorrelata presenti anche un valor medio nullo, ovvero $m_A = 0$, la (7.46) si semplifica ulteriormente e fornisce il risultato *semplice* già noto:

$$\mathcal{P}_X(f) = \frac{\sigma_A^2}{T} |G(f)|^2$$

Esempio Applichiamo i risultati a cui siamo pervenuti ai *codici di linea* discussi al § 15.2.1, come ad esempio il codice RZ, che adotta un impulso $g(t) = \text{Arect}_\tau(t)$ con $\tau < T$, per il quale risulta $|G(f)|^2 = (A\tau)^2 \text{sinc}^2(f\tau)$. Se i simboli trasmessi a_n sono equiprobabili, incorrelati, ed a valori binari 0 od 1, si ottiene che

$$\begin{aligned} m_A &= E\{a\} = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0 = 1/2 \\ \sigma_A^2 &= E\{(a - m_A)^2\} = 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/4 = 1/4 \end{aligned}$$

Pertanto la (7.46) fornisce

$$\mathcal{P}_{RZ}(f) = \frac{(A\tau)^2 \text{sinc}^2(f\tau)}{T} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right]$$

Nel caso in cui risulti $\tau = T/2$, la sommatoria presenta termini non nulli per i soli indici dispari, con area degli impulsi pari a $\text{sinc}^2(k/2) = (2/k\pi)^2$, dunque si ottiene

$$\mathcal{P}_{RZ}(f) = \frac{A^2 T}{16} \left(\text{sinc}^2\left(f \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ dispari}}}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right)$$

⁷¹Infatti, applicando la proprietà di traslazione nel tempo scriviamo

$$\mathcal{F}\{\pi_T(t)\} = \mathcal{F}\{\sum_k \delta(t - kT)\} = \sum_k e^{-j2\pi f k T}$$

ma in base alla (3.31) di pag. 81 risulta

$$\mathcal{F}\{\pi_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right), \text{ e dunque } \sum_k e^{-j2\pi f k T} = \frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

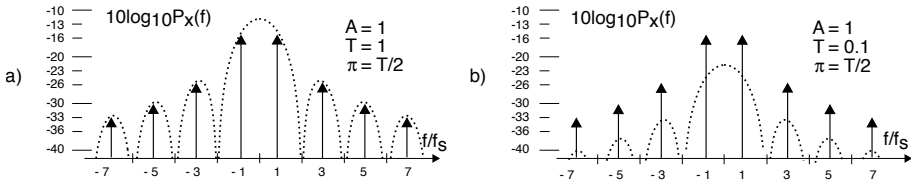


Figura 7.9: Densità di potenza per segnale RZ simmetrico: a) $T = 1$; b) $T = 0.1$

che presenta impulsi per $f = 1/T, 3/T, 5/T, \dots$. Il risultato ottenuto è mostrato in fig. 7.9, in cui si è adottata una scala delle frequenze normalizzata, mentre per le ampiezze si è scelta una rappresentazione in dB (§ 8.1) allo scopo di evidenziare come, all'aumentare della frequenza di simbolo $f_s = 1/T$, la componente a righe tende a *prevalere* rispetto a quella continua, dato che al diminuire di T la durata di $g(t)$ è sempre minore, e così la sua energia. Notiamo inoltre che essendo i simboli *equiprobabili*, si può ottenere $m_A = 0$ e la conseguente scomparsa delle righe spettrali semplicemente scegliendo i valori degli a_n come $+1$ (ad esempio per l'uno) e -1 (per lo zero), ovvero adottando una segnalazione *antipodale* (§ 7.6.1).

Facendo tendere $\tau \rightarrow T$, l'impulso si trasforma in NRZ, per il quale $|G(f)|^2 = (AT)^2 \text{sinc}^2(fT)$, che si azzerava esattamente ai multipli della frequenza di simbolo in cui sono centrati gli impulsi, annullando quindi tutti i termini della sommatoria, indipendentemente dalla scelta degli a_n , e dando luogo al risultato $\mathcal{P}_{NRZ}(f) = \frac{A^2 T}{4} \text{sinc}^2(fT)$, in accordo alla (7.42).

7.7.5 Autocorrelazione di un processo in uscita da un filtro

Al § 7.4.1 si è affermato che, quando un processo stazionario almeno in senso lato attraversa un filtro, il processo di uscita è caratterizzato da una autocorrelazione $\mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau)$. Mostriamo che è vero.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y(\tau) &= E\{y(t)y(t+\tau)\} = \\ &= E\left\{\int h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha \int h(\beta)x(t+\tau-\beta)d\beta\right\} = \\ &= \int \int h(\alpha)h(\beta)E\{x(t-\alpha)x(t+\tau-\beta)\}d\alpha d\beta = \\ &= \int h(\alpha) \int h(\beta)\mathcal{R}_x(\tau+\alpha-\beta)d\beta d\alpha = \end{aligned} \quad (7.47)$$

$$= \int h(\alpha)\mathcal{R}_{xy}(\tau+\alpha)d\alpha = \mathcal{R}_{xy}(\tau) * h(-\tau) \quad (7.48)$$

dato che $\int h(\beta)\mathcal{R}_x(\tau+\alpha-\beta)d\beta$ che compare nella (7.47) è pari alla convoluzione tra $h(t)$ e $\mathcal{R}_x(t)$ calcolata per $t = \tau + \alpha$, ovvero $\int h(\beta)\mathcal{R}_x(\tau+\alpha-\beta)d\beta = \mathcal{R}_x(t) * h(t)|_{t=\tau+\alpha}$, che (vedi l'eq. (7.8) a pag. 194) a sua volta può essere espressa come

$$\mathcal{R}_x(t) * h(t) = x^*(-t) * x(t) * h(t) = x^*(-t) * y(t) = \mathcal{R}_{xy}(t) \quad (7.49)$$

dove all'ultimo passaggio si è applicata la definizione della intercorrelazione (7.7), oltre che la (7.8), ottenendo così la (7.48).

Per arrivare al risultato desiderato, osserviamo ora che applicando la (7.49) alla (7.48), quest'ultima può essere riscritta come

$$\mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_{xy}(\tau) * h(-\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

che, una volta \mathcal{F} -trasformata, equivale a

$$\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) \cdot H(f) \cdot H^*(f) = \mathcal{P}_x(f) \cdot |H(f)|^2 = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau)\} \quad (7.50)$$

Osserviamo infine che se il processo di ingresso oltre ad essere stazionario è anche ergodico, l'antitrasformata della (7.50) si riscrive come $m_y^{(1,1)} = m_x^{(1,1)} * \mathcal{R}_h(\tau)$.

7.7.6 Grafici di esempio

Di seguito sono riportati i grafici della forma d'onda, dell'autocorrelazione, della densità spettrale e della densità di probabilità, per alcuni segnali tipici.

Segnale	Forma d'onda	Autocorrelazione	Densità spettrale	Densità di probabilità
Sinusoide				
Onda quadra				
Impulso rettangolare				
Triangolare				
Dente di sega				
Rumore gaussiano bianco				
Rumore gaussiano limitato in banda				

Distorsione e rumore

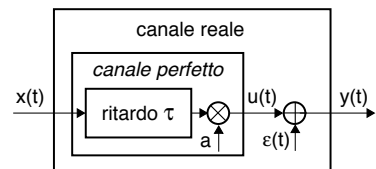
DESCRIVIAMO la natura del peggioramento, o *distorsione*, subito da un segnale che attraversa un sistema fisico, e caratterizziamo quest'ultimo al fine di quantificare l'entità della distorsione introdotta. Questa analisi serve a valutare la qualità di un segnale dopo che ha attraversato circuiti (cap. 18), linee di trasmissione (§ 19.2) od amplificatori, oltre che a sviluppare criteri di progetto che tentano di migliorare le prestazioni del sistema, in termini di probabilità di errore (cap. 15) e/o di rapporto segnale/rumore (cap. 14). La natura della distorsione subita da un segnale rientra in una o più delle seguenti categorie:

- distorsione *lineare* quando prodotta da un sistema lineare come un filtro;
- distorsione *non lineare*, causata da mezzi trasmissivi come la fibra ottica o dispositivi come gli amplificatori, che possono presentare comportamenti non lineari;
- distorsione dovuta a *disturbi additivi* come interferenza, quantizzazione e rumore termico, e che a differenza dei precedenti casi *non dipende* dal segnale, ma semplicemente vi si somma.

Osserviamo poi che per distorsione si intende un effetto *indesiderato*, mentre se invece il segnale viene “manipolato” di proposito, si dice che questo è *elaborato*¹.

Segnale utile, disturbo, canale perfetto ed SNR Può essere preferibile trattare i tre fenomeni esposti in modo unificato, definendo la distorsione come un *disturbo* additivo che si sovrappone ad una componente di segnale *utile* presente nel segnale ricevuto. Tale impostazione si basa sulla considerazione che ricevere un segnale identico a quello trasmesso, tranne che per un fattore di scala ed un ritardo temporale, non altera né forma né sostanza del messaggio: pertanto, un canale che presenti una risposta impulsiva

$$h(t) = a\delta(t - \tau)$$



¹Elaborazione di segnale è la traduzione di SIGNAL PROCESSING, e così il segnale risultante viene anche detto *processato*.

viene indicato come *canale perfetto*, ed il segnale ricevuto $y(t) = u(t) = ax(t - \tau)$ è *tutto utile*. Se invece viene ricevuto qualcosa di diverso, la differenza $\varepsilon(t) = y(t) - ax(t - \tau) = y(t) - u(t)$ viene chiamata *disturbo additivo*. Noti² $u(t)$ e $\varepsilon(t)$, se ne può valutare la rispettiva potenza, e caratterizzare la qualità del segnale ricevuto nei termini del rapporto $\frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_\varepsilon}$ tra la potenza del segnale utile e quella del disturbo, indicato come *rapporto segnale rumore* o *SNR*: ovviamente, la qualità è tanto migliore quanto più *SNR* è elevato³.

Canale rumoroso e attenuazione Il modello di canale costituito dalla sua componente perfetta e da un disturbo additivo si presta bene a rappresentare, oltre alle cause di distorsione lineare e *non*, anche quelle più propriamente additive, come il *rumore termico* la cui natura è descritta al § 8.4.2. In tal caso il disturbo $\varepsilon(t)$ si manifesta in ricezione, con una potenza \mathcal{P}_ε indipendente da quella \mathcal{P}_u del segnale. Allo stesso tempo, al diminuire del fattore di scala a che caratterizza il canale perfetto, la potenza del segnale utile diminuisce con a^2 , e l'*SNR* di pari misura.

La riduzione della potenza del segnale ricevuto ($a < 1$) è indicata come *attenuazione* o *affievolimento* e, pur se in presenza di un canale perfetto ovvero privo di distorsione, produce un peggioramento dell'*SNR* ovvero della qualità del segnale ricevuto. Questo è il caso, ad esempio, dei collegamenti radio (cap. 20), in cui oltre alla attenuazione di natura deterministica legata alla distanza, intervengono ulteriori cause di attenuazione di tipo aleatorio come quelle di natura atmosferica (pioggia o nebbia), quelle dovute al movimento, e quelle dovute alla casualità delle condizioni di propagazione in condizioni di non visibilità (§ 20.4.4).

L'approccio da seguire per valutare il peggioramento dovuto a diverse cause di distorsione che si verificano contemporaneamente è rinviato al § 8.4.1, mentre le cause di distorsione lineare e *non* lineare sono affrontate ai §§ 8.2 e 8.3. Di seguito si

²Nella pratica, i valori a e τ non si conoscono, mentre invece possiamo disporre di coppie di segnali $(x(t), y(t))$. Tali valori vengono quindi valutati come quelli che *rendono SNR massimo* ovvero \mathcal{P}_ε minimo. Considerando segnali di potenza reali, ossia processi stazionari ergodici, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\varepsilon(a, \tau) &= E \{ (y(t) - ax(t - \tau))^2 \} = E \{ y^2(t) \} + a^2 E \{ x^2(t) \} - 2aE \{ y(t)x(t - \tau) \} = \\ &= \mathcal{P}_y + a^2 \mathcal{P}_x - 2a\mathcal{R}_{xy}(\tau) \end{aligned}$$

in cui si è operata la sostituzione $E \{ y(t)x(t - \tau) \} = \mathcal{R}_{yx}(-\tau) = \mathcal{R}_{xy}^*(\tau) = \mathcal{R}_{xy}(\tau)$. Il valore di a che rende minimo $\mathcal{P}_\varepsilon(a, \tau)$ si ottiene eguagliandone a zero la derivata: $\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{P}_\varepsilon(a, \tau) = 2a\mathcal{P}_x - 2\mathcal{R}_{xy}(\tau) = 0$ e dunque $a_{opt} = \frac{\mathcal{R}_{xy}(\tau)}{\mathcal{P}_x}$, che sostituita nell'espressione di \mathcal{P}_ε fornisce

$$\mathcal{P}_\varepsilon(\tau) = \mathcal{P}_y + \left(\frac{\mathcal{R}_{xy}(\tau)}{\mathcal{P}_x} \right)^2 \mathcal{P}_x - 2 \frac{\mathcal{R}_{xy}(\tau)}{\mathcal{P}_x} \mathcal{R}_{xy}(\tau) = \mathcal{P}_y - \frac{(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2}{\mathcal{P}_x} = \mathcal{P}_y \left(1 - \frac{(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2}{\mathcal{P}_x \mathcal{P}_y} \right)$$

Il valore di \mathcal{P}_ε evidentemente è minimo per quel valore di $\tau = \tau_{opt}$ che rende massima $(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2$, ovvero per quella traslazione temporale che rende "più simili" i segnali di ingresso ed uscita.

³Una volta individuati i valori di a e τ , è possibile valutare $\mathcal{P}_u = E \{ (ax(t - \tau))^2 \} = a^2 \mathcal{P}_x$, mentre per \mathcal{P}_ε è valido il risultato di cui alla precedente nota, fornendo in definitiva

$$SNR = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_\varepsilon} = \frac{a^2 \mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_y \left(1 - \frac{(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2}{\mathcal{P}_x \mathcal{P}_y} \right)} = \frac{a^2 \mathcal{P}_x^2}{\mathcal{P}_x \mathcal{P}_y - (\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2}$$

che tende ad infinito qualora $\varepsilon(t)$ sia nullo, ovvero $(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2 = \mathcal{P}_x \mathcal{P}_y$, mentre si azzerava se $a = 0$.

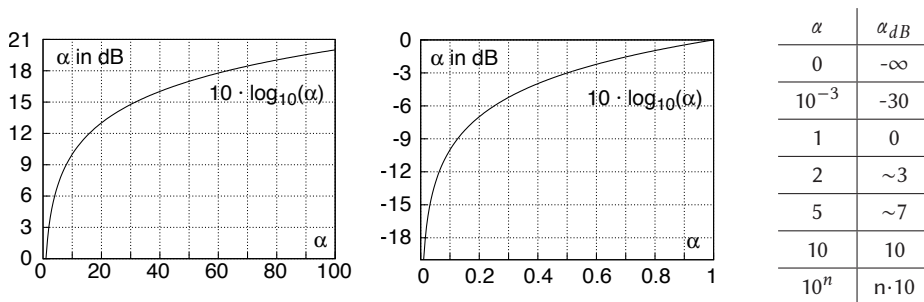


Figura 8.1: Curva di conversione da lineare a decibel, e valori tipici

approfondisce invece il significato della scala di misura logaritmica, in cui spesso sono espresse potenze di segnale, valori di attenuazione o di guadagno, ed SNR , anche se l'uso principale che faremo dello "strumento" dB non avverrà che al capitolo 19.

8.1 Misure di potenza in decibel

Ci sono almeno due buoni motivi per misurare le grandezze in unità logaritmiche: il primo è che in tal modo si rappresentano in maniera compatta grandezze dalla dinamica molto elevata, ed il secondo è che prodotti e rapporti si trasformano in somme e sottrazioni. Inoltre, c'è almeno un buon motivo *psicofisico*⁴, basato sulla conoscenza che l'intensità con cui percepiamo gli stimoli attraverso i nostri organi di senso segue naturalmente una *legge logaritmica*, in quanto per produrre una sensazione che aumenta linearmente, è necessario uno stimolo che aumenta in progressione geometrica. Ciò posto, va anche detto che l'esperienza di insegnamento mostra come, anche se le misure in dB sono qui per aiutarci nei calcoli, esse sono anche uno degli argomenti in cui lo studente medio tende più facilmente a perdersi. Proviamo quindi a fare un po' di ordine!

La misura logaritmica Data una qualsiasi grandezza α , la sua misura in decibel⁵ è definita come

$$\alpha_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \alpha \quad (8.1)$$

e descrive le relazioni mostrate nella figura 8.1, a sinistra per valori $\alpha > 1$, ed a destra per $\alpha < 1$, a cui corrispondono rispettivamente valori in decibel positivi e negativi. Inoltre, sempre in fig. 8.1 è mostrata una tabella con alcune corrispondenze che possono comunemente ricorrere: ad esempio, dato che $\log_{10} 2 = 0.30102\dots$, un valore α pari a 2 equivale a circa 3 dB.

Nota una grandezza espressa in dB, si può risalire al suo valore naturale mediante l'ovvia relazione inversa

$$\alpha = 10^{\frac{\alpha_{dB}}{10}}$$

⁴Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Legge_di_Weber-Fechner

⁵Dunque un decibel, per come è definito, è la decima parte del Bel, ovvero $\alpha_{Bel} = \log_{10} \alpha$. Chissà, forse dopo che definirono il Bel, si accorsero che era troppo grande? :-)

Misura relativa dei rapporti Per esprimere un rapporto $R = \frac{\alpha}{\beta}$ molto grande o molto piccolo, si ricorre spesso alla *scala logaritmica* definita dai dB, calcolando direttamente il rapporto in tali termini, ovvero eseguendo la differenza tra le grandezze α e β espresse in dB, in quanto

$$R_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \frac{\alpha}{\beta} = 10 \cdot \log_{10} \alpha - 10 \cdot \log_{10} \beta = \alpha_{dB} - \beta_{dB} \quad (8.2)$$

Se le due grandezze α e β sono omogenee, come ad esempio due potenze di segnale \mathcal{P}_x e \mathcal{P}_y espresse in V^2 , o due potenze \mathcal{W}_x e \mathcal{W}_y espresse in *Watt*, allora il loro rapporto è un *numero puro*, e la sua misura in dB esprime *di quanti dB* il numeratore è maggiore (o minore) del denominatore. Conoscendo una delle due grandezze, ed il valore del loro rapporto, si può ovviamente risalire al valore dell'altra, ovvero ad esempio

$$\alpha_{dB} = \beta_{dB} + R_{dB} \quad (8.3)$$

ma, perché questa ovvia relazione possa avere una utilità pratica, occorre sapere *cosa rappresenta* β , dopodiché potremo concludere che α rappresenta la stessa cosa⁶, ma R_{dB} decibel più grande. Per questo, si definisce la

Misura assoluta delle grandezze La (8.1) può essere usata per esprimere il *valore assoluto* di una grandezza, assieme alla sua unità di misura, se viene pensata come una applicazione della (8.2), ponendo il denominatore pari *all'unità di misura stessa*. Così ad esempio una potenza \mathcal{W}_x di α *Watt* (⁷) viene espressa come

$$\mathcal{W}_x \text{ (dBW)} = 10 \cdot \log_{10} \frac{\alpha_{Watt}}{1 \text{ Watt}} \text{ [dBW]} \quad (8.4)$$

ovvero, misurandola in dB *sopra il Watt*. Quindi, una potenza misurata in *dBW* può ricondursi alla corrispondente potenza in *Watt*, calcolando

$$\beta_{Watt} = 10^{\frac{\beta_{dBW}}{10}}$$

ed allo stesso modo si può finalmente applicare la (8.3) per ottenere una grandezza effettiva:

$$\alpha_{dBW} = \beta_{dBW} + R_{dB}$$

Conversione tra unità di misura Se invece che in *Watt* il valore β risulta espresso in *milliWatt* ($1 \text{ mW} = 10^{-3} \text{ Watt}$) la corrispondente misura logaritmica viene indicata come *dBm* (dB riferiti al mWatt), valutato come $\beta_{dBm} = 10 \cdot \log_{10} \beta_{mWatt}$. Pertanto, essendo $\beta_{mW} = 10^3 \cdot \beta_W$, possiamo scrivere

$$\beta_{dBm} = 10 \cdot \log_{10} \beta_{Watt} \cdot 10^3 = 10 \cdot \log_{10} \beta_{Watt} + 10 \cdot \log_{10} 10^3 = \beta_{dBW} + 30 \text{ dB}$$

e dunque per passare da una unità di misura ad un'altra, esprimendo le stesse in dB, occorre sommare (o sottrarre) il relativo fattore di scala, anch'esso espresso in dB.

Esempio Zero *dBW* equivalgono a 30 *dBm*, dato che $1 \text{ Watt} = 10^3 \text{ mW}$.

⁶Ad esempio volt², oppure watt.

⁷Al cap. 18 verrà approfondita la differenza tra potenza di segnale, espressa in volt² o ampere², e potenza assorbita, dissipata o trasmessa, espressa in watt.

Misura delle densità Qualora la grandezza da esprimere in unità logaritmiche non sia la potenza *totale* di un segnale, bensì la relativa *densità di potenza* espressa in $\frac{V^2}{Hz}$ o $\frac{W}{Hz}$ (a seconda se si tratti di potenza *di segnale* o *fisica*), ovvero dai multipli e sottomultipli dando luogo a densità di potenza espresse in $\frac{mW}{Hz}$ o $\frac{W}{MHz}$ o $\frac{mW}{MHz}$, è ancora possibile applicare la (8.1) purché intesa nel senso della (8.4), ossia indicando l'unità di misura di partenza, individuando così valori di densità di potenza espressi in termini *assoluti* come $\frac{dBV^2}{Hz}$, $\frac{dBW}{Hz}$, $\frac{dBW}{MHz}$, $\frac{dBm}{MHz}$...

Esempio

- Una densità di potenza $\mathcal{P}(f) = 15 \frac{W}{MHz}$ corrisponde a $\mathcal{P}(f) \approx 1.18 \frac{dBW}{MHz}$
- $-60 \frac{dBW}{Hz}$ equivalgono a $-30 \frac{dBm}{Hz}$, dato che $1 W = 10^3 mWatt$;
- $20 \frac{dBW}{MHz}$ equivalgono a $-40 \frac{dBW}{Hz}$, dato che $1 MHz = 10^6 Hz$, ed i MHz sono a denominatore.

Tali unità di misura torneranno utili in sede di valutazione del *bilancio di collegamento*, affrontato al cap. 19.

8.2 Distorsione lineare

Individua il peggioramento subito dal segnale $x(t)$ a seguito dell'attraversamento di un sistema lineare e permanente (o filtro, pag. 25) che *non* è un canale perfetto: verifichiamo dunque innanzitutto che, in presenza di un canale perfetto, *non* si verifica distorsione lineare.

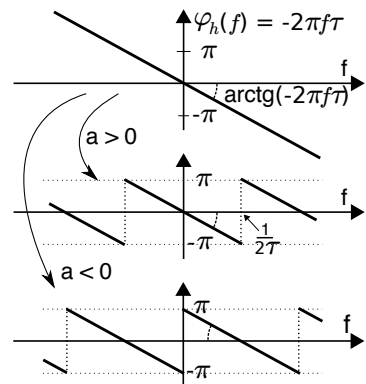
Canale perfetto In questo caso la risposta impulsiva ha la forma $h(t) = a\delta(t - \tau)$ (vedi pag. 231), e dunque per esso risulta $H(f) = |H(f)| e^{j\varphi_h(f)} = \mathcal{F}\{a\delta(t - \tau)\} = ae^{-j2\pi f\tau}$, ovvero

$$|H(f)| = |a| \quad \text{e} \quad \varphi_h(f) = \arg\{H(f)\} = \begin{cases} -2\pi f\tau & \text{con } a > 0 \\ -2\pi f\tau + \pi \operatorname{sgn}(f) & \text{con } a < 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

e quindi la risposta in frequenza ha *modulo costante* ($|H(f)| = |a|$) e *fase lineare*⁸: osserviamo infatti che l'espressione $\varphi_h(f) = -2\pi f\tau$ corrisponde a quella di una retta passante per zero⁹ e con coefficiente angolare $-2\pi\tau$, e come fatto notare a pag. 66, ciò determina che tutte le componenti frequenziali presentano *lo stesso ritardo*, e quindi la forma d'onda in transito *non subisce* deformazioni. Infatti, per un canale perfetto si ottiene

$$Y(f) = X(f) H(f) = X(f) \cdot ae^{-j2\pi f\tau}$$

e dunque, antitrasformando, $y(t) = ax(t - \tau)$.



⁸Il secondo caso per $\varphi_h(f)$ nella (8.5) tiene conto del fatto che la formula di Eulero (2.3) permette di scrivere $-1 = e^{j\pm\pi}$, ed il prodotto per $\operatorname{sgn}(f)$ rende la fase una funzione *dispari* di f .

⁹Anche se, tenendo conto che un angolo α è indistinguibile da un altro $\beta = \alpha \pm 2\pi$, per convenzione quando $|\varphi_h(f)| > \pi$, la stessa viene fatta *ruotare* di 2π .

Canale reale Viceversa, ad un canale *non perfetto* corrisponde $|H(f)| \neq \text{cost}$, e/o $\varphi_h(f) \neq -2\pi f\tau$, e dunque $y(t)$ non è la copia ritardata di $x(t)$. In questo caso il segnale di uscita viene detto affetto da *distorsione lineare* e per esso si riscontra una *modifica* della forma d'onda, dato che le componenti frequenziali del segnale di uscita

$$Y(f) = |Y(f)| e^{j\varphi_y(f)} \quad \text{in cui} \quad \begin{cases} |Y(f)| = |X(f)| |H(f)| \\ \varphi_y(f) = \varphi_x(f) + \varphi_h(f) \end{cases}$$

dipendono oltre che da quelle di ingresso, anche dai valori di $H(f)$, come descritto a pag. 74. La distorsione risultante è detta *lineare* in quanto risultato di una operazione *lineare* come è la convoluzione, alla quale si applica il principio di *sovrapposizione degli effetti*, e dunque la distorsione risultato di una combinazione di cause è la combinazione dei singoli effetti.

Banda di segnale Se consideriamo segnali a banda limitata le condizioni per l'assenza di distorsione lineare sono un po' meno stringenti, dato che in tal caso le (8.5) devono essere soddisfatte solamente nella regione di frequenza individuata dalla banda di segnale, mentre laddove il segnale è assente, il filtro può avere risposta in frequenza qualsiasi.

Equalizzazione In linea di principio consiste nel passaggio di un segnale $y(t)$ affetto da distorsione lineare attraverso un filtro (di *equalizzazione*) con risposta in frequenza $G(f) = 1/H(f)$, in modo da ottenere di nuovo il segnale originario $x(t)$, *invertendo* l'effetto della distorsione lineare - a patto di riuscire a sintetizzare il filtro $G(f)$! L'argomento è trattato ai §§ 13.1.1 per le trasmissioni modulate, 15.3 per quelle in banda base, e 18.4 per gli approcci *adattativi* nel caso di modulazione numerica.

Distorsione di ampiezza e di fase Osserviamo infine che, risultando

$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)| \quad \text{e} \quad \varphi_y(f) = \varphi_x(f) + \varphi_h(f)$$

è possibile descrivere il fenomeno della distorsione lineare considerando separatamente il modulo $|H(f)|$ e la fase $\varphi_h(f)$ della risposta in frequenza, adottando quindi per esse delle rappresentazioni particolarmente utili a descrivere in modo sommario l'entità delle distorsioni stesse.

8.2.1 Distorsione di ampiezza

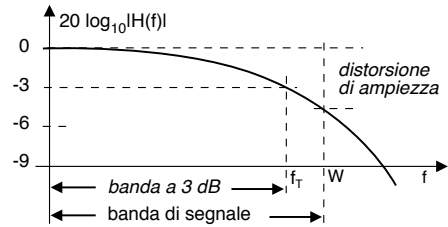
Misura in modo approssimato l'entità della distorsione lineare limitandosi a considerare quella legata allo spettro *di ampiezza*. A questo scopo la definizione di misura in *decibel* introdotta al § 8.1 viene applicata al guadagno di potenza (pag. 206) $|H(f)|^2$, definendo in questo modo il

Guadagno di potenza in dB Espresso da

$$G_{dB}(f) = 10 \log_{10} |H(f)|^2 = 20 \log_{10} |H(f)| \quad (8.6)$$

consente di apprezzare il reale andamento di $|H(f)|^2$ anche per valori molto piccoli. Ad esempio l'applicazione di (8.6) alla $|H(f)|$ di un filtro passa basso produce un

risultato simile a quello mostrato a lato, in cui alla *frequenza di taglio* f_T (pag. 121) per cui $|H(f_T)|^2 = \frac{1}{2} |H_{Max}|^2$ corrisponde un valore di 3 dB inferiore al massimo, che per un passa basso si trova nell'origine: per questo alla f_T viene dato nome di *banda a 3 dB*, intendendo con questo che la potenza delle componenti



frequenziali del segnale che rientrano in tale banda subirà al massimo un dimezzamento. Qualora invece il segnale in transito occupi una banda maggiore, ad es. W , il valore di $G_{dB}^{Max} - G_{dB}(f)|_{f=W}$ costituisce una misura della *distorsione di ampiezza* subita dal segnale, ovvero la differenza di guadagno tra le sue componenti frequenziali più (e meno) attenuate.

Infine, qualora si desideri che la massima distorsione di ampiezza non sia maggiore di una quantità preassegnata, mediante il grafico si individua la banda entro la quale $G_{dB}(f)$ si mantiene all'interno della massima variazione (in dB) prevista, ottenendo così il valore della banda di segnale per cui la distorsione non supera quella desiderata.

8.2.2 Distorsione di fase

Consideriamo ora un canale privo di distorsione di ampiezza, descritto da una risposta in frequenza $H(f) = e^{j\varphi(f)}$, con $\varphi(f) \neq -2\pi f\tau$. In tal caso il segnale in uscita subisce alterazioni della *forma d'onda*, a causa del diverso ritardo subito dalle frequenze in esso presenti, come già illustrato nell'esempio di pag. 66; tale alterazione può anche produrre una notevole variazione della dinamica del segnale, nel caso in cui i diversi ritardi producano un *somma coerente* delle frequenze presenti.

Ritardo di fase Per illustrare questo concetto, poniamo $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ in ingresso al canale e consideriamo assente la distorsione di modulo: l'uscita sarà allora pari a¹⁰ $y(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi(f_0)) = \cos\left(2\pi f_0 \left(t + \frac{\varphi(f_0)}{2\pi f_0}\right)\right) = \cos(2\pi f_0 (t - \tau_f(f_0)))$ in cui

$$\tau_f(f) = -\frac{\varphi(f)}{2\pi f} \quad (8.7)$$

è indicato come *ritardo di fase* e misura il tempo che intercorre tra ingresso ed uscita per una specifica frequenza f . E' immediato verificare che, nel caso in cui $\varphi(f) = -2\pi f\tau$, si ottiene $\tau_f(f) = \tau$, ovvero il ritardo è lo stesso a qualsiasi frequenza. Viceversa se τ_f dipende da f in modo *non lineare*, un segnale di ingresso costituito da due o più frequenze (come le armoniche di un segnale periodico) subisce per ognuna di esse un ritardo differente, ed il segnale uscente $y(t)$ manifesta una *deformazione* della forma d'onda.

Ritardo di gruppo Nel caso più generale di un segnale dallo *spettro continuo*, l'analisi viene svolta¹¹ scomponendo la banda del segnale in piccole regioni di frequenza, per

¹⁰Vedi la nota 24 a pag. 75.

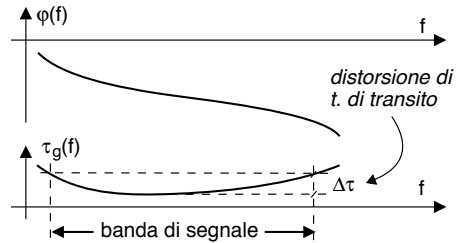
¹¹Tale analisi è rimandata al § 13.1.3.

ognuna delle quali il tempo di attraversamento del filtro è espresso dal *ritardo di gruppo* pari a

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \varphi(f) \quad (8.8)$$

in cui f corrisponde al *centro* della regione (o *gruppo*) di frequenze, e $\tau_g(f)$ tiene conto della *inclinazione* di $\varphi(f)$ per ogni f : i diversi valori di τ_g nella banda di segnale danno quindi una *misura* della dispersione temporale subita dai diversi *gruppi* di frequenze presenti nel segnale. Anche per questo caso, se $\varphi(f) = -2\pi f\tau$ allora $\tau_g(f) = \tau_f(f) = \tau$ è costante, e non si verifica distorsione di fase.

Prendiamo ad esempio l'andamento di $\tau_g(f)$ mostrato in figura, e poniamo che in ingresso al filtro sia presente un suono percussivo, di breve durata e quindi esteso in frequenza. Mentre le frequenze nella regione centrale della banda subiscono un ritardo tra loro simile, quelle agli estremi arrivano con un ritardo maggiore, causandone la *dispersione temporale*

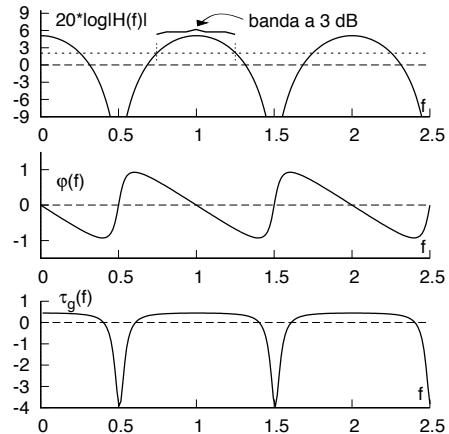
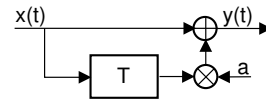


che snaturerà la qualità del suono. Per questo, la differenza $\Delta\tau_g = \tau_g^{max} - \tau_g^{min}$ viene presa come misura dell'entità della *distorsione di tempo di transito*.

Esempio Il filtro trasversale in figura rappresenta un collegamento radio in cui si verifica una eco dovuta a riflessione (vedi 20.3.3). Per esso il guadagno di potenza e la risposta di fase risultano pari

$$|H(f)|^2 = 1 + a^2 + 2a \cos 2\pi fT \quad \text{e} \quad \varphi(f) = \arctan \frac{-a \sin 2\pi fT}{1 + a \cos 2\pi fT}$$

e dunque è presente sia distorsione di ampiezza che di fase. Come noto $H(f)$ è periodica con periodo $f = \frac{1}{T}$, dunque lo sono il modulo, la fase, e τ_g , mostrati tutti in figura, per $a = .8$ e $T = 1$. In base ad $|H(f)|_{dB}^2$ viene individuata la banda a 3 dB, entro la quale la fase si mantiene abbastanza lineare, e τ_g varia relativamente poco. Viceversa, in corrispondenza delle regioni attenuate sono evidenti rapide variazioni di φ e τ_g .

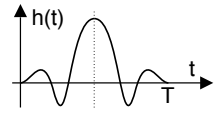


Può destare legittima sorpresa osservare regioni di frequenza per le quali $\tau_g < 0$, che sembrerebbero indicare una violazione del principio di causalità. Al § 13.4.1 si mostra come la (8.8) si ottenga grazie ad una approssimazione che arresta uno sviluppo in serie di potenze al primo termine, ma che nel caso in cui $|H(f)|$ non sia costante e/o la fase cambi rapidamente pendenza non è più lecita: pertanto si tratta solo di una inesattezza del

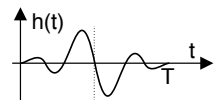
¹²L'espressione di $|H(f)|^2$ è stata ricavata al § 5.2.3. La fase si ottiene come $\varphi(f) = \arctan \frac{\Im\{H(f)\}}{\Re\{H(f)\}}$, in cui $H(f) = 1 + ae^{-j2\pi fT}$.

modello analitico, e l'anticausalità è solo apparente. D'altra parte, alcuni esperimenti mostrano che qualora $\tau_g < 0$, il filtro assume un comportamento *predittivo*¹³.

Filtro a fase lineare Può essere interessante chiedersi se esistano delle condizioni *sufficienti* ad assicurare che un filtro presenti risposta di fase lineare. La risposta è positiva, e la condizione è che la risposta impulsiva esibisca *simmetria pari* rispetto a metà della sua durata T , ovvero $h(t)|_{0 < t < T/2} = h(T - t)$, come esemplificato in figura. Infatti in tal caso considerando un secondo filtro con risposta impulsiva $g(t) = h(t + T/2)$ ottenuta anticipando $h(t)$ di metà durata, $g(t)$ ha simmetria *pari* rispetto a $t = 0$, e dunque ad esso corrisponde ad una $G(f)$ *reale* (vedi pag. 65): invertendo ora la traslazione temporale operata sulla risposta impulsiva, otteniamo che $H(f) = G(f) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$, ossia una fase lineare $\varphi(f) = -\pi f T$. La condizione esposta è facilmente realizzabile mediante un *filtro trasversale*, vedi § 5.2.1.



Fase additiva In effetti è possibile ottenere un ritardo di gruppo $\tau_g(f)$ (8.8) costante anche qualora nella risposta di fase sia presente un termine additivo, ovvero $\varphi(f) = -2\pi f T - \theta$; in particolare nel caso in cui $\theta = \frac{\pi}{2}$ ciò comporta che ad un segnale di ingresso $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ne corrisponda (pag. 74) uno di uscita $y(t) = \cos(2\pi f_0 (t - T) - \frac{\pi}{2}) = \sin(2\pi f_0 (t - T))$, mentre si può dimostrare che in tal caso la risposta impulsiva del filtro presenta una simmetria *dispari* rispetto a metà durata, come mostrato in figura. Qualche dettaglio in più per capire meglio cosa accade viene fornito al § 13.1.2.



Caso del filtro adattato La linearità di fase non viene ricercata sempre e comunque, come nel caso del filtro adattato (§ 7.6) in cui non è per nulla tenuta in considerazione, dato che in tal caso l'unico requisito è posto nella forma $H_R(f) = G^*(f) e^{-j2\pi f T}$ in quanto lo scopo *non* è preservare la forma d'onda in transito, ma calcolare l'intercorrelazione tra segnale in ingresso e risposta impulsiva adattata.

8.2.3 Effetto della distorsione lineare sui segnali

La distorsione lineare introdotta su di un segnale ad opera di un filtro produce effetti che dipendono dalla natura del segnale, e dal suo utilizzo.

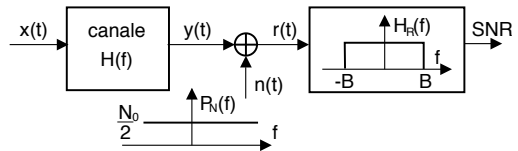
Segnale audio Sebbene l'orecchio umano non sia sensibile allo spettro di fase per quanto riguarda i segnali periodici¹⁴, come già osservato la variazione del ritardo di gruppo $\Delta\tau_g$ nella banda di segnale determina una *dispersione temporale* dei suoni brevi e ricchi di contenuto spettrale, e dunque la modifica del loro effetto percettivo; d'altro canto, la presenza di una distorsione di fase non altera l'intelligibilità del parlato, ma

¹³In questo caso l'uscita *sembra* precedere l'ingresso, tranne qualora il segnale di ingresso presenti una brusca discontinuità temporale, e quindi non sia più predicibile. In tal caso, l'effetto torna ad essere conseguenza della causa: vedi <https://inst.eecs.berkeley.edu/~ee123/sp14/NegativeGroupDelay.pdf>

¹⁴Ascolta ad esempio https://www.youtube.com/watch?v=_xgurzL92Lc

causa comunque un effetto percepibile. Viceversa, le alterazioni del modulo di $H(f)$ modificano il *timbro* dei suoni, alterandone la distribuzione della potenza $\mathcal{P}_y(f)$.

Effetto sull'SNR Se il segnale $y(t)$ viene ricevuto in presenza di disturbi additivi con densità di potenza $\mathcal{P}_N(f) = N_0/2$, il ricevitore provvede innanzitutto ad eliminare le componenti di rumore esterne alla banda di segnale B mediante un filtro passabasso $H_R(f)$, vedi § 15.4.1.



Dato che l'attraversamento del canale con $|H(f)| \neq \text{cost}$ ha modificato la densità $\mathcal{P}_y(f)$ del segnale ricevuto rispetto a quella di $\mathcal{P}_x(f)$, la valutazione dell'SNR in ricezione deve tenere conto dell'effetto filtrante introdotto dal canale, ossia:

$$SNR = \frac{\mathcal{P}_y}{\mathcal{P}_N} = \frac{\int_B \mathcal{P}_y(f) df}{\int_B \mathcal{P}_N(f) df} = \frac{\int_B \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 df}{N_0 B}$$

Allo stesso tempo, l'SNR modifica la propria dipendenza dalla frequenza, ossia

$$SNR(f) = \frac{\mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2}{N_0/2}$$

Sebbene i due casi che seguono non siano ancora stati esattamente definiti, sono comunque inserite qui le considerazioni riassuntive al loro riguardo.

Segnale numerico Questo tipo di segnale è introdotto al cap. 15 e poi ripreso al cap. 16. Per esso la *linearità di fase* è di fondamentale importanza allo scopo di evitare fenomeni di *interferenza intersimbolica* (§ 15.1.2.2), che come vedremo sono conseguenza diretta dei fenomeni di dispersione temporale, dato che questi ultimi *scombussolano* le condizioni di Nyquist (§ 15.2.2.2) su cui l'impulso $g(t)$ adottato dal codificatore di linea (§ 15.1.2) è fondato.

Segnale modulato Indicando con $\underline{x}(t)$, $\underline{y}(t)$ e $\underline{h}(t)$ l'involuppo complesso (§ 11.2.1) di ingresso, uscita, e della risposta impulsiva di un canale, al § 13.1.1 si mostra che risulta $\underline{y}(t) = \frac{1}{2} \underline{x}(t) * \underline{h}(t)$, e dunque per le componenti analogiche di bassa frequenza di $\underline{y}(t)$ si manifesta un fenomeno indicato come *intermodulazione* delle c. a. di b. f., che consiste nelle relazioni

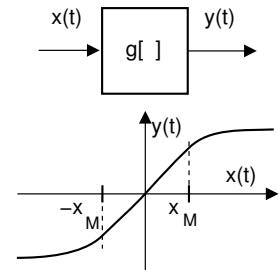
$$\begin{cases} y_c(t) = \frac{1}{2} [x_c(t) * h_c(t) - x_s(t) * h_s(t)] \\ y_s(t) = \frac{1}{2} [x_s(t) * h_c(t) + x_c(t) * h_s(t)] \end{cases} \quad (8.9)$$

Qualora $H(f)$ presenti simmetria coniugata rispetto ad f_0 si ottiene $h_s(t) = 0$, riducendo l'effetto dell'intermodulazione a quanto si otterrebbe filtrando ciascuna delle c.a. di b.f. mediante $h_c(t)$. D'altra parte, anche quest'ultimo tipo di distorsione può essere evitato qualora $\underline{h}(t)$ rappresenti un canale perfetto, a cui in questo caso corrisponde la condizione che, oltre a risultare $|H(f)| = \text{cost}$, il ritardo di gruppo $\tau_g(f)$ sia *costante* nella banda di segnale, o in modo equivalente $\varphi(f)$ sia *lineare* attorno alla portante f_0 , cioè $\varphi(f) = \varphi_0 - 2\pi(f - f_0)\tau$. Ulteriori approfondimenti ai §§ 13.1.2.4 e 13.2.

8.3 Distorsione da non linearità

Si tratta di un fenomeno che *non dipende* da un effetto memoria o dalla frequenza, come avviene nel caso della distorsione lineare. Al contrario, quella non lineare consiste nell'effetto prodotto su di un segnale dall'attraversamento di un dispositivo la cui caratteristica ingresso-uscita *istantanea* descrive un comportamento *non lineare*, per il quale cioè la relazione ingresso-uscita è del generico tipo $y(t) = g[x(t)] \neq ax(t) + b$, ovvero ogni valore di uscita dipende unicamente da quello di ingresso al medesimo istante, secondo una relazione appunto *non lineare*.

Saturazione Un tipico caso di distorsione non lineare si verifica quando un amplificatore¹⁵ è alimentato da un segnale di ingresso con dinamica troppo elevata. Indicando con x_M il massimo valore di ingresso per cui l'amplificatore mantiene un comportamento lineare, valori di $|x(t)| > x_M$ provocano il fenomeno della *saturazione*, caratterizzato dalla curva ingresso-uscita dalla forma *ad s* mostrata in figura.



Comparsa di nuove frequenze E' forse la conseguenza più appariscente della distorsione di non linearità. Prima di addentrarci in un modello analitico del fenomeno, può essere istruttivo riflettere sul risultato sperimentale mostrato in fig. 8.2. Un segnale sinusoidale a frequenza 5 Hz viene campionato con $f_c = 100$ Hz ottenendo 256 campioni di cui si valuta la densità di energia tramite DFT, con l'esito mostrato su di una scala in dB alla prima colonna, riproducendo in pratica la situazione di fig. 4.11, compreso l'effetto della finestra rettangolare. Lo stesso segnale viene quindi fatto passare attraverso una non linearità del tipo di quella mostrata sopra, causando la lieve distorsione della forma d'onda mostrata al centro di fig. 8.2: osserviamo in tal caso la comparsa di una componente a frequenza tripla, seppure con energia di 30 dB (pari a un millesimo) inferiore. L'ultima colonna mostra infine il risultato di una saturazione *più ripida*, al punto che la forma d'onda diviene quasi squadrata, producendo un numero più elevato (e più intenso) di armoniche, sempre dispari. In definitiva, sappiamo già (§ 2.2.2) che un'onda quadra ha solo armoniche dispari!

¹⁵come ad esempio è il caso dei TWTA introdotti a pag. 867

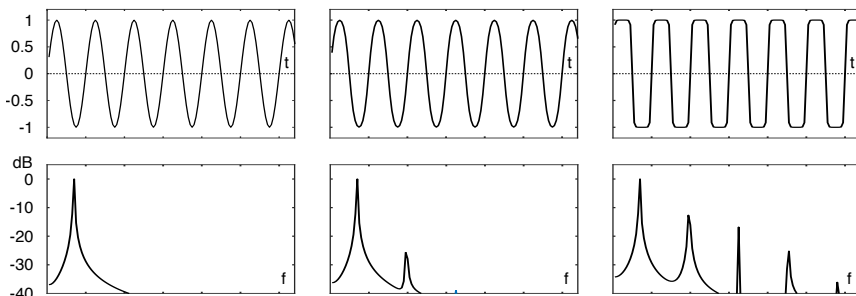


Figura 8.2: Sinusoide finestrata e sua DFT (a sin.); dopo distorsione non lineare, la comparsa di armoniche

Dato che in presenza di fenomeni non lineari decade il principio di sovrapposizione degli effetti, per descrivere il fenomeno in forma analitica si procede studiando prima il caso di un semplice segnale sinusoidale, e quindi si accenna ai risultati ottenibili per processi gaussiani. In entrambi i casi, l'analisi si basa sullo sviluppo di $g [x (t)]$ in serie di potenze arrestato al terzo ordine, in modo da poter scrivere¹⁶

$$y (t) = G [x (t) + \alpha x^2 (t) + \beta x^3 (t)] \tag{8.10}$$

in cui $G = \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=0}$ rappresenta il guadagno dell'amplificatore, ed i coefficienti

$$\alpha = \frac{1}{2G} \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=0} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{6G} \left. \frac{d^3g}{dx^3} \right|_{x=0}$$

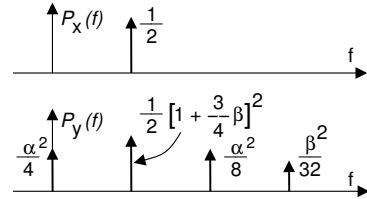
tengono conto degli effetti di secondo e terzo ordine. Notiamo anche come il termine legato a β sia quello che tiene conto dell'effetto della saturazione, in virtù della simmetria dispari di x^3 .

8.3.1 Ingresso sinusoidale

Ponendo $x (t) = A \cos \omega_0 t$ la (8.10) si riscrive come¹⁷

$$\begin{aligned} y (t) &= G [A \cos \omega_0 t + \alpha A^2 \cos^2 \omega_0 t + \beta A^3 \cos^3 \omega_0 t] = \\ &= GA \left[\frac{\alpha A}{2} + \left(1 + \frac{3}{4} \beta A^2 \right) \cos \omega_0 t + \frac{\alpha A}{2} \cos 2\omega_0 t + \frac{\beta A^2}{4} \cos 3\omega_0 t \right] \end{aligned} \tag{8.11}$$

Ricordando ora che la potenza di una cosinusoide di ampiezza A è pari ad $\frac{A^2}{2}$, alla (8.11) corrisponde lo spettro di densità di potenza disegnato a lato, detta *spettro unilatero* in quanto non tiene conto delle frequenze negative, ed ottenuto per $A = G = 1$: osserviamo chiaramente sia la comparsa di termini a frequenza doppia e tripla di quella di ingresso, sia di una componente continua.



In molti casi l'esatta relazione $y (t) = g [x (t)]$ non è però nota, e dunque non lo sono i coefficienti α e β . Il loro valore viene quindi ottenuto per via *sperimentale* ponendo in ingresso una sinusoide di potenza nota, osservando la potenza delle armoniche presenti in uscita, e sfruttando la relazione (8.11) come descritto appresso.

Fattori di intermodulazione Le caratteristiche tecniche che accompagnano gli amplificatori riportano, invece di α e β , i valori dei *fattori di intermodulazione* μ_2 e μ_3 (detti di seconda e di terza armonica), ottenuti per via sperimentale utilizzando un ingresso *sinusoidale*, misurando le potenze in uscita \mathcal{P}_I , \mathcal{P}_{II} e \mathcal{P}_{III} oltre che alla frequenza in ingresso anche alla sua seconda e terza armonica, e definendo in base ai

¹⁶Si applichi lo sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo ordine ossia

$$\begin{aligned} y = g (x) &= y_0 + \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n g(x)}{dx^n} \right|_{x=0} x^n = y_0 + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=0} x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2} \left. \frac{d^3g}{dx^3} \right|_{x=0} x^3 = \\ &= G \left(x + \frac{1}{2G} \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=0} + \frac{1}{6G} \left. \frac{d^3g}{dx^3} \right|_{x=0} x^3 \right) \end{aligned}$$

essendo $y_0 = g (x = 0) = 0$ ed avendo posto $G = \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=0}$.

¹⁷Si fa uso delle relazioni $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$ e $\cos^3 \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3\alpha$.

loro rapporti¹⁸ le quantità

$$\mu_2^2 \doteq \frac{\mathcal{P}_{II}}{\mathcal{P}_I^2} \quad \text{e} \quad \mu_3^2 \doteq \frac{\mathcal{P}_{III}}{\mathcal{P}_I^3} \quad (8.12)$$

da cui si possono ottenere i coefficienti α e β mediante le relazioni $\alpha \simeq 1.41 \cdot \mu_2 \cdot G$ e $\beta = 2 \cdot \mu_3 \cdot G^2$, come calcolato alla nota¹⁹.

Dato che dalle (8.12) possiamo scrivere $\mathcal{P}_{II} = \mu_2^2 \cdot \mathcal{P}_I^2$ e $\mathcal{P}_{III} = \mu_3^2 \cdot \mathcal{P}_I^3$, osserviamo che per piccoli valori di \mathcal{P}_I la distorsione prodotta sia da \mathcal{P}_{II} che da \mathcal{P}_{III} è trascurabile; all'aumentare di \mathcal{P}_I , \mathcal{P}_{II} cresce con il quadrato della potenza della sinusoide in ingresso, mentre \mathcal{P}_{III} con il cubo, e dunque la potenza della terza armonica \mathcal{P}_{III} finisce per divenire predominante.

Con alcuni passaggi trigonometrici si può infine mostrare che qualora il segnale in ingresso contenga più di una sinusoide, in uscita saranno presenti anche termini a frequenza pari alla somma ed alla differenza di ogni coppia di frequenze in ingresso, oltre a tutti i loro multipli: tale fenomeno viene indicato come *distorsione di intermodulazione*²⁰.

8.3.2 Ingresso aleatorio

Per sviluppare l'analisi dell'effetto che la distorsione non lineare produce su di un segnale a spettro continuo ci poniamo in un'altra situazione-limite, studiando il caso in cui l'ingresso $x(t)$ sia membro di un processo gaussiano stazionario a media nulla, con potenza \mathcal{P}_x e densità spettrale $\mathcal{P}_x(f)$.

Al § 8.5.1 vengono discussi i passaggi che, in virtù di alcune proprietà dei momenti di variabili aleatorie gaussiane, consentono di giungere ad una espressione della densità spettrale $\mathcal{P}_y(f)$ del processo $y(t) = G[x(t) + \alpha x^2(t) + \beta x^3(t)]$ in uscita dalla non linearità nei termini della trasformata di Fourier della relativa funzione di autocorrelazione $\mathcal{R}_y(\tau)$. Il risultato mostra che oltre ad un termine in continua e ad una amplificazione di $\mathcal{P}_x(f)$, in uscita si manifestano anche i due termini additivi

$$\mathcal{P}_{II}(f) = G^2 2\alpha^2 \cdot \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f); \quad \mathcal{P}_{III}(f) = G^2 6\beta^2 \cdot \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f)$$

¹⁸Le relazioni mostrate si ottengono scrivendo

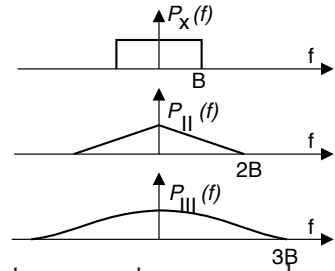
$$\begin{aligned} \mathcal{P}_I &= \frac{G^2 A^2}{2} \left(1 + \frac{3}{4} \beta A^2\right)^2 \simeq \frac{G^2 A^2}{2} \quad \left(\text{se } \beta \ll \frac{4}{3A^2}\right) \\ \mathcal{P}_{II} &= \frac{G^2 A^4 \alpha^2}{8} = \frac{G^4 A^4}{4} \frac{1}{G^2} \frac{\alpha^2}{2} = \mathcal{P}_I^2 \mu_2^2 \\ \mathcal{P}_{III} &= \frac{G^2 A^6 \beta^2}{32} = \frac{G^6 A^6}{8} \frac{1}{G^4} \frac{\beta^2}{4} = \mathcal{P}_I^3 \mu_3^2 \end{aligned}$$

¹⁹Le relazioni alla nota 18 definiscono i fattori μ_2 e μ_3 come $\begin{cases} \mu_2^2 \doteq \frac{\mathcal{P}_{II}}{\mathcal{P}_I^2} = \frac{1}{G^2} \frac{\alpha^2}{2} \\ \mu_3^2 \doteq \frac{\mathcal{P}_{III}}{\mathcal{P}_I^3} = \frac{1}{G^4} \frac{\beta^2}{4} \end{cases}$ da cui si ottengono

i valori riportati nel testo, purché sia verificata la condizione $\beta \ll 4/3A^2$. In caso contrario decade la possibilità di risalire in modo semplice ad α e β a partire dai fattori di intermodulazione, che restano dunque una misura *oggettiva* (in quanto ottenuti mediante strumentazione) dell'entità della distorsione non lineare.

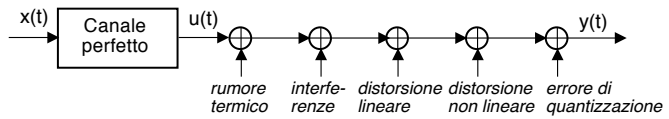
²⁰Vedi ad es. <https://it.wikipedia.org/wiki/Intermodulazione>

che rappresentano l'effetto distorcente della non linearità: notiamo che per entrambi i contributi si verifica una *convoluzione in frequenza* della $\mathcal{P}_x(f)$ originaria con se stessa. Nel caso di un segnale $x(t)$ di banda base i termini $\mathcal{P}_{II}(f)$ e $\mathcal{P}_{III}(f)$ dovuti alla non linearità occupano pertanto una banda di estensione rispettivamente doppia e tripla di quella di $\mathcal{P}_x(f)$ come per il caso di esempio mostrato in figura, in cui una $\mathcal{P}_x(f)$ rettangolare convoluta con se stessa ne produce una triangolare di base doppia, o più smussata quando convoluta tre volte. Pertanto, solo una parte della potenza totale del segnale di errore dovuto alla distorsione giace nella stessa banda di segnale. Il caso relativo ad un segnale $x(t)$ *modulato* viene invece trattato al § 13.3.



8.4 Disturbi additivi

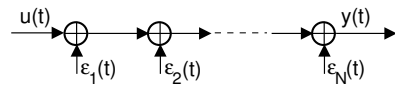
Il termine di errore $\varepsilon(t) = y(t) - ax(t - \tau)$ tra l'effettivo segnale ricevuto e quello prodotto dalla componente perfetta (pag. 231) del canale²¹ è dovuto, oltre alle cause di distorsione esposte fin qui, anche ad ulteriori fonti di disturbo *additivo* indicate per questo con il termine di *rumore* o *disturbo*, come ad esempio il rumore termico (§ 8.4.2), il disturbo di natura interferente (pag. 648), od il rumore di quantizzazione (§ 4.3.1.1) - anche se quest'ultimo è più propriamente un fenomeno di tipo non lineare. Le diverse fonti di disturbo vengono generalmente analizzate in forma separata e indipendente, e per ognuna di esse è definito un valore di $SNR_i = \mathcal{P}_u/\mathcal{P}_{\varepsilon_i}$ dovuto solamente a quella fonte. Vediamo ora come combinare assieme tali parametri di qualità.



Vediamo ora come combinare assieme tali parametri di qualità.

8.4.1 Valutazione dell'SNR dovuto a diverse fonti di disturbo

Per giungere ad una espressione per l' SNR_T complessivo consideriamo lo schema della figura a lato, in cui il segnale utile $u(t)$ è affetto da diverse cause di disturbo $\varepsilon_i(t)$ *indipendenti* tra loro ed a media nulla, per ognuna delle quali è noto il valore dell' SNR_i associato.



L'ipotesi di indipendenza statistica permette di affermare che la potenza di errore complessiva è *la somma*²² di quella dei singoli contributi, ossia

$$\mathcal{P}_{\varepsilon_T} = E \{ (\sum_i \varepsilon_i)^2 \} = \sum_i E \{ \varepsilon_i^2 \} = \sum_i \mathcal{P}_{\varepsilon_i}$$

²¹La valutazione della potenza \mathcal{P}_u dalla componente perfetta in uscita dal canale trasmissivo viene affrontata nella seconda parte del testo, applicando alla potenza \mathcal{P}_x del segnale in ingresso al canale le relazioni di trasferimento energetico discusse al capitolo 18 e dipendenti dalla tipologia del mezzo trasmissivo, come descritto al capitolo 19.

²²Infatti al § 7.5.2 si mostra come il risultato della somma di processi indipendenti ed a media nulla abbia potenza pari alla somma delle potenze.

e dunque l'effetto di tutti i disturbi contemporaneamente attivi determina un SNR complessivo pari a $SNR_T = \mathcal{P}_u / \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_{\varepsilon_i}$; considerando ora che la potenza dei singoli contributi di rumore può essere espressa come $\mathcal{P}_{\varepsilon_i} = \mathcal{P}_u / SNR_i$, si ottiene

$$SNR_T = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_u \sum_{i=1}^N \frac{1}{SNR_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{SNR_i}}$$

Questo risultato ricorda quello della impedenza equivalente a più impedenze poste in parallelo, il che porta a descrivere l' SNR complessivo come il *parallelo* degli SNR . Una applicazione di questo risultato viene esposta ai § 18.3.1 e § 18.3.2, che descrivono rispettivamente le prestazioni dei ripetitori *trasparenti* o *rigenerativi* nei confronti del rumore.

8.4.2 Rumore gaussiano

Molto spesso si assume che la somma dei contributi di rumore additivo possa essere assimilata ad un *processo gaussiano* (§ 6.5.3), e ciò consente di sviluppare i calcoli sfruttando le sue ben studiate proprietà. In alcuni casi si tratta solo di una approssimazione, ma se il disturbo additivo è il risultato di una somma elevata di cause *indipendenti ed identicamente distribuite* (i.i.d.), come in presenza di molti interferenti simili, il *teorema centrale del limite* (§ 6.7.2) assicura una buona aderenza alla realtà. Un caso particolare di disturbo additivo dovuto a molteplici cause i.i.d. prende il nome di *rumore termico*, che alla gaussianità aggiunge la proprietà di esibire una densità di potenza *bianca*, come ora andiamo ad approfondire.

8.4.2.1 Rumore termico nei bipoli passivi

Ai capi di un resistore R a temperatura T è presente una *tensione a vuoto* $n(t)$, realizzazione di un processo gaussiano a media nulla, e che è l'effetto del *moto caotico* degli elettroni all'interno della resistenza²³. Lo spettro di densità di potenza della tensione a vuoto ha espressione²⁴

$$\mathcal{P}_n(f) = 2R \frac{\hbar f}{e^{\frac{\hbar f}{kT}} - 1} \simeq 2kTR \quad [\text{Volt}^2]$$

in cui $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ JOULE/K è la *costante di Boltzmann* ed $\hbar = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Joule·sec è la *costante di Plank*: questi valori fanno sì che alla *temperatura ambiente* $T = T_0 = 290$ ĩK (pari a 17 ĩC) l'approssimazione $\mathcal{P}_n(f) \simeq 2kTR$ sia valida ad ogni frequenza di interesse²⁵, ossia fino a qualche decina di GHz. Da questo punto di vista quindi il

²³Possiamo pensare che gli elettroni, qualora si trovino in maggior misura in una metà della resistenza, producano una differenza di potenziale negativa in quella direzione. Allo zero assoluto (- 273 °C) il moto caotico degli elettroni cessa, e si annulla così la tensione di rumore. Di qui l'aggettivo *termico* per descrivere il fenomeno.

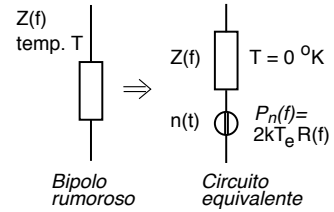
²⁴Si tratta di una forma della legge di *Plank*, vedi

https://en.wikipedia.org/wiki/Johnson-Nyquist_noise

²⁵Espandendo $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ si ottiene che per $x \ll 1$ risulta $e^x \simeq 1 + x$, e quindi $\frac{\hbar f}{kT} \simeq 1 + \frac{\hbar f}{kT}$. Inoltre per $T = T_0 = 290$ ĩK si ottiene $\frac{\hbar f}{kT} = 1.65 \cdot 10^{-13} \cdot f$, e almeno finché $f < 50$ GHz si ottiene $\frac{\hbar f}{kT} < 0.01$ e dunque $\mathcal{P}_n(f) = \frac{2R\hbar f}{1 + \frac{\hbar f}{kT} - 1} = 2R\hbar f \cdot \frac{kT}{\hbar f} = 2kTR$.

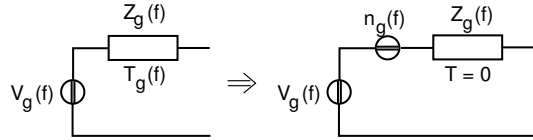
processo di rumore termico è *bianco*, ovvero costante a tutte le frequenze di interesse.

In un bipolo passivo di impedenza (§ 18.1.1) $Z(f) = R(f) + jX(f)$ solamente la parte reale $R(f)$ (componente resistiva) concorre a generare il processo di rumore termico, che pertanto possiede una densità di potenza *di segnale*, o a vuoto, $\mathcal{P}_n(f) \simeq 2kTR(f)$. Nel caso in cui il bipolo contenga *più* resistori a temperature diverse, si può definire una temperatura equivalente T_e ; un bipolo passivo equivale pertanto allo stesso bipolo non rumoroso (a temperatura zero), con in serie un generatore di rumore con densità di potenza $\mathcal{P}_n(f) \simeq 2kT_eR(f)$, come mostrato in figura. Notiamo ora che, in virtù dei conti che portano ad esprimere la parte reale dell'impedenza equivalente in funzione anche dei componenti reattivi presenti nel circuito, $R(f)$ risulta dipendere dalla frequenza, e quindi la densità di potenza $\mathcal{P}_n(f)$ può descrivere non più uno spettro bianco, bensì *colorato*.

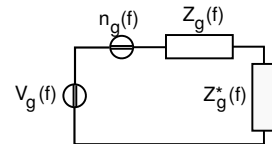


8.4.2.2 Rumore termico di un generatore di segnale

Dal punto di vista di un ricevitore il segnale uscente dal canale appare provenire da una sorgente *equivalente*²⁶, in cui è presente un generatore di segnale (a vuoto) $v_g(t) \Leftrightarrow V_g(f)$ in serie ad una impedenza interna $Z_g(f)$ che si trova alla temperatura del generatore T_g . Come abbiamo visto, a sua volta $Z_g(f)$ presenta ai suoi capi una tensione di rumore (a vuoto) $n_g(f)$, e dunque il generatore sovrappone al suo proprio segnale anche quello di rumore.



Potenza disponibile Al § 18.1.1.3 si mostra che se il generatore con densità di potenza *di segnale* $\mathcal{P}_g(f)$ è chiuso su di un carico *adattato*²⁷ $Z_c(f) = Z_g^*(f)$ la potenza $\mathcal{W}_{dg}(f)$ assorbita²⁸ dal carico sarà la *massima* possibile e per questo denominata *potenza disponibile* del generatore, pari a



$$\mathcal{W}_{dg}(f) = \frac{\mathcal{P}_g(f)}{4R_g(f)} \quad [\text{Watt}]$$

Anche il generatore di rumore (che condivide con quello di segnale la medesima impedenza interna $Z_g(f)$) cede al carico la propria potenza (di rumore) disponibile

$$\mathcal{W}_{dn}(f) = \frac{\mathcal{P}_n(f)}{4R_g(f)} = \frac{2kTR_g(f)}{4R_g(f)} = \frac{1}{2}kT_g \left[\frac{\text{Watt}}{\text{Hz}} \right]$$

²⁶Ovvero rappresentativa dello stadio di uscita del dispositivo o mezzo, a cui è connesso lo stadio di ingresso del ricevitore. L'argomento viene approfondito al cap. 18.

²⁷Come sarà illustrato al § 18.1.1, si parla di carico *adattato* quando il suo valore determina un effetto desiderato, come il massimo trasferimento di potenza in questo caso, o l'assenza di distorsione lineare qualora $Z_c(f) = \alpha Z_g(f)$.

²⁸Mentre la potenza *di segnale* (o *a vuoto*) è il quadrato di una tensione, quella assorbita dal carico è misurata in Watt, e per questo viene d'ora in poi indicata con \mathcal{W} .

Notiamo quindi che la densità di potenza *disponibile* del rumore è tornata ad avere uno spettro *bianco*!

SNR di un generatore Nel caso in cui $T_g = T_0 = 290$ Kelvin (pari a 17°Celsius) il termine $\frac{1}{2}kT_g$ è universalmente indicato con la notazione $\mathcal{W}_{dn}(f) = \frac{1}{2}kT_0 = \frac{1}{2}N_0$, e poiché il ricevitore si considera sempre *adattato*, il segnale emesso dal generatore presenta un *SNR intrinseco*²⁹ pari a

$$SNR_g(f) = \frac{\mathcal{W}_{dg}(f)}{\frac{1}{2}kT_0} \quad (8.13)$$

Inoltre se $T_g = T_0$ il valore assunto da kT_0 può essere *precalcolato*, ed espresso in unità logaritmiche, fornendo $10 \log_{10}(1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 290) \simeq -204 \frac{dBW}{Hz}$; in virtù delle regole di conversione introdotte a pag. 235 otteniamo per esso anche i valori seguenti, da utilizzare nelle formule di progetto del cap. 19:

$$kT_0 = -204 \text{ [dBW/Hz]} = -174 \text{ [dBm/Hz]} = -114 \text{ [dBm/MHz]}$$

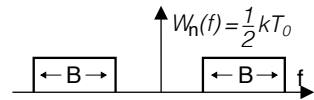
Esempio All'uscita di un filtro passa-banda ideale non rumoroso³⁰ di estensione $B = 1$ MHz si riscontra una potenza disponibile di rumore $\mathcal{W}_{dn} = 4 \cdot 10^{-3}$ picoWatt.

Infatti $\mathcal{W}_{dn} = \mathcal{W}_{dn}(f) \cdot 2B = kT_0 \cdot B$ ovvero

$$\mathcal{W}_{dn}^{dBm} = -114 \text{ [dBm/MHz]} + 0 \text{ [dB/MHz]} = -114 \text{ dBm}$$

e dunque

$$\mathcal{W}_{dn} = 10^{-114/10} = 10^{-11.4} = 3.98 \cdot 10^{-12} \simeq 4 \cdot 10^{-12} \text{ mW.}$$



8.5 Appendice

8.5.1 Distorsione non lineare di processo gaussiano

Riprendiamo il calcolo della $\mathcal{P}_y(f)$ per un segnale $y(t) = G[x(t) + \alpha x^2(t) + \beta x^3(t)]$ qualora $x(t)$ sia membro di un processo stazionario gaussiano a media nulla e potenza \mathcal{P}_x . A tale scopo occorre prima determinare $\mathcal{R}_y(\tau) = E\{y(t)y(t+\tau)\}$, e quindi eseguirne la trasformata di Fourier. Sulla base di un risultato di teoria³¹ che asserisce che per una coppia di v.a. (x_1, x_2) estratte da un processo gaussiano a media nulla risulta che $E\{x_1^i x_2^j\} = 0$ se $i + j$ è dispari, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y(\tau) &= E\{y(t)y(t+\tau)\} = E\{G^2(x_1 + \alpha x_1^2 + \beta x_1^3)(x_2 + \alpha x_2^2 + \beta x_2^3)\} = \\ &= G^2(E\{x_1 x_2\} + 2\beta E\{x_1 x_2^3\} + \alpha^2 E\{x_1^2 x_2^2\} + \beta^2 E\{x_1^3 x_2^3\}) \end{aligned} \quad (8.14)$$

²⁹Notiamo che lo stesso valore di SNR_g è esprimibile anche come rapporto tra le potenze *di segnale* anziché *disponibili*: infatti

$$SNR_g(f) = \frac{\mathcal{P}_g(f)}{4R_g(f)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}kT_g} = \frac{\mathcal{P}_g(f)}{2kT_g R_g(f)} = \frac{\mathcal{P}_g(f)}{\mathcal{P}_n(f)}$$

³⁰Si intende dire che il filtro non introduce altro rumore oltre a quello di natura termica. Al § 18.2 sarà illustrato come mediante il *fattore di rumore* F_{dB} si possa tenere conto del rumore introdotto da una o più reti due porte in cascata, sia di tipo *passivo* come nei collegamenti radio o su rame, sia di tipo *attivo* come per amplificatori e mixer.

³¹Noto come teorema di Isserlis, vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Isserlis'_theorem.

in cui si è indicato per brevità $x_1 = x(t)$ e $x_2 = x(t + \tau)$, che rappresentano le due v.a. marginali di una gaussiana multivariata a media nulla e covarianza $\Sigma_x = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_x & \mathcal{R}_x(\tau) \\ \mathcal{R}_x(\tau) & \mathcal{P}_x \end{bmatrix}$. A riguardo della (8.14), riconosciamo subito $E\{x_1 x_2\}$ come la $\mathcal{R}_x(\tau)$ in ingresso, mentre per gli altri momenti misti ci si avvale di un corollario al precedente risultato³², valido per una gaussiana multivariata, che asserisce:

$$E\{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n\} = \sum (E\{x_{p_1} \cdot x_{p_2}\} \cdot E\{x_{p_3} \cdot x_{p_4}\} \cdot \dots \cdot E\{x_{p_{n-1}} \cdot x_{p_n}\}) \quad (8.15)$$

in cui la somma è estesa a tutte le possibili permutazioni *non equivalenti* di $(1, 2, \dots, n)$ ³³. In base a ciò, sviluppiamo i termini che compaiono nella (8.14), e dopo semplici ma laboriosi passaggi otteniamo

$$\begin{aligned} E\{x_1 x_2^3\} &= E\{x_1 x_2 x_2 x_2\} = 3\mathcal{P}_x \cdot \mathcal{R}_x(\tau) \\ E\{x_1^2 x_2^2\} &= E\{x_1 x_1 x_2 x_2\} = \mathcal{P}_x^2 + 2\mathcal{R}_x^2(\tau) \\ E\{x_1^3 x_2^3\} &= E\{x_1 x_1 x_1 x_2 x_2 x_2\} = 9\mathcal{P}_x^2 \cdot \mathcal{R}_x(\tau) + 6\mathcal{R}_x^3(\tau) \end{aligned} \quad (8.16)$$

in cui si è sostituito (per la stazionarietà) $E\{x_1^2\} = E\{x_2^2\}$ con \mathcal{P}_x , e $E\{x_1 x_2\} = E\{x_2 x_1\}$ con $\mathcal{R}_x(\tau)$. Sostituendo le (8.16) nella (8.14) possiamo ora scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y(\tau) &= G^2 (\mathcal{R}_x(\tau) + 2\beta \cdot 3\mathcal{P}_x \cdot \mathcal{R}_x(\tau) + \alpha^2 (\mathcal{P}_x^2 + 2\mathcal{R}_x^2(\tau)) + \beta^2 (9\mathcal{P}_x^2 \cdot \mathcal{R}_x(\tau) + 6\mathcal{R}_x^3(\tau))) \\ &= G^2 (\alpha^2 \mathcal{P}_x^2 + (1 + 6\beta \mathcal{P}_x + 9\beta^2 \mathcal{P}_x^2) \mathcal{R}_x(\tau) + \alpha^2 2\mathcal{R}_x^2(\tau) + 6\beta^2 \mathcal{R}_x^3(\tau)) \end{aligned}$$

da cui finalmente otteniamo la $\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_y(\tau)\}$ come somma di quattro termini $\mathcal{P}_0(f) + \mathcal{P}_I(f) + \mathcal{P}_{II}(f) + \mathcal{P}_{III}(f)$, in cui

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(f) &= G^2 \alpha^2 \cdot \mathcal{P}_x^2 \cdot \delta(f) \\ \mathcal{P}_I(f) &= G^2 (1 + 6\beta \mathcal{P}_x + 9\beta^2 \mathcal{P}_x^2) \cdot \mathcal{P}_x(f) \\ \mathcal{P}_{II}(f) &= G^2 2\alpha^2 \cdot \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f) \\ \mathcal{P}_{III}(f) &= G^2 6\beta^2 \cdot \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f) \end{aligned}$$

Il termine $\mathcal{P}_0(f)$ rappresenta un *contributo in continua* presente in $y(t)$ (ma non in $x(t)$) di ampiezza $G\alpha\mathcal{P}_x$, mentre $\mathcal{P}_I(f)$ individua una *amplificazione* di $x(t)$ per un fattore pari a $G\sqrt{1 + 6\beta\mathcal{P}_x + 9\beta^2\mathcal{P}_x^2}$, e costituisce il *segnale utile*. Viceversa, i termini $\mathcal{P}_{II}(f)$ e $\mathcal{P}_{III}(f)$ esprimono i termini di *distorsione* causati dall'elemento non lineare, e sono discussi ai §§ 8.3 e 13.3.

³²Vedi <https://math.stackexchange.com/questions/957351/proving-isserlis-theorem-for-n-4> per la dimostrazione del caso di quarto ordine.

³³Le permutazioni si definiscono *equivalenti* se accoppiano con ordine diverso o in posizione diversa le stesse v.a.. Ad esempio, per quattro v.a. si ha

$$E\{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\} = E\{x_1 \cdot x_2\} \cdot E\{x_3 \cdot x_4\} + E\{x_1 \cdot x_3\} \cdot E\{x_2 \cdot x_4\} + E\{x_1 \cdot x_4\} \cdot E\{x_2 \cdot x_3\}$$

mentre per un momento di ordine 6 si ottengono 15 termini. Se il momento misto coinvolge un numero di v.a. inferiore al suo ordine, come per le (8.16), le permutazioni intendono indicare la *posizione* di ogni v.a., e non il suo pedice.

Teoria dell'informazione e codifica di sorgente

COME evidenziato fin dal cap. 1, il motivo per voler trasmettere un segnale deriva *dall'informazione* che lo stesso convoglia. Descrivere e misurare questo concetto è indissolubilmente legato alla caratterizzazione della entità che produce il segnale, indicata come *sorgente*, che può essere continua o discreta, con o senza memoria, e che si assume di tipo stazionario, ovvero invariante nel tempo. Dopo aver individuato come misurare l'informazione media (chiamata *entropia*) contenuta nei segnali prodotti da una sorgente, ci occupiamo di rappresentare gli stessi in una forma (chiamata *codifica di sorgente*) in grado di *ridurre* la quantità di dati da trasmettere (ovvero la banda da occupare) senza pregiudicare la qualità del messaggio, ossia senza *perdere* informazione. Mentre nel caso di sorgente discreta è possibile pervenire a soluzioni in tal senso ottimali, per le sorgenti di segnali tempo-continui l'analisi perviene alla possibilità di ridurre *gradualmente* la banda necessaria alla trasmissione, accettando l'insorgenza di una distorsione che rappresenta l'associata perdita di informazione. Approfondimenti sulla codifica di sorgenti multimediali sono svolti al capitolo 10, mentre il cap. 17 determina il massimo tasso informativo che un canale può trasportare, ossia la sua *capacità*, ed illustra come *proteggere* dagli errori di ricezione l'informazione trasmessa, ovvero il tema della *codifica di canale*.

Tipi di sorgente ed elementi che ne consentono la codifica Una sorgente informativa può essere di natura discreta, come nel caso di un documento scritto, o continua, come nel caso di un segnale analogico, ad esempio audio e video. In entrambi i casi, considerazioni di tipo statistico conducono a *misurare* (in bit/simbolo) la quantità media di informazione presente nei messaggi prodotti mediante la definizione di una grandezza, l'*entropia*. Ma allo stesso tempo la descrizione in modo *nativo* di tali messaggi può produrre una *velocità di trasmissione* ben superiore!

La *codifica di sorgente* ha lo scopo di individuare rappresentazioni alternative per le informazioni prodotte dalla sorgente in modo da ridurre il numero di bit/secondo necessari alla trasmissione, e renderlo quanto più possibile prossimo a quello indicato dell'entropia. Ciò avviene sfruttando le caratteristiche della sorgente, del processo di

codifica, e del destinatario dei messaggi, in quanto

- la particolare distribuzione statistica dei simboli o dei valori emessi dalla sorgente può permettere l'uso di un minor numero di bit per rappresentare i simboli *più frequenti* di altri;
- la dipendenza statistica presente tra simboli consecutivi, ovvero la presenza di un fenomeno di *memoria* intrinseco della sorgente, rende possibile la *predizione* (approssimata) dei valori futuri;
- l'introduzione di un *ritardo di codifica* permette di analizzare un intero intervallo temporale del messaggio;
- nel caso di segnali multimediali i *fenomeni percettivi* legati alla fisiologia dell'apparato sensoriale possono guidare il codificatore nella scelta delle componenti di segnale da sopprimere, in quanto percettivamente non rilevanti.

Nel caso di sorgenti nativamente discrete, come ad esempio documenti in formato elettronico, lo scopo della codifica di sorgente è quello di permettere la ricostruzione *integrale* di quanto trasmesso, realizzando una codifica *senza perdita di informazione*. Nel caso invece di sorgenti continue, dove la sequenza numerica è il risultato di un processo di campionamento e quantizzazione, si determina l'insorgenza di una prima causa di *distorsione* nel messaggio ricostruito; la velocità binaria effettiva può quindi essere ulteriormente ridotta grazie allo sfruttamento dei fenomeni percettivi, ed in tal caso il risultato della codifica viene detto *con perdita di informazione*.

9.1 Codifica di sorgente discreta

Iniziamo l'analisi considerando una sorgente di informazione che produce sequenze $x(n)$ composte da simboli x_k appartenenti ad un alfabeto di cardinalità L (ossia con $k = \{1, 2, \dots, L\}$), e che si presentano con probabilità $p_k = Pr(x_k)$ non dipendente da n , ovvero la sorgente è *stazionaria*.

Sorgente senza memoria Con questo termine si intende che i simboli vengono emessi in modo *statisticamente indipendente* (§ 6.1.5), ovvero indicando con x_h, x_k una coppia di simboli consecutivi (ossia $x(n) = x_h, x(n+1) = x_k$), la probabilità del secondo non dipende dall'identità del primo, ossia $p(x_k/x_h) = p(x_k) = p_k$.

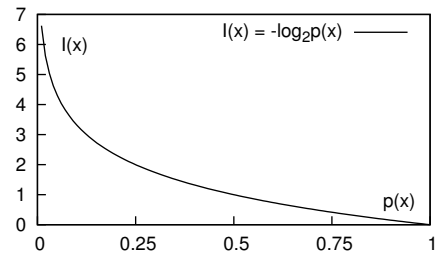
Misura dell'informazione La conoscenza di ognuno dei simboli emessi x_k apporta una quantità di informazione (espressa in *bit*) definita come¹

$$I_k = I(x_k) = \log_2 \frac{1}{p_k} = -\log_2 p_k \text{ bit} \quad (9.1)$$

che rappresenta il *livello di dubbio* a riguardo del verificarsi dell'evento x_k prima che

¹Per calcolare il logaritmo in base 2, sussiste la relazione $\log_2 \alpha = \frac{\log_{10} \alpha}{\log_{10} 2} \approx 3.322 \cdot \log_{10} \alpha$. O più in generale, $\log_2 \alpha = \frac{\log_\beta \alpha}{\log_\beta 2}$

questo si verifichi, ovvero di quanto possiamo ritenerci sorpresi nel venire a conoscenza dell'evento x_k , di cui riteniamo di conoscere la probabilità p_k . Osserviamo infatti che la (9.1) attribuisce un valore di informazione tanto più elevato quanto minore è la probabilità di emissione del simbolo.



La scelta di esprimere la relazione tra probabilità e informazione mediante il logaritmo in base 2 consente di verificare le seguenti osservazioni:

Prob. p_k	Inf. $-\log_2 p_k$	Commento
1	0	L'evento certo non fornisce informazione
0	∞	L'evento impossibile dà informazione infinita
$\frac{1}{2}$	1	Conoscere quale tra due eventi equiprobabili si sia verificato apporta un'informazione pari ad una cifra binaria (0/1) o bit = <i>binary digit</i>
$1/2^n$	n	Es. probabilità $1/4 \rightarrow$ due bit, $1/8 \rightarrow$ tre bit ...

Notiamo inoltre che, essendo la sorgente senza memoria, due simboli emessi consecutivamente sono statisticamente indipendenti ovvero $p(x_h x_k) = p(x_h) p(x_k)$ e dunque $I(x_h, x_k) = -\log_2 p_h p_k = -\log_2 p_h - \log_2 p_k = I(x_h) + I(x_k)$.

9.1.1 Entropia

Come in termodinamica al concetto di entropia si associa il grado di *disordine* in un sistema, così per una sorgente informativa l'entropia misura il livello *medio* di *casualità* dei simboli emessi. Definiamo infatti *entropia* (indicata con H) di una sorgente discreta S il *valore atteso* (§ 6.2.2) della quantità di informazione apportata dalla conoscenza dei simboli (scelti tra L possibili) da essa generati

$$H_s = E \{I_k\} = \sum_{k=1}^L p_k I_k = \sum_{k=1}^L p_k \log_2 \frac{1}{p_k} \text{ bit/simbolo} \tag{9.2}$$

che, pesando in probabilità la quantità di informazione associata ai diversi simboli, rappresenta il *tasso medio* di informazione per simbolo espresso dalle sequenze osservabili. Come dimostriamo sotto, da tale definizione ne consegue che

- se i simboli sono *equiprobabili* ($p_k = \frac{1}{L}$ con $\forall k$) la sorgente è *massimamente informativa*, e la sua entropia è la massima possibile per un alfabeto ad L simboli, pari a $H_{s_{Max}} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \log_2 L = \log_2 L$ bit/simbolo;
- se i simboli non sono equiprobabili, allora $H_s < \log_2 L$;
- se la sorgente emette sempre e solo lo stesso simbolo, allora $H_s = 0$.

Questi predicati possono essere riassunti dall'espressione

$$0 \leq H_s \leq \log_2 L \tag{9.3}$$

Dimostrazione Osserviamo innanzitutto che $H_s \geq 0$ in quanto la (9.2) comprende tutti termini positivi o nulli, essendo $\log_2 \alpha \geq 0$ per $\alpha = 1/p_k \geq 1$. Mostriamo ora che

$H_s - \log_2 L \leq 0$: riscriviamo innanzitutto il primo membro della disequaglianza come

$$\begin{aligned}
 H_s - \log_2 L &= \sum_k p_k \log_2 \frac{1}{p_k} - \log_2 L \cdot \sum_k p_k = \\
 &= \sum_k p_k \left(\log_2 \frac{1}{p_k} - \log_2 L \right) = \sum_k p_k \log_2 \frac{1}{L \cdot p_k}
 \end{aligned} \tag{9.4}$$

dato che $\sum_k p_k = 1$, ove le sommatorie su k si intendono da 1 ad L . Esprimiamo poi questo risultato parziale nei termini di logaritmi *naturali*, tenendo conto che

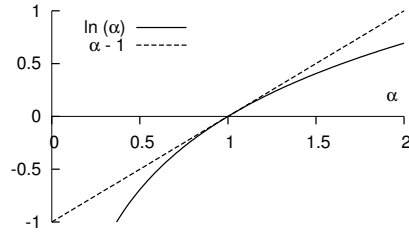
$\log_2 \alpha = \frac{\ln \alpha}{\ln 2}$, ovvero

$$\sum_k p_k \log_2 \frac{1}{L \cdot p_k} = \frac{1}{\ln 2} \sum_k p_k \ln \frac{1}{L \cdot p_k} \tag{9.5}$$

A questo punto utilizziamo la relazione

$$\ln \alpha \leq \alpha - 1$$

mostrata in figura, con l'uguaglianza valida solo se $\alpha = 1$.



Ponendo quindi $\alpha = \frac{1}{L \cdot p_k}$ e sostituendo la (9.5) nella (9.4) si ottiene

$$\begin{aligned}
 H_s - \log_2 L &= \frac{1}{\ln 2} \sum_k p_k \ln \frac{1}{L \cdot p_k} \leq \frac{1}{\ln 2} \sum_k p_k \left(\frac{1}{L \cdot p_k} - 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_k \frac{1}{L} - \sum_k p_k \right) = \frac{1}{\ln 2} (1 - 1) = 0
 \end{aligned}$$

con il segno di uguale solo se $\frac{1}{L \cdot p_k} = 1$ ovvero $p_k = \frac{1}{L}$.

9.1.1.1 Entropia di sorgente binaria

Nel caso particolare di una sorgente *binaria*, ovvero che emette uno tra due simboli $\{x_0, x_1\}$ con probabilità rispettivamente $p_0 = p, p_1 = q = 1 - p$, la formula dell'entropia (9.2) fornisce l'espressione

$$H_b(p) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p) \text{ bit/simbolo} \tag{9.6}$$

il cui grafico è mostrato in figura 9.1, in funzione di p .

I due simboli $\{x_0, x_1\}$ possono essere rappresentati dalle 2 cifre binarie $\{0, 1\}$, che in questo caso chiamiamo *binit*, per non confonderli con la misura dell'informazione (il bit). Osserviamo quindi che se $p \neq 0.5$ si ottiene $H_b(p) < 1$, ossia la sorgente emette informazione con un tasso inferiore a un bit/simbolo, mentre a prima vista non potremmo usare meno di un binit per rappresentare ogni simbolo binario.

9.1.1.2 Ridondanza

Esprime la differenza D tra l'entropia di una sorgente H_s (9.2) ad L simboli ed il numero di binit² $M = \lceil \log_2 L \rceil$ necessario a rappresentarli, divisa per quest'ultimo, ovvero

$$D = \frac{M - H_s}{M} = 1 - \frac{H_s}{M} \leq 1 \tag{9.7}$$

²La notazione $\lceil \alpha \rceil$ indica l'intero superiore ad α : ad esempio con $L = 10$ occorrono $M = \lceil \log_2 10 \rceil = \lceil 3.322 \rceil = 4$ binit/simbolo, come se fosse stato $L = 16$.

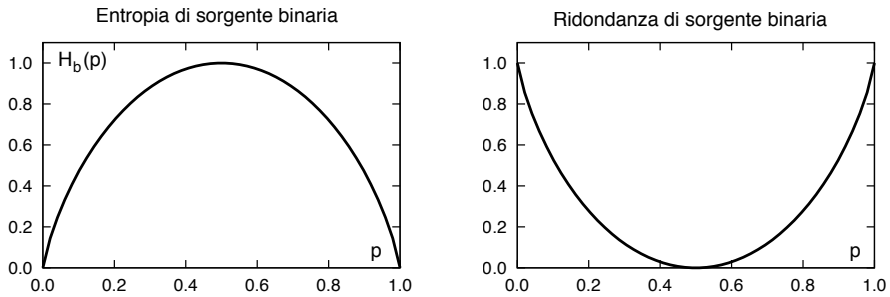


Figura 9.1: Entropia di sorgente binaria e ridondanza associata

mostrata sempre in fig. 9.1 per il caso $L = 2$ al variare di p^3 .

Esempio Consideriamo un sorgente binaria con $p_0 = 0.8$ (e $p_1 = 0.2$). L'applicazione della (9.6) fornisce un valore $H_b(0.8) = 0.8 \log_2 \frac{1}{0.8} + 0.2 \log_2 \frac{1}{0.2} = 0.72$ bit/simbolo, minore del valore di 1 bit/simbolo che si sarebbe ottenuto nel caso di equiprobabilità. La relativa ridondanza D è pari a $1 - 0.72/1 = 0.28$, ovvero il 28 %.

9.1.1.3 Entropia di sorgente L-aria

L'applicazione della (9.3) al caso di una sorgente che emette simboli *non* equiprobabili ed appartenenti ad un alfabeto di cardinalità L , determina per la stessa un valore di entropia $H_L < \log_2 L$ bit/simbolo.

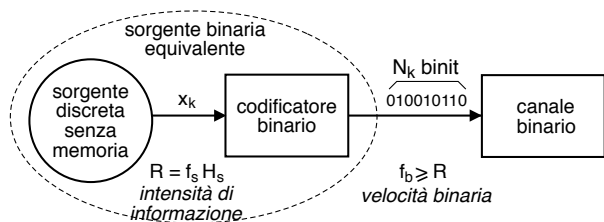
Esempio Nel caso di una sorgente quaternaria con $p_0 = 0.5, p_1 = 0.25, p_2 = 0.125, p_3 = 0.125$, l'applicazione della (9.2) fornisce $H_4 = 1.75$ bit/simbolo, inferiore ai 2 bit/simbolo di una sorgente con quattro simboli equiprobabili. La relativa ridondanza è ora pari a $1 - 1.75/2 = 0.125$ ovvero il 12.5 %.

9.1.2 Intensità informativa e codifica binaria

Svolgiamo ora alcune considerazioni relative alla possibilità di ridurre la ridondanza mediante una operazione di *codifica* (di sorgente). Consideriamo una sorgente discreta senza memoria con alfabeto ad L simboli, caratterizzata da una entropia di H_s bit/simbolo, e che emette i valori x_k a frequenza f_s simboli/secondo: il *flusso informativo* risultante consegue quindi una *intensità* o *velocità di informazione* pari a

$$R = f_s \cdot H_s \quad \text{bit/secondo} \tag{9.8}$$

Volendo trasmettere tale informazione attraverso un *canale binario* (vedi § 17.1.1), l'elemento indicato in figura come *codificatore binario* fa corrispondere ad ogni simbolo x_k un numero va-



³Si noti la differenza: la ridondanza della codifica *di sorgente* indica la frazione di binit/simbolo che eccedono il valore dell'entropia, mentre la ridondanza della codifica *di canale* (pag. 473) indica il rapporto tra binit di protezione e quelli effettivamente emessi dalla sorgente.

riabile di N_k binit⁴, scelti in modo da utilizzare meno binit per i simboli più probabili (e più binit per quelli *rari*) come descritto nel seguito, producendo una *velocità di trasmissione* binaria di f_b *bit/binit/sec*. Dal punto di vista del canale il messaggio è prodotto da una nuova sorgente *equivalente*, i cui simboli binari hanno probabilità p e $1 - p$, e dunque caratterizzata da una entropia $H_b(p)$ *bit/binit* ≤ 1 . Dato che l'intensità informativa in ingresso $f_s \cdot H_s$ ed in uscita $f_b \cdot H_b(p)$ dal codificatore deve essere la stessa⁵ e che $H_b(p) \leq 1$, la velocità binaria f_b della sorgente binaria equivalente rispecchia il vincolo

$$f_b \geq f_b \cdot H_b(p) = f_s \cdot H_s = R \quad (9.9)$$

Il rapporto $\bar{N} = \frac{f_b}{f_s} \geq H_s$ rappresenta il numero *medio* di binit emessi per ciascun simbolo della sorgente, e può essere valutato a partire dalle probabilità p_k dei simboli x_k e dal numero N_k di binit necessario a rappresentarlo, come valore atteso $\bar{N} = E\{N_k\} = \sum_k p_k N_k$.

9.1.2.1 Teorema della codifica di sorgente

Noto anche come *primo teorema di Shannon*⁶, afferma che *esiste* un modo di scegliere gli N_k binit associati a ciascun simbolo x_k tale che⁷

$$H_s \leq \bar{N} \leq H_s + \epsilon \quad (9.10)$$

con ϵ piccolo a piacere, e che si annulla in corrispondenza della codifica *ottima*, per la quale risulta $\bar{N} = H_s$. Ma non dice come fare, cosa di cui ci occupiamo ai §§ seguenti.

9.1.2.2 Codebook e codeword

Le operazioni svolte dal codificatore binario sono descritte nei termini della emissione di una parola di codice detta anche *codeword*, prelevata da un dizionario (o *codebook*) che descrive la collezione di tutte le possibili codeword.

9.1.2.3 Efficienza del codice

E' la misura η di quanti bit di informazione sono trasportati da ogni binit di codifica⁸, ed è definita come il rapporto tra l'entropia di sorgente H_s *bit/simbolo* ed il numero medio \bar{N} di *binit/simbolo* emessi: in base alla (9.8) ed alla considerazione che $f_b = f_s \cdot \bar{N}$ si ottiene

$$\eta = \frac{H_s}{\bar{N}} = \frac{H_s}{f_b/f_s} = \frac{f_s \cdot H_s}{f_b} = \frac{R}{f_b} = H_b(p) \leq 1 \quad [\text{bit/binit}] \quad (9.11)$$

⁴Mettere in corrispondenza i diversi simboli di sorgente con una loro codifica binaria è detta *codifica per blocchi*, discussa al § 9.1.4, dove si mostra anche la possibilità di produrre ogni parola di uscita in corrispondenza non di un *unico* simbolo di sorgente alla volta, ma come equivalente di più simboli. Raggruppando ad esempio M simboli *binari* si ottiene una nuova sorgente equivalente con $L' = 2^M$ simboli.

⁵Essendo biunivoca la corrispondenza tra il simbolo x_k ed il gruppo di N_k binit, non vi è perdita o aggiunta di informazione.

⁶Vedi ad es. http://it.wikipedia.org/wiki/Primo_teorema_di_Shannon

⁷In effetti la (9.10) sussiste qualora il codificatore non operi indipendentemente su ogni simbolo di sorgente, ma più in generale possa emettere i binit in corrispondenza di sequenze di x_k *via via più lunghe*. Torneremo su questo aspetto al § 9.1.4, dove il teorema sarà dimostrato.

⁸Ad esempio, un valore $\eta = 0.33$ indica che ogni binit trasporta solo $1/3$ di bit di informazione.

e pertanto η è anche pari al rapporto tra gli R *bit/secondo* di informazione della sorgente e la velocità di trasmissione f_b *binit/secondo* prodotta dal codificatore.

Osservazione All'aumentare dell'efficienza, si assiste ad una contemporanea riduzione della ridondanza, potendo scrivere⁹ $\eta + D = 1$.

Sappiamo già che qualora i binit emessi a velocità f_b assumano i valori 0 o 1 in modo equiprobabile, allora per la sorgente equivalente risulta $H_b(\frac{1}{2}) = 1$, ovvero dalla (9.9) $f_b = R$ e dalla (9.11) $\bar{N} = H_s$. Dunque il problema di individuare un codice ottimo diviene quello di trovare un insieme di *codeword* tali da rendere *equiprobabili* i valori dei binit, con il vincolo di mantenere il codice *decifrabile*, ovvero tale da rispettare la *regola del prefisso*. Ma andiamo con ordine.

9.1.3 Codifica con lunghezza di parola variabile

Mostriamo mediante un esempio come scegliendo *codeword più lunghe* per rappresentare i simboli *meno probabili*, e *più corte* per i simboli *più frequenti*, si può subito ottenere una migliore efficienza del codice. Consideriamo infatti la sorgente del secondo esempio a pag. 253, con alfabeto di cardinalità $L = 4$, ai cui simboli competono le probabilità riportate alla seconda colonna della tabella. In questo caso l'entropia vale

Simbolo	Prob.	Codeword	N_k
x_1	.5	0	1
x_2	.25	10	2
x_3	.125	110	3
x_4	.125	111	3

$$\begin{aligned} H_s &= \sum_k p_k \log_2 \frac{1}{p_k} = \\ &= \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{2}{8} \log_2 8 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{8} \cdot 3 = 1.75 \text{ bit/simbolo} \end{aligned}$$

Se il codificatore di sorgente adotta le *codeword* mostrate nella terza colonna, a cui corrispondono le lunghezze di N_k binit riportate nella quarta colonna, il numero *medio* di binit/simbolo prodotti dalla codifica binaria risulta pari a

$$\bar{N} = E \{N_k\} = \sum_k N_k p_k = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{2}{8} = 1.75 \text{ binit/simbolo} \quad (9.12)$$

Con queste *codeword* otteniamo dunque $H_s = \bar{N}$, ovvero una efficienza $\eta = 1$! Intraprendiamo allora un ragionamento che ci porterà a concludere come questo sia un risultato per nulla scontato, e che dipende sia dalla particolare scelta fatta per le *codeword*, sia dal particolare tipo delle p_k dell'esempio, tutte potenze negative di due (essendo $0.5 = 2^{-1}$, $0.25 = 2^{-2}$, $0.125 = 2^{-3}$).

9.1.3.1 Regola del prefisso

Affinché un insieme di *codeword* di lunghezza variabile possa essere adottato come *codebook di sorgente*, queste devono poter essere riconosciute come *distinte* presso il ricevitore, e ciò è possibile a patto che nessuna sia *uguale all'inizio* di una *codeword* più lunga. Si può mostrare che la condizione necessaria e sufficiente per avere un codice *non ambiguo* è che il numero di binit N_k con cui sono espresse le *codeword* soddisfi la

⁹Sebbene la (9.7) esprima la ridondanza come $D = 1 - \frac{H_s}{M}$, dopo la codifica i simboli di sorgente sono rappresentati (in media) da \bar{N} binit anziché M , dunque otteniamo $\eta + D = \frac{H_s}{\bar{N}} + 1 - \frac{H_s}{\bar{N}} = 1$.

disuguaglianza di Kraft¹⁰, espressa come

$$K = \sum_{k=1}^L 2^{-N_k} \leq 1 \tag{9.13}$$

Esempio Nella tabella sono riportati quattro possibili codici (A,B,C,D) per la sorgente quaternaria già discussa, assieme al corrispondente valore di \bar{N} e K .

Il codice A corrisponde ad un codificatore particolarmente banale con $N_k = \bar{N}$ per tutti i k , dunque la (9.13) diviene $K = L2^{-\bar{N}} \leq 1$ ed è soddisfatta a patto

Simb.	p_k	A	B	C	D
x_1	.5	00	0	0	0
x_2	.25	01	1	01	10
x_3	.125	10	10	011	110
x_4	.125	11	11	0111	111
\bar{N}		2.0	1.25	1.875	1.75
K		1.0	1.5	0.9375	1.0

che $\bar{N} \geq \log_2 L$: nel nostro caso, essendo $L = 4$ ed $\bar{N} = 2$, si ottiene $\log_2 L = 2 = \bar{N}$ e quindi $K = 1$, dunque il codice è decifrabile (anche perché a lunghezza fissa), ma non particolarmente valido, in quanto l'efficienza espressa dalla (9.11) risulta pari a $\eta = \frac{H_s}{\bar{N}} = \frac{1.75}{2} = 0,875 < 1$. Ma quando $H_s < \log_2 L$ come nel nostro caso, si può realizzare una efficienza migliore ricorrendo ad un codice a lunghezza variabile.

Le codeword del codice B producono un valore $K = 1.5 > 1$, e dunque rappresentano un codice ambiguo¹¹: difatti, violano la regola del prefisso. Il codice C invece non è ambiguo¹², essendo $K < 1$, ma presenta una efficienza $\frac{H_s}{\bar{N}} = 0,9\bar{3} < 1$ e dunque è anch'esso sub-ottimale. Infine, il codice D è quello analizzato al precedente paragrafo, ed effettivamente risulta una scelta *ottima*, dato che oltre a soddisfare la (9.13), consegue una efficienza $\frac{H_s}{\bar{N}} = 1$.

9.1.3.2 Codice ottimo

Indichiamo con questo termine un codice che oltre a soddisfare la regola del prefisso¹³ consegue anche una efficienza (9.11) unitaria, ovvero $\frac{H_s}{\bar{N}}=1$. Perché ciò avvenga il valore p_k delle probabilità di simbolo *deve* essere una potenza negativa di due, ovvero $p_k = 2^{-N_k}$ con N_k intero: in tal caso la (9.13) si scrive $K = \sum_{k=1}^L 2^{-N_k} = \sum_{k=1}^L p_k = 1$ e la disuguaglianza di Kraft è verificata con il segno di uguale, dunque è possibile individuare un codice non ambiguo.

Osserviamo inoltre che scegliendo la lunghezza delle codeword proprio pari a $N_k = \log_2 \frac{1}{p_k}$, l'espressione (9.12) che ne calcola la lunghezza media $\bar{N} = \sum_k p_k N_k$ coincide con quella (9.2) che fornisce $H_s = \sum_k p_k \log_2 \frac{1}{p_k}$, ovvero ogni simbolo è codificato con una codeword lunga tanti binit quanti sono i bit di informazione che trasporta, determinando una efficienza η unitaria. Per individuare un codice che *si avvicini* a questa proprietà si può utilizzare la tecnica di *Huffman* presentata appresso, mentre per *modificare* le p_k si ricorre alla *codifica per blocchi* di simboli esposta al § 9.1.4.

¹⁰Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Kraft-McMillan_inequality

¹¹Ad esempio, la sequenza 10110010 potrebbe essere interpretata come $x_3x_4x_1x_1x_3$ oppure $x_2x_1x_4x_1x_1x_2x_1$ od anche $x_3x_2x_2x_1x_1x_3$

¹²Nonostante il codice C non soddisfi la regola del prefisso, non è ambiguo in quanto lo zero indica comunque l'inizio di una *nuova* codeword.

¹³Soddisfare la (9.13) con il segno di uguale è una condizione solamente necessaria, ma non sufficiente, per ottenere di un codice ottimo.

9.1.3.3 Codice di Huffman

È basato su di un *algoritmo* capace di individuare un codice a lunghezza variabile che soddisfa la regola del prefisso, adotta codeword più lunghe per i simboli meno probabili, e tenta di rendere equiprobabili le cifre binarie che compongono le codeword. L'algoritmo definisce¹⁴ un *albero binario* i cui rami sono etichettati con 1 e 0, che può essere realizzato attuando i seguenti passi:

- crea una lista contenente i simboli della sorgente, ordinati per valore di probabilità decrescente, ed associa ad ognuno di essi un nodo-foglia dell'albero;
- finché c'è più di un nodo nella lista:
 - rimuovi dalla lista i due nodi con la probabilità più bassa;
 - crea un nuovo nodo interno all'albero con questi due nodi come figli, e con probabilità pari alla somma delle loro probabilità;
 - aggiungi il nuovo nodo alla lista, in ordine di probabilità;
- il nodo rimanente è la radice, e l'albero è completo;
- assegna cifre binarie diverse ad ogni coppia di rami a partire dalla radice, concatenando le quali si ottengono le codeword per i simboli sulle foglie

Si può dimostrare che il codice di Huffman generato in questo modo è il migliore possibile nel caso in cui la statistica dei simboli di sorgente sia nota a priori, nel senso che produce un codebook con il minor numero possibile di binit/simbolo medi \bar{N} , e le cui codeword allo stesso tempo soddisfano la regola del prefisso e la disuguaglianza di Kraft. La codifica di Huffman è ampiamente utilizzata nel contesto di altri metodi di compressione (metodo DEFLATE di PKZIP, § 9.2.3) e di codec multimediali (JPEG e MP3, cap. 10), in virtù della sua semplicità, velocità, ed assenza di brevetti.

Ovviamente ci deve essere un accordo a priori tra sorgente e destinatario a riguardo della corrispondenza tra parole di codice e simboli (o blocchi di simboli) della sorgente. Nel caso in cui ciò non sia vero, oppure nel caso in cui la statistica dei simboli della sorgente sia *stimata* a partire dal materiale da codificare, occorre inviare all'inizio della comunicazione anche la tabella di corrispondenza, eventualmente in forma a sua volta codificata.

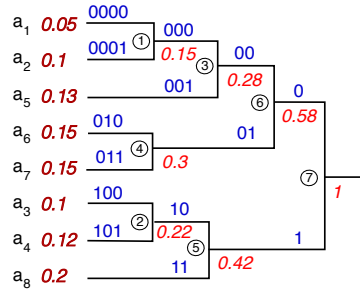
Esempio Una sorgente con $L = 8$ simboli è caratterizzata dalle probabilità di simbolo riportate alla figura seguente, a partire dalle quali si realizza un codice di Huffman mediante la costruzione grafica riportata, in cui le probabilità sono scritte *in rosso, sotto* i rami ed accanto ai simboli, mentre i binit *sopra* i rami, *in blu*.

Dopo aver ordinato i simboli in base alle probabilità, si individuano i due nodi con probabilità più bassa come a_1 e a_2 , che assommano prob. 0.15 e sono etichettati come nodo ①; dunque la coppia ora meno probabile è a_3 con a_4 , che cumula prob. 0.22 e si etichetta ②. Quindi, le due prob. minori divengono quelle del nodo ① e del simbolo a_5 , che assommano a 0.28 generando il nodo ③; il passo successivo è quello di accoppiare a_6 con a_7 generando il nodo ④ a cui compete la prob. di 0.3.

Gli ultimi tre passi vedono accoppiare ② con a_8 producendo ⑤ con prob. 0.42,

¹⁴Vedi http://en.wikipedia.org/wiki/Huffman_coding

Simbolo	p_k	Codeword
a_1	0.05	0000
a_2	0.1	0001
a_3	0.1	100
a_4	0.12	101
a_5	0.13	001
a_6	0.15	010
a_7	0.15	011
a_8	0.2	11



quindi ③ con ④ generando ⑥ con probabilità 0.58, ed infine ⑤ con ⑥ producendo il nodo radice a cui compete una prob. unitaria.

Si può ora procedere, partendo dalla radice a destra, ad assegnare un binit pari a 0 o 1 ad ogni coppia di rami rispettivamente in alto ed in basso, ripetendo l'assegnazione seguendo le diramazioni verso sinistra, sopra le quali sono mostrate le codeword che si formano, di cui l'inizio in comune replica la configurazione assegnata al padre. Le codeword complete che compaiono sui rami più a sinistra sono quindi riportate alla terza colonna della tabella. Come è possibile verificare, il codice rispetta la regola del prefisso, in quanto nessuna delle codeword è uguale all'inizio di altre.

Osservazioni Se calcoliamo H_s , \bar{N} e η per la sorgente ed il codice individuato, si ottiene $H_s = 2.916$, non molto meno del massimo $\log_2 L = 3$ bit a simbolo, corrispondente a probabilità p_k tutte uguali e pari a $1/8 = 0.125$. Il codice consegue una *lunghezza media* di codeword pari a $\bar{N} = 2.95$, e come osserviamo usa 3 binit per i 5 simboli con probabilità intermedia, il 15% delle volte usa 4 binit, ed il 20% due. Il codice consegue pertanto una *efficienza* $\eta = H_s/\bar{N} = 0.988$, ovvero la sorgente codificata presenta una *ridondanza* D solamente del 1,2%.

9.1.3.4 Codifica dinamica (di Huffman)

L'esecuzione dell' algoritmo di Huffman richiede la *preventiva* stima della probabilità p_k dei simboli, ottenuta a partire dal messaggio da codificare; inoltre, prima di trasmettere il messaggio codificato occorre inviare anche il codebook prodotto dall' algoritmo, per permettere al decodificatore di funzionare.

La variante *adattiva* dell' algoritmo di generazione del codice prevede invece di utilizzare valori p_k stimati *durante* l' analisi del messaggio, con quelle \hat{p}_k costruire l' albero, e con l' albero *corrente* codificare i simboli man mano che vengono presi in considerazione. Durante l' analisi e la codifica del messaggio le \hat{p}_k si modificano, con esse l' albero, ed il codice. Lo stesso algoritmo adattivo è implementato anche al ricevitore, che sviluppa dal suo lato il medesimo albero, evitando così di dover trasmettere il codebook, e permettendo di adottare la tecnica anche per messaggi prodotti in *tempo reale*. Inoltre, nel caso in cui il messaggio non sia propriamente stazionario e le p_k non si mantengano costanti nel tempo, l' adattività consente al codice di *seguire* tale variazioni e di conseguire in tal caso prestazioni anche migliori della tecnica *statica*¹⁵.

¹⁵Per approfondimenti si veda

9.1.4 Codifica per blocchi

Riprendiamo la discussione iniziata a pag. 256 relativa al codice binario ottimo per una sorgente L -aria senza memoria con simboli x_k a probabilità p_k , notando che se la lunghezza N_k della codeword associata ad x_k viene scelta in modo tale che

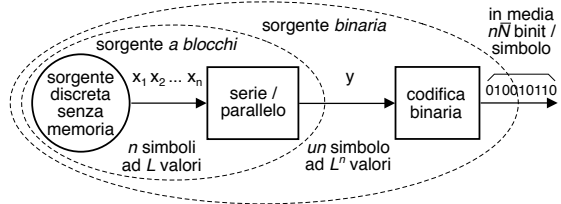
$$\log_2 \frac{1}{p_k} \leq N_k \leq \log_2 \frac{1}{p_k} + 1 \tag{9.14}$$

si può mostrare che la disuguaglianza di Kraft (9.13) è soddisfatta¹⁶, e dunque è possibile realizzare un codice *non ambiguo* con tali codeword. Moltiplicando ora i membri di (9.14) per p_k e sommando su k si ottiene

$$H_s \leq \bar{N} \leq H_s + 1 \tag{9.15}$$

da cui si deduce che è possibile ottenere un'efficienza $\eta = \frac{H_s}{\bar{N}} \rightarrow 1$ solo se $H_s \gg 1$, oppure se $N_k \approx \log_2 \frac{1}{p_k}$ (vedi nota 16).

Ma esiste anche un'altra possibilità: quella di raggruppare i simboli x_k in blocchi di n elementi, e considerare l'intero blocco come un *unico simbolo* di una nuova sorgente equivalente con alfabeto a L^n valori¹⁷, come rappresentato in figura. Essendo la sorgente senza memoria i suoi simboli sono indipendenti, e quindi si dimostra¹⁸



<https://www2.cs.duke.edu/csed/curious/compression/adaptivehuff.html>, mentre per una descrizione dell'algoritmo di VITTER http://en.wikipedia.org/wiki/Adaptive_Huffman_coding

¹⁶Infatti se calcoliamo $K = \sum_{k=1}^L 2^{-N_k}$ per N_k pari ai due valori indicati in (9.14) otteniamo nel primo caso

$$\sum_{k=1}^L 2^{-\log_2 \frac{1}{p_k}} = \sum_{k=1}^L 2^{\log_2 p_k} = \sum_{k=1}^L p_k = 1$$

mentre nel secondo

$$\sum_{k=1}^L 2^{-(\log_2 \frac{1}{p_k} + 1)} = \sum_{k=1}^L 2^{\log_2 p_k} \cdot 2^{-1} = 0.5 \sum_{k=1}^L p_k = 0.5$$

Pertanto in entrambi i casi la disuguaglianza di Kraft $K \leq 1$ è soddisfatta, e per valori intermedi si ottengono valori intermedi.

¹⁷Pari al numero di *disposizioni con ripetizione* di n oggetti estratti dagli elementi di un insieme di cardinalità L . Ad esempio, raggruppando due ($n = 2$) cifre decimali ($L = 10$), si ottiene un numero da 0 a 99, ovvero un simbolo ad $L^2 = 100$ valori.

¹⁸Indicando con y la v.a. discreta in uscita dalla sorgente a blocchi, essa risulta di tipo *multivariato* (§ 6.2.6), le cui le v.a. marginali sono i simboli x emessi dalla sorgente originale. L'indipendenza statistica di questi ultimi consente di scrivere $Pr \{y\} = Pr \{x_1\} Pr \{x_2\} \cdots Pr \{x_n\}$ in cui i valori x_i sono quelli dei simboli *originali* che compongono y . L'entropia H_s^{blocco} della sorgente a blocchi è definita come valore atteso dell'informazione $I(y) = -\log_2 Pr(y)$, e in base alla proprietà del logaritmo di un prodotto possiamo scrivere $\log_2 Pr(y) = \log_2 Pr(x_1) + \log_2 Pr(x_2) + \cdots + \log_2 Pr(x_n)$, ottenendo cioè che $I(y)$ è pari alla somma dell'informazione legata ad ogni valore x che partecipa a comporre y . Pertanto si ottiene

$$\begin{aligned} H_s^{blocco} &= E \{I(y)\} = E \{-\log_2 Pr(x_1) - \log_2 Pr(x_2) - \cdots - \log_2 Pr(x_n)\} = \\ &= \sum_{j=1}^n E \{-\log_2 Pr(x_j)\} = nH_s \end{aligned}$$

ovvero l'entropia della sorgente equivalente è esattamente pari alla somma di quella dei simboli che

che l'entropia della nuova sorgente è n volte quella originale, ossia $H_s^{\text{blocco}} = nH_s$. Il risultato (9.15) quindi ora si scrive come $nH_s \leq n\bar{N} \leq nH_s + 1$ in cui $n\bar{N}$ è il numero medio di binit *per blocco*, e dividendo per n , otteniamo infine

$$H_s \leq \bar{N} \leq H_s + \frac{1}{n} \quad (9.16)$$

che rappresenta una forma di dimostrazione del teorema (9.10) con $\epsilon = \frac{1}{n}$, e che permette di ottenere $\bar{N} \rightarrow H_s$ se $n \rightarrow \infty$, avvicinandosi alle condizioni di codifica ottima per qualsiasi distribuzione delle p_k .

Esercizio Per applicare questo metodo ad un caso pratico, consideriamo una sorgente *binaria* senza memoria che emette simboli x_k con probabilità p_k mostrata in tabella. Per ogni coppia di simboli il blocco serie/parallelo della fig. precedente emette un simbolo quaternario y_h a cui (in virtù dell'indipendenza statistica tra i simboli x_k) compete la probabilità ottenuta moltiplicando le probabilità della coppia $x_i x_j$ associata. Codifichiamo quindi i simboli y_h con il codice a lunghezza variabile introdotto al § 9.1.3, e ricalcoliamo il numero medio di binit/simbolo \bar{N} , che risulta pari a

Simbolo	Prob.	Codeword
x_1	0.8	1
x_2	0.2	0
$x_1 x_1 \rightarrow y_1$	0.64	0
$x_1 x_2 \rightarrow y_2$	0.16	10
$x_2 x_1 \rightarrow y_3$	0.16	110
$x_2 x_2 \rightarrow y_4$	0.04	111

$$\bar{N} = 1 \cdot 0.64 + 2 \cdot 0.16 + 3 \cdot 0.16 + 3 \cdot 0.04 = 1.58 \text{ binit}$$

ogni 2 simboli, ossia pari ad una media di 0.79 binit/simbolo binario, mentre in assenza di codifica a blocchi non avremmo potuto utilizzare meno di 1 binit/simbolo binario. Al crescere della dimensione di blocco n si può verificare come \bar{N} si avvicini sempre più al valore dell'entropia della sorgente binaria $H_b = 0.72$ calcolato a pag. 253, ovvero dimostrare l'eq. (9.16).

9.1.4.1 Compromesso velocità-ritardo

Come indicato dalla (9.16), realizzando blocchi via via più lunghi è possibile ridurre la *velocità* media di codifica $\bar{N} \cdot f_s$ (in binit/sec) rendendo \bar{N} sempre più vicino all'entropia, ovvero

$$\min [\bar{N}] = H_s + \epsilon$$

in cui $\epsilon \rightarrow 0$ se la lunghezza n del blocco tende ad infinito. D'altra parte, all'aumentare della dimensione del blocco aumenta di egual misura il *ritardo* che intercorre tra l'emissione di un simbolo e la sua codifica, e di questo va tenuto conto, nel caso sussistano dei vincoli temporali particolarmente stringenti sulla consegna del messaggio.

Riassumendo Qualora una sorgente discreta ad L simboli esibisca un valore di entropia inferiore a $\log_2 L$, la velocità binaria $\bar{N} \cdot f_s$ in uscita dal codificatore di sorgente può essere ridotta e resa prossima all'intensità informativa R (eq. (9.8)) adottando una codifica a blocchi di lunghezza via via crescente, e utilizzando per i nuovi simboli composti un opportuno codice di Huffman.

_____ rappresenta.

Esercizio Sperimentare la costruzione di un codice di Huffman basato sul raggruppamento di tre simboli della sorgente binaria dell'esercizio precedente, e verificare se il numero medio di binit/simbolo binario \bar{N} riesce ad avvicinarsi ancora di più al valore dell'entropia della sorgente binaria pari a 0.72 bit/binit.

9.2 Sorgente discreta con memoria

Passiamo ora ad affrontare il caso in cui i simboli emessi dalla sorgente non possano essere ritenuti statisticamente indipendenti. Indicando con $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una sequenza di n di simboli, la sua probabilità *congiunta* si calcola ora come

$$p(\mathbf{x}) = p(x_1) p(x_2/x_1) p(x_3/x_1, x_2) \dots p(x_n/x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \neq \prod_{k=1}^n p(x_k) \quad (9.17)$$

dato che appunto la dipendenza statistica comporta l'uso delle probabilità condizionali. L'espressione dell'entropia si modifica dunque in

$$H_n = E_{\mathbf{x}} \{I(\mathbf{x})\} = -\frac{1}{n} \sum_{\text{tutte le possibili sequenze } \mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \log_2 p(\mathbf{x}) \text{ bit/simbolo}$$

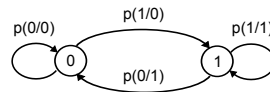
in cui $p(\mathbf{x})$ è la probabilità congiunta (9.17) di una possibile sequenza di simboli \mathbf{x} , e la media di insieme è effettuata su tutte le possibili sequenze \mathbf{x} di lunghezza n . La grandezza H_n prende il nome di *entropia a blocco*, e si dimostra (vedi nota 35) che al crescere di n il suo valore è *non crescente*, ossia $H_{n+1} \leq H_n \leq H_{n-1}$, mentre per $n \rightarrow \infty$, H_n tende ad un valore $H_\infty \leq H_s$, in cui l'uguaglianza è valida solo per sorgenti senza memoria.

9.2.1 Sorgente Markoviana

Se oltre ad un certo valore $n_{Max} = M$ la sequenza H_n non decresce più la sorgente è detta a *memoria finita* o *di Markov* di ordine M , ed è caratterizzata dal fatto che le probabilità condizionate dipendono solo dagli ultimi M simboli emessi.

Esempio Analizziamo il caso di una sorgente binaria di Markov del primo ordine, per la quale sono definite le probabilità condizionate mostrate sotto, ed a cui corrisponde il *diagramma di transizione* raffigurato a lato.

$$\begin{aligned} p(0/0) &= 0.9 & p(1/0) &= 0.1 \\ p(0/1) &= 0.4 & p(1/1) &= 0.6 \end{aligned}$$



Essendo $M = 1$, lo *stato* della sorgente è determinato dal simbolo emesso per ultimo, che condiziona le probabilità di emissione del simbolo successivo: con i valori dell'esempio, si osserva come la sorgente *preferisca* continuare ad emettere l'ultimo simbolo prodotto, piuttosto che l'altro.

In pratica è come se ora vi fossero L^M diverse sorgenti S_i (nel caso dell'esempio, $2^1 = 2$), ognuna associata ad una diversa *storia passata* rappresentata dagli ultimi M simboli emessi (nell'esempio $M = 1$), identificativi dello *stato*, o *memoria*, della sorgente. In questo caso l'entropia di sorgente può essere calcolata applicando la (9.6) ad ognuno dei possibili stati, ottenendo in tal modo dei valori di *entropia condizionata* $H(x/S_i)$,

mentre l'entropia di sorgente *complessiva* si ottiene come *valore atteso* dell'entropia condizionata rispetto alle probabilità di trovarsi in ognuno degli stati del modello Markoviano.

Tornando all'esempio, i valori di entropia condizionata risultano pari a

$$\begin{aligned} H(x/S_0) &= -0.9 \log_2 0.9 - 0.1 \log_2 0.1 = 0.47 \\ H(x/S_1) &= -0.4 \log_2 0.4 - 0.6 \log_2 0.6 = 0.97 \end{aligned}$$

bit/simbolo, mentre il valore della probabilità di trovarsi in uno dei due stati si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} p(S_0) &= p(0/0)p(S_0) + p(0/1)p(S_1) \\ 1 &= p(S_0) + p(S_1) \end{cases} \quad (9.18)$$

in cui la prima equazione asserisce che la probabilità di trovarsi in S_0 è pari alla somma di quella di esserci già, per quella di emettere ancora zero, più la probabilità di aver emesso uno, ed ora emettere zero. Procedendo per sostituzione si ottiene $p(S_0) = 0.8$ e $p(S_1) = 0.2$, ossia gli stessi valori dell'esempio binario senza memoria di pag. 253. Ma mentre in quel caso il valore dell'entropia risultava pari a 0.72 bit/simbolo, ora si ottiene

$$H = p(S_0)H(x/S_0) + p(S_1)H(x/S_1) = 0.58 \text{ bit/simbolo}$$

mostrando come la presenza di memoria aumenti la predicibilità delle sequenze emesse dalla sorgente.

Esercizio Si ripeta il calcolo dell'entropia per un modello di Markov del primo ordine, caratterizzato dalle probabilità $p(0) = p(1) = 0.5$ e $p(1/0) = p(0/1) = 0.01$, mostrando che in questo caso si ottiene una entropia di 0.08 bit/simbolo.

9.2.1.1 Autovettore della matrice di transizione

Come qualcuno avrà notato, le probabilità $p(S_0)$ e $p(S_1)$ corrispondono alla statistica di ordine zero (ossia la probabilità incondizionata, o marginale) dei simboli di sorgente $x_0 = 0$ ed $x_1 = 1$. I valori $p(S_i)$ possono essere ottenuti (anziché impostando il sistema di equazioni di cui all'esempio precedente) come gli elementi dell'autovettore \mathbf{v}_π associato all'autovalore 1 della *matrice di transizione* Π , i cui elementi $\pi_{i,j}$ sono pari alle probabilità condizionate $p(x_i/x_j)$, potendo scrivere $\Pi \cdot \mathbf{v}_\pi = \mathbf{v}_\pi$. In pratica ogni riga di tale sistema di equazioni è l'estensione della prima delle (9.18) a ciascuno stato della sorgente markoviana.

9.2.2 Codifica di sorgente binaria con memoria

La discussione svolta fin qui mostra come l'entropia delle sorgenti con memoria sia sempre *minore* di quella relativa al caso di indipendenza statistica dei simboli emessi, e qualora le probabilità condizionate siano note al codificatore, possono essere usate per calcolare le probabilità per blocco (9.17) e con queste individuare un codice di Huffman in grado di ridurre anche la velocità di codifica, a patto di accettare un maggior ritardo legato all'uso di codici a blocchi.

Ma la dimensione dei blocchi da prendere in considerazione può divenire eccessiva, producendo spropositate tabelle di codeword. Inoltre si può ritenere di *non* conoscere la statistica della sorgente, e di non desiderare effettuarne una stima, ed evitare di trasmettere la tabella di codeword. In questi casi, può essere opportuno adottare tecniche diverse dalle precedenti, come le due riportate appresso.

9.2.2.1 Codifica run-length

Prendendo come esempio tipico il caso della trasmissione fax, in cui si ha a che fare con un segnale di immagine in bianco e nero, scansionato per righe, che è assimilabile ad una sorgente binaria che emetta uno zero per il bianco, ed un uno per il nero: per la natura delle immagini scansionate, tipicamente ci saranno lunghe sequenze di uni o di zeri, e dunque si può assumere valido un modello di sorgente Markoviano di primo ordine, con elevata probabilità condizionata di rimanere nello stesso stato.

Le lunghe sequenze di bit tutti uguali vengono dette *run* (corse), e la codifica *run-length* consiste nel trasmettere parole di codice che indicano il numero (*length*) di questi bit uguali. In questo caso quindi la codeword è di lunghezza fissa (ad esempio $n + 1$ binit, il primo dei quali indica se il run è tutto di uni o di zeri), e rappresenta un numero variabile (da 0 a $2^n - 1$) di binit di sorgente. Se ad esempio $n = 6$ binit, questi $6+1 = 7$ binit possono codificare fino a 64 (uguali) simboli di sorgente binaria: un bel risparmio!¹⁹

9.2.2.2 Codifica predittiva

Questa ulteriore tecnica si basa sul fatto che un elevato grado di dipendenza statistica dei messaggi comporta la possibilità di *predire* in qualche modo i simboli a venire, in base all'identità di quelli già emessi. La differenza tra la sequenza predetta \hat{x} e quella effettiva x è una nuova sequenza indicata come *errore di predizione* $e = \hat{x} - x$ che, se il predittore *ci azzecca* per la maggior parte del tempo, è quasi tutta nulla. Il predittore conserva uno *stato interno* che rappresenta gli ultimi bit di ingresso, in base ai quali determina²⁰ la stima \hat{x} , da cui ottenere l'errore e (frequentemente nullo) che viene sottoposto a codifica run-length, e trasmesso.

Ora avviene *un trucco*, dato che in realtà il predittore *non conosce* la sequenza x_{k-1}, \dots, x_{k-M} da cui predire \hat{x}_k , ma viene invece *alimentato* con la sequenza di errore e , in modo che da questa possa determinare l'ultimo (vero) simbolo di ingresso come $x = \hat{x} - e$, ed aggiornare il proprio stato interno. Dal lato ricevente opera un predittore

¹⁹In realtà, nel caso specifico del fax le cose non stanno esattamente in questi termini: infatti, anziché usare una parola di lunghezza fissa di n binit, l'ITU-T ha definito un apposito codebook <http://www.itu.int/rec/T-REC-T.4-199904-S/en> che rappresenta un codice di Huffman a lunghezza variabile, in modo da codificare le run length più frequenti con un numero ridotto di bit.

²⁰Il lettore più curioso si chiederà a questo punto, come è fatto il predittore. Molto semplicemente, *scommette* sul prossimo simbolo più probabile, in base alla conoscenza di quelli osservati per ultimi, ed ai parametri del modello markoviano: se il prossimo simbolo viene predetto in base ad una sua probabilità condizionata > 0.5 , allora *la maggior parte* delle volte la predizione sarà corretta, ed il metodo consegue una riduzione di velocità. Nel caso di sorgenti continue, al § 9.6.4 troveremo invece alcune particolarità aggiuntive.

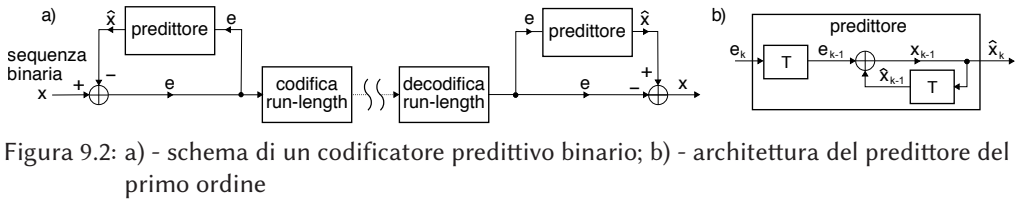


Figura 9.2: a) - schema di un codificatore predittivo binario; b) - architettura del predittore del primo ordine

identico a quello di codifica, anch'esso alimentato dalla sequenza e in modo da generare un valore \hat{x} identico a quello del codificatore, a cui si applica la stessa relazione $x = \hat{x} - e$ per ottenere il valore del simbolo x correttamente *decodificato*. Perché lo schema possa funzionare, occorre che i due predittori condividano il medesimo stato interno iniziale.

La fig. 9.2-a) esemplifica l'applicazione della tecnica al caso di sequenze binarie, per le quali l'operazione di differenza è realizzata tramite una somma modulo due \oplus , dato che scrivendo $e = \hat{x} \oplus x$ risulta $e \neq 0$ solamente quando $\hat{x} \neq x$. La parte destra della figura mostra quindi l'architettura interna del predittore del primo ordine adottato, che cioè tiene conto del solo simbolo *precedente* x_{k-1} , e che semplicemente *scommette* che sia uguale al successivo, ovvero $\hat{x}_k = x_{k-1}$; il *vero* simbolo precedente x_{k-1} è ottenuto come prima descritto, ovvero a partire dalla stima fornita in precedenza \hat{x}_{k-1} ottenuta mediante un ritardo, e sommata al precedente errore e_{k-1} , anch'esso ritardato rispetto alla sequenza di ingresso.

Notiamo come la codifica run-length non preveda l'esistenza di un accordo a priori tra trasmettitore e ricevitore, a parte il comune stato di partenza ad inizio messaggio, mentre la codifica predittiva necessita solo di un accordo in merito alla struttura del predittore. Per contro, in presenza di errori di trasmissione i due predittori restano disallineati, finché non si inizia a co-decodificare un nuovo messaggio. Ma lo stesso problema è comune anche al caso di codifica a lunghezza di parola variabile, ed a quello di Huffman dinamico.

9.2.3 Compressione basata su dizionario

Nella comune accezione del termine un dizionario è costituito da un *array* di stringhe, popolato con le parole esistenti per un determinato linguaggio. Anziché operare carattere per carattere, un codificatore di sorgente *testuale* potrebbe ricercare la posizione nel dizionario delle parole del messaggio, e quindi trasmettere l'indice della parola: per un dizionario di 25.000 termini bastano 15 bit di indirizzamento, ottenendo un rapporto di compressione variabile, in funzione della lunghezza della parola codificata.

9.2.3.1 Metodo di Lempel-Ziv-Welsh

Per evitare di dover condividere la conoscenza dell'intero dizionario tra sorgente e destinatario, che tra l'altro potrebbe essere assolutamente sovradimensionato rispetto alle caratteristiche dei messaggi da trattare, il metodo LZW prevede che il codificatore generi il dizionario in modo graduale, man mano che analizza il testo, e che il decodificatore sia in grado di replicare questa modalità di generazione. Inoltre, il dizionario non è vincolato a contenere le reali *parole* del messaggio, ma semplicemente ospita le sequenze di caratteri effettivamente osservati, di lunghezza due, tre, quattro...

Operando su di un alfabeto ad L simboli, rappresentabili con $n = \lceil \log_2 L \rceil$ bit, il dizionario iniziale conterrà i simboli di sorgente alle prime L posizioni, e posti liberi nelle restanti $2^n - L$ posizioni²¹. Ogni carattere c letto in ingresso viene accodato in una *stringa* w , ed il risultato confrontato con le stringhe già presenti nel dizionario. Nel caso non si verifichi nessuna corrispondenza, viene aggiunta una nuova voce di dizionario, e quindi viene trasmesso l'indice associato alla sua parte iniziale, escludendo cioè il simbolo concatenato per ultimo, e che ha prodotto l'occorrenza della nuova voce. Nel caso invece in cui la stringa sia già presente (e questo in particolare è vero per la stringa di lunghezza uno corrispondente al primo simbolo analizzato) non si emette nulla, ma si continuano a concatenare simboli fino ad incontrare una stringa mai vista. Presso *Wikipedia*²² è presente un esempio di risultato della codifica.

```

w = NIL;
while (read a char c) do
  if (wc exists in dictionary) then
    w = wc;
  else
    add wc to the dictionary;
    output the code for w;
    w = c;
  endif
done
output the code for w;

```

La parte iniziale del testo, ovviamente, ha una alta probabilità di contenere tutte coppie di caratteri mai viste prima, e quindi in questa fase vengono semplicemente emessi i codici associati ai simboli osservati. Con il progredire della scansione, aumenta la probabilità di incontrare stringhe già osservate e sempre più lunghe. Ogni volta che viene esaurito lo spazio residuo per i nuovi simboli, viene aggiunto un bit alla lunghezza della codeword, ovvero viene raddoppiata la dimensione del vocabolario. Man mano che viene analizzato nuovo materiale, aumenta la lunghezza delle stringhe memorizzate nel dizionario, che riflette l'effettiva composizione statistica del documento in esame, ivi compresa la presenza di memoria (nel senso di dipendenza statistica); allo stesso tempo, la dimensione del dizionario (e la lunghezza delle codeword) resta sempre la minima indispensabile per descrivere il lessico effettivamente in uso. Alla fine del processo, il dizionario ottenuto può essere aggiunto²³ *in testa* al file compresso, seguito dalle codeword risultanti dall'algoritmo.

L'algoritmo LZW è usato nel programma di compressione Unix *compress*, per la realizzazione di immagini GIF e TIFF, ed incorporato in altri software, come ad esempio *Adobe Acrobat*.

9.2.3.2 Algoritmo Deflate

L'ultimo metodo di compressione senza perdite che esaminiamo è quello che è stato introdotto da PHIL KATZ²⁴ con il programma PKZIP, e quindi formalizzato nella RFC

²¹Ad esempio con $L = 96$ simboli si ha $n = 7$, ed un dizionario iniziale con 128 posizioni, di cui 96 occupate e 32 libere.

²²Vedi ad es. <http://en.wikipedia.org/wiki/Lempel-Ziv-Welch>

²³Il realtà il dizionario *non viene* aggiunto, ma *ri-generato* durante il processo di decodifica, come illustrato al link di cui alla nota precedente.

²⁴Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Phil_Katz

1951²⁵, e tuttora ampiamente utilizzato per le sue ottime prestazioni e l'assenza di brevetti. Usa una variante dell'algoritmo LZW, al cui risultato applica poi una codifica di Huffman. *Deflate* opera su blocchi di dati con dimensione massima 64 Kbyte, ognuno dei quali può essere replicato intatto (come nel caso in cui i bit siano già sufficientemente imprevedibili), oppure essere compresso con un codice di Huffman statico, oppure ancora dinamico.

Per quanto riguarda la variante di LZW, essa consiste nel *non costruire* esplicitamente il dizionario, ma nell'usare invece *dei puntatori all'indietro* per specificare che una determinata sotto-stringa di ingresso, è in realtà la ripetizione di un'altra già osservata in precedenza. In questo caso, anziché emettere il codice (di Huffman) associato alla codeword già presente nel dizionario, si emette (il codice di Huffman del) la lunghezza della stringa da copiare, e la distanza (nel passato) della stessa. Quindi in pratica, anziché usare una codeword di lunghezza fissa per indicizzare gli elementi del dizionario come per LZW, viene usato un puntatore di lunghezza variabile, privilegiando le copie della sottostringa corrente più prossime nel tempo, oppure quelle con un maggior numero di caratteri uguali.

9.3 Contenuto informativo di sorgente continua

Sebbene l'estensione del concetto di entropia già definito per sorgenti discrete (§ 9.1.1) sia abbastanza diretto, la sua applicazione al caso di sorgenti tempo-continue presenta risvolti particolari, che andiamo a discutere.

9.3.1 Entropia differenziale di sorgente continua

L'espressione (9.2) valida per le sorgenti discrete può essere formalmente estesa al caso di una sorgente continua che produce un processo $x(t)$ stazionario ed incorrelato, descritto da una d.d.p. del primo ordine $p_x(x)$, portando all'espressione

$$h(X) = E \{-\log_2 p_x(x)\} = - \int p_x(x) \log_2 p_x(x) dx \quad (9.19)$$

indicata con la h minuscola per distinguerla dal caso discreto, e chiamata *entropia differenziale* a seguito delle proprietà che andiamo ad illustrare.

Dipendenza dalla dinamica Il valore ottenuto dalla (9.19) può risultare positivo, negativo o nullo, in funzione della dinamica della variabile aleatoria X .

Esempio Se calcoliamo il valore di entropia differenziale per un processo i cui valori sono descritti da una variabile aleatoria a distribuzione uniforme $p_x(x) = \frac{1}{A} \text{rect}_A(x)$, otteniamo il risultato $h(X) = -\frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} \log_2 \left(\frac{1}{A}\right) dx = \log_2 A$ il cui valore effettivo, appunto, dipende dal valore di A . In particolare, se $A = 1$ si ottiene $h(X) = 0$.

L'esempio è un modo per osservare che, in presenza di una v.a. $Y = \alpha X$ scalata di un fattore α , si otterrà $h(Y) = h(X) + \log_2 |\alpha|$.

²⁵Vedi ad es. <http://tools.ietf.org/html/rfc1951>

Invarianza rispetto alla media L'entropia differenziale non dipende dal valor medio della variabile aleatoria, ovvero è invariante rispetto alle traslazioni. Per verificare la veridicità di tale affermazione, calcolare per esercizio il valore di $h(X)$ per una d.d.p. $p_x(x) = \frac{1}{A} \text{rect}_A(x - m)$.

Confronto tra entropia di processi Essendo il valore $h(X)$ dipendente dalla dinamica della v.a., l'entropia differenziale sembra inadatta ad esprimere il contenuto informativo *assoluto* di una sorgente continua; ciononostante può comunque essere utile per confrontare due sorgenti con *uguale varianza* σ_x^2 , come mostrato alla nota²⁶. A tale proposito, valutiamo il valore di entropia differenziale per un caso particolarmente rilevante.

9.3.2 Entropia differenziale di sorgente gaussiana

Applicando la (9.19) al caso $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$, dopo aver osservato (vedi nota 1) che

$$-\log_2 p(x) = -\frac{\ln p(x)}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \left(\ln \sqrt{2\pi\sigma_x^2} + \frac{x^2}{2\sigma_x^2} \right)$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} h_G(X) &= -\int p(x) \log_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx = \int p(x) \frac{1}{\ln 2} \left(\ln \sqrt{2\pi\sigma_x^2} + \frac{x^2}{2\sigma_x^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left(\ln \sqrt{2\pi\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx + \frac{1}{2\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) x^2 dx \right) = \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left(\ln \sqrt{2\pi\sigma_x^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{\ln 2} \ln \sqrt{2\pi e \sigma_x^2} = \log_2 \sqrt{2\pi e \sigma_x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e \sigma_x^2) \end{aligned} \quad (9.20)$$

essendo $\frac{1}{2} = \ln e^{1/2}$, ed avendo di nuovo applicato la nota 1.

9.3.2.1 Massima informazione per processo gaussiano

Al § 9.7.2 si mostra che il processo gaussiano è quello che consegue il massimo valore di entropia differenziale per σ_x^2 assegnata, ovvero è valida la diseuguaglianza

$$h_G(X) = \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e \sigma_x^2) > h(X) \quad \text{data } \sigma_x^2 \quad (9.21)$$

²⁶In effetti esiste una misura di entropia *assoluta* per sorgenti continue, che però ha la *sgradevole caratteristica* di risultare sempre infinita. Infatti, approssimando la (9.19) come limite a cui tende una sommatoria, e suddividendo l'escursione dei valori di x in intervalli uguali Δx , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} h_{abs}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i p(x_i) \Delta x \log_2 \frac{1}{p(x_i) \Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i \left[p(x_i) \Delta x \log_2 \frac{1}{p(x_i)} + p(x_i) \Delta x \log_2 \frac{1}{\Delta x} \right] = h(x) + h_0 \end{aligned}$$

in cui $h(x)$ è proprio la (9.19) mentre $h_0 = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_2 \Delta x \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_2 \Delta x = \infty$. D'altra parte, la differenza tra le entropie assolute di due sorgenti z e x risulta pari a $h_{abs}(z) - h_{abs}(x) = h(z) - h(x) + h_0(z) - h_0(x)$, in cui la seconda differenza tende a $-\log_2 \frac{\Delta z}{\Delta x}$ che, se z ed x hanno la medesima dinamica, risulta pari a zero.

Principio di massima entropia In presenza di informazioni incomplete a riguardo di un sistema stocastico, come ad es. la conoscenza della sola varianza di una v.a., assumere l'ipotesi di gaussianità a riguardo della d.d.p. che lo governa equivale²⁷ ad adottare *le ipotesi meno restrittive* (ovvero più informative) a riguardo..

9.4 Misure di informazione per una coppia di v.a.

Descrivono da un punto di vista informativo i messaggi prodotti da una coppia di sorgenti, ovvero componenti di una v.a. bidimensionale; i risultati ottenuti saranno utilizzati nel contesto della quantizzazione (§ 9.6) e della codifica di canale (cap. 17). Vengono poi introdotti altri due risultati (§§ 9.4.4 e 9.4.5), utilizzati specificatamente in altri contesti. Per semplicità, le definizioni vengono espresse nei termini di v.a. discrete.

9.4.1 Entropia congiunta

Si riferisce a due v.a. X e Y le cui realizzazioni sono descritte dalle d.d.p. marginali $p(x)$ e $p(y)$ e dalla d.d.p. congiunta $p(x, y)$, ed è definita come

$$H(X, Y) = H(Y, X) = -\sum_x \sum_y p(x, y) \log_2 p(x, y)$$

L'entropia congiunta risulta sempre non negativa, e delimitata tra

$$0 \leq \max\{H(X), H(Y)\} \leq H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$$

con l'ultimo \leq che diviene un'uguaglianza qualora le v.a. siano statisticamente indipendenti ovvero $p(x, y) = p(x)p(y)$. Nel caso di v.a. continua sussiste l'equivalente definizione per l'entropia differenziale congiunta

$$h(X, Y) = -\int_x \int_y p(x, y) \log_2 p(x, y) dx dy \quad (9.22)$$

9.4.2 Entropia condizionale

Come la precedente si riferisce a due v.a. X e Y descritte dalle d.d.p. $p(x)$, $p(y)$ e dalla d.d.p. condizionata $p(y/x) = p(x,y)/p(x)$, viene definita come

$$H(Y/X) = -\sum_x \sum_y p(x, y) \log_2 p(y/x) \quad (9.23)$$

e per essa sussiste la relazione

$$H(Y/X) = H(X, Y) - H(X) \quad (9.24)$$

che si ottiene dalla (9.23) considerando che $p(y/x) = p(x,y)/p(x)$. In base alla relazione analoga per $p(x/y)$ è altrettanto vero che $H(X/Y) = H(X, Y) - H(Y)$, e dunque sussiste anche l'*equivalente* del teorema di Bayes (§ 6.1.4), ovvero $H(Y/X) = H(X/Y) + H(Y) - H(X)$.

La (9.24) può essere *interpretata* considerando che mentre $H(X, Y)$ esprime il numero medio di bit di informazione associati alla conoscenza di una coppia di realizzazioni (x, y) , l'osservazione della sola v.a. X apporta una informazione media di $H(X)$ bit/simbolo. Pertanto sono necessari solamente $H(X, Y) - H(X)$ ulteriori bit (in media) per descrivere anche la conoscenza di Y , una volta che X sia nota. Per la

²⁷Approfondimenti presso https://en.wikipedia.org/wiki/Principle_of_maximum_entropy

(9.23) risulta

$$0 \leq H(Y/X) \leq H(Y)$$

in cui la prima relazione è una uguaglianza se (e solo se) $p(y/x)$ è una funzione deterministica e non una d.d.p., mentre $H(Y/X) = H(Y)$ se (e solo se) $p(y, x) = p(x)p(y)$ e quindi $p(y/x) = p(y)$.

Nel caso di v.a. continue la definizione di entropia differenziale condizionale è

$$h(Y/X) = -\int_x \int_y p(x, y) \log_2 p(y/x) dx dy = -\int_x p(x) \int_y p(y/x) \log_2 p(y/x) dy dx$$

i cui valori possono però risultare anche negativi o indeterminati (pag. 266).

9.4.3 Informazione mutua media

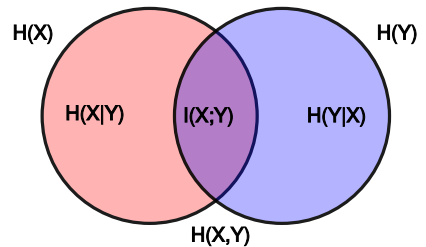
Anche questa grandezza tiene conto di due v.a. X e Y ²⁸ descritte dalle d.d.p. marginali $p(x)$ e $p(y)$, nonché dalla d.d.p. congiunta $p(x, y)$; la sua definizione è

$$I(X; Y) = I(Y; X) = \sum_x \sum_y p(x, y) \log_2 \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \quad (9.25)$$

ed ha un valore positivo o nullo, quest'ultimo se (e solo se) la v.a. sono indipendenti, ovvero $p(x, y) = p(x)p(y)$. Il valore di $I(X, Y)$ misura l'informazione che X e Y *condividono*, ovvero quanto la conoscenza di una riduce l'incertezza a riguardo dell'altra. Per essa sussistono le eguaglianze²⁹

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(X) - H(X/Y) = H(Y) - H(Y/X) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) = \\ &= H(X, Y) - H(X/Y) - H(Y/X) \end{aligned} \quad (9.26)$$

che possono essere meglio apprezzate nei termini di unione, differenza ed intersezione di insiemi, come raffigurato nel diagramma mostrato a lato, da cui tra l'altro emerge come debba necessariamente risultare



$$I(X; Y) \leq \min \{H(X), H(Y)\}$$

ovvero l'informazione in comune non può essere maggiore dell'incertezza media della sorgente con minore entropia.

In base alle due eguaglianze (9.26) osserviamo inoltre che $I(X; Y)$ è pari all'entropia di una delle due v.a., meno il numero di bit a simbolo necessari a descriverla qualora l'altra v.a. sia nota, ovvero meno l'*incertezza residua* qualora una delle due sia nota.

Anche questo concetto si applica al caso di v.a. continue, ottenendo l'espressione dell'informazione mutua media *differenziale*

$$I(X; Y) = \int_x \int_y p(x, y) \log_2 \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} dx dy$$

²⁸Vedi anche la trattazione al § 17.1.3 e seguenti nel caso in cui X ed Y siano le grandezze in ingresso ed in uscita da un canale di comunicazione.

²⁹Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Mutual_information, ma anche la nota 5 a pag. 559

che *non dipende* dalla dinamica³⁰ delle v.a. X e Y come invece accadeva per l'entropia differenziale di una (9.19) o due (9.22) v.a.

9.4.4 Entropia relativa

Meglio nota come *Divergenza di Kullback Leibler*, è una misura di quanto una d.d.p. $p(x)$ è differente da una seconda $q(x)$, di riferimento. E' definita dall'espressione³¹

$$D_{KL}(p||q) = \sum_x p(x) \log_2 \frac{p(x)}{q(x)} = -\sum_x p(x) \log_2 \frac{q(x)}{p(x)} \quad (9.27)$$

ed è descritta anche come entropia relativa *da q a p* , o *divergenza di p da q* . Il suo valore è positivo o nullo, e si azzerava quando $p(x) = q(x)$; non può essere però adottata come una *distanza*, in quanto non è simmetrica (ovvero $D_{KL}(p||q) \neq D_{KL}(q||p)$) e non verifica la disuguaglianza triangolare.

In genere $p(x)$ deriva da osservazioni sperimentali, mentre $q(x)$ ne rappresenta un modello teorico, ed il valore di $D_{KL}(p||q)$ può essere interpretato come il numero medio di bit *in più* necessario a codificare i simboli x adottando un codice ottimizzato rispetto a $q(x)$, anziché uno ottimizzato per $p(x)$. In questo senso, $D_{KL}(p||q)$ misura il *guadagno di informazione* conseguito nel rivedere le proprie convinzioni a riguardo del fenomeno aleatorio espresso dalla v.a. X , da una d.d.p. *a priori* $q(x)$, in favore della evidenza basata sui dati $p(x)$.

Nel caso di v.a. continue la definizione (9.27) si modifica in

$$D_{KL}(p||q) = \int_x p(x) \log_2 \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

e, come per $I(X; Y)$, il suo valore non dipende dalla dinamica delle v.a.

Relazione con l'informazione mutua media La (9.27) può essere vista come il valore di informazione mutua media (9.25) tra due v.a. X e Y , calcolato come divergenza $D_{KL}(p(x, y) || p(x)p(y))$ della d.d.p. congiunta $p(x, y)$ dal prodotto $p(x)p(y)$ delle rispettive marginali. Dato però che la (9.25) prevede una doppia sommatoria mentre la (9.27) soltanto una, si preferisce scrivere

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \sum_x \sum_y p(x, y) \log_2 \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} = \sum_x \sum_y p(x/y)p(y) \log_2 \frac{p(x/y)p(y)}{p(x)p(y)} = \\ &= \sum_y p(y) \sum_x p(x/y) \log_2 \frac{p(x/y)}{p(x)} = E_Y \{D_{KL}(p(x/y) || p(x))\} \end{aligned}$$

in cui la somma su x valuta la divergenza della d.d.p. condizionata $p(x/y)$ dal modello $p(x)$, mentre la somma esterna su y esegue il valore atteso rispetto ai valori y . Più $p(x/y)$ e $p(x)$ sono differenti (o divergenti), e maggiore è il guadagno di informazione.

9.4.5 Entropia di Rényi

Definita in tempi più recenti, estende il concetto di entropia introdotto da Shannon (9.2), che ne diviene un caso particolare. L'entropia di Rényi di ordine α , con $\alpha \geq 0$ ed

³⁰Ciò deriva dall'essere le d.d.p. presenti sia a numeratore che a denominatore dell'argomento di \log_2 .

³¹Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Kullback-Leibler_divergence

$\alpha \neq 1$, di una v.a. discreta X con alfabeto di n elementi x_i , di probabilità p_i , è definita come³²

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{i=1}^n p_i^\alpha \right)$$

In caso di v.a. uniforme con $p_i = 1/n \forall i$ si ha $H_\alpha(X) = \log_2 n$ per $\forall \alpha$; in generale, $H_\alpha(X)$ è una funzione non crescente di α . Per diversi specifici valori di α accade che

- per $\alpha \rightarrow 0$ si ha $H_0(X) \rightarrow \log_2 n$ per qualunque d.d.p.;
- per $\alpha \rightarrow 1$ il valore $H_1(X)$ eguaglia quello dell'entropia classica $\sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$;
- per $\alpha \rightarrow \infty$ il valore $H_\alpha(X)$ è sempre più legato ai soli eventi più probabili.

Viene inoltre definita una *divergenza di Rényi* tra due d.d.p. discrete p_i e q_i di uguale cardinalità n come $D_\alpha(p||q) = \frac{1}{\alpha-1} \log_2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i^\alpha}{q_i^{\alpha-1}} \right)$ che, per $\alpha \rightarrow 1$, corrisponde alla divergenza di Kullback-Leibler (§ 9.4.4).

9.5 Ricorrenze e disuguaglianza del data processing

In questa sezione illustriamo formulazioni di *calcolo a catena* che di fatto suddividono una misura di informazione nella somma di un numero finito di contributi, per poi trarre le più dirette conseguenze.

Consideriamo ancora una sorgente di informazione discreta, ed indichiamo ora con \mathbf{X}^n (o con $\mathbf{X}_{1:n}$) una sequenza (casuale) di n simboli $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ indicata come x^n , ciascuno estratto da un alfabeto \mathcal{X} ad L valori, e quindi $\mathbf{X}^n \in \mathcal{X}^n$ ad L^n valori.

Probabilità di sequenza Come discusso al § 9.2, nel caso generale di presenza di memoria la prob. di \mathbf{X}^n si calcola come

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}^n) = \prod_{i=1}^n p(x_i/\mathbf{X}^{i-1}) \quad (9.28)$$

ovvero come il prodotto tra le prob. di ciascun simbolo condizionate ai (sempre meno) simboli che lo precedono³³. Inoltre, i valori x_i costituiscono a tutti gli effetti la realizzazione di un processo aleatorio, che è *stazionario* qualora le prob. (marginali e condizionate) non dipendano dal tempo, ossia $\mathbb{P}(\mathbf{X}_{1:n}) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_{1+h:n+h})$.

9.5.1 Calcolo a catena dell'entropia

Questo concetto re-interpreta la (9.28) come una formula *recursiva*, che determina appunto un *effetto catena* anche nel computo dell'*entropia di sequenza*³⁴

$$\begin{aligned} H(\mathbf{X}^n) &= -E \{ \log_2 [\mathbb{P}(\mathbf{X}^n)] \} = -E \{ \log_2 [\prod_{i=1}^n p(x_i/\mathbf{X}^{i-1})] \} = \\ &= - \sum_{i=1}^n E \{ \log_2 p(x_i/\mathbf{X}^{i-1}) \} = \sum_{i=1}^n H(x_i/\mathbf{X}^{i-1}) \end{aligned} \quad (9.29)$$

³²Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Rényi_entropy

³³Si intende che per $i = 1$ il condizionamento a $\mathbf{X}^{i-1} = \mathbf{X}^0$ corrisponde alla stringa *nulla*, in quanto x_1 non è preceduto da nessuno.

³⁴Uso qui questo termine per distinguere questa definizione da quella di cui al § 9.2

che quindi si trova a dipendere dalle entropie condizionate alle n sotto-sequenze via via più corte

$$H(x_i/\mathbf{X}^{i-1}) = -\sum_{\mathbf{X}^i \in \mathcal{X}^i} \mathbb{P}(\mathbf{X}^i) \log_2 p(x_i/\mathbf{X}^{i-1})$$

Il condizionamento non aumenta l'entropia E' una prima conseguenza della (9.29), da cui ne deriva

$$H(\mathbf{X}^n) = \sum_{i=1}^n H(x_i/\mathbf{X}^{i-1}) \stackrel{a}{\leq} \sum_{i=1}^n H(x_i) \stackrel{b}{=} nH(x) \tag{9.30}$$

in cui ^a applica il concetto ad ogni termine, mentre ^b è conseguenza della stazionarietà. D'altra parte

L'entropia di sequenza $H(\mathbf{X}^n)$ non decresce con n Infatti

$$H(\mathbf{X}^{n+1}) = H(\mathbf{X}^n, x_{n+1}) = H(\mathbf{X}^n) + H(x_{n+1}/\mathbf{X}^n) \geq H(\mathbf{X}^n) \tag{9.31}$$

dato che $H(x_{n+1}/\mathbf{X}^n) \geq 0$. Se poi utilizziamo il risultato (9.30) al terzo membro di (9.31) possiamo ottenere

$$H(\mathbf{X}^{n+1}) \leq nH(x) + H(x_{n+1}/\mathbf{X}^n) \tag{9.32}$$

che può motivare³⁵ le conclusioni tratte al § 9.2 a riguardo dell'entropia a blocco, essendo $H_{blocco} = \frac{1}{n}H_{sequenza}$.

9.5.2 Calcolo a catena per l'informazione mutua media

Prendiamo nuovamente in considerazione l' n -pla aleatoria \mathbf{X}^n , stavolta associata ad una nuova v.a. Y descritta dalla d.d.p. marginale $p_Y(y)$. Se non sono statisticamente indipendenti, l'informazione *in comune* che (in media) due loro realizzazioni hanno è descritta da (§ 9.4.3)

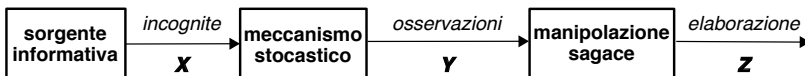
$$I(\mathbf{X}^n; Y) = H(\mathbf{X}^n) - H(\mathbf{X}^n/Y) \tag{9.33}$$

ed applicando la (9.29) ad entrambi i termini del secondo membro si ha

$$I(\mathbf{X}^n; Y) = \sum_{i=1}^n H(x_i/\mathbf{X}^{i-1}) - \sum_{i=1}^n H(x_i/\mathbf{X}^{i-1}, Y) = \sum_{i=1}^n I(x_i; Y/\mathbf{X}^{i-1}) \tag{9.34}$$

che quindi decompone il valore di $I(\mathbf{X}^n; Y)$ nella somma dei valori di informazione mutua tra Y ed ognuna delle componenti di \mathbf{X}^n , dando per note le restanti.

Consideriamo ora lo schema mostrato in figura, in cui gli n valori aleatori \mathbf{X} emessi



da una sorgente informativa non sono direttamente osservabili, mentre sono a disposizione altri valori Y legati in modo probabilistico agli \mathbf{X} .

³⁵La (9.32) dice che $H(\mathbf{X}^{n+1})$ è maggiorata da un termine proporzionale ad n , più una entropia condizionata che *non cresce* all'aumentare di n . Pertanto l'entropia a blocco $H_{blocco} = \frac{1}{n}H_{sequenza}$ del § 9.2 risulta *non crescente*.

Informazione mutua condizionale Ci si riferisce alla quantità $I(X; Y/Z)$ che rappresenta la *riduzione di incertezza* su X dovuta alla conoscenza di Y quando Z è noto, e si ottiene come

$$I(X; Y/Z) = H(X|Z) - H(X/Y, Z)$$

da confrontare con la (9.33) di cui è estensione.

9.5.3 Data processing inequality

Mostriamo ora che *non può esistere una manipolazione sagace* dei dati osservabili che produca un nuovo insieme di v.a. Z , tale da rendere l'informazione in comune $I(X; Z)$ tra i valori incogniti e quelli calcolati *maggiore* di quella $I(X; Y)$ tra le incognite ed i valori osservati, ovvero necessariamente risulterà

$$I(X; Y) \geq I(X; Z) \quad (9.35)$$

con l'uguaglianza se e solo se $I(X; Y/Z) = 0$, cioè qualora Y e Z contengano la stessa informazione a riguardo di X .

Per mostrare che la (9.35) è vera, *estendiamo*³⁶ il concetto espresso dalla (9.34) come

$$\begin{aligned} I(X; Y, Z) &= I(X; Z) + I(X; Y/Z) \\ &= I(X; Y) + I(X; Z/Y) \end{aligned} \quad (9.36)$$

in cui cioè l'informazione in comune tra X ed entrambe Y, Z si decompone nella somma di due termini:

- il primo valuta l'informazione condivisa tra X ed una tra Y e Z , e
- il secondo valuta quella condivisa tra X e l'altro sottoinsieme di v.a., considerando il precedente sottoinsieme noto, in modo da non *ri-conteggiare* l'informazione che questo ha in comune con X .

Notiamo ora che per come sono stati descritti, i tre vettori aleatori X, Y e Z realizzano una *catena di Markov* $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ del primo ordine, dato che $p(Z/X, Y) = p(Z/Y)$ in quanto il blocco di elaborazione *vede* solamente il vettore Y . Per questo X e Z si dicono *condizionalmente indipendenti* dato Y , e quindi $I(X; Z/Y) = 0$. Applicando quest'ultima osservazione alla (9.36) otteniamo

$$I(X; Y) = I(X; Z) + I(X; Y/Z)$$

dimostrando così che $I(X; Y) \geq I(X; Z)$, in quanto $I(X; Y/Z) \geq 0$.

Corollario

$$H(X/Y) \geq H(X/Z) \quad (9.37)$$

Infatti la (9.35) può essere riscritta come $H(X) - H(X/Y) \geq H(X) - H(X/Z)$, da cui la (9.37).

³⁶Riscriviamo la sommatoria (9.35) $I(X^n; Y) = \sum_{i=1}^n I(x_i; Y/X^{i-1})$ come $I(x_1, x_2; Y) = I(x_1; Y) + I(x_2; Y/x_1)$; a questo punto consideriamo tutte variabili vettoriali e modifichiamo il nome delle stesse per coerenza con il seguito, ed otteniamo le (9.36).

Applicazioni Citiamo qui due conseguenze della disuguaglianza (9.35) che sono rilevanti nell'ambito delle scienze *bioinformatiche*; per approfondimenti si vedano i riferimenti citati alla nota³⁷.

Sono innanzitutto posti *limiti* alle prestazioni dei sistemi biologici (o *pathway*) costituiti da più di un canale di comunicazione in serie. Per esempio, consideriamo che $X \rightarrow Y$ rappresenti il processo di segnalazione tra la concentrazione di una citochina X e quella di un fattore di trascrizione Y , e che $Y \rightarrow Z$ rappresenti la segnalazione tra la concentrazione di Y e quella della proteina Z risultante dall'espressione del gene che è il target di Y . Assumendo che non vi siano altri contributi, l'informazione mutua tra la proteina espressa (Z) e la citochina (X) NON PUÒ essere maggiore di quella tra il fattore di trascrizione (Y) e la citochina (X). Pertanto se il flusso di informazione tra X ed Y subisce una limitazione si verifica una degradazione della fedeltà della risposta Z , che può favorire l'insorgere di patologie.

Inoltre la disuguaglianza del data processing ha implicazioni nelle misure sperimentali. Ad esempio consideriamo la catena X (*segnale*) $\rightarrow Y$ (*vera risposta*) $\rightarrow \hat{Y}$ (*risposta misurata*): sebbene lo sperimentatore vorrebbe quantificare l'informazione mutua $I(X; Y)$ tra segnale e vera risposta, in realtà quel che viene misurato non può che essere $I(X; \hat{Y})$. Affinché $I(X; \hat{Y})$ sia vicino a $I(X; Y)$ occorre che il *rumore sperimentale* tra Y ed \hat{Y} sia minimo, aspetto a cui occorre quindi prestare particolare attenzione.

9.6 Codifica di sorgente con perdita di informazione

Si rende necessaria quando il *canale trasmissivo* non può trasportare un flusso informativo qualsiasi³⁸, ma esiste un limite R_M alla massima velocità di codifica R , ovvero si impone che $R \leq R_M$. Ciò è possibile a patto di accettare una *perdita di informazione* che si traduce nell'insorgere di una distorsione D del messaggio, di cui vogliamo stabilire l'entità $D(R)$, in funzione della velocità R . Siamo altresì interessati a stabilire il viceversa, ovvero quale sia la minima velocità di trasmissione $R(D)$, qualora si accetti una distorsione $D \leq D_M$.

Messaggi di natura discreta Quando la massima velocità R_M è inferiore al tasso informativo (9.8) della sorgente, anche la codifica più efficiente sviluppa una velocità R eccessiva e dunque si è obbligati a *scartare* informazione, come ad esempio omettere la trasmissione di intere codeword, con la conseguenza di introdurre errori (o distorsione D) nel messaggio codificato³⁹, in proporzione tanto maggiore quanto minore è R_M .

³⁷Rhee A, Cheong R, Levchenko A. *The application of information theory to biochemical signaling systems*. Phys Biol. 2012 Aug;9(4):045011, Uda S, Kuroda S. *Analysis of cellular signal transduction from an information theoretic approach* Semin Cell Dev Biol. 2016 Mar;51:24-31, Cheong R et al 2011, *Information transduction capacity of noisy biochemical signaling networks* Science 334 354-8 Tkačik, G.; Callan, C. G. & Bialek, W. *Information flow and optimization in transcriptional regulation* Proc. of the National Academy of Sciences, 2008, 105, 12265-12270

³⁸Questo limite può essere causato da una insufficiente capacità di canale (§ 17.3), o da una limitata disponibilità di risorse, come ad es. nella archiviazione dei dati in memoria.

³⁹La perdita di informazione per messaggi discreti determina la *corruzione* del messaggio, come la mancanza di parti di testo, di un'immagine, o di un video. Ma nel caso di *trasmissione dati* si preferisce *impiegare più tempo* per la trasmissione, piuttosto che perdere informazione.

Sorgenti continue Qui abbiamo due strade possibili: o intraprendere un processo di campionamento e quantizzazione (§ 4.3) per produrre un segnale numerico con velocità $R \leq R_M$, ed incorrere in una distorsione di quantizzazione D tanto maggiore quanto minore è la R_M consentita, oppure effettuare una trasmissione analogica del segnale $x(t)$ con una potenza S , con le conseguenze

- di ricevere $r(t) = x(t) + n(t)$, in cui il rumore $n(t)$ di potenza N in ricezione causa una distorsione $d(t) = n(t) = x(t) - r(t)$ di potenza $D = N$;
- l'entità di tale distorsione D può essere ridotta aumentando il rapporto $\text{SNR} = S/N$ oppure la banda del canale W , ovvero aumentandone la capacità C^{40} e di pari misura la massima intensità di informazione R_M che può essere trasferita.

Nel caso continuo pertanto, sia che la sorgente venga quantizzata, sia che se ne effettui la trasmissione come segnale analogico, sussiste un legame inverso tra distorsione e velocità di trasmissione, il cui studio prende il nome di *teoria velocità-distorsione*, di cui discutiamo ora.

9.6.1 La distorsione di codifica

Per individuare la relazione $R(D)$ tra la minima velocità R di trasmissione di una codifica (con perdite) di una sorgente informativa e la distorsione D che si ritiene accettabile ci riferiamo alla figura a lato, in cui un simbolo (sorgente discreta) o valore (s. continua) x da trasmettere viene rappresentato mediante codeword $c = f(x)$ di R binit, limitando dunque l'alfabeto a 2^R elementi, a cui si associa in ricezione un nuovo valore $\hat{x} = g(f(x)) \neq x$. La corrispondenza tra x ed \hat{x} viene quindi espressa in termini probabilistici come $p(\hat{x}/x)$, mentre indichiamo con $d(x, \hat{x})$ la misura della distorsione corrispondente⁴¹. A questo punto è possibile definire la *distorsione media* D_x in cui si incorre nel rappresentare un generico valore (o simbolo) x mediante \hat{x} come un valore atteso, ossia

$$D_x = E_{\hat{x}, X} \{d(\hat{x}, x)\} = \iint p(\hat{x}/x) p(x) d(\hat{x}, x) d\hat{x} dx$$

la cui entità dipende sia dalla scelta della misura $d(x, \hat{x})$ che dalla d.d.p. $p(\hat{x}/x)$, risultato della scelta delle operazioni di codifica $c = f(x)$ e restituzione $\hat{x} = g(c)$.

⁴⁰Al § 17.3 si mostra come la massima intensità di informazione R (associata ad un segnale $x(t)$ di potenza S ricevuto dopo aver attraversato un canale ideale con banda W ed alla cui uscita è presente un rumore $n(t)$ gaussiano bianco di potenza N) non può superare un limite C noto come *capacità di canale*, pari a $C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right)$ bit per secondo.

⁴¹Per sorgenti continue $d(\hat{x}, x)$ può ad es. corrispondere ad un valore quadratico medio (o varianza, o potenza) dell'errore di quantizzazione dei suoi campioni (§ 4.1), mentre $p(\hat{x}/x)$ dipende dalla caratteristica di quantizzazione $f(x)$ (§ 4.3), e fornisce prob. pari ad uno al valore quantizzato \hat{x}_k (o *centroide*) associato all'intervallo I_k in cui cade il campione x (vedi anche §§ 4.3.2 e 10.1.2.4). Prevedere anche per \hat{x} un valore probabilistico generalizza sia il concetto che la trattazione.

9.6.2 Funzione velocità-distorsione

È il nome dato alla relazione $R(D)$ definita come la soluzione ad un problema di *minimizzazione*⁴², ossia come quella che rende minima l'informazione mutua media $I(\hat{x}; x)$ tra x e \hat{x} al variare di $p(\hat{x}/x)$ in tutti i modi possibili, in modo da mantenere D_x inferiore alla distorsione desiderata D :

$$R(D) = \min_{p(\hat{x}/x): D_x \leq D} I(\hat{X}; X) \quad (9.38)$$

Ricordando le osservazioni svolte al § 9.4.3 a proposito di $I(\hat{X}; X)$, questa misura quanto la conoscenza di \hat{x} riduce l'incertezza a riguardo di x , incertezza che altrimenti⁴³ sarebbe pari all'entropia $H(X)$: intuitivamente si desidera che tale riduzione sia la massima possibile, e dunque la minimizzazione espressa dalla (9.38) va considerata congiuntamente al vincolo $p(\hat{x}/x) : D_x \leq D$, vincolo conseguibile purché $I(\hat{x}; x)$ sia grande a sufficienza.

9.6.2.1 Shannon lower bound

Soluzioni generali per (9.38) sono difficili da ottenere⁴⁴, ma si può comunque mostrare che $R(D)$ è continua, monotonicamente decrescente, e convessa (ossia *ad U*). Sussiste inoltre un *limite inferiore* valido per criteri di distorsione $d(x, \hat{x})$ di tipo errore quadratico e per sorgenti qualsiasi e senza memoria, ma che ora illustriamo per il caso continuo, e che afferma

$$R(D) \geq h(X) - h(D) = h(X) - \frac{1}{2} \log_2(2\pi e D) \quad (9.39)$$

dove $h(X)$ è l'entropia differenziale della sorgente, e $h(D)$ quella di una v.a. gaussiana con varianza D . Per dimostrare la (9.39) iniziamo osservando che in base alla relazione $I(X; \hat{X}) = h(X) - h(X/\hat{X})$ (§ 9.4.3) possiamo scrivere la (9.38) come

$$\begin{aligned} R(D) &= \min_{D_x \leq D} \{I(X; \hat{X})\} = \min_{D_x \leq D} \{h(X) - h(X/\hat{X})\} = \\ &= h(X) - \max_{D_x \leq D} \{h(X/\hat{X})\} \end{aligned} \quad (9.40)$$

in cui l'ultimo termine esprime l'incertezza residua su X una volta nota la sua codifica \hat{X} , incertezza pari a zero qualora $\hat{X} = X$, e dunque abbiamo $R(D)|_{D=0} = h(X)$. Se invece $D > 0$ possiamo scrivere

$$\max_{D_x \leq D} \{h(X/\hat{X})\} = \max_{D_x \leq D} \{h(X - \hat{X}/\hat{X})\} \leq \max_{D_x \leq D} \{h(X - \hat{X})\} \quad (9.41)$$

in cui la prima eguaglianza significa che, dopo la conoscenza di \hat{X} , rimane la stessa incertezza sia a riguardo del valore vero X che a riguardo dell'errore $X - \hat{X}$ ⁴⁵; la succes-

⁴²Per gli amanti del rigore analitico, il processo logico-matematico che motiva tale definizione viene sviluppato ad esempio al cap. 13 del testo *Elements of Information Theory* di T.M. Cover e J.A. Thomas (1991, Wiley), reperibile ad es. presso

http://www.cs-114.org/wp-content/uploads/2015/01/Elements_of_Information_Theory_Elements.pdf

⁴³Per \hat{x} incognito, oppure statisticamente indipendente da x .

⁴⁴Benché esista un metodo iterativo di soluzione, vedi

. https://en.wikipedia.org/wiki/Blahut-Arimoto_algorithm

⁴⁵Ciò è conseguenza del fatto che, come osservato a pag. 267, l'entropia differenziale di una v.a. *non*

siva disuguaglianza deriva invece dalla constatazione che aggiungendo informazione (\hat{X}) l'entropia non può aumentare, e dunque $h(X - \hat{X}/\hat{X}) \leq h(X - \hat{X})$. Dato però che nella (9.40) l'ultimo termine compare con il segno meno, sostituendovi la (9.41) si ottiene

$$R(D) \geq h(X) - \max_{D_x \leq D} \{h(X - \hat{X})\} \tag{9.42}$$

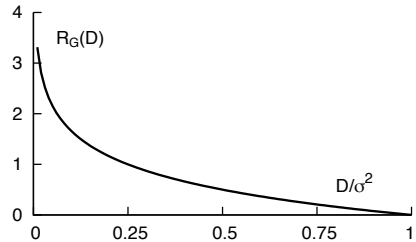
Per arrivare alla (9.39) è ora sufficiente osservare che una distorsione definita come $D = E\{(X - \hat{X})^2\}$ è a tutti gli effetti una varianza σ^2 , dunque la condizione $D_x \leq D$ pone un limite $\sigma^2 \leq D$ alla varianza dell'errore $X - \hat{X}$. Al § 9.3.2 si è mostrato che la sorgente che fornisce la massima entropia differenziale h per σ^2 assegnata è gaussiana, con $h = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e\sigma^2)$, e dunque $\max_{D_x \leq D} \{h(X - \hat{X})\} \leq \frac{1}{2} \log_2(2\pi eD)$, che sostituita nella (9.42) fornisce la (9.39).

9.6.3 Curva velocità-distorsione per sorgente gaussiana

Qualora la v.a. continua x sia di tipo gaussiano, senza memoria e con varianza σ_x^2 , inserendo l'espressione della corrispondente entropia differenziale (9.20) nella (9.39) si ottiene una funzione velocità-distorsione (9.38) pari a

$$R_G(D) = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e\sigma_x^2) - \frac{1}{2} \log_2(2\pi eD) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{D}{\sigma_x^2}$$

con il segno di uguale⁴⁶, ovvero la sorgente gaussiana *consegue* il limite inferiore (9.39). Osserviamo ora che per $D = \sigma_x^2$ si ottiene $R(D)|_{D=\sigma_x^2} = 0$ ovvero *non occorre trasmettere nulla* ($\hat{x} = 0$), in modo che l'errore $e = x - \hat{x} = x$ abbia appunto potenza $\sigma_x^2 = D$. Se poi $D > \sigma_x^2$ ossia la distorsione è *superiore* alla potenza di segnale, è sufficiente generare un valore \hat{x} gaussiano, a media nulla, *indipendente* da x e di varianza $D - \sigma_x^2$ per ottenere una distorsione $E\{(x - \hat{x})^2\} = \sigma_x^2 + D - \sigma_x^2 = D$.

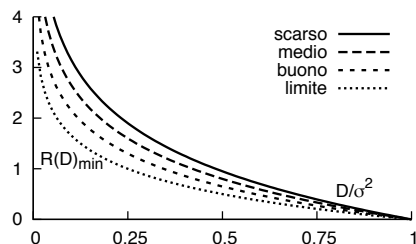


L'espressione finale per questo caso risulta dunque

$$R_G(D) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \log_2 \frac{D}{\sigma_x^2} & \text{se } 0 \leq D \leq \sigma_x^2 \\ 0 & \text{se } D \geq \sigma_x^2 \end{cases} \tag{9.43}$$

Sorgente non gaussiana e confronto prestazioni

In questo caso l'entropia $h(X)$ è inferiore al caso gaussiano, e quindi il limite (9.39) fornisce un valore $R(D)_{min}$ più piccolo di (9.43), *abbassando* la curva mostrata sopra. Una volta stabilito *un modello* (anche sperimentale) della d.d.p. della



dipende dal suo valore medio, che in questo caso è \hat{X} .

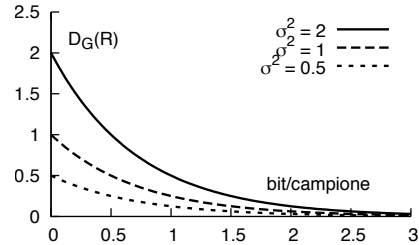
⁴⁶Ciò deriva dal considerare $x = \hat{x} + e$ con \hat{x} ed e v.a. gaussiane statisticamente indipendenti, di varianza rispettivamente $\sigma_x^2 - D$ e D : in tali condizioni si ottiene $E\{(X - \hat{X})^2\} = D$ e $I(X; \hat{X}) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_x^2}{D}$.

nostra sorgente, e valutata (anche numericamente) la sua entropia, possiamo usare la (9.39) per tracciare la relativa curva $R(D)_{min}$, e confrontare rispetto ad essa le prestazioni conseguite dal metodo di codifica che stiamo sviluppando, come esemplificato a lato.

Curva distorsione-velocità Invertendo la relazione (9.43) si ottiene⁴⁷ che la *minima distorsione* D conseguibile da una sorgente gaussiana in corrispondenza ad una velocità di R binit/campione risulta pari a

$$D_G(R) = 2^{-2R} \sigma_x^2 \quad (9.44)$$

ovvero la distorsione per sorgenti gaussiane e con R fissato è proporzionale alla varianza σ_x^2 , e decresce esponenzialmente con la velocità, come mostrato in figura.



Legame con l'SNR Definendo il rapporto segnale-rumore in dB (§ 8.1) come $10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{D}$ la (9.44) consente di ottenere

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} 2^{2R} = 2R \cdot 10 \log_{10} 2 = 6 \cdot R \quad dB$$

ossia un miglioramento di 6 dB per ogni binit in più utilizzato per la codifica di un campione, confermando in pieno il risultato già ricavato al § 4.3.1.1.

Valori limite Il valore (9.44) rappresenta un *limite superiore* per la distorsione a velocità R per una sorgente non gaussiana, o gaussiana ma con memoria, per la quale si possono ottenere valori di distorsione inferiori; la (9.44) individua quindi *il più grande valore* della distorsione *minima*, per velocità R e potenza σ_x^2 assegnate. D'altra parte è anche definito un *limite inferiore* $D_L(R)$ che individua la minima distorsione sotto cui non si può scendere per un dato R per sorgenti non gaussiane e senza memoria, in modo da poter scrivere

$$D_L(R) = 2^{-2R} Q \leq D(R) \leq D_G(R) = 2^{-2R} \sigma_x^2 \quad (9.45)$$

in cui Q è la...

Potenza entropica Esprime una quantità direttamente legata all'entropia differenziale della sorgente, con valore

$$Q = \frac{1}{2\pi e} 2^{2h(X)} \quad (9.46)$$

che per sorgenti gaussiane fornisce $Q_G = \sigma_x^2$, mentre per altri tipi di v.a. si ottiene un valore inferiore⁴⁸. Si può anche interpretare Q come la varianza di una sorgente gaussiana con la stessa entropia della sorgente in esame. Sostituendo (9.46) in (9.45) osserviamo come il limite inferiore di distorsione $D_L(R)$ si riduce al diminuire di $h(X)$, ovvero sorgenti meno informative conseguono distorsioni minori a parità di velocità.

⁴⁷ $R = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{D}{\sigma_x^2} \implies -2R = \log_2 \frac{D}{\sigma_x^2} \implies 2^{-2R} = \frac{D}{\sigma_x^2} \implies D = 2^{-2R} \sigma_x^2$

⁴⁸ Ad esempio per una v.a. uniforme si ottiene $Q_U = 0.703 \cdot \sigma_x^2$

9.6.4 Sorgente continua con memoria

Come per il caso di sorgenti discrete anche per quelle continue la dipendenza statistica tra i campioni di segnale riduce la quantità di informazione emessa, cosicché a parità di distorsione la sorgente può essere codificata a velocità ridotta, oppure a parità di velocità si può conseguire una distorsione inferiore. Anche stavolta la sorgente più *difficile* (ossia a cui compete la *massima distorsione minima*) è quella gaussiana, per la quale si ottengono risultati la cui interpretazione è molto interessante; prima di esporli conviene però fare un piccolo passo indietro.

9.6.4.1 Entropia e potenza entropica di sorgente gaussiana con memoria

Analogamente al caso discreto (§ 9.2), per una sequenza (o vettore *colonna*) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ di n v.a. con ampiezza continua, descritte da una d.d.p. congiunta $p(\mathbf{x})$, si definisce una entropia differenziale *a blocco* come

$$h_n(X) = -\frac{1}{n} \int_{x_1} \int_{x_2} \dots \int_{x_n} p(\mathbf{x}) \log_2 p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (9.47)$$

la cui valutazione è generalmente intrattabile. Se consideriamo un processo gaussiano $x(t)$ limitato in banda, a media nulla, stazionario e con densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ *colorata*, i suoi campioni $x_k = x(kT_c)$ (cap. 4) hanno d.d.p. congiunta (§ 6.5)

$$p_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\mathbf{R}_{xx})}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{x}\right\}$$

dove $\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$ è la matrice di *correlazione*, simmetrica e con elementi diagonali uguali tra loro e pari a $\mathbf{R}_{xx}(i, i) = E\{x^2\} = \sigma_x^2$. In tal caso la (9.47) fornisce⁴⁹

$$h_n(X) = \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e (\det(\mathbf{R}_{xx}))^{1/n})$$

da cui, dopo aver definito l'entropia differenziale per simbolo come $h(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(X)$, ricaviamo la potenza entropica per questo caso, pari a⁵⁰

$$Q_{G,mem} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\det(\mathbf{R}_{xx}))^{1/n} = \gamma_x^2 \sigma_x^2 \quad (9.48)$$

(vedi § 9.7.3) dove $0 \leq \gamma_x^2 \leq 1$ è una *misura di piattezza spettrale*⁵¹ che vale uno per un processo *bianco* o senza memoria, tornando così all'espressione $Q = \sigma_x^2$ valida in

⁴⁹La dimostrazione penso sia simile a quella del § 9.3.2, con le complicazioni della notazione matriciale.

⁵⁰Infatti $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(X) = \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e \lim_{n \rightarrow \infty} (\det(\mathbf{R}_x))^{1/n}) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2h(X) = \log_2 (2\pi e \lim_{n \rightarrow \infty} (\det(\mathbf{R}_x))^{1/n}) \Rightarrow 2^{2h(X)} = 2\pi e \lim_{n \rightarrow \infty} (\det(\mathbf{R}_x))^{1/n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2^{2h(X)}}{2\pi e} = Q = \lim_{n \rightarrow \infty} (\det(\mathbf{R}_x))^{1/n}$. Per la seconda uguaglianza della (9.48), si veda il § 9.7.3.

⁵¹Vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_flatness, o meglio N.S. JAYANT, P. NOLL, *Digital Coding of Waveforms*, 1984 Prentice Hall. Si può mostrare che γ_x^2 può essere interpretato come il rapporto tra la media geometrica e la media aritmetica della densità spettrale di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ del processo $x(t)$ limitato in banda $\pm W$: indicando con $S_k = \mathcal{P}_x(f_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$, i campioni equispaziati della densità spettrale valutati a frequenze positive f_k tra zero e la massima frequenza, si ha

$$\gamma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(\prod_{k=1}^N S_k\right)^{1/N}}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k} = \frac{\exp\left(\frac{1}{2W} \int_{-W}^W \ln \mathcal{P}_x(f) df\right)}{\frac{1}{2W} \int_{-W}^W \mathcal{P}_x(f) df}$$

tal caso. Viceversa Q si riduce ($\gamma_x^2 < 1$) per un processo gaussiano a valori correlati, e quindi con una densità spettrale *colorata* ed una maggiore *predicibilità* dei suoi valori, e dunque una minore entropia.

9.6.4.2 Funzione distorsione-velocità per sorgente gaussiana con memoria

Il valore di Q (9.48) consente il calcolo del *limite inferiore* definito alla (9.45):

$$D_{L,G,mem}(R) = 2^{-2R} Q_{G,mem} = 2^{-2R} \gamma_x^2 \sigma_x^2 \tag{9.49}$$

Mostriamo ora in quale caso la distorsione effettiva consegue il limite ossia $D_{G,mem}(R) = D_{L,G,mem}(R)$, e quale sia il valore $D_{G,mem}(R) > D_{L,G,mem}(R)$ in caso contrario.

Il water-filling Le funzioni (9.43) e (9.44) nel caso di sorgente gaussiana con memoria, i cui campioni sono descritti da uno spettro di densità di potenza $S_{xx}(e^{j\omega})$ *colorato*, devono essere espresse in forma *parametrica* come⁵²

$$D_{G,mem}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \min[\phi, S_{xx}(e^{j\omega})] d\omega \tag{9.50}$$

$$R_{G,mem}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \max\left[0, \frac{1}{2} \log_2 \frac{S_{xx}(e^{j\omega})}{\phi}\right] d\omega \tag{9.51}$$

in cui all'aumentare di ϕ , D aumenta ed R diminuisce, come andiamo a spiegare con l'aiuto della figura 9.3.

Le regioni indicate con B , in cui $\phi > S_{xx}(e^{j\omega})$, non contribuiscono al valore di R , dato che nella (9.51) il log è negativo, mentre contribuiscono al valore di D (eq. (9.50)) solamente per l'area ombreggiata in verde, ossia nelle regioni B

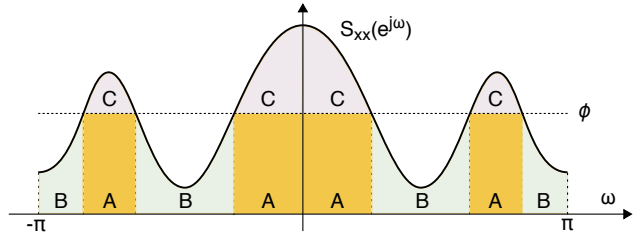


Figura 9.3: Bande di frequenza individuate dal parametro ϕ , ed aree che concorrono ai valori D ed R

la distorsione D ha densità di potenza *colorata* come S_{xx} . Quando invece $S_{xx}(e^{j\omega}) > \phi$ (regioni A) il contributo a D non dipende dal valore di $S_{xx}(e^{j\omega})$ ed assume l'aspetto (aree ocra) di un rumore *bianco*; viceversa (sempre in A) il contributo ad R è legato (con legge logaritmica) al valore delle aree lilla (indicate con C).

Questa interpretazione grafica delle (9.50) e (9.51) viene denominata *a riempimento d'acqua* perché simula un recipiente con la forma di $S_{xx}(e^{j\omega})$ per il quale le regioni A fungono da *vasi comunicanti* riempiti di acqua fino al livello ϕ . Da tale discussione traiamo i risultati

- una volta assegnata una distorsione D la codifica ottima *non spreca* velocità binaria R per rappresentare regioni di frequenza (B) dove il segnale è più debole;

Nel caso di un processo bianco, per il quale i valori S_k sono tutti uguali, le due medie coincidono, e $\gamma_x^2 = 1$. Altrimenti, γ_x^2 risulta tanto più piccolo quanto più i valori S_k si discostano dal loro valore medio.

⁵²Di questo non viene fornita dimostrazione, di cui trovo indicazione essere presente in T. BERGER, *Rate distortion theory*, Prentice-Hall 1971, che non trovo pubblicamente disponibile in rete.

- la costanza delle densità spettrale dell'errore D nelle regioni A fa sì che l'SNR locale migliori proporzionalmente a $S_{xx}(e^{j\omega})$, densità spettrale del segnale.

Osserviamo ora che ponendo $\phi > \max \{S_{xx}(e^{j\omega})\}$ la sagoma di $S_{xx}(e^{j\omega})$ si riempie completamente d'acqua, la (9.50) fornisce $D = \sigma_x^2$, mentre la (9.51) restituisce $R = 0$; viceversa nel caso in cui $\phi < \min \{S_{xx}(e^{j\omega})\}$ ci si trova nelle condizioni di *bassa distorsione* per le quali D consegue il suo valore limite inferiore espresso dalla (9.49), ovvero

$$D_{G,mem,low-dist}(R) = 2^{-2R} \gamma_x^2 \sigma_x^2 \tag{9.52}$$

dove $0 \leq \gamma_x^2 \leq 1$ è la misura di *piattezza spettrale* già introdotta nella (9.48). Qualora $S_{xx}(e^{j\omega})$ sia costante risulta $\gamma_x^2 = 1$, ri-ottenendo così il risultato (9.44) trovato per il caso senza memoria.

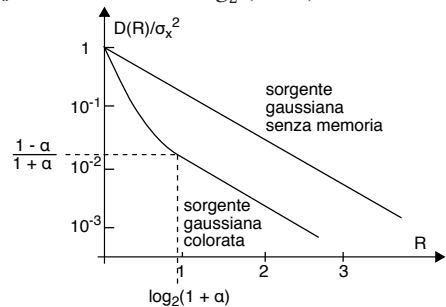
Esempio Consideriamo la sequenza di tipo *autoregressivo* $x(n) = z(n) + \alpha \cdot x(n-1)$ presente all'uscita di un filtro passa basso numerico IIR del primo ordine (§ 5.3.2.2) con $h(n) = \alpha^n$ (per $n \geq 0$ ed $0 < \alpha < 1$), al cui ingresso è presente una sequenza $z(n)$ di campioni di un processo gaussiano, a media nulla, varianza σ_z^2 ed a valori indipendenti ed incorrelati da quelli di x . Anche $x(n)$ sarà dunque gaussiano, ma con autocorrelazione⁵³ $\mathcal{R}_{xx}(k) = \alpha^{|k|} \sigma_x^2$, varianza $\sigma_x^2 = \frac{\sigma_z^2}{1-\alpha^2}$, piattezza spettrale $\gamma_x^2 = 1 - \alpha^2$ e densità di potenza *colorata* pari a $S_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_z^2 \cdot |H_{xx}(e^{j\omega})|^2 = \sigma_x^2 \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2-2\alpha \cos \omega}$. All'aumentare di α la misura di piattezza γ_x^2 si riduce, $x(n)$ diviene più predicibile, e la distorsione $D = 2^{-2R}(1-\alpha^2)\sigma_x^2$ (9.49) diminuisce.

Il minimo valore di $S_{xx}(e^{j\omega})$ si ottiene per $\omega = \pi$ (vedi fig. 4.13), ed è pari a

$$\min_{\omega} \{S_{xx}(e^{j\omega})\} = \sigma_x^2 \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2-2\alpha \cos \omega} \Big|_{\omega=\pi} = \sigma_x^2 \frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha)^2} = \sigma_x^2 \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tag{9.53}$$

Ponendo (ad esempio) $\alpha = 0.95$, la (9.53) fornisce $0.0256 \cdot \sigma_x^2$: pertanto la regione a *bassa distorsione* in questo caso è definita come $D/\sigma_x^2 \leq 0.0256$, o $R \geq \log_2(1+\alpha) = 0.964$ ⁵⁴, ed in tale regione è lecito applicare la (9.52) ossia

$D(R) = 2^{-2R}(1-\alpha^2)\sigma_x^2 = 0.0975 \cdot 2^{-2R}\sigma_x^2$ avendovi sostituito i valori per γ_x^2 ed α . Il risultato è la retta parallela a quella per una sorgente gaussiana senza memoria mostrata alla figura a lato, su di una scala logaritmica per le distorsioni. Per valori $D/\sigma_x^2 > 0.0256$ la distorsione D aumenta più rapidamente ed il suo valore va determinato applicando la (9.50), per raggiungere (ad $R = 0$) il valore σ_x^2 , come avviene per il caso senza memoria.



⁵³I risultati indicati sono derivati al § 9.7.4

⁵⁴Infatti la (9.53) può essere riarrangiata come $D/\sigma_x^2 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$ mentre dalla (9.52) si ottiene $D/\sigma_x^2 = 2^{-2R}(1-\alpha^2)$; dunque $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 2^{-2R}(1-\alpha^2) \Rightarrow 2^{-2R} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{1}{1-\alpha^2} = \frac{1}{(1+\alpha)^2}$ e quindi infine $R = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{(1+\alpha)^2} = \log_2 \sqrt{(1+\alpha)^2} = \log_2(1+\alpha)$

9.6.4.3 Sorgente non gaussiana

In questo caso la (9.52) si riscrive sostituendo al posto di σ_x^2 la potenza entropica Q espressa dalla (9.46) in cui il valore di entropia differenziale è ora quello della sorgente con memoria, inferiore al caso senza memoria, ottenendo così valori $D(R)$ ancora inferiori.

L'applicazione dei principi relativi alla codifica di sorgente al caso specifico dei messaggi multimediali (audio e video) viene trattata al capitolo 10, mentre l'applicazione dei concetti di informazione mutua media e di entropia condizionale al calcolo della capacità di canale è sviluppata al capitolo 17.

9.7 Appendici

9.7.1 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Costituisce un modo di affrontare un *problema* di ottimizzazione *vincolata*⁵⁵, ossia individuare i punti \mathbf{x}^* di massimo o minimo (detti *estremali*) per una funzione *obiettivo* $f(\mathbf{x})$ definita in un aperto $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ (ossia dipendente da più variabili $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$), nel rispetto di una o più condizioni di *vincolo* di tipo $q_i(\mathbf{x}) = b_i$ ossia $g_i(\mathbf{x}) = 0$ con $i = 1, 2, \dots, m$ dopo aver posto $g_i(\mathbf{x}) = q_i(\mathbf{x}) - b_i$.

Le condizioni di vincolo individuano una *regione ammissibile* \mathcal{X} per le soluzioni $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$ come $\mathcal{X} = \{x \in \mathcal{A} : g_i(\mathbf{x}) = 0 \text{ con } i = 1, 2, \dots, m\}$.

Osservazione L'insieme \mathcal{X} ha gradi di libertà ridotti rispetto all'aperto \mathcal{A} : ad esempio se $n = 2$, ovvero $z = f(x, y)$ è una superficie, allora un vincolo $g(x, y) = 0$ è una *curva* nel piano (x, y) , proiezione della *intersezione* tra la superficie $z = q(x, y)$ ed il piano orizzontale $z = b$. A sua volta la curva espressa dal vincolo $g(x, y) = 0$ viene *proiettata* in verticale sulla superficie $z = f(x, y)$, individuando su di essa *un cammino* lungo il quale si trovano i punti \mathbf{x}^* di ottimo vincolato. Qualora si aggiunga un ulteriore vincolo $g_2(x, y) = 0$ l'insieme \mathcal{X} si riduce ulteriormente ai punti di intersezione tra i cammini disegnati sulla superficie $z = f(x, y)$ dai due vincoli.

A patto che le funzioni siano derivabili con derivate continue e che $m < n$, trovare i punti \mathbf{x}^* estremali di $f(\mathbf{x})$ nel rispetto dei vincoli $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ passa per la definizione della funzione *Lagrangiana* come

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \quad (9.54)$$

in cui $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ è il vettore delle m funzioni $g_i(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\lambda}$ un vettore di m *moltiplicatori* scalari, e $\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rangle$ esprime il prodotto scalare (§ 2.4.3) tra i due. Osserviamo che \mathcal{L} è una funzione di $n + m$ variabili, le dimensioni di \mathbf{x} e $\boldsymbol{\lambda}$.

Gradiente prima di poter proseguire occorre definire l'operatore *gradiente* ∇ di $f(\mathbf{x})$ come il vettore i cui elementi ne sono le derivate parziali, ossia $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$. Il suo orientamento nello spazio indica la direzione verso cui $f(\mathbf{x})$ cresce più velocemente, e se

⁵⁵Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ è un *punto stazionario* (minimo, massimo o di sella) di $f(\mathbf{x})$, allora $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, ovvero piccole variazioni dell'argomento $\mathbf{x} \simeq \mathbf{x}_0$ non alterano di molto il valore di f .

Possiamo finalmente enunciare il teorema, che afferma

Qualora esista un punto \mathbf{x}^ di ottimo vincolato, e la matrice Jacobiana $J\{\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)\}$ abbia rango m ⁵⁶, allora esiste un vettore $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tale che*

$$\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*) = \mathbf{0} \quad (9.55)$$

ovvero i valori $(\mathbf{x}^, \lambda^*)$ individuano punti stazionari di (9.54)*

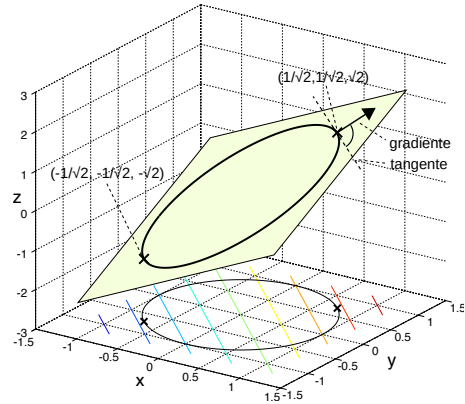
Ciò comporta che

1. l'azzeramento di $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$ per un qualche valore $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ è condizione *necessaria* all'esistenza del punto \mathbf{x}^* di ottimo, ovvero i valori che verificano la (9.55) possono *non essere* soluzione al problema di ottimo, ma devono essere verificati singolarmente;
2. $\nabla \mathcal{L}$ (9.55) è un vettore i cui elementi sono $n + m$ funzioni di \mathbf{x} e λ , il cui azzeramento realizza un sistema di altrettante equazioni, le cui soluzioni sono i valori $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ desiderati;
3. i primi n elementi di $\nabla \mathcal{L}$ sono le $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j}$ con $j = 1, 2, \dots, n$, il cui azzeramento implica $\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ ovvero $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla_{\mathbf{x}} g_i(\mathbf{x}^*)$ od anche $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*) = \langle \lambda^*, \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \rangle$, e cioè quando $(\mathbf{x}, \lambda) = (\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ il gradiente della funzione obiettivo $\nabla_{\mathbf{x}} f$ diviene eguale ad una combinazione lineare $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla_{\mathbf{x}} g_i$ degli m gradienti delle condizioni di vincolo, con i moltiplicatori λ_i^* come coefficienti. Ciò comporta che $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*)$ è *ortogonale* a ciascun cammino individuato dai vincoli⁵⁷, o ovvero che la curva di livello di $f(\mathbf{x})$ che passa per $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ è *tangente* (in tale punto) alla curva descritta dal vincolo;
4. gli ultimi m elementi di $\nabla \mathcal{L}$ corrispondono a $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = -g_j(\mathbf{x})$ e dunque il loro annullamento comporta il rispetto dei vincoli;
5. se i vincoli sono soddisfatti il termine $\sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(\mathbf{x})$ della (9.54) è nullo, e dunque i punti estremali di \mathcal{L} al variare di \mathbf{x} lo sono anche per la $f(\mathbf{x})$ di partenza;
6. la condizione $J\{\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)\}$ di rango m garantisce che i gradienti dei vincoli siano linearmente indipendenti, consentendo di trarre le conclusioni di cui al punto 3. Qualora la condizione non si verifichi la soluzione offerta dal teorema non è praticabile, dato che in tal caso $\nabla \mathcal{L}$ può non azzerarsi nei punti di ottimo, per qualunque λ .

⁵⁶La matrice Jacobiana $J\{\mathbf{g}(\mathbf{x})\}$ (associata ai vincoli $g_i(\mathbf{x})$) è stata introdotta al 6.4.2, ed essendo la sua i -esima riga ottenuta come la sequenza delle derivate parziali $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$, si ottiene *impilando* i vettori gradiente $\nabla_{\mathbf{x}} g_i(\mathbf{x})$ calcolati per ciascun vincolo.

⁵⁷Vedi ad es. <https://www.geogebra.org/m/gXyun8mD>

Esempio Si trovino i punti di massimo e di minimo della funzione $f(x, y) = x + y$ sottoposta al vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Con l'aiuto della figura, osserviamo che i punti devono giacere sulla intersezione tra un piano inclinato $z = x + y$ e la proiezione su di esso di una circonferenza di raggio unitario, risultato dell'intersezione tra un paraboloido $z = x^2 + y^2$ ed il piano $z = 1$. Per la Lagrangiana otteniamo $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, e l'annullamento del relativo gradiente



da luogo al sistema $\begin{cases} 2\lambda x - 1 = 0 \\ 2\lambda y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$, da cui si può ottenere che $(x^*, y^*, \lambda^*) = \pm (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Dato che $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$ e che $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$, il primo punto individua un massimo, ed il secondo un minimo, entrambi di tipo vincolato. Osserviamo come ∇f sia ovunque pari a $(1, 1)$, e nei punti di ottimo risulti *ortogonale* alla tangente al cammino individuato dal vincolo.

9.7.2 Massimo dell'entropia per variabile aleatoria gaussiana

Si intende ora mostrare la validità della (9.21), ovvero che l'entropia differenziale per sorgente continua gaussiana $h_G = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e\sigma^2)$ (eq. (9.20)) è il *massimo* che si può ottenere per qualunque scelta della d.d.p. di primo ordine $p(x)$ della sorgente, una volta fissata la sua varianza σ^2 , ossia

$$h_G = \frac{1}{2} \log_2(2\pi e\sigma^2) = \max_{p(x)} \left\{ - \int p(x) \log_2 p(x) dx \right\} \quad \text{dato } \sigma^2$$

Per arrivare allo scopo si può adottare⁵⁸ il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (§ 9.7.1), considerando $p(x) = p$ come una *variabile* p (anziché una funzione) rispetto a cui massimizzare, nel rispetto dei vincoli $g_1(p) = \int p(x) dx - 1 = 0$ e $g_2(p) = \int x^2 p(x) dx - \sigma^2 = 0$, mentre il vincolo sul valor medio è ininfluenza a causa dell'invarianza evidenziata a pag. 267.

Scriviamo dunque il lagrangiano come

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p, \lambda_1, \lambda_2) &= - \int p(x) \log_2 p(x) dx - \lambda_1 (\int p(x) dx - 1) - \lambda_2 (\int x^2 p(x) dx - \sigma_x^2) = \\ &= - \int [p(x) \log_2 p(x) + \lambda_1 p(x) + \lambda_2 x^2 p(x)] dx + \lambda_1 + \lambda_2 \sigma_x^2 = \\ &= - \frac{1}{\ln 2} \int [p(x) \ln p(x) + \lambda_1 p(x) + \lambda_2 x^2 p(x)] dx + \lambda_1 + \lambda_2 \sigma_x^2 \end{aligned}$$

in cui si è sostituito $\log_2 p(x) = \frac{1}{\ln 2} \ln p(x)$ e si adotta una eguale scalatura per i moltiplicatori λ_i . Il massimo di $\mathcal{L}(p, \lambda_1, \lambda_2)$ si ottiene eguagliandone a zero le derivate

⁵⁸Un metodo alternativo è mostrato in https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_entropy, mentre <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/entropypost.pdf> approfondisce la questione.

parziali, ed applicando la proprietà di *derivata sotto il segno di integrale*⁵⁹ scriviamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = -\frac{1}{\ln 2} \int \left[\ln p(x) - p(x) \frac{1}{p(x)} + \lambda_1 + \lambda_2 x^2 \right] dx = 0$$

in cui si è applicata la regola della derivata del prodotto $p \ln p$. L'uguaglianza con zero si verifica se $\ln p(x) - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x^2 = 0$ ovvero $\ln p(x) = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 x^2$, da cui

$$p(x) = e^{1-\lambda_1-\lambda_2 x^2} = e^{1-\lambda_1} e^{-\lambda_2 x^2} = e^\alpha e^{-\beta x^2}$$

dove $\alpha = 1 - \lambda_1$ e $\beta = \lambda_2$ deve essere positivo per poter avere $\int p(x) dx$ finito.

Osserviamo ora che il vincolo $\int p(x) dx = 1$ determina che⁶⁰ $\int e^\alpha e^{-\beta x^2} dx = e^\alpha \sqrt{\pi/\beta} = 1$ e dunque la condizione $g_1(p) = 0$ è soddisfatta qualora

$$e^\alpha = \sqrt{\beta/\pi}$$

Infine, il vincolo $\int x^2 p(x) dx = \sigma^2$ impone che

$$\int x^2 e^\alpha e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\beta/\pi} \int x^2 e^{-\beta x^2} dx = \sigma^2$$

che risulta soddisfatta qualora $\beta = 1/2\sigma^2$, ottenendo infatti in tal modo per $p(x)$ l'espressione di una gaussiana ovvero

$$p(x) = e^\alpha e^{-\beta x^2} = \sqrt{\beta/\pi} e^{-\beta x^2} \Big|_{\beta=1/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Notiamo esplicitamente la differenza rispetto al caso continuo, in cui la d.d.p. che rende massima l'entropia è invece quella uniforme. Presso WIKIPEDIA è possibile trovare un elenco⁶¹ di valori di entropia differenziale calcolata per diverse scelte di d.d.p.

9.7.3 Misura di piatezza spettrale di processo gaussiano

Per dimostrare⁶² la seconda eguaglianza della (9.48) occorre prima mettere in evidenza alcune proprietà degli *autovalori* $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ della matrice di correlazione \mathbf{R}_{xx} simmetrica, definita positiva (pag. 186), di dimensioni $n \times n$, e con valori $\mathbf{R}_{xx}(i, j) = E\{x_i x_j\}$ valutati per i campioni x_i di un processo a media nulla, e dunque pari a σ_x^2 sulla diagonale.

Come noto da altri corsi, ad ogni autovalore λ_i è associato il relativo *autovettore* \mathbf{v}_i dalla relazione $\mathbf{R}_{xx} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$, e l'insieme degli autovalori può essere trovato risolvendo l'equazione caratteristica $\det(\mathbf{R}_{xx} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ dove \mathbf{I} è la matrice *identità*, diagonale $n \times n$. Tale equazione è un polinomio di grado n in λ e le peculiarità di \mathbf{R}_{xx} assicurano di poter trovare n zeri reali, a partire dai quali possono essere trovati gli autovettori corrispondenti a meno di un fattore di scala, che conviene fissare in modo che gli

⁵⁹Considerando la derivata come limite di un rapporto incrementale, si tratta di una conseguenza di https://it.wikipedia.org/wiki/Passaggio_al_limite_sotto_segno_di_integrale

⁶⁰Infatti sappiamo che $\int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx = 1$ ovvero, ponendo $1/2\sigma_x^2 = \beta$ e dunque $\sigma_x^2 = 1/2\beta$ otteniamo $\int e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{2\pi\sigma_x^2} = \sqrt{2\pi/2\beta} = \sqrt{\pi/\beta}$.

⁶¹Vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_entropy

⁶²La trattazione segue quella fornita in N.S. JAYANT, P. NOLL, *Digital Coding of Waveforms*, 1984 Prentice Hall.

autovettori siano *ortonormali*, ossia per essi valga la relazione $\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$. Sussistono ora le relazioni

1. $\mathbf{R}_{xx} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\top$
2. $\det(\mathbf{R}_{xx}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
3. $\text{tr}(\mathbf{R}_{xx}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ ma dato che è anche vero che $\text{tr}(\mathbf{R}_{xx}) = n\sigma_x^2$, per qualunque n il valor medio degli autovalori eguaglia la varianza, ovvero
4. $\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Essendo quindi gli autovalori una misura di varianza, sono non-negativi. Inoltre, se λ_i è autovalore di \mathbf{R}_{xx} , allora $1/\lambda_i$ è autovalore di \mathbf{R}_{xx}^{-1} .

A questo punto il *colpo di scena* deriva dall'applicazione del *teorema di distribuzione di Toeplitz (teorema di Szego)*⁶³ che afferma che per qualunque funzione $f(\cdot)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f[S_{xx}(e^{j\omega})] d\omega \quad (9.56)$$

in cui $S_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_{xx}(k) e^{-jk\omega}$ è la DTFT (§ 4.4) della funzione di autocorrelazione $\mathbf{R}_{xx}(k) = E\{x_n x_{n+k}\}$ cui valori compaiono nella matrice \mathbf{R}_{xx} , calcolata per la sequenza $\{x_n\}$, di cui $S_{xx}(e^{j\omega})$ è lo spettro di densità di potenza. In base all'osservazione 4., qualora $f(\cdot)$ sia pari ad una identità la (9.56) diviene un aspetto del teorema di Parseval, e calcola la potenza di $\{x_n\}$. Ma ora si compie *una magia*, poiché ponendo invece $f(\cdot) = \ln(\cdot)$ l'eq. (9.56) diventa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\prod_{i=1}^n \lambda_i \right]^{1/n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln [S_{xx}(e^{j\omega})] d\omega \quad (9.57)$$

da cui in base all'osservazione 2 ne consegue⁶⁴

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\det(\mathbf{R}_{xx}))^{1/n} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln [S_{xx}(e^{j\omega})] d\omega \right\} = \eta_x^2$$

dove η_x^2 individua la varianza del *minimo errore di predizione*, ossia la varianza del processo bianco in ingresso ad un filtro autoregressivo (vedi § 10.1.2.2) alla cui uscita si ottiene un segnale con autocorrelazione $\mathbf{R}_{xx}(k)$. Dividendo η_x^2 per $\sigma_x^2 = E\{x^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) d\omega$ otteniamo la *misura di piattezza spettrale*

$$\gamma_x^2 = \frac{\eta_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{\exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln [S_{xx}(e^{j\omega})] d\omega \right\}}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}(e^{j\omega}) d\omega} \quad (9.58)$$

che compare nella (9.48).

⁶³In base a quanto riportato presso https://en.wikipedia.org/wiki/Szego_limit_theorems il teorema si applica quando gli autovalori sono quelli di una matrice di Toeplitz, i cui elementi sono coefficienti di Fourier di una funzione definita sul cerchio unitario, esattamente come nel nostro caso.

⁶⁴Infatti indicando il secondo membro di (9.57) con α otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\prod_{i=1}^n \lambda_i \right]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln (\det(\mathbf{R}_{xx}))^{1/n} = \alpha \text{ e dunque } e^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \det(\mathbf{R}_{xx})^{1/n}$$

9.7.4 Autocorrelazione di sequenza autoregressiva

Sviluppiamo qui i passaggi necessari ad ottenere le grandezze indicate nell'esempio di pag. 281, osservando innanzitutto che il processo $x(n) = z(n) + \alpha \cdot x(n-1)$ viene anche detto *Markoviano* di primo ordine, dato che la dipendenza statistica dal passato si estende al solo campione precedente. Come osservato, $x(n)$ è l'uscita di un filtro IIR del primo ordine al cui ingresso sono posti campioni di un processo gaussiano bianco a media nulla con varianza σ_z^2 .

Per il valore di autocorrelazione, come noto (§ 7.4) risulta

$$\mathcal{R}_{xx}(k) = \mathcal{R}_{hh}(k) * \mathcal{R}_{zz}(k) = \sigma_z^2 \mathcal{R}_{hh}(k)$$

in quanto $\mathcal{R}_{zz}(k) = \sigma_z^2 \delta(k)$. Con riferimento alla figura che segue, per $k \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{hh}(k) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) h(n+k) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \alpha^{n+k} = \\ &= \alpha^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} = \frac{\alpha^k}{1-\alpha^2} \end{aligned}$$

mentre per $k < 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{hh}(k) &= \sum_{n=|k|}^{\infty} h(n) h(n+k) = \sum_{n=|k|}^{\infty} \alpha^n \alpha^{n+k} = \\ &= \alpha^{-k} \sum_{n=|k|}^{\infty} \alpha^{2(n+k)} = \alpha^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} = \frac{\alpha^{-k}}{1-\alpha^2} \end{aligned}$$

ma dato che se $k < 0$ allora $-k = |k|$, possiamo scrivere

$$\mathcal{R}_{hh}(k) = \frac{\alpha^{|k|}}{1-\alpha^2}$$

per $\forall k$. Risulta quindi

$$\mathcal{R}_{xx}(k) = \sigma_z^2 \mathcal{R}_{hh}(k) = \sigma_z^2 \frac{\alpha^{|k|}}{1-\alpha^2}$$

a cui corrisponde una varianza

$$\sigma_x^2 = \mathcal{R}_{xx}(0) = \sigma_z^2 \frac{1}{1-\alpha^2}$$

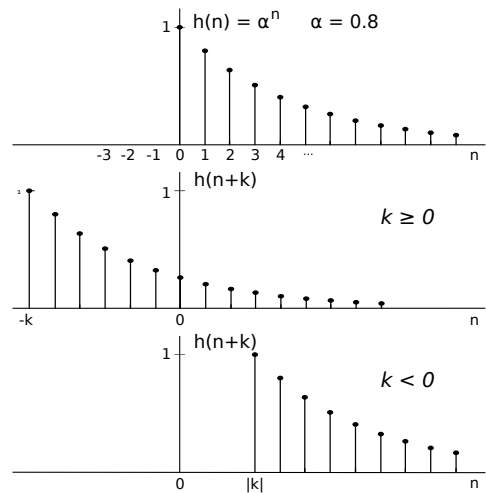
ottenendo in definitiva

$$\mathcal{R}_{xx}(k) = \sigma_z^2 \alpha^{|k|}$$

Applicando poi la definizione (9.58) di piattezza spettrale otteniamo

$$\gamma_x^2 = \frac{\sigma_z^2}{\sigma_x^2} = \sigma_z^2 \frac{1-\alpha^2}{\sigma_z^2} = 1-\alpha^2$$

mentre la risposta in frequenza $H_{xx}(e^{j\omega})$ è stata già ricavata a pag. 108, eq. (4.17).



Codifica di sorgente multimediale

AFFRONTIAMO gli aspetti applicativi della teoria esposta al capitolo 9 e relativi alla codifica di sorgente continua per *segnali audio-visivi*, che dunque si particolarizza in virtù delle caratteristiche peculiari di tali segnali, associati a quelle degli organi sensoriali umani che ne sono i destinatari naturali. Per quanto riguarda *l'audio* sono illustrate le tecniche orientate a riprodurre il segnale nel tempo come ad es. nel PCM e quindi quelle più orientate al segnale vocale, basate su di un modello del sistema fonatorio di produzione; infine, sono accennate le tecniche basate su di un modello del sistema uditivo, come per l'MP3. Si passa quindi alla codifica di *immagini* fisse, alle quali si possono applicare le tecniche nate per la codifica di sorgente discreta come ad es. per le GIF, oppure altre più ispirate alla fisiologia del sistema visivo come per il JPEG. La trattazione della codifica *video* si articola attraverso l'evoluzione storica dei vari standard che se ne sono occupati, arricchendo le tecniche di codifica di immagine con la rappresentazione del movimento e di come questo possa essere predetto, fino a generare il multiplex numerico con i programmi televisivi che pervadono la nostra esistenza.

10.1 Codifica audio

Al § 4.3.1.1 abbiamo svolto una valutazione approssimata della distorsione introdotta dal processo di quantizzazione di segnale audio, ricavando che l'utilizzo di M bit/campione si traduce in $SNR_q(M)|_{dB} \approx 6 \cdot M$ dB. Quindi, al § 4.3.2 si è mostrato come adottando una caratteristica di quantizzazione logaritmica anziché lineare ci si possa adattare meglio alla effettiva densità di probabilità del segnale vocale, rendendo inoltre SNR_q relativamente poco sensibile alla sua effettiva dinamica, dando luogo alla cosiddetta codifica PCM con *legge A* o *legge μ* , standardizzata nel 1988 da ITU-T come G.711,¹. Mentre questa costituisce un formato universale di scambio permettendo la compatibilità tra dispositivi e tecnologie, nel seguito sono state sviluppate diverse tecniche alternative², in grado di offrire la stessa (o migliore) qualità di ascolto con velocità di trasmissione

¹<http://www.itu.int/rec/T-REC-G.711/e>

²Una raccolta di riferimenti a risorse relative a codec audio orientati alle applicazioni multimediali può essere trovata presso <https://teoriadeisignali.it/story/labtel/>

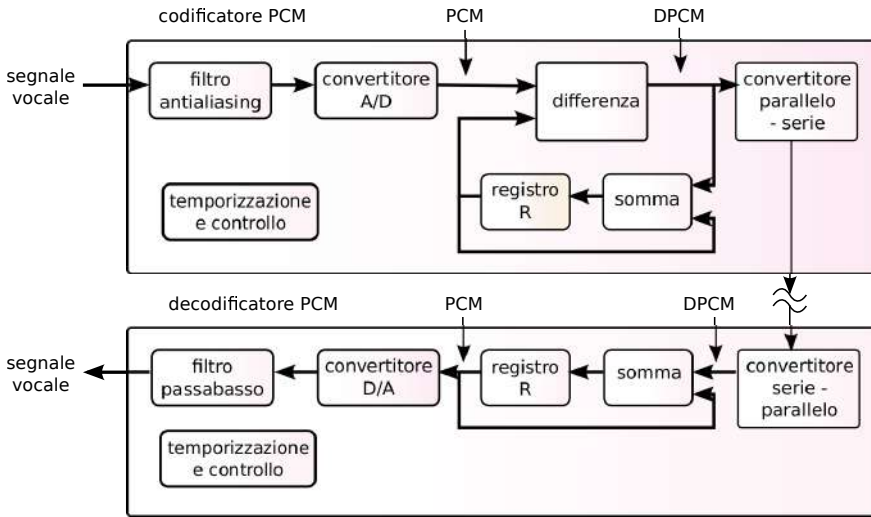


Figura 10.1: Codec audio Differential PCM o DPCM

contenute, non solo per segnali vocali in banda telefonica, ma anche per segnali a banda larga, musicali, e multicanale, di cui tentiamo ora una sommaria rassegna.

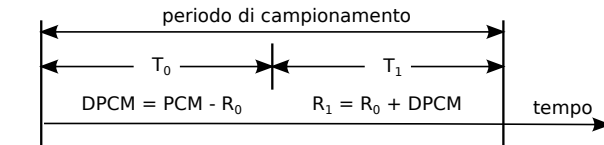
10.1.1 Codifica di forma d'onda

Questa classe di codificatori opera esclusivamente nel dominio del tempo, agendo campione per campione, e ottiene una qualità comparabile o superiore a quella del PCM sfruttando le caratteristiche di memoria presenti nel segnale, e/o adattando alcuni parametri di funzionamento alle caratteristiche tempo varianti del segnale.

10.1.1.1 DPCM o PCM Differenziale

La prima variazione rispetto al PCM è stata quella di applicare il principio della codifica predittiva (pag. 263), semplicemente adottando il precedente campione di ingresso come *predizione* di quello successivo. Il corrispondente schema di elaborazione è mostrato in fig. 10.1, ed il suo funziona-

mento è suddiviso in due fasi come rappresentato a lato: nella prima (T_0) il codificatore sottrae il campione precedente (all'inizio nullo) all'attuale,



R_0 = contenuto corrente di R e R_1 = contenuto aggiornato e nella seconda (T_1) questa differenza è risommata al valore di differenza precedente (all'inizio nullo) in modo da ri-calcolare il valore attuale, e salvarlo nel registro di memoria R. Il segnale differenza è caratterizzato da valori di ampiezza ridotti rispetto all'originale, e può essere codificato con 7 bit/campione, producendo ora una velocità di 56 kbps per ottenere un segnale di qualità telefonica. Il decodificatore si limita quindi a sommare alla differenza ricevuta il valore ricostruito del campione precedente, ed effettuare l'operazione di restituzione analogica. Osserviamo che il codificatore calcola

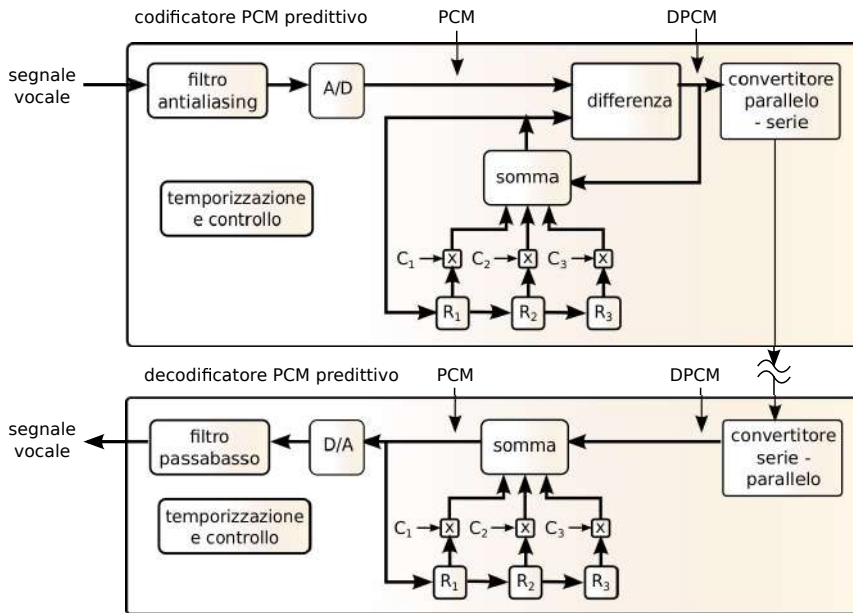


Figura 10.2: Codec DPCM con predittore a tre coefficienti costanti

il valore precedente mediante un circuito identico a quello presente al decodificatore, e per questo l'operazione è perfettamente invertibile.

10.1.1.2 ADPCM o DPCM Adattivo

Questo metodo differisce dal precedente per due aspetti: da un lato il processo di predizione tiene conto di più di un campione passato e non di uno solo come nel DPCM, come descritto in fig. 10.2 in cui è mostrato un predittore del terzo ordine che in pratica consiste in un filtro trasversale i cui coefficienti sono fissati in base alle caratteristiche statistiche medie del segnale vocale. Il secondo aspetto è che ora il quantizzatore *modifica nel tempo* la propria dinamica di azione (da cui il termine *adattativo*, o *adattivo*) in base ad una stima della dinamica del segnale.

Nel lato sinistro della fig. 10.3 è mostrata una caratteristica di quantizzazione uniforme operante su di una dinamica di ingresso $\phi_x \hat{\sigma}_x$, con $\phi_x > 1$ scelto in modo da rendere trascurabile la probabilità che un valore di ingresso troppo elevato determini la saturazione del quantizzatore. Utilizzando una stima a breve termine della varianza $\hat{\sigma}_x^2$ calcolata sugli ultimi campioni di segnale (a media nulla), ossia ad es. calcolando $\hat{\sigma}_x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^2(n-i)$, si possono rendere gli intervalli di decisione Δ piccoli nelle fasi di segnale piccolo, in modo da mantenere l'SNR costante anche per segnali con ampiezze molto variabili. Inoltre, è possibile *omettere* la trasmissione della stima di varianza se quest'ultima è calcolata in modalità *backward*, ossia a partire dai valori $y(n) = Q[x(n)]$, dato che la stessa operazione è eseguibile in modo indipendente anche dal lato del decodificatore. La stima della varianza è ulteriormente semplificata

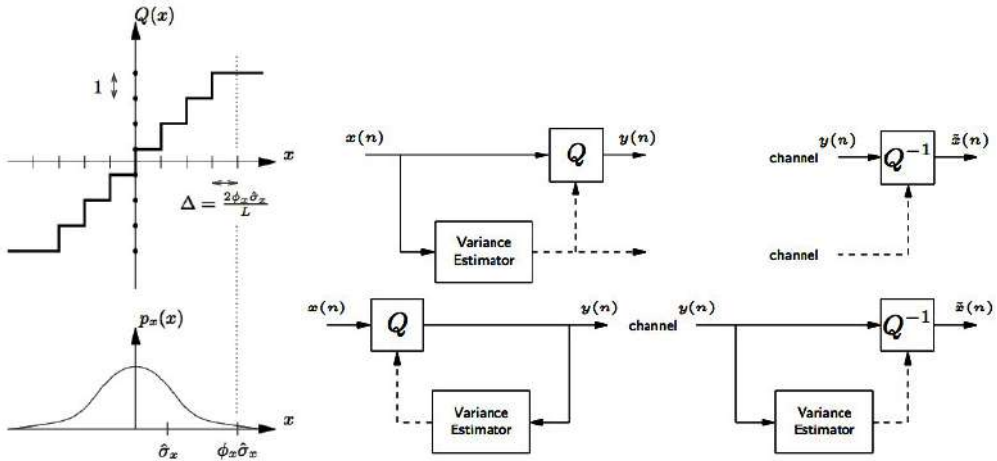


Figura 10.3: Quantizzatore a dinamica variabile (a sinistra) e stima della dinamica $\hat{\sigma}_x^2$ per via diretta (in alto a ds.) o backward (in basso) - tratto da <http://cnx.org/content/m32074/latest/>

se realizzata mediante una formula ricorsiva, ossia

$$\hat{\sigma}_x^2(n) = \alpha \hat{\sigma}_x^2(n-1) + (1-\alpha) y^2(n)$$

il cui risultato è mostrato in fig. 10.4, dove la linea tratteggiata rappresenta il valore istantaneo di $y^2(n)$, mentre quella continua mostra i valori di $\hat{\sigma}_x^2(n)$ ottenuti in modo ricorsivo.

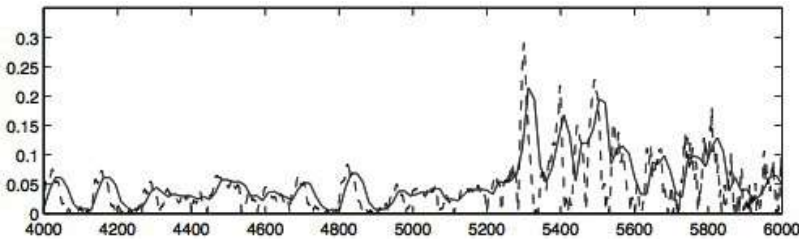


Figura 10.4: Stima ricorsiva backward della varianza $\hat{\sigma}_x^2(n)$ confrontata con $y^2(n)$, per $\alpha = 0.9$

La fig. 10.5 mostra infine i due estremi del codec ADPCM, che rimangono sincronizzati anche nel caso di saturazione del quantizzatore adattativo.

Il miglioramento della qualità ottenibile ha determinato la possibilità di ridurre il numero di bit (e di conseguenza di livelli) del quantizzatore a 5, 4, 3, 2 bit/campione, a cui corrispondono rispettivamente velocità di codifica di 40, 32, 24, 16 kbps. Questi sono i valori a cui si riferisce lo standard ITU-T G.721, successivamente confluito nel G.726.

10.1.1.3 Codifica per sottobande

Anche la raccomandazione G.722 è basata sulla codifica ADPCM, ma applicata ad un segnale audio con banda più larga, riproducendo correttamente frequenze fino a 7 KHz. Ciò avviene dopo aver suddiviso le componenti frequenziali del segnale in due

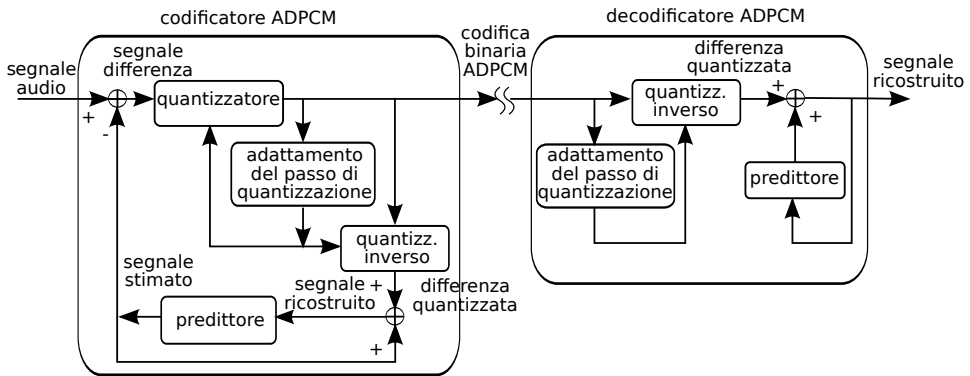


Figura 10.5: Architettura di un codec ADPCM

sottobande come mostrato in fig. 10.6, mediante una coppia di filtri passa-basso e passa-alto con frequenza di taglio comune a 3.5 KHz.

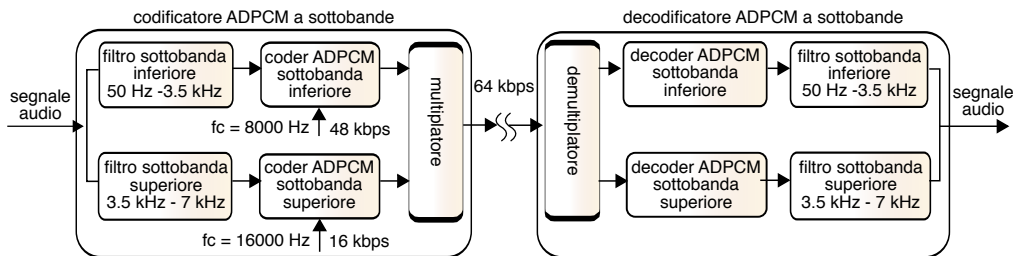


Figura 10.6: Architettura di un codec ADPCM a sottobande

Il canale relativo alla semi banda superiore è campionato a frequenza di 16 kHz, mentre l'altro è praticamente equivalente al segnale in banda telefonica preso in esame fino ad ora. Per entrambi i canali è applicata la codifica ADPCM, ma le rispettive velocità sono impostate in modo differente, dando più importanza alla componente di bassa frequenza, percettivamente più rilevante: ad esempio, si può scegliere di assegnare 16 kbps alle alte frequenze e 48 alle basse, ottenendo un totale di 64 kbps per una qualità risultante migliore del G.711, in quanto ora si opera su di un segnale a larga banda, con risultati idonei ad applicazioni come la videoconferenza.

Lo stesso schema di codifica per sottobande più ADPCM è proposto anche dallo standard G.726, ma applicato ad un segnale a qualità telefonica, offrendo le velocità di 40, 32, 24 e 16 kbps.

10.1.2 Codifica basata su modello

I metodi fin qui discussi non tengono particolarmente conto della natura del segnale da codificare. Restringendo viceversa il campo al solo caso di segnale vocale, le conoscenze relative alla sua particolare modalità di produzione possono essere usate per ridurre le informazioni da trasmettere, costituite ora dai parametri che caratterizzano un suo modello di generazione. Essendo questo il dominio storico delle scienze linguistiche e fonetiche, svolgiamo una piccola digressione in tal senso.

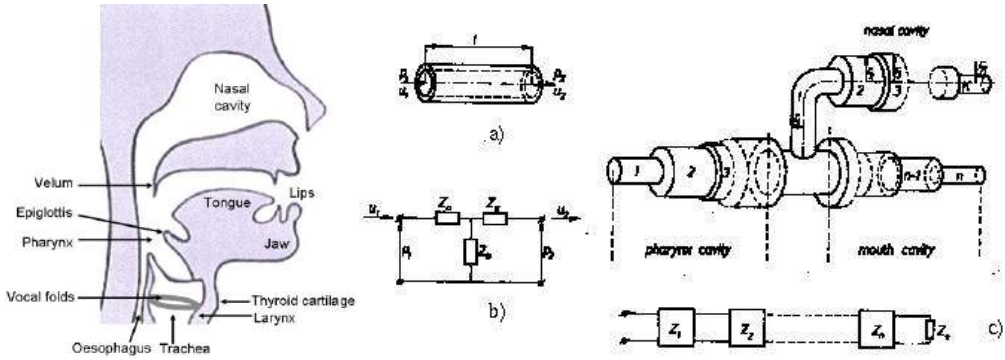


Figura 10.7: Rappresentazione schematica del tratto vocale e relativo modello a tubi

10.1.2.1 Produzione del segnale vocale

L'apparato fonatorio viene idealizzato per mezzo del cosiddetto *modello a tubi* (vedi fig. 10.7), in cui sia il *tratto vocale* (compreso tra le corde vocali e le labbra) che il *tratto nasale* (dal velo alle narici) sono pensati come una concatenazione di tubi di diversa sezione. Nei suoni vocalici la muscolatura della *laringe* determina la chiusura periodica delle *corde vocali*, interrompendo il flusso d'aria che le attraversa, e dando origine ad un *segnale di eccitazione* anch'esso periodico detto *onda glottale*, la cui frequenza è detta *pitch*³; la differenza di area delle diverse sezioni del tratto vocale provoca un *disadattamento di impedenza acustica*⁴ e la conseguente formazione di onde riflesse (vedi fig. 10.8), che per lunghezze d'onda in relazione intera con la lunghezza del tratto vocale, determinano fenomeni di *onde stazionarie*, ovvero di *risonanze*⁵, le

³[http://en.wikipedia.org/wiki/Pitch_accent_\(intonation\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Pitch_accent_(intonation))

⁴Si applica in pratica la stessa teoria valida per le linee elettriche, in cui al posto di tensione e corrente, ora si considerano rispettivamente pressione p e velocità u

⁵Si tratta di un fenomeno in qualche modo simile a quello che si verifica soffiando in una bottiglia, e producendo un suono che dipende dalla dimensione della stessa.

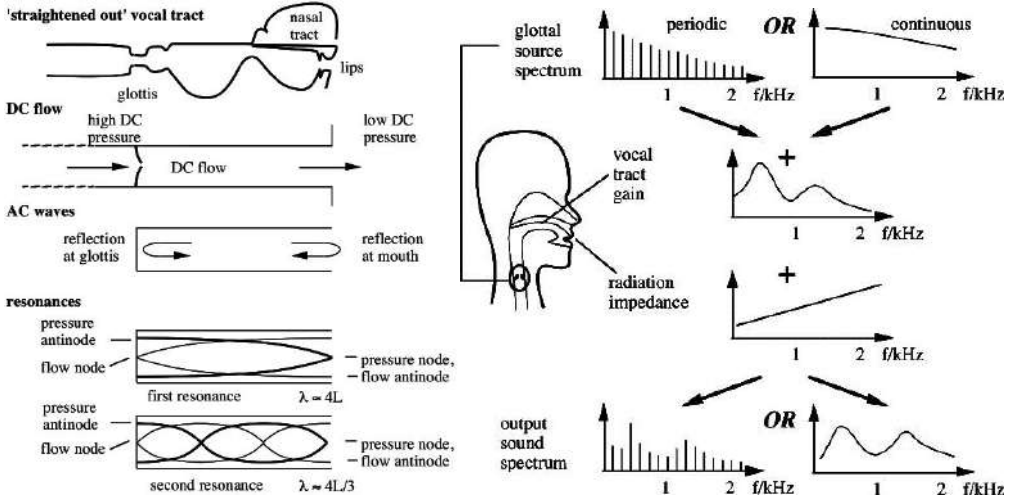


Figura 10.8: Natura delle risonanze del tratto vocale e loro effetto filtrante sull'onda glottale

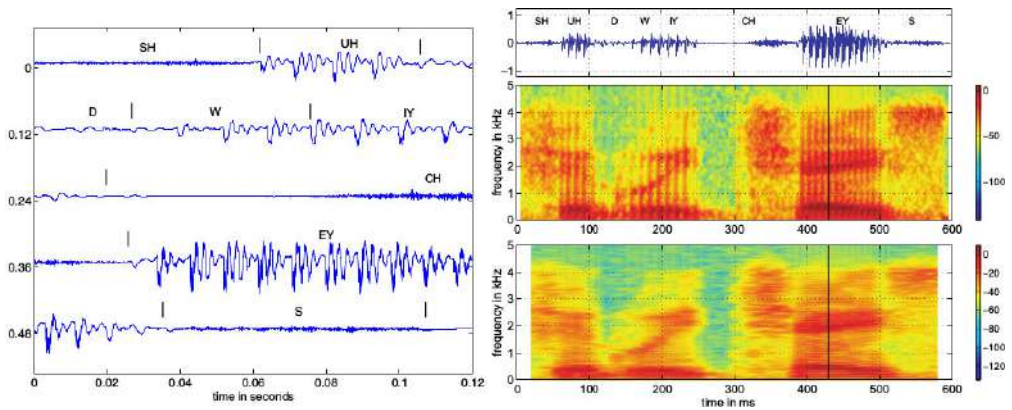


Figura 10.9: Forma d'onda e spettrogramma per la frase *should we chase?*

cui frequenze sono indicate in fonetica come *formanti*. Il verificarsi di tali risonanze genera un *effetto filtrante* che modifica lo spettro dell'onda glottale, producendo così il *timbro* corrispondente ai diversi suoni della lingua⁶. Il tratto vocale termina quindi con l'apertura delle labbra, che nel modello a tubi corrisponde ad una *impedenza di radiazione* che produce un effetto di derivata, e dunque un'*enfasi* delle alte frequenze per lo spettro complessivo del parlato. Infine, il modello si assume valido anche per i suoni *fricativi*, prodotti anziché mediante le corde vocali, mediante una occlusione che causa *turbolenza* nel flusso d'aria.

Caratteristiche tempo-frequenza del segnale vocale La parte sinistra di fig. 10.9 mostra la forma d'onda relativa alla frase inglese “should we chase?” (*dovremmo inseguire?*) assieme alla relativa trascrizione fonetica⁷, mettendone in luce il carattere quasi periodico in corrispondenza delle vocali e quello tipo rumore per le consonanti, nonché la diversa durata dei vari suoni, l'assenza di confini temporali precisi tra gli stessi, e la diminuzione del periodo di pitch a fine frase, corrispondente all'intonazione crescente tipica di una frase interrogativa. In particolare, notiamo come per i suoni vocalici i singoli periodi di pitch siano caratterizzati da una brusca discontinuità prodotta dall'onda glottale, seguita da oscillazioni smorzate legate alle risonanze del tratto vocale.

Il segnale viene quindi campionato a 10 KHz e suddiviso in *finestre di analisi*, per le quali vengono calcolate delle DFT, la cui densità di energia in dB è riprodotta *in verticale* mediante una scala cromatica come mostrato negli *spettrogrammi*⁸ presenti al lato destro di fig. 10.9, che permettono di valutarne la variabilità temporale delle

⁶I diversi suoni vocalici e/o consonantici (detti *fonemi*) sono prodotti mediante diverse posture articolatorie (la posizione di lingua, mascella e labbra), ovvero diversi profili d'area del tratto vocale, nonché l'attivazione o meno del tratto nasale. Presso <https://www.youtube.com/watch?v=6dAEE7FYQfc> è mostrato il video di una *risonanza magnetica* effettuata durante l'eloquio. In definitiva ai diversi fonemi corrispondono differenti frequenze formanti, e dunque una diversa risposta in frequenza.

⁷I simboli usati sono noti come *arphabet*, vedi <http://en.wikipedia.org/wiki/Arpabet>, e la pronuncia dovrebbe essere qualcosa del tipo *sciuduiceis*.

⁸Tratti da <https://books.google.it/books?id=Z60tr8Hj1wSc>

caratteristiche spettrali. Il differente aspetto dei due diagrammi è dovuto alla diversa lunghezza di finestra, pari rispettivamente a 10 e 40 msec per il grafico superiore ed inferiore⁹. In entrambe le rappresentazioni sono ben evidenti le *traiettorie delle formanti*, che evolvono in modo *continuo*, coerentemente con la velocità di articolazione del parlante.

10.1.2.2 Codifica a predizione lineare - LPC

Il modello di produzione e le caratteristiche illustrate portano a formulare un processo di codifica basato sulla suddivisione del segnale vocale in intervalli (o finestre di analisi) di estensione tra i 10 ed i 30 msec, durante i quali il segnale può essere considerato praticamente stazionario¹⁰, e su tali finestre condurre una *analisi* (o stima) dei parametri del modello, che sono

- il tipo di eccitazione (periodica o caotica), la sua frequenza fondamentale (o *pitch*) se periodica, e la sua intensità;
- i parametri che caratterizzano l'effetto filtrante del tratto vocale.

e quindi trasmettere questi valori, in modo che in ricezione sia possibile riprodurre un segnale simile all'originale mediante un decodificatore del tipo illustrato in fig. 10.10.

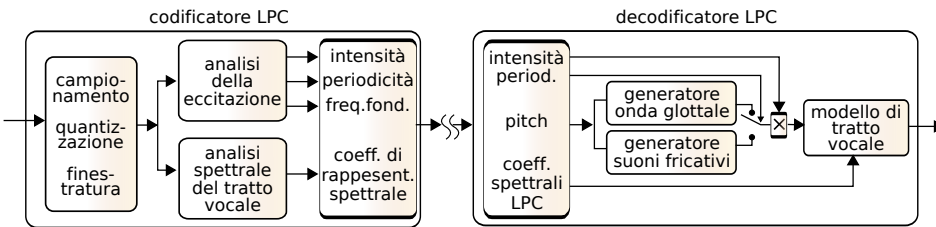


Figura 10.10: Schema di codificatore e decodificatore LPC

Il modello *a tubi* (e quindi basato sulle risonanze) del tratto vocale illustrato in fig. 10.8 si presta a considerare un filtro *di sintesi* di tipo numerico e *ricorsivo* o IIR (§ 5.3.2.2) di ordine p , che calcola il valore dei campioni di uscita y_n a partire da una combinazione lineare di p campioni passati $\hat{y}_n = \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i}$, a cui sommare un *errore di predizione* e_n che rappresenta il processo di eccitazione, ovvero

$$y_n = \hat{y}_n + e_n = \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} + e_n \quad (10.1)$$

Per ogni finestra di analisi i coefficienti a_i (o coefficienti LPC del predittore di ordine p) si ottengono come quelli che rendono *minimo* il valore atteso dell'errore quadratico

$$E \{e_n^2\} = E \left\{ \left(y_n - \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} \right)^2 \right\}$$

⁹Una finestra di 10 msec ha durata comparabile con il periodo di pitch, e ciò produce l'effetto a striature *verticali* del primo diagramma, meno pronunciato verso la fine, dove il pitch è più elevato. Una finestra di 40 msec si estende su più periodi di pitch, e determina una migliore risoluzione in frequenza, cosicché nel diagramma inferiore si possono notare delle striature *orizzontali* che corrispondono alle *armoniche* della frequenza di pitch.

¹⁰Una sillaba può estendere la sua durata tra 10-15 msec per le vocali *ridotte*, fino a più di 100 msec per quelle *accentate*.

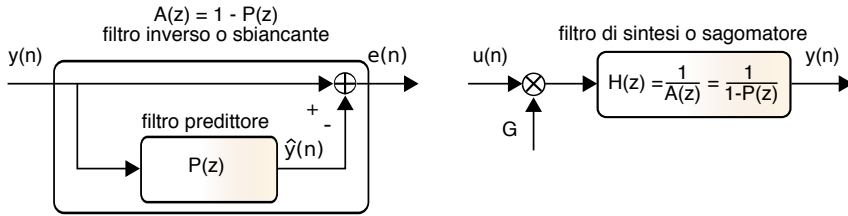


Figura 10.11: Filtro predittore, filtro inverso associato, e filtro di sintesi LPC

(ovvero, l'energia dell'errore), e sono individuati eguagliando a zero l'espressione delle derivate parziali di $E \{e_n^2\}$ rispetto ai coefficienti a_j . Scriviamo dunque

$$\frac{\partial}{\partial a_j} E \left\{ \left(y_n - \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} \right)^2 \right\} = 2E \left\{ \left(y_n - \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} \right) y_{n-j} \right\} = 0$$

da cui si ottiene

$$E \{ y_n y_{n-j} \} = \sum_{i=1}^p a_i E \{ y_{n-i} y_{n-j} \} \quad (10.2)$$

Il valore atteso $E \{ y_{n-i} y_{n-j} \}$ viene *stimato*¹¹ come quello della autocorrelazione discreta calcolata sui campioni di segnale delimitati dalla finestra di analisi corrente, ovvero

$$\begin{aligned} E \{ y_{n-i} y_{n-j} \} &\doteq \mathcal{R}_{yy}(|i-j|) \quad \text{e ponendo } k = |i-j| \\ &= \mathcal{R}_{yy}(k) = \sum_{n=1}^{N-k} y_n y_{n+k} \end{aligned} \quad (10.3)$$

dove l'estremo superiore della sommatoria varia in modo da includere solo i campioni effettivamente presenti nella finestra¹². La (10.3) permette di riscrivere (10.2) come

$$\mathcal{R}_{yy}(j) = \sum_{i=1}^p a_i \mathcal{R}_{yy}(|i-j|)$$

che valutata per $j = 1, \dots, p$ individua un sistema di p equazioni¹³ in p incognite

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}(1) \\ \mathcal{R}(2) \\ \vdots \\ \mathcal{R}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}(0) & \mathcal{R}(1) & \cdots & \mathcal{R}(p-2) & \mathcal{R}(p-1) \\ \mathcal{R}(1) & \mathcal{R}(0) & \cdots & \mathcal{R}(p-3) & \mathcal{R}(p-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{R}(p-1) & \mathcal{R}(p-2) & \cdots & \cdots & \mathcal{R}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

che può essere risolto nei termini dei coefficienti a_i mediante metodi particolarmente efficienti¹⁴; ed i coefficienti utilizzati dal decodificatore per applicare la (10.1).

¹¹Sottintendendo una ipotesi di stazionarietà ed ergodicità non vera, ma molto comoda per arrivare ad un risultato.

¹²La (10.3) è effettivamente una stima della *autocorrelazione* del segnale a durata limitata che ricade nella finestra di analisi, mentre l'inclusione nella sommatoria di un numero di termini pari al numero di campioni disponibili porta ad un diverso tipo di risultato, detto *metodo della covarianza*, ed un diverso modo di risolvere il sistema (10.4).

¹³dette di *Yule-Walker*, vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Equazioni_di_Yule-Walker

¹⁴In base alle assunzioni adottate, $\mathcal{R}_{yy}(j)$ risulta una funzione pari dell'indice j , e la corrispondente matrice dei coefficienti viene detta di *Toeplitz*, consentendone l'inversione mediante il metodo di *Levinson-Durbin* (vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Levinson_recursion), che presenta una complessità $O(n^2)$ anziché $O(n^3)$, come sarebbe necessario per invertire la matrice dei coefficienti.

Il filtro autoregressivo che esegue il calcolo $\hat{y}_n = \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i}$ è indicato come *predittore*, ed è associato ad un polinomio¹⁵ $P(z) = \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}$; viceversa il filtro FIR che valuta l'errore di predizione (o *residuo*) $e_n = y_n - \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i}$ è indicato come *filtro inverso* o *sbiancante*, viene associato al polinomio $A(z) = 1 - P(z)$, ed è mostrato nel lato sinistro della fig. 10.11. Indicando ora con $G \cdot u_n$ una *codifica* del residuo e_n , il segnale di partenza può essere (quasi) ri-ottenuto come mostrato nella parte destra della fig. 10.11, ossia facendo passare e_n attraverso il filtro IIR $H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1-P(z)}$.

Dato che, in base a considerazioni che non svolgiamo, e_n è caratterizzato da una densità spettrale *bianca*, $|H(z)|^2$ (calcolato per $z = e^{i\omega}$) rappresenta una vera e propria *stima spettrale* del segnale di partenza, come mostrato in fig. 10.12 per diversi valori di p , verificando che per suoni vocalici si ottengono risultati accettabili già per valori di p tra 8 e 14, mentre per le fricative l'ordine può essere ancora inferiore.

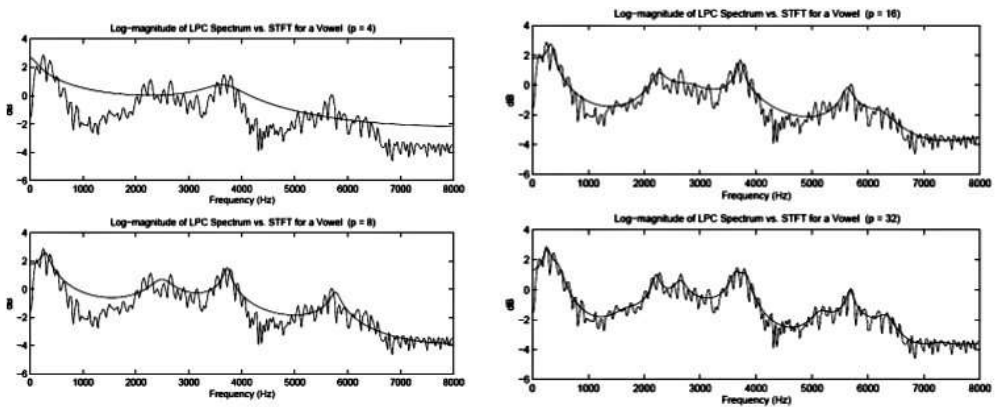


Figura 10.12: Approssimazione spettrale LPC per ordine di predizione p pari a 4, 8, 16 e 32

Stima del periodo di pitch Resta ora da illustrare il modo di decidere se la finestra di analisi contenga un suono sordo o sonoro, e nel secondo caso, il suo periodo. Osserviamo che *in media* la frequenza di pitch risulta pari a circa 120 e 210 Hz nel caso rispettivamente di voci maschili e femminili, con una estensione che varia approssimativamente da metà al doppio del pitch medio¹⁶. La stima del periodo di pitch può essere realizzata a partire dalla funzione di autocorrelazione a breve termine (10.3), mostrata nella colonna di destra della figura che segue, a fianco delle finestre di segnale su cui è stata calcolata¹⁷, per un suono vocalico (sopra) e fricativo (sotto). Come evidente, nel caso del suono vocalico l'autocorrelazione presenta un primo picco a 9 msec ed un

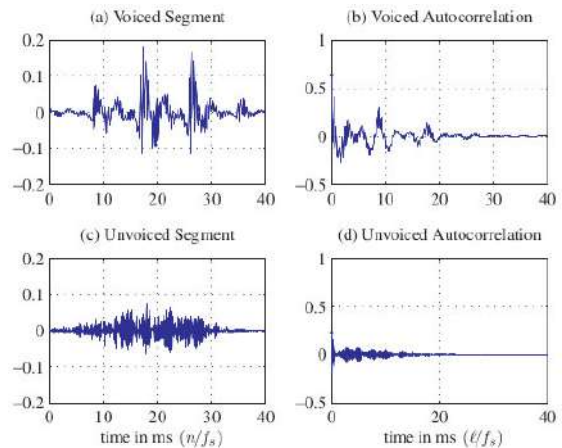
¹⁵Una breve analisi della relazione tra DFT e trasformata *zeta* è svolta al § 4.5.1, ma vedi anche § 5.3.2.2.

¹⁶Il pitch varia durante la pronuncia di una frase in accordo alla sua semantica, alla lingua, ed all'enfasi emotiva impressa dal parlatore. Da un punto di vista musicale, la dinamica dei valori (da metà al doppio) si estende quindi su di un intervallo di due ottave. L'intera gamma dei registri dell'opera si differenzia per 22 semitoni, dal Mi2 del basso al Do4 del soprano, ovvero un rapporto di frequenze pari a 3,6.

¹⁷In realtà prima del calcolo della autocorrelazione il segmento di segnale è stato moltiplicato per una finestra di Hamming, che provoca lo smussamento visibile ai bordi.

secondo a 18 msec, corrispondenti al periodo di pitch ed al suo doppio; viceversa nel caso del suono simile al rumore, non sono visibili picchi, come da aspettarsi nel caso di una segnale incorrelato. Pertanto, l'auto-correlazione può essere usata per indicare la presenza o meno di un suono vocalico, e nel caso affermativo, stimare il suo pitch.

Nella pratica per i suoni sordi si ottengono buoni risultati di sintesi usando come eccitazione un vero e proprio rumore bianco; d'altra parte, per i suoni sonori l'uso di forme d'onda impulsive con periodo pari al pitch stimato, sebbene capaci di produrre un bit rate ridicolo fino a 2.4 kbps, non fornisce risultati particolarmente utilizzabili, producendo un voce piuttosto robotica. Per questo motivo, si sono sviluppate le tecniche seguenti.



10.1.2.3 Predizione lineare ad eccitazione residuale - RELP

Per ovviare alla sovra-semplificazione dello schema di sintesi riportato in fig. 10.10, dopo aver svolto l'analisi spettrale LPC il residuo di predizione relativo alla finestra di analisi viene effettivamente calcolato, applicando poi allo stesso una tecnica di codifica di forma d'onda¹⁸: questo modo di operare è indicato come codifica RELP (*Residual Excited LP*).

Analysis by synthesis - ABS Anziché *calcolare* il residuo di predizione, codificarlo, e trasmetterlo in tale forma, la tecnica di *analisi via sintesi* adotta una tecnica *ad anello chiuso*, cercando di trovare quale segnale di eccitazione¹⁹ fornire al filtro di sintesi in modo che il risultato sia quanto più possibile simile al segnale originale (vedi fig. 10.13); i parametri del filtro di sintesi e della eccitazione sono quindi trasmessi al decoder. La funzione di minimizzazione opera dunque una vera e propria *ricerca tra i possibili segnali* di eccitazione.

¹⁸In questo modo si evita anche di dover operare una esplicita decisione *sonoro/sordo*, visto che in realtà le due fonti di eccitazione possono essere presenti contemporaneamente, come per i cosiddetti suoni *affricati*.

¹⁹Generato per tentativi, oppure da scegliere in un *dizionario* di sequenze di eccitazione già codificate.



Figura 10.13: Schema di codifica vocale ABS - *Analysis by Synthesis*

Filtraggio percettivo Sempre in fig. 10.13 si mostra come il processo di minimizzazione prenda in considerazione un segnale di errore ottenuto filtrando l'errore effettivo mediante un filtro di *pesatura percettiva*, il cui andamento frequenziale è sostanzialmente *reciproco* rispetto a quello stimato del segnale²⁰ (vedi fig. 10.14), in modo da attenuare la rilevanza dell'errore di predizione nelle regioni dove c'è più segnale²¹ ed esaltarla invece nelle regioni con meno segnale, sfruttando così il fenomeno percettivo noto come *mascheramento uditivo* (vedi pag. 304). Anche se per questa via l'energia totale del rumore è maggiore, l'effetto soggettivo è migliore.

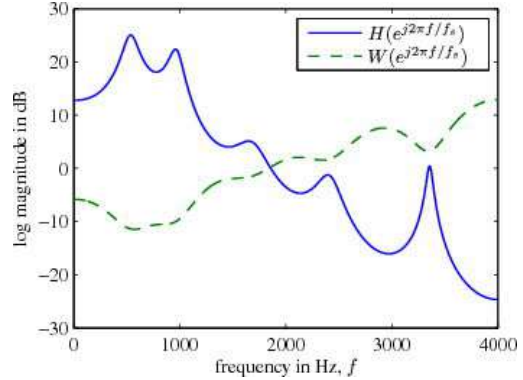


Figura 10.14: Spettro LPC vocalico e relativo filtro di pesatura percettiva dell'errore di predizione

Multi pulse linear prediction - MPLP

Lo schema operativo suggerito dalla tecnica ABS è stato inizialmente realizzato cercando di *costruire* la sequenza di eccitazione ottima (ossia in grado di minimizzare l'errore pesato percettivamente) come una sequenza di pochi impulsi sparsi, decidendone uno alla volta. Tale approccio prevede dunque di trovare l'ampiezza e posizione *ottime* per un unico primo impulso, quindi per un secondo (con il primo fisso), e così via, fino al numero di impulsi desiderati, tipicamente 4-5 ogni 5 msec, ottenuti suddividendo una finestra di 20 msec in quattro sotto-trame, ognuna con 40 campioni, se $f_c = 8000$ Hz.

Regular pulse excitation with long-term prediction - RPE-LTP o GSM 6.10 Il metodo MPLP presentava una complessità proibitiva, ma ha dato luogo alla versione semplificata RPE-LTP usata inizialmente nella telefonia GSM per fornire una velocità di 13 kbps. In questo caso, dopo aver determinato la posizione del primo impulso nella sottofinestra ne sono piazzati altri 9, ad intervalli regolari (un campione sì e tre no), in modo che l'ottimizzazione riguardi solo i valori delle ampiezze.

Rispetto allo schema di fig. 10.13 viene inoltre aggiunto un *predittore a lungo termine* o LTP, utilizzato per rimuovere dal segnale di eccitazione l'eventuale periodicità caratteristica dei suoni vocalici, e stimato a partire da sotto-finestre consecutive (vedi fig. 10.15). Il filtro LTP in essenza consiste in un semplice ritardo pari al periodo di pitch

²⁰Il filtro di pesatura percettiva si ottiene a partire dagli stessi coefficienti di predizione a_i che descrivono l'andamento spettrale della finestra di segnale, definendo la sua trasformata zeta come $W(z) = \frac{A(z/a_1)}{A(z/a_2)} = \frac{H(z/a_2)}{H(z/a_1)}$ in cui, se $\alpha_{1,2}$ sono numeri reali, i poli di $W(z)$ si trovano alle stesse frequenze di quelli di $H(z)$ ma con raggio α_2 volte maggiore, così come gli zeri di $W(z)$ hanno modulo α_1 volte maggiore. Scegliendo $0 < \alpha_{1,2} < 1$ e $\alpha_1 > \alpha_2$ per la $W(z)$ si ottiene l'effetto desiderato, e mostrato in fig. 10.14

²¹La procedura di minimizzazione determina una eccitazione tale da rendere bianco il residuo al suo ingresso; dato però che questo ha subito il filtraggio da parte di $W(z)$, significa che le frequenze attenuate da $W(z)$ sono in realtà *enfattizzate* nel segnale di errore reale.

(e dunque $\gg p$), ed il predittore LTP relativo (vedi lo schema di decodifica) *ripropone* in uscita una copia ritardata ed attenuata dell'uscita stessa. Il codificatore GSM pertanto determina ritardo e attenuazione dell'LTP in base all'analisi del residuo di predizione LPC²², e lo usa per reintrodurre la componente periodica nella sequenza RPE di cui si sta valutando l'idoneità. Una volta che al residuo LPC viene sottratta la componente predicabile per tramite del LTP, ciò che rimane risulta effettivamente assimilabile ad un rumore, ed è indicato anche come *processo di innovazione*.

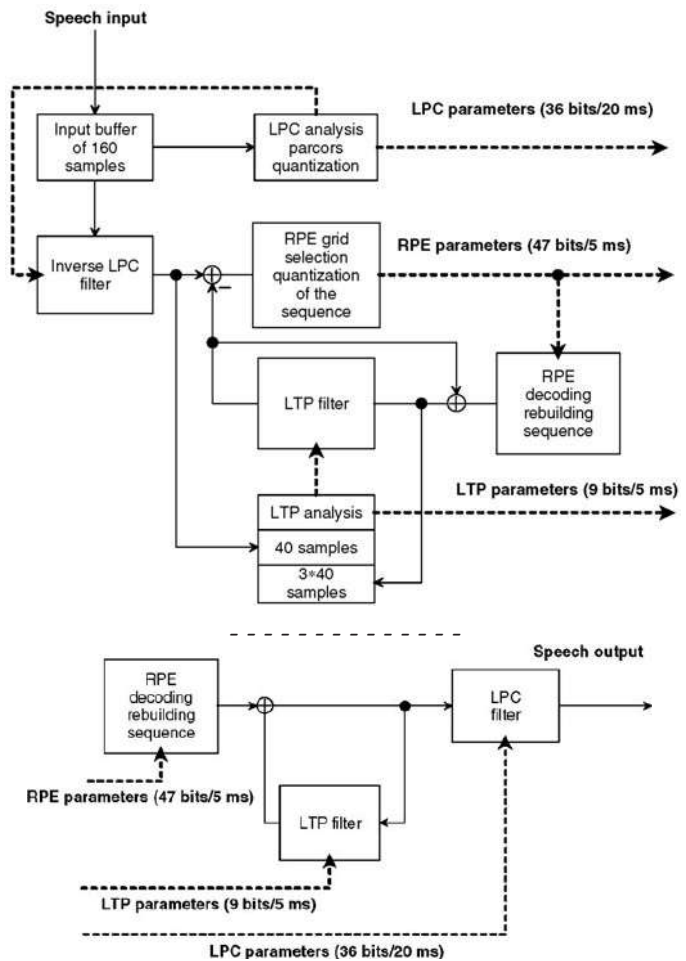


Figura 10.15: Codifica e decodifica GSM 6.10 *full rate* o RPE-LTP

10.1.2.4 Quantizzazione vettoriale dell'eccitazione

Dato che la codifica della sequenza di eccitazione impegna la maggior parte dei bit da trasmettere, si è fatta strada l'idea di... non codificarla affatto! Invece, viene realizzato un dizionario o *codebook* di *possibili* sequenze di eccitazione, e per ciascuna delle quali viene misurata *la distanza* tra essa e la sequenza *vera*. Ciò che viene trasmesso è quindi *l'indice* della codeword di minima distanza rispetto alla sequenza di eccitazione, e l'intero procedimento prende il nome di *quantizzazione vettoriale*²³.

²²In effetti, mentre i coefficienti spettrali (denominati *parcor* in questo caso) sono determinati a partire dall'analisi dell'intera finestra di 20 msec, l'eccitazione RPE ed i parametri LTP sono ottenuti a partire da *sottofinestre* di 40 campioni, pari a 5 msec.

²³Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_quantization

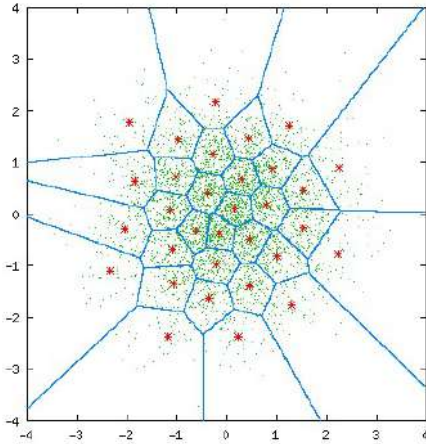


Figura 10.16: Regioni di decisione e centroidi per un quantizzatore vettoriale bidimensionale

La costruzione del codebook è ottenuta *partizionando* la distribuzione campionaria dei vettori in più regioni di decisione come quelle mostrate nell'esempio di fig. 10.16, in modo che ciascun vettore possa essere classificato²⁴ come interno ad una di esse, e venire quindi rappresentato dal *centroide* (i punti rossi) associato alla regione. I centroidi ed i confini di decisione sono determinati mediante un procedimento iterativo tale da minimizzare l'errore quadratico medio di rappresentazione²⁵.

Essere rappresentata, anziché da tutti i suoi campioni, dal solo indice della *codeword* del centroide più vicino: al solito, utilizzando M bit per rappresentare l'indice, il codebook sarà formato da 2^M diverse codeword. Oltre al codebook utilizzato per rappresentare le sequenze di innovazione, la codifica del segnale vocale si può avvantaggiare anche di un secondo codebook, usato per approssimare il vettore dei possibili coefficienti spettrali.

I valori che descrivono le sequenze di eccitazione (vettori) associate ai centroidi del *codebook* sono noti anche al lato di ricezione, in modo che ogni particolare sequenza possa

10.1.2.5 Predizione lineare ad eccitazione codificata - CELP

La fig. 10.17 mostra lo schema realizzativo di un codificatore CELP, in cui sono evidenziati il filtro di predizione a lungo termine ed il filtro LPC, stimati in modalità *ad anello aperto*, ed il *filtro percettivo* che fa in modo che la densità spettrale dell'errore di predizione sia concentrata nelle regioni dove è presente segnale.

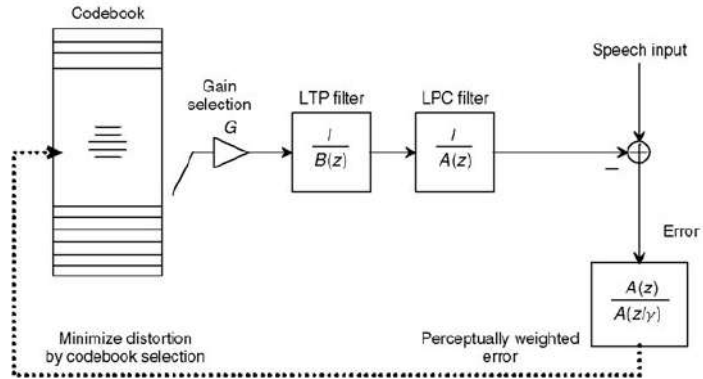


Figura 10.17: Codificatore e decodificatore CELP

Per ogni codeword di eccitazione selezionata dal codebook, e per il guadagno associato, viene calcolata l'energia dell'errore ottenuto, ed il risultato confrontato con

²⁴Per questa classificazione, così come per poter definire l'insieme dei centroidi, occorre che sia definita una funzione di *distanza* tra vettori.

²⁵Vedi <http://www.data-compression.com/vq.html> (al 11/2021 non sembra rispondere), ma anche la nota 26 a pag. 100, così come https://en.wikipedia.org/wiki/K-means_clustering

quello ottenibile mediante le altre codeword, finché non si trova la codeword che minimizza l'errore. Ovviamente questo modo di procedere è estremamente oneroso, ma si sono trovati metodi di ricerca più efficienti adottando tecniche di costruzione del codebook come combinazione di sequenze elementari, dando luogo alla famiglia dei codificatori *algebrici* o ACELP²⁶.

D'altra parte, anche l'identificazione del LTP può essere ricondotta ad una ricerca ad anello chiuso, stavolta nell'ambito di un *codebook adattivo*, costruito a partire dalla precedente sequenza di eccitazione ottima, replicata in forma traslata di un campione alla volta, come illustrato in fig. 10.18,

che mostra appunto l'uso della eccitazione per la trama precedente per popolare il codebook adattivo: da questo viene quindi individuata la codeword I_a ed il guadagno G_a ottimi, e quindi individuata la codeword di innovazione I_s e G_s ottimi, riferiti ad un codebook detto *stocastico* perché costituito da sequenze pseudo casuali. Infine, in fig. 10.18 viene mostrato come anche i coefficienti spettrali LPC sono trasmessi mediante una codeword (LSP o *line spectrum pair*) derivata da un processo di quantizzazione vettoriale. Possiamo elencare i seguenti standard che adottano una tecnica di questo tipo:

- Federal Standard 1016 (4800-16000 bit/s) CELP
- ITU-T 8-kbit/s G.729 CS-ACELP (*conjugate-structure algebraic CELP*);
- dual-rate multimedia ITU-T G.723.1 a 5.3 kbit/s con ACELP e 6.3 kbit/s con MP-MLQ (*multi-pulse maximum likelihood quantization*);
- ITU-T low-delay CELP 16-kbit/s G.728 - usa finestre di analisi molto brevi e una predizione lineare all'indietro per conseguire un ritardo di 2 msec;

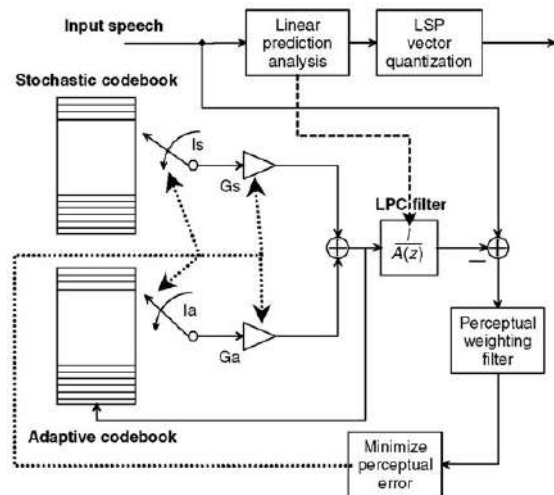
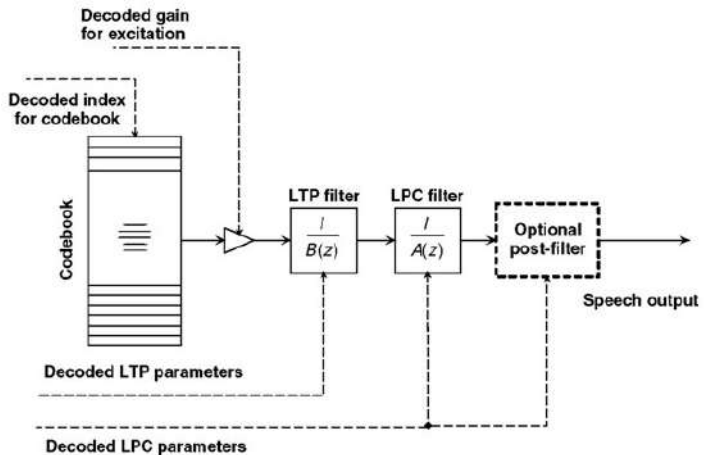


Figura 10.18: Codificatore CELP con codebook adattivo per la predizione a lungo termine

²⁶Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Algebraic_code-excited_linear_prediction

- ETSI enhanced full-rate EFR-GSM e half-rate HR-GSM, con velocità di 12.2 e 5.6 kbps, così come i codec AMR (*adaptive multirate*) e WB-AMR, con velocità da 7.95 a 4.75 kbps;
- Speex²⁷ - un insieme di codecs open source esenti da brevetti e liberamente utilizzabili, con velocità (a banda stretta) da 5,95 a 24,6 kbps, e da 5.75 a 42,4 kbps per segnali con banda di 16 kHz

10.1.3 Codifica psicoacustica

Mentre la codifica di forma d'onda (§ 10.1.1) non fa assunzioni a riguardo della natura del segnale, i metodi esposti al § 10.1.2 sono tutti fortemente orientati a rappresentare segnali vocali. Viceversa, il gruppo di lavoro MPEG di ISO si è dedicato ad individuare metodi di codifica idonei alla trasmissione di segnali multimediali di natura qualsiasi, come ad esempio brani musicali. Inoltre, i vincoli relativi al basso ritardo necessario ad assicurare un buon grado di interattività vengono meno, e si possono dunque intraprendere elaborazioni più complesse, e che richiedono un tempo maggiore. Infine, vengono trascurati rigidi vincoli sulla velocità risultante, accettando invece che questa *vari* nel tempo in funzione del tipo di segnale da rappresentare.

Come vedremo tra breve, per queste tecniche si fa di nuovo uso di una codifica per sottobande, introdotta nella discussione dell'ADPCM, tenendo però anche conto di caratteristiche molto importanti della percezione sonora, il cui sfruttamento è già stato illustrato nella discussione del filtro di pesatura percettiva, ma che ora hanno un impatto ancora maggiore sulla realizzazione del codificatore. I codificatori che fanno uso di queste caratteristiche sono l'MPEG layer 3 o MP3, il *Dolby AC*, e l'*advanced audio coding* o AAC.

Sensibilità uditiva e mascheramento in frequenza La fig. 10.19-a mostra la curva di sensibilità del sistema uditivo, ovvero il livello di intensità minimo perché possa essere percepito un suono: come si vede, questo è molto variabile con la frequenza, per cui anche se il suono B (sinusoide o tono puro) ha la stessa intensità di A non può essere udito, mentre invece A si. Ma ad una analisi più approfondita, si scopre che la presenza di un suono in una determinata regione di frequenza ha l'effetto di

²⁷vedi <http://en.wikipedia.org/wiki/Speex>

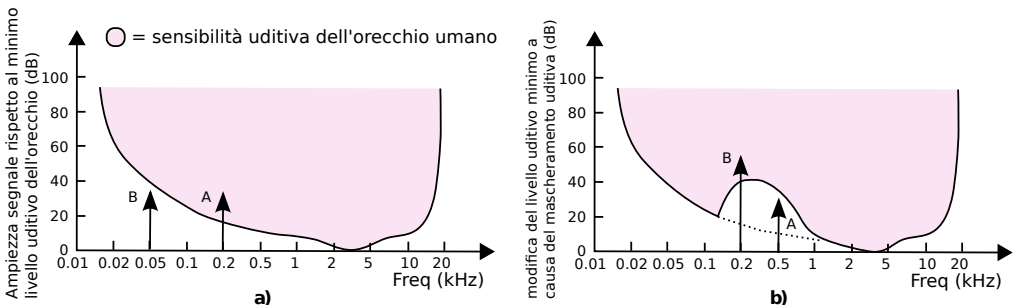


Figura 10.19: a) sensibilità uditiva alle diverse frequenze; b) mascheramento uditivo

modificare la curva di sensibilità per le frequenze vicine, di fatto *mascherando* suoni a frequenze vicini che altrimenti avrebbero superato la soglia di sensibilità, come mostrato in fig. 10.19-b: la presenza del suono B rende A non più udibile.

In realtà, l'estensione in frequenza per cui si verifica l'effetto di mascheramento dipende sia dalla frequenza del tono mascherante (come mostrato dalle curve in fig. 10.20 ottenute con toni a 1, 4 ed 8 kHz) che dalla sua intensità. In particolare, la banda delle frequenze mascherate viene detta *banda critica* ed ha una estensione differente alle diverse frequenze: si trova che sotto i 500 Hz la banda critica ha una estensione di circa 100 Hz, mentre a frequenze superiori aumenta (circa) linearmente per multipli di 100 Hz. Ad esempio, un segnale ad 1 KHz (2×500) produce una banda critica di 200 Hz (2×100), mentre a 5 kHz (10×500) questa vale circa 1 kHz (10×100).

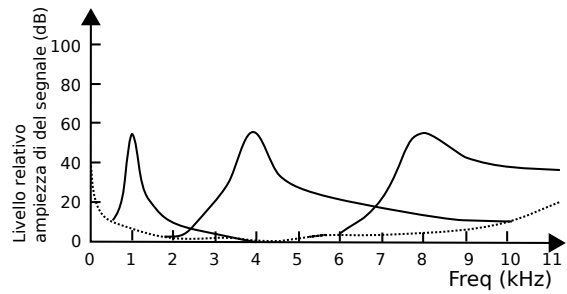


Figura 10.20: Variazione della banda critica in funzione della frequenza

Mascheramento temporale Il secondo effetto percettivo riguarda ancora una modifica alle curve di sensibilità, stavolta in modo *non selettivo* in frequenza, ma che coinvolge tutte le frequenze: si verifica infatti che dopo aver udito un suono forte, per il tempo necessario all'estinzione del suono e che tipicamente dura qualche decina di millisecondi (vedi fig. 10.21), l'orecchio non è più in grado di percepire suoni con intensità minore a quello che si sta estinguendo.

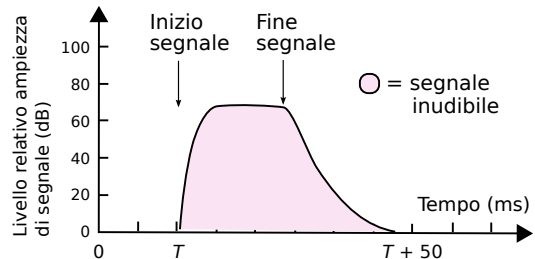


Figura 10.21: Mascheramento temporale

MPEG layer 3 Il gruppo di lavoro MPEG di ISO ha definito uno standard di codifica audio basato su tre livelli di complessità (e potere di compressione) crescente, ed il terzo (o MP3) è quello di gran lunga più popolare, anche grazie alla diffusione che ha avuto via Internet. Lo schema di funzionamento di principio è mostrato in fig. 10.22: il segnale campionato in ingresso (a 32, 44.1 o 48 kHz) transita attraverso un *PCM encoder* che esegue un filtraggio²⁸ in 32 sottobande di eguale ampiezza, le cui uscite

²⁸Eseguito mediante un banco di *filtri polifase*, vedi § 5.4 oppure ad es.

http://en.wikipedia.org/wiki/Polyphase_quadrature_filter o

<http://cnx.org/content/m32148/latest/>. Le uscite dei filtri polifase, anche se campionate a frequenza inferiore della velocità di Nyquist, sono esenti da aliasing, che viene cancellato dall'effetto delle altre sottobande.

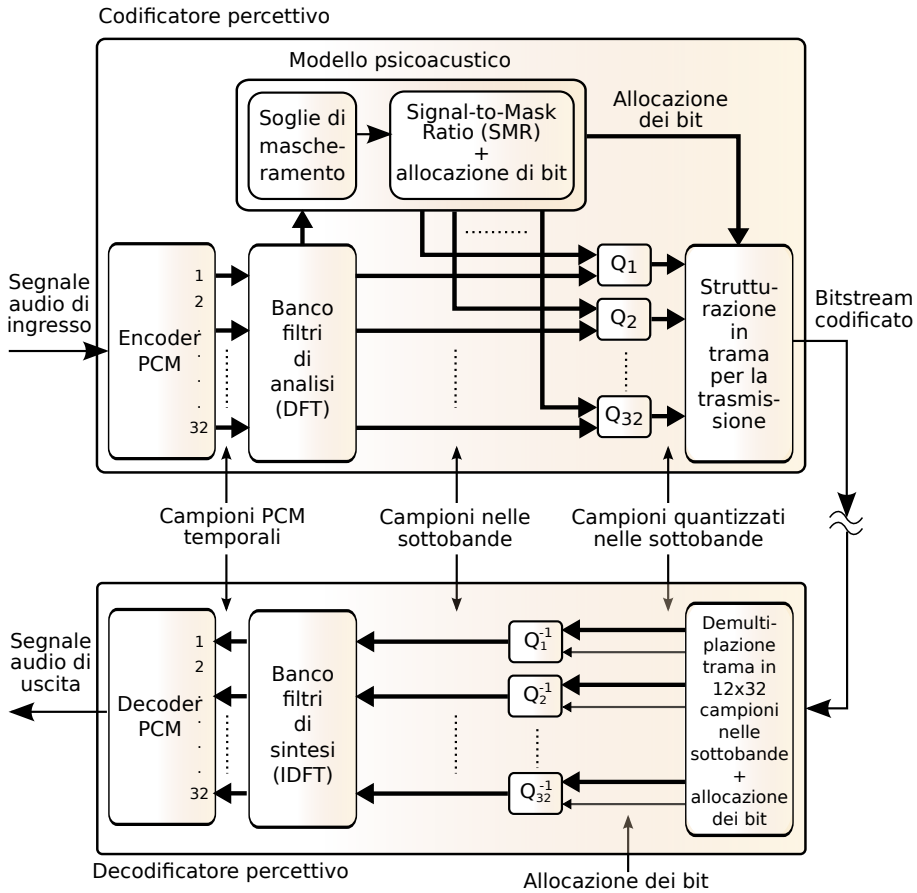


Figura 10.22: Codec percettivo MPEG

sono campionate a frequenza $1/32$ di quella di ingresso. Ogni 384 campioni di ingresso (pari a 12 msec se $f_c = 32$ kHz) sono quindi prodotti $384/32 = 12$ campioni per ogni sotto-banda, e per ognuna di esse è individuato il valore del campione più grande, che contribuisce sia ad impostare la dinamica del quantizzatore per quella banda, sia come parametro per il modello psicoacustico.

Il modello psicoacustico riceve le informazioni prodotte da un banco di filtri di analisi realizzati mediante una MDCT,²⁹ che produce una stima spettrale con risoluzione maggiore di quella del primo banco di filtri, su cui basare le valutazioni di mascheramento uditivo, che a loro volta determinano per ogni sottobanda l'indicazione di un *signal to mask ratio* (SMR), che a sua volta determina *quanti bit utilizzare* (e quindi quanti livelli) per la quantizzazione Q dei campioni relativi alle singole sottobande. Quelle contraddistinte da una maggiore sensibilità (ovvero nelle quali si percepiscono anche suoni deboli) saranno quantizzate con più accuratezza, e quindi con più bit e meno rumore; mentre le sottobande caratterizzate da una sensibilità inferiore possono essere quantizzate con meno bit, almeno finché l'*SNR* di quantizzazione si mantiene

²⁹Vedi http://en.wikipedia.org/wiki/Modified_discrete_cosine_transform

superiore all'*SMR*, dato che in tal caso il rumore è mascherato, e dunque non viene udito. Quindi, i 12 campioni delle 32 sottobande sono quantizzati tenendo conto sia della dinamica effettiva, che del numero di livelli in cui suddividere la dinamica. Infine, viene prodotta una struttura di trama che contiene, oltre ai campioni, anche le informazioni sulla effettiva allocazione dei bit.

Ad una futura edizione, una trattazione più approfondita.

Riferimenti Si citano dei riferimenti essenziali sulla codifica audio, da cui sono anche tratte alcune illustrazioni

- Introduction to Digital Speech Processing, L. R. Rabiner and R. W. Schafer, <https://books.google.it/books?id=Z60tr8Hj1WsC>
- Beyond VoIP Protocols: Understanding Voice Technology And Networking, O. Hersent, J.P. Petit, D. Gurle <http://what-when-how.com/category/voip-protocols/>
- <http://www.data-compression.com/index.shtml>
- Voice Acoustics: an introduction - University of New South Wales, J. Wolfe, M. Garnier, J. Smith <http://www.phys.unsw.edu.au/jw/voice.html>
- Let's build an MP3-decoder! - Björn Edström <http://blog.bjrn.se/2008/10/lets-build-mp3-decoder.html>

10.2 Codifica di immagine

Un segnale di immagine può essere di natura *vettoriale*³⁰, come nel caso di un disegno prodotto da un *plotter*, e rappresentato mediante un linguaggio descrittivo che codifica le operazioni grafiche necessarie alla sua realizzazione; al contrario, un segnale di immagine è detto di tipo *bitmap*, o *raster* (griglia, reticolo), quando è il risultato di un campionamento spaziale, come nel caso di una foto digitale, di un fax, o del risultato di un processo di scansione ottico. Mentre le immagini vettoriali sono pienamente *scalabili* e ridimensionabili senza perdita di definizione, quelle *bitmap* sono ottimizzate per essere riprodotte nelle loro dimensioni originali, avendo già operato un processo di distorsione tale da sfruttare al più possibile le caratteristiche di predicibilità e di sensibilità percettiva.

10.2.1 Dimensioni

Per quanto riguarda le immagini *bitmap*, queste sono definite nei termini di una matrice di elementi di immagine o *PIXEL* (*picture elements*)³¹, che sono l'equivalente bidimensionale dei campioni estratti da un segnale unidimensionale. Per ogni pixel è definito un valore associato alla intensità con la quale deve essere riprodotto: nel caso di immagini a colori, sono necessari tre valori di intensità, per cui una immagine è in realtà descritta da tre matrici, come approfondiamo di seguito.

Sebbene le dimensioni della matrice di pixel possano essere qualunque, nel corso del tempo si sono affermati una serie di valori di riferimento, associati ad altrettante

³⁰Esempi di formati per la grafica vettoriale sono PDF, EPS, PDF, e VRML.

³¹Per alcuni anni, si è usato come sinonimo anche il termine PEL, vedi ad es. <http://www.foveon.com/files/ABriefHistoryofPixel2.pdf>.

	<i>banda</i>	<i>linee</i>	<i>fps</i>	<i>aspetto</i>	<i>colonne</i>	<i>righe</i>	<i>colore</i>
PAL	6 MHz	625	25 int	4:3			
NTSC	5 MHz	525	30 int	4:3			
HDTV		1080		4:3	1440	1152	
				16:9	1920	1152	
PDFA				4:3	1024	768	
4:2:2		625/525	50/60	4:3	720	576/480	360 x
			non int				576/480
4:2:0		625/525	25/30	4:3	720	576/480	360 x
			int				288/240
VGA				4:3	640	480	
SIF		625/525	25/30	4:3	360	288/240	180 x
			non int				144/120
CIF			30	4:3	360	288	180 x 144
			non int				
QCIF			15:7.5	4:3	180	144	90 x 72
			non int				

Tabella 10.1: Griglia dei parametri corrispondenti ai formati video

sigle, legate al tipo di dispositivo che deve poi riprodurre l'immagine, ma anche a quello da cui l'immagine viene acquisita; la tabella 10.1 riassume tali corrispondenze.

Ad esempio, la risoluzione VGA (640 x 480) trae origine dai parametri dello standard NTSC della televisione analogica (§ 25.1), i cui quadri sono composti da una serie di 525 linee, di cui solo 480 visibili: volendo mantenere una risoluzione orizzontale pari a quella verticale, con un rapporto d'aspetto di 4:3, ogni linea deve essere campionata su $480/3 \times 4 = 640$ punti. Già prima dell'uso broadcast della TV digitale, la raccomandazione BT 601³² ha stabilito le regole per la conversione tra standard video differenti, mediante l'uso di una comune frequenza di campionamento del segnale video a 13.5 MHz, individuando così nei $52 \mu\text{sec}$ (³³) di una linea, un numero di $52 \times 10^{-6} \times 13.5 \times 10^6 = 702$ campioni per linea, a cui si aggiungono 9 campioni neri in testa ed in coda per ottenere 720 campioni per linea; per un segnale a 525 linee si ottiene quindi la matrice 720 x 480 del formato 4:2:2, che approfondiremo tra breve.

Le matrici più grandi di 1024 x 768 sono spesso descritte in termini di *Megapixel* (es 1600 x 1200 = 1,9 Mpixel), spesso usati per confrontare la risoluzione (ma non necessariamente la qualità) dei mezzi di fotografia digitale; inoltre, i *grandi formati* traggono origine anche dalla tecnologia delle schede video per computer da un lato, e da quella della televisione ad alta definizione da un altro, come riassunto nella figura 10.23³⁴.

³²Il sito di ITU-R <http://www.itu.int/ITU-R/index.asp?category=information&link=rec-601&lang=en> non consente l'accesso pubblico alla raccomandazione. Un approfondimento può essere svolto presso Wikipedia <http://it.wikipedia.org/wiki/BT.601>.

³³Vedi fig. 25.2 a pag. 860.

³⁴La figura è tratta da Wikipedia, dove possono essere approfonditi gli altri aspetti legati a queste

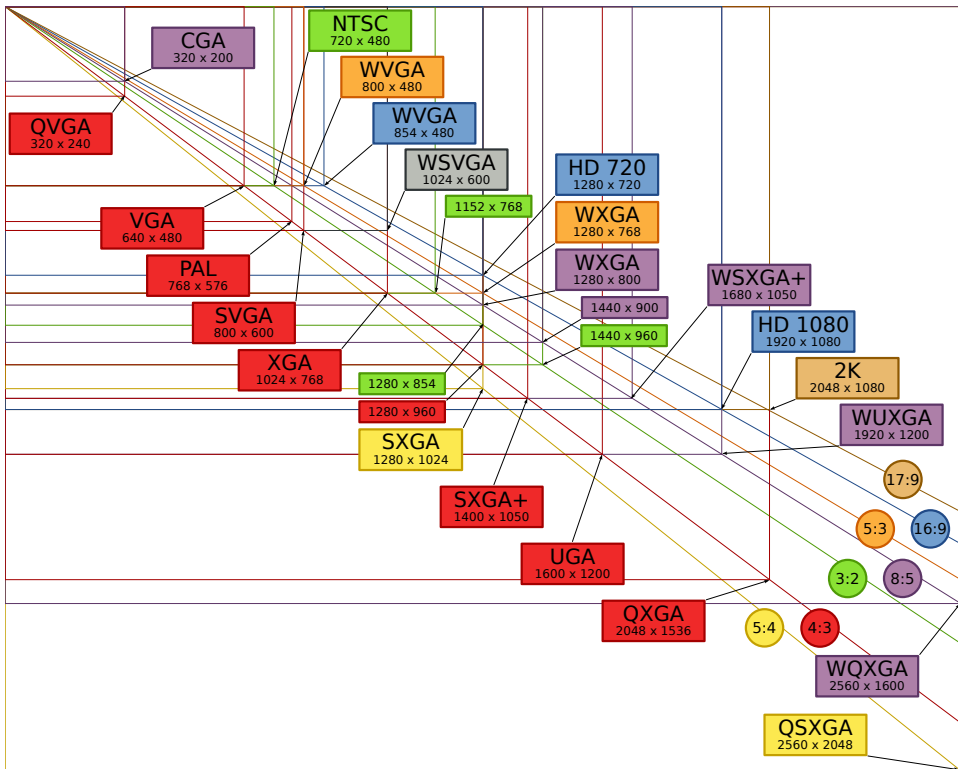


Figura 10.23: Risoluzioni standard o modalità video digitale

Il formato SIF (*source intermediate format*) è ottenuto a partire dal 4:2:2, conservando la metà dei pixel sia in verticale che in orizzontale, e trascurando la metà dei quadri di immagine; il suo uso è orientato alla memorizzazione, e quindi usa una scansione non interlacciata. Il formato CIF (*common intermediate format*) è simile al SIF, tranne per aver perso il riferimento al numero di linee analogiche da cui deriva; il suo uso è orientato ai sistemi di videoconferenza, e da questo sono definiti formati a maggior risoluzione, come il 4CIF ed il 16CIF, equivalenti al 4:2:2 ed all'HDTV. Il formato QCIF (*quarter CIF*) è orientato alla videotelefonata, dimezzando ancora sia la risoluzione spaziale che quella temporale. Da questo è a sua volta derivato il formato SUB-QCIF (o s-QCIF) di 128 x 96 pixel, orientato a collegamenti lenti come quelli via modem.

10.2.2 Spazio dei colori

I dispositivi di acquisizione e riproduzione di immagini a colori operano su tre diverse matrici di pixel, che rappresentano i tre colori di base della *sintesi additiva*, ossia *rosso*, *verde*, e *blu*, o RGB (dalle iniziali inglesi *Red*, *Green* e *Blue*). In figura 10.24 viene mostrato il principio di funzionamento di un *prisma dicroico*, che devia le tre componenti di colore verso tre diversi dispositivi di acquisizione. Variando quindi la proporzione con cui si sommano gli stimoli dei tre colori, si ottiene, oltre al bianco,



Figura 10.24: Prisma dicroico, sintesi cromatica additiva, cubo dei colori

anche qualunque altro colore. Sebbene dalle figure riportate sembra che il bianco risulti dal contributo in parti uguali delle tre componenti RGB, in realtà la scala di grigi della immagine *monocromatica* corrispondente si ottiene calcolando un segnale Y di *luminanza* secondo la formula

$$Y = 0.299 \cdot R + 0.587 \cdot G + 0.114 \cdot B \quad (10.5)$$

che è quella usata per modulare il segnale video analogico³⁵. Come già discusso, in tale ambito la componente di colore viene trasmessa utilizzando due altri segnali, C_b o *crominanza blu* e C_r o *crominanza rossa*, secondo la formula

$$C_b = B - Y \quad \text{e} \quad C_r = R - Y \quad (10.6)$$

Disponendo dei segnali Y , C_b e C_r , si possono riottenere i valori RGB inserendo la (10.5) nelle (10.6), e risolvendo il sistema di tre equazioni in tre incognite risultante.

Segnale video composito Al § 25.1 abbiamo descritto come nel segnale televisivo analogico la componente di colore sia trasmessa assieme alla luminanza, su di una diversa portante, con modulazione di ampiezza in fase e quadratura. In realtà, per diversi motivi le componenti trasmesse non sono direttamente quelle individuate dalle (10.6), ma piuttosto componenti denominate U , V oppure I , Q , e così definite:

$$\begin{array}{ll} PAL : & U = 0.493 \cdot C_b \\ & V = 0.877 \cdot C_r \\ NTSC : & I = 0.74 \cdot C_r - 0.27 \cdot C_b \\ & Q = 0.48 \cdot C_r + 0.41 \cdot C_b \end{array}$$

Pertanto, in funzione delle diverse modalità di rappresentazione, un segnale video a colori può essere descritto indifferentemente da una delle seguenti quattro terne di segnali: RGB, $Y C_r C_b$, YUV, YIQ.

Una descrizione alternativa dello spazio di colore è fornita dai parametri di *tinta*, *saturazione* e *luminosità*, ovvero HUE, SATURATION e LIGHTNESS, o HSL: si tratta di attributi legati più alla descrizione percettiva che non alle tecnologie della riproduzione dell'immagine. Mentre la tinta descrive una famiglia di colori (es tutti i rossi), la saturazione ne indica il grado di purezza, ossia la presenza congiunta di altre tonalità; la chiarezza, infine, denota la luminosità del colore, rispetto ad un punto bianco. La terna HSL viene a volte usata per descrivere un colore nell'ambito di programmi di *computer graphic*, mediante i quali è fornito anche l'equivalente RGB.

³⁵Vedi nota 8 a pag. 862.

Profondità di colore Dato che l'occhio umano non distingue più di 250 tinte diverse, e di 100 livelli di saturazione, si ritiene che utilizzare 8 bit per ogni componente dello spazio di colore RGB sia più che sufficiente. Con $8 \times 3 = 24$ bit per pixel (bpp) si possono infatti rappresentare $2^{24} - 1$ diversi colori, ovvero più di 16 milioni, molti dei quali indistinguibili ad occhio nudo. Modalità più spinte di quella a 24 bpp (detta *truecolor*) adottano 10, 12, 16 bit/componente, o rappresentazioni in virgola mobile, e sebbene non migliorino la qualità visiva, possono comunque essere usate in contesti professionali, per non perdere precisione nelle operazioni di editing ripetuto. Al contrario, profondità inferiori sono comunemente usate per risparmiare memoria, come nel caso di 15 bpp, che usa 5 bit per componente, o 16 bpp, che usa 6 bit per il verde, offrendo 65.536 colori diversi.

Palette Nel caso si decida di adottare profondità molto ridotte, come 8 bpp, si preferisce ricorrere ad una modalità detta a *colore indicizzato*: l'insieme dei colori presenti nell'immagine viene *quantizzato*³⁶ in un insieme ridotto, i cui valori a 24 bpp sono memorizzati in una tavolozza (la *palette* detta anche *colour look-up table* o CLUT), che viene quindi utilizzata come un dizionario. La figura a lato mostra una immagine di esempio, assieme alla palette dei colori che usa. In questo modo, per ogni pixel dell'immagine è ora sufficiente specificare l'indice della palette dove è memorizzata la rappresentazione a 24 bpp del colore più prossimo.



Esempio Consideriamo una immagine in formato VGA rappresentata mediante una palette di 256 elementi da 24 bit: ognuno dei $640 \times 480 = 307.200$ pixel può quindi assumere uno tra 256 diversi colori, scelti tra $2^{24} = 16$ milioni. La dimensione di memoria occupata si ottiene considerando che per ogni pixel occorrono 8 bit per l'indice nella palette, e che la palette stessa ha dimensioni $256 \times 24 = 6144$ bit = 768 byte, e quindi in totale 307.968 byte.

Sottocampionamento del colore Nella tabella riportata a pag. 308 è presente la colonna *colore*, che mostra come la dimensione riservata alle matrici di pixel che codificano le informazioni di crominanza sia ridotta di metà rispetto a quella della luminanza. Questo fatto trae origine da due buoni motivi: il primo è che l'acutezza visiva dell'occhio umano per ciò che riguarda le variazioni cromatiche è ridotta rispetto a quella relativa alle variazioni di luminosità; il secondo è che il segnale di crominanza presente nel segnale video composito occupa una banda circa metà di quella del segnale di luminanza. Pertanto, le componenti di luminanza sono generalmente campionate con una risoluzione spaziale inferiore a quella del segnale di luminanza. Il tipo di sottocampionamento spaziale adottato per le componenti di crominanza è generalmente caratterizzato da quattro numeri, in accordo allo schema di fig. 10.25:

³⁶Per una breve introduzione alla *quantizzazione cromatica*, può essere consultata Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Color_quantization

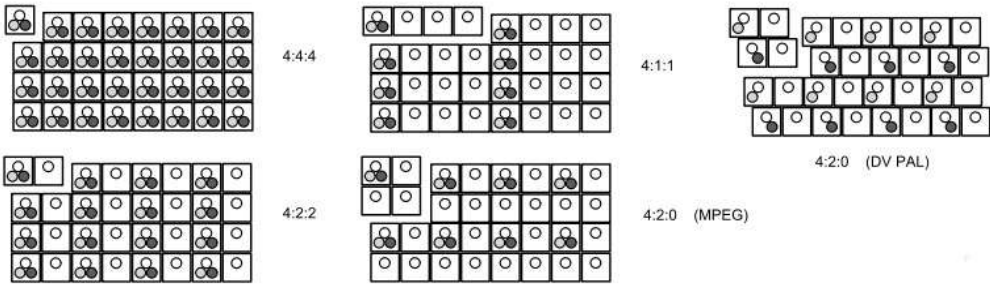


Figura 10.25: Sottocampionamento delle componenti di colore

- **4:4:4** - Non si effettua sottocampionamento, e le tre componenti hanno lo stesso numero di campioni. Applicato principalmente a segnali RGB trattati in studio di produzione.
- **4:2:2** - Questo schema si applica tipicamente alle rappresentazioni $YCbCr$, memorizzando per ogni 4 campioni di luminanza, 2 campioni della componente C_b e 2 della componente C_r , ed è utilizzato in ambito professionale e broadcast.
- **4:1:1** - In questo caso ogni quattro campioni di luminanza su una riga, ne viene preso uno per C_b ed uno per C_r . E' lo schema usato nello standard DV NTSC.
- **4:2:0** - Ogni 4 campioni di luminanza, ne vengono salvati uno per C_b ed uno per C_r come per il caso 4:1:1, ma ora la crominanza è campionata su righe alterne. In particolare, la versione utilizzata per l'MPEG-1 campiona assieme entrambi i segnali di crominanza, una riga sì ed una no, mentre quella usata con il DV PAL li campiona a righe alternate, e prevede una riproduzione in modalità interallacciata.

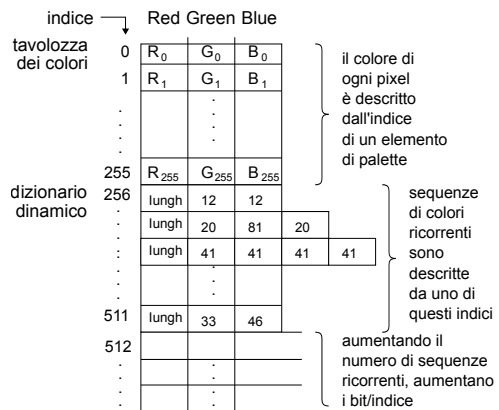
10.2.3 Formato GIF

Il *Graphics Interchange Format* è un formato ad 8 bpp definito da *CompuServe* nel 1987³⁷ e da allora ha continuato ad essere molto popolare. Usa una *palette* con cui rappresentare 256 colori scelti tra 16 milioni, e quindi comprime l'immagine mediante l'algoritmo LZW (§ 9.2.3.1), individuando sequenze ricorrenti dei valori di colore. Un singolo file può contenere più immagini (ognuna con la sua palette) in modo da realizzare brevi animazioni. Il numero ridotto di colori rende il formato poco idoneo alla riproduzione di fotografie, ma più che adatto ad immagini più semplici, come ad es. un logo di pagina web. Per rappresentare i colori assenti dalla palette, il codificatore può ricorrere ad una operazione di *dithering*, alternando colori che, osservati da lontano, ricreano l'effetto della tonalità mancante.

Il metodo di compressione è illustrato con l'ausilio della figura che segue, e adotta come anticipato l'algoritmo LZW, il cui dizionario è inizialmente composto dalla palette, o meglio dai 256 valori ad 8 bit che indicizzano la terna RGB a 24 bit nella palette. Quando si incontra una sequenza di codici di colore già osservata, viene aggiunta una

³⁷Il documento di specifica può essere trovato presso W3C:
<http://www.w3.org/Graphics/GIF/spec-gif89a.txt>

riga al dizionario, ed il valore dell'indice corrispondente viene usato per rappresentare tutta la sotto-sequenza; eventualmente, il numero di bit usati per indicare le righe del dizionario viene aumentato di uno. Per disegnare le sequenze di pixel rappresentate da indici inclusi nella sezione dinamica della tabella, occorre dunque individuare prima le rispettive terne RGB nella tavolozza.



PNG Dato che la compressione LZW era stata brevettata, venne sviluppata una codifica alternativa, denominata *Portable Network Graphics*. Al giorno d'oggi i brevetti relativi al formato GIF sono tutti scaduti, ed il formato PNG è stato standardizzato nella RFC 2083³⁸. Come per GIF, anche PNG è di tipo *lossless* (senza perdite), ossia individua una compressione invertibile, capace di replicare in modo identico l'immagine di partenza, ovviamente senza considerare il processo di quantizzazione che porta alla generazione della palette. Oltre alla modalità di colore indicizzato, PNG offre anche una modalità *truecolor* a 24 o 32 bpp, e per questo può correttamente rappresentare anche materiale fotografico, al punto da consigliare l'uso di PNG (anziché JPEG) nel caso si prevedano successive operazioni di editing dell'immagine.

Per quanto riguarda la compressione, PNG fa uso dell'algoritmo *deflate*, preceduto da un passaggio di compressione differenziale, in cui al valore che rappresenta il colore di un pixel viene sottratto il valore predetto a partire dai pixel adiacenti: in tal modo l'algoritmo *deflate* riesce a conseguire rapporti di compressione più elevati, riuscendo quasi sempre a battere le prestazioni di GIF.

10.2.4 Codifica JPEG

Il *Joint Photographic Experts Group* è un comitato congiunto ISO/ITU che ha definito lo standard internazionale per la compressione di immagini ISO 10918-1³⁹, particolarmente adatto alla codifica di immagini fotografiche. Descriviamo di seguito il funzionamento della modalità operativa detta *baseline*, o *lossy sequential mode*, che è quella che offre il migliore grado di compressione, e che prevede cinque stadi di elaborazione, mostrati alla fig. 10.26: preparazione dei blocchi, Discrete Cosine Transform (DCT), quantizzazione, codifica entropica, e formattazione.

Preparazione dell'immagine e dei blocchi L'immagine *raster* di partenza è formata da una o più matrici bidimensionali di valori (scala di grigi, oppure a colori indicizzati, o RGB, YC_rC_b, YUV, ...), eventualmente di dimensioni differenti (come nel caso YC_rC_b). Sebbene sia possibile elaborare direttamente una rappresentazione RGB, le migliori

³⁸Reperibile presso il sito di IETF: <http://tools.ietf.org/html/rfc2083>

³⁹Scaricabile presso il W3C: <http://www.w3.org/Graphics/JPEG/itu-t81.pdf>

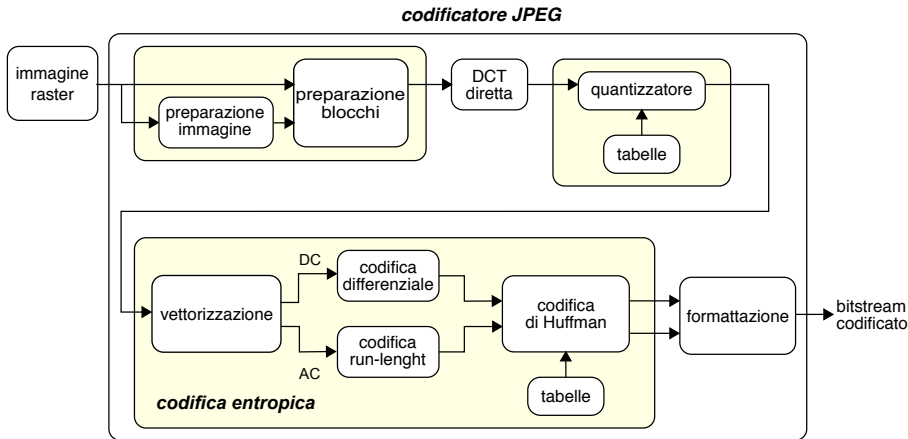


Figura 10.26: Stadi di elaborazione nella compressione jpeg

prestazioni si ottengono nello spazio $YCbCr$ con sotto-campionamento spaziale 4:2:2 o (meglio) 4:2:0, e dunque il primo passo è quello di convertire l'immagine in questa modalità di rappresentazione.

Ogni matrice viene quindi suddivisa in *blocchi* della dimensione di 8x8 pixel⁴⁰, ognuno dei quali è elaborato in sequenza in modo indipendente dagli altri.

DCT diretta Prima di procedere, la matrice Y (oppure le tre matrici R , G e B) che contiene valori ad 8 bit tutti positivi, viene normalizzata sottraendo ad ogni pixel il valore 128, in modo da ottenere valori tra -128 e 127. Quindi, per ogni blocco di 8x8 pixel, i cui valori indichiamo con $p(x, y)$, viene calcolata una nuova matrice di 8x8 valori $D(i, j)$ ottenuti come coefficienti di una *trasformata coseno discreta* (DCT) bidimensionale (vedi § 4.5.3):

$$D(i, j) = \frac{1}{4} c_i c_j \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 p(x, y) \cos \frac{(2x+1)i\pi}{16} \cos \frac{(2y+1)j\pi}{16}$$

in cui c_i e c_j sono ognuno pari a $1/\sqrt{2}$ con indice i o j pari a zero, oppure $c_i = c_j = 1$ negli altri casi, mentre gli indici i e j variano tra zero e sette. Tralasciando di approfondire le relazioni esistenti tra DCT e DFT⁴¹, consideriamo invece come i coefficienti $D(i, j)$ così ottenuti permettano la ricostruzione della matrice originaria nei termini di una somma pesata delle superfici rappresentate (per mezzo di una scala di grigi) nel diagramma riportato alla figura 10.27, mediante l'applicazione della *DCT inversa*

$$p(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^7 c_i c_j D(i, j) \cos \frac{(2x+1)i\pi}{16} \cos \frac{(2y+1)j\pi}{16}$$

⁴⁰Notiamo incidentalmente come le dimensioni definite nella tabella di pag 308 siano multipli interi di 8. Se questo non è il caso, i blocchi ai bordi destro ed inferiore vengono riempiti con pixel scelti in modo da minimizzare le distorsioni risultanti.

⁴¹Potremmo tentare comunque di estendere le considerazioni svolte al § 4.5.3 al caso bidimensionale...

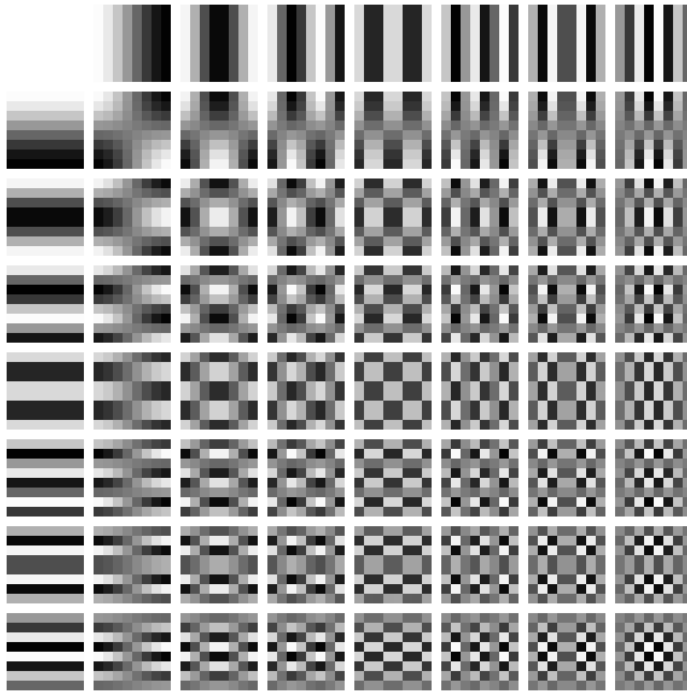


Figura 10.27: Grafico delle superfici 8×8 che costituiscono la base di rappresentazione DCT

Ma se fosse tutto qui, non avremmo realizzato la funzione di compressione! Questa è infatti realizzata dalle elaborazioni successive, a partire dalla rappresentazione in termini di blocchi DCT, di cui ora approfondiamo il significato. Osserviamo quindi che ognuna delle superfici elementari rappresentate in fig. 10.27 è legata ad una coppia i, j associata ad un coefficiente $D(i, j)$ della DCT calcolata, in modo che tale coefficiente esprime il contenuto di frequenze *spaziali* descritto da quella particolare funzione della base. Per questo l'elemento $(i, j) = (0, 0)$ in alto a sinistra, ad andamento costante, è indicato come *coefficiente DC*, o componente continua, dato che essendo calcolato come somma di tutti i pixel, riflette un valore che è legato alla intensità media dell'intero blocco. I coefficienti legati alle funzioni della prima riga rappresentano contenuti di frequenza spaziale orizzontale, con un periodo via via minore spostandosi verso il margine destro, mentre quelli della prima colonna, frequenze verticali. I coefficienti localizzati all'interno della matrice esprimono contenuti di frequenze spaziali in entrambe le direzioni, con valori di frequenza tanto più elevati, quanto più ci si sposta verso l'angolo in basso a destra. Pertanto, i coefficienti descritti da indici diversi da $(0, 0)$ sono indicati come *coefficienti AC*.

L'esperienza pratica mostra come quasi sempre i coefficienti $D(i, j)$ presentino nella regione in alto a sinistra valori ben più elevati di quelli riscontrabili in basso a destra, come conseguenza della predominanza dei blocchi posti in corrispondenza ad aree dell'immagine quasi costanti, rispetto a quelli associati alla presenza di contorni netti e particolari dettagliati.

Quantizzazione Questo passo della elaborazione JPEG mira a sfruttare il fenomeno percettivo della ridotta sensibilità dell'occhio umano alle frequenze spaziali più elevate, ovvero la capacità di *filtrare percettivamente* le componenti di errore corrispondenti ai dettagli più minuti. Per questo, il processo di quantizzazione è orientato a ridurre, ed eventualmente sopprimere, le componenti di immagine legate alle frequenze spaziali più elevate, introducendo di fatto *una soglia* sotto la quale si stabilisce di non trasmettere quelle informazioni che tanto non sarebbero percepibili. A questo scopo, ogni coefficiente $D(i, j)$ viene diviso per un coefficiente $Q(i, j)$ dipendente da (i, j) , ed il risultato viene arrotondato:

$$B(i, j) = \text{round} \left(\frac{D(i, j)}{Q(i, j)} \right)$$

Il risultato corrisponde ad un processo di quantizzazione, perché quando in ricezione il processo viene invertito (ri-moltiplicando il coefficiente per la stessa quantità), viene persa la precisione legata all'arrotondamento, e pari alla metà del coefficiente di divisione. La scelta dei $Q(i, j)$ è fatta in modo tale da utilizzare valori più elevati per gli indici (i, j) più elevati, in modo da ottenere due risultati: ridurre le componenti ad alta variabilità *spaziale* dell'immagine, e poter usare meno bit per codificare questi valori (più piccoli). Inoltre, molti dei coefficienti con (i, j) elevato, già piccoli di per se, quando divisi per un coefficiente di quantizzazione più elevato, non *sopravvivono* all'operazione di arrotondamento, in modo che tipicamente la parte in basso a destra della matrice $B(i, j)$ sarà tutta pari a zero, facilitando il compito della codifica run-length dello stadio successivo.

Esempio La figura 10.28 mostra un esempio di matrice di coefficienti DCT, assieme alla tabella di quantizzazione, ed al risultato dell'operazione. Notiamo come il valore dei coefficienti di quantizzazione aumenti allontanandosi dal coefficiente DC, e come nella matrice dei coefficienti quantizzati siano *sopravvissuti* solo i coefficienti relativi alle frequenze spaziali più basse.

Sebbene esistano delle tabelle di quantizzazione predefinite, i valori effettivi possono essere variati in base ad un compromesso tra qualità che si intende conseguire e fattore di compressione; tali valori vengono poi acclusi assieme al bitstream codificato durante la fase di formattazione, in modo che il processo di quantizzazione possa essere invertito nella fase di riproduzione dell'immagine.

Codifica entropica Questo passo è un processo senza perdita, nel senso che non aggiunge altre distorsioni oltre a quelle introdotte dal passo di quantizzazione, ma è essenziale ai fini della compressione, e sfrutta le caratteristiche statistiche del risultato delle elaborazioni precedenti. Come posto in evidenza nello schema di fig. 10.26, la codifica entropica adotta due diverse procedure per i coefficienti DC e AC, che in entrambi i casi culminano con uno stadio di codifica a lunghezza variabile mediante codici di Huffman.

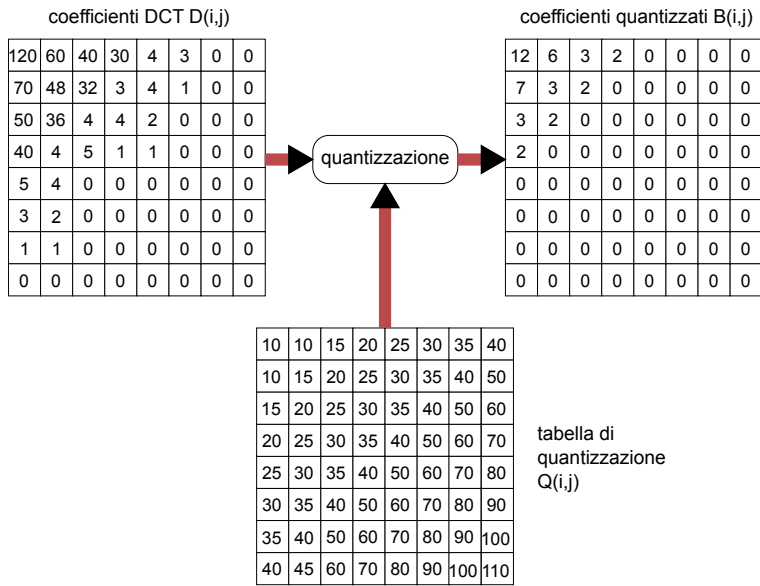
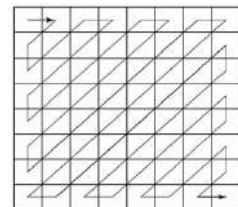


Figura 10.28: Processo di quantizzazione dei coefficienti DCT

Vettorizzazione Le matrici 8x8 relative ai blocchi di elaborazione visti fin qui vengono ora trasformate in sequenze *ad una dimensione* mediante un processo di scansione a zig zag dei blocchi, il cui percorso è illustrato alla figura seguente.

La sequenza così ottenuta presenta il coefficiente DC in testa, a cui fanno seguito i rimanenti 63 coefficienti AC, ordinati in base al massimo valore di frequenza spaziale che rappresentano. Se applichiamo la scansione zig-zag ai valori riportati nell'esempio di fig. 10.28 otteniamo come risultato la sequenza



12 6 7 3 3 3 2 2 2 2 0 0 0 0 0

Codifica differenziale Blocchi adiacenti generalmente possiedono coefficienti DC molto simili tra loro, in virtù dell'omogeneità di ampie zone dell'immagine (pensiamo ad un porzione di cielo). Per questo motivo, anziché codificarli in modo indipendente, i singoli coefficienti DC di blocchi consecutivi vengono sottratti l'uno all'altro, e viene codificata solo la loro differenza. Ad esempio, se una sequenza di coefficienti DC risultasse pari a 12 13 11 11 10 ..., il risultato di questo processo di codifica differenziale darebbe luogo alla sequenza 12 1 - 2 0 - 1 ... (di fatto, il valore *precedente* al primo coefficiente si assume pari a zero). Dato che differenze in valore assoluto piccole sono relativamente più frequenti di differenze grandi, si è scelto di adottare per queste una codifica a lunghezza di parola variabile, realizzata

- descrivendo innanzitutto ogni valore di differenza mediante una coppia (sss, valore), in cui sss rappresenta il numero di bit necessario per rappresentare il

valore, e quindi

- per ogni coppia (sss, valore) il termine sss è rappresentato mediante una codeword di Huffman, ed il valore con numero variabile di bit.

Esempio Per chiarire le idee, mostriamo le corrispondenze citate mediante due tabelle, che poi applichiamo al caso dell'esempio precedente.

differenza	N. di bit sss	valore codificato		sss	codeword di Huffman
0	0			0	010
-1, 1	1	1=1	-1=0	1	011
-3, -2, 2, 3	2	2=10	-2=01	2	100
		3=11	-3=00	3	00
-7...-4, 4...7	3	4=100	-4=011	4	101
		5=101	-5=010	5	110
		6=110	-6=001	6	1110
		7=111	-7=000	7	11110
-15...-8, 8...15	4	8=1000,	-8=0111	⋮	⋮
				11	11111110

Tornando dunque al nostro esempio della sequenza differenziale $12 \ 1 \ -2 \ 0 \ -1 \ \dots$, in termini di coppie (sss, valore) questa diviene (4, 12), (1, 1), (2, -2), (0, 0), (1, -1),... e quindi, sostituendo ad sss il relativo codice di Huffman preso dalla seconda colonna della seconda tabella, ed ai valori la loro rappresentazione indicata dalla terza colonna della prima tabella, otteniamo la sequenza di bit 101 1100, 011 1, 100 01, 010, 011 0,... in cui si sono mantenute le virgole per chiarezza. In definitiva, abbiamo usato un totale di 23 bit per rappresentare 5 differenze, che ne avrebbero richiesti 45 se codificate con 9 bit.

Codifica run-length Viene applicata alla sequenza di coefficienti AC che è il risultato dello *zig-zag scan*. In base all'effetto congiunto delle caratteristiche dei coefficienti della DCT, e del processo di quantizzazione, la sequenza degli AC in uscita dal vettorizzatore presenta lunghe sequenze di zeri, consentendo di conseguire buoni rapporti di compressione mediante l'uso di una codifica *run-length*, realizzata scrivendo gli AC come una sequenza di coppie (*skip*, *ACN*), in cui *skip* rappresenta il numero di zeri nel run, e *ACN* è il coefficiente AC non nullo che viene dopo la sequenza di zeri. Quindi, il campo *ACN* viene espresso a sua volta nella forma *sss*, *valore*, come indicato dalla prima tabella riportata nell'ultimo esempio. Infine, la coppia *skip*, *sss* viene rappresentata con una codeword di Huffman individuata in un nuovo codebook appositamente definito.

Esempio Applicando la codifica run-length alla sequenza dei coefficienti AC individuati nell'esempio di vettorizzazione, ossia alla sequenza $6 \ 7 \ 3 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0$, si ottiene una sequenza di coppie (*skip*, *ACN*), pari a (0,6), (0,7), (0,3), (0,3), (0,3), (0,2), (0,2), (0,2), (0,2) (0,0) in cui l'ultima coppia (0,0) indica la fine del blocco, che in fase di decodifica viene quindi ricostruito riempiendolo di zeri. Anziché usare questa, proseguiamo adottando una diversa sequenza di coppie (*skip*, *ACN*), pari a (0,6), (0,7), (3,3), (0,-1),

$(0,0)^{42}$: sostituendo ai termini *ACN* di questa, la coppia *sss*, *valore*, e codificando quindi il termine *valore* come indicato nella prima tabella dell'esempio precedente, si ottiene $(0, 3, 110)$, $(0, 3, 111)$, $(3, 2, 11)$, $(0, 1, 0)$, $(0,0)$. Il *bitstream* finale viene quindi realizzato sostituendo alle attuali coppie *skip*, *sss*, le rispettive codeword individuate alla colonna *Run/Size* della tabella a pagina 150 e segg. delle specifiche ITU-T T.81 <http://www.digicamsoft.com/itu/itu-t81-154.html>, ottenendo $(100, 110)$, $(100, 111)$, $(111110111, 11)$, $(00, 0)$, (1010) , e producendo così un totale di 30 bit per rappresentare i 63 coefficienti AC.

Formattazione Lo standard JPEG definisce, oltre alla sequenza di operazioni indicata, anche il formato di trama con il quale deve essere memorizzato il bitstream finale. La struttura risultante è gerarchica, e mostrata alla figura 10.29. Al livello superiore troviamo un *frame header* che contiene le dimensioni complessive dell'immagine, il numero ed il tipo di componenti usate (CLUT, RGB, $YCbCr$, etc), ed il formato di campionamento (4:2:2, 4:2:0, etc.). Al secondo livello, troviamo uno o più *Scan*, ognuno preceduto da una intestazione in cui viene riportata l'identità del componente (R, G, B, o Y, C_b , C_r), il numero di bit usato per rappresentare ogni coefficiente di DCT, e la tabella di quantizzazione usata per quella componente. Ogni *Scan* è composto da uno o più *segmenti*, preceduti da un'ulteriore intestazione, che contiene il codebook di Huffman usato per rappresentare i valori dei blocchi del segmento, nel caso non siano stati usati quelli standard. Infine, nel segmento trovano posto le sequenze di blocchi dell'immagine, così come risultano dopo lo stadio di codifica entropica.

10.3 Codifica video

In accordo al metodo di realizzazione dei segnali video analogici, in cui i singoli quadri sono codificati indipendentemente gli uni dagli altri, la codifica video digitale può essere

⁴²La nuova sequenza di coppie corrisponde ad una sequenza di coefficienti AC pari a
6 7 0 0 0 3 - 1 0 0 0

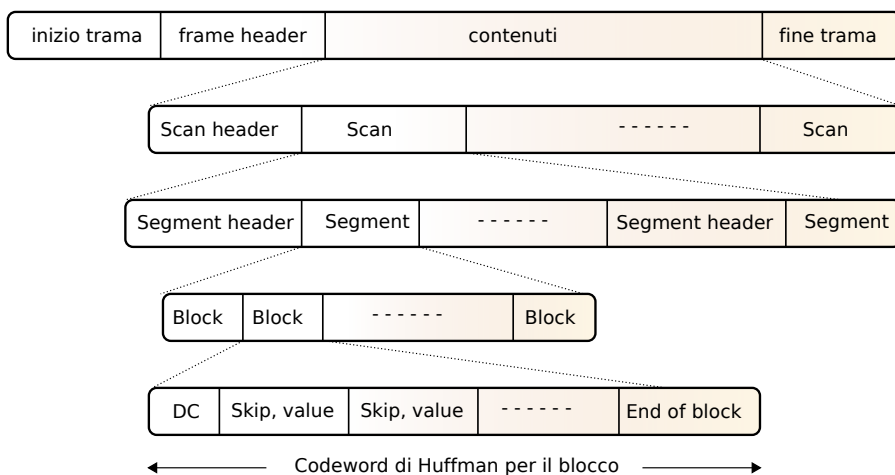


Figura 10.29: Formato del bitstream per la codifica JPEG

realizzata semplicemente applicando tecniche di codifica di immagine (come JPEG) ad ognuno dei quadri che costituiscono la sequenza video: questo tipo di approccio prende il nome di *moving JPEG* o *MJPEG*.

D'altra parte, i quadri relativi ad istanti temporali vicini sono spesso molto simili tra loro, anche se quanto siano simili, e per quanto tempo, dipende dal tipo di filmato. La presenza di *memoria* nella sorgente determina quindi la possibilità di ridurre il tasso informativo prodotto dalla codifica ricorrendo a tecniche predittive, tentando quindi di *stimare il movimento* presente in quadri contigui, e trasmettere solo l'informazione necessaria a *compensare* l'errore di predizione. Nella parte destra di fig. 10.30 è mostrata l'immagine differenza ΔY tra la componente di luminanza di due quadri consecutivi, consentendo di apprezzarne la relativa semplicità.



Figura 10.30: Due fotogrammi consecutivi, e la differenza tra i rispettivi valori di luminanza

Considerando poi che alcune regioni si sono mosse più di altre, il quadro da codificare è scomposto in sottoimmagini, per ognuna delle quali si ha un diverso spostamento, e viene calcolata una specifica differenza rispetto alla sotto-immagine precedente (e spostata); questa tecnica prende il nome di *compensazione del movimento*.

Tipo di quadro Come abbiamo fatto notare al § 9.2.2, le tecniche di codifica predittiva sono particolarmente sensibili agli errori di trasmissione, che possono causare una perdita di sincronismo tra i predittori di trasmissione e ricezione, e quindi l'impossibilità di ricostruire la restante parte di segnale. Per questo nella codifica video sono presenti dei quadri *di riferimento* in corrispondenza biunivoca con un unico quadro di partenza, detti *intracoded frames* o **I-frames**, che permettono al ricevitore di ri-partire da una condizione nota. Tra due quadri **I** sono poi presenti un certo numero di quadri **P** (*predicted*) come in fig. 10.31-a, oltre che quadri **B** (*bidirectional*) come in fig. 10.31-b, e che corrispondono rispettivamente alla codifica della compensazione del movimento calcolato a partire da un unico quadro precedente, o da una coppia di quadri passato e futuro.

I quadri **I** sono codificati mediante l'algoritmo JPEG, usando lo stesso coefficiente di quantizzazione per tutti i pixel delle DCT, conseguendo un rapporto di compressione relativamente basso, e sono inseriti a cadenza fissa con un periodo N tipicamente compreso tra 3 e 12: la sequenza di quadri compresi tra due quadri **I** è detta *group of pictures* o **GOP**. Come mostrato in figura 10.31, la codifica di quadri **P** può dipendere dal quadro **I** immediatamente precedente, o dalla ricostruzione di un precedente quadro **P**, ottenendo un fattore di compressione maggiore che per i quadri **I**; la distanza temporale tra **P** e l'originale **I** è detta *intervallo di predizione*, indicato con M .

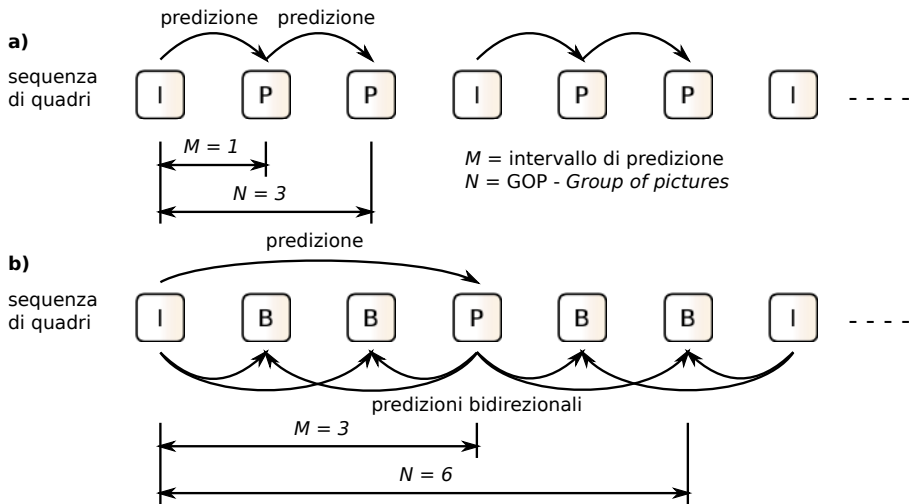


Figura 10.31: Esempi di sequenze di quadri con a) solo quadri di tipo I e P; b) quadri di tipo I, P e B

Per realizzare la compensazione del movimento, ogni regione del nuovo quadro è confrontata con regioni *limitrofe* del quadro precedente, riducendo così la complessità di ricerca. Nel caso dei quadri **B** la ricerca delle regioni simili è invece svolta rispetto ai quadri **I** (o **P**) situati sia nel passato che al futuro, migliorando la precisione della stima di movimento, e conseguendo rapporti di compressione ancora maggiori, a patto di subire un aumento del ritardo di codifica, legato al dover attendere un quadro futuro.

Allo scopo di ridurre il ritardo di decodifica la sequenza di quadri viene trasmessa con un ordine diverso da quello dei quadri originali, consentendo ai quadri **B** di essere riprodotti non appena ricevuti, e non dopo la ricezione del quadro *futuro* da cui dipendono. Pertanto, se la sequenza originale è ad esempio

IBBPBBPBBIBBP...

essa verrà trasmessa nell'ordine

IPBBPBBIBBPBB...

Stima di movimento e compensazione Specifichiamo innanzitutto cosa intendere con il termine *regione* prima usato per definire il dominio dell'operazione di confronto necessaria alla stima di movimento. Come mostrato in fig. 10.32a, considerando una suddivisione in componenti Y C_b C_r ed un sottocampionamento 4:1:1, il quadro originale è suddiviso in N righe e M colonne di *macroblocchi* di 16x16 pixel, ed ogni macroblocco è rappresentato da sei blocchi 8x8 pixel, di cui quattro blocchi per la luminanza, più due blocchi per le componenti di cromaticità; ogni blocco 8x8 corrisponde quindi ad un equivalente numero di coefficienti DCT, ed è individuato all'interno del quadro, in base al suo indirizzo di riga e colonna.

Nella codifica dei quadri **P**, ogni macroblocco M_T del quadro corrente (*target*) è confrontato pixel per pixel con il corrispondente macroblocco M_R del quadro *di*

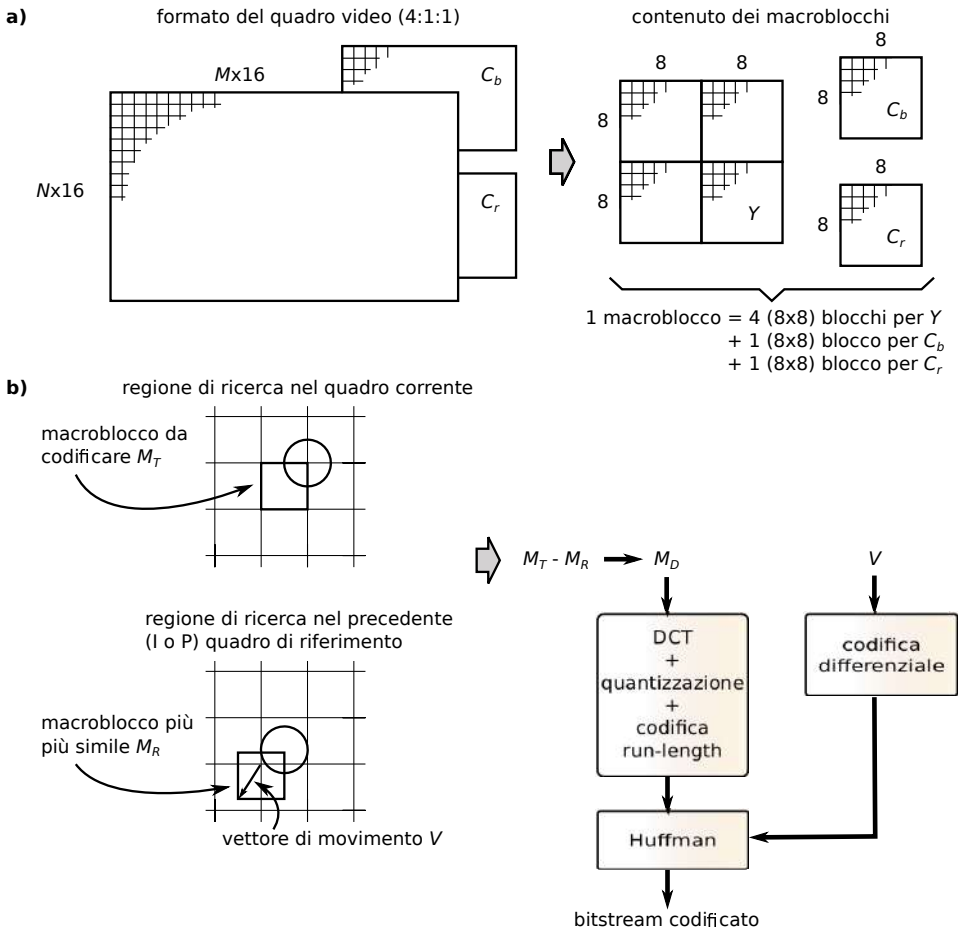


Figura 10.32: Codifica di un quadro P: a) struttura del macroblocco; b) procedura di codifica riferimento, e nel caso sia riscontrata una sufficiente similitudine⁴³ complessiva, viene trasmesso solo l'indirizzo del blocco. Altrimenti, il confronto viene ripetuto per tutti i possibili spostamenti del macroblocco target nell'ambito dei macroblocchi contigui⁴⁴, e qualora sia individuata una buona corrispondenza, il macroblocco viene codificato dal vettore di movimento V e dall'errore di predizione M_D . Con riferimento alla fig. 10.32-b in cui l'immagine è simboleggiata da un cerchio, V rappresenta lo spostamento da applicare a M_T per portarlo a coincidere al meglio con il quadro precedente, ed è codificato come una coppia (x, y) corrispondente ad una *risoluzione di un pixel*. Al contrario M_D è composto dalle tre matrici ($Y C_b C_r$) dei valori differenza tra quelli di M_T spostato di V , ed M_R . I valori di V e di M_D relativi ai diversi macroblocchi di un quadro seguono poi due diversi percorsi di codifica, come specificato appresso.

⁴³Il confronto è svolto considerando i soli valori di luminanza, e la similitudine valutata come media tra i valori assoluti delle differenze di luminanza.

⁴⁴L'effettiva estensione dell'area di ricerca non è oggetto di standardizzazione, mentre lo è la rappresentazione del risultato della ricerca.

Nel caso in cui la regione di ricerca sia estesa, i valori V possono risultare relativamente grandi; d'altra parte è probabile che macroblocchi vicini esibiscano vettori di spostamento molto simili tra loro. Per questi motivi, la sequenza dei V calcolati per macroblocchi contigui viene prima sottoposta ad un processo di codifica differenziale, e quindi i valori di differenza sono rappresentati da codeword a lunghezza variabile di Huffman. D'altra parte, le tre matrici differenza sono invece sottoposte alla stessa sequenza di operazioni dei quadri I (DCT, quantizzazione, codifica entropica), conseguendo però un fattore di compressione più elevato, essendo il macroblocco differenza con valori quasi tutti molto piccoli.

Nel caso in cui la stima di movimento fallisca⁴⁵ (o a causa di una estensione di ricerca insufficiente, oppure per un reale cambio di scena), il macroblocco è codificato in modo indipendente come avviene per i quadri I.

I macroblocchi dei quadri B (vedi fig. 10.33) sono invece confrontati sia con il precedente quadro M_P che con il successivo M_S , ottenendo due possibili insiemi di

⁴⁵Viene decretato il fallimento quando anche la migliore compensazione di movimento possibile non determina una riduzione della quantità di bit, rispetto ad una codifica JPEG.

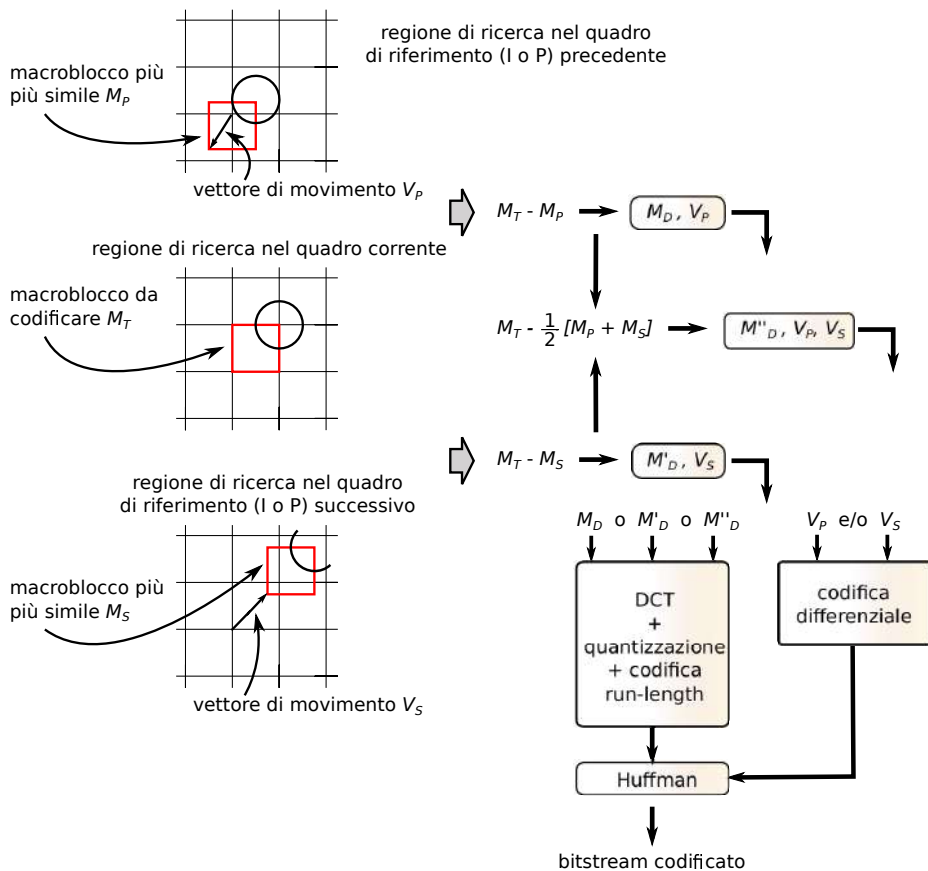


Figura 10.33: Procedura di codifica dei quadri B

quadri **P** e **B**:

- se non vi è movimento, viene trasmessa solo la sua posizione;
- se vi è movimento e si trova un riferimento abbastanza simile, sono trasmessi il vettore di movimento e le matrici differenza;
- se non si è trovato un riferimento abbastanza simile, viene effettuata una codifica *inter* come per il caso dei quadri **I**.

Ciò determina l'esigenza di disporre di un formato di trama di dimensione (e velocità) variabile, come realizzato nell'esempio mostrato in fig. 10.35, in cui ad ogni macroblocco è associato un tipo (**I**, **P** o **B**), il suo indirizzo nell'ambito del quadro, il coefficiente di quantizzazione relativo ai termini della DCT, ed il vettore di movimento (se presente). Quindi si dichiara l'identità dei blocchi presenti (che potrebbero essere assenti in caso di immagini statiche), e per questi viene infine prodotta la sequenza di informazioni previste dalla codifica JPEG.

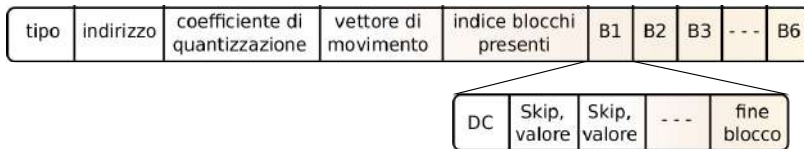


Figura 10.35: Esempio di formato trama per i macroblocchi di un bitstream video

10.3.1 Standard video

Come per l'audio, anche il numero dei *codec video* è elevato, ed è istruttivo prenderli in esame secondo l'ordine cronologico con cui si sono sviluppati, dato che in pratica ognuno prende il precedente come base di partenza.

10.3.1.1 H.261

E' lo standard di codifica video definito da ITU-T a fine anni '80 per le applicazioni di videotelefonata su ISDN, ed anche se oggi tecnicamente superato, resta comunque un valido sistema di riferimento che consente la retro-compatibilità tra apparati⁴⁶. Il suo principale limite è il vincolo di dover produrre una velocità ridotta e comunque *quantizzata* a multipli di 64 kbps.

La scelta del formato di immagine è limitata a quanto mostrato in tabella⁴⁷, mentre la scansione è non interlacciata e la velocità di rinfresco di 30 quadri/secondo per CIF oppure 15 o 7.5 per QCIF. Sono usati solo quadri di tipo **I** e **P**, con un GOP di 4 (ossia 3 **P**

Formato	Y	C _b , C _r
CIF	352 x 288	176 x 144
QCIF	176 x 144	88 x 72

⁴⁶Vedi ad es. <http://www0.cs.ucl.ac.uk/teaching/GZ05/08-h261.pdf> (una presentazione di Mark Handley), o la trattazione su <http://en.wikipedia.org/wiki/H.261>.

⁴⁷Il *Common Intermediate Format* (CIF) è stato pensato per facilitare la compatibilità con PAL e NTSC; il *Quarter-CIF* ha una superficie di 1/4. Sono poi stati anche definiti il 4CIF e 16CIF, oltre che il SIF (352 x 240) che interopera con flussi MPEG.

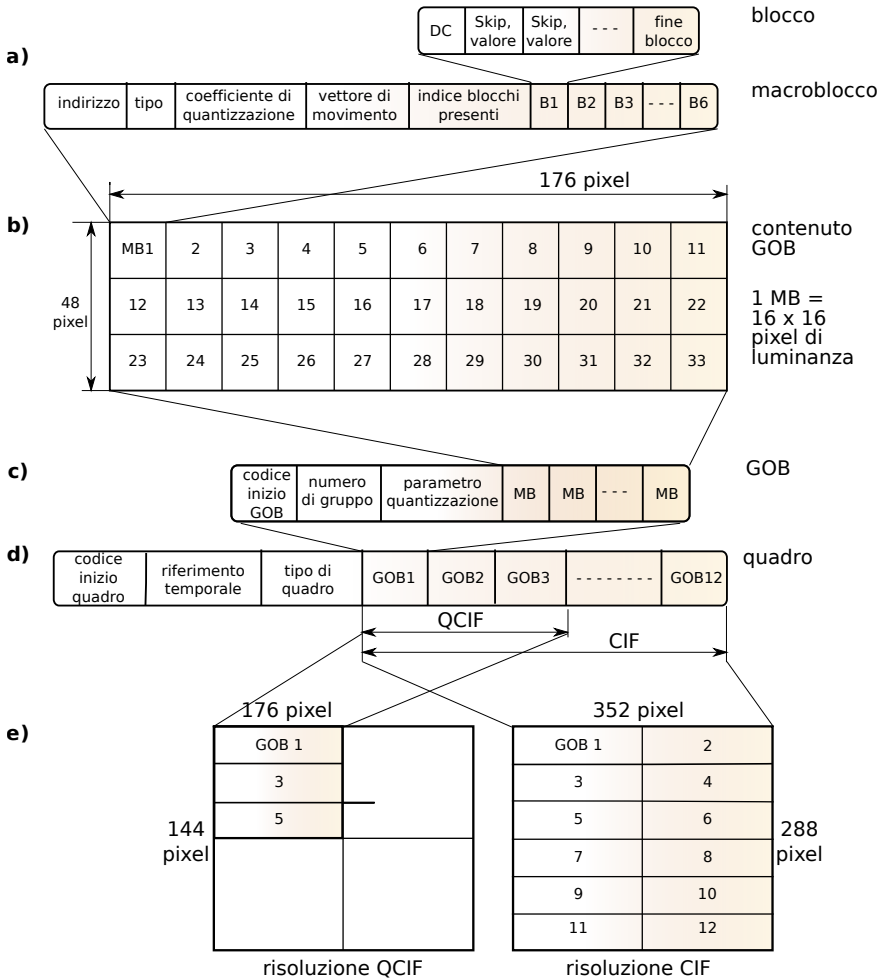


Figura 10.36: Formato codifica H.261: a) macroblocco; b) costruzione e c) formato di un GOB; d) trama di quadro; e) interoperabilità tra formati

ogni I), e sono usate le procedure descritte alla sezione precedente per rappresentare ogni quadro nei termini di macroblocchi composti da 16x16 pixel (4 blocchi di 8x8) di luminanza e 2 blocchi 8x8 per ogni componente di colore C_b, C_r .

Ogni macroblocco segue la tipica formattazione mostrata in fig. 10.36-a; tre file di 11 macroblocchi sono poi raggruppati in una nuova struttura sintattica detta GOB (*Group of (macro)Blocks*), che si articola in un contenuto (fig. 10.36-b) ed una intestazione (fig. 10.36-c), in cui troviamo un *codice di inizio* scelto in modo da non poter essere presente nella sequenza di codici di Huffman che seguono, e che permette la risincronizzazione nel caso di GOB *mancanti* (vedi appresso), in modo da poter tornare a riprodurre un quadro in corrispondenza del primo GOB disponibile. L'intero quadro è quindi realizzato con il formato di fig. 10.36-d), in cui compare un *codice di inizio quadro*, un *riferimento temporale* necessario alla sincronizzazione con la traccia audio,

e l'indicazione del tipo di quadro (**I** o **P**); a cui segue la sequenza dei GOB, in numero di 3 oppure 12 a seconda se il quadro rappresenti una immagine QCIF o CIF, in modo da permettere l'interoperabilità tra formati come mostrato in fig. 10.36-e.

Controllo di velocità Dato che la codifica video produce una velocità di trasmissione variabile, questa può eccedere la capacità del canale a disposizione, ed un modo *drastico* per risolvere il problema è di scartare alcuni GOB. Il campo *Group number* dell'intestazione dei GOB permette quindi di collocare il nuovo GOB anche in mancanza dei suoi predecessori.

Un approccio più articolato è quello mostrato dalla figura 10.37-a, che ripercorre le tappe già discusse e relative al calcolo del vettore di movimento ed alla codifica degli errori di predizione, ma pone in evidenza il campo di intervento di un componente di *controllo quantizzazione*, che variando l'entità dei coefficienti di quantizzazione della DCT, permette di ridurre e/o aumentare la velocità di codifica complessiva. In particolare, il controllo di quantizzazione opera in base allo stato di riempimento del *buffer FIFO*⁴⁸ mostrato in fig. 10.37-b, alimentato dal risultato del processo di codifica e formattazione video, e da cui sono prelevati i dati da inviare a velocità costante. Nel caso in cui la velocità media di codifica ecceda quella disponibile, l'aumento della occupazione del buffer determina l'aumento del coefficiente di quantizzazione, e quindi una riduzione della qualità ma anche della velocità media di codifica; ovviamente, anche l'inverso è possibile, ossia un miglioramento di qualità mediante riduzione del coefficiente di quantizzazione, nel caso in cui la scena sia statica, e la codifica produca un basso bit rate che consente alla FIFO di svuotarsi.

⁴⁸ *First in First out*, è la disciplina di coda del primo arrivato primo servito, opposta a *LIFO Last In First Out*, realizzata come uno *stack*.

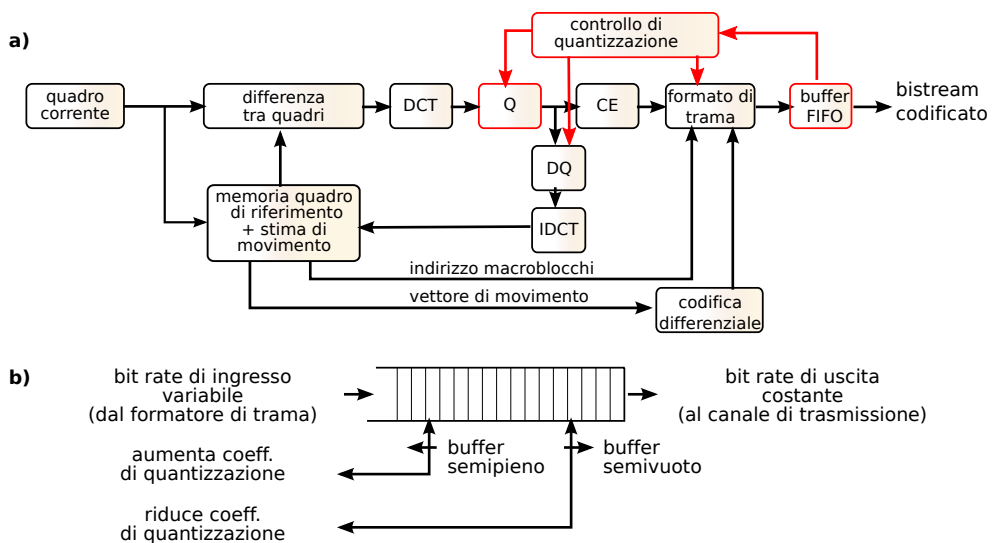


Figura 10.37: Principi della codifica H.261: a) schema del codificatore b) funzionamento del buffer FIFO

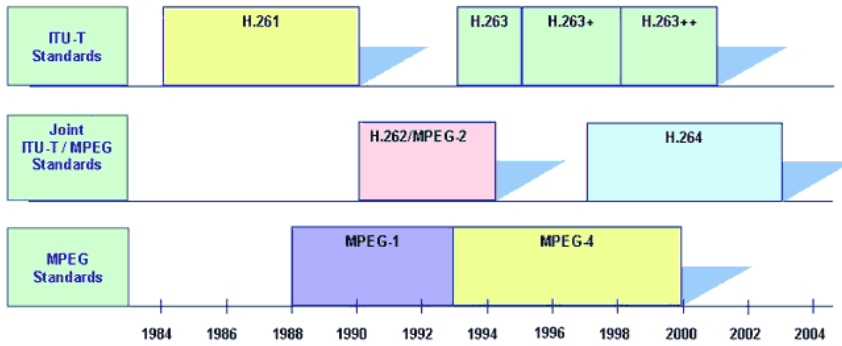


Figura 10.38: Evoluzione temporale dei formati di codifica video

Nel caso di un aumento improvviso di velocità, come anticipato si possono addirittura *scartare* alcuni GOB, mentre per i successivi si adottano coefficienti di quantizzazione ridotti, comunicati anche al lato ricevente per mezzo dell'apposito campo della intestazione GOB, come mostrato in fig. 10.36-c.

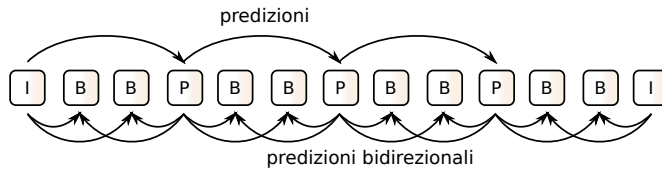
10.3.1.2 H.263

Anche questo definito da ITU-T a partire dal 1995, nasce per risolvere i problemi di bassa qualità dell'H.261 a velocità molto ridotte, come quelle offerte dai collegamenti modem *dial-up* precedenti all'introduzione dell'ADSL, ovvero per migliorare la gestione delle possibili condizioni di errore sia sul canale *dial-up* che *wireless*. Le specifiche originarie si sono in seguito arricchite⁴⁹ di estensioni, favorendo l'adozione del codec da parte di altre applicazioni (inclusi i filmati di *youtube*), ed aggiungendo il supporto oltre che ai formati nativi CIF e QCIF, anche a S-QCIF, 4CIF, 16CIF, SIF e 4SIF. A partire dal 2003 si è formato un gruppo di lavoro congiunto tra ITU-T VCEG (*Video Coding Expert Group*) e ISO/IEC MPEG (*Moving Pictures Experts Group*), che segue la definizione del suo successore, l'H.264 detto anche AVC (*Advanced Video Coding*) o MPEG-4 *part 10*, determinando l'arresto dello sviluppo di H.263, che resta comunque (assieme all'H.261) supportato da un gran numero di applicazioni multimediali. Sebbene la struttura generale del codificatore e del bitstream ricalchi quella vista per l'H.261, sono state introdotte alcune novità significative, che tentiamo di elencare appresso.

Tipi di quadro In H.263 sono usati, oltre ai quadri di tipo **I** e **P**, anche quelli bidirezionali **B**, consentendo di ottenere fattori di compressione maggiori, a parità di qualità percepita.

Slice I GOB sono ridefiniti come singole *strisce* di macroblocchi, quindi ad esempio per i formati CIF e QCIF un GOB è ora formato da 11 macroblocchi in fila, anziché 33 come avveniva per l'H.261.

⁴⁹Nel 1998 viene rilasciato l'H.263v2, noto anche come H.263+ o H.263 1998, e nel 2000 è emesso l'H.263v3 noto anche come H.263++ o H.263 2000; inoltre l'MPEG-4 Part 2 è compatibile con l'H.263, in quanto un bitstream H.263 di base viene correttamente riprodotto da un decodificatore MPEG-4.



Esempio di sequenza di quadri MPEG-1

Vettori di movimento estesi La stima di movimento dell'H.261 si arresta in corrispondenza dei bordi del quadro, per cui anche se un oggetto è solo parzialmente uscito di scena, il macroblocco corrispondente viene codificato in modalità *intra*. Al contrario H.263 permette di estendere la ricerca anche a vettori di spostamento che cadono al di fuori del quadro, alla ricerca di una corrispondenza parziale, consentendo al contempo maggiore efficienza e minor distorsione.

Predizione avanzata Anziché determinare il vettore di movimento in base al confronto di un intero macroblocco, i 4 blocchi 8x8 che lo costituiscono sono confrontati in modo indipendente con il quadro di riferimento, permettendo una migliore compensazione del movimento anche per l'immagine di oggetti che non solo traslano, ma si deformano. In definitiva, sono prodotti 4 diversi vettori di movimento per ogni macroblocco.

Resistenza agli errori La presenza di un errore nella ricezione⁵⁰ di un GOB, oltre ad impedire la corretta riproduzione dello stesso, ostacola la riproduzione anche dei quadri successivi che dipendono dai pixel presenti nel GOB, e peggio ancora l'errore finisce per estendersi anche ad altri GOB, in virtù degli effetti dell'errore sulla ricostruzione dei macroblocchi *predetti* in presenza di movimento.

Per ridurre l'estensione temporale dell'effetto dell'errore, e non dover attendere fino alla ricezione del successivo quadro I, si può usare il canale di ritorno presente nei collegamenti punto-punto, consentendo al decodificatore di inviare dei NACK che notificano al mittente la coppia (quadro, GOB) per la quale si è rilevato un errore. Il codificatore è quindi in grado di valutare esso stesso le conseguenze sui quadri successivi, e può provvedere a fornire una codifica *intra* per tutti i blocchi che necessitano di essere rapidamente risincronizzati.

10.3.1.3 MPEG-1

Il *Moving Pictures Expert Group* di ISO emette una serie di standard ognuno orientato ad un particolare dominio applicativo di segnali multimediali, come

⁵⁰Qualcuno potrebbe aver notato che nella definizione degli standard fin qui discussi, non sono previsti controlli di tipo *checksum* nel bitstream prodotto. D'altra parte essendo le informazioni codificate di natura auto-sincronizzante, la presenza di errori determina presto presso il ricevitore una condizione di disallineamento, e la decodifica di valori non previsti, come ad esempio la ricezione di vettori di movimento o coefficienti DCT fuori dinamica, o codeword di Huffman non valide, od un numero eccessivo di coefficienti. Per tale via, il ricevitore diviene in grado di accorgersi che si è verificato un errore.

- MPEG-1 adotta un formato SIF di 352x288 pixel inteso per la *memorizzazione* audio-video a qualità VHS su CDROM, a velocità fino a 1.5 Mbps;
- MPEG-2 è orientato alla *memorizzazione e trasmissione* audio-video secondo quattro livelli di risoluzione, per ognuno dei quali diversi profili individuano tecniche alternative di codifica;
- MPEG-4 è stato inizialmente concepito per applicazioni simili a quelle dell'H.263, ma il suo uso si è successivamente esteso ad un'ampia gamma di applicazioni Internet.

Anche MPEG-1 adotta tecniche del tutto simili a quelle dell'H.261, con una scansione dell'immagine progressiva ed un sottocampionamento delle componenti di colore 4:1:1, una frequenza di quadro di 25 Hz, l'adozione di quadri di tipo **I**, **P** e **B**, la rappresentazione dei quadri in termini di macroblocchi composti da 16x16 pixel di luminanza, più due blocchi 8x8 per ciascuna componente di colore. Le principali differenze sono che

- possono essere inseriti riferimenti temporali *all'interno* di un quadro, permettendo al decodificatore di sincronizzarsi più rapidamente. L'intervallo tra due marche temporali è chiamato *slice* e comprende una sequenza orizzontale di macroblocchi, tipicamente che copre una intera riga⁵¹, o meno, ma non di più;
- l'uso dei quadri di tipo B aumenta la distanza temporale tra i quadri di tipo P ed il loro riferimento, e quindi determina una maggiore distanza coperta dalle porzioni di immagine in movimento, cosicché l'ampiezza della finestra di ricerca adottata dal componente di detezione di movimento è stata estesa.

La figura 10.39-a) illustra la *struttura gerarchica* del bitstream risultante, secondo il quale l'intero filmato (*sequenza*) è costituito da una successione di GOP, ed ogni GOP da una sequenza di quadri, ognuno costituito da una successione di *slice* che comprendono ognuno 22 macroblocchi, ognuno con 6 blocchi. La sezione -b) di fig. 10.39 entra più nel dettaglio del formato del bitstream.

10.3.1.4 MPEG-2

Allo scopo di poter usare questo stesso standard per diversi contesti applicativi, sono stati definiti i quattro *livelli* qualitativi mostrati alla tabella seguente, e per ogni livello sono quindi definiti cinque profili (*simple, main, spatial resolution, quantization accuracy, high*) in modo da permettere lo sviluppo di nuove tecnologie. Il livello *Low* è com-

Livello MPEG-2	formato	bit rate (Mbps)	applicazione
Low	SIF	< 1.5	registrazione qualità VHS
Main	4:2:0	< 15	DVB - MP@ML
	4:2:2	< 20	
High 1440	4:2:0	< 60	HDTV 4/3
	4:2:2	< 80	
High	4:2:0	< 80	HDTV 16/9
	4:2:2	< 100	

⁵¹ad es., 22 macroblocchi in risoluzione CIF

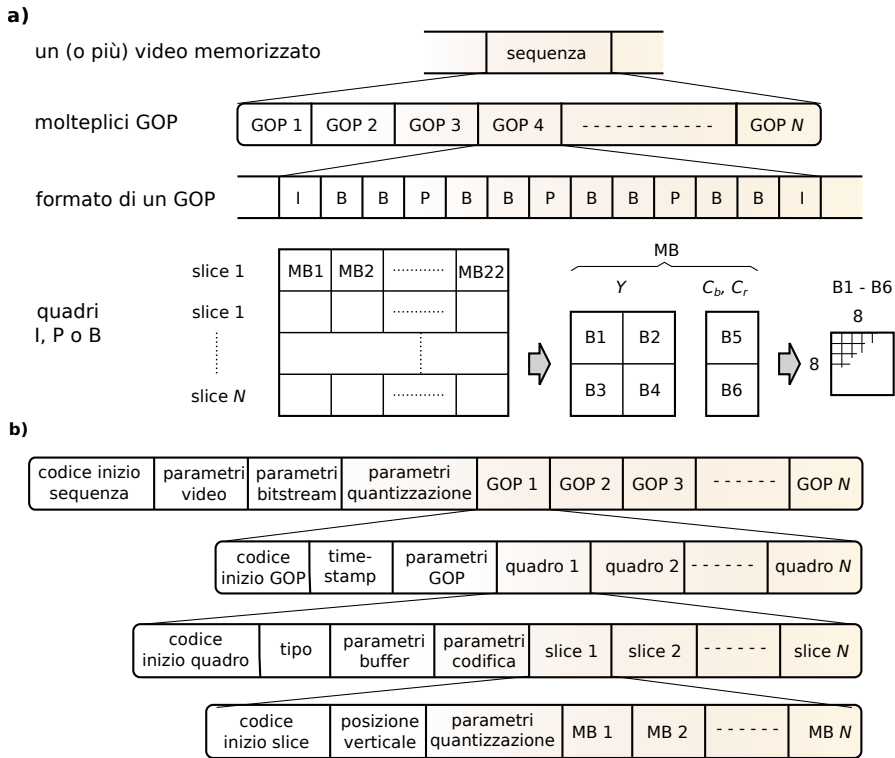


Figura 10.39: Struttura del bitstream MPEG-1: a) composizione; b) formato gerarchico

patibile con MPEG-1. Affrontiamo

ora la descrizione di ciò che è offerto dal profilo *Main* al livello *Main* (MP@ML).

MP@ML L'obiettivo è la diffusione televisiva DVB, con scansione interlacciata, risoluzione 720x576 a 25 quadri/secondo (PAL), sottocampionamento 4:2:0 per una velocità risultante tra i 4 ed i 15 Mbps. La principale differenza rispetto all'MPEG-1 è legata alla modalità di scansione *interlacciata*, in modo che come mostrato in fig. 10.40, ogni quadro è costituito da due sottoquadri (o *campi*) con le righe rispettivamente dispari e pari, ponendo la questione: come comporre i blocchi da 8x8 pixel su cui eseguire la DCT? Sono possibili due alternative:

- la *modalità campo* (fig. 10.41-a) in cui i 16x16 pixel di un macroblocco sono ripartiti tenendo assieme prima le sole righe dispari del primo campo, e quindi le sole righe pari del secondo campo, oppure
- la *modalità quadro* (fig. 10.41-b) in cui si usa la stessa suddivisione già vista per il caso non interlacciato, mescolando i due campi in ognuno dei blocchi.

La scelta migliore su quale tra le due modalità adottare dipende dal tipo di scena che si sta rappresentando. Se è presente molto movimento, è meglio adottare la modalità campo: essendo infatti i pixel di uno stesso blocco collezionati in un tempo pari a

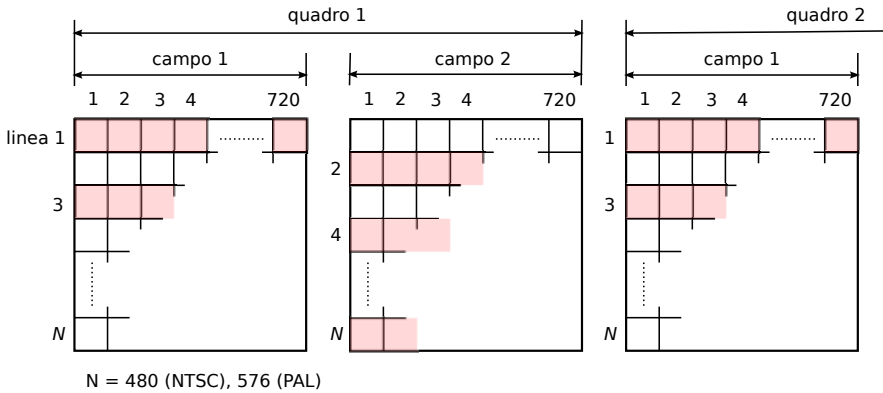


Figura 10.40: Effetto della scansione interallacciata in MPEG-2

metà dell'intervallo di quadro (mentre nella seconda metà si collezionano i pixel della seconda serie di blocchi), si ottiene un *fotogramma meno mosso*; viceversa in presenza di una scena con poco movimento, può essere adottata la modalità quadro.

Per quanto riguarda la stima di movimento, sono ora previste tre possibilità: la *modalità campo* prevede che i campi dispari usino come riferimento i campi pari del quadro precedente, ed i campi pari quelli dispari dello stesso quadro: in tal modo l'intervallo temporale su cui è valutato il movimento è metà del periodo di quadro. Nella *modalità quadro* invece, i campi pari e dispari usano come riferimento i rispettivi campi pari e dispari del quadro precedente, ed è più idoneo nel caso di movimenti lenti. Il meglio di entrambi i modi si ottiene con la *modalità mista*, in cui sono attuati entrambi gli approcci, e viene scelto per la trasmissione quello in grado di dar luogo alla distorsione minore.

HDTV Sono definiti tre standard, ATV, DVB e MUSE, rispettivamente per il Nord America, l'Europa ed il Giappone, a cui si aggiunge la specifica HDTV di ITU-R relativa a studi di produzione e scambio internazionale, e che definisce un rapporto di aspetto 16/9 con 1920 colonne per 1152 righe (di cui solo 1080 visibili), con scansione interallacciata e sottocampionamento 4:2:2. ATV include le specifiche di ITU-R, oltre che un formato ridotto, sempre con aspetto 16/9 ma risoluzione 1280x720, e che adotta la codifica video MPEG-2 MP@ML e quella audio AC-3. Il DVB è basato su di un rapporto di aspetto 4/3 con 1440x1152 pixel (di cui 1080 visibili), pari cioè al doppio⁵² della risoluzione PAL di 720x576. La codifica video è MPEG-2 SSP@H1440 (*Spatially Scaleable Profile at High 1440*), simile all'MP@ML, mentre la codifica audio è MPEG audio layer 2.

10.3.2 Contenitori

I flussi binari prodotti dai diversi codificatori (audio, video) prendono il nome di *Elementary Stream* (ES), e possono essere multiplati assieme per produrre un nuovo formato idoneo alla registrazione di un contenuto multimediale completo, eventual-

⁵²Si intende una risoluzione verticale ed orizzontale, mentre il rapporto tra le superfici è pari a 4 volte.

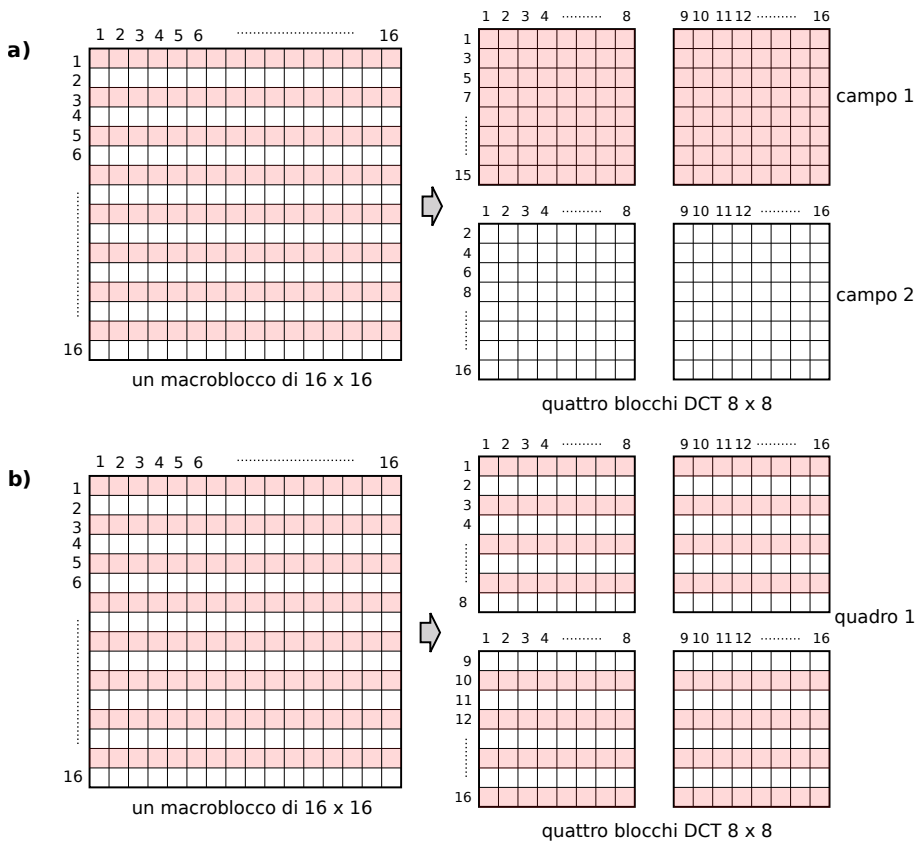
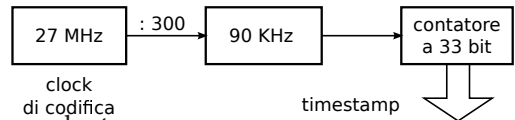


Figura 10.41: Composizione dei blocchi DCT per i quadri I di MPEG-2: a) modalità campo; b) modalità quadro

mente arricchito da un flusso di *dati privati*, come mostrato in fig. 10.42a per il caso di MPEG-1.

Prima di effettuare la moltiplicazione, gli ES sono suddivisi in *pacchetti* di dimensione variabile denominati *Packetized ES* (PES) in cui trova posto un *payload* contenente⁵³ il risultato della codifica (ad es. un intero quadro), preceduto da una *intestazione* contenente un codice univoco di inizio PES ed un codice che individua il tipo di payload del pacchetto (audio, video o dati). L'intestazione PES può inoltre contenere un riferimento temporale necessario alla sincronizzazione audio-video, con risoluzione 33 bit, prodotto dal clock a 90 kHz descritto in fig. 10.42 come *orologio di sistema*, e ottenuto a partire da un oscillatore a 27 MHz come mostrato alla figura a pagina precedente.



Nel momento in cui un ES è pacchettizzato, viene inserito un *presentation timestamp* (PTS) che ne individua l'istante di riproduzione; per i flussi video è inserito anche⁵⁴ un

⁵³Per un approfondimento, vedi http://en.wikipedia.org/wiki/Packetized_elementary_stream

⁵⁴In realtà PTS e DTS non sono inseriti in tutti i pacchetti, ma una volta ogni tanto (con intervalli fino a 700 msec per i ps e 100 msec per i ts): il decoder rigenera infatti localmente il clock, ed i timestamp

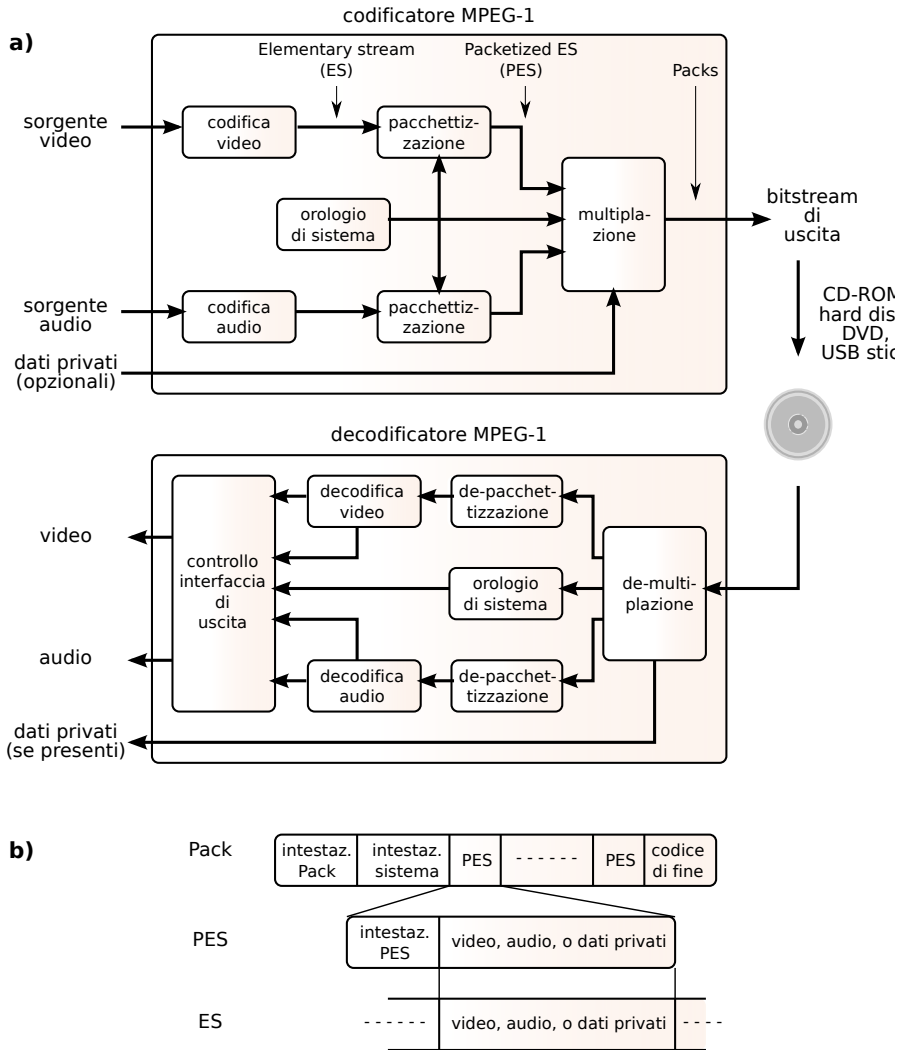


Figura 10.42: Generazione di un contenuto multimediale MPEG-1: a) co-decodificatore; b) formato del bistream di uscita

decode timestamp (DTS) perché come anticipato a pag. 321 l'ordine di trasmissione (e quindi di decodifica) può differire dall'ordinamento naturale.

I PES derivanti da diversi ES possono essere quindi inseriti in una struttura di trama detta *Pack*, che può infine essere memorizzata ai fini di una successiva riproduzione.

10.3.2.1 Transport Stream

Nel caso di trasmissione dei contenuti mediante un sistema broadcast, tipicamente il singolo *Program Stream* PS (equivalente a quello prima indicato come *Pack*) viene ulteriormente multiplato assieme ad altri, in modo da realizzare un *Transport Stream* (TS), come mostrato in fig. 10.43. In particolare, la parte b) della figura mostra come ricevuti servono a mantenerlo al passo con quello trasmesso.

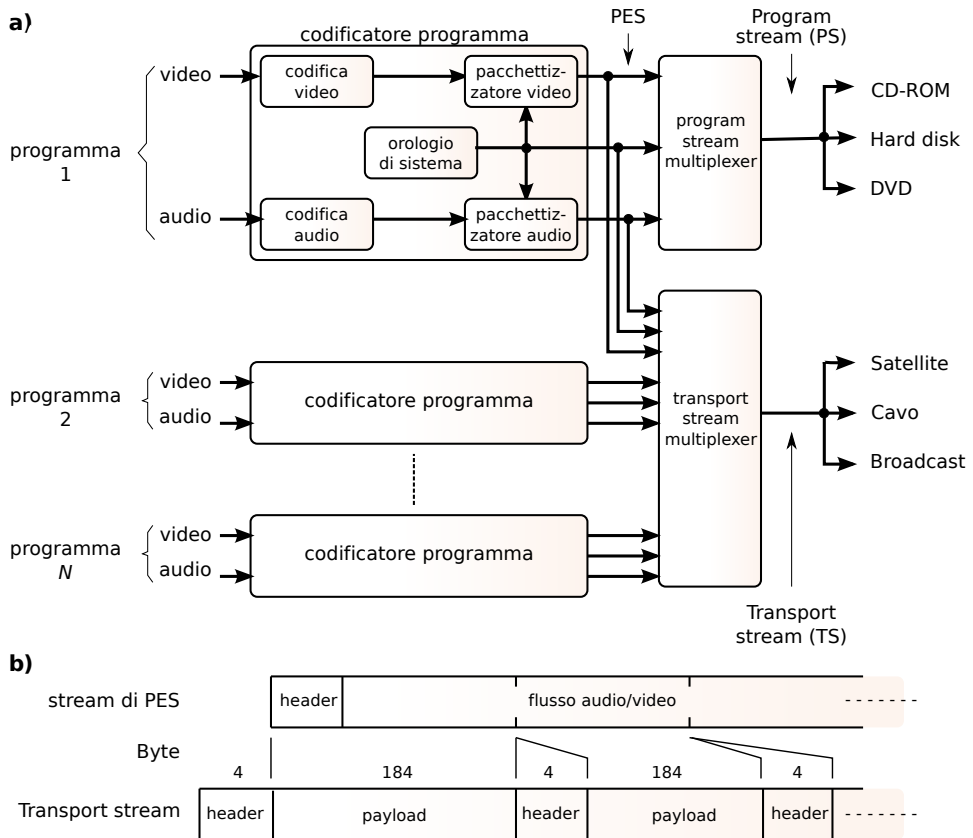


Figura 10.43: Multiplazione di programmi: a) generazione dei PS e TS; b) formato del Transport Stream

i PES siano ora suddivisi in segmenti di lunghezza fissa e pari a 184 byte, intestati con 4 byte, producendo una struttura di trama con pacchetti di 188 byte⁵⁵; l'ultimo pacchetto del TS che origina da uno stesso PES è riempito con uno fino a raggiungere i 188 byte. L'intestazione contiene, oltre ad un byte di inizio con pattern unico, un *Packet Identification code* (PID) di 13 bit, che identifica il PES a cui appartiene il pacchetto, permettendo al decoder di recuperare il programma a cui è interessato.

Alcuni PID sono riservati, come il PID 8191 che indica assenza di payload⁵⁶, ed il PID 0, che annuncia l'inserimento nel payload della *Program Association Table* (PAT), la cui ricezione permette al decoder di conoscere quali PID sono utilizzati per individuare i diversi PES (audio, video) di uno stesso programma⁵⁷. Questo avviene per mezzo delle

⁵⁵in realtà le intestazioni dei pacchetti del TS possono essere estese e contenere più di 4 byte: in questo caso, la dimensione del payload si riduce, in modo che il totale sia ancora 188.

⁵⁶Un payload vuoto è in realtà comunque riempito di 184 bytes inutili, e viene inserito da parte del moltiplicatore che realizza il TS per mantenere una riserva di banda che consenta di assecondare le fluttuazioni di velocità dei tributari.

⁵⁷Altri PID riservati sono l'uno, che annuncia la presenza di una *Conditional Access Table* (CAT) contenente i parametri crittografici per visualizzare contenuti a pagamento, ed il PID 18, che annuncia la presenza della *Network Information Table* (NIT), che descrive altri TS disponibili. Per approfondimenti,

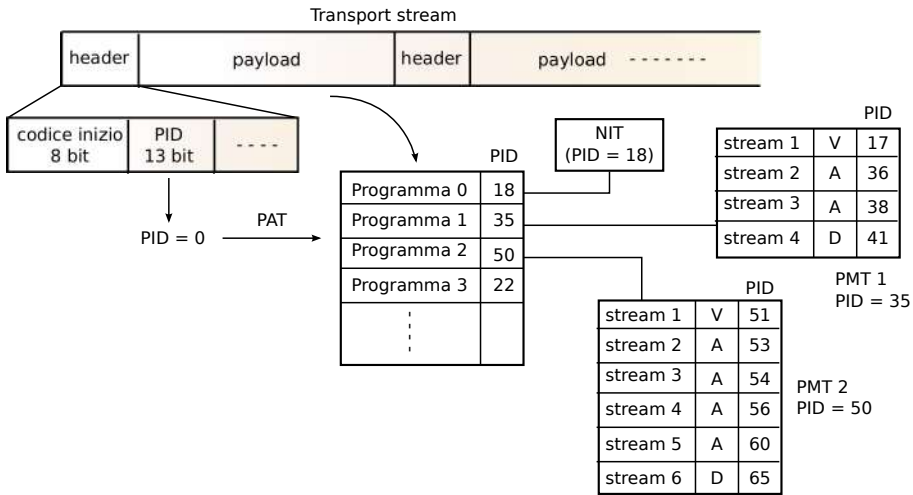


Figura 10.44: Estrazione della PAT e delle PMT dal Transport Stream

Program Map Table (PMT) rappresentate in fig. 10.44: ogni riga della PAT individua infatti un nuovo PID, alla ricezione del quale viene estratta dal payload la PMT che descrive i PID dei flussi che compongono il programma. Pertanto, quando uno spettatore seleziona un programma, il decodificatore cerca nella PAT il PID della PMT associata, e quindi inizia a prelevare i pacchetti intestati con ognuno dei PID trovati nella PMT, per ricostruire i relativi PES, sincronizzarli, ed iniziare la riproduzione.

Download del formato PDF navigabile

COME anticipato nella prefazione, il download del formato PDF *navigabile* dell'edizione 2.0 nella versione *completa* di tutte le quattro parti è consentito a tutti coloro che acquistano una copia in formato cartaceo od ebook, o che effettuano una *donazione*¹ per sostenere il progetto di cultura libera, visto che senz'altro acquistare il libro significa sostenerlo. Chi lo desidera può inviare *una foto* del volume in suo possesso ad alef@teoriadeisegnali.it, e riceverà al suo indirizzo le istruzioni per il download.

Restiamo in contatto

Presso teoriadeisegnali.it puoi trovare anche

- esercizi di esame svolti;
- il testo intitolato *Lo strato applicativo di Internet* assieme ad altro materiale didattico;
- le recensioni dei lettori, a cui sei invitato ad aggiungere la tua;
- un blog per restare aggiornati sugli sviluppi del sito e dei suoi contenuti;
- la possibilità di iscriverti alla *Newsletter* con gli annunci delle nuove edizioni;
- il link di invito al gruppo Telegram con il *backstage* degli sviluppi;
- una mappa interattiva con i luoghi di provenienza delle più recenti visite al sito.



¹Vedi <https://teoriadeisegnali.it/donazione.html>

Bibliografia

- A.A. V.V.**, *Wikipedia, L'enciclopedia libera e collaborativa*, <http://it.wikipedia.org>
- A. Abrardo**, *Comunicazioni Radiomobili*,
http://www.dii.unisi.it/~abrardo/comunicazioni_radiomobili.pdf,
URL consultato il 25/01/2016
- J. B. Anderson**, *Digital Transmission Engineering*, 2nd Edition, August 2005, Wiley-IEEE Press
- G. E. Agrawal**, *Coherent Optical Communications*, Third Edition, 2002 John Wiley & Sons, Inc.
- S. Barbarossa, T. Bucciarelli**, *Teoria dei Segnali*, Ingegneria 2000, Roma
- S. Benedetto, E. Biglieri**, *Teoria della Probabilità e Variabili casuali*, Quaderni di Elettronica, 1980 Boringhieri
- C. A. Bentivoglio, A. Caldarelli**, *Tecniche e tecnologie multimediali*, 2007 EUM edizioni università di Macerata
- J. Bellamy**, *Digital Telephony*, 1991 John Wiley and Sons, New York
- E. Björnson, J. Hoydis, L. Sanguinetti** *Massive MIMO Networks: Spectral, Energy, and Hardware Efficiency*, 2017, Foundations and Trends in Signal Processing: Vol. 11, No. 3-4, pp 154–655. DOI: 10.1561/20000000093. Accessibile presso <https://massivemimobook.com>
- G. Cancellieri**, *Telecomunicazioni*, 2000 Pitagora editrice - Bologna
- A. B. Carlson**, *Communication Systems*, 3rd Edition, 1986 Mc Graw Hill
- M. Chiodi**, *Richiami di algebra elementare delle matrici*,
<https://www.marcellochiodi.com/mylessons/MLA2020matricia4.pdf>, URL consultato il 26/09/2021
- M. Cover, J.A. Thomas**, *Elements of information theory*, 2006 by John Wiley & Sons
- F. Cuomo**, *Telematica*, 2001 <http://net.infocom.uniroma1.it/tlem/lucidi/lucidi.php3>

- R. Cusani, T. Inzerilli**, *Teoria dell'Informazione e Codici*, Ed. Ingegneria 2000, 2007
Roma
- M. Decina, A. Roveri**, *Code e Traffico nelle Reti di Comunicazione*, 1991 Editrice La Goliardica - Roma
- M. Decina, A. Roveri**, *Introduzione alle Reti Telefoniche Analogiche e Numeriche*, 1989
Editrice La Goliardica - Roma
- M. G. Di Benedetto, P. Mandarini**, *Comunicazioni Elettriche*, 2000 Editrice La Goliardica - Roma
- G. Fedele**, *Complementi ed applicazioni di Teoria dei Segnali*, Ed. Ingegneria 2000,
1996 Roma
- L. E. Franks**, *Signal Theory*, 1969 Prentice-Hall, Englewood Cliff, N.J.
- R. L. Freeman**, *Telecommunication System Engineering*, 2nd Edition, John Wiley & Sons
- A. Goldsmith**, *Wireless Communications*, Draft of Second Edition, Marzo 2020,
http://web.stanford.edu/class/ee359/doc/WirelessComm_Chp1-16_March32020.pdf,
URL consultato il 12/09/2021
- T. T. Ha**, *Theory and Design of Digital Communication Systems*, Cambridge University
Press 2011
- F. Halsall**, *Multimedia Communications*, 2001 Pearson Education Limited
- C. W. Helstrom**, *Probability and Stochastic Processes for Engineers*, 2nd, 1991 Macmillan
Publishing Company
- N. S. Jayant, P. Noll**, *Digital Coding of Waveforms*, 1984 Prentice-Hall, N.J.
- E. Krouk, S. Semenov**, *Modulation and coding techniques in wireless communications*,
2011 John Wiley & Sons Ltd.
- D. Leon, W. Couch**, *Fondamenti di telecomunicazioni*, 2004 Apogeo
- S. Lin, D.J. Costello Jr.**, *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*, 1983
Prentice-Hall, Englewood Cliff, N.J.
- M. Listanti, A. Roveri**, *Comunicazioni Dati*, Appunti
- M. Luise, G. M. Vitetta**, *Teoria dei segnali, seconda edizione*, 2003 McGraw-Hill
- M. Luise**, *Lezioni di comunicazioni digitali, DRAFT*, 2022 Università di Pisa,
http://docenti.ing.unipi.it/m.luise/InfTheory/LCD_Luise_draft.pdf,
Url consultato il 15/01/2023

- P. Mandarinì**, *Teoria dei Segnali*, 1979 Editrice La Goliardica - Roma
- A. V. Oppenheim, R. W. Shafer**, *Digital Signal Processing*, 1975 Prentice Hall, NJ
- C. D. Pagani, S. Salza**, *Analisi Matematica 1*, 2015 Zanichelli
- A. Papoulis**, *Probability, Random variables, and Stochastic Processes*, 1991 McGraw-Hill Int.Eds.
- B. Peroni**, *Comunicazioni Elettriche*, Ed. Scientifiche Siderea, 1973 Roma
- A. Perotti**, *Introduzione alle Comunicazioni Radiomobili*,
Researchgate, consultato il 15/01/2023
- G. M. Poscetti**, *Elementi di teoria dell'informazione*, Ed. Ingegneria 2000, 1996 Roma
- J.G. Proakis, M. Salehi**, *Communication systems engineering 2nd Ed.*, 2002 Prentice-Hall
- T.S. Rappaport**, *Wireless Communications: Principles and Practice, Second Edition*, Prentice Hall, 2002
- U. Reimers**, *Digital Video Broadcasting*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001
- F. Rocca**, *Elaborazione Numerica dei Segnali*, Edizioni CUSL Milano 1998
- A. Roveri**, *Reti di telecomunicazione*, Appunti delle lezioni
- S. Sardellitti**, *Trasmissione Numerica*, Appunti delle lezioni
- M. Lops**, *Information Sources*, Materiale didattico di Teoria dell'informazione, 2020,
<https://www.docenti.unina.it/marco.lops>
- M. Schwartz**, *Information Transmission, Modulation, and Noise*, 4th Edition, 1990, McGraw Hill
- C. Shannon, W. Weaver**, *La teoria matematica delle comunicazioni*, 1949 Univ. of Illinois, 1971 Gruppo Editoriale Fabbri
- W. Stallings**, *Trasmissione Dati e Reti di Computer*, Jackson Libri 2000, titolo originale Data & Computer Communications 6th Edition, 2000 Prentice Hall
- R. Steele**, *Mobile Radio Communications* 1992 Pentech Press London, 1994 IEEE press NJ
- F. G. Stremler**, *Communication Systems*, 1990 Addison-Wesley
- A. S. Tanenbaum**, *Reti di Computer*, 1989 Gruppo Editoriale Jackson
- H. Taub, D. L. Schilling**, *Principles of Communication Systems*, 1986 McGraw Hill
- J. Watkinson**, *The MPEG handbook*, 2001 Focal Press

Indice analitico

- accesso multiplo, 342, 530, 536
 - OFDMA, 748
- ACK (*acknowledgment*), 791
- ADM (*add and drop multiplexer*), 836
- ADM ottico, 666
- ADPCM, 291
- ADSL, 668, 854
- algoritmo
 - Min-Sum, 598
 - somma-prodotto, 596
- aliasing, 92
 - temporale, 109
- AMI (*alternate mark inversion*), 448
- amplificazione ottica, 662
- analisi via sintesi, 299
- antenna, 670
- architettura protocollare, 788
- ARP (*address resolution protocol*), 811
- ARQ (*automatic repeat request*), 471
- ASCII, 492
- assorbimento
 - atmosferico, 674
 - terrestre, 672
- attenuazione
 - chilometrica (cavo), 647
 - chilometrica (fibra), 657
 - di spazio libero, 671
 - disponibile, 643, 672
 - supplementare, 643, 657, 679
- autocorrelazione, 193, 211, 298
 - all'uscita di un filtro, 228
 - per segnali periodici, 196
 - proprietà, 195
- autovalore
 - della matrice di correlazione, 285
 - della matrice di Wishart, 724
- autovalori e autovettori, 185
- autovettore
 - dell'inverso della matrice di correlazione, 630
 - della matrice
 - di covarianza, 185
 - di transizione, 262
 - di Wishart, 725
 - della risposta in frequenza, 74
- AWGN (*Additive White Gaussian Noise*), 456, 562
- back-off, 409, 867
- banda
 - di coerenza, 689
 - di guardia, 344
 - di rumore, 414
 - frazionale, 405
 - larghezza di, 207, 345
 - laterale doppia, 366
 - laterale ridotta, 370
 - laterale unica, 358, 368
- base ortonormale, 52
- baud, 440
- Bayes (teorema di), 147
- beamforming, 742
- belief propagation, 596
- Bessel
 - funzione di, 386
 - funzione modificata di, 429
- bit, 250
 - di start e di stop, 482
 - stuffing, 486, 836
- blocco di coerenza, 748
- Boltzmann (costante di), 245
- BPSK (*bi-phase shift keying*), 496

- BRAS (*broadband remote access server*), 855
 BRI (*basic rate interface*), 852
 broadcast
 canale di (MU-MIMO), 736
 dominio di, 815
 Ethernet, 811
 FM, 863
 trasmissione, 342
 BSC (*binary symmetric channel*), 556
 buffer, 788
 FIFO, 327
 cambio
 di scala, 18
 di variabile, 18
 cammini multipli, 674, 676, 682, 689
 campionamento, 8
 del colore, 311
 dell'impulso, 70
 filtro adattato, 212
 in frequenza, 108
 PCM, 832
 precisione, 450
 restituzione D/A, 93
 spaziale, 307
 teorema del, 89
 canale
 AWGN, 562, 591
 binario simmetrico, 556
 broadcast MU-MIMO, 736
 equivalente, 402
 MIMO-OFDM, 744
 numerico, 6
 trasmissione su, 439
 perfetto, 231, 235
 radiomobile, 693
 selettivo in frequenza, 689
 telefonico, 343
 televisivo, 698
 variante nel tempo, 690
 virtuale, 786
 capacità di canale
 binario simmetrico, 561
 con fading di Rayleigh, 720
 continuo, 562
 discreto, 560
 MIMO, 721
 OFDM, 527
 cardinale
 interpolazione, 90
 seno, 90
 Carson (regola di), 389
 CAS (*channel associated signaling*), 833
 causalità, 26
 cavo
 coassiale, 652
 linea aerea, 650
 ritorto, 650
 CCS (*common channel signaling*), 834
 CDM (*code division multiplex*), 530
 CDMA (*code division multiple access*), 536
 CDN (*circuito diretto numerico*), 829
 CELP (*code excited linear prediction*), 302
 centralinista, 830
 centralino, 767
 cerchio unitario, 107, 136, 751
 cerchio unitario, 133
 circuito
 commutazione di, 785
 elettrico, 603
 virtuale, 665, 785
 classless interdomain routing, 809
 Clos (condizione di), 847
 coda di attesa, 777
 lunghezza media, 779
 tempo medio, 781
 codebook, 473, 568
 adattivo, 303
 da quantizzazione vettoriale, 301
 delle p. pilota, 751
 di downlink (MU-MIMO), 740
 di Hamming, 572
 di Huffman, 319
 di precoding, 741
 codeword, 473, 568
 codice
 a ripetizione, 475
 accorciato, 576
 BCH, 575
 bipolare, 447
 ciclico, 574
 concatenato, 587
 convoluzionale, 590
 convoluzionale, 578
 di Alamouti, 713
 di canale, 567

- di Gray, 462
- di linea, 446
- di Reed-Solomon, 576
- differenziale, 448
- interno-esterno, 577
- irregolare, 600
- lineare a blocco, 473
- Manchester, 448
- ortogonale, 718
- perforato, 586
- polinomiale, 479, 574
- prodotto, 577
- sistematico, 570
- spazio-tempo-frequenza, 745
- STBC, 712, 717
- codifica
 - a blocco, 569
 - a predizione lineare (LPC), 296
 - a riempimento d'acqua, 726
 - a velocità variabile, 327
 - audio, 289
 - binaria, 253
 - concatenata, 577
 - convoluzionale, 578
 - ricorsiva, 586
 - di canale, 473, 567
 - di forma d'onda, 290
 - di Huffman, 257
 - di immagine, 307
 - di linea, 440, 441
 - di sorgente, 249
 - con perdita, 274
 - continua, 275
 - multimediale, 289
 - non gaussiana, 277
 - teorema della, 254
 - differenziale, 510
 - DPCM, 290
 - JPEG, 317
 - OFDM, 526
 - entropica (JPEG), 316
 - LDPC, 594
 - PCM, 100
 - per blocchi, 259
 - per sottobande, 292
 - predittiva, 263
 - psicoacustica, 304
 - run-length, 263
 - JPEG, 318
 - tasso di, 475
 - turbo, 590
 - video, 319
- coerenza
 - banda di, 689
 - blocco di, 748
 - tempo di, 692
- COFDM (*coded OFDM*), 529
- collegamento
 - bilancio di, 642
 - in cavo, 644
 - in diversità, 678
 - in fibra ottica, 653
 - multiantenna, 702
 - punto-multipunto, 342
 - punto-punto, 342
 - radio, 669
 - radiomobile, 679
 - satellitare, 864
- collisione, 813
- colore
 - profondità di, 311
 - sottocampionamento del, 311
- colori
 - immagini a, 307
 - spazio dei, 309
 - TV a, 861
- commutazione
 - a divisione di spazio, 666, 847
 - a divisione di tempo, 848
 - di circuito, 785, 830
 - di lunghezza d'onda, 667
 - di pacchetto, 777, 785, 787, 830
 - principio di, 785
 - telefonica, 847
- componente continua, 196, 198
- componenti analogiche di bassa frequenza, 347
- compressione basata su dizionario, 264
- compromesso
 - banda - potenza, 9, 423, 461, 499, 501, 516, 565
 - diversità - moltiplicazione, 734
 - velocità - distorsione, 8, 277
 - velocità - ritardo, 260
- congestione, 786, 788
- controllo

- di congestione, 807
- di errore, 806
- di flusso, 786, 795, 806
- conversione
 - D/A (*digitale-analogico*), 97
 - di lunghezza d'onda, 666
- convoluzione, 71
 - circolare, 113
 - con l'impulso traslato, 73
 - costruzione grafica, 72
 - discreta, 112, 131, 624
 - via DFT, 114
- correlatore, 218
 - banco di, 514
- correlazione, 190
 - coefficiente di, 222
 - di un processo ergodico, 193
 - spaziale*, 753
- costante di propagazione, 644
- costellazione, 498, 712, 729
- covarianza, 192
 - matrice di, 185
- CPK (*continuous phase keying*), 541
- CRC (*cyclic redundancy check*), 478
- crominanza, 310
- CSI (*channel state information*), 705

- d.d.p. o *densità di probabilità*, 149
- DAC (*digital to analog converter*), 97
- datagramma, 787
- DBPSK, 511
- DCT (*discrete cosine transform*), 110, 314
- decibel, 233
- decimazione numerica, 93
- decisione
 - Bayesiana, 556
 - di massima prob. a posteriori, 557
 - di massima verosimiglianza, 557
- decodifica
 - di massima verosimiglianza, 581, 585, 635
 - di Viterbi, 581
 - iterativa, 593, 595
 - SISO, 588, 591
 - turbo, 593
- delta di Kronecker, 52
- demodulatore
 - a correlazione, 514
 - a discriminatore, 384, 420
- coerente o omodina, 371
- di inviluppo, 376
- in fase e quadratura, 347, 375
- demodulazione
 - BLU e BLR, 376
 - del rumore, 415
 - di ampiezza, 371
 - di frequenza, 383
 - effetto soglia, 423
 - eterodina, 377
 - incoerente, 375, 517
 - di sinusoidale, 429
 - supereterodina, 378
- densità
 - di energia
 - di un filtro, 204
 - di un rect, 80
 - spettro di, 64
 - di potenza, 197
 - del rumore demodulato FM, 421
 - di segnale AM, 366
 - di segnale FM ad alto indice, 390
 - di segnali passa-banda, 352
 - di un processo dati, 225
 - per modulazione angolare, 385
 - di probabilità, 149
 - del prodotto di v.a. indipendenti, 211
 - della somma di v.a. indep., 210
- despreading, 533
- detezione di sinusoidale, 429
- DFT (*discrete Fourier transform*), 103, 523
- diafonia, 648
- diagramma
 - a traliccio, 580
 - ad occhio, 443
 - apertura orizzontale, 453
 - in presenza di rumore, 461
 - di transizione, 579
- diffrazione, 673
- diffusione troposferica, 674
- dimensione campionaria, 178, 179
- diseguaglianza
 - del data processing, 271
 - di Hadamard, 725
 - di Kraft, 256
 - di Schwartz, 50, 55, 222
- dispersione
 - cromatica, 657, 664

- del modo di polarizzazione, 658
- modale, 656
- potenza-ritardo, 687
- temporale, 686
- distanza
 - del codice, 474, 568, 570
 - di Hamming, 473
 - euclidea, 585
- distorsione, 341
 - di ampiezza, 236
 - di codifica, 275
 - di non linearità, 241
 - di tempo di transito, 238
 - lineare, 235, 236
 - assenza di, 235, 606
 - per segnali modulati, 408
 - non lineare, 247
 - per segnali modulati, 409
- distribuzione (funzione di), 149
- disturbi additivi (combinazione dei), 244
- divergenza di Kullback-Leibler, 270
- diversità
 - di frequenza, 678
 - di spazio, 678
 - selezione di, 707
 - spaziale
 - MISO, 711
 - SIMO, 706
- divisore modulo N, 394
- DLL (*delay locked loop*), 544
- DMT (*discrete multi tone*), 856
- DNS (*domain name service*), 802
- doppietto, 78
- Doppler
 - dispersione, 691
 - effetto, 691
- double buffering, 849
- downlink
 - MU-MIMO, 737
 - OFDM, 747
 - SAT, 867
- DPLL (*digital phase locked loop*), 484
- DSLAM (*digital subscriber line access multiplexer*), 855
- DSSS (*direct sequence spread spectrum*), 532
- DTFT (*discrete time Fourier transform*), 102
- DWDM (*dense wavelength division multiplex*), 664
- DXC (*digital cross connect*), 844
- Eb/No, 459
 - SNR per bit, 499
- effetto
 - Doppler, 691
 - Kerr, 658
 - near-far, 537
 - pelle, 646
 - valanga, 661
- efficienza
 - del selective repeat, 794
 - del send and wait, 792
 - dell'OFDM, 524
 - della codifica di canale, 475
 - della codifica di sorgente, 254
 - di AM-PI-PPS, 368
 - di giunzione, 775
 - spetttrale, 498
 - SFN, 756
- eigenbeamforming, 727
- elastic store, 837
- elementary stream, 332
- energia, 16
 - di segnale limitato in banda, 92
 - mutua, 64, 193
- enfasi e de-enfasi, 425
- entropia, 251
 - a blocco, 261
 - condizionale, 268, 559
 - condizionata, 261, 272
 - congiunta, 268
 - di gaussiana, 267
 - complessa multivariata, 759
 - di Rényi, 270
 - di sequenza, 271
 - di sorgente
 - binaria, 252
 - continua, 266
 - differenziale, 266
 - principio di massima, 268
 - relativa, 270
- equalizzazione, 236, 454
 - complessa, 401
 - delle componenti analogiche, 401
- DFE, 633
- LMS, 631
- MLSD, 635

- MMSE, 626
- numerica, 622
- OFDM, 526
- ricevitore ottimo, 468
- zero forcing, 624
- equazione caratteristica, 285
- equivocazione, 559
- $\operatorname{erfc}\{\}$, 458, 460
 - definizione, 154
- Erlang, 769
 - formula B, 775
- errore
 - controllo di, 470
 - correzione di, 473
 - detezione di, 477
 - di fase o frequenza, 374
 - di predizione, 296, 322
 - nelle trasmissioni di banda base, 455
- esponenziale, 22
 - complesso, 22
- Ethernet, 811
 - gigabit, 815
- Eulero, formule di, 36
- evento, 145
 - completamente casuale, 770
 - statisticamente indipendente, 148
- fading, 678, 679
 - a blocco, 746
 - di Rayleigh, 683
 - di Rice, 686
 - durata media, 685
 - piatto, 682
 - selettivo in frequenza, 686
 - su larga scala, 681
 - su piccola scala, 682
- fase lineare, 66, 135, 235
- fasori, 37
 - coefficienti di Fourier come, 40
- fattore di qualità, 122
- fattore di rumore, 613
 - per reti in cascata, 615
- FDM, 342
- FEC (*Forward error correction*), 471
- fenomeno aleatorio, 145
- FEXT (*far end crosstalk*), 648
- FFT (*fast Fourier transform*), 109, 523
- filtraggio, 74
 - di segnali e processi, 204
 - numerico, 112
 - passa banda, 399
 - percettivo, 300
- filtro, 25
 - a banda minima, 453
 - a coseno rialzato, 452
 - a fase lineare, 239
 - a media mobile, 126
 - a pettine, 128, 142
 - a radice di coseno rialzato, 466
 - adattato, 212, 466
 - analogico, 119
 - anti-aliasing, 92
 - di canale, 344
 - di decimazione, 138
 - di feedback, 634
 - di Hilbert, 356
 - risposta impulsiva, 357
 - di restituzione, 91, 93, 95
 - di Wiener, 626
 - digitale o numerico, 123
 - FIR, 124, 132
 - IIR, 129, 133
 - interpolatore, 140
 - numerico, 131
 - forma canonica, 134
 - forma diretta, 134
 - ottico, 665
 - passa banda ideale, 402
 - passa basso, 122
 - polifase, 138
 - sbiancante, 216, 298
 - sintesi di un, 125, 135
 - trasversale, 124
- finestra scorrevole, 796, 805
- finestratura, 76
 - della risposta impulsiva, 131
 - nella stima spettrale, 84, 202
- flag byte, 486, 832
- FM, 347, 385
 - a basso indice, 391
- footprint, 867
- forma quadratica, 186
- formanti, 295
- Fourier
 - serie di, 38
 - troncamento, 44

- trasformata di, 61
 - proprietà, 64
- trasformata discreta di, 103
- frequenza
 - deviazione di, 422
 - di interarrivo, 770
 - di riga, 860
 - di servizio, 773
 - di simbolo, 440, 445
 - di taglio, 121, 123
 - Doppler, 691
 - immagine, 379
 - istantanea, 381
 - radio, 698
- Fresnel (ellissoidi di), 673
- Friis
 - equazione di, 672
 - formula di, 616
- FTTH, 828
- FTTx, 668
- funzione
 - caratteristica, 155
 - di trasferimento, 120
 - distorsione-velocità, 278
 - velocità-distorsione, 276
 - con memoria, 280
 - gaussiana, 277
- gaussiana, 153, 182
 - bidimensionale, 427
 - multidimensionale, 167
- ghost televisivi, 754
- Gibbs, fenomeno di, 45
- GIF, 312
- GMSK (*gaussian minimum shift keying*), 541
- GOB (*Group of (macro)Blocks*), 326
- GOP (*group of pictures*), 320, 325
- GPRS (*general packet radio service*), 829
- gradiente
 - definizione, 282
 - discesa del, 631
 - stocastico, 632
- grado di servizio, 643
- GSM, 828, 871
 - codec, 300
- guadagno
 - di codifica, 569
 - di diversità, 718
 - di moltiplicazione, 729
 - di potenza, 206
 - di processo
 - DSSS, 533
 - seq. pilota, 752
 - di sistema, 643
 - disponibile, 609
- H.261, 325
- H.263, 328
- Hadamard (diseguaglianza di), 725
- Hamming
 - codice di, 571
 - distanza di, 473
- Hartley (modulatore di), 370
- HDB3, 448
- HDTV, 332
- Heaviside (condizione di), 645
- Hilbert
 - filtro di, 356
 - spazio di, 50
 - trasformata di, 356
- Huffman (codifica di), 257
- ibrido telefonico, 850
- IDFT, 106
- immagazzinamento e rilancio, 787
- impedenza, 604
 - caratteristica, 644
- impulso
 - dati, 441
 - di Dirac, 68
 - di Nyquist, 451
- incapsulamento, 790
- incorrelazione, 192
- indice di modulazione
 - angolare, 386, 391, 422
 - di ampiezza, 368
- indice di rifrazione, 654
- indipendenza statistica, 148, 168, 192
- infiltrazione spettrale, 85
- informazione
 - estrinseca, 591
 - misura di, 250
 - mutua media, 270, 558
 - condizionale, 273
 - differenziale, 269
- instradamento, 785, 787

- di lunghezza d'onda, 665, 667
- integrale di Gauss, 182
- integrate and dump, 215
- intelligent network, 853
- intensità
 - di traffico, 769
- intercorrelazione, 193
- interferenza
 - intersimbolica, 240, 443, 450, 451, 521, 541, 656
 - multiutente, 536
- interleaving, 476, 577
 - fattore di, 578
- intermodulazione
 - componenti analogiche di b.f., 400
 - fattore di, 242
- Internet, 799
 - indirizzi, 801
- interpolazione numerica, 94
- intervallo
 - di confidenza, 175, 178
 - di predizione, 320
- intracoded frame, 320
- invarianza della risposta impulsiva, 135
- inviluppo complesso, 345
 - traiettorie, 502
- IP, 807
 - sottoreti, 801
- ipotesi, verifica di, 170
- ISDN, 851
- ISI, *vedi* interferenza intersimbolica 451
- istogramma, 150

- giacobiano, 167
- JPEG, 313

- Kraft (disuguaglianza di), 256
- Kullback-Leibler (divergenza di), 270

- L-ASK, 497
- L-FSK, 513
- L-PSK, 501, 505
- Lagrange
 - moltiplicatori di, 282
- LAN switch, 814
- Laser, 659
- LDPC (*low-density parity-check*), 594
- LED (*Light Emitting Diode*), 659
- Lempel-Ziv-Welsh, compressione di, 264
- limite di Shannon, 565
- Little, risultato di, 778
- livello
 - di confidenza, 175
 - di significatività, 170
- Lloyd-Max, algoritmo di, 100
- LOS (*line of sight*), 673
- LPC (*linear predictive coding*), 296
- luminanza, 310
- lunghezza d'onda, 344
 - ottica, 653

- marginale
 - di larga scala, 682
 - di Rayleigh, 684
 - di sistema, 643
- Markov
 - processo di, 287
 - sorgente di, 261
- mascheramento uditivo, 304
- massima verosimiglianza
 - decisione di, 171, 212, 457
 - per sequenze, 635
 - stima di, 173
- massimo trasferimento di potenza, 606, 639
- matrice
 - definita positiva, 630
 - di controllo parità, 572, 594
 - di correlazione, 279, 285, 297, 627
 - autovettori, 185
 - di covarianza, 185
 - di transizione, 262
 - di Walsh-Hadamard, 751
 - di Wishart, 724
 - diagonale, 185
 - generatrice, 570, 574
 - Jacobiana, 167, 283
 - pseudoinversa, 221, 731
 - semidefinita positiva, 186
 - simmetrica, 185
- media
 - campionaria, 173
 - di insieme, 159
 - quadratica, 160, 162
 - temporale, 159, 160
- media frequenza, 377
- megafreame SFN, 758

- metodo dei minimi quadrati, 221
- mezzo trasmissivo
 - cavo e fibra, 641
 - radio, 669
- MIMO, 701
 - capacità di canale, 721
 - modello di canale, 705
 - multiutente
 - MU-MIMO, 736
 - OFDM, 746
 - OFDM, 743
- minima energia per bit, 565
- MISO, 711
- mixer, 371, 392
- MJPEG, 320
- MMSE (*minimum mean square error*), 626
- modello two-ray ground-reflected, 677
- modem, 344
- modulazione, 67, 76, 346
 - a traliccio, 541
 - angolare, 381
 - BPSK, 496
 - coerente, 547
 - di ampiezza, 365
 - prestazioni, 416
 - FM a basso indice, 396
 - FSK incoerente, 517
 - incoerente, 547
 - L-FSK, 513
 - $\pi/4$, 540
 - numerica, 495
 - OFDM, 519
 - OOK, 517
 - QAM, 506
 - QPSK, 501
 - sfalsata, 540
- modulazione di frequenza, 347
- momento, 151
 - centrato, 152
 - misto, 158, 190
- MP3, 305
- MPEG-1, 329
- MPEG-2, 330
- MPLP (*multi pulse linear prediction*), 300
- MRC (maximal ratio combining), 708
- MSK (*minimum shift keying*), 540
- multicast, 810
- multipath, 676
- multiplazione, 829
 - a divisione di
 - codice, 530
 - frequenza, 342, 343, 530
 - lunghezza d'onda, 663
 - tempo, 785, 830
 - add and drop, 836, 838
 - asincrona, 835
 - ottica, 666
 - schema di, 784
 - spaziale, 703, 729
- NACK (*negative acknowledgment*), 791
- NEXT (*near end crosstalk*), 648
- non linearità, 392
- NRZ (*No Return to Zero*), 447
- Nyquist
 - condizioni di, 451
 - criterio di, 451
 - filtro di, 451
 - frequenza di, 452
 - impulso di, 451
 - velocità di, 89
- OAM (*Operation, Administration, Maintenance*), 839
- OFDM, 519
 - codificato, 528
 - densità di potenza, 521
 - equalizzazione, 526
 - modem, 522
 - prestazioni, 548
- OFDMA, 530, 748
- onda
 - diretta, 673
 - PAM, 442, 856
 - densità spettrale, 224
- OQPSK, 540
- ortogonalità
 - degli esponenziali complessi, 46
 - moltiplicatori di Lagrange, 283
 - tra simboli sinusoidali, 546
 - tra sinc, 92, 522
- oscillatore a cristallo, 393
- oscillazione uniforme in frequenza, 131
- OTN (*optical transport network*), 667
- ottimizzazione vincolata, 283
- overlap and add, 115

- OXC (*optical cross-connects*), 666
- p-value, 171
- pacchetto
 - dati, 783
 - Ethernet, 812
 - fuori sequenza, 805
- palette, 311
- parametri di trasmissione, 458
- parità
 - bit di, 477, 482
 - matrice di controllo, 571
- Parseval, teorema di
 - per segnali di energia, 64
 - per segnali di potenza, 45
- path loss, 681
- PCM
 - G.711, 101, 289
 - struttura di trama, 831
- PDH (*plesiochronous digital hierarchy*), 835
- PDU (*protocol data unit*), 790
- percentile, 175, 177
- periodogramma, 202
- PES (*packetized elementary stream*), 333
- piattezza spettrale (misura di), 279, 285
- pilot contamination, 752
- pilota (sequenza), 751
- pitch, 294
- pixel, 307
- Plank, costante di, 245
- PLL, 372, 393
 - ricevitore a, 383, 513
- PNG, 313
- Poisson, somma di, 82
- polinomio
 - caratteristico, 185
 - generatore, 479, 574
- PON (*passive optical network*), 668
- ponte radio, 342
- POP (*point of presence*), 844
- portante
 - di colore, 860
 - intera, 367
 - parzialmente soppressa, 368
 - pilota, 529
 - ricostruzione per quadratura, 372
 - sintesi di, 393
 - soppressa, 367
- potenza, 15
 - assorbita da un bipolo, 605, 638
 - attiva, 639
 - ceduta ad un carico, 639
 - del rumore, 456
 - di picco, 367
 - di segnale, 603
 - di un coseno, 15, 47
 - di un processo, 160, 162
 - di un segnale AM, 371
 - di un segnale AM BLU, 395
 - disponibile, 606
 - entropica, 278
 - con memoria, 279
 - istantanea, 15, 367
 - ricevuta, 458
- POTS (*plain old telephony services*), 850
- precodifica
 - con feedback limitato, 739
 - MMSE, 738
 - zero forcing, 737
 - MU-MIMO-OFDM, 748
- predittore, 296
 - a lungo termine, 300
 - bidirezionale, 320
- predizione lineare, 221
- PRI (*Primary Rate Interface*), 852
- probabilità
 - a posteriori, 147
 - assiomi, 146
 - condizionata, 146, 457
 - come verosimiglianza, 171
 - congiunta, 147
 - densità di, 149
 - di blocco, 768
 - di detezione, 170, 431
 - di errore
 - ASK, 500
 - DBPSK, 512
 - filtro adattato, 217
 - FSK, 516
 - MRC, 710
 - OFDM, 548
 - OOK e FSK incoerente, 518
 - per parola, 471
 - PSK, 505
 - QAM, 509
 - QPSK, 504

- Rayleigh, 694
- residua, 475
- sul bit, 464, 467
- sul simbolo, 457, 460
- di falso allarme, 170, 430
- di perdita, 430
- di rifiuto, 773
- di ritardo, 779, 781
- teoremi di base, 146
- teoria delle, 145
- processo
 - ad aleatorietà parametrica, 162
 - aleatorio, 158
 - armonico, 163, 199
 - di ingresso, 772
 - di innovazione, 301
 - di nascita e morte, 773
 - ergodico, 161
 - gaussiano, 169
 - bianco limitato in banda, 199, 361
 - demodulazione, 415
 - entropia, 267
 - in banda traslata, 359
 - prodotto, 210
 - somma, 209
 - stazionario, 160
 - in senso lato, 160
- prodotto
 - banda-lunghezza, 659
 - di processi, 210
 - Hermitiano, 185
 - scalare, 52
- propagazione
 - condizioni di, 672
 - luminosa, 654
- protocollo a finestra, 805
- prove ripetute, 768
- pseudo-noise (sequenza), 531, 537
- PSTN, 850
- QAM, 506
- QPSK, 501, 503
- quantizzazione, 8, 97
 - a rampa lineare, 96
 - adattiva, 291
 - della DCT, 316
 - logaritmica, 100
 - sensibilità, 135
- SNR di, 99
- uniforme, 98
- vettoriale, 301
 - del canale di downlink, 740
 - del precoder, 740
- rapporto di aspetto, 861
- Rayleigh
 - fading di, 683
 - variabile aleatoria, 427
- Reed-Solomon
 - codice di, 576
- regola del prefisso, 255
- regressione lineare, 219
- REL, 299
- rete
 - ATM, 816
 - cellulare, 752
 - di accesso, 828
 - di trasporto, 844
 - in fibra ottica, 843
 - ad anello, 846
 - protezione, 845
 - ottica, 665
 - di trasporto, 667
 - passiva, 668
 - sincrona, 838
 - plesiocrona, 831
 - telefonica, 828
 - topologia, 842
- reti
 - due porte, 607
 - ingegneria delle, 767
- rettangolo, 21
- RGB (*Red, Green e Blue*), 309
- ribaltamento dell'asse dei tempi, 18
- ricevitore
 - a cancellazioni successive - VBLAST, 732
 - a minimo errore medio quadratico L-MMSE, 731
 - di massima verosimiglianza, 730
 - omodina, 371
 - ottimo, 466
 - equalizzato, 487
 - Rake, 696
 - zero forcing
 - MU-MIMO-OFDM, 747
 - zero-forcing, 730

- ridondanza, 7
 - ciclica, 478
 - delle fibre ottiche, 846
 - di diversità, 678
 - di sorgente binaria, 252
 - nella codifica di canale, 473, 567
 - OFDM, 524, 529
- riflessione ionosferica, 674
- ringback, 851
- ripetitore, 621
- riscontro, 806
- risoluzione
 - spaziale, 862
 - spettrale, 84, 202
- risonanza, 294
- risposta
 - di fase, 135
 - impulsiva, 70, 72
 - in frequenza, 26, 74
- ritardo, 209
- roll-off, coefficiente di, 452
- round trip time, 796
- routing, 665, 785, 808, 846
- RPE-LTP, 300
- rumore
 - additivo, 440
 - bianco limitato in banda, 456
 - dopo demodulazione FM, 420
 - nei ripetitori, 618
 - nelle reti due porte, 611
- RZ (*Return to Zero*), 447
- Rényi
 - entropia di, 270
- s-video, 863
- sample and hold, 94
- saturazione, 241
 - della d.d.p., 157
- SCART, 863
- scattering, diagramma di, 191
- schema di tolleranza, 121
- Schwartz, diseuguaglianza di, 50, 55, 222, 709
- SDH, 838
 - dispositivi, 843
 - trama, 839
- SDU (*service data unit*), 790
- segnalazione
 - a canale comune, 833
 - antipodale, 217
 - associata al canale, 833
 - ortogonale, 217
- segnale
 - a banda stretta, 405
 - a durata limitata, 17
 - analitico, 350
 - dati, 439, 441
 - generazione, 446
 - limitato in banda, 449
 - processo di, 164, 201
 - di crominanza, 861
 - di energia, 16
 - di potenza, 15
 - impulsivo, 16
 - modulato, 345
 - modulato (filtraggio), 399
 - passa-banda, 352
 - periodico, 14
 - rettangolare, 42
 - utile, 231
 - video composito, 310, 863
 - vocale, 294, 295
- selective repeat, 794
- selettività, 121
- send and wait, 791
- seno cardinale, 21
- sensibilità
 - del ricevitore, 642
 - e velocità nelle f.o., 661
- sequenza
 - pseudo-noise, 537
- sequenza (numero di), 797
- serie trigonometrica, 41
- sfarfallamento, 859
- SFN (single frequency network), 754
- shadowing, 681
- Shannon
 - lower bound, 276
 - primo teorema di, 254
 - secondo teorema di, 560
- Shannon-Hartley
 - legge di, 563
 - limite di, 516, 565
- signaling system n. 7, 852
- simmetria Hermitiana
 - dell'autocorrelazione, 196
 - della serie di Fourier, 39

- della trasformata di Fourier, 65
- per un passabanda, 407
- SIMO, 706
- sinc
 - definizione, 21
 - ortogonalità, 92
- sincronizzazione, 543
 - della crominanza, 862
 - di bit, 486
 - di bit e di parola, 482
 - di carattere, 485
 - di centrale, 834
 - di portante, 372
 - di rete, 837
 - di sequenza PN, 544
 - di simbolo, 484
 - di trama, 483
 - SFN, 757
- sindrome, 572
- SINR, 737, 741
- sintesi
 - di frequenza, 393
- sinusoide, 20
- SISO, 592
- sistema
 - a coda
 - finita, 780
 - infinita, 778
 - di servizio
 - orientato al ritardo, 777
 - orientato alla perdita, 772
- sistema autonomo, 810
- sistema lineare e permanente, 25, 55
- Snell, legge di, 654
- SNR, 2, 414, 459
 - codifica di sorgente, 278
 - di quantizzazione, 99
 - di Rayleigh, 707
 - di sistema, 416, 499
 - dopo demodulazione AM, 417
 - dopo demodulazione FM, 422
 - nei ripetitori, 620
 - per disturbi indipendenti, 244
- soft
 - decision decoding, 585
 - output Viterbi algorithm, 588
- soglie di decisione, 456
- somma
 - di controllo, 478
 - di processi, 209
 - di v.a. indipendenti, 155, 210
- sondaggio, 178
- SONET, 838
- sorgente
 - con memoria
 - continua, 279
 - discreta, 261
 - Markoviana, 261
 - non gaussiana, 282
 - senza memoria
 - continua, 266
 - discreta, 250
- sottocampionamento, 116
- SOVA, 587
- sovracampionamento, 94
- spazio
 - campione, 145
 - dei colori, 309
 - dei segnali, 47
 - normato, 49
- spettro di potenza
 - per segnali dati, 441
 - per segnali periodici, 46
- spettrogramma, 295
- sphere decoding, 730
- spread spectrum, 530
 - frequency hopping, 539
 - sequenza diretta, 532
- stabilità, 26, 134
- statistica, 170
 - del secondo ordine, 189
- stazione radio base (BS), 736
- STBC, 717
- STFBC, 746
- stima
 - della varianza, 291
 - di autocorrelazione, 211, 297
 - di canale
 - OFDMA, 750
 - di forma d'onda, 181
 - di intervallo, 174
 - di movimento, 321
 - di parametro, 172
 - di periodo, 298
 - spettrale, 201
 - LPC, 298

- STM-1, 839
 stratificazione ISO-OSI, 789
 subnetting, 809
 SVD (*Singular Value Decomposition*), 724
 sviluppo in frazioni parziali, 135
 SYN, 485
 Szego (teorema di), 286
- tail biting, 584
 Tanner
 - grafo di, 595
 tasso di codifica, 568
 TCM (*Trellis coded modulation*), 541
 TCP, 803
 TDD (*time division duplex*), 746
 temperatura
 - di antenna, 868
 - di sistema, 612
 tempo
 - di coerenza, 692
 - di guardia, 520
 - per una SFN, 755
 - di ritardo di gruppo, 406, 411
 teorema
 - centrale del limite, 153, 183
 - del campionamento, 89
 - della codifica di sorgente, 254
 - di Bayes, 147
 - di Parseval, 45
 - di Weinstein–Aronszajn, 723
 - di Wiener, 197*teorema*
 - di Parseval*, 64*teorema*
 - fondamentale per canali rumorosi*, 560
 teorema
 - di Pitagora, 49
 teorema di
 - Szego, 286
 teoria
 - dell'informazione, 249, 555
 - frequentista, 145
 - velocità-distorsione, 275
 three way handshake, 805
 Toeplitz
 - teorema di distribuzione, 286
 traffico
 - a valanga, 776
 - dolce, 769
 - intensità media, 773
 - offerto, 769
 - smaltito, 775
 transponder, 866
 transport stream, 334
 trasformata
 - di Fourier, 61
 - di Hilbert, 349, 356
 - discreta coseno, 314
 - zeta, 107, 132
 trasformata di
 - costante, 68
 - derivata, 77
 - gaussiana, 156
 - integrale, 78
 - segnale periodico, 69, 81
 - sequenze, 102
 - un gradino, 86
 - un rettangolo, 62
 - un sinc, 65
 - un treno di impulsi, 81
 - un triangolo, 79
 trasformata di
 - un coseno, 69
 trasformazione bilineare, 137
 traslazione
 - in frequenza, 67
 - nel tempo, 66
 - temporale, 18
 trasmissione
 - a circuito, 827
 - asincrona, 482
 - dati (in banda base), 439
 - dati (reti per), 782
 - FM broadcast, 863
 - MIMO, 701
 - multilivello, 444
 - numerica, 5
 - numerica (dimensionamento), 464
 - sincrona, 484
 - televisiva, 859
 transponder, 866
 treno di impulsi, 80, 90
 - rettangolari, 95
 triangolo, 21
 TSI (*Time Slot Interchanger*), 848

- UDP, 807
- UNICODE, 493
- uplink
 - MU-MIMO, 736
 - OFDM, 747
 - SAT, 865
- user equipment (UE), 736

- valore
 - atteso, 150, 159
 - efficace, 15, 162
 - medio, 14, 160
- valori singolari (scomposizione di matrice), 724
- variabile aleatoria, 148
 - di Bernoulli, 768
 - di Poisson, 770
 - di Rayleigh, 427
 - di Rice, 428
 - di Student, 177
 - dicotomica, 178
 - esponenziale negativa, 771
 - gaussiana, 153, 457
 - massima entropia, 284
 - multidimensionale, 167, 427
 - indipendenti e identicamente distribuite, 153
 - multivariata, 157
 - trasformazioni di, 164
 - uniforme, 152
- varianza, 152, 162
 - campionaria, 174
- VCO (*voltage controlled oscillator*), 372, 382, 383
- verifica di ipotesi statistica, 556
- verosimiglianza
 - funzione di, 171
 - logaritmica, 585, 591
 - rapporto di, 556
- VGA (*Video Graphics Array*), 308
- virtual container, 841
- Viterbi
 - algoritmo di, 583
 - uscite soffici, 587
 - decodifica di, 581
- VLAN (*virtual LAN*), 815
- VPN (*virtual private network*), 829

- water-filling, 280, 528, 726