

Copyright SAPIENZA Università di Roma - Dipartimento di Rilievo, Analisi, Disegno dell'Ambiente e dell'Architettura,
Roma 2009

Tutti i diritti sono riservati:

nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta in alcun modo (comprese fotocopie e microfilms) senza il permesso scritto del dottorando di ricerca in "Scienze della Rappresentazione e del Rilievo"

Scuola Nazionale di Dottorato in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo
I Ciclo 2005/2008

Sede Centrale di Coordinamento

Università degli Studi di Firenze

Direttore

Emma Mandelli

Sedi consorziate

Politecnico di Bari

Università di Catania - Siracusa

Università degli Studi "G. D'Annunzio" Chieti - Pescara

Università degli Studi di Firenze

Università degli Studi di Palermo

Università Mediterranea di Reggio Calabria

SAPIENZA Università di Roma

SAPIENZA Università di Roma

Dottorato di ricerca in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo

Ciclo XXI - Settore Disciplinare ICAR 17

Coordinatore

Laura De Carlo

Colleggio del Dottorato

Piero Albisinni, Carlo Bianchini, Laura Carnevali, Marco Carpiceci, Carlo Carreras,
Antonio Catizzone, Emanuela Chiavoni, Luigi Corvaja, Cesare Cundari,
Roberto De Rubertis, Mario Docci, Marco Fasolo, Antonino Gurgone, Maria Martone,
Riccardo Migliari, Lia Maria Papa, Leonardo Paris, Paola Quattrini, Fabio Quici,
Biagio Roma, Giorgio Stockel, Graziano Mario Valenti.

<i>Dottorando</i> Federico Fallavollita
<i>Coordinatore del Dottorato</i> Laura De Carlo
<i>Tutor</i> Laura De Carlo, Riccardo Migliari

Stampato e riprodotto in proprio.

Si ringrazia Ayse Istar Karamemet per l'impaginazione della tesi.

SAPIENZA Università di Roma - Dipartimento di Rilievo, Analisi, Disegno dell'Ambiente e dell'Architettura
Dottorato di ricerca in *Scienze della Rappresentazione e del Rilievo* - ICAR 17

Tesi di Dottorato di ricerca D.P.R. 382 del 11/7/1980
Ciclo XXI - Dicembre 2008

Federico Fallavollita

Le superfici rigate e le superfici sviluppabili
Una rilettura attraverso il laboratorio virtuale

Tutor:

Laura De Carlo, Riccardo Migliari

Dove non diversamente specificato tutte le immagini sono elaborazioni grafiche dell'autore da modellazione digitale.

Indice

Introduzione	09	<i>Quarta proprietà</i>	43
Hachette e les surfaces réglées	15	Laboratorio sperimentale della geometria descrittiva	43
La generazione delle superfici e loro definizioni	15	La genesi proiettiva delle superfici quadriche rigate	51
<i>Le superfici sviluppabili</i>	16	Forme proiettive nello spazio	52
<i>Le superfici rigate</i>	18	<i>Genesi proiettiva delle quadriche gobbe</i>	52
Esempi di piani tangenti alle superfici sviluppabili e alle superfici di rivoluzione rigate	18	<i>Coni e cilindri quadrici</i>	65
Le sezioni piane delle superfici sviluppabili e dell'iperboloide di rivoluzione	23	<i>Sistema polare rispetto ad una quadrica</i>	74
<i>L'iperboloide di rivoluzione</i>	23	<i>Centro, diametri, assi delle quadriche</i>	77
<i>Gli asintoti delle sezioni piane d'un iperboloide di rivoluzione</i>	25	Forme proiettive del piano	81
<i>Le sezioni piane dell'iperboloide di rivoluzione a una falda</i>	26	<i>Teoremi di Pascal e di Brianchon.</i>	81
La superficie rigata elementare o l'iperboloide a una falda	26	<i>Conseguenze e costruzioni relative</i>	
<i>Le sezioni piane e il piano tangente ad una quadrica rigata</i>	29	<i>Sistema polare rispetto ad una conica</i>	90
Iperboloidi tangenti secondo una retta alla superficie rigata generale	32	<i>Centro, diametri, assi delle coniche</i>	94
Esempi di paraboloidi tangente alle superfici rigate	36	<i>Fuochi delle coniche</i>	99
Iperboloide osculatore	37	Laboratorio sperimentale della geometria descrittiva	100
Rappresentazione delle proprietà principali delle superfici rigate	38	<i>Costruzione del cono quadrico date cinque rette passanti per uno stesso punto S e costruzione degli assi e delle sezioni principali</i>	100
<i>Prima proprietà</i>	38	<i>Costruzione di un iperboloide ad una falda date tre rette sghembe r, s, t</i>	101
<i>Seconda proprietà</i>	40	Le superfici rigate e le superfici sviluppabili nel quadro del rinnovamento della geometria descrittiva	109
<i>Terza proprietà</i>	43	Le linee sghembe e le superfici sviluppabili	110
		<i>Piano tangente di una sviluppabile</i>	111
		<i>Sviluppo di una superficie S formata dalle infinite tangenti alla curva sghemba C</i>	113
		<i>Coni e Cilindri</i>	114

<i>Sviluppo del cono e del cilindro sopra un piano</i>	115	<i>Generatrici singolari e cilindriche</i>	167
<i>Tangenti principali. Punti ellittici, parabolici, iperbolici</i>	118	<i>Linea di stringimento</i>	167
<i>Linee asintotiche</i>	120	Le superfici rigate elicoidali	168
<i>Linee di curvatura. Proprietà delle normali a una superficie nei punti di una linea di curvatura</i>	120	<i>Elicoide sviluppabile</i>	169
<i>Sezioni omologiche piane di coni e cilindri</i>	122	<i>Superficie di pendenza uniforme</i>	170
<i>Casi particolari di sviluppo di un cono e di un cilindro</i>	123	<i>Elicoide obliquo a direttrice rettilinea</i>	171
<i>Coni e cilindri di 2° grado e loro intersezioni</i>	123	<i>Elicoide conoide retto</i>	172
Le quadriche rigate	126	La curvatura delle superfici rigate e delle superfici sviluppabili	173
<i>Il sistema polare rispetto ad una quadrica rigata</i>	128	<i>Superfici a curvatura totale identica nulla</i>	174
<i>Piani tangenti ad una quadrica rigata per una retta data r</i>	129	<i>Superfici a curvatura totale negativa</i>	175
<i>L'immagine di una quadrica rigata</i>	131	<i>Superfici a curvatura media nulla</i>	175
<i>Iperboloide ad una falda</i>	132	Bibliografia	179
<i>Proiezione stereografica di un iperboloide ad una falda</i>	137	Appendice. Le superfici rigate e le superfici sviluppabili in alcuni apparecchi per pietre da tagli	185
<i>L'iperboloide di rivoluzione</i>	138	Apparecchio elicoidale	186
<i>Il paraboloide iperbolico</i>	141	Modellazione della épure de l'arrière-vousure de Marseille	192
<i>Il paraboloide iperbolico equilatero</i>	144	Abstract	197
<i>Il paraboloide iperbolico come superficie di traslazione</i>	144		
<i>Riduzione in facce piane della superficie quadrica rigata</i>	148		
Le superfici rigate	154		
<i>Proprietà grafiche delle rigate</i>	154		
<i>Costruzione di una rigata avente tre direttrici assegnate</i>	155		
<i>Rigate algebriche. Ordine della rigata determinata da tre direttrici algebriche</i>	157		
<i>Teorema di Chasles</i>	158		
<i>Conseguenze del teorema di Chasles</i>	159		
<i>Proprietà metriche delle rigate. Piani asintoti. Cono direttore</i>	163		
<i>Paraboloide delle normali</i>	165		
<i>Punto centrale e piano centrale di una generatrice</i>	165		
<i>Parametro di una generatrice</i>	166		

Introduzione

Questo studio ha lo scopo di illustrare le proprietà delle superfici rigate e delle superfici sviluppabili attraverso gli strumenti del laboratorio informatico. La ricerca si colloca all'interno dei fondamenti scientifici del disegno e del metodo della rappresentazione matematica e, in linea generale, vuole essere un contributo al rinnovamento della geometria descrittiva. La tesi è strutturata in due momenti fondamentali:

la ricognizione storica delle superfici rigate e delle superfici sviluppabili dal punto di vista della geometria solida e della geometria descrittiva;

la rilettura delle proposizioni teoriche che riguardano queste due specie di superfici attraverso una serie di esperimenti compiuti nell'ambito del laboratorio virtuale della nuova geometria descrittiva.

Il laboratorio virtuale è quella "bottega" digitale nella quale è possibile controllare direttamente nello spazio tridimensionale i problemi di generazione della forma che interessano la geometria e l'architettura. Di volta in volta verranno descritti i problemi affrontati e le operazioni svolte nell'ambito del laboratorio. Quando è necessario verranno introdotti in breve i concetti relativi alla modellazione NURBS¹, che sono indispensabili per capire alcuni punti critici.

Il computer, al di là dei problemi riscontrati nella modellazione, si è rilevato uno strumento indispensabile per la visualizzazione di alcune proprietà delle rigate. Molte tra le considerazioni teoriche che ho analizzato sono, infatti, solamente enunciate in letteratura e non vengono mai rappresentate. Penso ad alcune proprietà spiegate da Hachette ma non solo. La ragione di questo particolare carattere della letteratura geometrica classica è da ricercare nella complessità dei disegni che si sarebbero dovuti eseguire con il solo strumento della Geometria descrittiva.

Hachette, come Monge prima di lui, era un matematico.

Per cui molte delle considerazioni sulle rigate sono il frutto di studi analitici o più semplicemente di intuizioni geometriche. La rappresentazione, quando è affatto macchinosa, viene lasciata all'immaginazione del lettore. Lo scopo della ricerca è anche quello di rendere visibile ciò che è solo enunciato a parole su basi teoriche. È interessante quanto afferma Hachette in proposito:

La geometria descrittiva così come la consideriamo in questo libro, contiene due parti, l'una razionale (rationnelle), e l'altra tecnica (technique). La prima parte, puramente teorica, si riaggancia a una branca della matematica, che abbraccia tutte le proprietà delle figure estese, e che i più grandi geometri hanno trattato o con l'analisi o con la sintesi. La parte tecnica della geometria descrittiva è l'arte di rappresentare su dei fogli da disegno, i punti, le linee dello spazio; essa ha per base il metodo delle proiezioni; la pratica di questo metodo esige un colpo d'occhio sicuro, una mano esercitata, che sappia impiegare con abilità la riga, il compasso e la squadra.²

Oggi questo duplice aspetto della disciplina del disegno è divenuto ancora più evidente. La rivoluzione informatica se da un lato facilita la rappresentazione dello spazio, dall'altro esige una maggiore conoscenza delle proprietà geometriche delle forme nello spazio. Questa dicotomia che caratterizza la geometria descrittiva rende urgente una rivisitazione dei problemi geometrici per poter rafforzare il disegno come metodo scientifico d'analisi. Lo stesso Loria, matematico del secolo scorso, afferma che la costruzione è un "metodo di dimostrazione esistenziale".³ Penso, infatti, che il contributo più importante della rivoluzione informatica nello studio della geometria descrittiva non sia semplicemente l'aver potenziato la rappresentazione in sé (la capacità

di rappresentare direttamente nello spazio e le infinite possibilità grafiche come il rendering e l'animazione), quanto piuttosto l'aver consolidato il disegno come strumento della logica, ovvero come strumento di scoperta e verifica del pensiero geometrico; per dirla in altre parole la capacità di vedere e toccare veramente le cose. Questa non è un'idea nuova, al contrario, si può dire che, secondo alcuni studiosi⁴, sia stata il fondamento della matematica e del metodo scientifico. Cercherò di spiegarmi meglio con alcuni esempi.

Fino all'avvento del computer gli strumenti principali del disegno sono stati la riga e il compasso. Ma cosa significa per la geometria classica fare una costruzione con riga e compasso? Vuol dire compiere un certo numero di operazioni attraverso l'uso *esclusivo* di due linee: il cerchio e la retta. Per il matematico greco l'utilizzo della riga e del compasso erano necessari per il ragionamento deduttivo, per il calcolo e per il disegno. La matematica euclidea, di fatto, nasce esplicitamente come la "teoria scientifica dei disegni eseguibili con riga e compasso"⁵. In Euclide la sinergia tra il disegno e il ragionamento geometrico è evidente. Tuttavia la matematica ha sviluppato nel tempo altri strumenti come il calcolo differenziale e il linguaggio, nel corso dei secoli, si è fatto sempre più astratto fino a relegare, ai giorni d'oggi, lo studio sintetico della geometria ad una branca quasi morta. È esistito, però, un momento nella storia della matematica e della rappresentazione in cui queste due strade, ovvero quella sintetica del disegno e quella astratta dell'analisi matematica, hanno seguito percorsi paralleli. Mi riferisco al periodo dei geometri della rivoluzione, in particolare a Monge e ai suoi allievi. Monge oltre ad essere il fondatore riconosciuto della *Geometria descrittiva* è stato un protagonista importante nello sviluppo dell'analisi matematica. Gaultier, un altro professore dell'École polytechnique che a suo tempo fu anche allievo di Monge assieme ad Hachette, ricorda in un suo *mémoire*⁶ come il disegno, in alcuni casi, può essere ancora più efficace per risolvere determinati problemi. In quel caso egli si riferiva al problema di determinare una sfera tangente ad altre quattro. Il patrimonio che questi matematici ci hanno lasciato è il giusto testimone di questo connubio felice tra la matematica e il disegno. Ovviamente questa sinergia è stata possibile grazie alla

nascita della Geometria descrittiva, ovvero ad una teoria dei metodi della rappresentazione che ha potenziato notevolmente le possibilità di utilizzo della riga e del compasso. Esistono nella storia della scienza numerosi esempi di ricerca tra rappresentazione visiva e matematica ma non è mai esistita una scuola che, come *L'École Polytechnique*, abbia saputo fare della rappresentazione un metodo di ricerca e un carattere peculiare della propria identità.

Il Novecento è stato il secolo che ha visto i matematici abbandonare sempre di più la via sintetica per privilegiare l'austerità algebrica. Una tendenza che perfino Hilbert ha perseguito, nonostante un formidabile testo come *Geometria Intuitiva*⁷. Ormai per i matematici le figure sembravano non contare più nulla.

Ma la geometria intesa nel modo classico era davvero morta? Non tutti la pensavano così, per fortuna. C'era un "umile geometra, un uomo pratico che amava sentire tra le mani le sue forme e i suoi modelli, farli girare tra le dita, scrutarne attentamente i più reconditi aspetti per coglierne le loro proprietà geometriche intrinseche"⁸. Questo geometra era Donald Coxeter, "il re della geometria". Attualmente egli è considerato colui che ha maggiormente contribuito allo sviluppo della geometria pura nel secolo scorso ed è da alcuni considerato colui che l'ha salvata da una possibile estinzione. È noto per i *gruppi di Coxeter* e i *diagrammi di Coxeter* e per aver studiato la simmetria secondo nuovi criteri.

Oggi la rivoluzione informatica⁹ dà agli studiosi di geometria descrittiva la possibilità di studiare e scoprire le proprietà delle figure direttamente nello spazio. Il disegno geometrico digitale è, soprattutto, uno strumento della logica del pensiero. Probabilmente siamo di fronte a una nuova possibilità di sviluppo della disciplina pari a quella avvenuta dopo la rivoluzione francese grazie alla codificazione del metodo di Monge.

Il computer ci consente di rivisitare problemi geometrici classici in una nuova luce. Penso, per esempio, alla nuova soluzione data da Riccardo Migliari al problema di Apollonio nello spazio¹⁰. Ma la storia della geometria descrittiva è ricca di problemi che meritano una rilettura e una fonte inesauribile è l'École Polytechnique con i suoi annali. Tra questi problemi ci sono quelli relativi alle superfici rigate e alle superfici sviluppabili.

Le superfici rigate erano note già da diverso tempo, con il nome di *surfaces gauches*, prima che Jean Pierre Nicholas Hachette desse loro il nome attuale. Hachette dunque è colui che per primo ha studiato queste superfici approfonditamente e ne ha dato una catalogazione che, a mio modo di vedere, è ancora valida oggi. Prima di iniziare lo studio vero e proprio delle superfici rigate è interessante riportare il passo di Hachette in cui chiarisce l'origine del nome *surfaces réglées* coniato da lui stesso:

*On a appelé jusq'à présent surface gauche, toute surface engendrée par une droite mobile, quelle que soit la loi du mouvement de cette droite, pourvu néanmoins que deux droites consécutives, qui comprennent un élément de la surface, ne se rencontrent pas. Chaque élément est un petit plan gauche; mais l'ensemble de ces éléments forme souvent des surfaces très-régulières, qui ne conservent aucune apparence de difformité. Nous étions convenus avec Monge de les appeler surfaces réglées; ce qui motive cette dénomination, c'est qu'on peut appliquer une règle sur les droites de la surface, et s'assurer ainsi qu'elle est exécutée rigoureusement.*¹¹

La regolarità, la simmetria e la forma elegante di alcune superfici rigate, come l'iperboloide iperbolico generato da una retta che si appoggi a tre direttrici rette sghembe qualsiasi, non potevano essere denominate superfici *sghembe*¹². Hachette ha pensato, giustamente, di sostituire l'aggettivo *sghembe* con *rigate*, un termine che dà ragione della bellezza di molte di queste superfici.

Un'altra questione che è d'obbligo specificare, riguarda la distinzione accennata nel titolo *superfici rigate e le superfici sviluppabili*. Hachette ci insegna che esistono due tipi differenti di superfici generate da una retta: *le superfici sviluppabili che godono della proprietà di poter essere sviluppate su un piano e le superfici rigate che non sono affatto sviluppabili*. Questo studio si attiene, dunque, alle definizioni di Hachette.

Struttura della ricerca

Lo studio è articolato in tre capitoli e in un'appendice finale sull'applicazione delle superfici rigate e delle superfici sviluppabili in alcuni apparecchi per pietre da taglio.

Il primo è dedicato a *Jean Nicolas Pierre Hachette* e al suo lavoro sulle *surfaces réglées: Hachette e les surfaces réglées*. Come ho ricordato, Hachette spiega che la Geometria descrittiva si compone di due parti: l'una razionale, che comprende le soluzioni sintetiche dei problemi relativi alle proprietà delle figure, l'altra semplicemente grafica, che consiste nell'arte di rappresentare esattamente la forma e la posizione delle linee situate nello spazio. Questa rappresentazione, che un tempo si faceva sopra un foglio da disegno, oggi si fa col computer direttamente nello spazio, quello spazio virtuale che può essere osservato attraverso lo schermo del computer stesso. Tuttavia un disegno di Geometria descrittiva rimane costituito da linee e superfici che servono per arrivare alla soluzione di un problema proposto. Gran parte del capitolo in questione è una traduzione del trattato di Hachette.

Il trattato di Hachette¹³ è diviso in due libri: il primo contiene *la géométrie descriptive pure*; il secondo riguarda due capitoli che hanno per titoli: *Lieux géométriques* e *Ombres et perspectives linéaires*. La ricerca, infine, comprende un'appendice, nella quale si espongono i principi della stereotomia applicata al taglio della pietra.

La prima parte di questo studio è dedicata ad una riletture del primo libro di Hachette e ad una ricostruzione tridimensionale dei procedimenti stereotomici descritti nell'appendice. Hachette dopo aver stabilito la divisione delle superfici di secondo grado in cinque specie differenti che nomina *ellissoide, iperboloide a una falda, iperboloide a due falde, paraboloido ellittico, paraboloido iperbolico*, si occupa fondamentalmente dello studio delle proprietà geometriche delle rigate e in particolare delle superfici rigate di secondo grado: l'iperboloide a una falda e il paraboloido iperbolico o *plan gauche*. Le proprietà più importanti delle superfici rigate sono le seguenti:

- tutte le superfici rigate hanno come superficie normale lungo una retta, un iperboloide a una falda, o un plan gauche i cui parametri variano per ciascuna retta;

- tutte le superfici rigate hanno per superficie osculatrice lungo una retta, un iperboloide a una falda de-

*terminato, i cui parametri variano per ciascuna retta;
- tutte le superfici rigate hanno per superfici tangenti lungo una retta, un'infinità d'iperboloidi a una falda;
- due superfici rigate che abbiano una retta in comune e tre piani tangenti comuni in tre punti differenti di questa retta, sono tangenti l'una all'altra lungo tutti i punti della retta loro comune.*

Vorrei far notare subito che la prima proprietà così come è enunciata da Hachette è inesatta, perché la superficie normale lungo una retta di una superficie rigata è sempre un paraboloide iperbolico e non un iperboloide (come precisano autori più moderni, ad esempio Gino Fano). Hachette, purtroppo, non aveva gli strumenti per potersene rendere conto. Egli, infatti, non poteva fare una verifica sperimentale di questa proprietà, come abbiamo fatto noi, e non poteva neppure studiarla con gli strumenti della geometria proiettiva, sorta, come è noto, con Jean-Victor Poncelet negli stessi anni in cui Hachette compieva i suoi studi (vedi il paragrafo *paraboloide delle normali*).

Il secondo capitolo di questo studio è perciò dedicato alla *Geometria proiettiva* delle superfici quadriche rigate e si occupa della descrizione della genesi proiettiva e delle proprietà di queste superfici. Le principali fonti sono i lavori di Guglielmo Fiedler¹⁴ oltre ai testi di Geometria proiettiva di Ferdinando Aschieri¹⁵ e Francesco Severi¹⁶.

La Geometria proiettiva si è sviluppata proprio negli stessi anni in cui Jean Nicolas Pierre Hachette studiava le superfici rigate. Generalmente si fa risalire la nascita della geometria proiettiva al trattato di Jean-Victor Poncelet del 1822¹⁷. Alcuni studiosi indicano, correttamente, come contributi iniziali significativi gli studi di Girard Desargues (1591–1661)¹⁸ e Blaise Pascal (1623–62)¹⁹. Vorrei far notare che il trattato di Hachette è datato 1828, quindi è di cinque anni più vecchio di quello di Poncelet. La geometria proiettiva sintetica, però, così come ci è nota oggi, si è sviluppata a partire dal 1822 per raggiungere la sua piena maturità solo alla fine del secolo XIX con Fiedler e Aschieri (1888 circa). La ragione che mi ha spinto a mettere come secondo capitolo la genesi proiettiva delle rigate è dovuta sia a ragioni storiche e sia, soprattutto, a

ragioni di completezza e maturità di idee. La Geometria proiettiva è stato l'ultimo campo della matematica in cui i matematici abbiano utilizzato il disegno come strumento di studio e in cui il metodo sintetico raggiunge la sua piena maturità. Nelle pagine che seguono non ho voluto riscrivere un trattato di geometria proiettiva ma ho unicamente riletto alcune questioni che mi sono sembrate particolarmente significative alla luce dei nuovi strumenti a disposizione. Per cui non ho pensato necessario introdurre alcuni concetti (come forme di prima specie o fasci proiettivi) ma ho soltanto aggiunto alcune note esplicative. L'intento non è tanto quello di spiegare questa bellissima scienza quanto quello di sperimentare alcuni teoremi direttamente nello spazio e mostrare come oggi sia possibile comprenderla e finalmente rappresentarla per davvero. Penso, infatti, che un capitolo fondamentale, per il rinnovo della geometria descrittiva, sia la rilettura, direttamente nello spazio virtuale, dei concetti della geometria proiettiva che riguardano le omografie dello spazio. Questa operazione permette di "toccare" idee astratte e di renderle reali. La precisione dello strumento informatico, inoltre, mi ha permesso di sperimentare alcune vecchie questioni secondo una luce nuova. Una parte di grande interesse è stata dedicata alle coniche, come prodotto di fasci proiettivi, e all'applicazione del teorema di Pascal e Brianchon con il metodo della rappresentazione matematica. Ho potuto sperimentare, per esempio, come per cinque punti passi effettivamente una conica ed estendere allo spazio il teorema di Pascal/Brianchon. Ho potuto altresì sperimentare come due fasci di piani prospettivi nello spazio determinano una superficie che è un iperboloide rigato. Inoltre ho potuto disconnettere i due fasci, e muoverli liberamente nello spazio ed osservare che la proiettività si conserva e che i due fasci proiettivi nelle loro nuove posizioni determinano un altro iperboloide rigato. Grazie allo studio della Geometria proiettiva, ho cercato di mettere a punto una procedura per la costruzione esatta, attraverso il metodo della rappresentazione matematica, di un iperboloide ad una falda date tre rette sghembe. La possibilità di rappresentare direttamente nello spazio le figure della Geometria proiettiva è un metodo molto efficace per la comprensione di questa scienza. Una scienza dove la rappresentazione è lo strumento principe della logica del pensiero geometrico.

Nell'ultimo capitolo *Le superfici rigate e le superfici sviluppabili nel quadro del rinnovamento della geometria descrittiva*, rivedremo alcune delle proprietà studiate e altre nuove secondo una catalogazione delle superfici proposta, in gran parte, da Gino Fano nel suo trattato di Geometria descrittiva²⁰. Nella vasta letteratura sulle superfici rigate è il testo che ha saputo maggiormente riepilogare la descrizione di queste superfici secondo un approccio puramente sintetico descrittivo. Anche qui, però, come nei due capitoli precedenti alcune delle proprietà descritte non vengono rappresentate dal matematico ma sono solo enunciate per via sintetica e, in alcuni casi, per via analitica. Il lavoro di ricerca è consistito, in una prima fase, nella rilettura attenta dei vari problemi e in una seconda fase nella rappresentazione. In definitiva ho cercato di riassumere diverse questioni alla luce dei nuovi strumenti e di illustrare, attraverso il metodo della rappresentazione matematica, proprietà che prima erano state solo descritte analiticamente ma mai effettivamente disegnate. Per esempio attualmente, il laboratorio virtuale consente di poter disegnare direttamente nello spazio tridimensionale il *paraboloide delle normali* di una superficie rigata. Oppure possiamo individuare in modo esatto il *punto centrale* di una generatrice di una superficie rigata. O ancora possiamo ottenere, in modo automatico, una *proiezione stereografica* di una quadrica rigata e ottenere un disegno che metta in luce, attraverso un'unica rappresentazione, diverse proprietà di queste bellissime superfici. È abbastanza singolare che di questo disegno non si trovi traccia alcuna nei vari testi di geometria descrittiva. In fondo la sua rappresentazione può essere benissimo fatta attraverso gli strumenti tradizionali, intendo senza il computer, e tuttavia questa rappresentazione passa attraverso un ragionamento del tutto spaziale. Proprio qui è possibile scorgere la grande potenzialità dei nuovi strumenti digitali: la possibilità di ragionare e rappresentare direttamente nello spazio ci dà un vantaggio considerevole rispetto ai diversi studiosi che ci hanno preceduto. Oggi diventa necessario poter recuperare e rielaborare gli studi di geometria descrittiva e rappresentarli direttamente nello spazio per arricchire il campionario possibile delle figure astratte di questa disciplina. Figure che sono un risultato notevole sia per la comprensione della geometria descrittiva stessa, e sia come ispirazione per i futuri architetti e designer.

In conclusione è lecito domandarsi perché è importante rileggere vecchi trattati di Geometria descrittiva alla luce delle nuove conoscenze. Attraverso le immagini di questo studio ho cercato di dare una risposta possibile provando a seguire quel rinnovamento della scienza della rappresentazione che, ormai da anni, ha coinvolto molti ricercatori dell'area. Aggiungo solo un'ultima considerazione che riguarda la rivoluzione informatica: il computer ci dà l'illusione di vivere uno spazio tridimensionale alternativo e di poterlo effettivamente controllare, ma il mondo della geometria è un mondo ideale. Ora, grazie a questa rivoluzione tecnologica, lo scarto tra il mondo reale e quello ideale della geometria si è fatto più sottile e ciò potrebbe indurre alcuni di noi ad abbassare la guardia e a trascurare lo studio della geometria dello spazio e della Geometria descrittiva. Invece è proprio rileggendo i vecchi problemi alla luce delle nuove tecnologie, che saremo in grado d'intensificare la conoscenza e scoprire nuove questioni. Oggi, grazie all'informatica, possiamo osservare due superfici rigate che si "baciano", laddove Hachette, dal canto suo, poteva solo immaginarle. Non bisogna dimenticare, però, che la geometria, quella vera, si vede prima nella nostra mente.

Note

1. NURBS è un acronimo che sta per Non Uniform Rational B-Splines, traducibile in "B-Splines razionali non uniformi", una classe di curve geometriche utilizzate in computer grafica per rappresentare curve e superfici.

2. Hachette Jean Nicolas Pierre (1828), *Traité de Géométrie Descriptive*, Paris. Pag. XI. "La géométrie descriptive, telle qu'on la considère dans ce premier livre, contient deux parties, l'une rationnelle, e l'autre technique. La première, purement théorique, se rattache à une branche importante des mathématiques, [...]".

3. Loria Gino (1935), *Metodi matematici: essenza, tecnica, applicazioni*, Milano.

4. Russo Lucio (1998), *La rivoluzione dimentica*, Feltrinelli, Milano. L'utilizzo, nell'antichità, della riga e del compasso era dovuto anche a due motivi non trascurabili. Innanzitutto la precisione tecnica, che era misurabile dal rapporto dello spessore del segno utilizzato con la lunghezza della linea; e, di non minore importanza, la facilità di riproduzione del risultato. Ora è risaputo che qualsiasi

cerchio disegnato con un compasso non sarà mai un cerchio perfetto. Ed è proprio dall'astrazione di questi due strumenti, e "l'utilizzo di strumenti ideali che nasce la scienza matematica".

5. Vedi Nota 4.

6. Gaultier Louis de Tours (1812), *Mémoire, Sur les Moyens généraux de construire graphiquement un Cercle détermine par trois conditions, et une Sphère détermine par quatre conditions; Lu à la première Classe de l'Institut, le 15 Juin 1812, Journal de l'école polytechnique, XVI, 124 – 21*, Paris.

7. Hilbert David, Cohon-Vossen Stefan (1972), *Geometria Intuitiva*, Torino.

8. Roberts Siobhan (2006), *Il re dello spazio infinito*, Milano. Pag. 31.

9. Emmer Michele (2006), *Visibili Armonie*, Torino. Pag. 368. "Diventa possibile costruire una superficie su di un terminale video e quindi muoverla e trasformarla per studiarne meglio le proprietà. Oltre che agire come aiuto all'intuizione, i computer diventavano strumenti essenziali per la costruzione dei modelli. La grande potenzialità della computer graphics come mezzo d'investigazione venne riconosciuta dai matematici subito dopo che le nuove tecnologie divennero disponibili. Man mano che strumenti e programmi informatici si facevano più sofisticati, aumentavano anche la profondità e la rilevanza delle applicazioni della computer graphics ai problemi matematici. Dopo i primi tentativi degli anni settanta vi è stato un notevole incremento dell'uso della computer graphics in matematica; il che ha comportato lo sviluppo di un settore specifico della matematica che possiamo chiamare visual mathematics. Non si tratta soltanto, come si potrebbe pensare, di rendere visibili, di visualizzare cioè, fenomeni ben noti tramite strumenti grafici, ma piuttosto di utilizzare strumenti visivi per farsi un'idea dei problemi ancora aperti nella ricerca matematica. Il computer come un vero e proprio strumento per sperimentare e formulare congetture,

insomma. Negli ultimi anni sono avvenuti numerosi cambiamenti nel settore della visualizzazione matematica."

10. Migliari Riccardo (2008), vedi Ikhnos e Disegnare.

11. Hachette Jean Nicolas Pierre, *Op. cit.* Pag. XIII. "Abbiamo chiamato fino ad oggi *superfici sghembe*, tutte quelle superfici generate da una retta mobile, quale che sia il movimento di questa retta, purché due rette consecutive, che comprendono un elemento della superficie, non si incontrino mai. Ogni elemento è un piccolo piano *sghembo*; ma l'insieme di questi elementi forma spesso delle superfici molto regolari, che non presentano nessuna apparenza di difformità. Abbiamo deciso con Monge di chiamarle *superfici rigate*; quello che motiva questa denominazione, è che possiamo applicare una riga sulle rette della superficie e assicurarci così che sia eseguita correttamente".

12. Il termine *gauche* in francese ha anche il significato di *sinistro* per cui può avere un'accezione negativa.

13. Hachette Jean Nicolas Pierre (1828), *Op. Cit.*, Paris.

14. Fiedler Guglielmo (1874), *Trattato di Geometria Descrittiva*, Firenze.

15. Aschieri Ferdinando (1888), *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Milano.

16. Severi Francesco (1926), *Geometria Proiettiva*, Firenze.

17. Poncelet Jean-Victor (1822), *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris.

18. Girard Desargues (Febbraio 21 or March 2, 1591-Ottobre 1661) è considerato il fondatore della geometria proiettiva soprattutto grazie al teorema che porta il suo nome.

19. Blaise Pascal (Giugno 19, 1623 – Agosto 19, 1662) ha scoperto il teorema che porta il suo nome sulle proprietà di un esagono inscritto in una conica all'età di sedici anni.

20. Fano Gino (1925), *Lezioni di Geometria Descrittiva*, Torino.

Hachette e les surfaces réglées

Il primo capitolo è dedicato a *Jean Nicolas Pierre Hachette* e al suo lavoro¹ sulle *surfaces réglées*. Il capitolo, in particolare, è dedicato ad una rilettura del primo libro di Hachette. La ricostruzione tridimensionale di un esempio di *épure* di stereotomia descritta nel trattato è riportata nell'appendice della tesi. Lo studio, come già precisato, è una rilettura di alcune considerazioni sulle superfici rigate e sulle superfici sviluppabili attraverso il metodo della rappresentazione matematica. Per cui gran parte del lavoro in questione è una traduzione del trattato di Hachette.

Il matematico francese dopo aver stabilito la divisione delle superfici di secondo grado in cinque specie differenti che nomina *ellissoide*, *iperboloide a una falda*, *iperboloide a due falde*, *paraboloide ellittico*, *paraboloide iperbolico*, si è occupato fondamentalmente dello studio delle proprietà geometriche delle rigate generiche e delle quadriche rigate: l'iperboloide a una falda e il paraboloide iperbolico o *plan gauche*.² Le proprietà più importanti di queste superfici, che si vuole rappresentare, sono le seguenti:

- tutte le superfici rigate hanno come superficie normale lungo una retta, un iperboloide a una falda, o un plan gauche i cui parametri variano per ciascuna retta³;

- tutte le superfici rigate hanno per superficie osculatrice lungo una retta, un iperboloide a una falda determinato, i cui parametri variano per ciascuna retta;

- tutte le superfici rigate hanno per superfici tangenti lungo una retta, un'infinità d'iperboloidi a una falda;

- due superfici rigate che abbiano una retta in comune e tre piani tangenti comuni in tre punti differenti di questa retta, sono tangenti l'una all'altra lungo tutti i punti della retta loro comune.

Ho deciso di attenermi il più possibile al testo del trattato originale tralasciando alcuni paragrafi e alcuni passaggi

legati al metodo della rappresentazione di Monge⁴. In effetti Hachette espone gran parte dei suoi ragionamenti nello spazio in modo generale per cui il mio lavoro è consistito nel tradurre nello spazio tridimensionale virtuale del laboratorio della geometria descrittiva tali considerazioni. La prima parte del capitolo, allora, è una rilettura, passo dopo passo, delle considerazioni di Hachette per arrivare finalmente alla rappresentazione delle proprietà anzidette. L'apporto originale della ricerca è consistito nell'aver sperimentato direttamente nello spazio, attraverso il metodo della rappresentazione matematica, tali considerazioni. Nella parte conclusiva del capitolo è presente un'appendice, intitolata *Laboratorio sperimentale della geometria descrittiva*, in cui descrivo alcuni esempi significativi attraverso le operazioni svolte nel laboratorio virtuale. Credo, infatti, che sia importante condividere l'esperienza tecnica del disegno in modo tale che ciascuno possa a sua volta ripetere esattamente l'esperimento descritto. Una parte fondamentale del lavoro è stato il tentativo di ottimizzare il disegno di queste proprietà attraverso lo strumento della rappresentazione matematica.

La generazione delle superfici e loro definizioni

Possiamo considerare una linea curva come il luogo geometrico d'un punto mobile soggetto a una o più forze che sono costanti, o che variano per ciascuna posizione del punto; la legge del movimento determina la natura della curva. Supponendo che tutte le forze costanti o variabili che agiscono sul punto mobile cessino la loro azione, il punto continuerà a muoversi seguendo una linea retta che sarà la tangente alla curva⁵.

Possiamo definire la tangente d'una curva, una linea retta che ha soltanto un punto in comune con la curva, tale che non sia possibile far passare nessuna altra retta tra la tangente e la curva. Comunque sia la curva, sghemba

o piana, le proiezioni delle tangenti di questa curva sono tangenti alle proiezioni della curva.

Una curva può essere definita come il limite d'una infinità di poligoni che hanno come lati delle corde successive della curva. Quando i poligoni si confondono con la curva, i suoi lati diventano gli elementi della curva e i suoi prolungamenti determinano le tangenti. Una superficie potrebbe essere decomposta in un grande numero di parti dove ogni elemento possa essere considerato come un piano, il piano di questo elemento prolungato indefinitamente è un piano tangente della superficie. L'elemento ridotto a un punto fisico è il punto di contatto. Il piano tangente contiene le tangenti di tutte le linee piane o sghembe fatte passare per la superficie del punto di contatto; due tangenti qualsiasi individuano il piano tangente. La perpendicolare a questo piano è una normale alla superficie; sezionando la superficie con dei piani passanti per una normale alla superficie, le sezioni fatte sulla superficie si chiamano sezioni normali.

Tutte le linee piane o sghembe possono essere considerate come o l'intersezione di una superficie curva con un piano o l'intersezione di due superfici curve. La tangente in un punto qualsiasi della curva piana è l'intersezione del piano tangente alla superficie in questo punto e del piano della curva; la tangente in un punto qualsiasi della curva sghemba è la retta intersezione di due piani tangenti passanti per questo punto alle due superfici dove la curva è l'intersezione: queste due proposizioni sono delle conseguenze della definizione di piano tangente ad una superficie.

Esistono due tipi di piani tangenti; il primo tipo ha in comune con la superficie solo il punto di contatto⁶ e tutte le sezioni normali che passano per questo punto sono poste dalla stessa parte in rapporto al piano tangente. Quando le sezioni normali sono poste da parti differenti in rapporto al piano tangente, questo piano è del secondo tipo: ovvero è sia tangente che secante⁷.

In geometria descrittiva consideriamo una superficie come il luogo d'una curva mobile dove la forma costante o variabile è data in ciascun istante; la legge del movimento di questa curva determina la forma e la posizione della superficie: chiamiamo questa curva la *generatrice* della superficie.

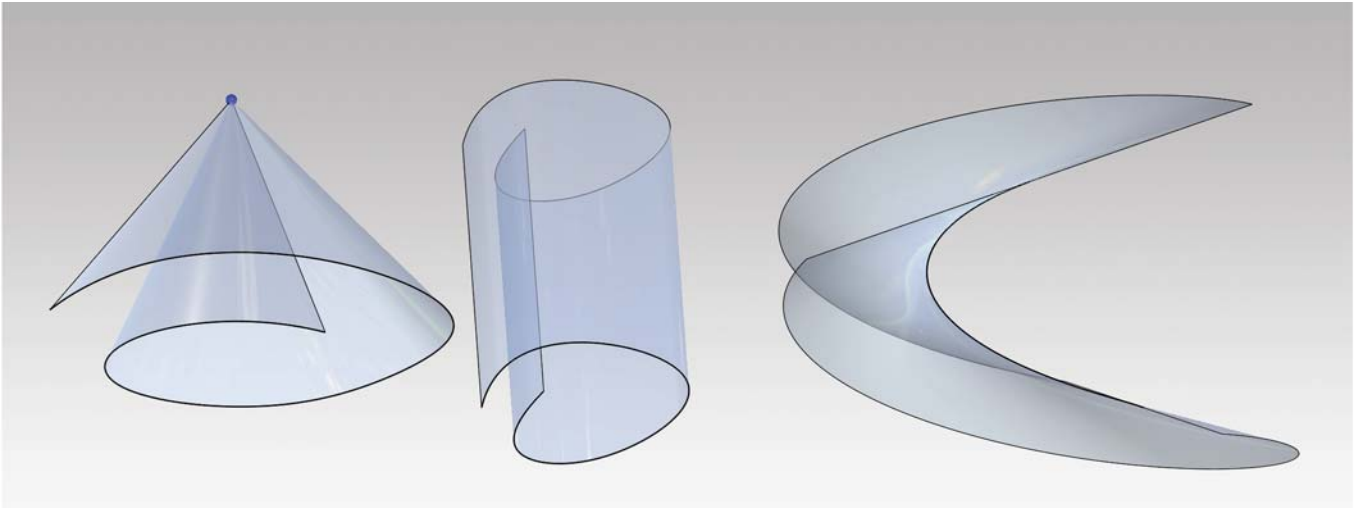
Facendo muovere una superficie d'una forma costante o variabile, l'involuppo dello spazio che essa percorre è un'altra superficie che chiamiamo *superficie d'involuppo*, e che è il luogo delle linee d'intersezione successive della superficie mobile. Ciascuna di queste linee, che Monge ha nominato la *caratteristica* della superficie d'involuppo, può essere considerata come la generatrice di questa superficie. Le quantità che determinano una posizione particolare della superficie mobile, e le dimensioni della superficie corrispondente a questa posizione, si chiamano parametri della superficie. Una superficie è definita quando, per ciascun punto di essa, possiamo assegnare la linea generatrice, costante o variabile di forma, che passa per questo punto.

Esistono due tipi di superficie generate da una linea retta: l'una che chiamiamo superfici sviluppabile, e l'altra che chiamiamo superfici rigate, che non è affatto sviluppabile.

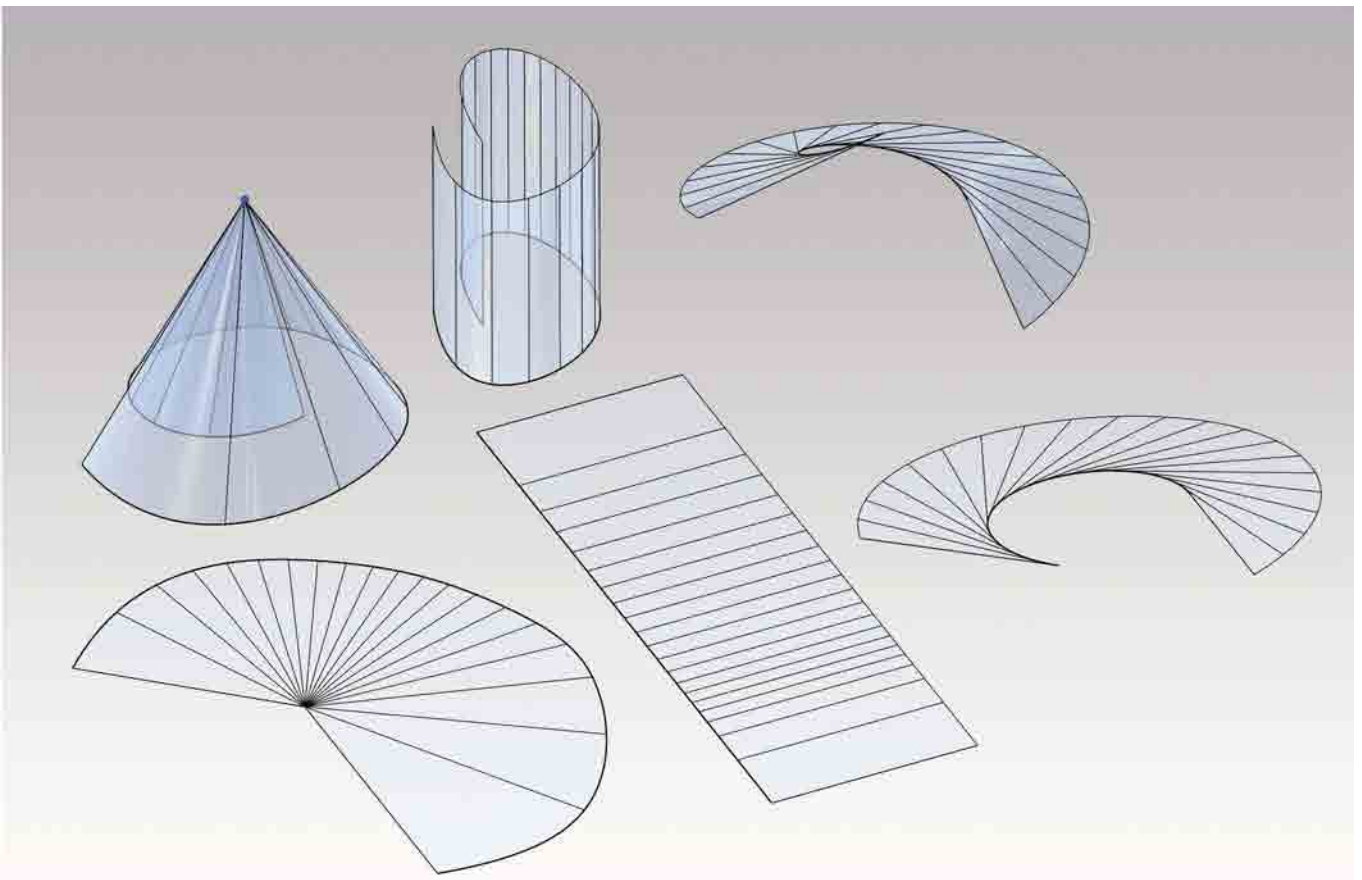
Le superfici sviluppabili

Una superficie sviluppabile è il luogo delle tangenti a una curva sghemba, che nominiamo spigolo di regresso della superficie (fig. 1); due tangenti consecutive corrispondono a due posizioni successive della linea retta generatrice mobile della superficie⁸. Lo spigolo di regresso divide la superficie in due parti uguali e simmetriche. I coni e i cilindri sono superfici sviluppabili dove lo spigolo di regresso è un punto. Questo punto è il vertice del cono, mentre per il cilindro è un punto all'infinito. La superficie conica è generata da una retta generatrice mobile soggetta a passare per un punto fisso. Quando la retta generatrice è sempre parallela ad essa stessa, la superficie conica diventa un cilindro.

Due rette successive d'una superficie sviluppabile comprendono un elemento di questa superficie; tutti gli elementi possono essere riuniti sotto un unico stesso piano. In effetti due elementi successivi sono separati da una retta della superficie e il secondo elemento può ruotare con la superficie attorno a questa retta fino a che non coincida con il piano del primo elemento. Questi primi due elementi riuniti siano fissi, il terzo elemento può ruotare con la porzione della superficie che è adiacente per unirsi al secondo e così di seguito. Tutti gli elementi riuniti su uno stesso piano formano quello che è chia-



1/ Una superficie sviluppabile è il luogo delle tangenti a una curva sghemba, che nominiamo spigolo di regresso della superficie.



2/ Tutti gli elementi riuniti su uno stesso piano formano quello che è chiamato lo sviluppo della superficie.

mato lo *sviluppo della superficie* (fig. 2). E' evidente che in questo modo dallo sviluppo di tutte le curve piane o sghembe tracciate sulla superficie sviluppabile e che tagliano le rette di questa superficie sotto angoli determinati, si trasformano sul piano di sviluppo in altre curve che tagliano le rette della superficie sviluppabile su questo piano sotto gli stessi angoli rispettivamente uguali ai primi.

Le superfici sviluppabili sono le sole che hanno questa proprietà di poter essere sviluppate su un piano senza *rottture o sovrapposizioni*: sono le sole dove gli elementi piani hanno una dimensione illimitata lungo il verso delle rette generatrici della superficie⁹. L'estensioni di questi elementi in tutti i sensi formano i piani tangenti della superficie. In qualsiasi modo un piano si muova nello spazio, l'involuppo dello spazio che percorre è una superficie sviluppabile. Questa superficie è il luogo geometrico delle rette, intersezioni successive del piano mobile.

Le superfici rigate

Due elementi successivi d'una superficie sviluppabile s'incontrano e comprendono un elemento piano di questa superficie. In una superficie rigata, due rette consecutive, quale che sia la loro distanza, non s'incontrano mai e l'elemento compreso tra queste due rette non è un piano; è un elemento curvo che ha un'estensione illimitata nel verso delle rette che lo comprendono: la sua forma è quella di un *piano sghembo*, e per questa ragione sono state chiamate *superfici sghembe*. Hachette ha poi in seguito deciso di nominarle superfici rigate, ed è questo il nome che oggi noi utilizziamo¹⁰.

La superficie rigata la più generale, come insegna Monge, è generata da una retta mobile che s'appoggia su tre curve date; chiamiamo queste curve *direttrici*. Prendendo un punto qualsiasi sulla prima direttrice e considerandolo come il vertice dei due coni che hanno per basi le altre due direttrici, le rette intersezioni di questi coni appartengono alla superficie rigata (fig. 3).

Nei paragrafi successivi sono dati degli esempi dei piani tangenti alle superfici sviluppabili. Ho deciso di riportare le soluzioni proposte da Hachette rilette però con il metodo della rappresentazione matematica, perché sono soluzioni che evidenziano le proprietà particolari

di questi piani. Le soluzioni di Hachette sono soluzioni studiate caso per caso. Esiste tuttavia una soluzione più generale di questo problema che fa uso delle proprietà del contorno apparente. Di seguito troverete entrambe le soluzioni. E' importante notare che il comportamento di una superficie sviluppabile e di una superficie rigata rispetto ad un piano tangente è differente. In una superficie sviluppabile un piano tangente γ in un punto P è tangente lungo tutta la generatrice g della superficie passante per quel punto (fig. 4). In una superficie rigata il piano tangente γ in un punto P , generalmente, tocca la superficie solo in quel punto¹¹. La normale n alla superficie nel punto P è ortogonale al piano tangente alla superficie in quel punto.

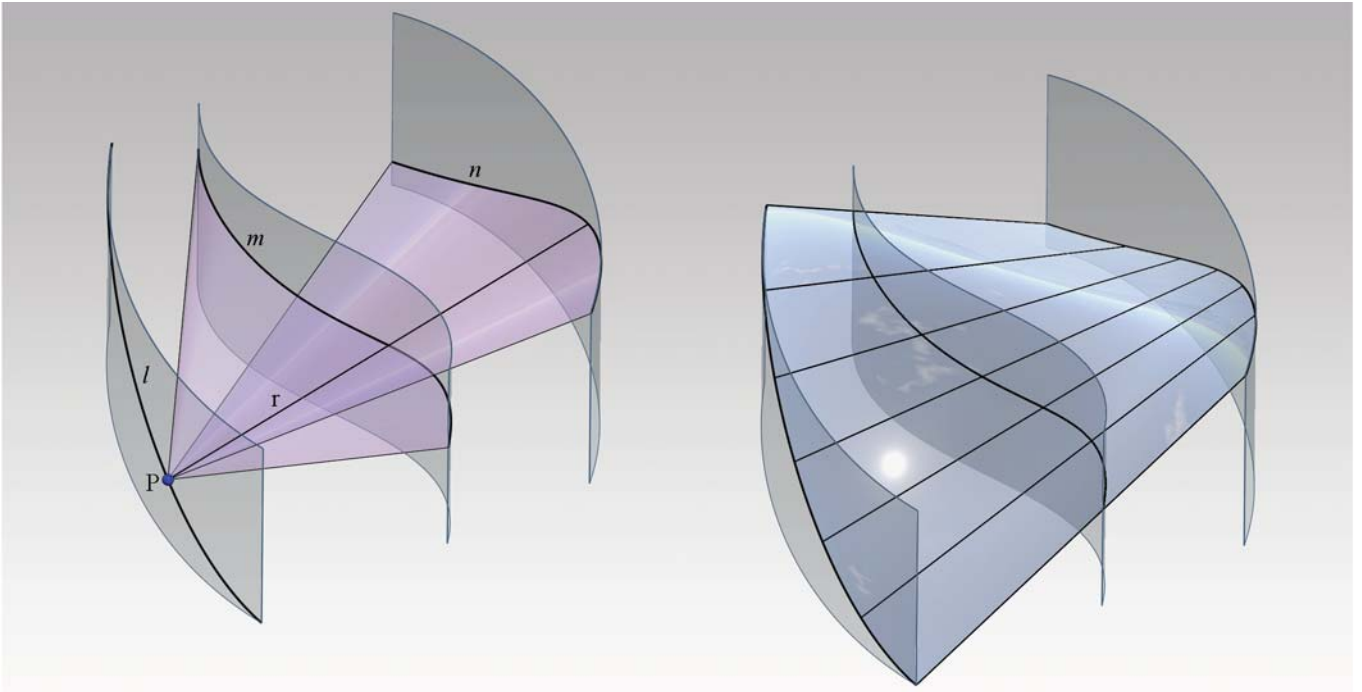
Esempi di piani tangenti alle superfici sviluppabili e alle superfici di rivoluzione rigate

Primo esempio. Costruire un piano tangente a una superficie cilindrica: 1) per un punto preso sulla superficie; 2) per un punto preso fuori della superficie; 3) parallelo a una retta data.

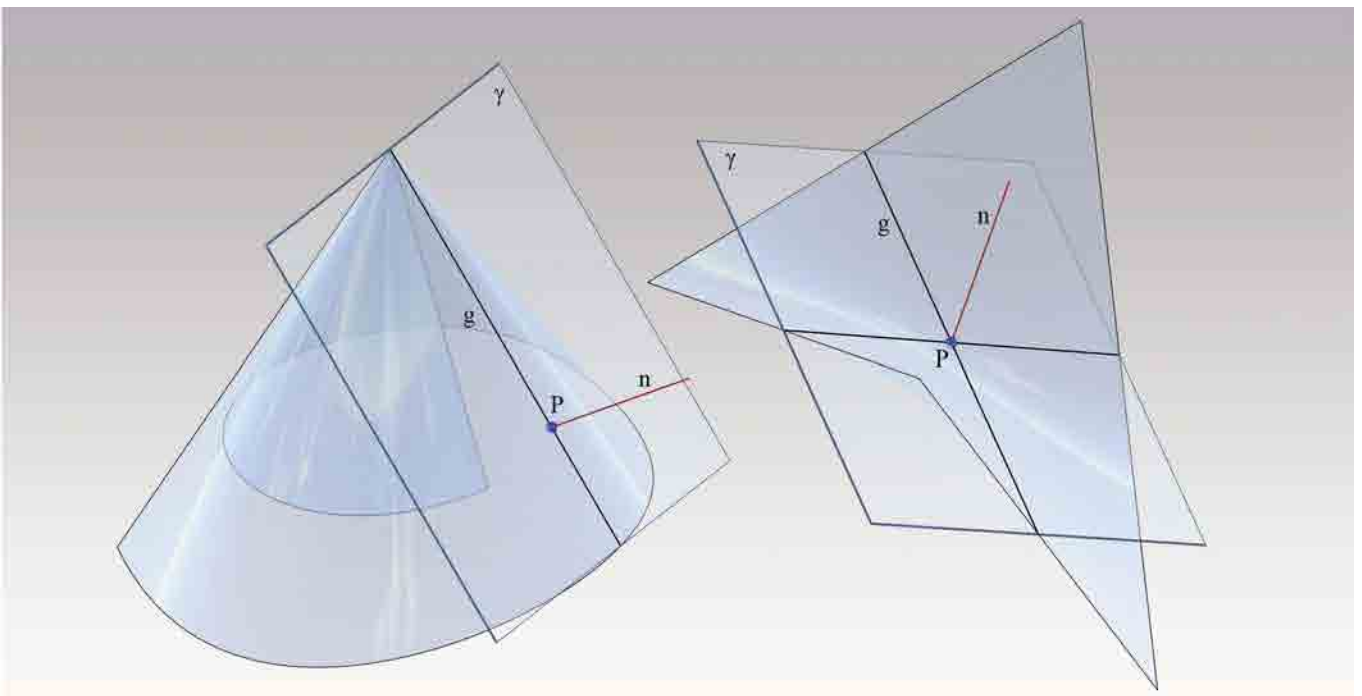
Una superficie cilindrica è una superficie sviluppabile generata da una retta mobile, costantemente parallela a una retta data e diretta nel suo movimento da una curva anch'essa data, che chiamiamo direttrice¹².

1) Il punto P_1 di contatto è preso sulla superficie (fig. 5). Facciamo passare per questo punto la retta generatrice g della superficie; questa incontra la direttrice in un punto, per il quale facciamo passare una tangente a questa curva: la tangente e la retta della superficie determinano il piano tangente¹³. Questo piano non tocca la superficie solamente nel punto di contatto, ma contiene l'elemento cilindrico che è compreso tra due rette parallele consecutive in direzione del prolungamento dell'elemento stesso. Il contatto del piano e della superficie ha luogo su tutti i punti della retta generatrice g passante per il punto dato.

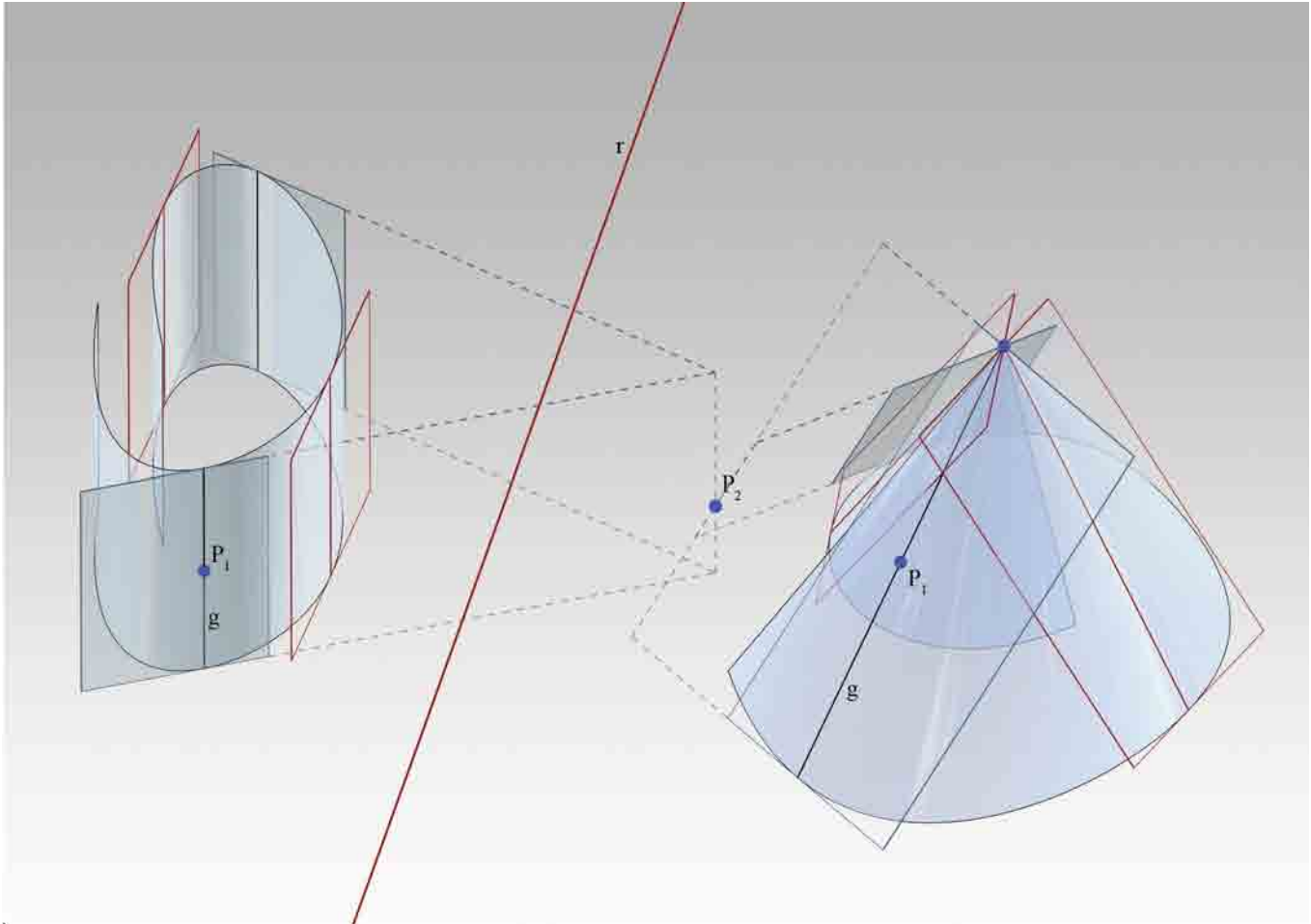
2) Il punto P_2 dato è preso fuori della superficie. Facciamo passare per il punto dato una tangente a una sezione qualsiasi della superficie, purché il piano secante passi per il punto dato. La tangente e la retta generatrice della superficie passante per il punto di contatto determinano il piano tangente. E' possibile in alternativa costruire il contorno apparente della superficie cilindrica



3/ La superficie rigata la più generale, come insegna Monge, è generata da una retta mobile che s'appoggia su tre curve date.



4/ In una superficie sviluppabile un piano tangente γ in un punto P è tangente lungo tutta la generatrice g della superficie passante per quel punto. In una superficie rigata il piano tangente γ in un punto P , generalmente, tocca la superficie solo in quel punto



5/ Costruzione di un piano tangente a una superficie conica (cilindrica): 1) per un punto preso sulla superficie; 2) per un punto preso fuori della superficie; 3) parallelo a una retta data.

dal punto dato. Il piano tangente passa per il punto dato e per una delle generatrici che costituiscono il contorno apparente.

3) Il piano tangente è parallelo a una retta data r . Facciamo passare per un punto qualsiasi dello spazio due rette, l'una parallela alla retta data e l'altra parallela alle generatrici del cilindro. Uniamo queste due rette con una terza tale che sia possibile staccare una tangente alla superficie che le è parallela. Questa tangente e la retta della superficie passante per il punto di contatto determinano il piano tangente. Questo piano sarà parallelo alla retta data. Una soluzione più spedita nella rappresentazione matematica utilizza le proprietà

del contorno apparente. Per cui si costruisce il contorno apparente della superficie cilindrica secondo la direzione della retta data. I piani formati rispettivamente dalle rette del contorno apparente con le parallele alla retta data sono i piani tangenti alla superficie cilindrica cercati. Il numero di questi piani dipenderà dalla sezione del cilindro. Nel caso del cilindro quadrico i piani saranno due. Questa costruzione mi ha suggerito la soluzione di un problema piano: *trovare la tangente ad una curva s qualsiasi che sia parallela ad una retta data*. Per risolvere il problema costruiamo un cilindro retto che abbia come base la curva s . Dopodiché costruiamo il contorno apparente del cilindro rispetto alla direzione

della retta data. Il contorno apparente sarà costituito da una o più generatrici del cilindro che intersecheranno la curva s nei rispettivi punti di contatto. Le rette parallele alla retta data passanti per i punti trovati rappresentano le tangenti che risolvono il problema.

*Secondo esempio. Costruire un piano tangente a una superficie conica: 1) per un punto preso sulla superficie; 2) per un punto preso fuori della superficie; 3) parallelo a una retta data.*¹⁴

Una superficie conica è una superficie sviluppabile generata da una retta mobile soggetta costantemente a passare per un punto dato e per una curva che chiamiamo la direttrice della retta generatrice.

1) Il punto P_1 di contatto è preso sulla superficie (vedi fig. 5). Facciamo passare per il punto la generatrice g della superficie. Costruiamo la tangente alla direttrice nel punto di contatto dato. Le due rette così trovate individuano il piano tangente. Questo piano, come per il cilindro, tocca la superficie lungo tutti i punti della generatrice che passa per il punto di contatto¹⁵.

2) Il punto P_2 è preso fuori della superficie. Facciamo passare per il punto dato una tangente a una curva piana della superficie conica, purché il piano passi per il punto dato. La retta generatrice passante per il punto di contatto della curva e della tangente, e la tangente stessa formano il piano tangente richiesto. Una soluzione più generale fa uso delle proprietà del contorno apparente. Per cui è sufficiente costruire il contorno apparente della superficie conica rispetto al punto dato. Il piano tangente deve passare per il punto e per la generatrice del contorno apparente. Il numero delle soluzioni dipende dalla sezione della superficie conica. Se il cono è quadratico i piani tangenti saranno due.

3) Il piano tangente è parallelo a una retta data r . Facciamo passare per il vertice della superficie conica una parallela alla retta data e prendiamo su questa parallela un punto per il quale possiamo staccare una tangente a una linea conosciuta della superficie conica. Questa tangente e la parallela alla retta data fissano la posizione del piano tangente. La retta di contatto del piano e del cono è determinata dal punto di contatto della tangente alla linea nota della superficie conica. Anche in questo caso è valida la soluzione più generale che fa uso del

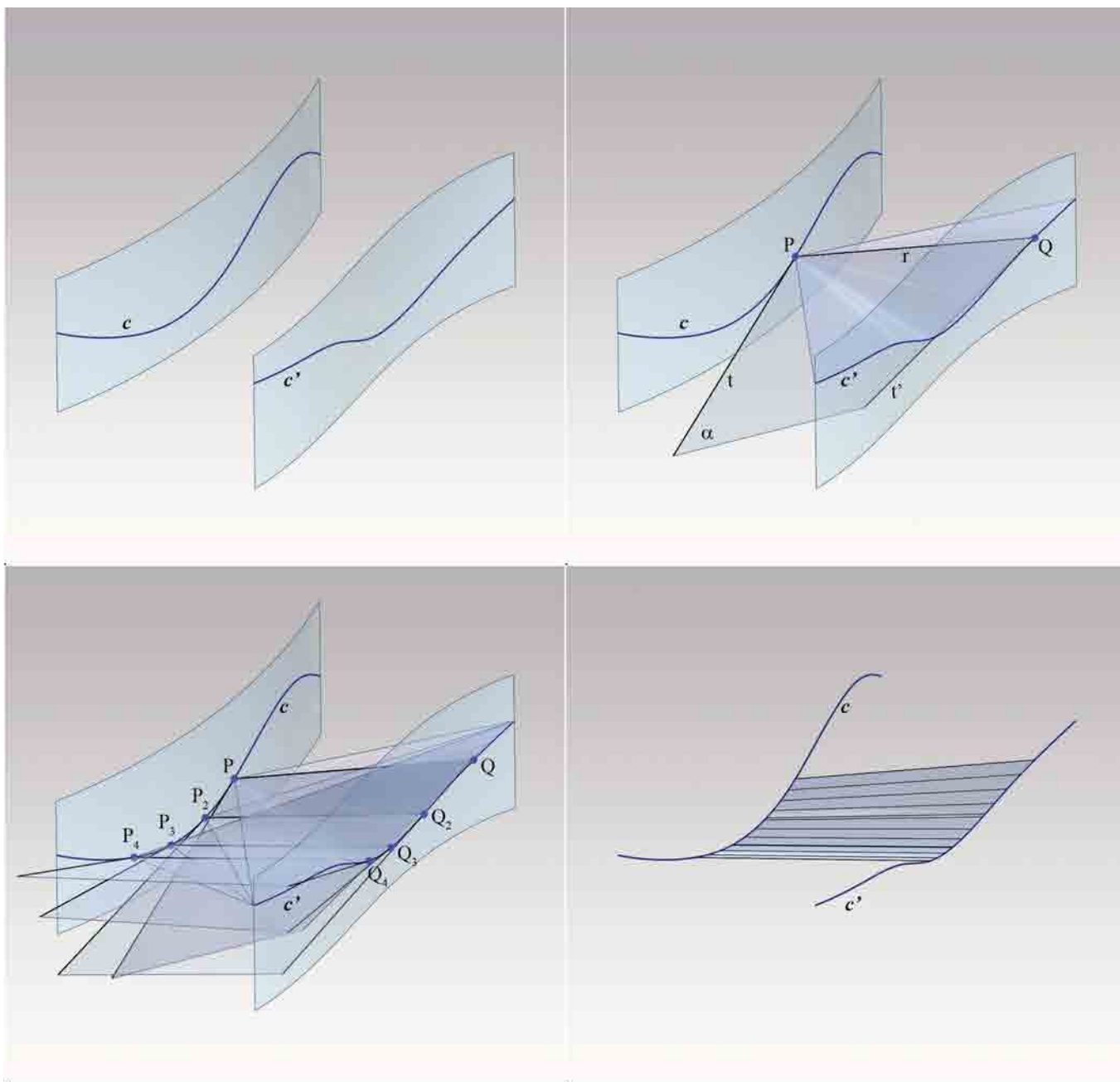
contorno apparente. Vale a dire si costruisce il contorno apparente della superficie conica rispetto alla direzione della retta data. I piani tangenti passeranno per le generatrici del contorno apparente e per una parallela alla retta data passante per un punto qualsiasi della generatrice individuata.

*Terzo esempio. Sui piani tangenti alla superficie sviluppabile, generata da una retta mobile che passa per due curve date.*¹⁶

Tre curve sono necessarie per dirigere il movimento d'una retta mobile che genera la superficie rigata generale; ma quando questa superficie è sviluppabile, due sono sufficienti. In effetti, siano c e c' le due curve date (fig. 6). Prendiamo sulla prima c un punto P qualsiasi che osserviamo come il vertice d'un cono che ha per base la curva c' . Disegniamo la tangente t nel punto P alla curva c . Facciamo passare per questa tangente t un piano tangente α al cono. La retta di contatto r appartiene alla superficie sviluppabile. La retta r si appoggia alla curva c' nel punto Q . La tangente t' nel punto Q alla curva c' appartiene al piano α . Prendendo sulla curva c un altro punto P_2 , vertice d'un secondo cono passante per c' , il piano tangente a questo cono passante per la tangente alla curva c' nel punto P_2 , passerà per una tangente alla curva c' . Chiamiamo Q_2 il punto di contatto su questa curva c' , una retta r_2 della superficie sviluppabile passerà per i punti P_2 e Q_2 . Otterremo così una serie di rette $PQ, P_2Q_2, P_3Q_3, P_4Q_4$ dove il luogo geometrico è la superficie sviluppabile richiesta. Questa costruzione ha per scopo di determinare le coppie di tangenti alle curve c e c' , che sono situate nello stesso piano. I piani successivi di questi diversi piani si tagliano e le rette intersezioni appartengono alla superficie sviluppabile, perché due tangenti alle curve c e c' appartengono allo stesso piano e le due rette successive indefinitamente vicine che s'appoggiano su queste due curve e sulle loro tangenti appartengono anch'esse allo stesso piano: questa è la peculiarità delle superfici sviluppabili.

Quarto esempio. Piano tangente a una superficie di rivoluzione

Se il punto è dato sulla superficie, prendiamo per il punto e per l'asse di rivoluzione un piano che contenga una



6/ Tre curve sono necessarie per dirigere il movimento d'una retta mobile che genera la superficie rigata generale. Quando questa superficie è sviluppabile, due sono sufficienti.

sezione meridiana della superficie. Il piano tangente passa per una tangente a questa sezione passante per il punto dato. Essendo la superficie composta anche da una serie di cerchi perpendicolari all'asse di rivoluzione, il piano tangente nel punto dato passerà anche per la tangente al cerchio della superficie al quale questo punto appartiene. Di conseguenza il piano tangente d'una superficie di rivoluzione è determinato dalle tangenti passanti per il punto dato alla sezione meridiana e al cerchio che s'incontrano ad angolo retto in questo punto. Essendo la tangente al cerchio perpendicolare al piano della sezione meridiana, il piano tangente in un punto qualsiasi d'una superficie di rivoluzione è perpendicolare al piano meridiano che passa per questo punto. La doppia condizione di passare per una tangente alla sezione meridiana d'un punto della superficie e di essere perpendicolare al piano di questa sezione, determinano il piano tangente in questo punto.

Le sezioni piane delle superfici sviluppabili e dell'iperboloide di rivoluzione

In questo capitolo Hachette tratta delle intersezioni piane delle superfici e delle intersezioni fra le superfici in generale¹⁷. In particolare vengono presi in considerazione dei nuovi esempi di piani tangenti del secondo tipo che sono allo stesso tempo tangenti e secanti¹⁸.

*Le sezioni piane di una superficie sviluppabile. Il cono circolare retto e le sue tre sezioni dette Ellisse, Iperbole e Parabola.*¹⁹

Il cono a base circolare può essere retto od obliquo²⁰, in tutti e due i casi è costituito da due falde simmetriche che hanno in comune solo il vertice. Le sezioni piane di questo cono possono essere di tre tipi: ellisse, iperbole o parabola. Quale che sia la posizione del cono in rapporto al piano tutte le generatrici del cono incontrano il piano, a meno che una o più generatrici sono parallele al piano secante. Se tutte le generatrici incontrano il piano la sezione è un'ellisse. Nel caso in cui una o più generatrici siano parallele al piano secante, la curva ha uno o due rami infiniti. La curva con un solo ramo si chiama parabola ed è situata su una delle due falde del cono. Quella invece che ha due rami situati sulle due falde del cono si chiama iperbole.

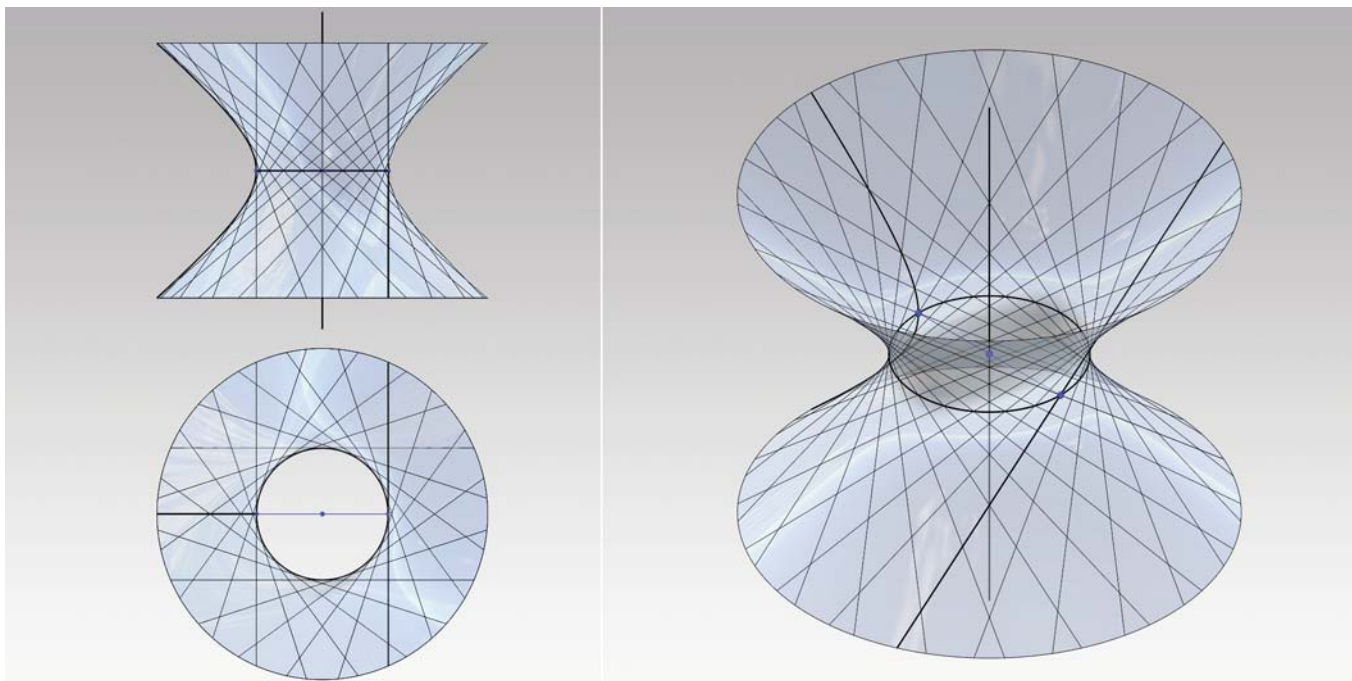
Conoscendo le generatrici del cono parallele al piano secante è semplice costruire gli *asintoti*. *Nominiamo asintoti quelle rette che toccano una sezione conica in due punti situati all'infinito*. La tangente in un punto qualunque della sezione conica è data dall'intersezione del piano tangente al cono in questo punto e dal piano secante. Il piano tangente in un punto d'un cono tocca il cono secondo la generatrice che passa per questo punto. Ma la generatrice del punto situato all'infinito è nota perché è parallela al piano secante. Dunque se per questa retta generatrice facciamo passare un piano tangente al cono, l'intersezione di questo piano e del piano secante sarà l'asintoto. Quando la sezione è un'iperbole, il cono ha due generatrici parallele al piano secante e di conseguenza due piani tangenti seguono le generatrici, che tagliano il piano dell'iperbole secondo due asintoti. Il centro dell'iperbole è determinato dall'intersezione dei due asintoti o dal punto d'incontro del piano secante con i due piani degli asintoti. Ne segue che le sezioni parallele e iperboliche d'un cono a base circolare, hanno i centri sulla retta intersezione dei due piani tangenti al cono passanti per le rette di contatto parallele al piano di una qualunque delle sezioni delle iperboli.

Hachette spiega le proprietà dei fuochi di un'ellisse e di un'iperbole utilizzando la dimostrazione di MM. Dandelin et Quetelet. Non mi dilungherò a riportare tali considerazioni.

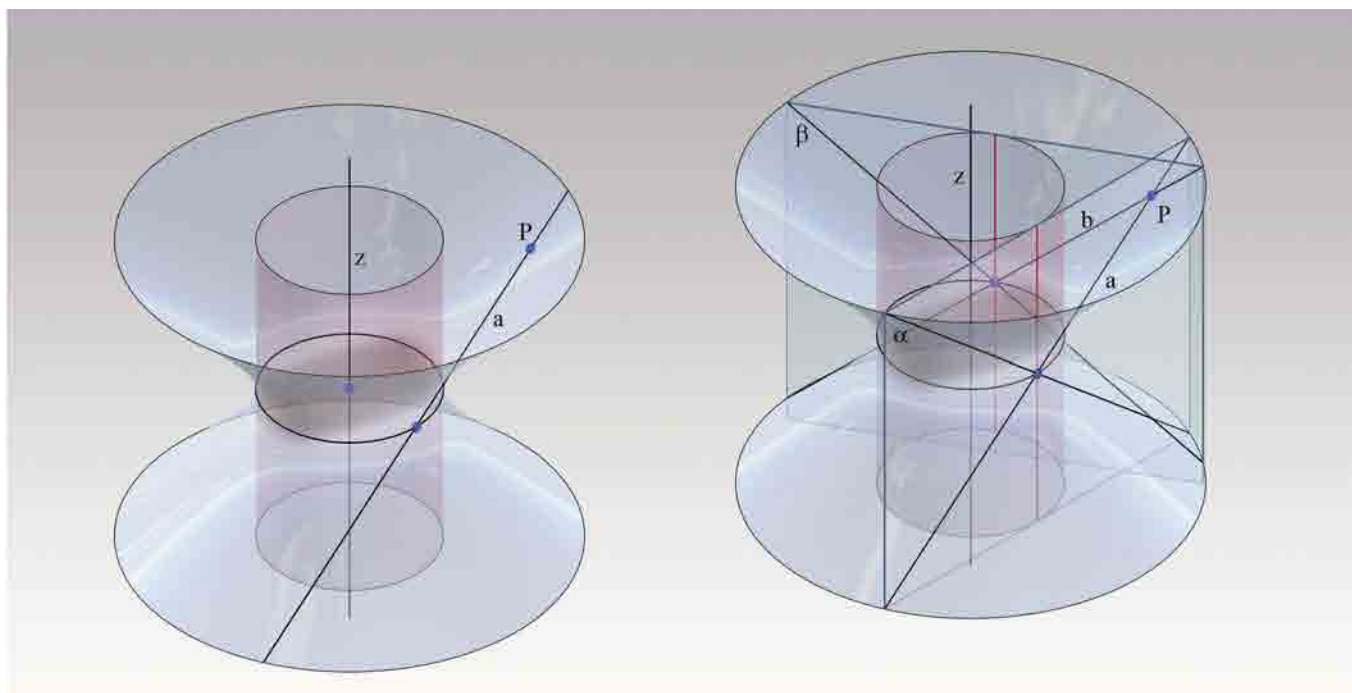
L'iperboloide di rivoluzione

Una retta che ruota attorno ad un'altra retta fissa genera una superficie di rivoluzione in cui le sezioni meridiane sono delle iperboli che hanno per semiasse principale la minima distanza delle due rette date (fig. 7). La retta generatrice è in tutte le sue posizioni parallela a un piano meridiano e la sua distanza da questo piano è uguale alla minima distanza delle due rette date²¹. Un piano qualsiasi perpendicolare all'asse di rivoluzione taglia la superficie secondo un cerchio. Il *cerchio di gola* divide la superficie in due parti uguali e simmetriche. Qui di seguito riportiamo la dimostrazione di Hachette sulla doppia generazione di rette dell'iperboloide di rivoluzione. Nel capitolo successivo sulla geometria proiettiva daremo una dimostrazione più generale.

Immaginiamo per questo cerchio di gola un cilindro ver-



7/ Una retta che ruota attorno ad un'altra retta fissa genera una superficie di rivoluzione in cui le sezioni meridiane sono delle iperboli che hanno per semiassi principale la minima distanza delle due rette date.



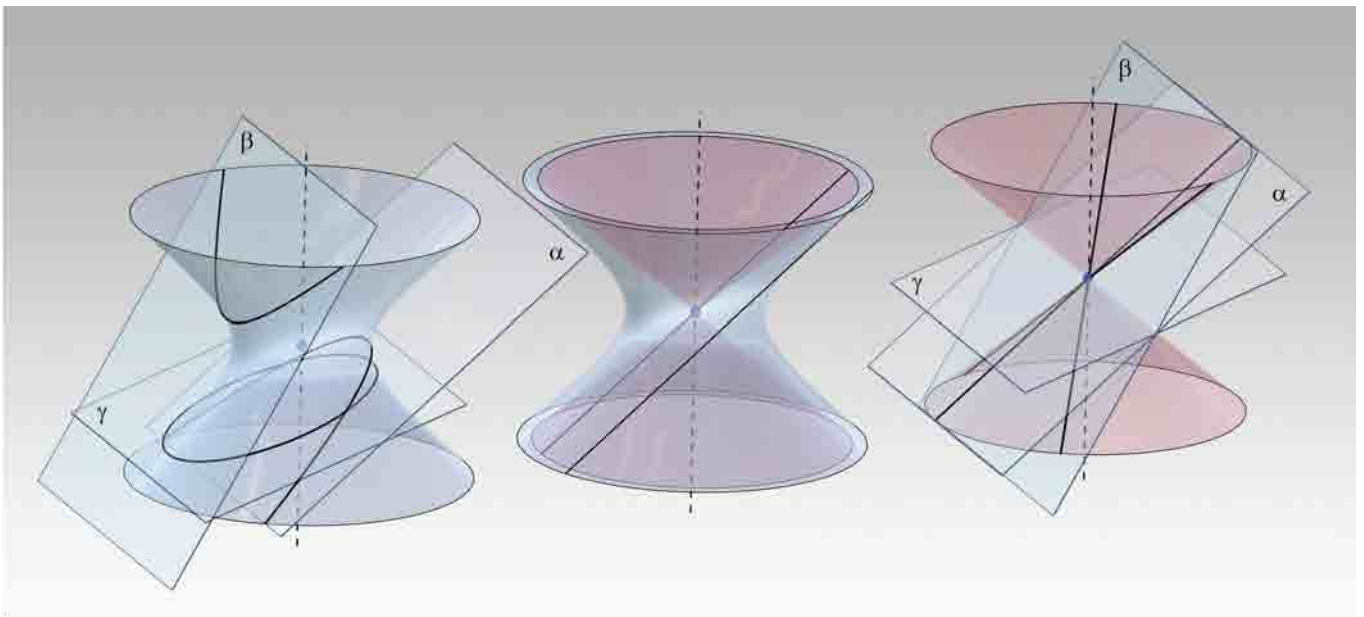
8/ Dimostrazione della doppia generazione tramite una retta dell'iperboloide di rivoluzione.

ticale retto che abbia lo stesso asse z dell'iperboloide, la retta generatrice a dell'iperboloide che è data su un piano tangente α al cilindro e che ruota attorno all'asse, passa successivamente in tutti i piani tangenti del cilindro (fig. 8). Ora per un punto P qualsiasi dell'iperboloide possiamo far passare due piani α e β tangenti al cilindro (vedi piano tangente ad un cilindro da un punto preso fuori della superficie), i quali ambedue contengono la retta a e b generatrice. Quindi non c'è alcun punto della superficie che non sia l'intersezione di due rette a e b appartenenti alla superficie. Allora è possibile disegnare due sistemi di rette che dividono la superficie in piccoli quadrilateri. Le rette d'un sistema non s'incontrano mai fra loro, viceversa sono tutte intersecate da una retta qualsiasi dell'altro sistema. Le rette dell'uno e dell'altro sistema sono ugualmente inclinate in rapporto a un piano perpendicolare all'asse di rivoluzione, l'angolo che esse formano con questo piano è costante.

Gli asintoti delle sezioni piane d'un iperboloide di rivoluzione

Le sezioni piane d'un iperboloide di rivoluzione sono come quelle di un cono retto²²: ellisse, iperboli o pa-

rabole. La sezione può estendersi all'infinito solo se il piano sezione è parallelo almeno ad una generatrice dell'iperboloide. C'è un sistema semplice per capire se esiste sull'iperboloide di rivoluzione una generatrice parallela al piano dato. Consiste nel prendere per un punto qualsiasi dell'asse dell'iperboloide una retta parallela ad una retta generatrice qualsiasi dell'iperboloide. Questa parallela ruotando attorno all'asse genera un cono retto, detto cono asintotico, tale che ciascuna generatrice del cono è parallela a quella dell'iperboloide e viceversa (fig. 9). Facendo passare per il vertice del cono un piano parallelo al piano dato potrebbe darsi che questo sia tangente al cono secondo una generatrice oppure secante secondo due generatrici o, infine, non abbia che il vertice come punto in comune. Allora la sezione sarà una parabola (piano α), un iperbole (piano β) o un'ellisse (piano γ). Se esistono sul cono retto delle generatrici parallele al piano secante, le rette dell'iperboloide parallele a queste generatrici, saranno incontrate dal piano secante all'infinito. Le tangenti ai punti all'infinito della sezione situata su queste rette sono gli asintoti. Il piano tangente in un punto dell'iperboloide di rivoluzione è determinato dalle due condi-



9/ Facendo passare per il vertice del cono asintotico un piano parallelo al piano dato potrebbe darsi che questo sia tangente al cono secondo una generatrice (parabola) oppure secante secondo due generatrici (iperbole) o, infine, non abbia che il vertice come punto in comune (ellisse).

zioni di passare per una retta della superficie e di essere perpendicolare al piano meridiano del punto di contatto. Ma quando il punto di contatto è all'infinito su una retta data della superficie, il piano meridiano di questo punto è necessariamente parallelo a questa retta. Dunque un piano fatto passare per la retta data perpendicolare al piano meridiano che gli è parallelo è il piano tangente al punto situato all'infinito su questa retta. L'intersezione di questo piano e del piano sezione è l'asintoto. Nel caso in cui la sezione è un'iperbole, esistono sull'iperboloide di rivoluzione, due rette parallele al piano secante, che determinano due piani tangenti per i punti di questa retta situati all'infinito. Le rette intersezione di questi piani con il piano sezione sono gli asintoti. Nel caso della parabola il piano tangente al punto situato all'infinito sulla retta parallela al piano secante è parallela a quest'ultimo piano e la sezione non ha asintoto.

Per dimostrare il parallelismo di questi due piani notiamo che i meridiani, dei punti di contatto situati all'infinito, passano per gli spigoli del cono retto, paralleli alle rette dell'iperboloide, ai quali questi piani appartengono. Ma per ipotesi nel caso della parabola, il piano passante per il vertice del cono parallelo al piano secante è tangente a questo cono. Dunque il piano meridiano passante per lo spigolo di contatto è perpendicolare al piano secante. Ora il piano tangente al punto situato all'infinito passa per una parallela allo spigolo di contatto del cono ed inoltre è perpendicolare al piano meridiano di questo spigolo. Dunque il piano tangente e il piano secante passano per delle rette parallele e sono perpendicolari allo stesso piano meridiano, dunque sono paralleli. Questo parallelismo non ha luogo per l'iperbole perché i piani meridiani dei punti di contatto situati all'infinito essendo normali al cono retto, sono necessariamente inclinati rispetto al piano sezione, quindi il piano parallelo fatto passare per il vertice del cono taglia il cono secondo due spigoli.

Le sezioni piane dell'iperboloide di rivoluzione a una falda

Le sezioni piane dell'iperboloide di rivoluzione sono come per il cono retto, delle ellissi, delle iperboli o delle parabole²³. È possibile dimostrare che i fuochi di queste curve sono i punti di contatto delle sfere circoscritte all'iperboloide a ai due piani delle curve. Sezioniamo

con un piano meridiano l'iperboloide. Le sezioni saranno due iperboli. Inscriviamo nell'iperboloide due sfere a piacere²⁴ (fig. 10). Dopodiché costruiamo un piano tangente α alle due sfere che tagli l'iperboloide secondo una sezione ellittica²⁵. È possibile osservare che i punti F ed F' di contatto delle due sfere con il piano sezione sono i fuochi dell'ellisse sezione. Ora prendiamo una retta r qualsiasi sull'iperboloide. Questa incontra il piano α in un punto M . Le sfere toccano l'iperboloide secondo due cerchi c e c' . La retta r interseca i due cerchi in due punti I ed I' . Ora le tangenti ad una sfera prese da un punto esterno sono tutte uguali per cui:

$$MI = MF \text{ ed } MI' = MF' \text{ da cui}$$

$$MF + MF' = MI + MI'$$

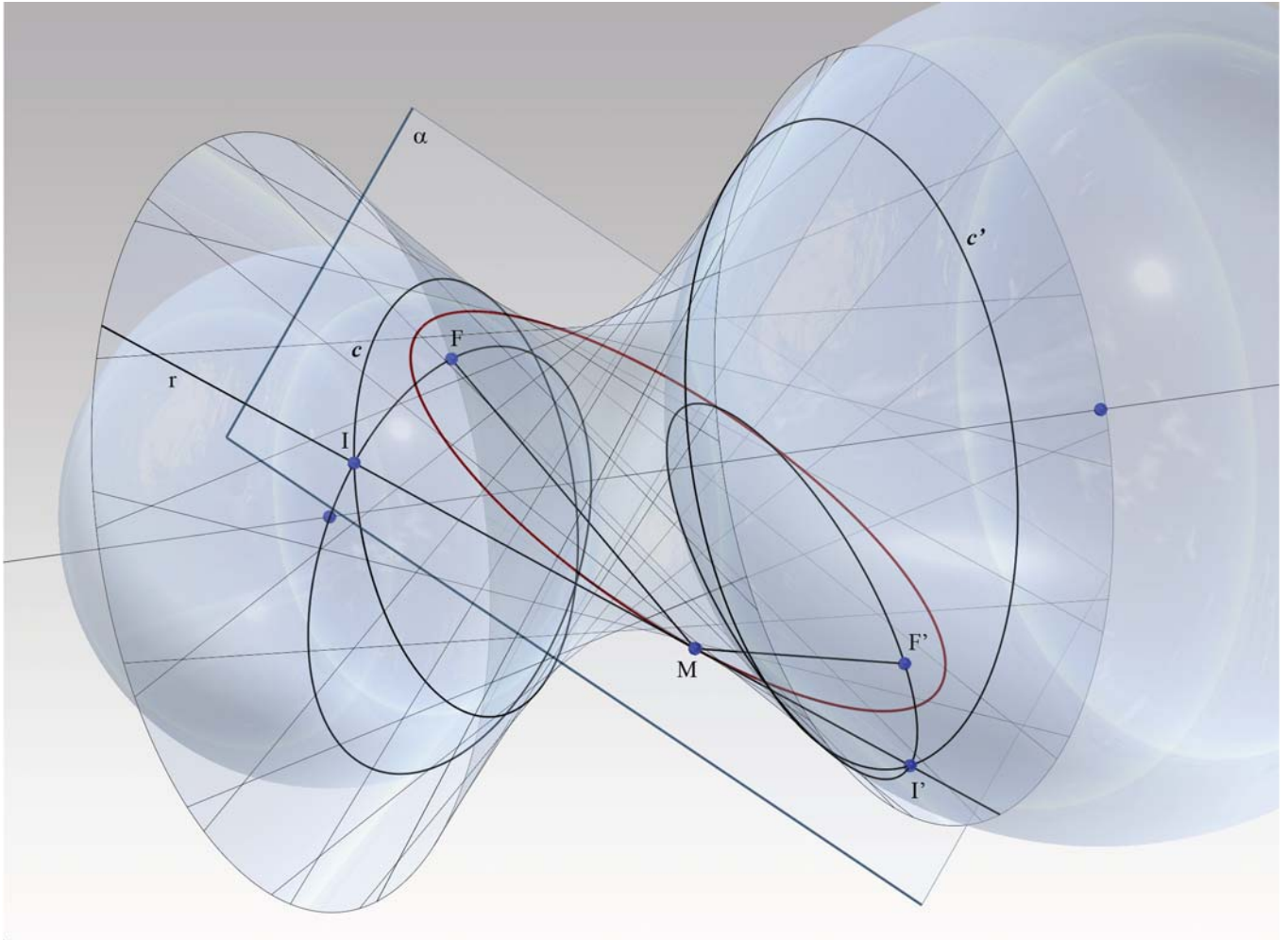
Che è uguale alla parte della generatrice dell'iperboloide compresa tra i due cerchi c e c' . Ma quale che sia la posizione della generatrice dell'iperboloide in rapporto all'asse di rivoluzione, la sua parte non varierà. Dunque la somma dei raggi vettori da un punto qualsiasi della sezione piana dell'iperboloide di rivoluzione è una quantità costante. Questa dimostrazione è la medesima che Dandelin applica al cono retto e al cilindro retto.

La superficie rigata elementare o l'iperboloide a una falda

Esistono cinque tipi di superfici di secondo grado, di cui tre hanno un centro e altre due ne sono sprovviste. Le prime tre sono l'ellissoide, l'iperboloide a una falda, l'iperboloide a due falde. Le altre due sono il paraboloido ellittico e il paraboloido iperbolico. Quest'ultima e l'iperboloide iperbolico possono essere generate da una retta in due modi differenti.

Essendo date tre rette fisse, prendiamo un punto qualunque sulla prima. Per questo punto e per la seconda retta facciamo passare un piano che taglia la terza direttrice. La quarta retta, passante per il punto d'intersezione e per il punto della prima retta, s'appoggia sulle tre direttrici fisse. Questa quarta retta è la generatrice dell'iperboloide a una falda²⁶. *Questa superficie ha un centro e tre assi principali ortogonali x, y, z che passano per il centro O* (fig. 11).

Due di questi assi sono quelli dell'ellisse che forma la gola della superficie. Quando gli assi sono uguali l'ellisse di gola diviene un cerchio e l'iperboloide a una

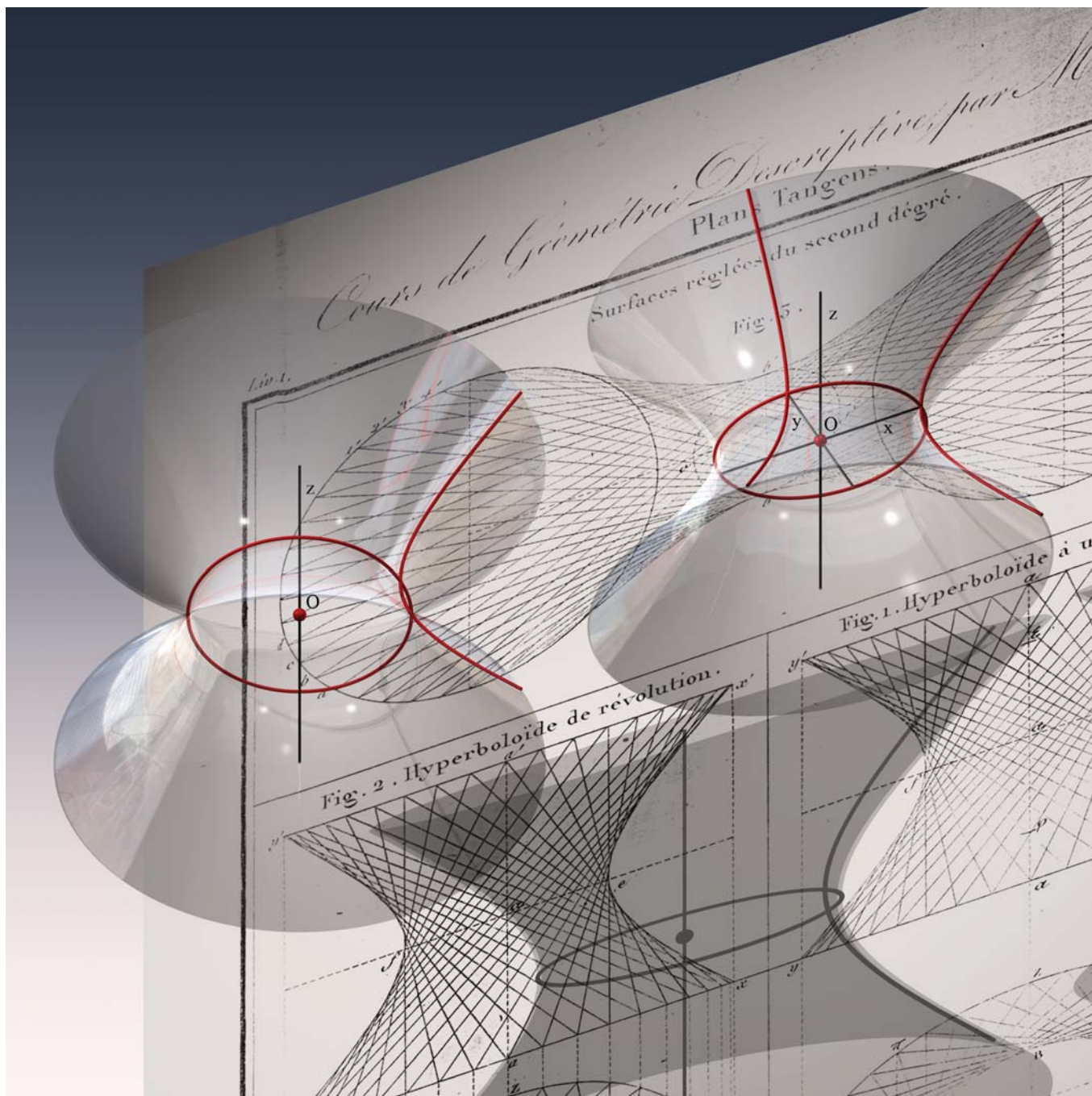


10/ Il teorema di Dandelin applicato al caso dell'iperboloide di rivoluzione.

falda coincide con l'iperboloide di rivoluzione. Le sezioni parallele delle superfici di secondo grado sono simili. I piani paralleli all'asse di gola dell'iperboloide a una falda, tagliano questa superficie secondo delle ellissi affini, dove gli assi aumentano in modo continuo a misura che i loro piani si allontanano dall'ellisse di gola. La superficie è composta di due parti uguali che s'estendono indefinitamente al di sotto e al di sopra di questa ellisse. In altre parole la superficie ha tre piani di simmetria ortogonale individuati dai tre assi. Le tre sezioni principali costruite sui tre assi dati x , y e z che si tagliano nel centro O della superficie rigata di secondo

grado, sono un'ellisse e due iperboli. Le rette dell'iperboloide a una falda proiettate sui piani principali sono tangenti a queste sezioni, perché i piani proiettanti le rette dell'iperboloide sono, come tutti i piani passanti per queste rette, tangenti alla superficie.

Tutte le sezioni piane dell'iperboloide sono, come per il cono circolare, delle ellissi, delle iperboli o delle parabole. Due sistemi di piani paralleli tagliano la superficie secondo dei cerchi. Tutti i cerchi d'uno stesso sistema hanno i loro centri su una retta che passa per il centro della superficie e che è inclinata rispetto ai piani prin-



11/ L'iperboloide ad una falda ha un centro e tre assi principali ortogonali x , y , z che passano per il centro O . L'iperboloide di rivoluzione ha un solo asse z .

cipali. Due piani paralleli all'ellisse di gola tagliano la superficie secondo dell'ellisse simili all'ellisse di gola e che sono uguali. Due altri piani passanti per gli assi maggiori di queste ellissi inclinati diversamente, tagliano la superficie secondo due cerchi uguali e paralleli d'un diametro uguale all'asse maggiore delle ellissi. Per costruire le sezioni circolari di un iperboloido a una falda conviene partire dall'ellisse di gola²⁷. Si costruisce un cerchio su un piano passante per il diametro minore e per l'asse **c** ortogonale al piano dell'ellisse, di diametro pari all'asse maggiore dell'ellisse di gola. L'intersezione di questo cerchio con la superficie dell'iperboloido darà quattro punti. Unendo i punti a due a due (che sono situati simmetricamente rispetto al centro) otterremo due rette passanti per il centro della superficie. Il piano passante per queste rette e per l'asse maggiore dell'ellisse darà le due giaciture dei piani secanti l'iperboloido secondo dei cerchi.

Quanto detto ci suggerisce che per costruire l'iperboloido a una falda è possibile prendere come direttrici due ellissi uguali e parallele oppure due cerchi uguali e paralleli e supporre che la generatrice si appoggi costantemente a queste due curve.

Se sono dati l'ellisse di gola e una sola retta generatrice della superficie questa superficie è determinata²⁸. In effetti consideriamo l'ellisse di gola come la base di un cilindro retto. Un piano qualsiasi tangente a questo cilindro taglia la retta data in un punto. Lo spigolo di contatto del cilindro e del piano incontra l'ellisse di gola in un altro punto: la retta che unisce questi due punti appartiene alla superficie. In questo modo è possibile costruire quante generatrici si vuole.

La superficie dell'iperboloido rigato è determinata da una retta che si appoggia a tre direttrici rette fisse. Ammettendo questa definizione possiamo dimostrare sinteticamente che la superficie ha un centro **O** e che può essere generata in due modi differenti (fig. 12). Chiamiamo **a**, **b**, **c** tre rette nello spazio sghembe. Date tre rette sghembe qualsiasi nello spazio di modo che non s'incontrino e che non siano parallele ad uno stesso piano, esiste un *unico parallelepipedo* capace delle tre rette date. Infatti sappiamo che la direzione (la giacitura) d'un piano è determinato dalla condizione di essere parallelo

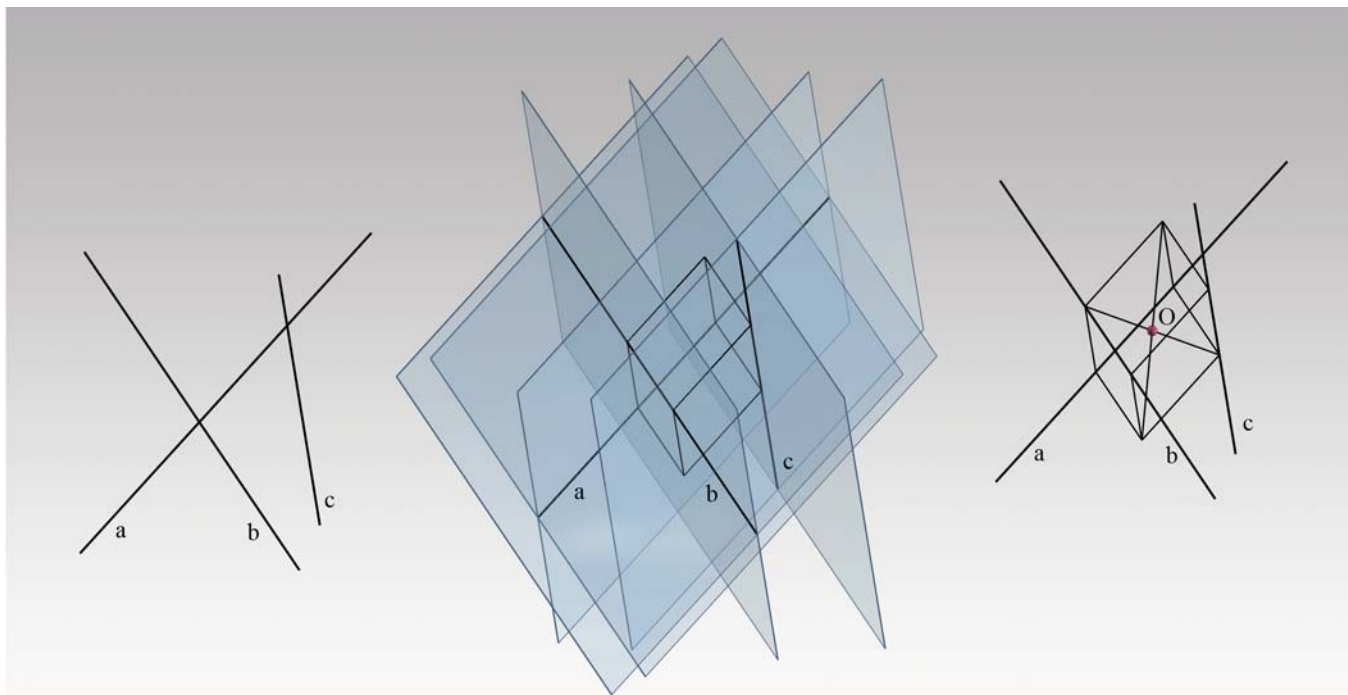
a due rette. Per una delle rette date, per esempio la retta **a**, possiamo far passare due piani, l'uno parallelo alla retta **b**, e l'altro parallelo alla retta **c**; questo determina sei piani paralleli a due a due, che, a loro volta, determinano il parallelepipedo. Gli spigoli del parallelepipedo sono le intersezioni dei sei piani. Ora di questi sei piani, tre sono, per ipotesi, condotti per le rette **a**, **b**, **c**. Dunque queste rette sono necessariamente dirette secondo i tre spigoli d'un parallelepipedo unico, capace delle tre rette date. Tre spigoli dei dodici del parallelepipedo, sono le rette **a**, **b**, **c**. Tre altri spigoli **a'**, **b'**, **c'** hanno la caratteristica che sono allo stesso tempo paralleli ad una delle tre rette date, e secanti gli altri due. I tre spigoli **a'**, **b'**, **c'** sono detti i simmetrici di **a**, **b**, **c** e viceversa. E' possibile costruire una trasversale qualsiasi **t** che si appoggi alle tre rette date **a**, **b**, **c** e trovare la sua simmetrica **s** che si appoggia sulle rette simmetriche **a'**, **b'**, **c'**. I due sistemi di rette **s** e **t** costituiscono i due sistemi delle generatrici dell'iperboloido.

Il centro **O** dell'iperboloido, intersezione di due diagonali del parallelepipedo, è il centro del parallelepipedo costruito sulle tre rette **a**, **b**, **c** o **a'**, **b'**, **c'** (fig. 13). Tre rette qualsiasi prese sull'una o l'altra serie di trasversali **s** o **t** determinano un parallelepipedo. Tutti i parallelepipedi costruiti sulle tre trasversali qualsiasi prese sullo stessa serie di rette, hanno lo stesso centro **O** ed è il centro della superficie. Infatti le tre trasversali di ciascuna serie possono essere prese come le generatrici dell'iperboloido rigato. Di conseguenza questa superficie può essere generata da una retta mobile in due modi differenti e in ogni punto di essa è possibile prendere due rette **s** e **t**, appartenenti ai due sistemi.

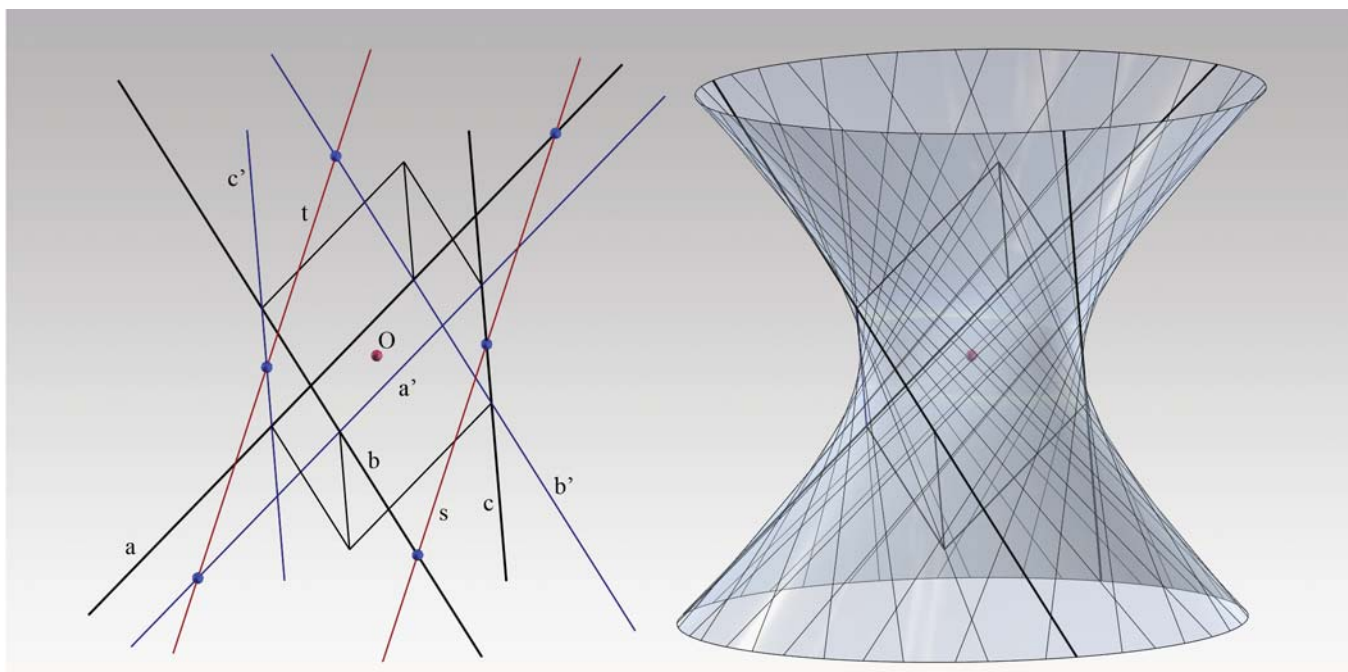
Questa proprietà di doppia generazione dell'iperboloido ad una falda sussiste ancora nel caso particolare in cui le tre rette **a**, **b**, **c** direttrici della retta mobile, siano parallele ad un medesimo piano. Allora l'iperboloido rigato prende il nome di *paraboloido iperbolico*²⁹. Questa superficie era nota con il nome di *plan gauche* o *pan* o ancora *quadrilatero sghembo*.

Le sezioni piane e il piano tangente ad una quadrica rigata

Queste due superfici possono essere generate da una retta in due modi differenti. Un punto qualsiasi di queste



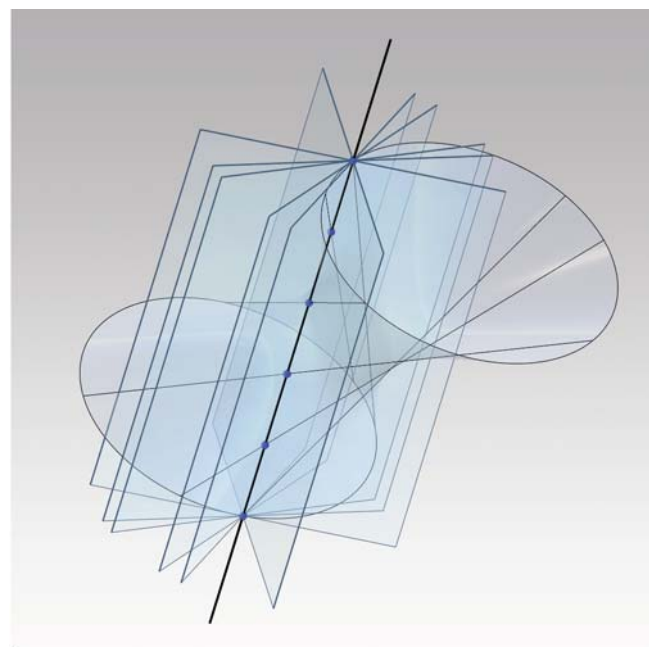
12/ Costruzione del parallelepipedo determinato da tre rette sghembe e del centro **O** dell'iperboloide ad una falda.



13/ Il centro **O** dell'iperboloide, intersezione di due diagonali del parallelepipedo, è il centro del parallelepipedo costruito sulle tre rette **a**, **b**, **c** o **a'**, **b'**, **c'**.

superfici è dunque l'intersezione di due rette appartenenti ai due sistemi di generazione. Di conseguenza il piano tangente in questo punto è determinato da queste due rette. Se concepiamo su ciascuna superficie tre rette d'uno stesso sistema, un piano qualsiasi passante per una di queste rette, e ruotante attorno ad essa come cerniera, sarà in tutte le sue posizioni tangente alla superficie (fig. 14). Ma il punto di contatto varierà e per ottenerlo basterà trovare l'intersezione del piano tangente con la superficie. L'intersezione sarà costituita da due rette: la prima sarà la cerniera del piano e la seconda apparterrà al secondo sistema di rette. Il punto intersezione delle due rette sarà il punto di tangenza. Un altro modo per determinare il punto consiste nel prolungare il piano tangente fino ad intersecare le altre due rette date del primo sistema. La retta che unisce i due punti d'intersezione appartiene al secondo sistema di generazione e taglia la retta del primo sistema nel punto di tangenza del piano. Tutte le rette passanti nell'angolo compreso fra le due rette che determinano il piano tangente dell'iperboloide ad una falda o del paraboloido iperbolico, sono delle secanti di queste superfici. Ne segue che un piano è tangente ad un iperboloido rigato soltanto per un elemento indefinitamente piccolo e in un solo punto al limite di questo elemento. Per tutti gli altri punti il piano è secante. Viceversa il piano tangente di una superficie sviluppabile è tangente lungo tutti i punti della retta della superficie per il quale passa.

Se prendiamo su un iperboloido cinque rette d'uno stesso sistema e per il centro di questa superficie facciamo passare cinque parallele a queste rette, il cono quadrico che passerà per queste parallele gode della proprietà che non esiste alcuna retta sull'iperboloido appartenente all'uno o all'altro sistema di generazione che non abbia la sua parallela su questo cono, che nominiamo cono asintotico³⁰. Ammettendo questa proposizione come dimostrata, e avendo costruito il cono asintotico di cui conosciamo il vertice, e cinque punti della base situati sulle cinque rette date, potremo riconoscere il tipo di curva che risulta dall'intersezione dell'iperboloido con un piano dato (vedi figura 9). Avendo costruito un piano per il vertice del cono parallelo al piano dato, o il piano avrà in comune con il cono solo il vertice, o sarà



14/ I piani tangenti lungo una retta di una superficie rigata determinano un fascio di piani in cui ad ogni piano corrisponde un determinato punto di contatto sulla retta generatrice.

tangente, o infine sarà secante e conterrà due generatrici del cono. Le sezioni corrispondenti a questi tre casi saranno o delle ellissi, o delle parabole o delle iperboli.

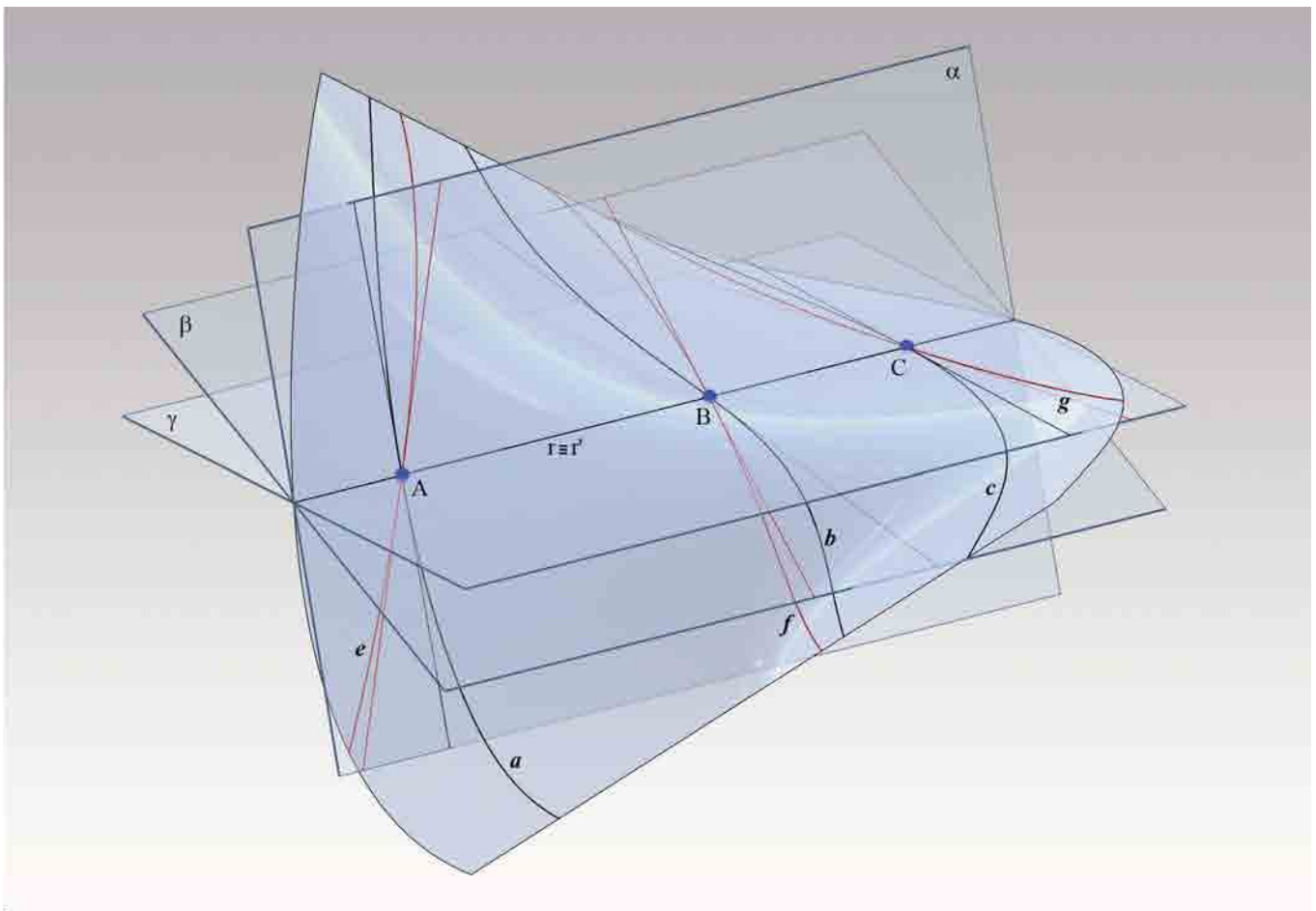
La teoria che abbiamo esposto porta a questi risultati: che l'iperboloido ad una falda comprende come casi particolari l'iperboloido di rivoluzione e il paraboloido iperbolico; che queste tre superfici possono essere generate in due modi differenti da una retta mobile; che sono divise in un'infinità di piccoli quadrilateri sghembi dai due sistemi di rette; infine che le aree comprese fra due rette consecutive d'uno stesso sistema di generazione, sono degli elementi sghembi che s'estendono indefinitamente nel senso delle rette che le comprendono. Dimosteremo adesso che la superficie rigata generale, così come l'abbiamo definita, e l'iperboloido ad una falda, possono, per una scelta conveniente delle rette generatrici di questa seconda superficie, avere in comune uno o due elementi sghembi consecutivi, secondo i quali l'iperboloido è tangente alla superficie rigata generale. E' per questa ragione che l'iperboloido ad una falda è

rispetto alle superfici rigate quello che il piano è rispetto alle superfici sviluppabili: non esiste nessuna superficie rigata che non possa essere vista come l'involuppo nello spazio che percorre un iperboloide ad una falda.

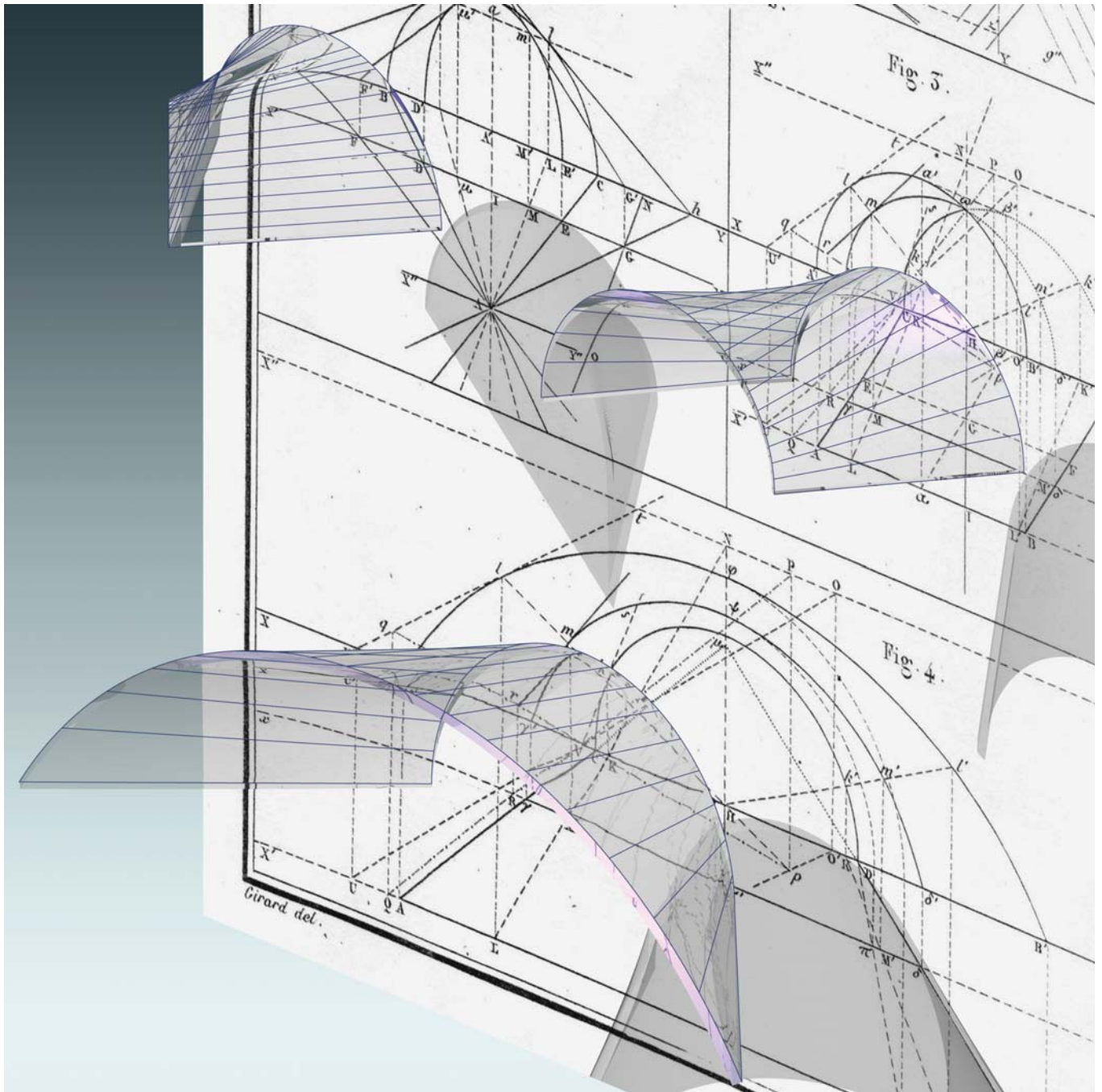
Iperboloidi tangenti secondo una retta alla superficie rigata generale

Siano a, b, c tre curve qualsiasi direttrici d'una retta mobile r (fig. 15). La superficie rigata di cui questa retta è la generatrice, ha come uno dei suoi elementi sghembi l'area compresa tra due posizioni successive r ed r' della generatrice mobile³¹. Quale che sia la superficie generata da questa retta, che ha per direttrici le tre curve a, b, c immaginiamo di prendere per i tre punti A, B, C

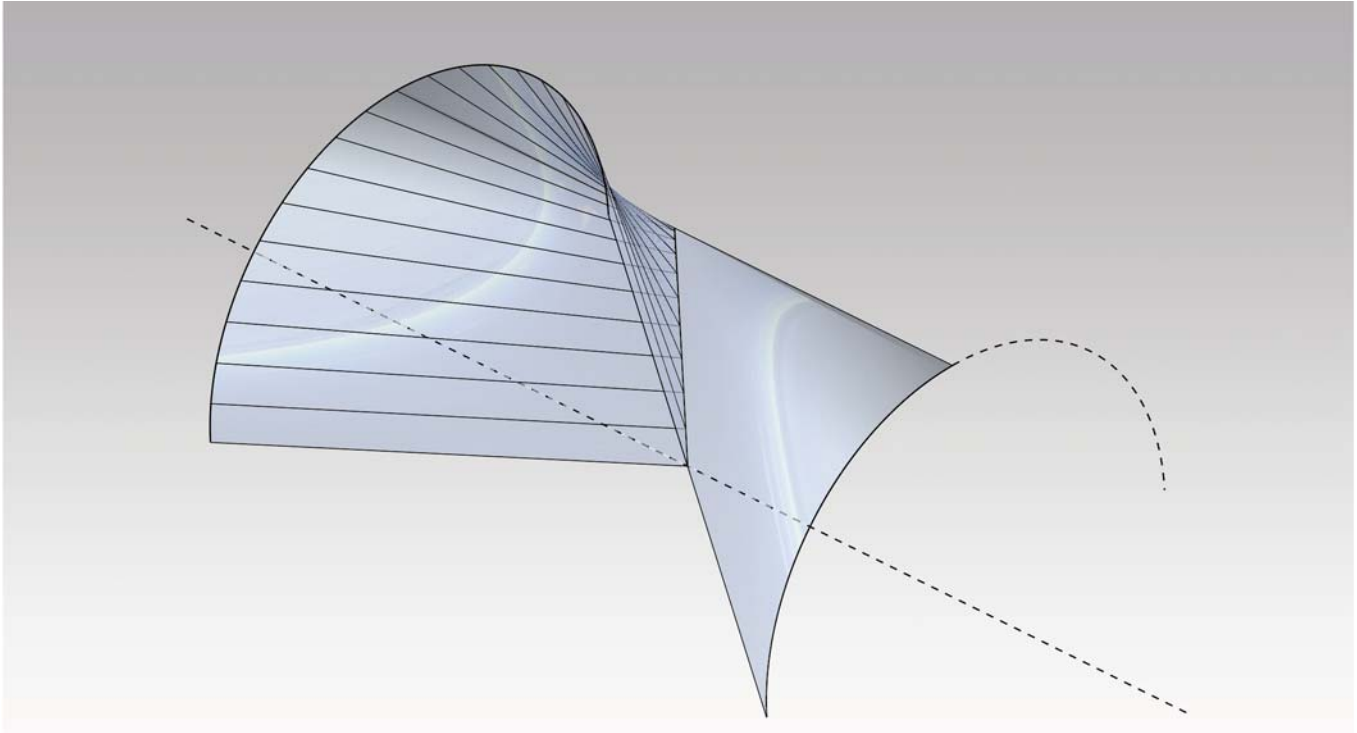
della retta r altre tre curve qualsiasi e, f, g della superficie; potremo prendere queste nuove curve per direttrici della retta mobile. La seconda superficie, generata con questa ipotesi, non differirà dalla prima, poiché le rette r, r', p , che si appoggiano sulle direttrici a, b, c incontrano altre curve della prima superficie, come e, f, g che passano per i punti A, B, C . Ma considerando solo l'elemento sghembo rr' , è evidente che la retta r' di questo elemento s'appoggia sulle tangenti alle prime tre direttrici a, b, c e che la retta q che si appoggia sulle tangenti delle tre nuove direttrici e, f, g appartiene allo stesso elemento, poiché tutte le tangenti alla superficie staccate dai punti A, B, C sono comprese nei piani tangenti in questi punti. Dunque se consideriamo tre piani



15/ Quale che sia la superficie rigata, esistono un'infinità d'iperboloidi ad una falda che hanno un elemento comune con questa superficie, e che le sono tangenti secondo la retta che determina questo elemento.



16/ Rappresentazione della tavola N°17 delle superfici rigate del trattato di Hachette. La prima superficie, a partire da sinistra in alto, è la voûte conoïde. Le direttrici sono un arco di cerchio, una retta verticale, e un piano direttore orizzontale. La seconda superficie è la superficie del bias passé. Le tre direttrici sono due archi di cerchio e una retta orizzontale. La terza superficie è l'arrière-voûssure. Le tre direttrici sono due archi di cerchio e una retta orizzontale.

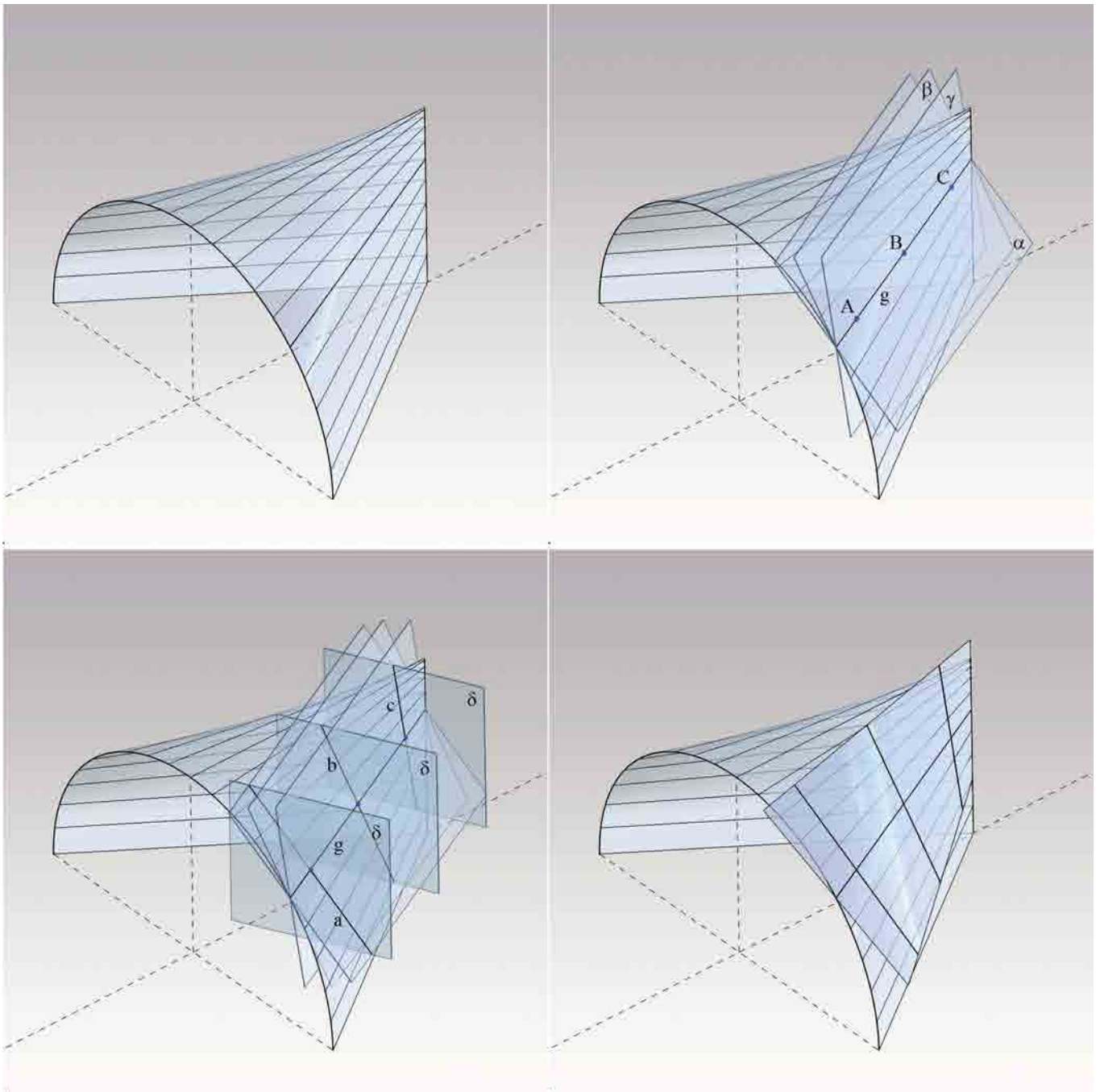


17/ Costruzione della superficie della voûte conoide.

tangenti in tre punti **A**, **B**, **C** d'una retta mobile d'una superficie rigata, e in ciascuno di questi piani una retta che passa per il punto di contatto, avremo tre rette che potremo prendere come direttrici d'un iperboloido, che sarà tangente alla superficie rigata, secondo l'elemento sghembo rr' .

Cosicché quale che sia la superficie rigata, esistono un'infinità d'iperboloidi ad una falda che hanno un elemento comune con questa superficie, e che le sono tangenti secondo la retta che determina questo elemento. Ciascuno di questi iperboloidi ha per direttrici della sua generatrice, tre rette arbitrarie prese in tre piani tangenti della superficie rigata, in tre punti della retta di contatto di questa superficie e dell'iperboloido. Tutti questi iperboloidi hanno in comune con la superficie rigata due rette consecutive di questa superficie, tranne uno solo che passerà per tre rette consecutive della superficie rigata, che avrà in comune con questa superficie un contatto più immediato e che per questa ragione è stato chiamato *iperboloido osculatore*.

Gli iperboloidi ad una falda, tangenti ad una superficie rigata secondo una retta, diventano dei paraboloidi, quando le rette direttrici prese nei tre piani tangenti, sono parallele a un medesimo piano. Siano **A**, **B**, **C** tre punti qualsiasi sulla retta r d'una superficie rigata. Facciamo passare per questi punti i piani tangenti alla superficie e per i medesimi punti tre piani paralleli qualsiasi che tagliano i piani tangenti secondo tre rette. Prendendo queste ultime rette come direttrici, la retta mobile genera un parabolide. Siccome la giacitura dei piani paralleli è arbitraria, esistono un'infinità di paraboloidi che sono tangenti alla superficie rigata secondo l'elemento r . Tra questi paraboloidi tangenti, c'è ne uno in cui le direttrici sono perpendicolari alla retta r . Determiniamo queste direttrici, facendo passare per i tre punti **A**, **B**, **C** dei piani paralleli, perpendicolari alla retta r , che tagliano i piani tangenti nei medesimi punti **A**, **B**, **C** secondo tre rette che sono evidentemente parallele ad un piano e perpendicolari alla retta della superficie rigata.



18/ Costruzione di un paraboloido iperbolico tangente alla voûte conoide lungo una retta generatrice.

Esempi di paraboloidi tangente alle superfici rigate

Adesso consideriamo tre casi particolari di superfici rigate esaminate da Hachette e di raccordi con una quadrica rigata (fig. 16).

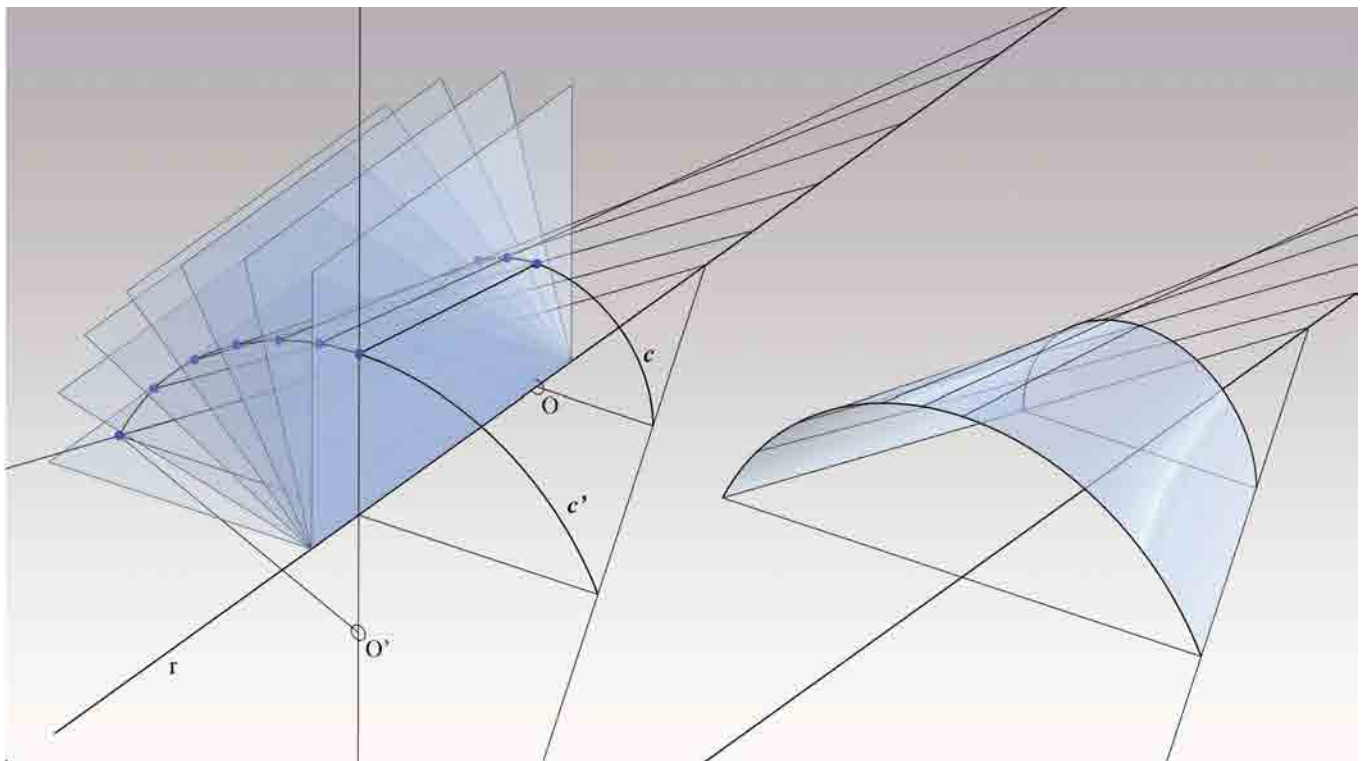
Primo esempio. Piano tangente e paraboloide tangente alla superficie rigata che nominiamo conoide.

La superficie rigata conoide della figura è generata da una retta mobile sempre orizzontale, che s'appoggia su due linee direttrici di cui l'una è una retta verticale **d** e l'altra è un arco di cerchio data su un piano verticale. La terza direttrice quindi è un piano direttore orizzontale. Questa superficie chiude una piccola volta, che nominiamo volta conoide (*voûte conoide*).

Sia **d** la retta verticale direttrice della retta mobile orizzontale; la seconda direttrice è un cerchio **c** che è dato nel piano verticale e che prendiamo come la base del conoide. Per costruire questa superficie nel metodo della rappresentazione matematica è possibile seguire la strada seguente: si costruisce il cerchio **c** e la retta **d** verticali (fig. 17). Poi si specchia il cerchio **c** ortogona-

lamente alla retta orizzontale **r** (che è anche perpendicolare al piano verticale del cerchio **c**). Si considerano le due metà opposte dei due cerchi **c** e **c'**. Si genera la superficie rigata considerando come direttrici le due semicirconferenze suddette. Si taglia la superficie rigata secondo la retta **d**, asse di simmetria della superficie. Infine è sufficiente specchiare la metà della superficie rispetto al piano di simmetria ortogonale verticale. La superficie rigata così costruita ha le generatrici rette esattamente allineate con la terza direttrice, ovvero con il piano direttore orizzontale.

Prendiamo un punto **A** della superficie del conoide sulla retta **g** generatrice (fig. 18). Il piano tangente nel punto **A** deve passare per la retta **g** e per una delle tangenti alla superficie nel punto **A**. Possiamo costruire un paraboloide iperbolico tangente alla superficie lungo la generatrice **g**. Consideriamo tre punti qualsiasi **A**, **B**, **C** sulla retta **g** e i tre piani tangenti α , β , γ alla superficie nei rispettivi punti. Ora tagliamo i tre piani tangenti di



19/ Costruzione della superficie dell' arrière-voussure.

asse g con altri tre piani paralleli ad un piano direttore δ . Come piano direttore ho scelto la giacitura perpendicolare alla generatrice g . I tre piani di taglio devono passare per i punti A, B, C . Le tre rette intersezione a, b, c saranno parallele ad un piano direttore dato e formeranno un paraboloide iperbolico tangente al conoide lungo la retta g .

Secondo esempio. Superficie rigata dell'arrière-vousure de Marseille.

Sia data una retta orizzontale r . Prendiamo sul piano verticale ortogonale ad r e passante per O un semicerchio c di centro O (fig. 19). Il secondo arco di cerchio c' è su un altro piano verticale con centro O' . I due archi di cerchio c, c' e la retta orizzontale r sono le tre direttrici della superficie rigata in questione. Come per il *bias passé* (vedi il terzo capitolo) le singole generatrici possono essere ricavate dall'intersezione di un fascio di piani passanti per la direttrice orizzontale r e secanti i due archi di cerchio. I punti intersezione rispettivi determinano le posizioni delle rette generatrici che si appoggiano alle tre direttrici date.

Vedremo nell'appendice che la superficie della piccola volta, che nominiamo arrière-vousure de Marseille si compone di due superfici rigate che hanno due direttrici comuni, l'orizzontale r e il cerchio c . La loro generazione non differisce se non per la terza direttrice. Esse hanno ugualmente due rette in comune e possono essere raccordate: questo consiste nel fatto che siano tangenti l'una all'altra secondo la retta che è comune. Questa condizione è soddisfatta quando hanno gli stessi piani tangenti in tre punti di ciascuna retta comune. Il procedimento per costruire un paraboloide iperbolico ricordato tramite una generatrice g alla superficie dell'*arrière-vousure* è esattamente lo stesso adoperato precedentemente.

Iperboloide osculatore

Tre linee qualsiasi d'una superficie rigata dirigono il movimento della retta generatrice di questa superficie. Le tangenti a queste curve, staccate per il punto dove una retta generatrice qualsiasi della superficie le incontra, determina un iperboloide tangente alla superficie secondo una retta. Ma sappiamo che un piano che ruoti

attorno ad una retta di un iperboloide, è, in tutte le sue posizioni, tangente a questo iperboloide. Ne consegue che un piano che ruoti attorno ad una retta d'una superficie rigata è, anch'esso, in tutte le sue posizioni, tangente a questa superficie, poiché sarà costantemente tangente ad un iperboloide che è lui stesso tangente alla superficie rigata.

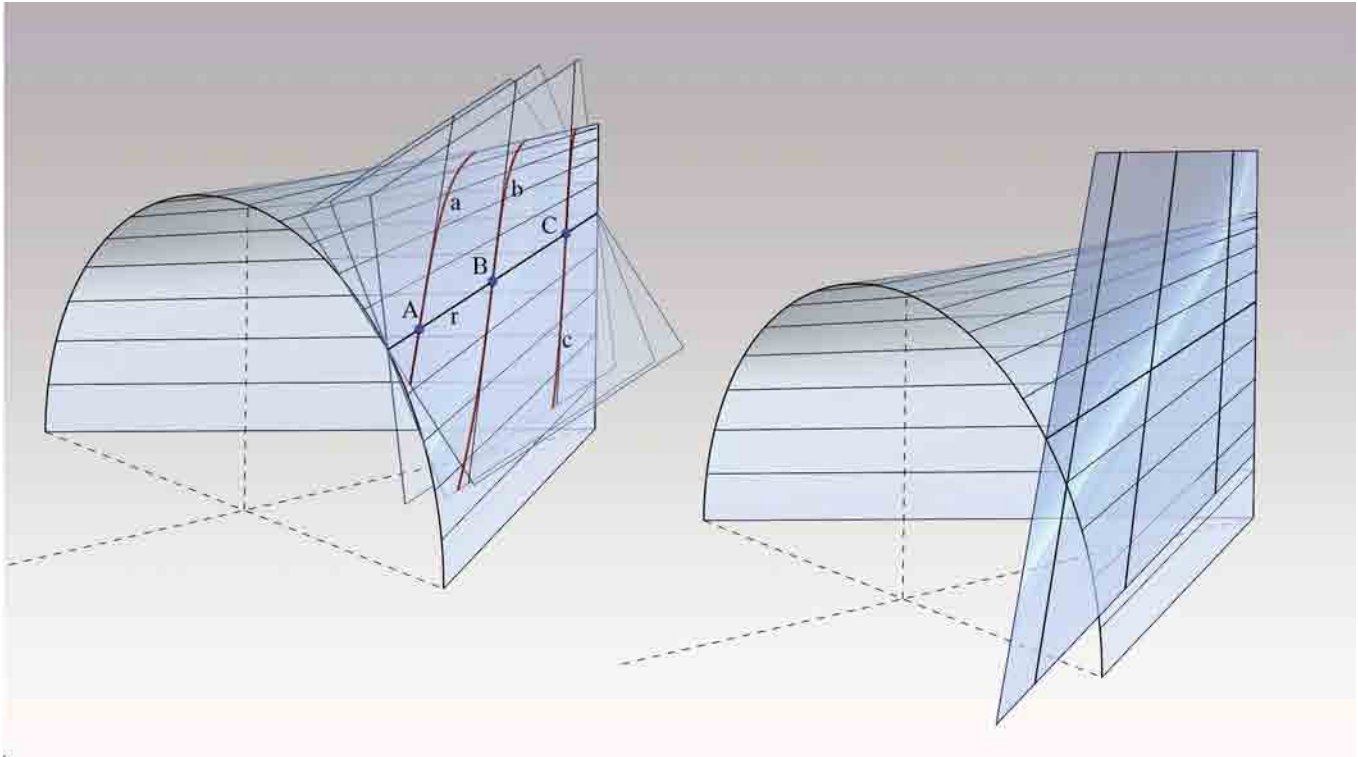
Avendo costruito lungo una retta d'una superficie rigata tre piani qualsiasi che la toccano in tre punti conosciuti, è evidente che tutte le rette appartenenti a questi piani e passanti per i punti di contatto saranno tangenti alla superficie. Ora tre di queste rette prese nei tre piani, determinano un iperboloide tangente alla superficie rigata. Di conseguenza due superficie rigate che hanno una retta in comune e tre piani tangenti in comune in tre punti di questa retta, sono tangenti l'uno all'altro in tutti i punti della retta comune, perché sarebbero toccati secondo una retta da un iperboloide che avrebbe per direttrici tre rette appartenenti ai tre piani tangenti, passanti per i punti di contatto di questi piani e delle due superfici.

Tre piani tangenti passanti per una retta data d'una superficie rigata e i tre punti di contatto determinano un'infinità d'iperboloidi ad una falda, tangenti alla superficie secondo una retta data. Tra questi iperboloidi c'è ne uno più importante; è quello che contiene tre rette consecutive della superficie rigata e che nominiamo *iperboloide osculatore*. *Esso misura la curvatura d'un elemento sghembo della superficie rigata, come il cerchio osculatore misura quella di una curva dove è osculatore.*

Determinazione dell'iperboloide osculatore

Fra i piani tangenti d'una superficie rigata, passanti per una retta data r di questa superficie, tre qualsiasi di questi piani tagliano la superficie secondo tre curve a, b, c che sono intersecate dalla retta r in tre punti A, B, C (fig. 20). I punti A, B, C sono i punti di contatto dei tre piani tangenti alla superficie rigata. Le tangenti rispettive alle tre curve a, b, c passanti per i tre punti A, B, C sono le direttrici della retta generatrice dell'iperboloide osculatore.

Consideriamo la superficie rigata del conoide della *voûte conoide* analizzata precedentemente (vedi figura 17).³² In questo caso ho scoperto e ho potuto verificare



20/ Costruzione della superficie osculatrice della superficie rigata della voûte conoide.

che la superficie osculatrice lungo una retta è un paraboloide iperbolico. Le tangenti **a**, **b**, **c** alle tre linee **a**, **b**, **c** sono tutte parallele ad un medesimo piano direttore. Di conseguenza la quadrica rigata passante per quelle tre direttrici non potrà che essere un paraboloide iperbolico e non un iperboloide ad una falda come sarebbe stato logico aspettarsi.

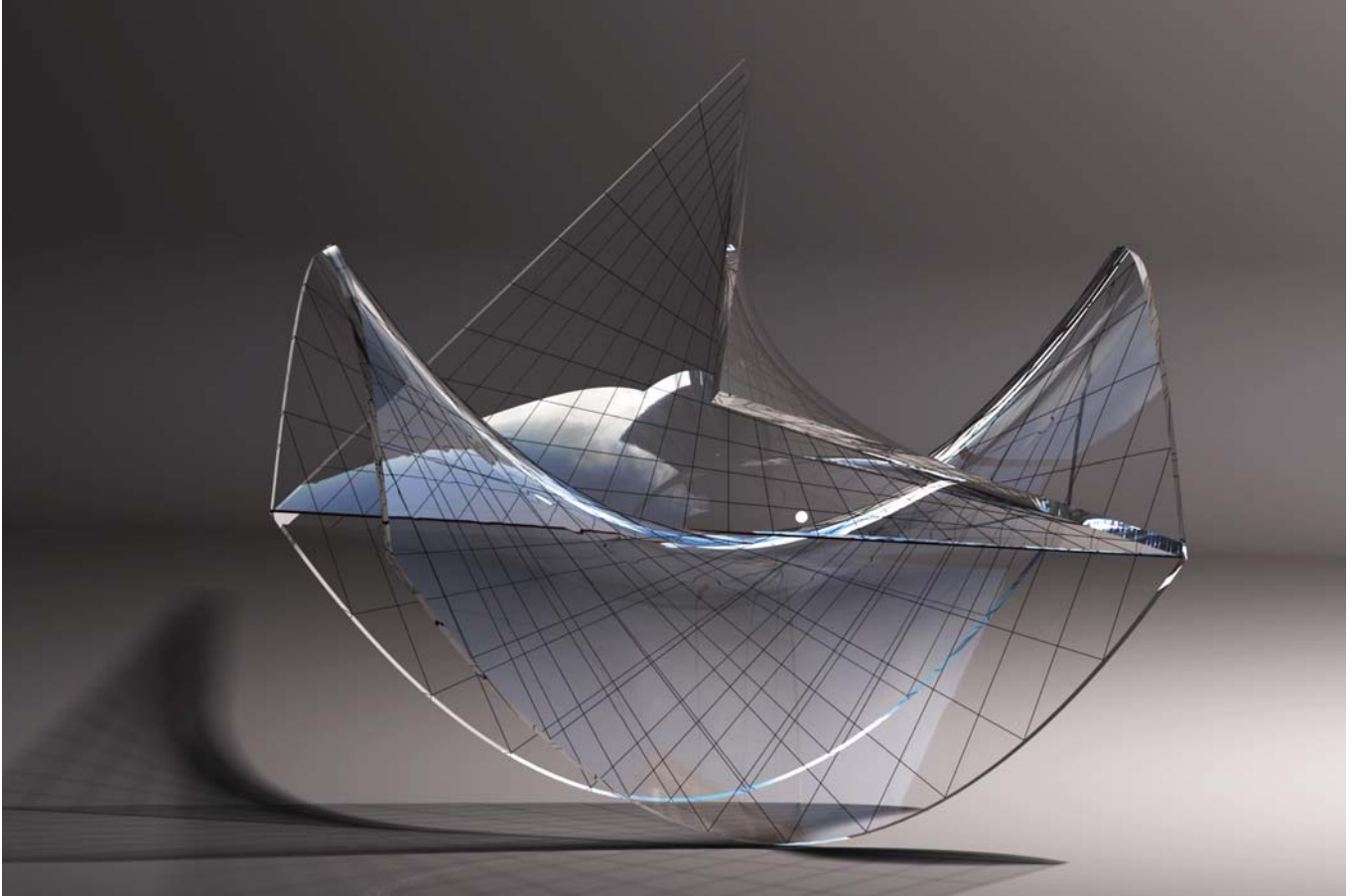
Rappresentazione delle proprietà principali delle superfici rigate

In questo paragrafo³³ ci proponiamo di rappresentare attraverso il metodo della rappresentazione matematica le quattro proprietà principali descritte da Hachette nel suo trattato. Per cui vengono descritte le operazioni spaziali da effettuare nelle singole sperimentazioni³⁴. Questo per consentire a chi lo desiderasse di poter ripetere esattamente il medesimo esperimento descritto nella ricerca.

Prima proprietà. *Le superfici rigate hanno come superficie normale lungo una retta, un iperboloide a*

una falda, o un plan gauche i cui parametri variano per ciascuna retta (fig. 21);

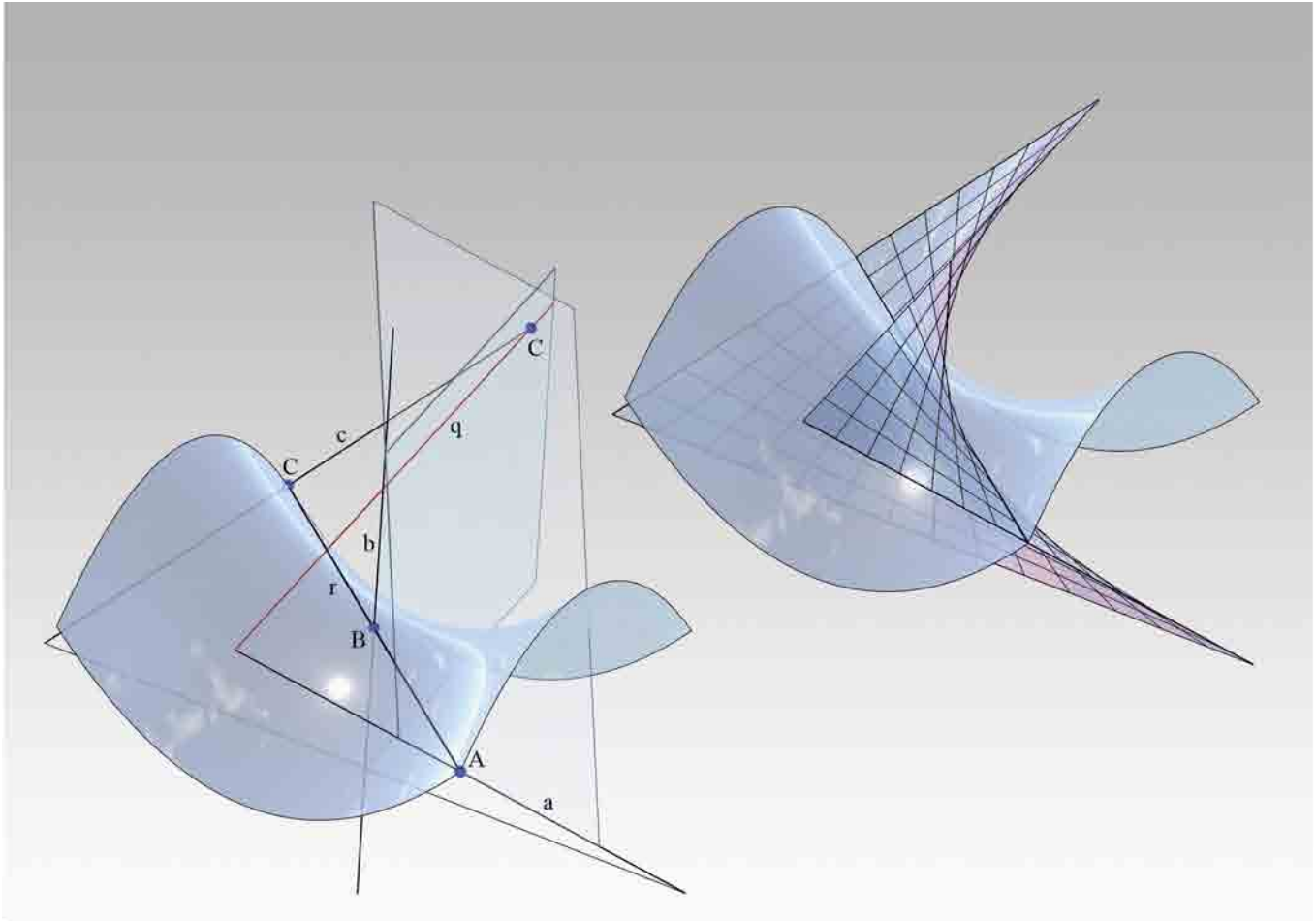
Come già ricordato la prima proprietà così come è enunciata da Hachette è inesatta, perché la superficie normale lungo una retta di una superficie rigata è sempre un paraboloide iperbolico e non un iperboloide (come precisano autori più moderni, ad esempio Gino Fano). Hachette, purtroppo, non aveva gli strumenti per potersene rendere conto. Egli, infatti, non poteva fare una verifica sperimentale di questa proprietà, come abbiamo fatto noi, e non poteva neppure studiarla con gli strumenti della geometria proiettiva, nata, come è noto, con Jean-Victor Poncelet negli stessi anni degli studi di Hachette (vedi il paragrafo *paraboloide delle normali* nel terzo capitolo). Consideriamo una superficie rigata **R**³⁵ (fig. 22). Per costruire l'iperboloide delle normali è sufficiente staccare tre rette ortogonali alla superficie rigata **R** lungo una retta qualsiasi **r** della superficie in tre punti distinti **A**, **B**, **C**. Le tre rette **a**, **b**, **c** sono le direttrici che determinano il paraboloide delle norma-



21/ Rappresentazione della prima proprietà delle superfici rigate. Le superfici rigate hanno come superficie normale lungo una retta un piano gauche i cui parametri variano per ciascuna retta.

li. Nella rappresentazione matematica un paraboloido iperbolico è determinato da un quadrilatero sghembo. E' necessario, allora, procurarsi una seconda retta \mathbf{q} appartenente alla stessa schiera di \mathbf{r} . Si fa passare un piano γ per la direttrice \mathbf{a} e per un punto \mathbf{C} qualsiasi della terza direttrice retta \mathbf{c} . Si costruisce un secondo piano per la direttrice \mathbf{b} e per lo stesso punto \mathbf{C} . La retta intersezione \mathbf{q} dei due piani di costruzione è la generatrice passante per \mathbf{C} che si appoggia alle tre rette date \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Ora è possibile generare la superficie del paraboloido tramite i bordi del quadrilatero sghembo composto dalla coppia di rette \mathbf{a} , \mathbf{c} e dalla coppia di rette \mathbf{r} , \mathbf{q} . Adesso verifichiamo che i piani direttori del paraboloido siano ortogonali fra loro. E' sufficiente costruire il primo piano direttore α formato dalla prima coppia di rette \mathbf{a} , \mathbf{c} .

Si copia la retta \mathbf{c} e si trasla in un punto appartenente alla copia della retta \mathbf{a} in un punto qualsiasi dello spazio. Il piano formato dalle due rette incidenti (la retta \mathbf{a} e la copia traslata della retta \mathbf{c}) è il primo piano direttore α del sistema di rette di cui fanno parte le tre rette \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Il secondo piano direttore β è formato dalla seconda coppia di rette \mathbf{r} , \mathbf{q} . La costruzione è la medesima anzidetta. Una volta definiti i due piani direttori si misura l'angolo diedro che individuano; questo risulterà un angolo retto. L'intersezione dei due piani direttori dà la direzione dell'asse del paraboloido delle normali. La vista ortogonale all'asse del paraboloido delle normali mette in luce la presenza dei due piani direttori (fig. 23) La dimostrazione del perché la superficie normale lungo una retta di una superficie rigata sia sempre un



22/ Costruzione del paraboloide delle normali.

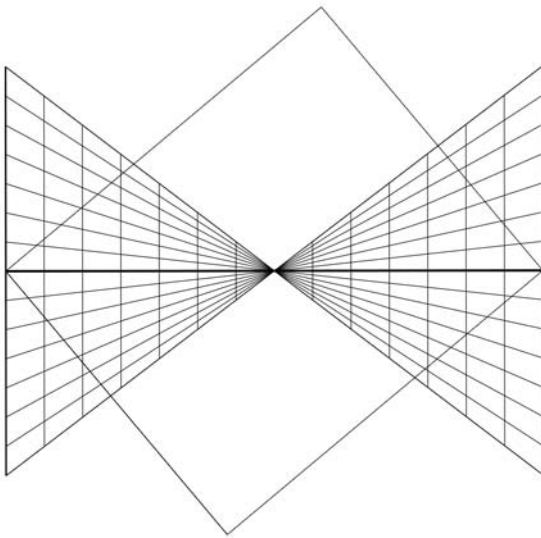
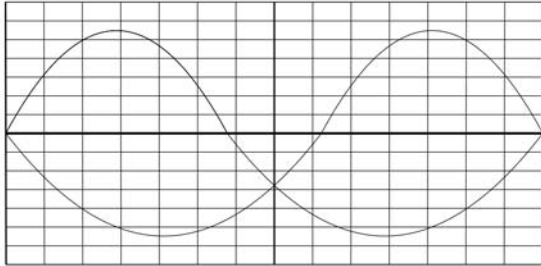
paraboloide iperbolico è riportata nel terzo capitolo³⁶.

Seconda proprietà. *Le superfici rigate hanno per superficie osculatrice lungo una retta, un iperboloido a una falda determinato, i cui parametri variano per ciascuna retta.*

Il secondo teorema di Hachette è anch'esso impreciso, perché ho potuto verificare che in alcuni casi la superficie osculatrice è un paraboloide iperbolico. Tre piani tangenti passanti per una retta data d'una superficie rigata nei tre punti di contatto scelti determinano un'infinità d'iperboloidi ad una falda, tangenti alla superficie secondo una retta data. Tra questi iperboloidi c'è ne uno più importante; è quello che nominiamo *iperboloi-*

de osculatore. Esso misura la curvatura d'un elemento sghembo della superficie rigata, come il cerchio osculatore misura quella di una curva dove è osculatore. Fra i piani tangenti d'una superficie rigata, passanti per una retta data r di questa superficie, tre qualsiasi di questi piani tagliano la superficie secondo tre curve a, b, c che sono intersecate dalla retta r in tre punti A, B, C . Le tangenti rispettive a, b, c alle tre curve a, b, c passanti per i tre punti A, B, C sono le direttrici della retta generatrice dell'iperboloido osculatore.

Queste tre rette sono le direttrici dell'iperboloido osculatore. E' possibile costruire parte del quadrilatero sghembo dell'iperboloido osculatore trovando un certo numero di generatrici (del secondo sistema di rette che



23/ La vista ortogonale all'asse del paraboloido delle normali mette in luce la presenza dei due piani direttori.

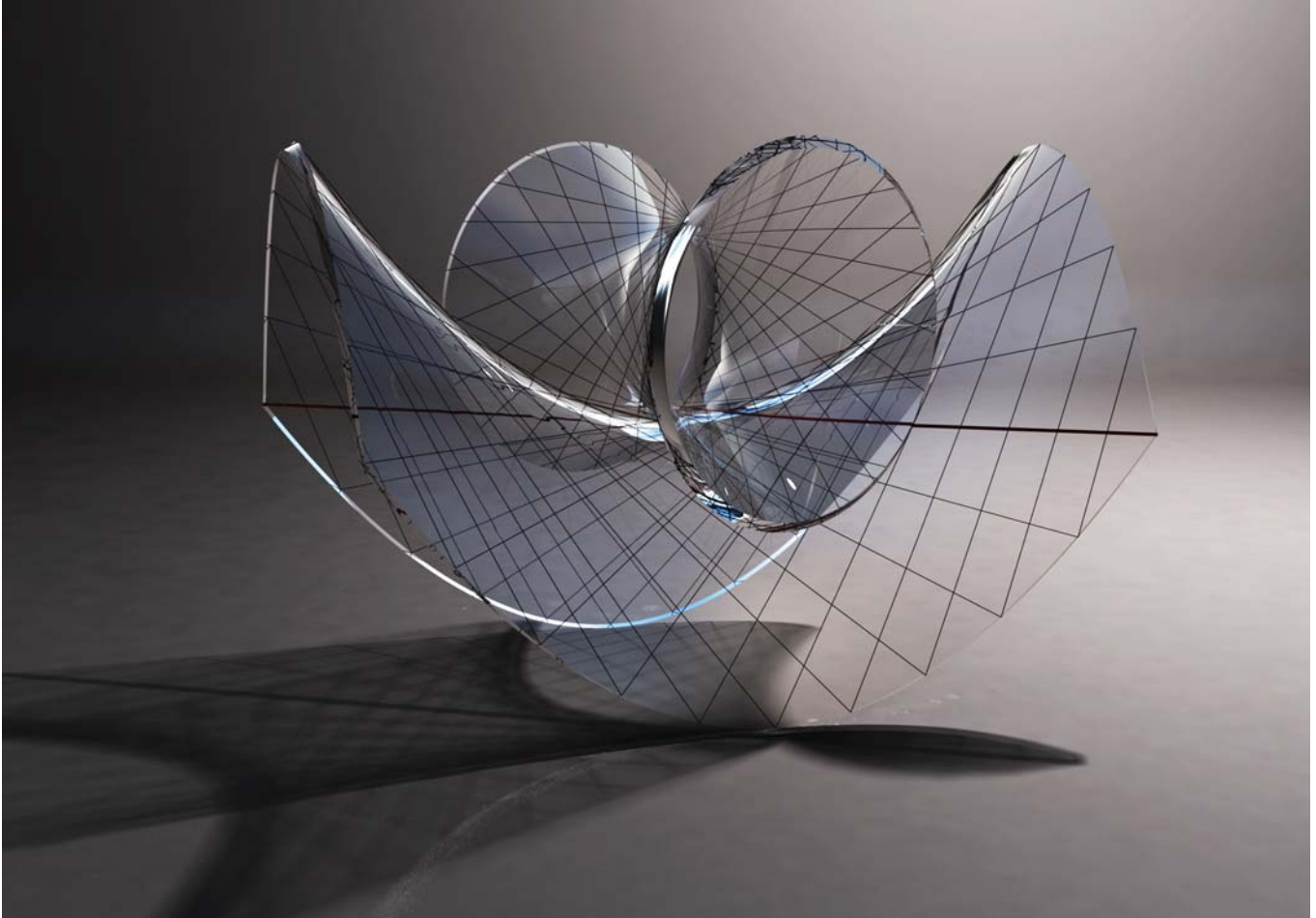
interseca le tre direttrici) e poi generare la superficie interpolando tali rette. Ho elaborato, però, una costruzione ottimale che consente di disegnare esattamente un iperboloido ad una falda date tre rette direttrici. Questa costruzione sfrutta il centro della superficie e le proprietà di simmetria ortogonale dei tre piani principali in particolare del piano che contiene l'ellisse di gola e consente di disegnare l'iperboloido ad una falda come dilatazione di un iperboloido di rotazione. Per costruire l'intera superficie dell'iperboloido ad una falda si rimanda al secondo capitolo, perché la costruzione fa uso di alcune proprietà della geometria proiettiva. Un caso in cui la superficie osculatrice è un paraboloido iperbolico è quello rappresentato nella figura 20.

Terza proprietà. *Le superfici rigate hanno per superfici tangenti lungo una retta, un'infinità d'iperboloidi ad una falda.*

Quale che sia la superficie rigata, esistono un'infinità d'iperboloidi ad una falda che hanno un elemento comune con questa superficie, e che le sono tangenti secondo la retta che determina questo elemento. Ciascuno di questi iperboloidi ha per direttrici della sua generatrice, tre rette arbitrarie prese in tre piani tangenti della superficie rigata, in tre punti della retta di contatto di questa superficie e dell'iperboloido. Tutti questi iperboloidi hanno in comune con la superficie rigata due rette consecutive di questa superficie, tranne uno solo che passerà per tre rette consecutive della superficie rigata, che avrà in comune con questa superficie un contatto più immediato e che per questa ragione è stato chiamato *iperboloido osculatore*³⁷.

Gli iperboloidi ad una falda, tangenti ad una superficie rigata secondo una retta, diventano dei paraboloidi, quando le rette direttrici prese nei tre piani tangenti, sono parallele a un medesimo piano. Siano **A**, **B**, **C** tre punti qualsiasi sulla retta **r** d'una superficie rigata. Facciamo passare per questi punti i piani tangenti alla superficie e per i medesimi punti tre piani paralleli qualsiasi che tagliano i piani tangenti secondo tre rette. Prendendo queste ultime rette come direttrici, la retta mobile genera un paraboloido iperbolico. Siccome la giacitura dei piani paralleli è arbitraria, esistono un'infinità di paraboloidi che sono tangenti alla superficie rigata secondo l'elemento **r**. Tra questi paraboloidi tangenti, c'è ne uno in cui le direttrici sono perpendicolari alla retta **r**. Determiniamo queste direttrici, facendo passare per i tre punti **A**, **B**, **C** dei piani paralleli, perpendicolari alla retta **r**, che tagliano i piani tangenti nei medesimi punti **A**, **B**, **C** secondo tre rette che sono evidentemente parallele ad un piano e perpendicolari alla retta della superficie rigata (fig. 24, vedi anche figura 18).

Per determinare un iperboloido ad una falda tangente qualsiasi si prendono tre punti qualsiasi sulla retta **r** della superficie rigata data. Nell'esempio illustrato sono partito da un iperboloido di rotazione (fig. 25). Si costruiscono i tre piani tangenti alla superficie nei tre punti. Su questi tre piani si fanno passare tre rette a pia-

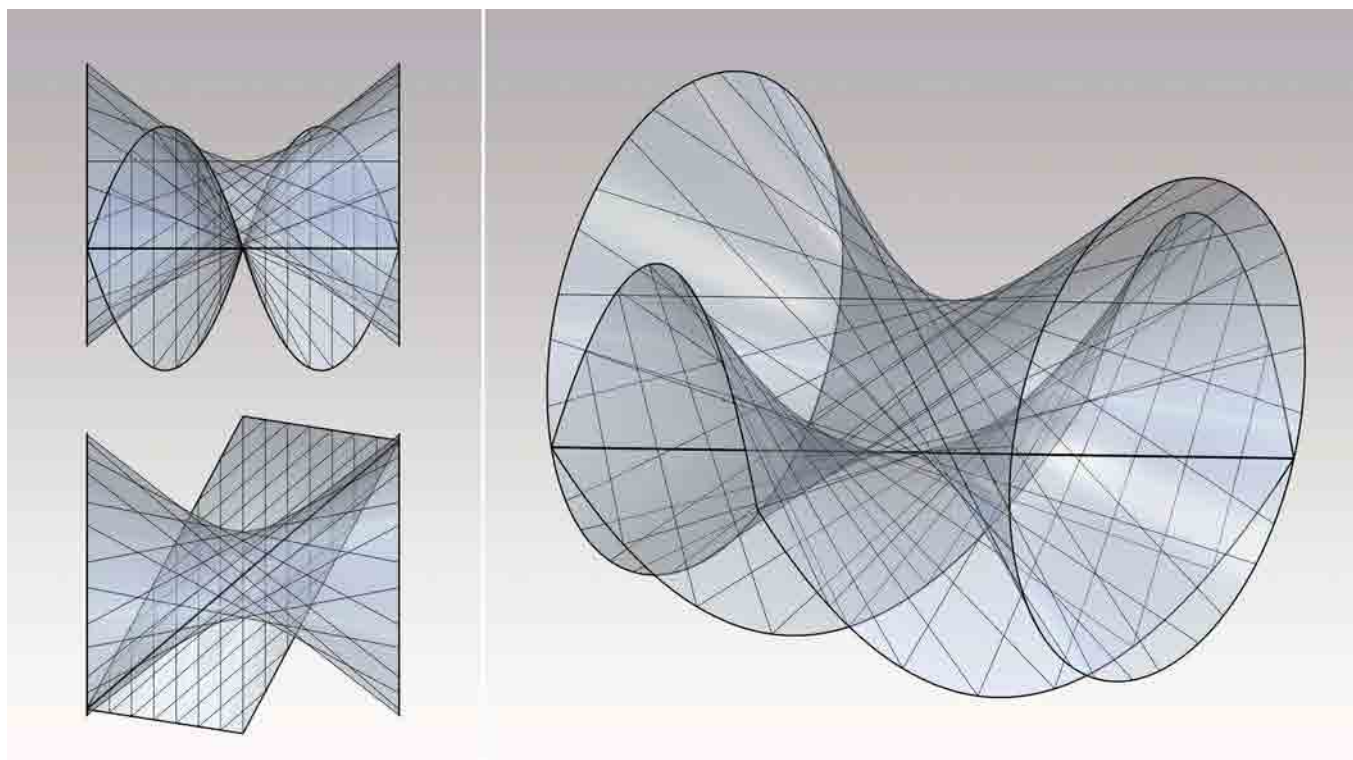


24/ Rappresentazione della terza proprietà delle superfici rigate.

cere. L'unica condizione è che ciascuna di esse dovrà appartenere al rispettivo piano tangente e passare per il punto di contatto del piano a cui appartiene. E' evidente che per ogni punto di contatto esiste un fascio di rette appartenente al piano tangente rispettivo. Queste tre rette sono le direttrici di uno degli infiniti iperboloidi rigati tangenti lungo r alla superficie rigata data. Per costruire esattamente l'iperboloide ad una falda si rimanda al secondo capitolo (il *laboratorio sperimentale della geometria descrittiva*).

Adesso vorrei fare alcune considerazioni sulla sperimentazione fatta. Come già detto sono partito da un iperboloide di rivoluzione e ho costruito tre quadriche tangenti lungo la retta r . Precisamente ho costruito un

paraboloide iperbolico e due iperboloidi ad una falda. Per cui abbiamo 4 superfici rigate (due iperboloidi rigati, un paraboloide iperbolico e un iperboloide di rivoluzione) tangenti lungo una medesima retta r . Ho posizionato l'insieme delle superfici rigate secondo l'asse del paraboloide iperbolico. L'asse in questione è perpendicolare al piano orizzontale e il paraboloide è tagliato secondo quattro parabole principali sfruttando le proprietà di simmetria della superficie. Ma non è solo questo che volevo far notare. La sperimentazione mi ha consentito di costruire nello spazio tali iperboloidi tangenti lungo la medesima retta e di mettere in luce una coincidenza interessante: le coppie di iperboloidi rigati tangenti lungo la retta r sembrano tagliarsi tutti secondo tre rette, di



25/ Paraboloide iperbolico tangente ad un iperboloide di rivoluzione lungo una retta.

cui una è la retta \mathbf{r} (fig. 26 e 27). Non ho ancora trovato una dimostrazione teorica di questo fatto, d'altra parte, come ricorda Monge, la sperimentazione certe volte ci porta *dal noto all'ignoto*.

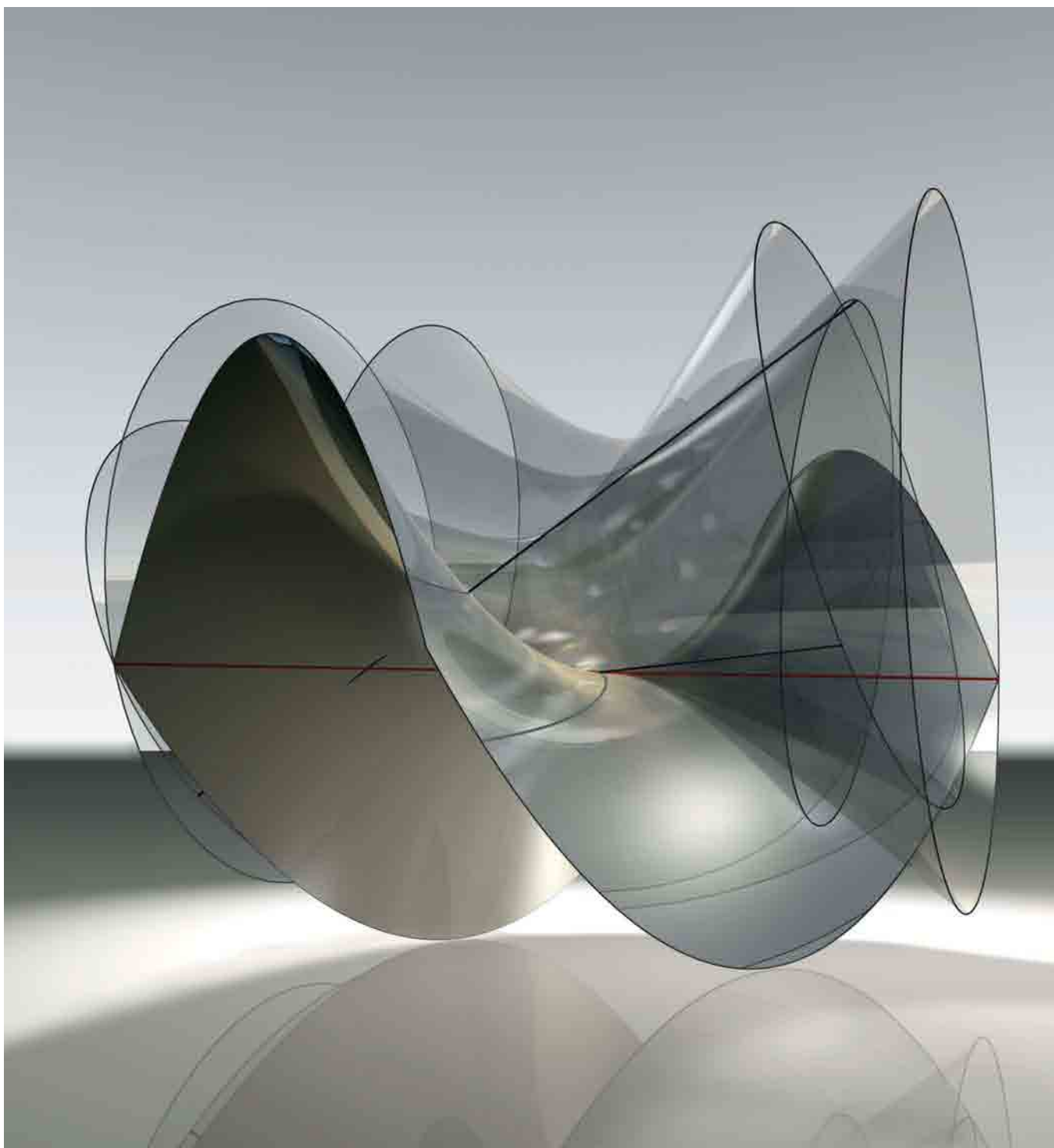
Quarta proprietà. *Due superfici rigate che abbiano una retta in comune e tre piani tangenti comuni in tre punti differenti di questa retta, sono tangenti l'una all'altra lungo tutti i punti della retta loro comune.*

Questo teorema è il fondamento di tutte le proprietà viste finora. La dimostrazione di questo teorema si basa su semplici concetti di geometria proiettiva e si può trovare nel capitolo terzo nel paragrafo *Conseguenze del teorema di Chasles*³⁸.

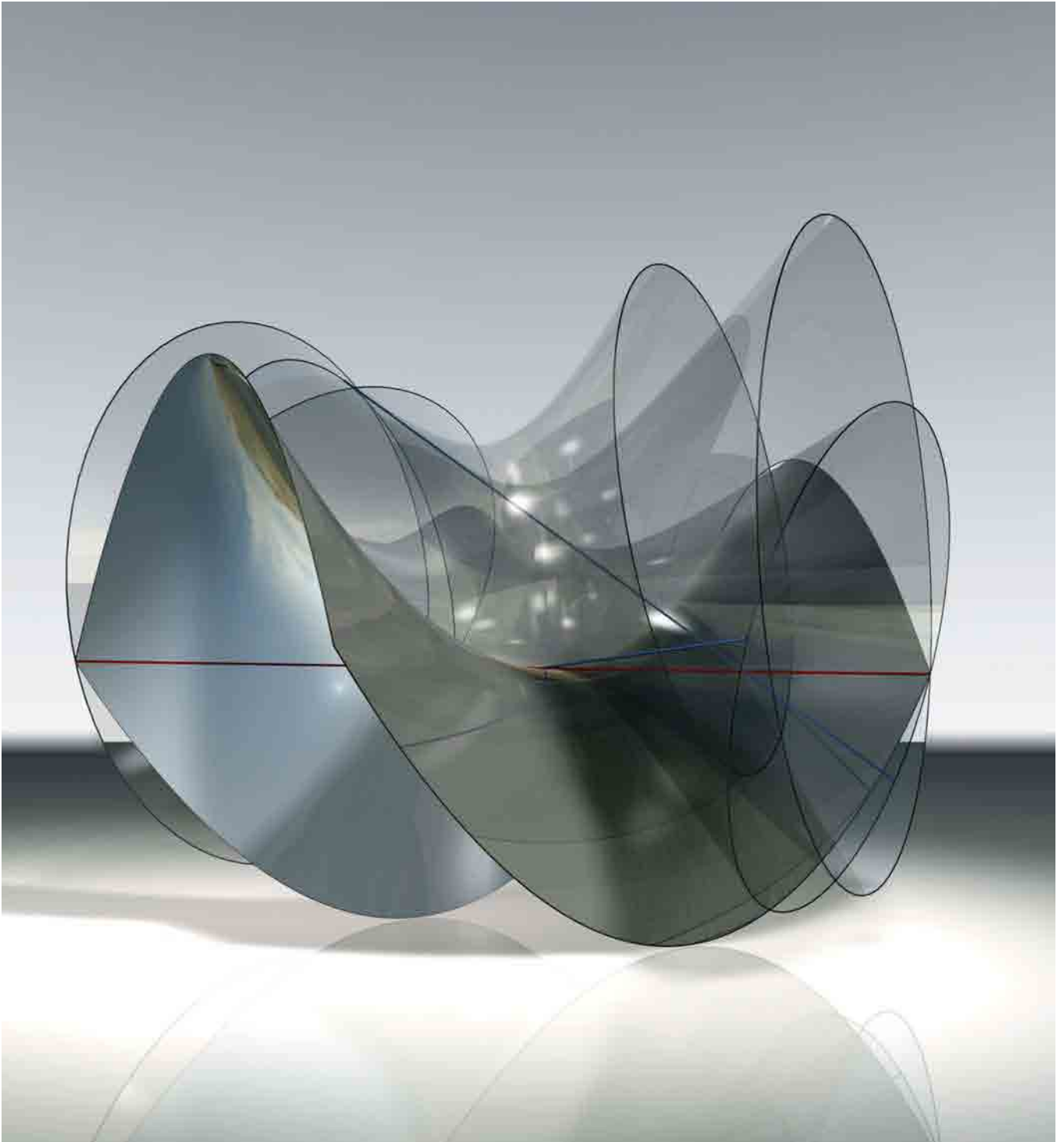
Laboratorio sperimentale della geometria descrittiva Costruzione di un iperboloide ad una falda

Nei modellatori NURBS le superfici vengono definite tramite curve dette isoparametriche (\mathbf{u}, \mathbf{v}) . Una superficie rigata è una superficie nelle cui equazioni parame-

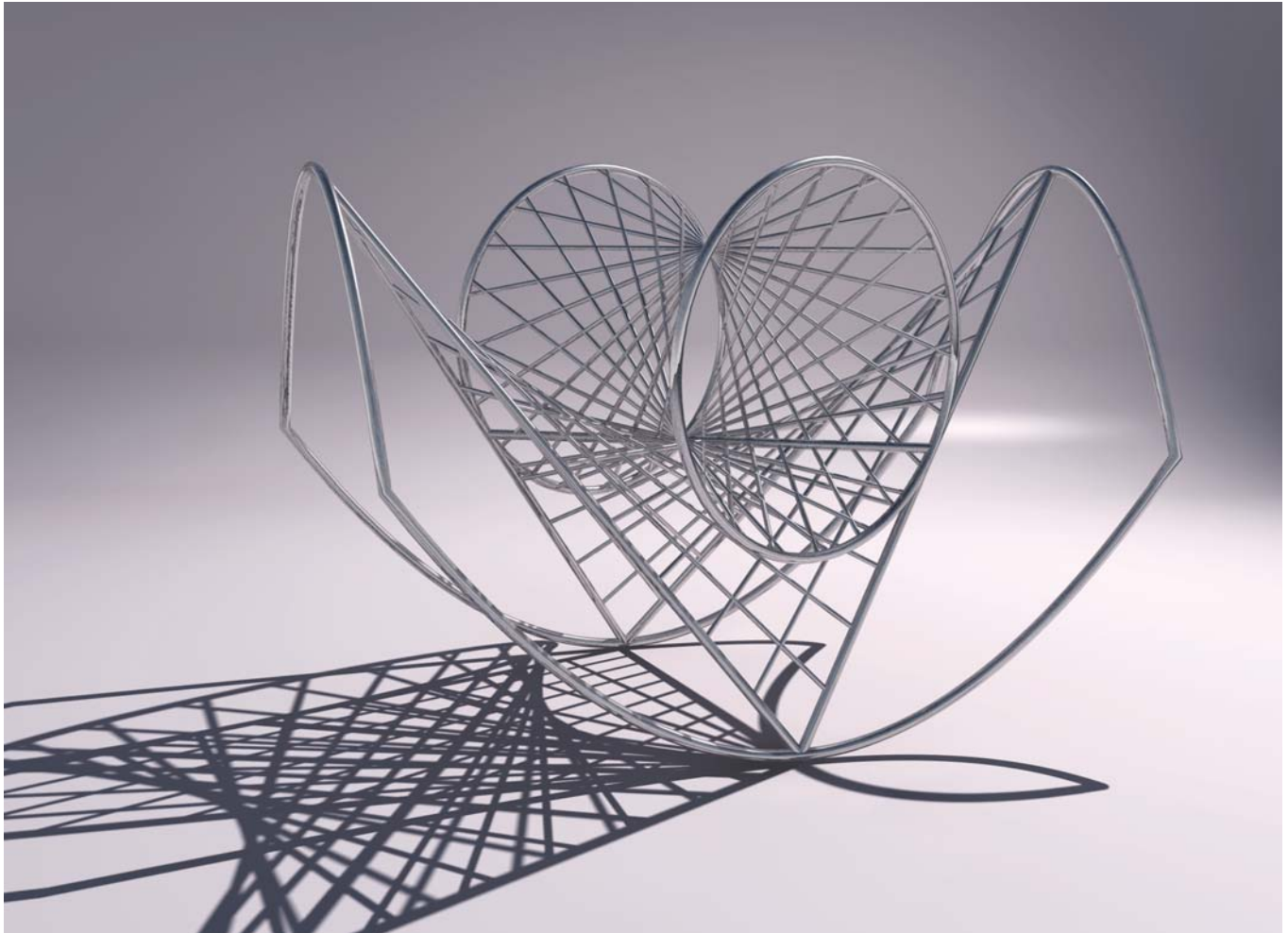
triche uno dei due parametri appare di grado uno e con un singolo arco³⁹. Le curve isoparametriche relative ad uno dei due parametri (ad esempio il parametro \mathbf{u}) sono pertanto linee rette e costituiscono le generatrici della superficie rigata. È possibile, tuttavia, generare una rigata anche senza costruirla a partire dal movimento di una retta, basti pensare al paraboloide iperbolico⁴⁰, nel qual caso nessuna delle due schiere di curve isoparametriche è una retta. Il modellatore permette ugualmente una serie di verifiche attraverso diversi strumenti fra i quali l'analisi gaussiana⁴¹ che consente di controllare la curvatura delle superfici e verificare, quindi, che la curvatura, nel caso delle superfici rigate, sia sempre negativa. Siccome in geometria descrittiva una superficie è definita quando è possibile disegnare la posizione di ogni generatrice, è preferibile, nell'ambiente di modellazione, definire le superfici rigate tramite il movimento della retta generatrice mobile. Vedremo che in alcuni casi sarà, invece, più opportuno generare un iperboloide di rotazione tramite la curva dell'iperbole principale.



26/ Rappresentazione di quattro superfici quadriche rigate tangenti lungo una stessa retta.



27/ Rappresentazione di quattro superfici quadriche rigate tangenti lungo una stessa retta.



28/ Rappresentazione particolare del paraboloido iperbolico tangente ad un iperboloido di rivoluzione.

Il metodo più spedito ed esatto per realizzare un iperboloido rigato generico è quello di partire da un iperboloido di rotazione per poi dilatarlo in un iperboloido ad una falda. Questa operazione è perfettamente legittima sia da un punto di vista tecnico sia da un punto di vista teorico geometrico. Dal punto di vista tecnico ho verificato che è il solo metodo⁴² per ottenere esattamente un iperboloido ad una falda attraverso gli strumenti del disegno digitale. Dal punto di vista teorico una rigata può essere sempre ottenuta come trasformazione di un'altra rigata. La trasformazione è simile a quella che avviene nelle superfici sviluppabili quando vengono sviluppate nel piano. Una trasformazione che avviene senza *rottture*

e sovrapposizioni. Questo metodo di generazione per trasformazione consente di poter sperimentare un'altra questione sugli iperboloidi, ovvero la questione della linea di stringimento⁴³ dell'iperboloido, che, purtroppo, non è descritta chiaramente nei trattati di geometria descrittiva. Evidentemente per i matematici è una questione ampiamente nota oppure di poco valore e non ritengono necessario specificare il problema. In ogni modo ho potuto verificare che la linea di stringimento dell'iperboloido ad una falda non coincide con l'ellisse di gola come avviene, invece, per l'iperboloido di rivoluzione. Adesso generiamo un iperboloido rigato di rivoluzione. Si costruisce una retta verticale z , che

assumiamo come asse della superficie, e una retta r sghemba rispetto all'asse. Si costruisce l'iperboloide di rivoluzione facendo ruotare la retta r attorno all'asse z . Le isoparametriche della superficie di rivoluzione saranno: per la u dei cerchi simili e per la v delle rette⁴⁴ (o viceversa). Le isoparametriche v rappresentano la prima schiera di rette dell'iperboloide di rivoluzione. Per determinare la seconda schiera è preferibile fare una copia della superficie specchiandola rispetto al suo piano di simmetria ortogonale (piano perpendicolare all'asse z e passante per il centro della superficie). Otteniamo in questo modo una seconda superficie che ha, viceversa, come isoparametriche v la seconda schiera di rette. E' possibile estrarre un numero a piacere di rette appartenenti alla prima schiera e verificare che intersecano tutte la seconda schiera. Ritengo che il metodo appena descritto sia il più efficace per rappresentare l'iperboloide di rivoluzione attraverso il movimento della retta generatrice e ottenere ambedue le schiere di rette. Un altro modo, ugualmente corretto, consiste nel disegnare un'iperbole i in un piano qualsiasi passante per l'asse z e generare la superficie di rivoluzione dell'iperboloide. In questo caso il parametro v delle isoparametriche sarà una curva assimilabile ad un'iperbole. Poniamoci il problema di costruire un iperboloide generico, altrimenti detto iperboloide ad una falda. Sappiamo che la definizione più generale è quella di una generatrice retta mobile che nel suo movimento si appoggia a tre direttrici rette fisse (teorema di Monge). Vedremo nel capitolo successivo come generare un iperboloide generico esatto a partire da tale definizione. Adesso rappresentiamo semplicemente un iperboloide generico attraverso una dilatazione. Una volta costruito un iperboloide di rivoluzione è sufficiente trasformare questo, attraverso una dilatazione (o contrazione) lungo una sola direzione principale⁴⁵ per ottenere un iperboloide generico esatto. Inoltre è possibile sfruttare sempre la simmetria ortogonale rispetto ai piani principali per generare un secondo iperboloide generico, perfettamente coincidente con il primo, che ci dia la seconda schiera di rette.

thinkdesign

Disegniamo un iperboloide rigato di rivoluzione.

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, si disegna la linea z dell'asse sul piano di costruzione.

Modifica/ Sposta/copia, consente di ruotare di novanta gradi l'asse z rispetto al sistema di riferimento cartesiano del programma.

Modifica/ Sposta/copia, consente di fare una copia della retta z e di ruotarla a piacere rispetto agli assi di riferimento globali. Otteniamo in questo modo la retta r sghemba rispetto alla retta z . Si consiglia di traslare la copia rispetto al punto medio della retta z verso la direzione y degli assi e di ruotarla rispetto al piano zy di un angolo a piacere (si può scegliere anche la direzione lungo l'asse x).

Inserisci/ Superfici/Di rotazione, consente di generare l'iperboloide di rivoluzione rigato scegliendo come generatrice la retta r e come asse della superficie la retta z .

Inserisci/ Curve/Isoparametriche, consente di estrarre le curve isoparametriche della superficie. E' possibile verificare che le u sono le rette generatrici mentre le v sono i cerchi paralleli al piano orizzontale.

Modifica/ Rifletti, consente di specchiare e copiare la superficie secondo la modalità *perpendicolare ad asse e per punto* scegliendo come asse l'asse z e come punto un punto qualsiasi appartenente all'asse z . Otteniamo una copia della superficie rigata, perfettamente coincidente con la prima, che avrà questa volta come generatrice retta il secondo sistema di rette. Si ricorda che l'iperboloide di rivoluzione è una quadrica ed è generata in due modi differenti secondo due sistemi di rette. E' possibile estrarre da quest'ultima superficie le isoparametriche rette u , e verificare l'intersezione colle rette generatrice della prima superficie dell'iperboloide.

Adesso disegniamo un iperboloide ad una falda o quello che Hachette definisci come *la superficie rigata elementare*.

Vista/ Orientamento/ Alto, consente di orientare la vista ortogonale al piano di lavoro in modo da vedere l'iperboloide come due cerchi concentrici e l'asse come un punto. Il cerchio più piccolo sarà il cerchio di gola.

Modifica/ Scala, consente di trasformare la superficie lungo una sola direzione. Si consiglia di posizionare l'origine del manipolatore con un punto appartenente all'asse e di scalare la superficie lungo solamente una direzione. Otteniamo in questo modo un iperboloide ri-

gato generico. Come per l'iperboloide di rivoluzione è possibile specchiare la superficie rispetto ad un suo piano principale e ottenere un'altra superficie perfettamente coincidente colla prima. Estraendo le isoparametriche rette da ambedue le superfici coincidenti otterremo i due sistemi di rette della quadrica.

Note

1. Hachette Jean Nicolas Pierre (1828), *Traité de Géométrie Descriptive*, Paris, Corby.

2. Hachette J. N. Pierre (1828), *Op. cit.*, pag. XIII

3. Come già ricordato la prima proprietà così come è enunciata da Hachette è inesatta, perché la superficie normale lungo una retta di una superficie rigata è sempre un paraboloido iperbolico e non un iperboloide (come precisano autori più moderni, ad esempio Gino Fano). Hachette, purtroppo, non aveva gli strumenti per potersene rendere conto. Egli, infatti, non poteva fare una verifica sperimentale di questa proprietà, come abbiamo fatto noi, e non poteva neppure studiarla con gli strumenti della geometria proiettiva, nata, come è noto, con Jean-Victor Poncelet negli stessi anni degli studi di Hachette (vedi il paragrafo *paraboloide delle normali* nel terzo capitolo).

4. Il criterio della selezione effettuata riguarda l'intenzione di concentrare lo studio sulle superfici rigate e sulle superfici sviluppabili. Hachette tratta anche dello sviluppo delle superfici sviluppabili, in particolare del cono e del cilindro. Ho preferito trascurare questa parte perché è trattata nel terzo capitolo della ricerca dedicato, appunto, alle superfici sviluppabili.

5. Hachette J. N. Pierre (1828), *Op. cit.*, pag. 26, *De la génération des surfaces et de leur définition*.

6. Nelle superfici sviluppabili il piano tangente tocca la superficie lungo tutti i punti della generatrice che passa per il punto di contatto. Questa proprietà, però, non influisce sul tipo di piano tangente. In altre parole un piano tangente di una sviluppabile può essere di entrambi i tipi: solo tangente o tangente e secante.

7. Nella nota al testo originale Hachette riporta le seguenti considerazioni: Monge ha determinato questa bella proprietà delle superfici curve, che una normale in un punto qualsiasi d'una superficie non può essere incontrata che da altre due normali passanti a una distanza indefinitamente piccola dal punto della superficie. Le parti della normale comprese tra la superficie e i punti di contatto di questa normale è tagliata da due altre normali infinitamente vicine, si chiamano i raggi di curvatura principale della superficie. I piani tangenti in un punto qualsiasi d'una superficie è del

primo tipo o del secondo tipo, secondo che i raggi di curvatura in questo punto sono diretti nello stesso senso o in senso contrario.

8. Hachette J. N. Pierre (1828), *Op. cit.*, pag. 28, *Des surfaces développables*.

9. Per aver la biunivocità fra la superficie di sviluppo sul piano e la superficie sviluppabile reale bisogna definire la porzione di superficie da sviluppare. In generale, infatti, la superficie nello sviluppo tende a sovrapporsi a sé stessa. Per un approfondimento si rimanda al terzo capitolo.

10. Hachette J. N. Pierre (1828), *Op. cit.*, pag. 29, *Génération des surfaces réglées*.

11. Una generatrice (di una superficie rigata o di una superficie sviluppabile) che è toccata lungo tutta la sua lunghezza da un piano tangente, è detta *generatrice singolare*, altrimenti è detta *generatrice singola*. E' evidente che le superfici sviluppabili sono costituite da tutte generatrici singolari, mentre le superfici rigate, in genere, sono costituite solo da generatrici semplici. Per un approfondimento si rimanda al terzo capitolo.

12. Hachette J. N. Pierre (1828), *Op. cit.*, pag. 30, *Exemples de plans tangents aux surfaces courbes*.

13. Nella rappresentazione matematica è possibile costruire automaticamente la tangente o il piano tangente a una superficie in un punto appartenente ad essa tramite un apposito comando.

14. Hachette J. N. Pierre (1828), *Op. cit.*, pag. 34, *Deuxième exemple de plan tangent. – Mener un plan tangent à une surface conique*.

15. Vedi nota 3.

16. Hachette J. N. Pierre (1828), *Op. cit.*, pag. 37, *Du plan tangent à la surface développable, engendrée par une droite mobile, qui passe par deux courbes données (Troisième exemple)*.

17. Hachette J. N. Pierre (1828), *Op. cit.*, pag. 41, *Des intersections de surfaces courbes par des plans, et par d'autres surfaces courbes*.

18. Vorrei far notare che una sviluppabile può avere come piano tangente anche un piano del secondo tipo, ovvero tangente e secante. Immaginiamo un cilindro retto generato da una curva piana qualsiasi dovei sia presente almeno un flesso. Ebbene in corrispondenza del punto di flesso passerà una generatrice del cilindro; il piano tangente lungo di essa sarà del secondo tipo, secante e tangente.

19. Hachette J. N. Pierre, *Op. cit.*, pag. 48, *Du cône à base circulaire et de ses trois sections dites Ellipse, Hyperbole, Parabole*.

20. Hachette parla ancora di cono obliquo, ma il cono quadrico ha sempre tre assi triortogonali fra loro, per cui è sempre un cono retto.

21. Hachette J. N. Pierre, *Op. cit.*, pag. 67. *Troisième exemple d'intersection d'une surface de révolution par un plan. Intersection de la surface réglée de l'hyperboloïde de révolution par un plan.*

22. Hachette J. N. Pierre, *Op. cit.*, pag. 72. *Des asymptotes aux sections planes d'une hyperboloïde de révolution.*

23. Hachette J. N. Pierre (1828), *Op. cit.*, pag. 75, *De la surface réglée élémentaire, ou de l'hyperboloïde à une nappe.*

24. Per fare ciò conviene estrarre una sezione circolare qualsiasi dell'iperboloide. Questa sarà il cerchio di contatto della sfera che vogliamo inscrivere nell'iperboloide. Poi prendiamo due normali alla superficie dell'iperboloide che passano per due punti a piacere del cerchio. Le normali s'intersecheranno in un punto dell'asse dell'iperboloide. Questo sarà il centro di una delle sfere tangenti.

25. Prendiamo un piano meridiano e tagliamo le sfere inscritte. Poi costruiamo la tangente ai due cerchi sezione delle sfere. Facciamo passare un piano per la retta tangente e perpendicolare al piano meridiano. Questo piano sarà tangente alle due sfere e taglierà l'iperboloide di rivoluzione secondo una sezione ellittica.

26. Per la costruzione dell'iperboloide ad una falda date tre rette sghembe qualsiasi si rimanda al secondo capitolo, al paragrafo *Il laboratorio sperimentale della geometria descrittiva.*

27. La costruzione delle sezioni circolari di un iperboloide a una falda è riportata anche nel terzo capitolo dove è possibile osservare le figure relative.

28. Hachette J. N. Pierre, *Op. cit.*, pag. 79.

29. Per lo studio del paraboloido iperbolico si rimanda al terzo capitolo.

30. Il teorema di Pascal sulle coniche era già noto per cui è possibile che Hachette conoscesse già la proprietà delle coniche di essere determinate da cinque punti o tangenti. L'estensione nello spazio è intuitiva. Per determinare il cono asintotico, infatti, sono sufficienti cinque generatrici. Tagliando queste con un piano è possibile determinare la conica direttrice del cono quadrico e quindi determinare la posizione di ogni singola generatrici della superficie. E' comunque curioso il fatto che Hachette non senta il bisogno di spiegare perché siano sufficienti cinque rette per determinare il cono, dato che si tratta di un trattato di geometria descrittiva indirizzato agli studenti dell'Ecole Polytechnique.

31. In questo paragrafo riporto le considerazioni di Hachette. Nel terzo capitolo ho riportato, invece, le considerazioni di Fano sul medesimo teorema che fanno uso dei concetti di geometria proiettiva. La dimostrazione di Fano della quarta proprietà principale delle superfici rigate, si basa sul fatto che due forme proiettive di prima specie se hanno più di due elementi uniti costituiscono un'identità.

E' evidente che tale principio applicato ai due fasci prospettivi dimostra il teorema di Hachette.

32. Un'altra superficie rigata che ha come osculatrice lungo una retta generatrice un paraboloido iperbolico è l'elicoide conoide retto (vedi il terzo capitolo).

33. Il paragrafo è una rielaborazione personale delle proprietà enunciate da Hachette, in altre parole non esiste nel trattato di Hachette un paragrafo analogo che raccolga insieme quelle descrizioni.

34. Le versioni utilizzate sono: *thinkdesign 2008.1, rhinoceros 4.0.*

35. Nell'esempio illustrato ho considerato come superficie rigata **R** un paraboloido iperbolico. E' importante ricordare che il teorema è valido per qualsiasi superficie rigata.

36. La dimostrazione è quella descritta da Gino Fano nel suo trattato di geometria descrittiva. Per maggiori informazioni si rimanda al terzo capitolo, al paragrafo *il paraboloido delle normali.*

37. Per capire questo punto è forse utile pensare ad una curva piana. E' noto infatti che il punto di tangenza di una curva piana della tangente stessa può essere considerato come un punto doppio. Ovvero se si pensa alla tangente come ad una corda della curva che ruota attorno al punto di tangenza considerato in un intorno piccolo, la corda avrà con la curva due punti d'intersezione che coincideranno in un punto solo nel punto di tangenza. Adesso se il punto di tangenza considerato è un punto di flesso, questo sarà un punto triplo, perché la corda nell'intorno piccolo avrà tre punti d'intersezione con la curva.

38. Vedi nota 31.

39. Le curve Nurbs sono definite da vari parametri fra cui il numero di archi (o spans) che definiscono la curva. La condizione necessaria e sufficiente affinché l'algoritmo Nurbs descriva l'equivalente di una retta è che la curva Nurbs abbia un solo arco di primo grado. Il fatto di essere formata da un solo arco garantisce che la curva non sia una linea spezzata, mentre il grado uno del polinomio garantisce che la curva sia un segmento lineare.

40. Migliari Riccardo (2003), *Geometria dei Modelli*, Roma, Pag. 203.

41. Le superfici possono anche essere classificate in base alla curvatura di Gauss. Nel terzo capitolo della tesi è dedicato un paragrafo a questo argomento. Le superfici rigate hanno sempre curvatura negativa. Le superfici sviluppabili hanno sempre curvatura nulla. Per un'approfondimento di questo concetto si rimanda al sito di *Mathworld* <http://mathworld.wolfram.com/GaussianCurvature.html> e al libro di Adrian Gheorghiu e Virgil Dragomir, *La Représentation*

des structures constructives, Editions Eyrolles, Paris 1971

42. E' evidente che questa affermazione è basata solamente sulla mia esperienza. E' possibile che esista una soluzione migliore per disegnare per intero questa superficie. Inoltre voglio ricordare che esiste la tecnica dello *scripting* che consente di ottenere la superficie attraverso l'equazione analitica esatta.

43. Per la definizione di linea di stringimento si rimanda al terzo capitolo.

44. In verità le due isoparametriche u e v , secondo il programma, sono ambedue delle curve. L'una delle due, però, è assimilabile ad una retta. Purtroppo nella modellazione NURBS, in particolare in ambiente thinkdesign e Rhinoceros, l'algoritmo esatto per generare una rigata utilizza come direttrici solamente

due curve. E' impossibile, quindi, generare la rigata generica secondo la definizione di Monge.

45. Siccome la sezione principale dell'iperboloide di rivoluzione è un cerchio, non esiste una direzione principale. In altre parole sono tutte direzioni principali, perché il cerchio ha infinite coppie di diametri coniugati perpendicolari. Quando si trasforma l'iperboloide di rivoluzione in iperboloide ad una falda, il cerchio di gola si trasforma in una ellisse di gola. Questa diventa la sezione principale della superficie. I due assi maggiori e minore (x e y) dell'ellisse diventano due assi principali della superficie. Il terzo asse è l'asse z . Allora la superficie, come è logico aspettarsi, possiede tre assi triortogonali x , y , z e tre piani di simmetria ortogonali.

La genesi proiettiva delle superfici quadriche rigate

Il capitolo è uno studio delle superfici rigate e dei conici quadrici attraverso i concetti della geometria proiettiva. La geometria proiettiva si è sviluppata proprio negli stessi anni in cui Jean Nicolas Pierre Hachette studiava le superfici rigate. Generalmente si fa risalire la nascita della geometria proiettiva al trattato di Jean-Victor Poncelet del 1822¹. Alcuni studiosi indicano, correttamente, come contributi iniziali significativi gli studi di Girard Desargues (1591–1661)² e Blaise Pascal (1623–62)³. Vorrei far notare che il trattato di Hachette è datato 1828, quindi è di cinque anni più vecchio di quello di Poncelet. La geometria proiettiva sintetica, però, così come ci è nota oggi, si è sviluppata a partire dal 1822 per raggiungere la sua piena maturità solo alla fine del secolo XIX con Fiedler e Aschieri (1888 circa). La ragione che mi ha spinto a mettere come secondo capitolo la genesi proiettiva delle rigate è dovuta sia a ragioni storiche e sia, soprattutto, a ragioni di completezza e maturità di idee. La geometria proiettiva è stato l'ultimo campo della matematica in cui i matematici abbiano utilizzato il disegno come strumento di studio e in cui il metodo sintetico raggiunge la sua piena maturità. Nelle pagine che seguono non ho voluto riscrivere un trattato di geometria proiettiva ma ho unicamente riletto alcune questioni che mi sono sembrate particolarmente significative alla luce dei nuovi strumenti a disposizione. Per cui non ho pensato necessario introdurre alcuni concetti (come forme di prima specie o fasci proiettivi) ma ho soltanto aggiunto alcune note esplicative. L'intento non è tanto quello di spiegare questa bellissima scienza quanto quello di sperimentare alcuni teoremi direttamente nello spazio e mostrare come oggi sia possibile comprenderla e finalmente rappresentarla per davvero. Penso, infatti, che un capitolo fondamentale, per il rinnovo della geometria descrittiva, sia la rilettura, direttamente nello spazio virtuale, dei concetti della geometria proiettiva.

Questa operazione permette di “toccare” idee astratte e di renderle reali. La precisione dello strumento informatico, inoltre, mi ha permesso di sperimentare alcune vecchie questioni secondo una luce nuova. Una parte di grande interesse è stata dedicata alle coniche, come prodotto di fasci proiettivi, e in particolare all'applicazione del teorema di Pascal e Brianchon con il metodo della rappresentazione matematica. Ho potuto sperimentare, per esempio, che per cinque punti passi effettivamente una conica ed estendere allo spazio il teorema di Pascal/Brianchon. Ho potuto altresì sperimentare che dati due fasci di piani prospettivi nello spazio, questi determinano una superficie che è un iperboloide rigato o un cono quadrico. Inoltre ho potuto slegare i due fasci e muoverli liberamente nello spazio ed osservare che la proiettività si conserva e che i due fasci proiettivi nelle loro nuove posizioni determinano un altro iperboloide rigato. La possibilità di rappresentare direttamente nello spazio le figure della geometria proiettiva è un metodo molto efficace per la comprensione di questa scienza. Una scienza dove la rappresentazione è lo strumento principe della logica del pensiero geometrico.

Il capitolo segue la struttura proposta da Aschieri nel suo testo *Lezioni di Geometria Proiettiva*⁴. Altre due fonti fondamentali sono state il trattato di Guglielmo Fiedler⁵ e quello di Francesco Severi⁶.

Lo studio è strutturato in tre parti principali. La prima parte, intitolata *la genesi proiettiva delle quadriche rigate*, è quella che tratta della teoria e della rappresentazione matematica della genesi proiettiva delle superfici quadriche nello spazio. La seconda parte tratta delle *forme proiettive piane*, ovvero della generazione proiettiva delle coniche. Qui è riportata, per esempio, l'applicazione del teorema di Pascal e Brianchon alla costruzione di una conica dati cinque enti qualsiasi. L'ultima parte, il *Laboratorio sperimentale della geometria descrittiva*,

tratta di due esercizi di modellazione matematica che racchiudono molte delle conoscenze descritte nel capitolo: 1) la costruzione di un cono quadrico dati cinque enti qualsiasi nello spazio e, la costruzione dei suoi tre assi triortogonali principali e delle sue sezioni principali; 2) la costruzione di un iperboloide a una falda date tre rette sghembe qualsiasi e dei suoi tre assi triortogonali principali.

Un'ultima e significativa questione riguarda il laboratorio informatico. In questo caso ho preferito inserire alcune descrizioni delle sperimentazioni effettuate, attraverso i modellatori informatici, all'interno dei differenti paragrafi della seconda parte. Queste descrizioni sono precedute dal nome del software utilizzato: **thinkdesign** o **Rhinoceros**⁷.

Forme proiettive nello spazio

Genesi proiettiva delle quadriche gobbe

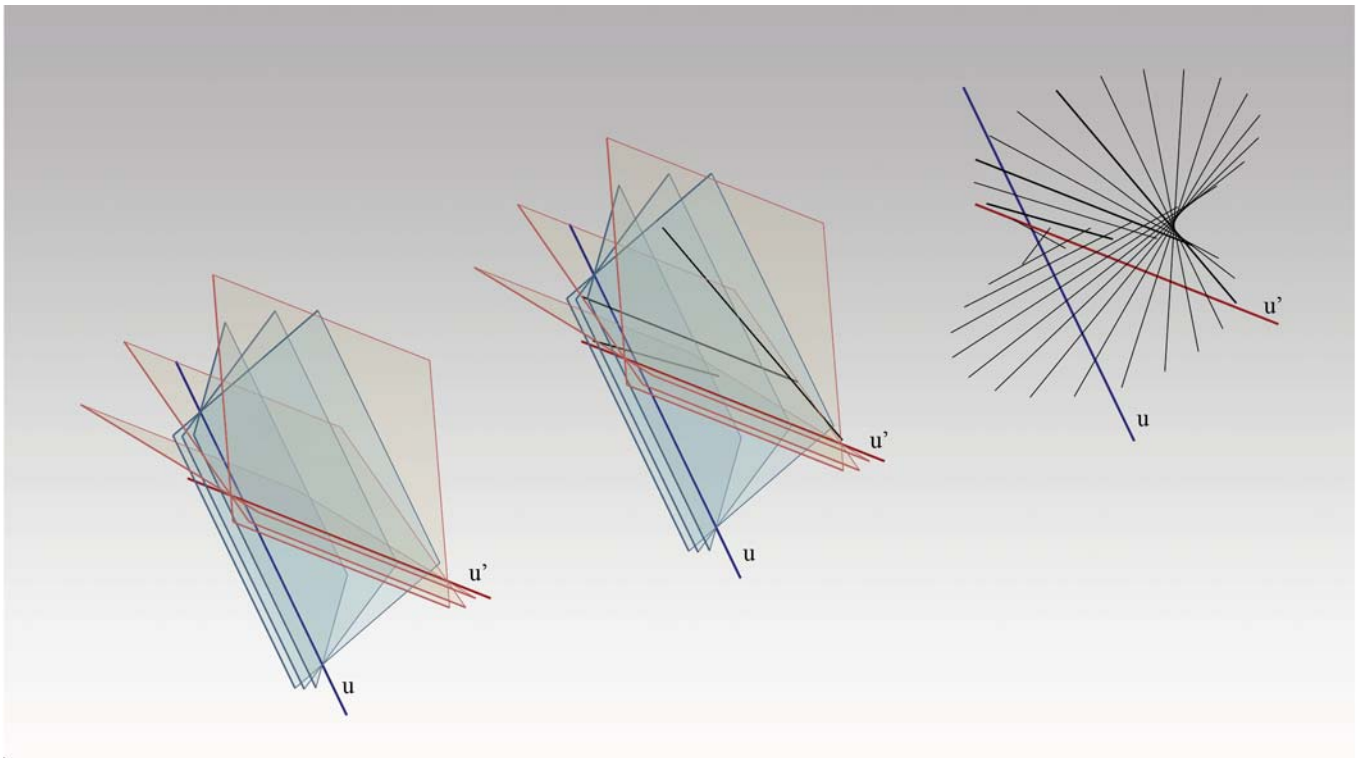
E' possibile generare le quadriche rigate tramite la corrispondenza di due fasci proiettivi. In geometria pro-

iettiva si dice che è possibile concepire due forme elementari di 2° ordine prodotte da forme fondamentali di prima specie fra loro proiettive⁸:

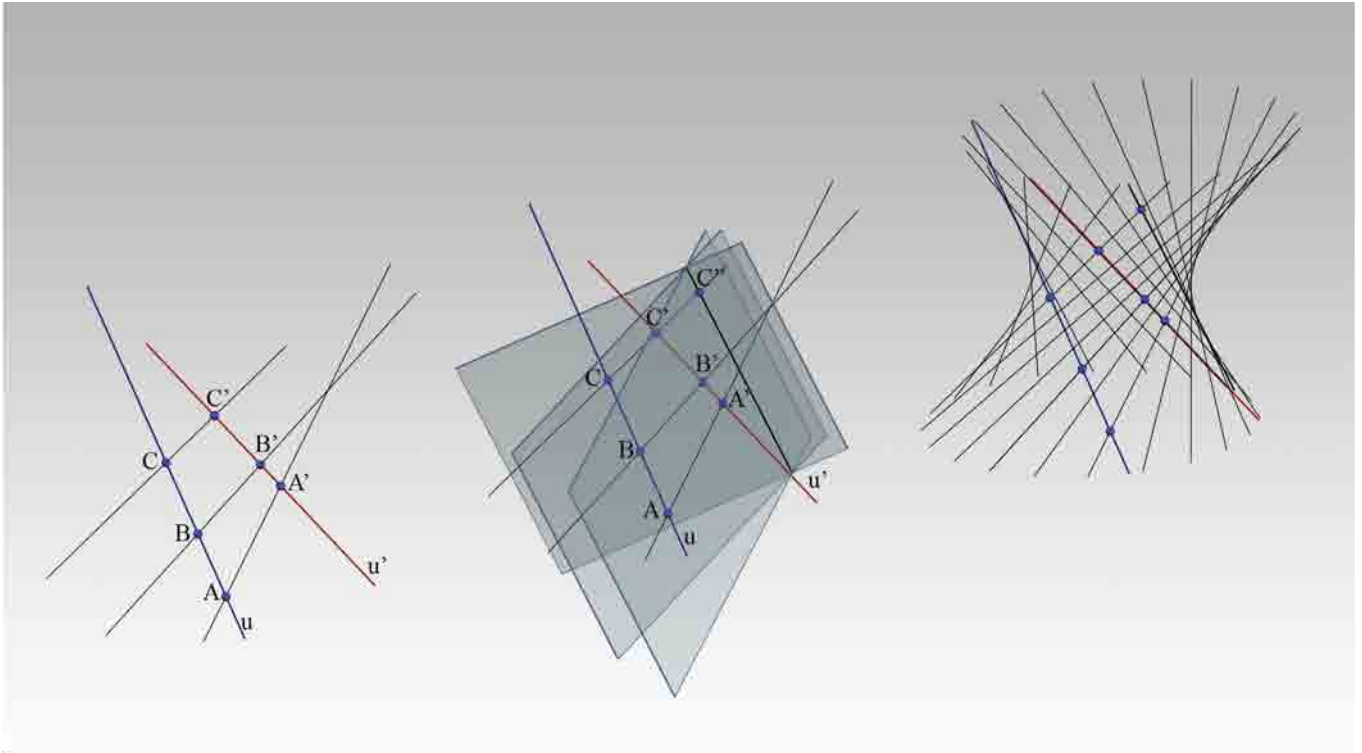
- la forma composta da rette in cui si tagliano le coppie di piani corrispondenti di due fasci proiettivi di piani i cui assi non si tagliano (fig. 1).
- La forma corrispettiva è composta da rette che uniscono le coppie di punti corrispondenti di due punteggiate proiettive sghembe (fig. 2).

Le due forme così costruite sono uguali, perché la generazione dell'una vale anche per l'altra. Infatti, se prendiamo la prima forma, ciascun fascio taglia l'altro asse in una retta punteggiata, così da avere due punteggiate che si corrispondono proiettivamente. Le rette, intersezioni delle coppie di piani corrispondenti, passano per i due punti corrispondenti delle due punteggiate suddette. E' evidente che le due generazioni descritte descrivono la stessa forma nello spazio.

Si dice che lo spazio contiene una sola forma elementare di 2° ordine che è composta di rette e si chiama *serie*



1/ La forma composta da rette in cui si tagliano le coppie di piani corrispondenti di due fasci proiettivi di piani i cui assi non si tagliano.



2/3/ La forma corrispettiva è composta da rette che uniscono le coppie di punti corrispondenti di due punteggiate proiettive sghembe. Dati tre elementi distinti A, B, C di una forma di prima specie e tre elementi distinti A', B', C' di un'altra forma di prima specie, esiste una ed una sola proiettività fra le due forme, che fa corrispondere ad A, A' , e B, B' , a C, C' .

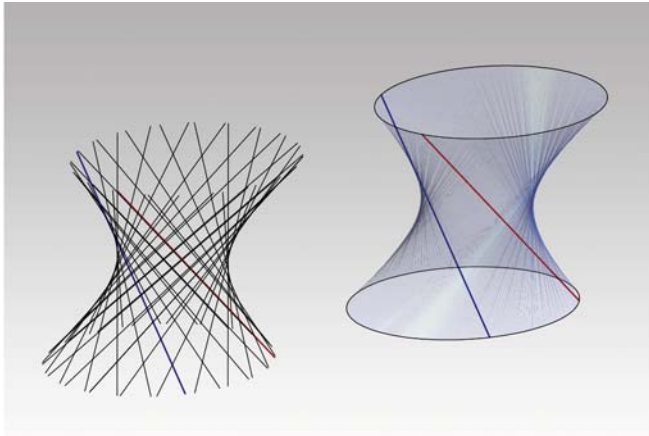
rigata o rigata semplice. Gli elementi retti delle serie rigata sono le *generatrici*. Gli assi dei due fasci sono le *direttrici* delle serie rigata. Prima di sperimentare e generare queste forme è necessario ricordare alcuni teoremi di geometria proiettiva senza i quali non è possibile capire e tanto meno costruire queste forme nello spazio virtuale. Un noto teorema dice che:

Dati tre elementi distinti A, B, C di una forma di prima specie e tre elementi distinti A', B', C' di un'altra forma di prima specie, esiste una ed una sola proiettività fra le due forme, che fa corrispondere ad A, A' , e B, B' , a C, C' ; e questa proiettività si costruisce con un numero finito di proiezione e sezioni.

La rappresentazione matematica consente di sperimentare questo problema e di verificarne la validità. Riconsideriamo le due punteggiate sghembe u ed u' (fig. 3). Prendiamo tre punti A, B, C , sulla u e tre punti A', B', C' sulla u' . La prima questione da osservare è che le

rette $AA', BB',$ e CC' , che uniscono le coppie di punti corrispondenti, sono a due a due sghembe. Infatti se non fosse così i punti A, B, A', B' formerebbero un piano che conterrebbe le due punteggiate u ed u' che abbiamo dette (e costruito, aggiungo) sghembe. Adesso prendiamo un punto C'' sulla retta CC' . E' noto che *due rette sghembe a, b , ed un punto P non appartenente a nessuna di esse, esiste una sola retta passante per P e incidente ad a, b .* Allora esiste un'unica retta u'' che staccata dal punto C'' si appoggia alle due rette AA', BB' . Adesso facciamo passare un fascio di piani che per *sostengo* (o *asse*) ha la retta u'' . Questo fascio interseca le due rette u ed u' creando una corrispondenza biunivoca, che conserva i gruppi armonici⁹ ed è quindi una *proiettività*. In questo caso si dice che la corrispondenza è una *prospettività*, perché le due punteggiate sono sezioni di un medesimo fascio di piani¹⁰.

Da quanto detto risulta che se le due direttrici (assi dei



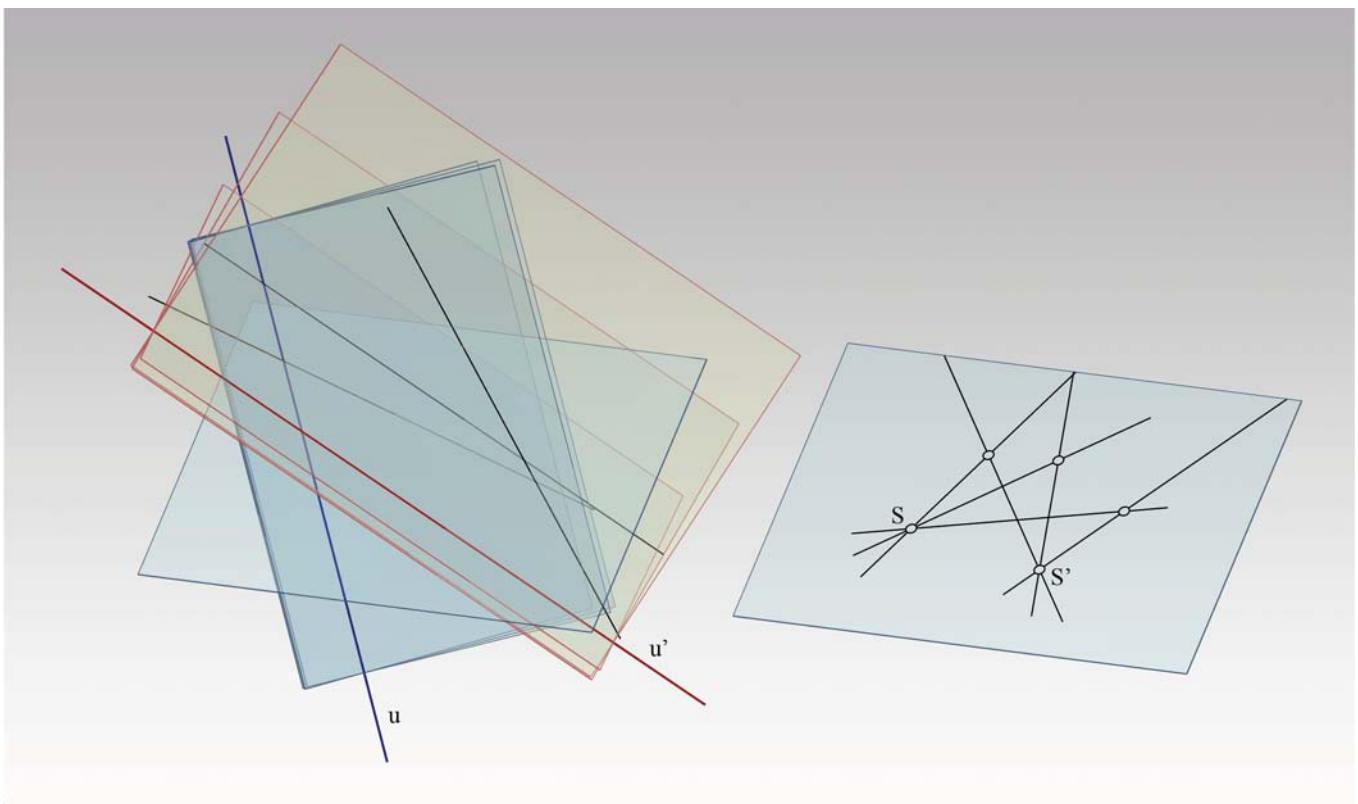
4/ Le due serie rigate dello spazio costituiscono una superficie quadrica rigata.

fasci) non s'intersecano, non s'intersecano neanche due generatrici qualsiasi delle serie rigate. Inoltre una retta condotta per un punto di una generatrice ad incontrarne

altre due (vedi u'') incontra tutte le altre generatrici. Le due direttrici e questa retta formano il sistema di rette che a due a due non si tagliano. Inoltre è possibile assumere una qualsiasi altra terza retta come la u'' come nuova direttrice. E' naturale che esistono infinite direttrici, ovvero è possibile assumere come direttrici qualsiasi retta corrispondente di due fasci proiettivi e questa terza retta può sostituirsi come nuovo asse del fascio proiettivo. Da quanto detto risulta che:

in una serie rigata una generatrice variabile determina sopra due direttrici fisse due punteggiate proiettive. O anche: una generatrice variabile viene proiettata da due direttrici fisse da due fasci proiettivi di piani.

Adesso possiamo dire che la forma generata in questo modo è la stessa che conosciamo come iperboloidi rigato o iperboloidi a una falda. La superficie viene nominata in geometria proiettiva *superficie quadrica gobba* perché è formata da due sistemi di *serie rigate* (in due modi differenti) che costituiscono i punti di una superfi-



5/ Tagliamo con un piano qualsiasi i due fasci proiettivi di piani u ed u' . Otteniamo due fasci di raggi proiettivi

cie, e del 2° ordine perché una retta fuori di essa la può intersecare solo in due punti al più (fig. 4).

Vedremo come la superficie quadrica gobba non è più tale se i due fasci di asse u ed u' s'intersecano in un punto. Allora la superficie corrispondente è un cono quadrico.

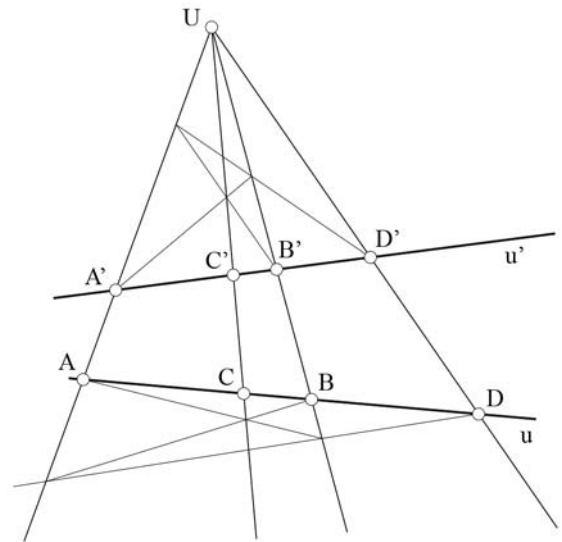
Adesso cerchiamo di capire cosa succede se tagliamo con un piano qualsiasi i due fasci proiettivi di piani u ed u' . Quello che otteniamo è una figura piana di fasci proiettivi di rette con centri S ed S' . Analizziamo bene questa figura nel piano per poi ritornare a ragionare nello spazio (fig. 5).

Una corrispondenza proiettiva è determinata da tre coppie di elementi corrispondenti, ovvero si passerà da un quarto elemento della prima forma ad un quarto elemento della seconda forma¹¹. Per esempio da una forma armonica $ABCD$ di punti su una retta punteggiata si passa ad un'altra forma armonica di punti $A'B'C'D'$ (fig. 6).

Se si ha nel piano una punteggiata u e sopra di essa tre punti A, B, C presi a piacere, si possono costruire infiniti quadrangoli di cui due lati passano per A e uno per C e due per B . Il lato rimanente taglia sempre la retta data u nello stesso punto D . Per questa proprietà i punti $ABCD$ costituiscono una *quaterna armonica* (fig. 7).

La proiettività tra due forme dipende dalla posizione relativa degli elementi in ciascuna delle forme e non dalla posizione relativa delle forme. E' per questo motivo che due forme proiettive si possono trasportare nello spazio liberamente senza che cessino di essere proiettive. Quindi se due forme fondamentali sono congruenti, cioè se sono tali da potersi trasportare in modo che tutti gli elementi dell'una forma coincidano con quelli dell'altra, queste forme sono proiettive e sono corrispondenti fra loro due elementi che vengono a sovrapporsi.

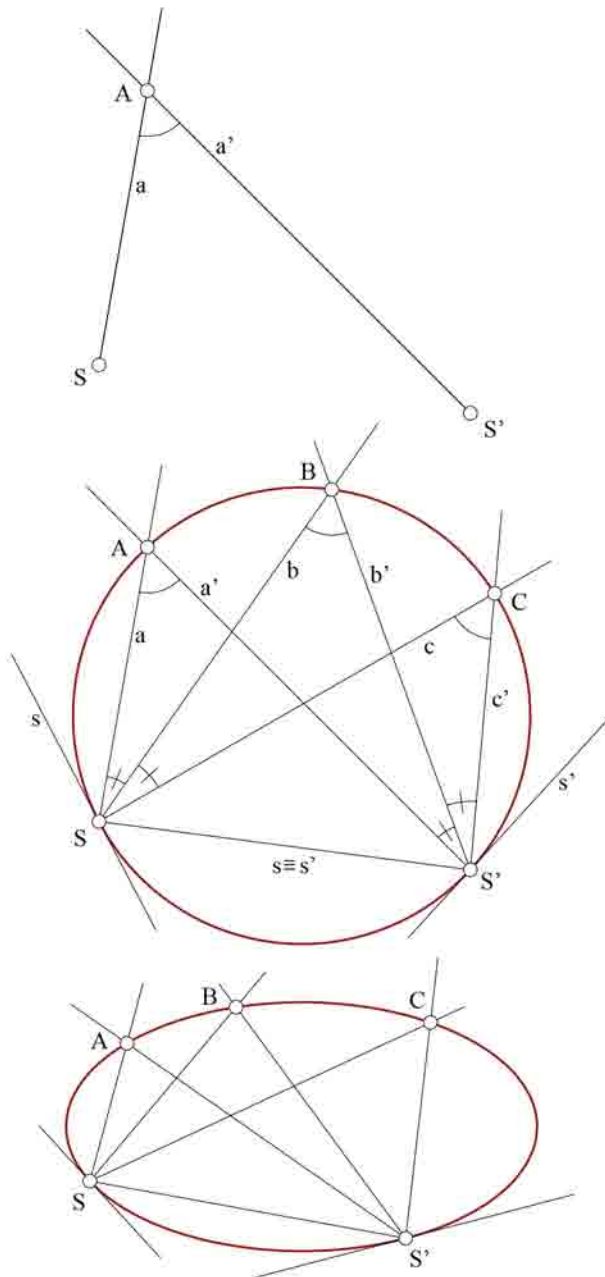
Prendiamo due punti S ed S' e stacciamo da questi due punti due rette a e a' qualsiasi che formano un angolo α . Il loro punto d'incontro A è il punto corrispondente di due rette proiettive (fig. 8). Se assumiamo che i due fasci di rette S ed S' siano congruenti (ovvero uguali), la figura formata dai punti corrispondenti A, B, C ecc è un cerchio. La verifica sperimentale consiste nel ruotare di un angolo a piacere la retta a e dello stesso angolo (e



6/7/ Una corrispondenza proiettiva è determinata da tre coppie di elementi corrispondenti, ovvero si passerà da un quarto elemento della prima forma ad un quarto elemento della seconda forma. Per esempio da una forma armonica $ABCD$ di punti su una retta punteggiata si passa ad un'altra forma armonica di punti $A'B'C'D'$.

verso)¹² la retta a' . I raggi corrispondenti s'incontrano in punti di una circonferenza. Se da due punti S e S' di un cerchio proiettiamo i vari punti del cerchio stesso, i due fasci sono proiettivi. Due raggi corrispondenti sono quelli che proiettano uno stesso punto della circonferenza e al raggio SS' che unisce i centri dei due fasci, considerato come appartenente all'un fascio, corrisponde la tangente dell'altro fascio.

Più in generale si dice che il luogo C dei punti ove si tagliano le coppie di raggi corrispondenti di due fasci proiettivi è una conica (fig. 9). I centri S ed S' dei due fasci proiettivi appartengono alla conica. La curva si dice del secondo ordine perché da una retta del piano è incontrata in due punti al più. Il cerchio è ovviamente una conica anch'esso. Dai teoremi precedenti deriva immediatamente che: *cinque punti di una conica bastano a determinare la conica stessa*. Questo perché basta assumere due di essi come centri dei fasci proiettivi e gli altri tre punti rimanenti come tre elementi corrispondenti. Allora una conica è sempre determinata da cinque

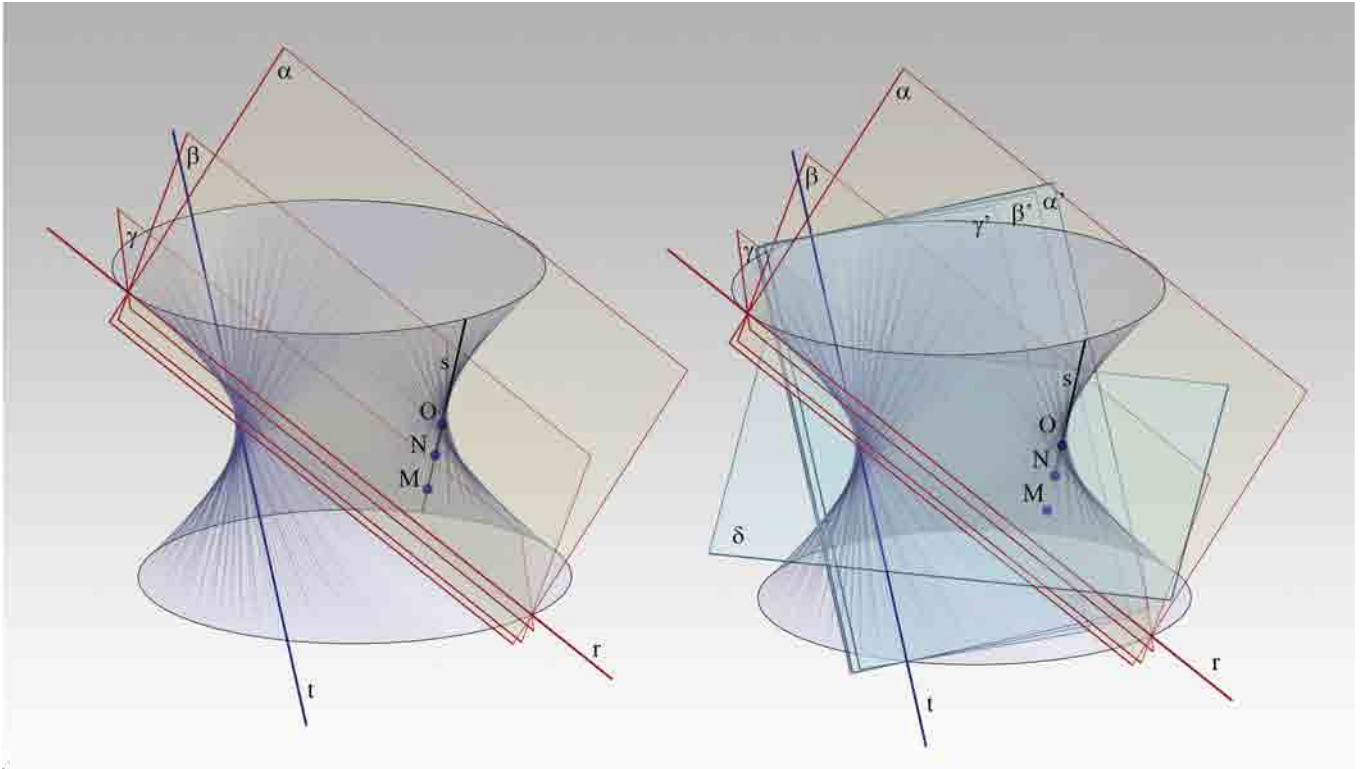


8/9/ Se da due punti S e S' di un cerchio proiettiamo i vari punti del cerchio stesso, i due fasci sono proiettivi. Due raggi corrispondenti sono quelli che proiettano uno stesso punto della circonferenza. Più in generale si dice che il luogo C dei punti ove si tagliano le coppie di raggi corrispondenti di due fasci proiettivi è una conica.

enti dati che possono essere per esempio cinque punti. Per verificare sperimentalmente quanto detto fino adesso si utilizzano le proprietà dei *teoremi di Pascal e di Brianchon* sulle coniche, perciò si rimanda alla seconda parte di approfondimento (*forme proiettive del piano*) in cui viene spiegato in dettaglio la teoria e la tecnica di rappresentazione matematica relativa alla costruzione delle coniche per cinque enti dati. Inoltre, sempre nella seconda parte, vengono descritti il *sistema polare di una conica* e le proprietà dei *diametri coniugati* fino ad arrivare alle proprietà focali.

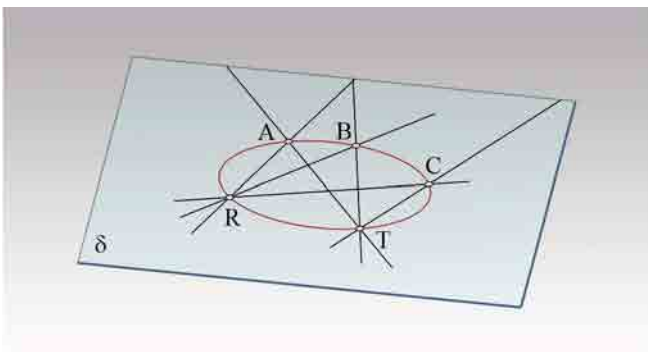
Adesso è possibile tornare a ragionare nello spazio e affermare con cognizione di causa che: *Un piano qualunque dello spazio non appartenente ai due fasci taglia la quadrica rigata in una conica o in un caso particolare in due rette, cioè in due generatrici di sistemi differenti* (fig. 10). Il metodo della rappresentazione matematica ci consente, oggi, di poter verificare in modo accurato e con rigore scientifico questa proprietà. Allora data una quadrica gobba, prendiamo tre generatrici r, s e t di uno stesso sistema di rette. Prendiamo le due rette r e t come assi di due fasci proiettivi di piani. Tagliamo la retta s con tre piani α, β, γ del fascio di sostegno r . Chiamiamo i punti corrispondenti M, N, O . Adesso prendiamo i tre piani α', β', γ' corrispondenti del fascio di asse t . Questi sono i piani che passano per t e rispettivamente per i tre punti M, N, O della retta s . Adesso un piano qualsiasi δ taglierà i due fasci proiettivi in due fasci in generale proiettivi di raggi piani che produrranno una conica che è la sezione piana della superficie quadrica. Infatti una volta compiuto il taglio è possibile osservare che i centri dei due fasci R ed T sono i centri dei due fasci di rette corrispondenti che s'incontrano nei tre punti A, B, C (fig. 11). Allora con i teoremi di Pascal e Brianchon, applicati al metodo della rappresentazione matematica, è possibile disegnare la conica per i cinque punti e verificare che coincida esattamente con la sezione della quadrica. E' altresì importante verificare che quando si taglia la quadrica con un piano passante per una generatrice qualsiasi, il risultato sono due generatrici di sistemi differenti.

Proiettando da un punto qualunque dello spazio le generatrici di una quadrica si ottengono i piani tangenti



10/ Un piano qualunque dello spazio non appartenente ai due fasci taglia la quadrica rigata generalmente in una conica.

di un cono che ha il vertice nel punto stesso se il punto scelto è fuori della quadrica. Se invece il punto appartiene alla quadrica si ottengono due fasci di piani aventi come assi le due rette generatrici della quadrica passanti per quel punto¹³.



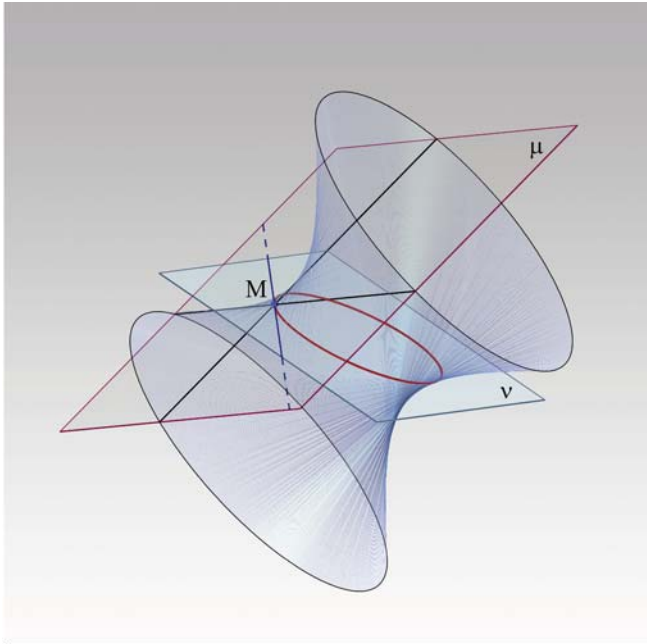
11/ I centri dei due fasci **R** ed **T** sono i centri dei due fasci di rette corrispondenti che s'incontrano nei tre punti **A**, **B**, **C** di una conica sezione della superficie quadrica.

Un piano tangente di una quadrica è quel piano che ne proietta una generatrice e contiene una dell'altro sistema. Sappiamo già, infatti, che il piano tangente di una quadrica rigata è determinato dalle due generatrici passanti per esso.

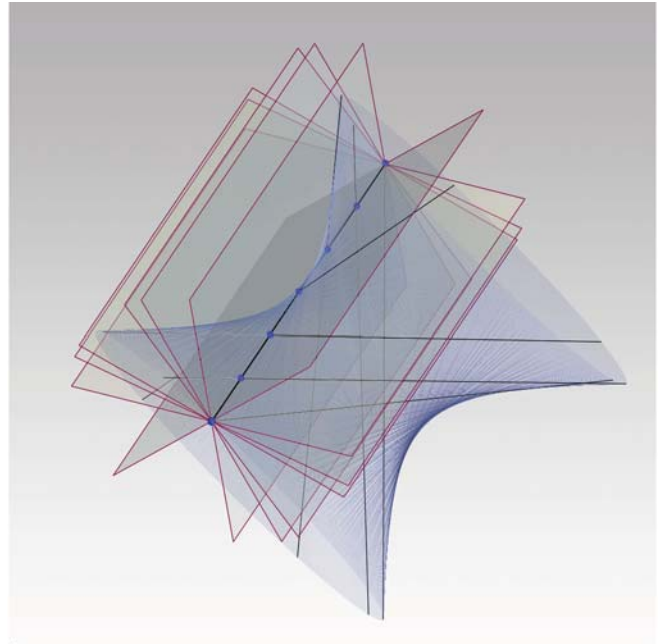
Se per un punto di contatto **M** di un piano tangente μ alla quadrica facciamo passare un piano secante ν , otteniamo la conica **C**, dove l'intersezione $\mu\nu$ è la tangente alla conica nel punto **M** (fig. 12).

I piani tangenti ad una quadrica nei punti situati sopra una stessa generatrice formano un fascio di piani proiettivo alla generatrice stessa nei loro rispettivi punti di contatto, ovvero ad ogni piano del fascio corrisponde un determinato punto della generatrice (fig. 13).

Prendiamo un punto **P** situato fuori della quadrica rigata (fig. 14). Conduciamo da **P** tre piani tangenti qualsiasi alla quadrica. Per fare ciò basta prendere tre generatrici **c**, **c1**, **c3**, qualsiasi della quadrica e costruire i tre piani che passano rispettivamente per le generatrici e il punto **P**. Questi



12/ Se per un punto di contatto M di un piano tangente μ alla quadrica facciamo passare un piano secante v , otteniamo la conica C , dove l'intersezione μv è la tangente alla conica nel punto M .



13/ I piani tangenti ad una quadrica nei punti situati sopra una stessa generatrice formano un fascio di piani proiettivo alla generatrice stessa nei loro rispettivi punti di contatto.

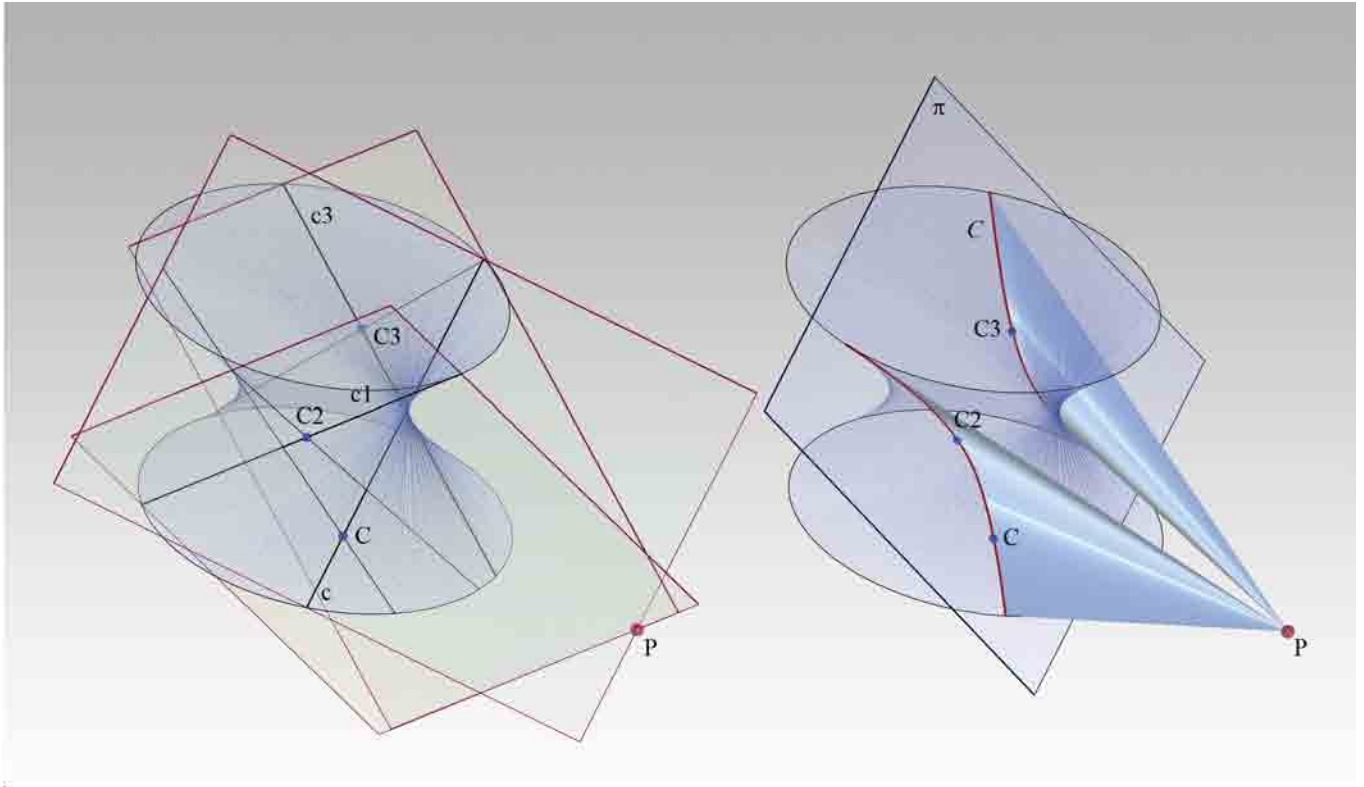
tre piani devono essere tangenti in tre punti della quadrica. E' possibile individuare i punti trovando l'intersezione dei piani con la quadrica; questi devono intersecare la quadrica nelle rette generatrici dell'altro sistema. Le intersezioni delle rispettive coppie di rette ci dà i tre punti di contatto $C, C1, C2$ dei tre piani tangenti. Questi tre punti determinano certamente un piano π . Il piano π interseca la quadrica in una conica C . Se proiettiamo i punti P e le tangenti della conica dal punto P otteniamo un cono quadrico e i suoi piani tangenti. Questo cono allora è il cono *circoscritto* alla quadrica dal punto P lungo la conica C . Quindi:

I punti di contatto dei piani tangenti condotti da un punto esterno P alla quadrica danno luogo ad una conica o semplicemente i punti di contatto delle tangenti alla quadrica condotte per un punto P fuori di essa formano una conica.

Riassumendo tagliando con un piano qualsiasi una quadrica otteniamo due fasci proiettivi di raggi che danno luogo ad una conica. E' altresì vero che data una conica come intersezione di due fasci proiettivi di raggi di cen-

tri S ed S' esistono infinite quadrica che hanno come sezione quella conica. Infatti disegniamo nello spazio due rette sghembe qualsiasi s ed s' che passino per i due centri S ed S' dei fasci proiettivi della conica. Costruiamo i due fasci rispettivi di piani, di assi s ed s' , passanti per i raggi proiettivi della conica. Otteniamo una quadrica, che è una delle infinite quadriche che si potrebbero costruire prendendo un'altra coppia di rette sghembe qualsiasi nello spazio passanti per S ed S' .

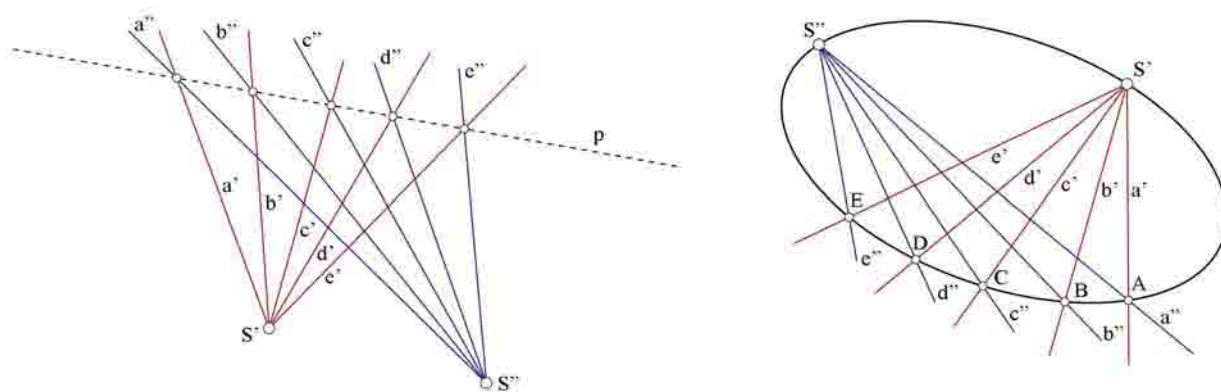
Adesso vorrei far notare una questione che ho potuto verificare direttamente grazie alla rappresentazione informatica. Sappiamo che la curva proiezione di un cerchio è una conica e che due fasci di rette proiettivi s'intersecano in una conica. Quindi una conica è il prodotto di due fasci proiettivi. Il modellatore consente di verificare sperimentalmente che, dati due fasci prospettivi, è possibile determinare una conica traslando e ruotando i due fasci nel piano. L'intersezione delle rette corrispondenti darà luogo ai punti della conica. Per fare ciò si costruiscono due fasci prospettivi generici di centri S' ed S'' , con le rette corrispondenti a', b', c', d', e' ed a'', b'', c'', d'', e'' ,



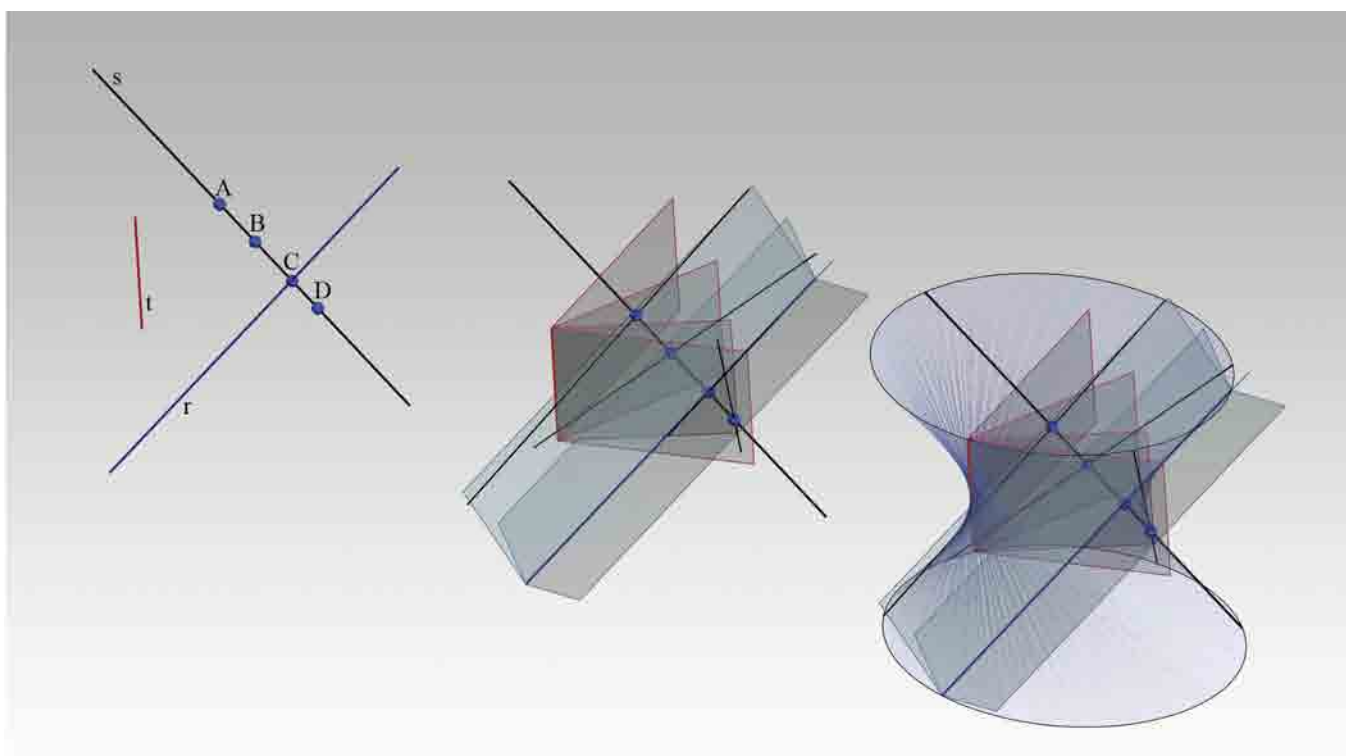
14/ I punti di contatto dei piani tangenti condotti da un punto esterno P alla quadrica danno luogo ad una conica o semplicemente i punti di contatto delle tangenti alla quadrica condotte per un punto P fuori di essa formano una conica C . La conica C è la direttrice del cono quadrico circoscritto al cono che come vertice il punto P .

b'' , c'' , d'' , e'' (fig. 15). Sarebbe sufficiente prendere solo tre coppie di rette corrispondenti per determinare una conica, dato che sono sufficienti cinque punti per determinarla. Lo scopo, però, è verificare che, per quei due fasci proiettivi (traslati e ruotati liberamente), passi effettivamente un'unica conica. Per cui conviene prendere almeno un'altra coppia di rette. Una volta disegnati i due fasci prospettivi, riferiti ad una medesima retta di sostegno \mathbf{p} , si possono traslare e ruotare liberamente nel piano conservando sempre la relazione di proiettività. In verità è possibile anche ribaltare uno od entrambi i fasci, perché nella prospettiva esiste sempre il fascio simmetrico rispetto alla retta \mathbf{p} che fa da asse di simmetria. I due fasci non saranno più prospettivi ma saranno comunque due fasci proiettivi, per cui sarà possibile passare da una forma ad un'altra per mezzo di un numero finito d'operazioni di proiezione e sezione. In-

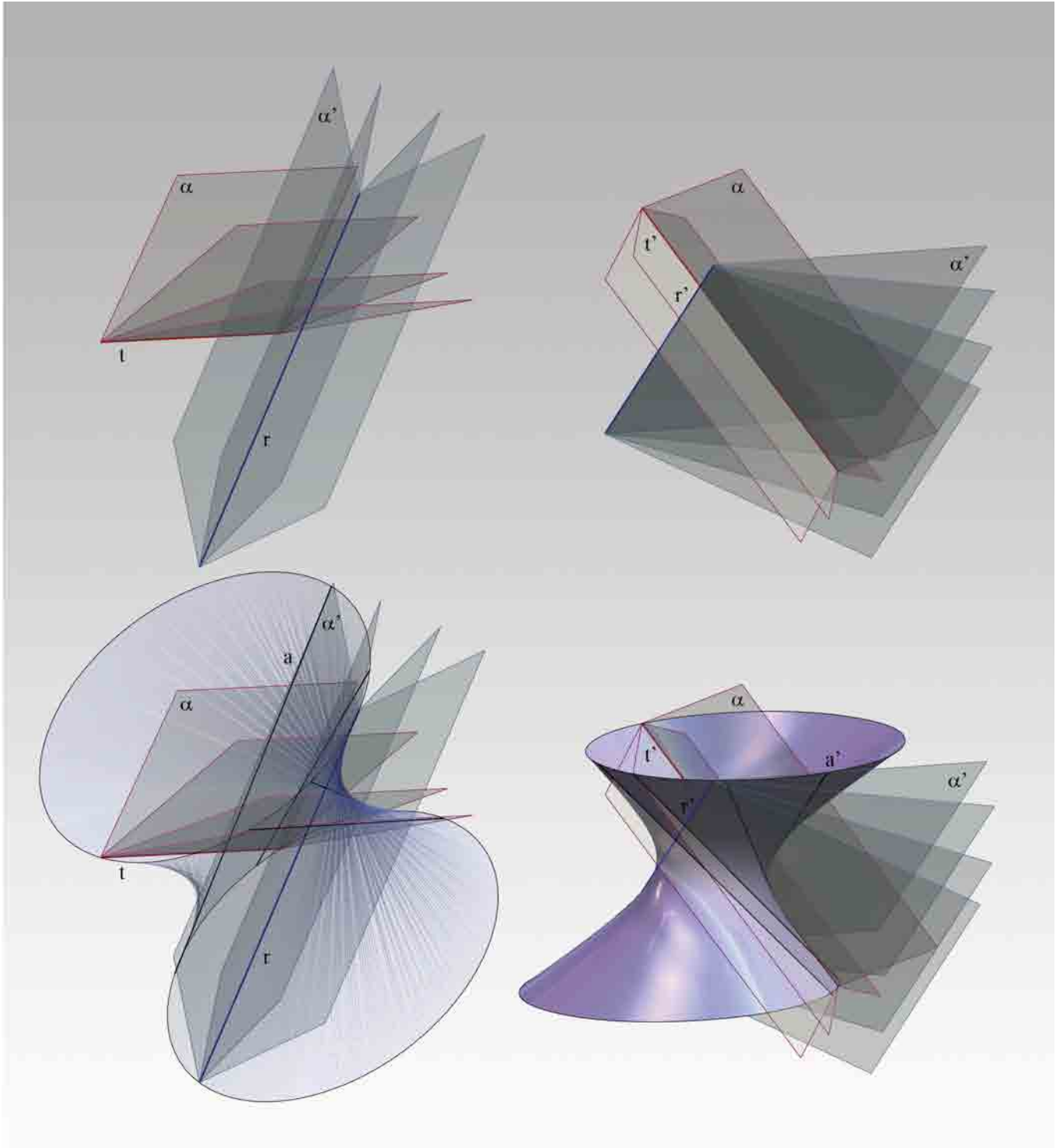
tersecando i due fasci, le coppie di rette corrispondenti s'incontrano in punti di una conica, ad esempio a' e a'' in A e così via. Una volta determinati i sette punti A, B, C, D, E, S', S'' è possibile costruire la conica che passa per essi utilizzando le considerazioni precedenti sui teoremi di Pascal e Brianchon. Nell'esempio della figura la conica determinata dai fasci proiettivi è un'ellisse. Ho esplorato la medesima questione nello spazio. Per cui dati due fasci di piani prospettivi, ovvero riferiti alla medesima retta punteggiata, questi danno luogo ad una quadricarigata. E' possibile traslarli e ruotarli liberamente nello spazio ed ottenere ancora un'altra quadrica rigata. La rappresentazione matematica diventa uno strumento potente per la verifica e la comprensione delle proprietà di trasformazione proiettiva delle rigate. Prendiamo tre rette sghembe qualsiasi $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$ (fig. 16). Prendiamo la retta \mathbf{s} come la punteggiata di riferimento e assumiamo



15/ Dati due fasci di raggi prospettivi riferiti alla stessa punteggiata p , è possibile ottenere una conica trasladando e ruotando liberamente i due fasci nel piano. L'intersezione dei raggi corrispondenti sono i punti della conica C .



16/ Due fasci di piani prospettivi riferiti alla stessa retta punteggiata, determinano una quadrica rigata.



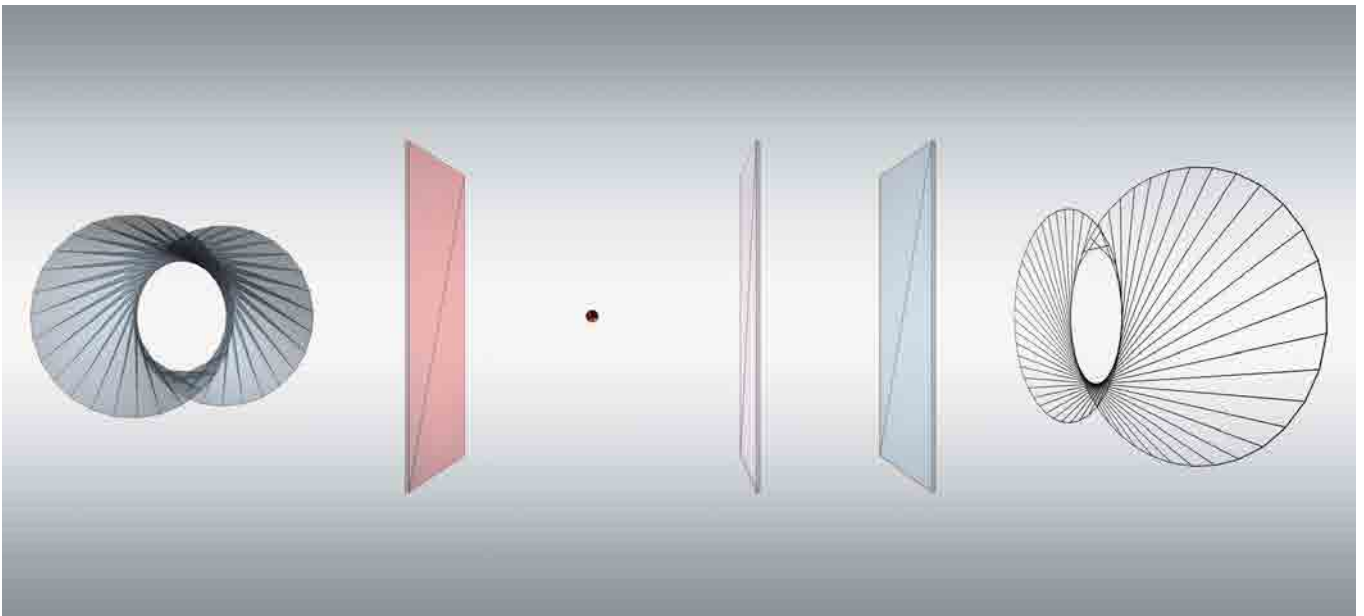
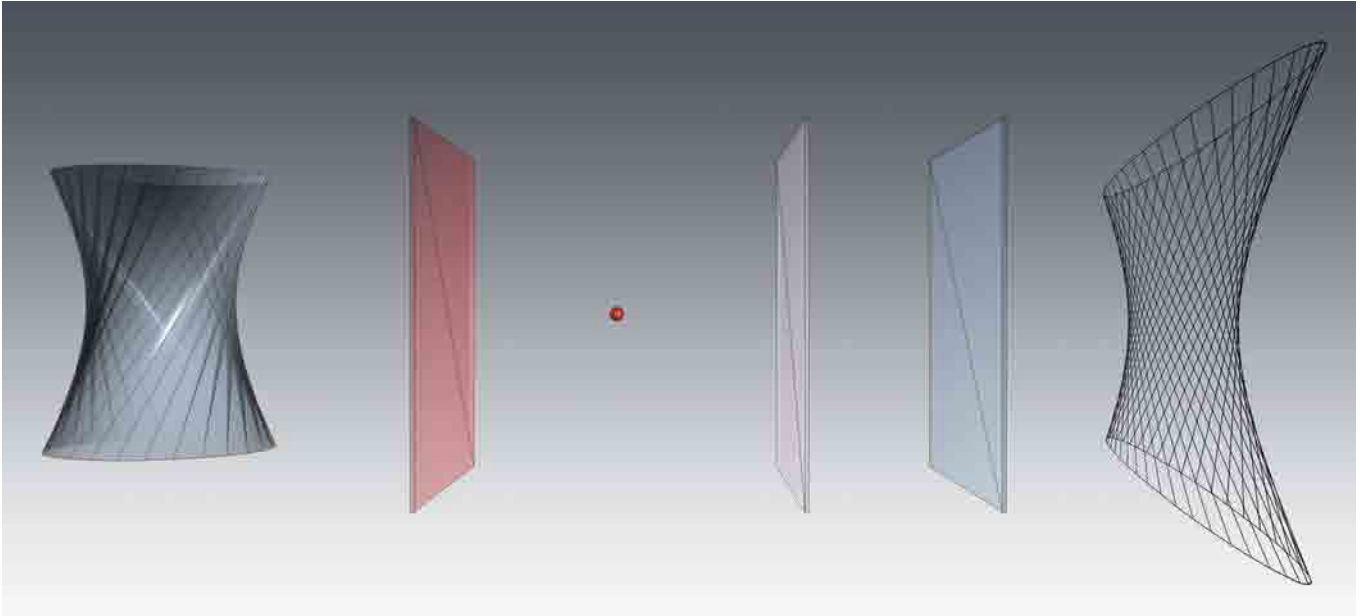
17/18/ Dati due fasci di piani prospettivi, è possibile ruotarli e traslarli liberamente nello spazio e ottenere sempre una quadrica rigata come prodotto dei due nuovi fasci proiettivi.

i fasci prospettivi di assi r e t . Disegniamo, come per il problema nel piano, almeno quattro coppie di piani corrispondenti che passano per i punti A, B, C, D della punteggiata s . Ricordo infatti che una quadrica rigata è determinata da tre coppie di piani corrispondenti, per cui conviene prendere almeno un'altra coppia di piani per poter verificare sperimentalmente il teorema. L'intersezione delle coppie di piani corrispondenti dà luogo a quattro rette che sono quattro generatrici dell'iperboloide rigato, le due rette r e t sono le due direttrici (fig. 17). Adesso prendiamo i due fasci r e t e trasliamoli e ruotiamoli nello spazio liberamente. Sapendo che due forme di prima specie proiettive rimangono tali se applichiamo delle trasformazioni rigide, verifichiamo che effettivamente questa proprietà si conservi. Rinominiamo gli assi dei due fasci nelle loro nuove posizioni nello spazio con le lettere r' e t' (fig. 18). Troviamo le rette corrispondenti dei due fasci proiettivi nelle loro nuove posizioni nello spazio. Per fare ciò basta trovare le intersezioni dei piani corrispondenti. Per esempio la generatrice a' sarà l'intersezione dei due piani α e α' corrispondenti nelle loro nuove posizioni, e così via per le altre generatrici. E' possibile verificare che i due fasci r' e t' individuano un nuovo iperboloide rigato. Allora, *dati due fasci di piani prospettivi, è possibile ruotarli e traslarli liberamente nello spazio e ottenere sempre una quadrica rigata come prodotto dei due nuovi fasci proiettivi.*

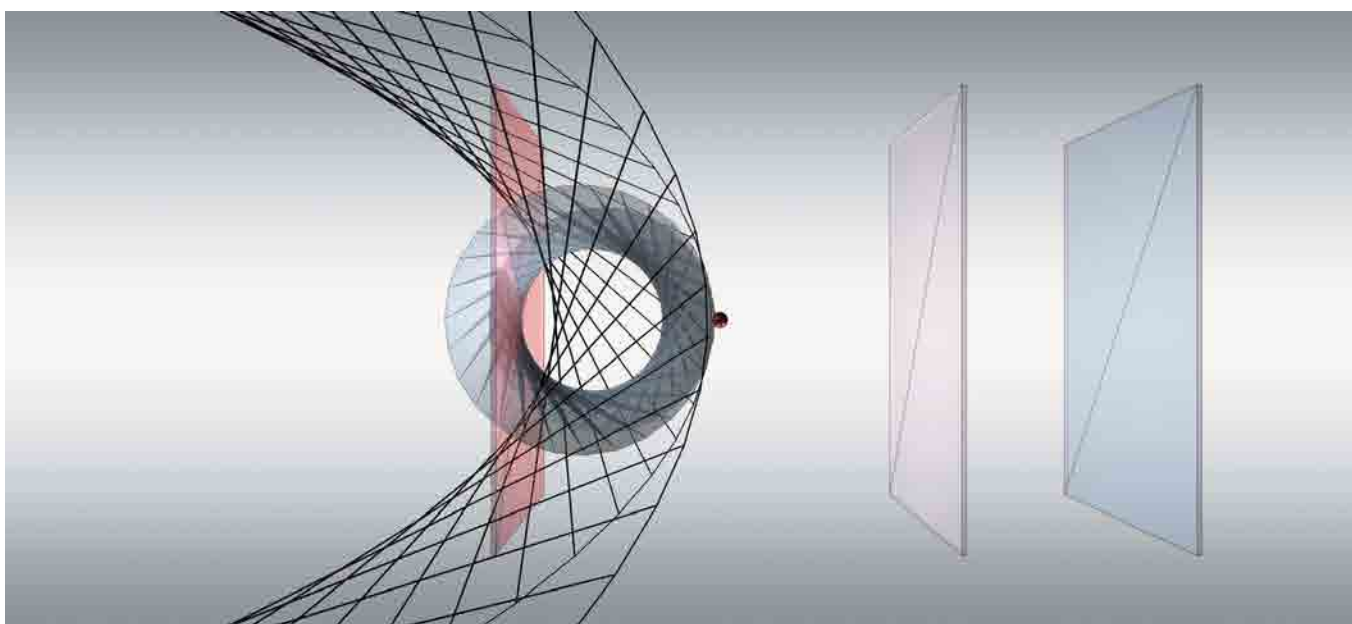
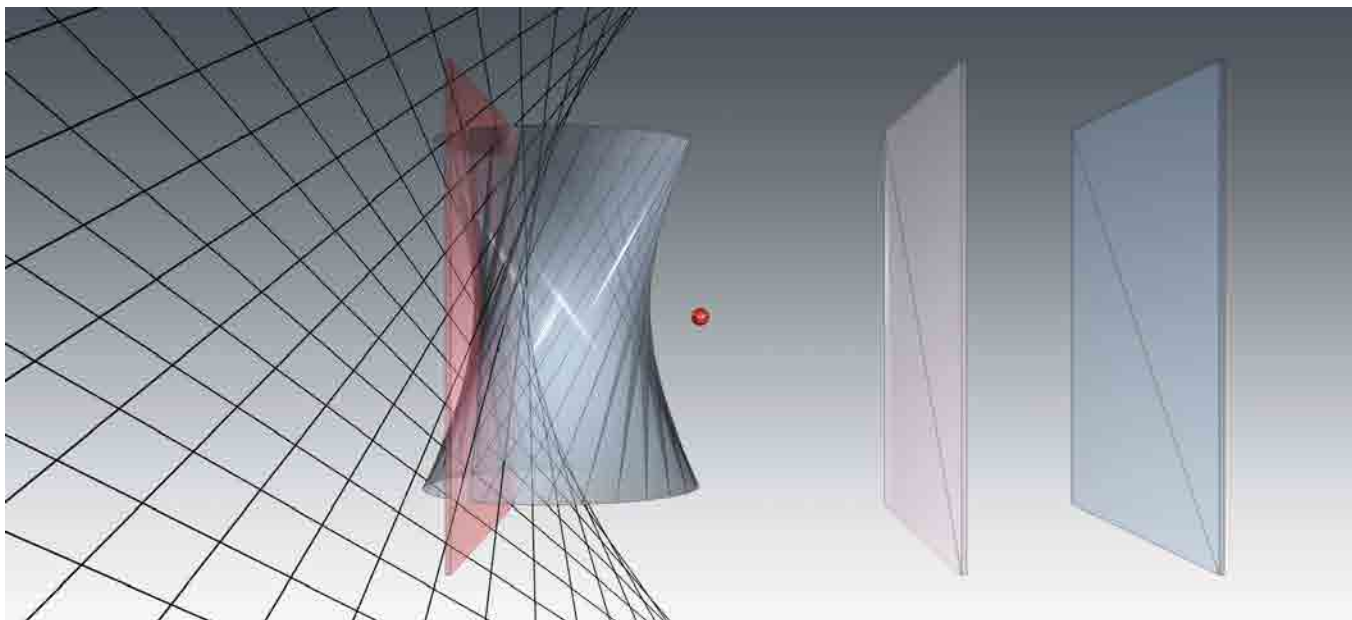
Una proprietà notevole delle superfici quadriche rigate è la condizione di poter trasformare sempre un iperboloide iperbolico in un altro iperboloide iperbolico in modo che ad ogni retta della superficie originale corrisponda una determinata retta della nuova superficie. In altre parole è possibile sempre trasformare, attraverso un'omologia, una superficie rigata generica in una qualsiasi altra superficie rigata e avere sempre una corrispondenza biunivoca. E' possibile allora trasformare uno stesso iperboloide rotondo in un altro iperboloide generico o, in alcuni casi particolari, in un paraboloide iperbolico. Riguardo ciò un'ultima interessante sperimentazione l'ho potuta realizzare grazie al motore di trasformazione omologica ideato da

Riccardo Migliari. Per una spiegazione esaustiva della questione teorica e tecnica si rimanda direttamente agli studi originali¹⁴. Tale esperienza è stata condotta con il metodo della rappresentazione numerica o poligonale. Si ricorda che la rappresentazione matematica descrive le entità geometriche per mezzo di equazioni¹⁵, per esempio un'ellisse è descritta in modo continuo. Invece la rappresentazione numerica o poligonale descrive gli oggetti per mezzo delle coordinate di punti notevoli¹⁶, come i vertici in un poliedro, per cui un'ellisse è descritta discretamente solo attraverso alcuni punti, e soli quei punti sono esatti.

Nella trasformazione omologica solida il quadro di proiezione è da considerarsi uno spazio tridimensionale racchiuso fra due piani: il piano delle tracce o piano di collineazione (il piano bianco) e il piano delle fughe o primo piano limite (il piano azzurro). La trasformazione mette in relazioni lo spazio oggettivo con quello prospettico. Allora un oggetto che è posto nello spazio reale viene proiettato e trasformato in nuovo oggetto nello spazio prospettico. Dato che la relazione è biunivoca, esistono anche punti molto lontani dello spazio prospettico che corrispondono a punti vicini e accessibili dello spazio reale. Questi punti appartengono a un piano (quello rosso), che chiameremo secondo piano limite, parallelo al primo e posto dietro l'osservatore ad una distanza pari a quella fra il piano delle tracce e il piano delle fughe. Consideriamo adesso come oggetto da proiettare un iperboloide rotondo. Quando l'oggetto (l'iperboloide azzurro) è posto genericamente nello spazio reale, la sua prospettiva è una forma oblunga e chiusa, che riconosciamo come *iperboloide generico* (iperboloide fatto di rette) (fig. 19). A misura che l'iperboloide si avvicina al secondo piano limite, l'iperboloide ingigantisce e si allunga e nel momento in cui l'iperboloide tocca il secondo piano limite, un primo punto viene proiettato nello spazio profondo e avviene una seconda trasformazione: l'iperboloide è diventato un *paraboloide iperbolico*: una forma che, nel nostro spazio, è completamente aperta (fig. 20). L'iperboloide ora attraversa il piano rosso e una intera classe di punti, sono proiettati nello spazio profondo: il paraboloide si trasforma, ancora, e diventa nuovamente un *iperboloide rigato*. L'iper-



19/ Trasformazione di un iperboloide rotondo (oggetto blu) in un iperboloide iperbolico generico (oggetto schiera rigata) attraverso il motore dell'omologia solida. Il piano rosso è il secondo piano limite; il piano bianco è il piano delle tracce; il piano blu è il piano delle fughe. La figura è formata da due viste: l'una è una prospettiva laterale e l'altra è una prospettiva zenitale.



20/ Trasformazione di un iperboloido rotondo (oggetto blu) in un paraboloido iperbolico (oggetto schiera rigata) attraverso il motore dell'omologia solida. L'oggetto reale (iperboloido rotondo) è tangente al secondo piano limite (piano rosso). Il piano rosso è il secondo piano limite; il piano bianco è il piano delle tracce; il piano blu è il piano delle fughe. La figura è formata da due viste: l'una è una prospettiva laterale e l'altra è una prospettiva zenitale.

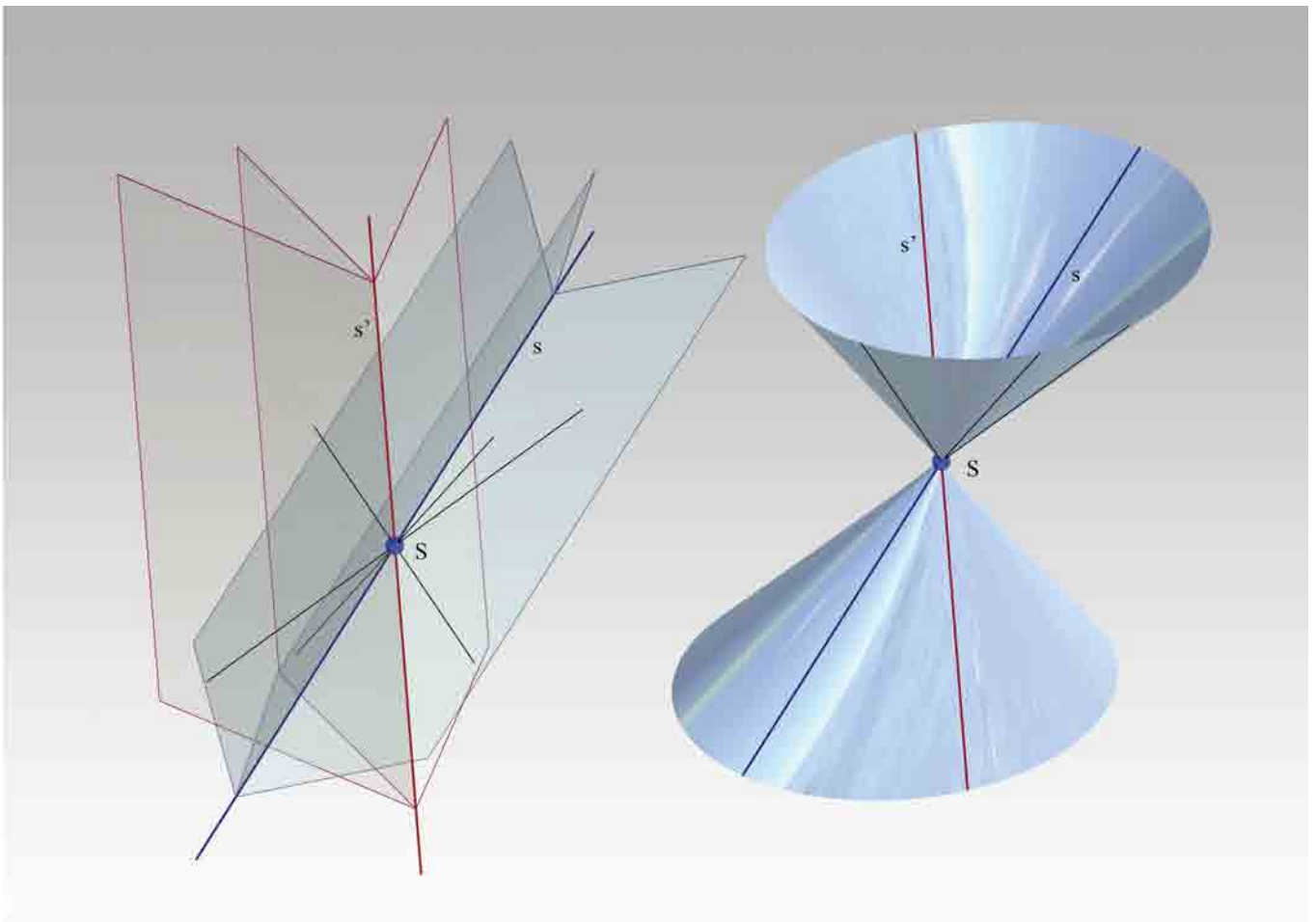
boloide iperbolico ridiventa un paraboloido iperbolico nell'istante in cui risulta nuovamente tangente al secondo piano limite, per poi, una volta attraversato, ridiventare un iperboloido iperbolico.

Coni e cilindri quadrici

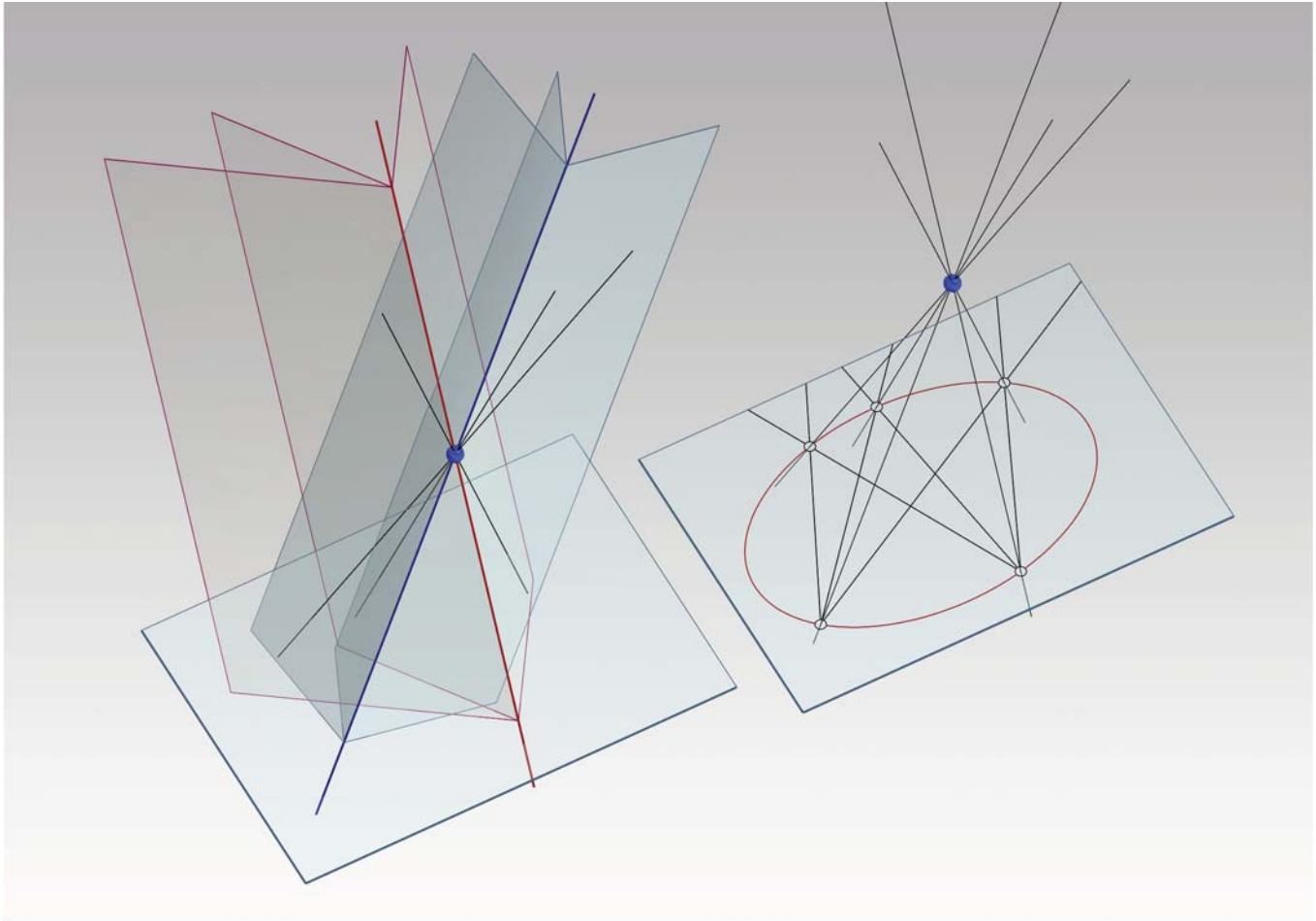
Fino adesso ci siamo occupati della forma generata da due fasci di piani proiettivi *sghembi*, ovvero dell'iperboloido rigato. Adesso consideriamo sempre due fasci proiettivi ma con gli assi s ed s' complanari, ovvero incidenti in un punto S . La figura generata in questo modo è un cono quadrico (fig. 21). Come per la quadrica gobba, tagliando con un piano qualsiasi, non passante per il centro S , la forma di raggi della stella si ottengono i

punti di una conica (fig. 22). La figura può essere generata anche *proiettando da un centro S di una stella i punti di una conica, che stia su un piano che non passi per il centro della stella*. La forma duale è quella generata proiettando dal centro S della stella le tangenti di una conica, e si ottiene la forma di piani che involuppano un cono quadrico.

La superficie conica di 2° ordine ha il vertice coincidente nel centro della stella S . I raggi della stella sono le *generatrici* della superficie, e qualsiasi sezione conica può essere la *base* o la *direttrice* del cono. Ogni piano che proietta una tangente della base del cono è tangente al cono lungo la generatrice di contatto, ovvero lungo il raggio che proietta il punto di contatto della linea della



21/ Due fasci di piani proiettivi con gli assi s ed s' complanari, ovvero incidenti in un punto S , generano un cono quadrico.



22/ Due fasci di piani proiettivi con gli assi incidenti in un punto S sono tagliati da un piano generico, non passante per il punto S , secondo due fasci di raggi proiettivi, vale a dire secondo una conica. Proiettando da un punto V , esterno al piano della conica C , i punti di una conica C si ottiene un cono quadrico.

base con la tangente considerata. Allora ogni piano σ passante per il centro S taglia il cono in due generatrici al più, s ed s' . Per ogni raggio r o retta passante per il centro S della stella passano al più due ρ ed ρ' piani tangenti al cono. Per queste due proprietà il cono è detto essere una superficie di 2° grado (fig. 23).

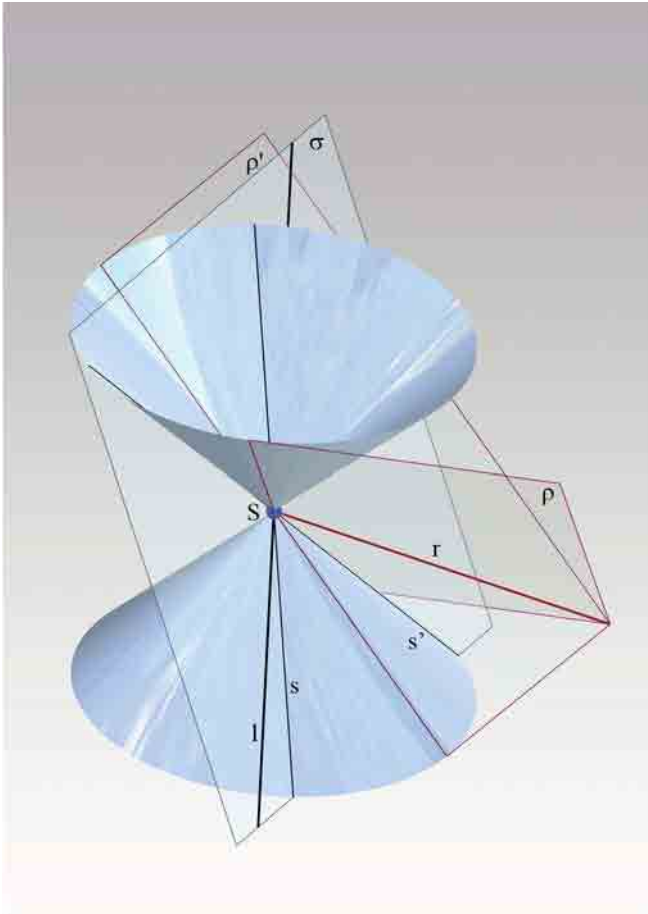
Un raggio r della stella è esterno al cono quando possiamo costruire due piani tangenti alla superficie, invece un raggio l è interno quando non possiamo costruire alcun piano tangente (fig. 24).

Proiettando da due generatrici fisse una generatrice variabile del cono si ottengono due fasci proiettivi di pia-

ni. Al piano passante per entrambi gli assi corrisponde nell'un fascio il piano tangente al cono passante per l'altro asse considerato e viceversa. Il teorema duale dice che: tagliando due piani tangenti fissi con un piano tangente variabile, si ottengono due fasci di raggi fra loro proiettivi, e all'intersezione dei loro piani, considerata come appartenente all'un fascio, corrisponde la generatrice di contatto del piano dell'altro fascio.

Come per la conica anche il cono quadrico è determinato da cinque enti:

da cinque generatrici, oppure da quattro generatrici e un piano tangente lungo una di esse; o ancora da tre ge-



23/24/ Ogni piano σ passante per il centro S taglia il cono in due generatrici al più, s ed s' . Per ogni raggio r o retta passante per il centro S della stella passano al più due ρ ed ρ' piani tangenti al cono. Per queste due proprietà il cono è detto essere una superficie di 2° grado. Un raggio r della stella è esterno al cono quando possiamo costruire due piani tangenti alla superficie, invece un raggio l è interno quando non possiamo costruire alcun piano tangente.

neratrici e da due piani tangenti lungo due di esse. Per il principio di dualità: da cinque piani tangenti; oppure da quattro piani tangenti e dalla generatrice di contatto di uno di essi; o infine da tre piani tangenti e dalla generatrici di contatto di due di essi.

Ora abbiamo tutti gli strumenti teorici e tecnici per risolvere uno qualsiasi dei sei problemi appena enunciati. Prendiamo per esempio il primo problema, ovvero: date cinque generatrici disegnare il cono quadrico che appartiene ad esse.

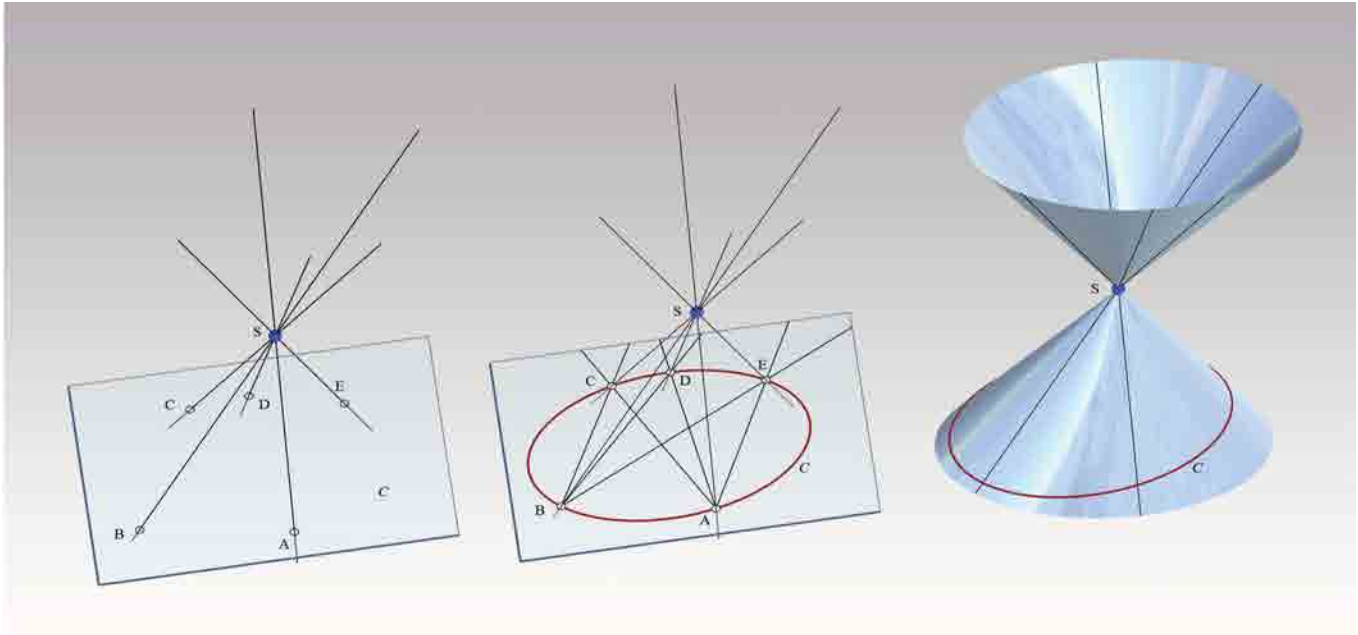
Sono date cinque rette nello spazio passanti tutte per uno stesso punto S (fig. 25). Tagliamo la stella di centro S con un piano α qualsiasi non passante per il centro S . Otteniamo una figura formata da cinque punti, che nominiamo A, B, C, D, E . Adesso è sufficiente disegnare la conica passante per essi, attraverso i teoremi di Pascal e Brianchon (vedi parte seconda sulle coniche). Una volta determinata la conica C , si disegna la superficie che ha come direttrice la conica C e come vertice il punto S . I restanti cinque problemi possono essere risolti seguendo esattamente il procedimento descritto, con l'unica abilità di applicare bene il teorema di Pascal e Brianchon alle diverse situazioni.

Ogni angolo esaedro semplice inscritto del cono è un angolo esaedro di Pascal, ovvero sia i suoi tre spigoli diagonali sono in un medesimo piano. Ogni angolo esaedro semplice circoscritto al cono è un angolo esaedro di Brianchon, ovvero sia i suoi tre piani diagonali passano per una stessa retta.

Costruiamo un angolo esaedro di Pascal: si prendono sei generatrici a, b, c, d, e, f a piacere del cono (fig. 26). Si costruisce un esaedro qualsiasi che appartiene a queste sei rette. Ovvero si costruiscono i sei piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \sigma$ che passano per i sei spigoli presi a due a due. Il piano α è dato dalla coppia ab , il piano β dalla coppia bc , il piano γ dalla coppia cd e così via. Dopodiché si trovano i tre spigoli diagonali, intersezioni delle tre coppie di piani opposti. I tre spigoli diagonali l, m, n apparterranno allo stesso piano ω .

Disegniamo un angolo esaedro semplice circoscritto al cono di Brianchon: si prendono sei piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \sigma$ tangenti qualsiasi al cono. Poi si costruiscono i tre piani diagonali, ovvero i tre piani che passano rispettivamente per le coppie degli spigoli opposti. I tre piani diagonali λ, μ, ν intersecheranno nella medesima retta r (fig. 27).

Le proprietà polari delle coniche si estendono allo spazio per le quadriche e in particolare per i coni quadrici si ha che: Dato un cono quadrico e una retta l della stella a cui il cono appartiene, è determinato un piano λ' che è il piano polare del raggio coniugato l . Il suo duale dice che dato un cono e un piano λ della stella a cui appartiene il cono, è determinato una retta



25/ Un cono quadrico è determinato se sono date cinque rette passanti per una stesso punto S , vertice del cono.

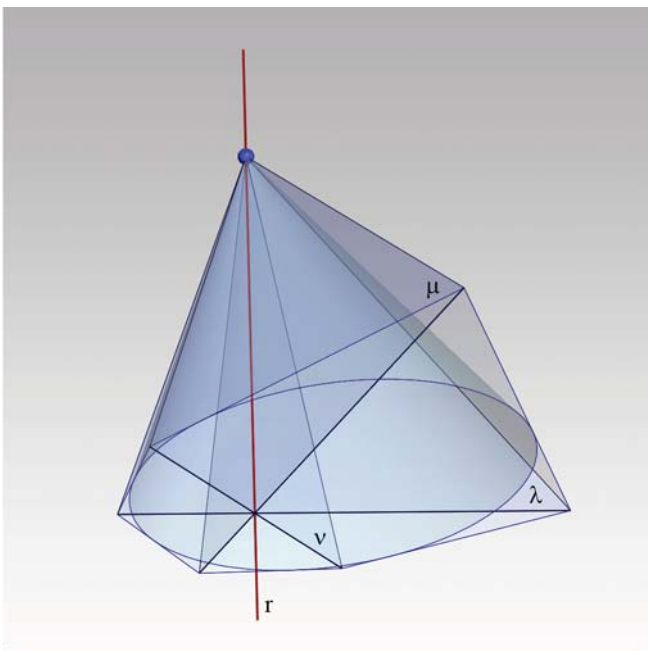
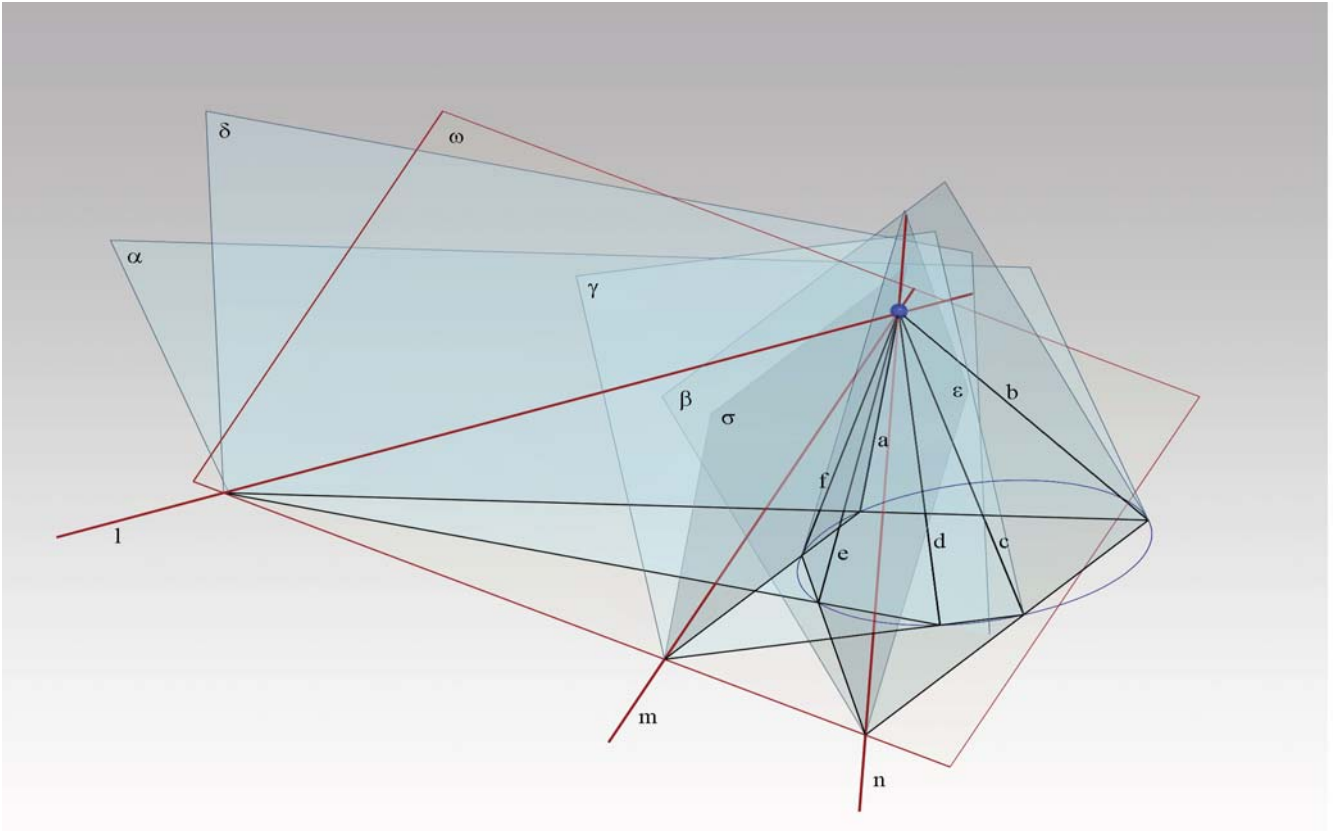
ta \mathbf{P} della stella che è il raggio polare di λ (fig. 28).

- Il piano λ' è il piano che contiene i raggi coniugati armonici di \mathbf{I} , rispetto ai raggi che appartengono al piano passante per \mathbf{I} e che sega il cono; viceversa \mathbf{I}' è il raggio per cui passano i piani coniugati armonici di \mathbf{I} , rispetto alle coppie di piani tangenti, che dai vari raggi della stella, situati in \mathbf{I} , si possono condurre al cono;
- λ' è il piano che contiene gli spigoli diagonali degli angoli quadri spigoli semplici inscritti nel cono e di cui due spigoli opposti individuano il piano;
- Il piano λ' è quello individuato dai raggi della stella appartenenti al cono che sono gli spigoli di contatto dei piani tangenti al cono condotti dal raggio \mathbf{I} ; viceversa il raggio \mathbf{I}' è la retta per la quale passano i piani determinati dalle coppie di generatrici di contatto dei piani tangenti al cono, condotti per i raggi passanti per il vertice del cono e appartenenti al piano λ .

Come per il problema nel piano, il piano polare di una generatrici è il piano tangente al cono lungo di essa e viceversa. I piani polari di raggi di un fascio for-

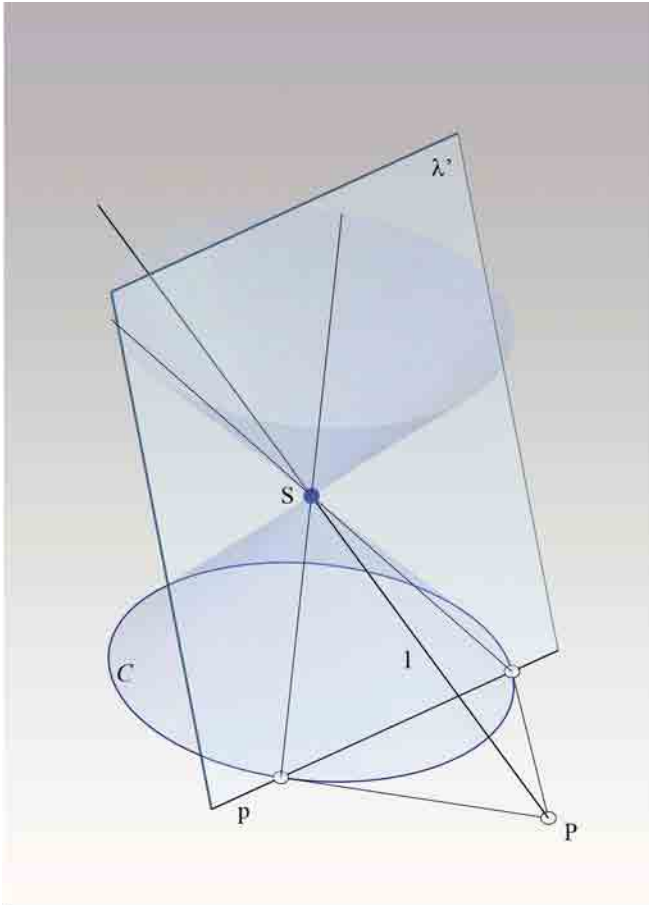
mano un fascio di piani proiettivo al fascio di raggi. Un modo efficace per determinare il sistema polare di un cono quadrico è quello di proiettare dal vertice del cono il sistema polare di una conica direttrice C (di un punto P e della sua polare p) (fig. 29). Si otterrebbe lo stesso risultato tagliando con un piano qualsiasi non passante per il vertice del cono il sistema polare del cono quadrico, ovvero si avrebbe una conica direttrice con il relativo sistema polare piano. Allora proiettando due punti coniugati di una conica direttrice si ottengono due raggi coniugati e proiettando due rette coniugate si ottengono due piani coniugati. Proiettando un triangolo polare della conica base si ottiene un triedro polare del cono (fig. 30).

Il cono quadrico diventa un cilindro quadrico se il vertice è il punto all'infinito di una retta p . Il cilindro è il luogo delle rette punteggiate parallele ad una retta fissa data condotte dai punti di una conica data che può essere: un'ellisse (cono ellittico), un'iperbole (cono iperbolico) o una parabola (cono parabolico). Se l'asse del cono è perpendicolare al piano della conica, e se questa è un cerchio si ha il cilindro retto. Accade lo stesso per il cono che viene detto cono retto o cono di rotazione.



26/ Esaedro di Pascal inscritto in un cono quadrico. I tre spigoli diagonali **l**, **m**, **n** apparterranno allo stesso piano ω . Si costruisce un esaedro qualsiasi che appartiene a queste sei rette. Ovvero si costruiscono i sei piani α , β , γ , δ , ϵ , σ che passano per i sei spigoli presi a due a due. Il piano α è dato dalla coppia **ab**, il piano β dalla coppia **bc**, il piano γ dalla coppia **cd** e così via. Dopodiché si trovano i tre spigoli diagonali, intersezioni delle tre coppie di piani opposti. I tre spigoli diagonali **l**, **m**, **n** apparterranno allo stesso piano ω .

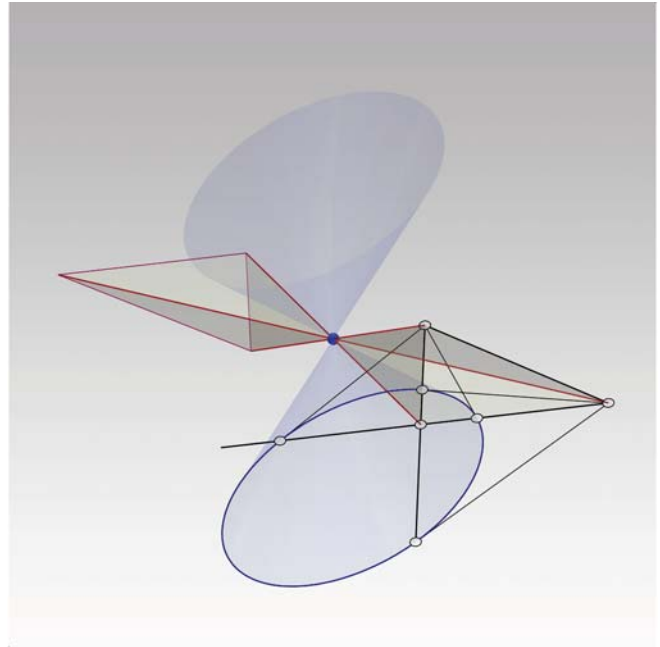
27/ Esaedro di Brianchon circoscritto ad un cono quadrico. I tre piani diagonali λ , μ , ν s'intersecheranno nella medesima retta **r**. Disegniamo un angolo esaedro semplice circoscritto al cono di Brianchon: si prendono sei piani α , β , γ , δ , ϵ , σ tangenti qualsiasi al cono. Poi si costruiscono i tre piani diagonali, ovvero i tre piani che passano rispettivamente per le coppie degli spigoli opposti. I tre piani diagonali λ , μ , ν s'intersecheranno nella medesima retta **r**.



28/29/ Dato un cono quadrico e una retta l della stella a cui il cono appartiene, è determinato un piano λ' che è il piano polare del raggio coniugato l . Il suo duale dice che dato un cono e un piano λ della stella a cui appartiene il cono, è determinato una retta l' della stella che è il raggio polare di λ . Un modo efficace per determinare il sistema polare di un cono quadrico è quello di proiettare dal vertice del cono S il sistema polare di una conica direttrice C (di un punto P e della sua polare p).

Se due coni quadrici, aventi vertici differenti, hanno una stessa generazione in comune e lo stesso piano tangente lungo di essa, allora i due coni s'intersecano in una conica, oltre che lungo la generatrice stessa.

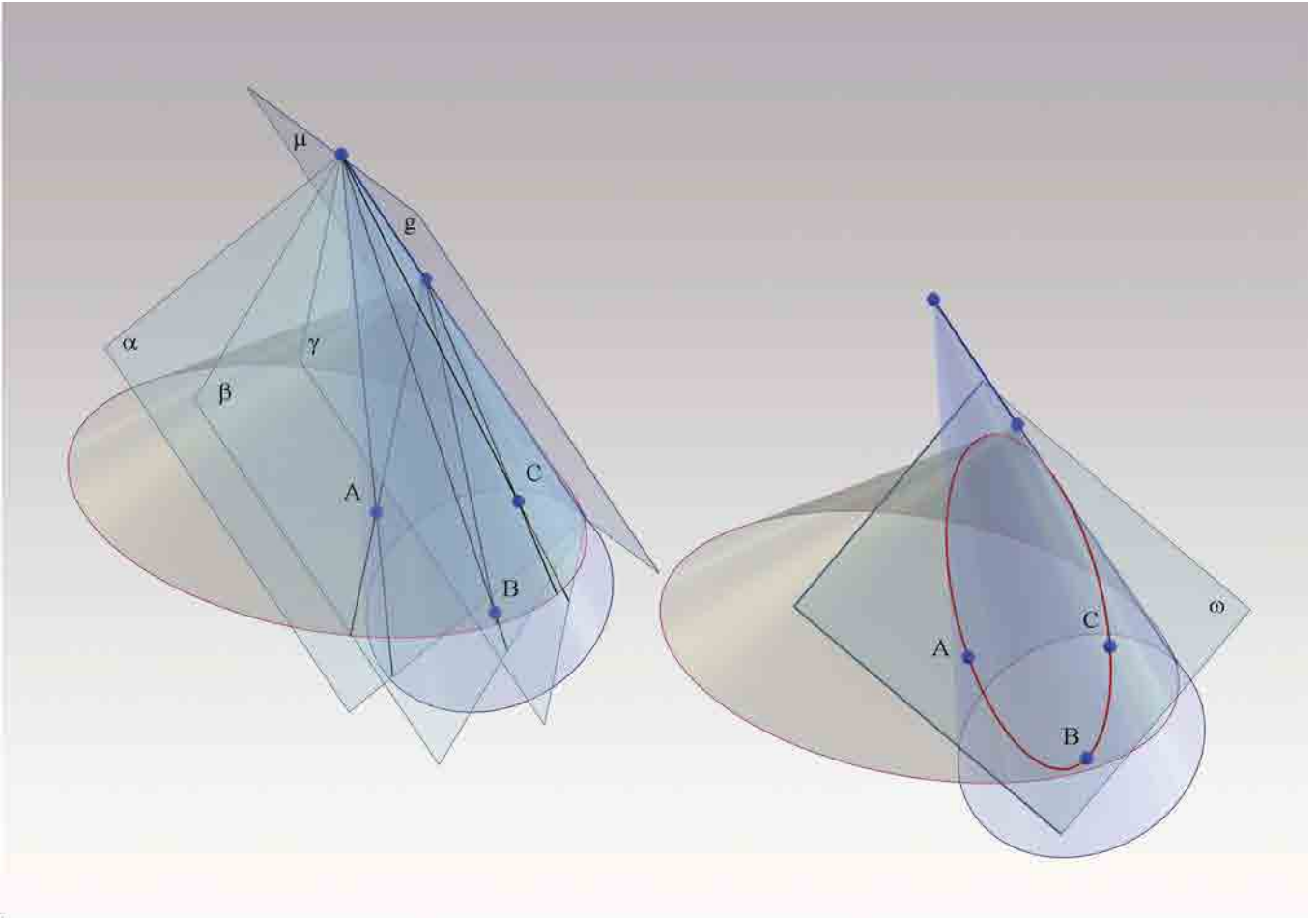
Prendiamo una generatrice g e sia questa la generatrice in comune di due coni quadrici (fig. 31). Lungo di essa disegniamo un piano μ tangente ai due coni. Conduciamo da g tre piani α, β, γ a segare i coni in un'altra generatrice. Le generatrici dei due coni situate sui piani α, β, γ si segano nei punti A, B, C . Il piano ω individuato dai



30/ Proiettando dal vertice del cono S un triangolo polare della conica base si ottiene un triedro polare del cono.

tre punti A, B, C sega i coni in due coniche che passano per i punti A, B, C , e per il punto intersezione dei due piani ω e μ .

Un altro importante teorema dice che: *Se due coniche, situate in piani differenti, hanno una tangente t comune, e lo stesso punto C di contatto di questa tangente, le due coniche sono poste in uno stesso cono di secondo grado* (fig. 32). Disegniamo due coniche qualsiasi C e C' che abbiano lo stesso punto di contatto C e la stessa tangente c nel punto di contatto. Per individuare il vertice V del cono basta individuare una coppia di rette polari appartenenti agli stessi piani diametrali α e β . Intersecando le due rette che uniscono gli estremi delle rette polari si avrà il vertice V del cono, perché per gli estremi passano due generatrici del cono. Si viene a creare una corrispondenza proiettiva in cui l'asse dell'omologia è la tangente g e il centro dell'omologia è il vertice V del cono¹⁷. In alternativa si può trovare un medesimo piano tangente a partire da un punto P qualsiasi della tangente t . Il piano tangente è individuato dalle tangenti alle due coniche C e C' e dalla retta generatrice di contatto passante per i due punti di contatto A e A' . Poi basta



31/ Se due coni quadrici, aventi vertici differenti, hanno una stessa generazione in comune e lo stesso piano tangente lungo di essa, allora i due coni s'intersecano in una conica, oltre che lungo la generatrice stessa.

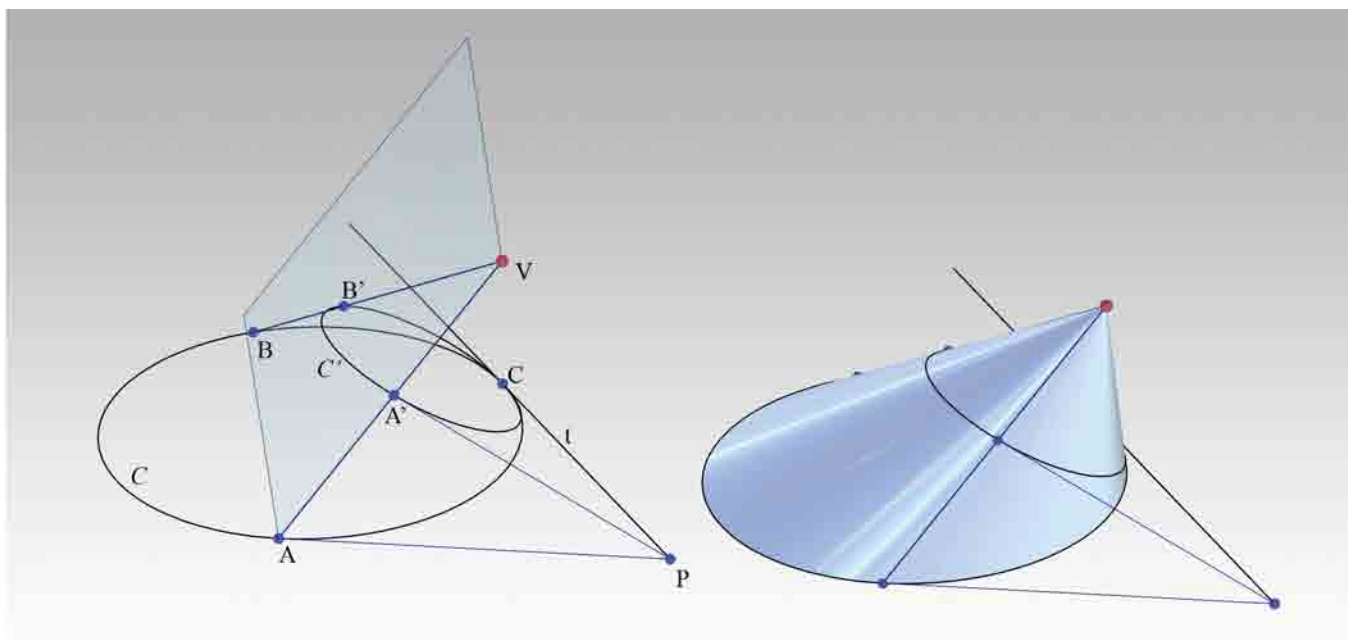
tagliare le due coniche con un piano qualsiasi passante per la generatrice AA' , questa taglierà le due coniche in altri due punti B e B' che individuano un'altra generatrice. Il punto d'intersezione delle rette AA' e BB' dà il vertice del cono V che ha come direttrice una delle due coniche C o C' .

Per le quadriche valgono tutti i teoremi di proiettiva piana. Allora abbiamo che: *Se in un certo ordine quattro punti di una conica formano un gruppo armonico, anche le tangenti nei punti stessi formeranno un gruppo armonico.* Se si proietta questa figura da un centro nello spazio si ha che: *Se in un certo ordine quattro generatrici di un cono di 2° grado formano un gruppo armonico,*

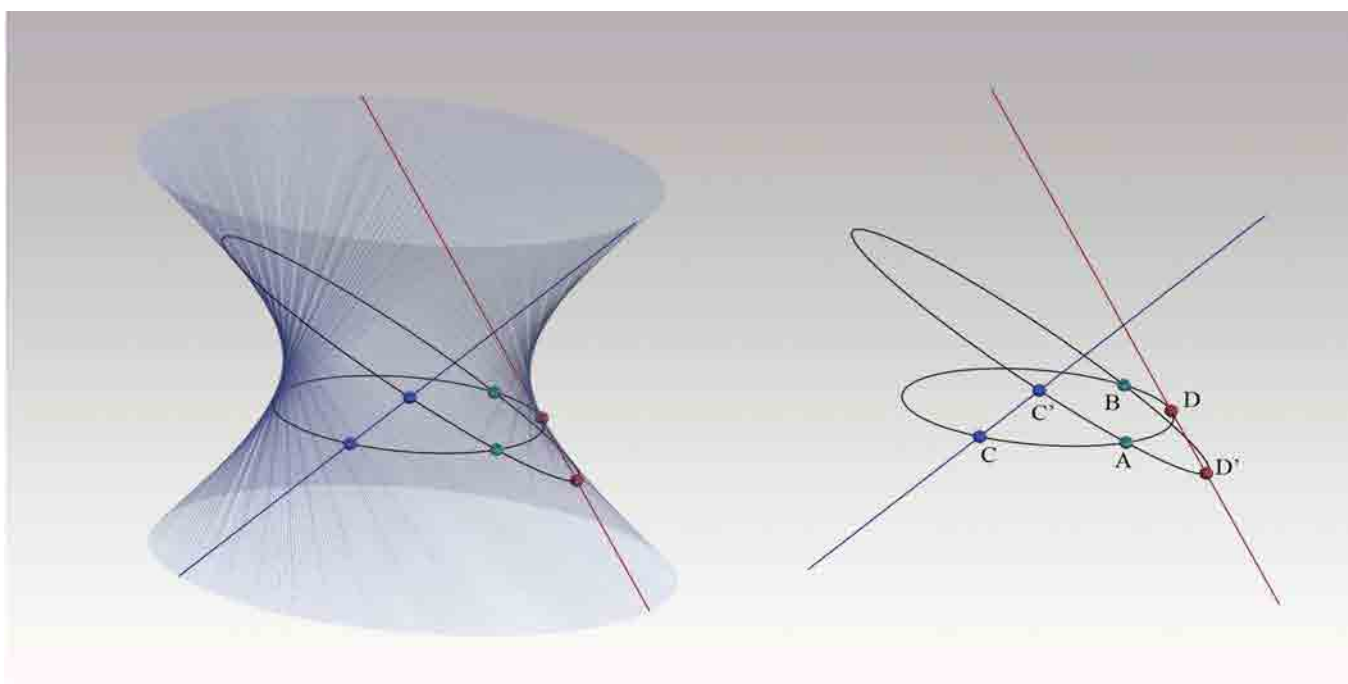
anche i piani tangenti lungo le generatrici formano un gruppo armonico.

Nelle serie rigate proiettive appartenenti alla stessa quadrica: *se una serie rigata è riferita proiettivamente alla serie rigata delle sue direttrici, il luogo dei punti d'intersezione dei raggi corrispondenti delle due serie è una conica.* Prendiamo tre A, B, C per cui passano le tre coppie di rette corrispondenti a, a' ; b, b' ; c, c' . Il piano ABC taglia le serie rigate in una conica C che sarà proiettiva ad entrambe.

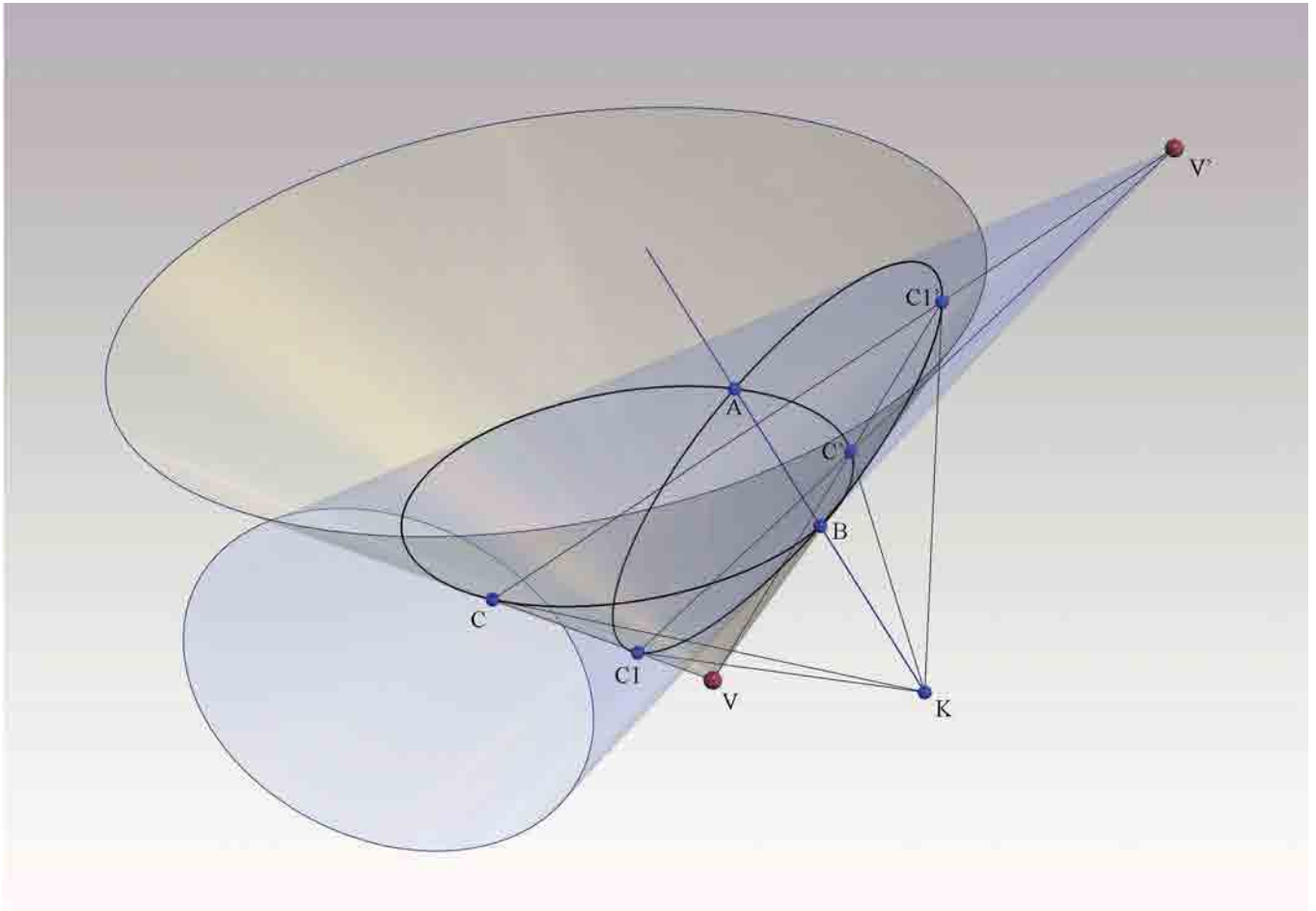
Sempre le forme elementari di 2° ordine proiettive vale il teorema: *Se due coniche sono situate in piani differenti e, essendo proiettive, hanno due punti uniti, le rette che*



32/ Se due coniche, situate in piani differenti, hanno una tangente t comune, e lo stesso punto C di contatto di questa tangente, le due coniche sono poste in uno stesso cono di secondo grado.



33/ Se due coniche sono situate in piani differenti e, essendo proiettive, hanno due punti uniti, le rette che uniscono le coppie di punti corrispondenti formano una serie rigata (ovvero un iperboloide rigato) o le generatrici di un cono quadrico.



34/ Per due coniche C e C' situate in piani differenti e aventi due punti A e B in comune passano due coni quadrici.

uniscono le coppie di punti corrispondenti formano una serie rigata (ovvero un iperboloido rigato) o le generatrici di un cono quadrico. Per verificare sperimentalmente tale teorema prendiamo due coniche che abbiano due punti in comune A e B (fig. 33). Nella figura ho costruito due ellissi C e C' . Prendiamo sulle due coniche due coppie di punti corrispondenti a piacere CC' e DD' . Allora abbiamo determinato una delle due figure anzidette. Nel caso specifico possiamo assumere le rette CC' e DD' come i due assi di due fasci proiettivi. Siccome gli assi sono sghembi la figura generata dalle coppie di piani corrispondenti è una serie rigata di un iperboloido rigato. Se le rette CC' e DD' si tagliassero in un punto V allora la figura generata sarebbe un cono quadrico.

E facile verificare che: Per due coniche C e C' situate in piani differenti e aventi due punti A e B in comune passano due coni quadrici (fig. 34). Prendiamo un punto C sulla conica C e disegniamo la tangente c fino a intersecare nel punto K la retta intersezione dei due piani contenenti le coniche. Siano i punti $C1$ e $C1'$ i punti di contatto delle tangenti (dal punto K) sulla linea C' e siano i punti C e C' i punti di contatto delle tangenti sulla linea C . Allora è possibile disegnare i due coni che hanno rispettivamente i vertici nei punti V e V' . Infatti si possono considerare come coppie di punti corrispondenti sia i punti C e $C1$ e ottenere il primo cono di vertice V ; oppure considerare la coppia di punti C e $C1'$ e ottenere il secondo cono di vertice V' .

Sistema polare rispetto ad una quadrica

E' data una quadrica rigata nello spazio. Sia P un punto qualunque non appartenente alla superficie della quadrica (fig. 35). Conduciamo per P una retta a segare la superficie in due punti M ed M' . Tagliamo la quadrica con un piano passante per la retta MM' e otteniamo una conica C . Disegniamo la retta polare p' di P rispetto alla conica C . La retta polare conterrà il punto P' coniugato armonico di P rispetto alla coppia MM' . Il punto P' è l'intersezione della retta p e della polare p' del punto P . Il punto P' , coniugato armonico di P rispetto alla coppia MM' , può essere trovato anche in questo modo: dal punto M' si staccano due rette qualsiasi appartenenti al medesimo piano (per esempio nel piano della conica C); poi si taccia una retta qualsiasi dal punto M che interseca le prime due rette nei punti A e B ; adesso stacciamo una retta dal punto P passante per il punto A , questa interseca la seconda retta nel punto C ; dal punto M stacciamo una retta passante per il punto C fino ad intersecare la prima retta nel punto D ; la retta passante per i punti DB interseca la retta p nel punto P' , coniugato armonico di P rispetto alla coppia MM' . Se immaginiamo dal punto P un'altra qualsiasi retta che intersechi la quadrica nella coppia di punti MM' e costruiamo il coniugato armonico P' di P rispetto a MM' , questi punti staranno sempre sulla retta polare di P rispetto alle coniche sezioni dei piani passanti per P . Le polari sono rette che a due a due si tagliano nei punti stessi senza passare per uno stesso punto. Le rette polari di P e il suo coniugato armonico P' giacciono su un medesimo piano π' . Allora data una quadrica S ed un punto P fuori di essa resta determinato un piano π' che può essere definito come:

- π' è il piano che contiene i coniugati armonici P' di P rispetto alla coppia di punti MM' che una retta secante qualsiasi da P stacca sulla quadrica;
- π' è il piano nelle cui rette si tagliano i piani tangenti della quadrica nelle coppie di punti MM' in cui le trasversali da P intersecano la quadrica.

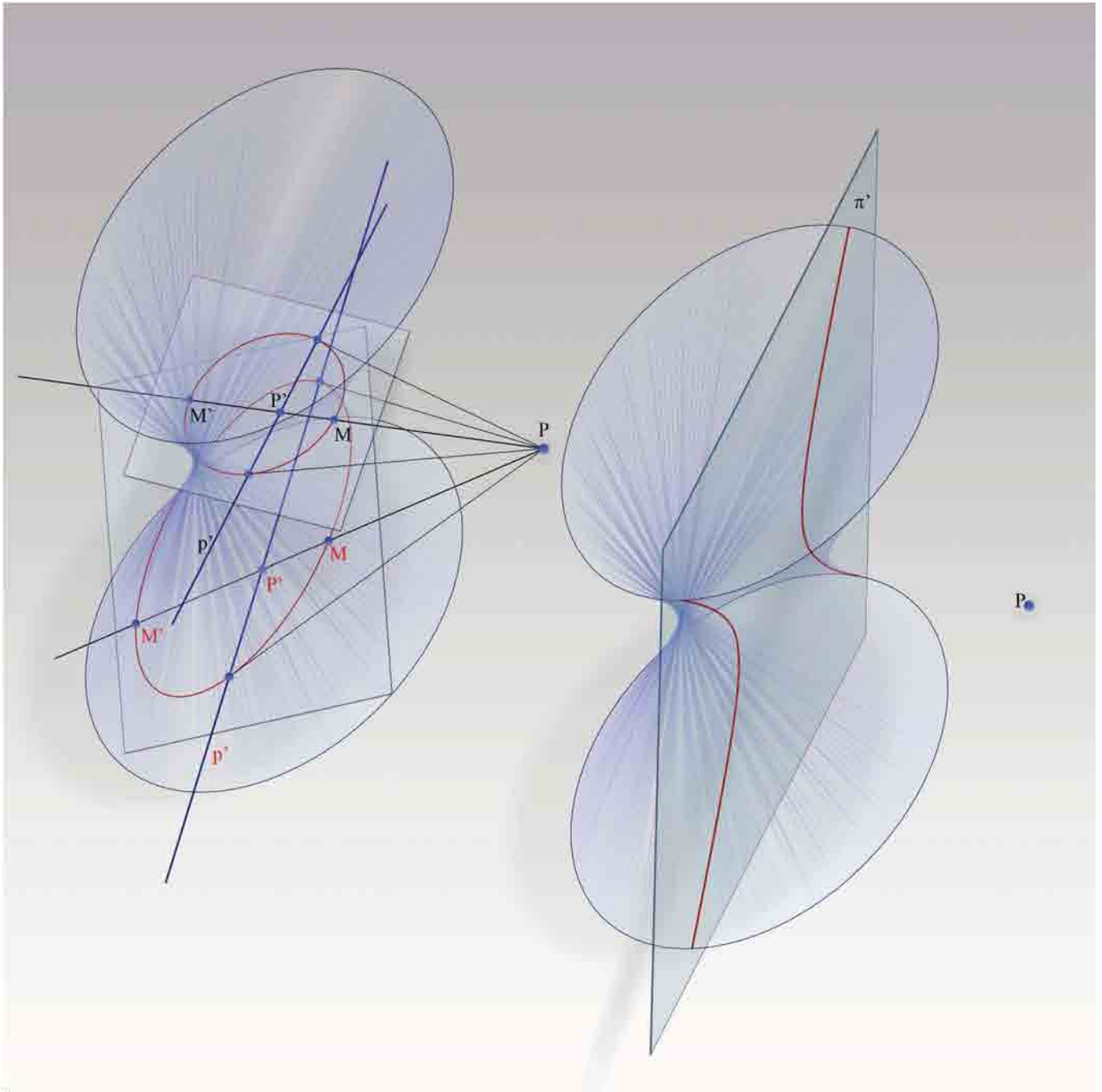
Il piano π' è detto piano polare di P rispetto alla quadrica. Come per il problema piano se il punto è sulla quadrica il relativo piano polare è il piano tangente in quel punto. Esiste anche il duale secondo cui il punto P' è il punto in cui si tagliano i piani tangenti alla quadrica nei punti di contatto delle trasversali che segano la quadrica e ap-

partengono al piano p . Consideriamo la stessa quadrica e lo stesso piano π , questa volta come dato e cerchiamo il relativo polo. Allora sul piano π costruiamo una trasversale qualsiasi che interseca la quadrica nei due punti M ed M' . Costruiamo i piani tangenti alla quadrica nei punti M e M' . Nell'esempio della figura la quadrica è un iperboloido rigato, allora per trovare i piani tangenti nei rispettivi punti è sufficiente prendere le due rette che passano per essi e appartengono alla superficie. Poi intersechiamo i due piani tangenti e troviamo la loro retta intersezione. Ripetiamo l'operazione per un'altra trasversale qualsiasi e troviamo un'altra retta intersezione dei due piani tangenti. E' possibile verificare che le due rette intersezione s'incontrano nel polo P .

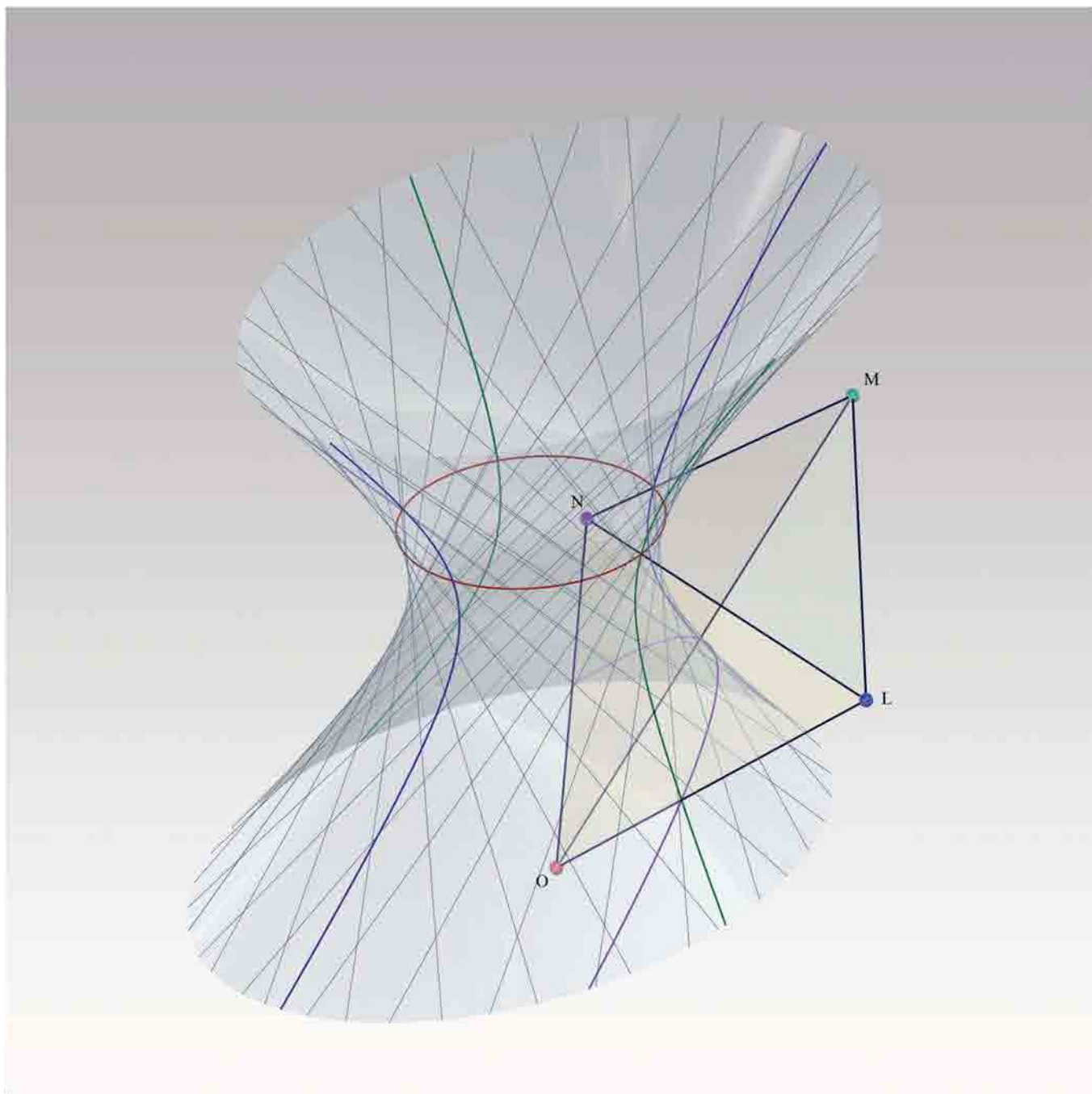
Per una quadrica che non sia un cono quadrico vale la relazione seguente: se per un punto P qualsiasi esiste una tangente alla quadrica, ne passeranno infinite e i punti di contatto di quelle tangenti formano una conica che giace sul piano polare π' di P . Le tangenti passanti per P formano un cono quadrico che è circoscritto alla quadrica e la tocca nella conica C . Il cono è involupato dai piani tangenti alla quadrica passanti per P . Una quadrica può essere data in due modi differenti e correlativi come involuppo dei piani tangenti alla quadrica stessa o come determinata dal complesso dei suoi punti.

Ogni punto P ha rispetto alla quadrica il relativo piano polare π e viceversa ogni piano π' ha il suo polo P , e se π' è il piano polare di P , allora P è il polo di π' .

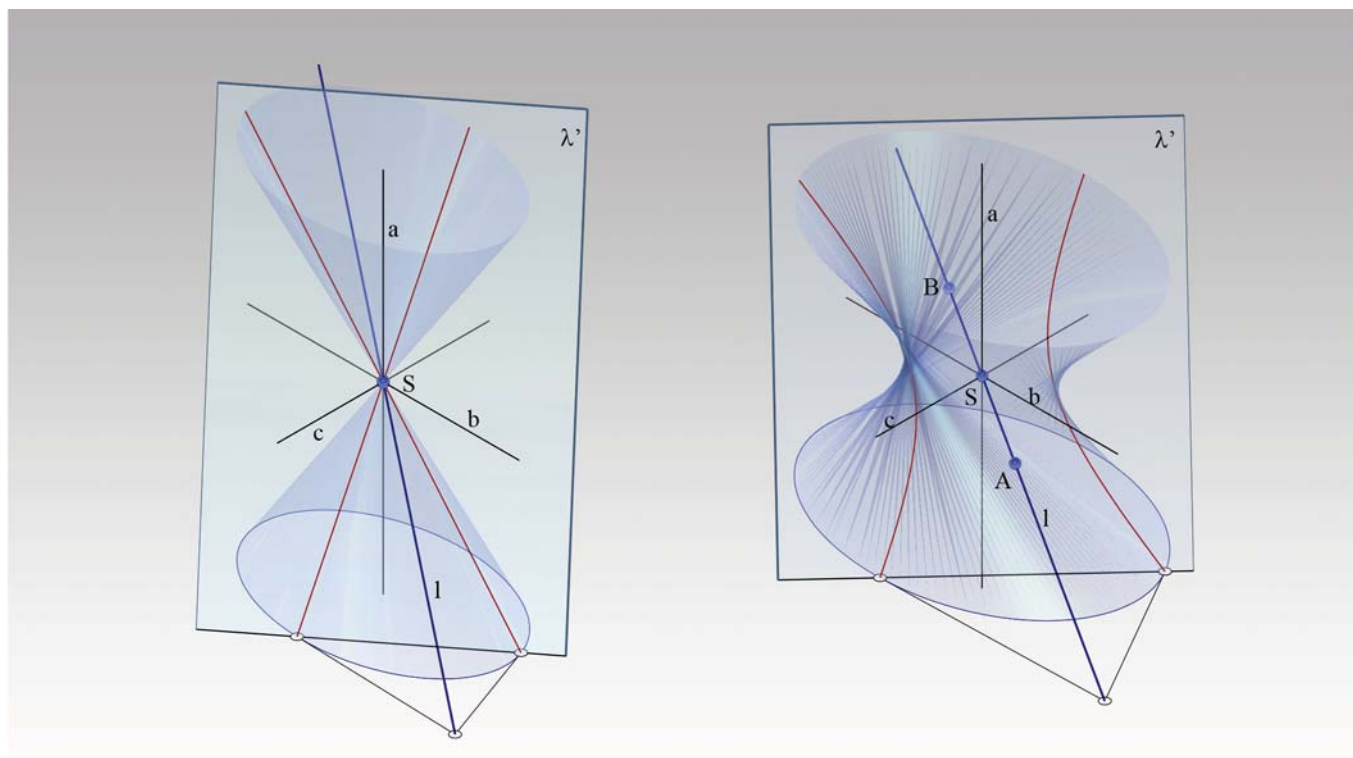
E' naturale che come per il piano esiste un sistema polare di una conica direttrice, così esiste il sistema polare di una quadrica direttrice. Allora anche per lo spazio esistono rette e piani coniugati. Ed è evidente che è possibile concepire infinite terne LMN di punti non in linea retta e a due a due coniugati rispetto alla quadrica. La terna è detta *triangolo polare* del sistema (fig. 36). Inoltre possiamo concepire infinite terne di piani non passanti per una stessa retta e a due a due coniugati rispetto ad una quadrica. Questi formano un *triedro polare* in cui ciascuno spigolo è coniugato della faccia opposta. Allora possiamo concepire infinite quaterne e ogni quaterna di punti come ogni quaterna di piani formano un *tetraedro polare* rispetto alla quadrica. Per costruire un tetraedro polare rispetto ad una quadrica data conviene partire tagliando con un piano la quadrica data e costru-



35/ Data una quadrica S ed un punto P fuori di essa resta determinato un piano π' detto piano polare di P e viceversa, dato un piano π' resta determinato un punto P detto polo del piano π' .



36/ Data una quadrica è possibile individuare un qualsiasi tetraedro polare. Ogni triangolo del tetraedro è un triangolo polare rispetto alla quadrica.



37/38/ Dato un diametro l rispetto ad una quadrica, rimane determinato un piano λ diametrale coniugato e viceversa. Un piano diametrale taglia la quadrica secondo una conica che ha il centro nel centro S della quadrica.

ire un qualsiasi *triangolo polare* LMN rispetto ad essa (vedi parte seconda). Poi conviene costruire i piani polari rispetto ai tre vertice L, M, N . Per costruire il piano polare rispetto al punto L basta costruire il contorno apparente della quadrica data da quel punto. Il piano individuato dal contorno apparente della conica C è il piano polare cercato. Una volta individuati i tre piani è sufficiente trovare gli spigoli intersezioni fra questi per determinare tutti gli spigoli del *tetraedro polare*. Questa costruzione è corretta perché in un tetraedro polare si ha che:

- Ogni vertice ha come piano polare la faccia opposta. Per esempio nella figura il vertice L ha come piano polare il piano individuato dai tre punti MNO ; il vertice M ha come piano polare la terna NOL , e così via.
- Due vertici e due facce, un vertice e uno spigolo non contenente il vertice stesso, oppure una faccia e lo spigolo non situato sulla faccia sono coppie

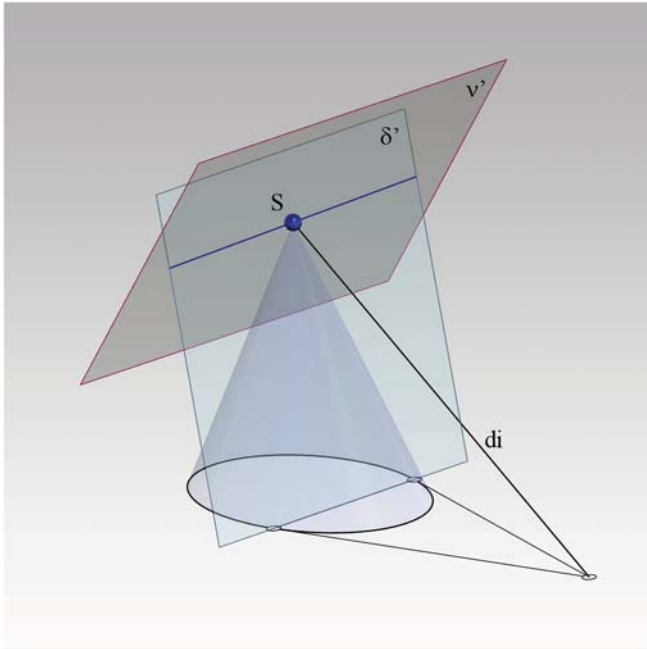
di elementi coniugati rispetto alla quadrica.

- Ogni triangolo del tetraedro è un triangolo polare rispetto alla quadrica.

Centro, diametri e assi delle quadriche

Data una conica come un cerchio e una retta all'infinito, il polo di quella retta sarà il centro del cerchio. Allora data una quadrica e un piano all'infinito, il suo polo S è il centro della quadrica. Una retta che sega in due punti A e B una quadrica è detta *corda* della superficie. Se la corda AB passa per il centro la retta è detta *diametro* della quadrica, ed ogni piano passante per il centro si dirà *piano diametrale* (fig. 37). Un piano diametrale qualsiasi sega la quadrica in una conica che ha il centro nel centro della quadrica stessa. Questo vale se la conica sezione ha un centro come l'iperbole o l'ellisse. Ogni diametro ha le seguenti proprietà:

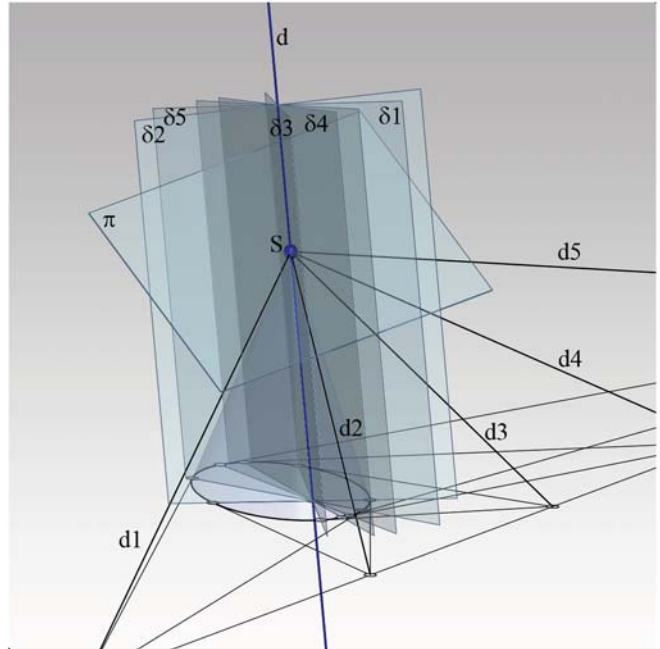
- *Un diametro è una retta la cui polare è all'infinito come un piano diametrale ha il suo polo che cade all'infinito;*



39/ Una superficie di secondo ordine in generale ha tre e soltanto tre diametri tra loro perpendicolari, ed il piano di due qualunque di questi è coniugato al terzo (Fiedler). Dato un cono quadrico e un diametro di , si costruisce il piano diametrale coniugato δ' proiettando da una sezione qualsiasi del cono, non passante per il vertice S , il sistema polare piano individuato da un punto del diametro di e la retta polare relativa alla conica sezione. Il piano ν' passa per il vertice S ed è ortogonale al diametro di .

- Il punto all'infinito di un diametro è il polo del piano diametrale ad esso coniugato; la polare di un diametro è la retta all'infinito del suo piano diametrale coniugato.
- Un piano diametrale taglia a metà tutte le corde coniugate al piano stesso e fra loro parallele.
- Tutti i diametri si tagliano a metà al centro della quadrica e se tre corde si tagliano a metà nello stesso punto senza essere sullo stesso piano, quel punto è il centro della superficie.

Come per il piano ogni diametro I ha il suo piano diametrale coniugato λ' . Abbiamo già visto il caso del cono. Per l'iperboloide quadrico valgono le stesse considerazioni. Per costruire un piano diametrale rispetto ad un diametro dato (e viceversa) conviene risolvere il problema in un piano che tagli la superficie e poi proiettare il tutto secondo il centro S della quadrica. Un piano dia-

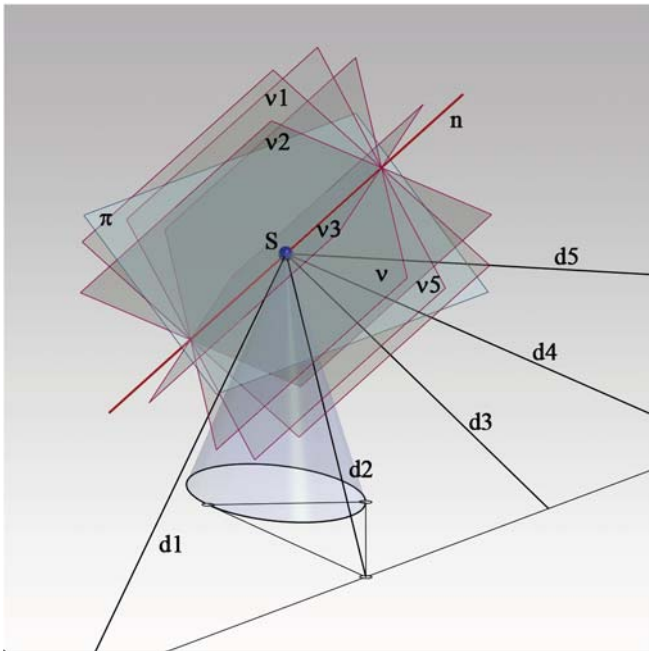


40/ Una superficie di secondo ordine in generale ha tre e soltanto tre diametri tra loro perpendicolari, ed il piano di due qualunque di questi è coniugato al terzo (Fiedler). Mentre d ruota in un piano diametrale, descrivendo un fascio di raggi in un piano π , il piano δ descrive un fascio di piani, il cui asse d è il diametro coniugato al piano π .

metrale taglia la quadrica in una conica che ha centro nel centro S della quadrica stessa. Nel cono quadrico il piano diametrale taglia la quadrica secondo due rette che passano per il centro della superficie (fig. 38).

E' possibile dimostrare sinteticamente che tutte le quadriche hanno tre piani principali e tre assi principali ortogonali fra loro a, b, c . I tre piani principali sono quelli individuati dalle tre coppie di rette degli assi. Qui di seguito è ricostruita attraverso la rappresentazione matematica la dimostrazioni di Fiedler¹⁸:

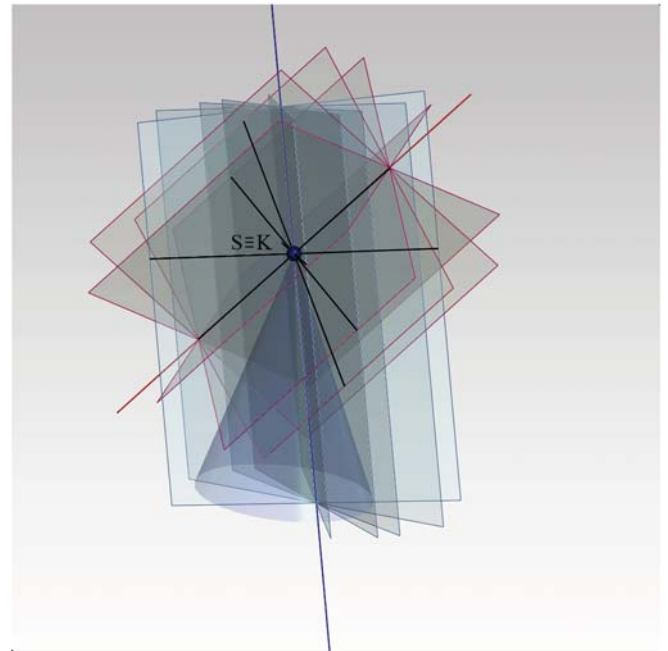
Una superficie di secondo ordine in generale ha tre e soltanto tre diametri tra loro perpendicolari, ed il piano di due qualunque di questi è coniugato al terzo. Tali diametri si dicono assi della superficie e si dicono vertici i loro estremi sulla superficie. I piani diametrali determinati da due qualunque di questi tre assi si dicono piani principali, e rispetto ad essi i punti della superficie sono disposti in simmetria ortogonale; le sezioni di questi piani colla superficie si dicono sezioni principali. Se



41/ Una superficie di secondo ordine in generale ha tre e soltanto tre diametri tra loro perpendicolari, ed il piano di due qualunque di questi è coniugato al terzo (Fiedler). Contemporaneamente il piano v descriverà un fascio di piani proiettivo al fascio di piani δ ed il cui asse sarà la normale n al piano π .

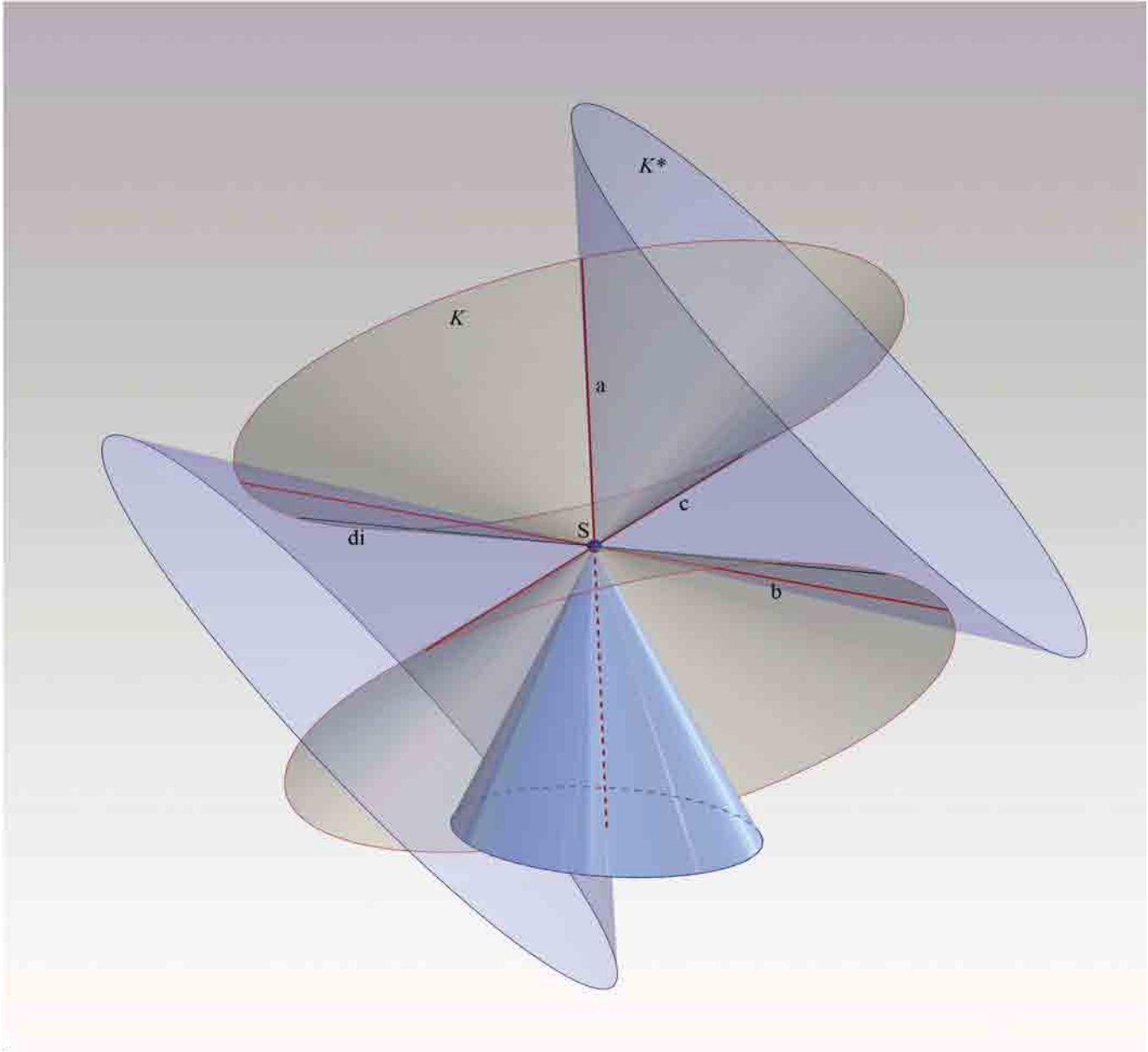
d_i è un diametro della superficie di secondo ordine, δ_i il suo piano diametrale coniugato ed v_i il piano diametrale perpendicolare a quel diametro (fig. 39), mentre d_i ruota in un piano diametrale, descrivendo un fascio di raggi in un piano π , il piano δ_i descrive un fascio di piani, il cui asse d è il diametro coniugato al piano π (fig. 40), contemporaneamente il piano v_i descriverà un fascio di piani proiettivo al fascio di piani δ_i ed il cui asse sarà la normale n al piano π (fig. 41). Le rette di intersezione dei piani di quei due fasci, corrispondenti alle diverse posizioni del diametro d_i , generano un cono K di secondo grado col vertice nel centro S della superficie di secondo ordine, e questo cono ha la proprietà, che ogni sua generatrice è un diametro coniugato e perpendicolare alla corrispondente posizione del diametro d_i della superficie (fig. 42).

Se si considera allora il fascio dei diametri d_i^* di un secondo piano diametrale, a questo piano corrisponde come precedentemente un cono K^* , le cui generatrici sono diametri perpendicolari e coniugati ai corrispon-



42/ Una superficie di secondo ordine in generale ha tre e soltanto tre diametri tra loro perpendicolari, ed il piano di due qualunque di questi è coniugato al terzo (Fiedler). Le rette di intersezione dei piani di quei due fasci, corrispondenti alle diverse posizioni del diametro d_i , generano un cono K di secondo grado col vertice nel centro S della superficie di secondo ordine, e questo cono ha la proprietà, che ogni sua generatrice è un diametro coniugato e perpendicolare alla corrispondente posizione del diametro d_i della superficie.

denti raggi del fascio delle rette d_i^* . Poiché i due fasci delle d_i e d_i^* hanno a comune un diametro nella retta di intersezione dei loro piani, così i coni concentrici K , K^* dei diametri coniugati ed ortogonali ai raggi di quei fasci avranno una generatrice comune perpendicolare e coniugata al detto diametro, e di più si dovranno tagliare almeno in un'altra generatrice reale a , oppure in tre altre generatrici a , b , c . [...] Nel secondo caso le rette a , b , c debbono formare un angolo triedro trirettangolo e costituire il sistema di assi della superficie (fig. 43).



43/ Una superficie di secondo ordine in generale ha tre e soltanto tre diametri tra loro perpendicolari, ed il piano di due qualunque di questi è coniugato al terzo (Fiedler). Se si considera allora il fascio dei diametri \mathbf{di}^* di un secondo piano diametrale, a questo piano corrisponde come precedentemente un cono \mathbf{K}^* , le cui generatrici sono diametri perpendicolari e coniugati ai corrispondenti raggi del fascio delle rette \mathbf{di}^* . Poiché i due fasci delle \mathbf{di} e \mathbf{di}^* hanno a comune un diametro nella retta di intersezione dei loro piani, così i coni concentrici \mathbf{K} , \mathbf{K}^* dei diametri coniugati ed ortogonali ai raggi di quei fasci avranno una generatrice comune perpendicolare e coniugata al detto diametro, e di più si dovranno tagliare almeno in un'altra generatrice reale \mathbf{a} , oppure in tre altre generatrici \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . [...] Nel secondo caso le rette \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} debbono formare un angolo triedro trirettangolo e costituire il sistema di assi della superficie.

Forme proiettive del piano

Teoremi di Pascal e di Brianchon. Conseguenze e costruzioni relative

Siano $A B C D E F$ sei punti presi a piacere su una circonferenza (fig. 44). Unendo in successione i sei punti si ottiene un *esagono semplice* inscritto nella circonferenza. Il *Teorema di Pascal* afferma che, dato un esagono inscritto in un cerchio, i punti L , M ed N , nei quali si incontrano le tre coppie dei lati opposti, sono allineati lungo una stessa retta r . Per questa ragione ogni esagono semplice inscritto nel cerchio viene detto *esagono di Pascal*.

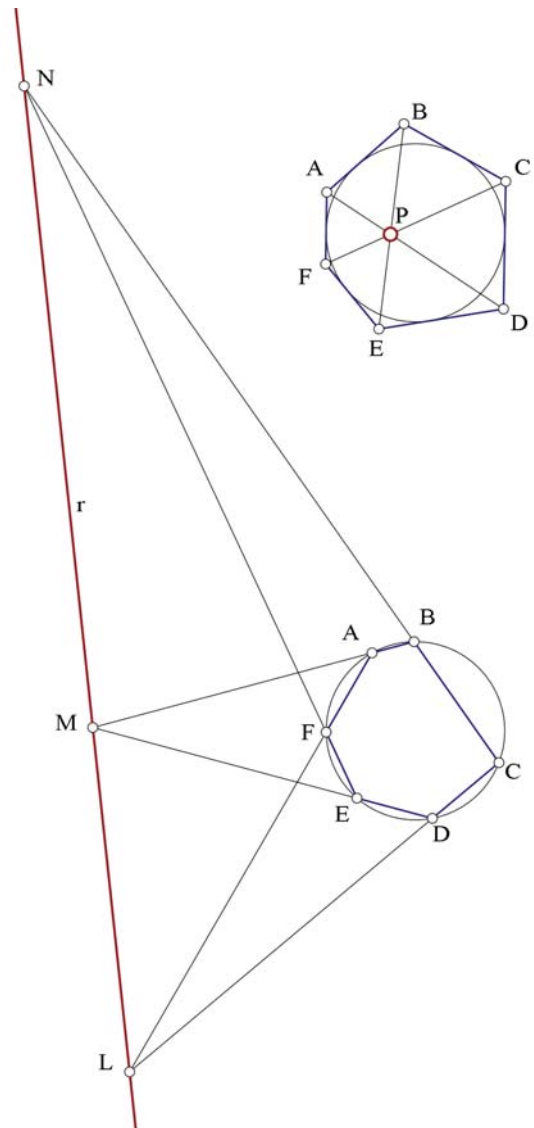
Siano $A B C D E F$ i sei vertici di un esagono semplice circoscritto ad un cerchio dato. Il *Teorema di Brianchon*, correlativo del teorema di Pascal, afferma che, dato un esagono circoscritto al cerchio, le linee congiungenti le coppie di vertici opposti s'incontrano in un medesimo punto P . Per questa ragione, ogni esagono semplice circoscritto al cerchio è un *esagono di Brianchon*.

Le proprietà dell'esagono, descritte dai teoremi di Pascal e Brianchon, sono grafiche, perciò sono invarianti proiettive: ciò significa che le suddette proprietà sussistono anche per l'esagono che è inscritto o circoscritto a una proiezione del cerchio, cioè a una conica. Inoltre proiettando da un centro fuori del piano le due figure anzidette si otterranno i corrispondenti teoremi fra loro correlativi nella stella, relativi ai fasci proiettivi di piani e di raggi della stella stessa. Si otterranno i teoremi degli angoli esaedri di Pascal e di Brianchon nello spazio¹⁹. Rispettivamente tre spigoli diagonali sono in un piano e i tre piani diagonali passano per una stessa retta (vedi figura 24 e 25).

Sappiamo che una conica è individuata da cinque enti dati che possono essere: 5 punti o 5 tangenti; 4 punti e una tangente o viceversa 4 tangenti e un punto di contatto di una di esse; o infine 3 punti e due tangenti o viceversa 3 tangenti e due punti di contatto. In tutti questi casi avremo sempre cinque dati che sono sufficiente per individuare la conica. Nella rappresentazione matematica l'algoritmo che individua una conica in generale è dato da tre punti e due tangenti, allora

I teoremi di Pascal e Brianchon applicati alle coniche insegnano a trovare una qualsiasi tangente in uno dei cinque punti dati o a trovare un qualsiasi altro punto

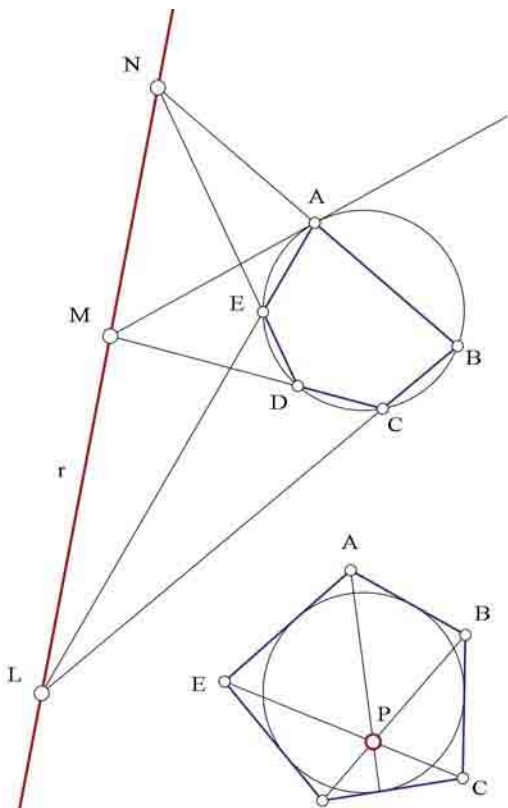
della conica individuata dai cinque enti dati. Nelle descrizioni che seguono sono spiegati i teoremi di Pascal e Brianchon ridotti e le applicazioni alla costruzione di una conica per cinque enti dati.



44/ Il Teorema di Pascal afferma che, dato un esagono inscritto in un cerchio, i punti L , M ed N , nei quali si incontrano le tre coppie dei lati opposti, sono allineati lungo una stessa retta r . Il Teorema di Brianchon, correlativo del teorema di Pascal, afferma che, dato un esagono circoscritto al cerchio, le linee congiungenti le coppie di vertici opposti s'incontrano in un medesimo punto P .

Costruzione di un pentagono semplice inscritto in un cerchio, di un pentagono semplice circoscritto ad un cerchio e loro proprietà proiettive

Consideriamo un esagono di Pascal e immaginiamo che un vertice, ad esempio il punto **B**, scorra sulla circonferenza fino a coincidere con un vertice contiguo, ad esempio **A** (fig. 45): con questo movimento l'esagono si trasforma in un *pentagono semplice* e il lato **AB** dell'esagono nella tangente al cerchio nel vertice **A** del pentagono. Il *Teorema di Pascal* afferma che, in un pentagono inscritto in un cerchio, la tangente in un vertice e il lato opposto, e le altre due coppie di lati non consecutivi s'incontrano in tre punti allineati **L**, **M** ed **N** sulla stessa retta **r**.

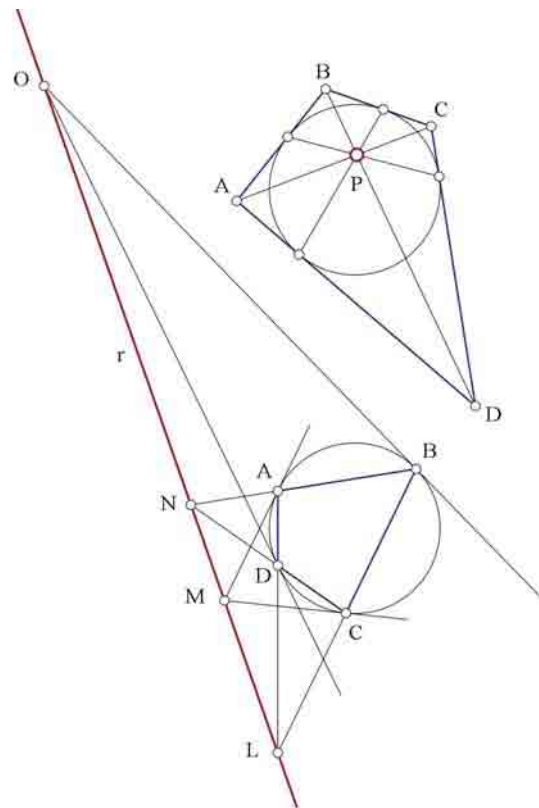


45/ Il Teorema di Pascal afferma che, in un pentagono inscritto in un cerchio, la tangente in un vertice e il lato opposto, e le altre due coppie di lati non consecutivi s'incontrano in tre punti allineati **L**, **M** ed **N** sulla stessa retta **r**. il teorema di Brianchon, in un pentagono semplice circoscritto ad un cerchio la retta che unisce un vertice con il punto di contatto del lato opposto, e le rette che uniscono le altre due coppie di vertici non consecutivi s'incontrano in uno stesso punto **P**.

Per analogia con il teorema di Brianchon, in un pentagono semplice circoscritto ad un cerchio la retta che unisce un vertice con il punto di contatto del lato opposto, e le rette che uniscono le altre due coppie di vertici non consecutivi s'incontrano in uno stesso punto **P**.

Costruzione di un quadrangolo semplice inscritto in un cerchio, di un quadrangolo semplice circoscritto ad un cerchio e loro proprietà proiettive

Se un vertice del pentagono suddetto scorre sulla circonferenza circoscritta fino a sovrapporsi su un vertice contiguo (fig. 46), il pentagono si muta in un quadrangolo e il lato nella relativa tangente al cerchio. Si verifi-

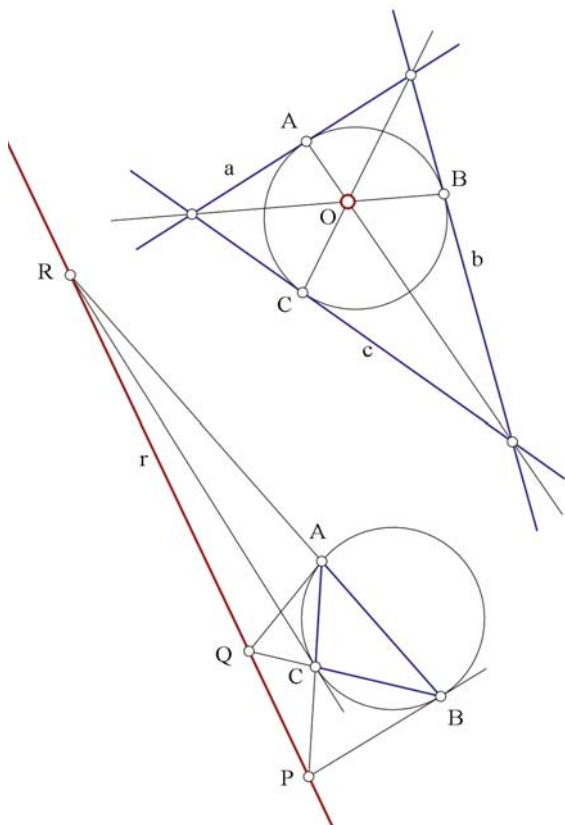


46/ Il Teorema di Pascal afferma che in un quadrangolo semplice inscritto in un cerchio le coppie di lati opposti e le coppie di tangenti dei vertici opposti si segano in punti allineati su una stessa retta **r**. Come teorema duale di Brianchon avremo che: in un quadrilatero semplice circoscritto al cerchio le diagonali e le rette che uniscono i punti di contatto dei lati opposti si segano in uno stesso punto **P**.

ca allora quanto segue: in un *quadrangolo semplice* inscritto in un cerchio le coppie di lati opposti e le coppie di tangenti dei vertici opposti si segano in punti allineati su una stessa retta **r**.

Come teorema duale avremo che: in un quadrilatero semplice circoscritto al cerchio le diagonali e le rette che uniscono i punti di contatto dei lati opposti si segano in uno stesso punto **P**.

Costruzione del triangolo semplice inscritto in un cerchio, di un triangolo semplice circoscritto ad un cerchio e loro proprietà proiettive



47/ Il triangolo può essere considerato un altro caso limiti dell'esagono di Pascal e di Brianchon. Per cui, in un triangolo **A, B, C** inscritto in un cerchio, le tangenti ai vertici e i lati opposti si tagliano in tre punti **P, Q, R** di una stessa retta **r**. Viceversa in un trilatere **a, b, c** circoscritto ad un cerchio le rette che uniscono i vertici coi punti di contatto **A, B, C** dei lati opposti individuano uno stesso punto **O**.

Se supponiamo che tre vertici consecutivi di un esagono semplice inscritto in un cerchio vengano a coincidere, allora avremo un triangolo semplice (fig. 47). Il triangolo può essere considerato un altro caso limiti dell'esagono di Pascal e di Brianchon. Per cui, in un triangolo **A, B, C** inscritto in un cerchio, le tangenti ai vertici e i lati opposti si tagliano in tre punti **P, Q, R** di una stessa retta **r**. Viceversa in un trilatere **a, b, c** circoscritto ad un cerchio le rette che uniscono i vertici coi punti di contatto **A, B, C** dei lati opposti individuano uno stesso punto **O**.

Costruzione della conica per cinque punti dati

Le coniche, come l'ellisse, la parabola o l'iperbole, si possono generare proiettando un cerchio. Perciò le coniche, come il cerchio, sono determinate dalla intersezione di due fasci proiettivi nel piano²⁰: su un cerchio assegniamo due punti qualsiasi **S** ed **S'** e da questi proiettiamo tre ulteriori punti **A, B, C** (fig. 48). Per una nota proprietà del cerchio le rette proiettanti corrispondenti, come **a** ed **a'** o **b** e **b'**, formano lo stesso angolo di ampiezza α , perché capaci dello stesso arco di circonferenza. I due fasci di rette che proiettano i punti della circonferenza sono in corrispondenza omografica. Quindi proiettando da due punti fissi del cerchio un punto variabile su di essa si ottengono due fasci proiettivi. Se si considera il raggio comune proiettivo **s** che passa per i due centri, questo ha come corrispettivo nell'altro fascio la tangente **s'** al cerchio nel punto **S'** proiettato (viceversa se si considera il punto **S** come punto proiettato si deve prendere la tangente in questo punto). La corrispondenza proiettiva tra forme di prima specie è determinata da tre coppie di elementi corrispondenti, di conseguenza, cinque punti nel piano, di cui tre non in linea retta, determinano un'unica conica passante per essi. Infatti, assumendo due di questi punti come centri, con gli altri tre si possono costruire due fasci di tre rette ognuno.

Le proprietà proiettive del cerchio possono quindi essere estese alle coniche²¹. In particolare possiamo verificare i teoremi di Pascal e Brianchon: *ogni esagono semplice inscritto in una conica è un esagono di Pascal; e il suo duale, ogni esagono circoscritto ad una conica è un esagono di Brianchon.*

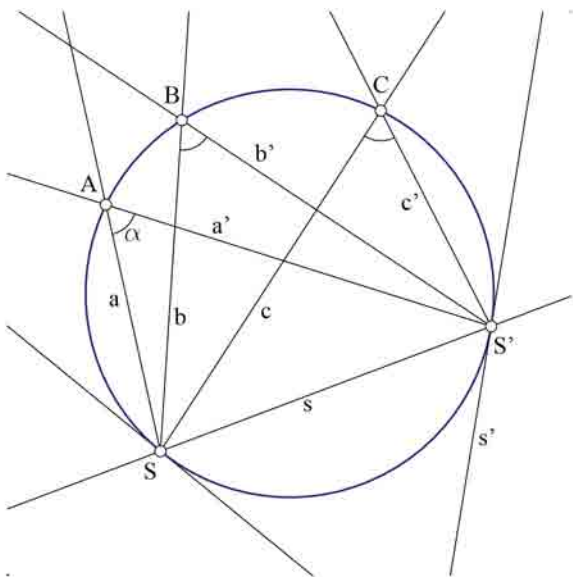
E anche per le coniche, come per il cerchio, sussistono i casi limite e, in particolare, il teorema: *se un pentagono è inscritto in una conica, la tangente in un punto e il lato opposto, e le coppie di lati non consecutivi, si segnano nei punti di una stessa retta.*

Queste considerazioni permettono di costruire la conica che passa per cinque enti dati: cinque punti (o cinque tangenti); quattro punti e la tangente in uno di essi (o quattro tangenti e il punto di contatto di una di esse); tre punti e le tangenti di due di essi (o tre tangenti e i punti di contatto di due di esse).

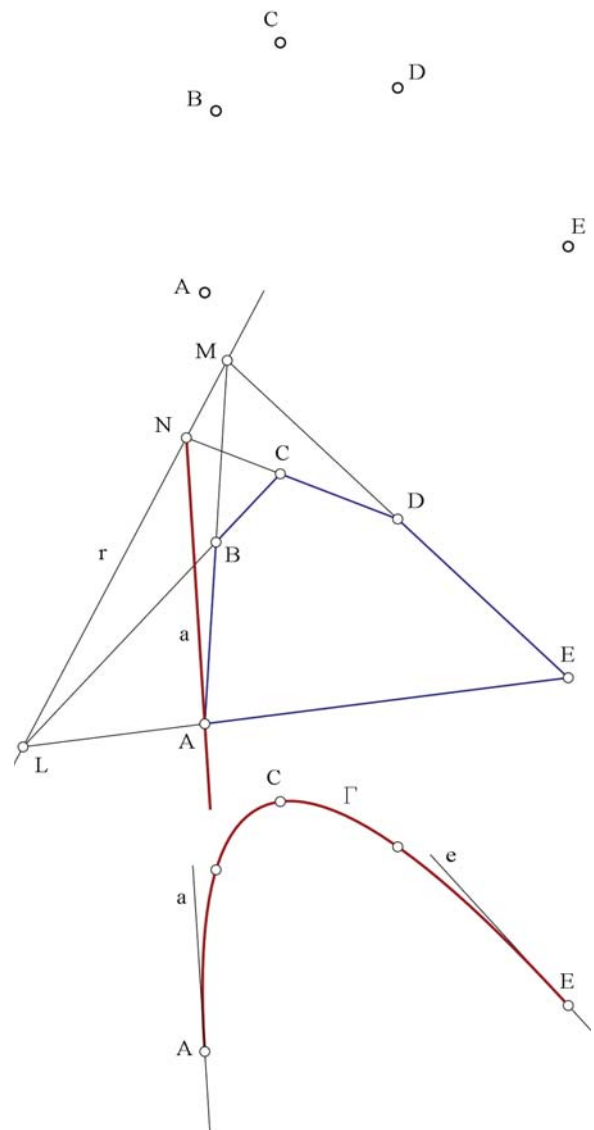
Questo problema è di particolare interesse nella modellazione matematica, dove una conica può essere descritta con un'accuratezza uguale a quella di un cerchio. Considerato che i modellatori consentono di determinare una conica tramite tre punti e due tangenti conviene riportare il problema sempre a questo caso.

Dati cinque punti **A, B, C, D, E** si costruisce il pentagono inscritto nella conica: è sufficiente unire i cinque punti in un ordine a piacere (fig. 49)²². Il teorema

di Pascal, declinato nel caso del pentagono, consente la costruzione di una retta **a** tangente alla conica nel punto **A** considerato (vedi 4.15). Si può pensare il pentagono **ABCDE** inscritto nella figura: il lato **CD**, opposto ad **A**, deve segare la tangente in **A** in un punto **N** che ap-



48/ I due fasci di rette, di centri **S** ed **S'**, che proiettano i punti della circonferenza sono in corrispondenza omografica. Quindi proiettando da due punti fissi del cerchio un punto variabile su di essa si ottengono due fasci proiettivi.



49/ Costruzione della conica dati cinque punti **A, B, C, D, E**.

partiene alla retta individuata dai punti **L** e **M**, che sono comuni ai lati **BC**, **AE** e **AB**, **DE**, rispettivamente. Ripetendo questa costruzione è facile tracciare una seconda tangente alla conica, ad esempio la retta **e** tangente nel punto **E**.

I programmi per la rappresentazione matematica consentono appunto di costruire una conica dati tre punti e due tangenti, che, nel caso in esame, sono: **a**, **A**, **C**, **E**, **e**. La conica generata nell'esempio illustrato è una parabola.

thinkdesign

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, costruisce la spezzata che passa per i punti selezionati, ovvero il pentagono **ABCDE** di Pascal;

Modifica/ Aggiusta curve, consente di estendere le linee selezionate fino al loro punto d'incontro; sapendo che vogliamo determinare la tangente nel punto **A**, s'individuano, per prima cosa, i due punti **L** ed **M** che sono al-

lineati sulla retta **r** di Pascal del pentagono inscritto alla conica; in particolare il punto **L** è dato dall'intersezione dei lati **BC** e **AE**, mentre il punto **M** è dato dall'intersezione dei lati **AB** e **DE**;

Modifica/ Aggiusta curve secondo limiti, consente di estendere il lato **CD**, opposto al punto **A**, fino alla retta **r**; il punto d'intersezione è il punto **N**.

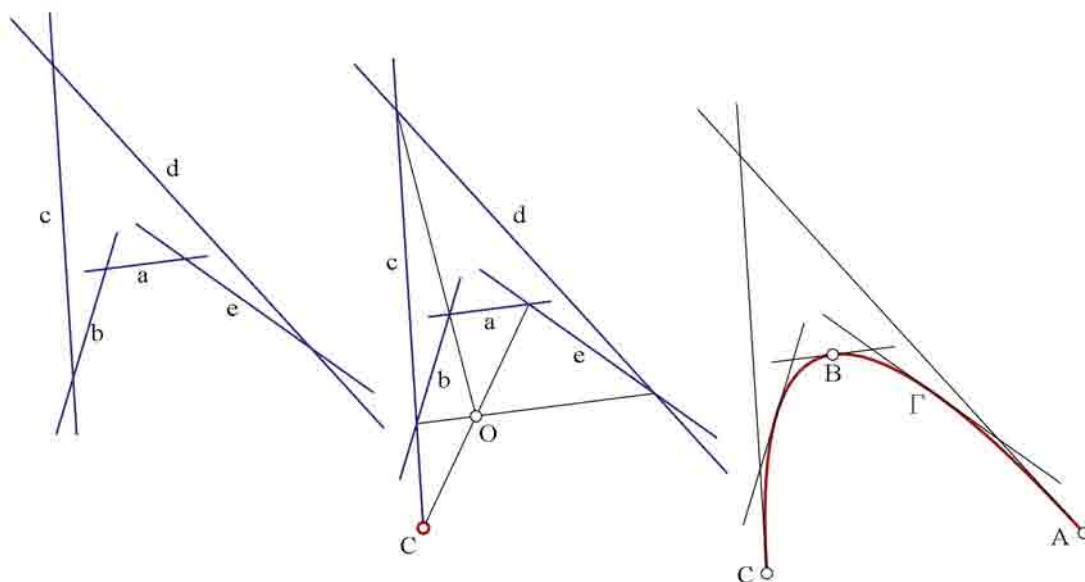
Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, disegna la retta passante per i punti **N** ed **A**, ovvero la tangente **a** nel punto **A** della conica.

La costruzione della tangente **e** nel punto **E** è analoga.

Inserisci/ Curve/ Coniche/ Conica, consente di disegnare la conica Γ che passa per i tre punti **A**, **C** ed **E** e ammette le tangenti **a** ed **e** nei punti omonimi.

Costruzione della conica per cinque tangenti

Cinque rette in un piano determinano una conica. Per costruire la conica è necessario riportare il problema enunciato alla curva passante per tre punti e due tan-



50/ Costruzione della conica date cinque tangenti **a**, **b**, **c**, **d**, **e**.

genti. Per fare ciò si utilizza il teorema di Brianchon ridotto al pentagono. Questo teorema serve a determinare il punto di contatto di una qualsiasi delle tangenti che involuppano la conica cercata.

Siano date cinque rette **a**, **b**, **c**, **d**, **e** (fig. 50) e si voglia determinare il punto di contatto **C** della retta **c**. Nel pentagono considerato in figura la retta che unisce il vertice **ae**, opposto a **C**, ed il punto di contatto di **c**, e le altre due coppie di rette che uniscono i vertici opposti **ab**, **dc** e **cb**, **de**, si tagliano in uno stesso punto **O**. Per cui la retta che unisce il vertice **ae** con **O** segnerà la retta **c** nel punto di contatto **C**. Ripetendo la costruzione per altri due punti **A** e **B**, è possibile costruire la conica **G** tangente alle cinque rette date (attraverso il comando conica per tre punti e due tangenti). La conica soluzione nell'esempio è una parabola.

thinkdesign

Modifica/ Aggiusta curve, consente di estendere le linee selezionate fino al loro punto d'incontro; disegniamo il pentagono formato dalle linee **a**, **b**, **c**, **d**, **e**;

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, disegna la retta passante per i vertici opposti **ab**, **dc** e **cb**, **de**; le due rette

individuano un punto **O**; disegniamo la retta che passa per il punto **O** e il vertice **ea**;

Modifica/ Aggiusta curve, consente di estendere la retta suddetta fino al punto di contatto **C** con la retta **c**;

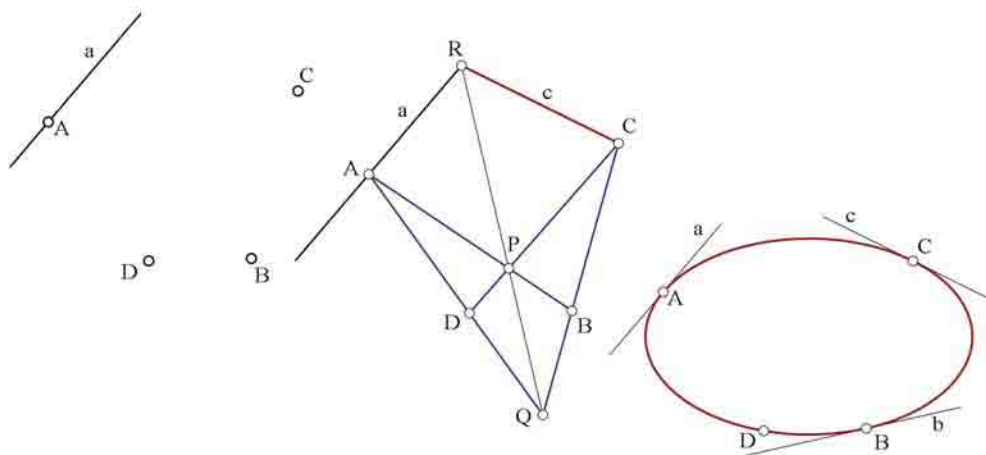
La costruzione dei punti di contatto **A** ed **B** è analoga al punto **C**.

Inserisci/ Curve/Coniche/Conica, consente di disegnare la conica Γ che passa per i tre punti **A**, **B** ed **C** e ammette le tangenti **a** ed **d**.

Costruzione della conica per quattro punti e la tangente in uno di essi

Dati quattro punti di una curva conica e la tangente in uno di essi è possibile costruire la tangente in un altro dei tre punti dati. Per fare ciò applichiamo il teorema dell'esagono di Pascal al quadrilatero inscritto.

Siano dati i punti **A**, **B**, **C**, **D** e la tangente **a** in **A** (fig. 51). Vogliamo costruire la tangente **c** in **C**. Disegniamo un quadrilatero in modo da avere i punti **A** e **C** opposti. Le coppie di lati opposti **AB**, **CD** e **AD**, **CB** s'intersecano nei punti diagonali **P** e **Q**. I punti **PQ** individuano



51/ Costruzione della conica per quattro punti **A**, **B**, **C**, **D** e la tangente **a** in uno di essi.

una retta in cui si tagliano le tangenti in **A** e **C**. Per cui la retta **a** taglia nel punto **R** la retta **PQ**. La tangente **c** in **C** è così determinata, perché è il segmento che unisce i punti **CR**. Nella figura i punti determinano un'ellisse, quindi è conveniente ripetere la costruzione per altri punti in modo da poter disegnare l'intera curva in tre tratti. E' possibile, finalmente, costruire la conica che passa per i quattro punti **A, B, C, D** e le tre tangenti **a, b** e **c**.

thinkdesign

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, costruisce il quadrilatero **ABCD**.

Modifica/ Aggiusta curve, estende gli spigoli **AD** e **BC** per determinare il punto **Q**. Il punto **P** intersezione degli altri due lati già è determinato.

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, costruisce la retta **PQ**. Sappiamo che le tangenti in **A** e in **C** si devono tagliare in un punto della retta **PQ**. Per cui prolunghiamo la tangente **a** fino ad incontrare nel punto **R** la retta **PQ**. La tangente **c** in **C** è la retta che unisce i punti **CR**.

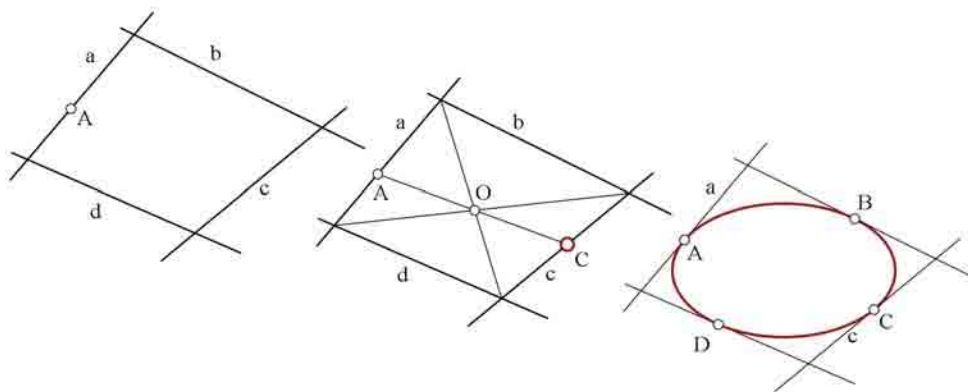
E' possibile ripetere la costruzione per trovare un'altra tangente **b** nel punto **B**.

Inserisci/ Curve/ Coniche/ Conica, consente di disegnare la conica Γ che passa per i tre punti **A, B, D** e le tangenti **a** e **b**. Si ripete la costruzione per i rami che passano per i punti **A, C** e **B**.

Costruzione della conica per quattro tangenti e il punto di contatto in una di esse

Date quattro rette d'involuppo e il punto di contatto di una di esse è possibile determinare il punto di contatto di una delle tre rette tangenti. Utilizziamo il teorema dell'esagono di Brianchon applicato al quadrilatero.

Siano date quattro rette **a, b, c, d** e il punto **A** di contatto della retta **a** (fig. 52). Vogliamo determinare il punto **C** di contatto della retta **c**. Si considera un quadrilatero formato dalle rette date in modo da avere i lati **a** e **c** opposti. Sappiamo che le diagonali di un quadrilatero si devono tagliare in un punto **O** in cui debbono tagliarsi le rette che uniscono i punti di contatto dei lati opposti.



52/ Costruzione della conica per quattro tangenti **a, b, c, d** e il punto di contatto **A** in una di esse.

Una volta disegnate le due diagonali e determinato il punto **O**, è sufficiente unire il punto **A** con il punto **O** e la retta **AO** segnerà il lato **c** nel suo punto di contatto **C**. Si può ripetere la costruzione per trovare altri due punti di contatto **B** e **D**, in modo da poter disegnare la conica intera (che nel caso della figura è un'ellisse) che passa per i quattro punti **A, B, C, D** e le quattro tangenti **a, b, c, d**.

thinkdesign

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, costruisce le due diagonali del quadrilatero **abcd**, che individuano il punto **O**. Dal punto **A** stacciamo il segmento che passa per il punto **O**. Questo interseca il lato opposto **c** nel punto di contatto **C** cercato.

Si ripete la costruzione per trovare gli altri due punti **B** e **D** di contatto. Ora possiamo disegnare la conica come curva per tre punti e due tangenti.

Inserisci/ Curve/ Coniche/ Conica, consente di disegnare la conica Γ che passa per i tre punti **A, B** e **C** e le tangenti **a** e **c**. Si ripete la costruzione per i rami che passano per i punti **A, D** e **C**.

Dati cinque punti di una conica trovare un altro punto della conica

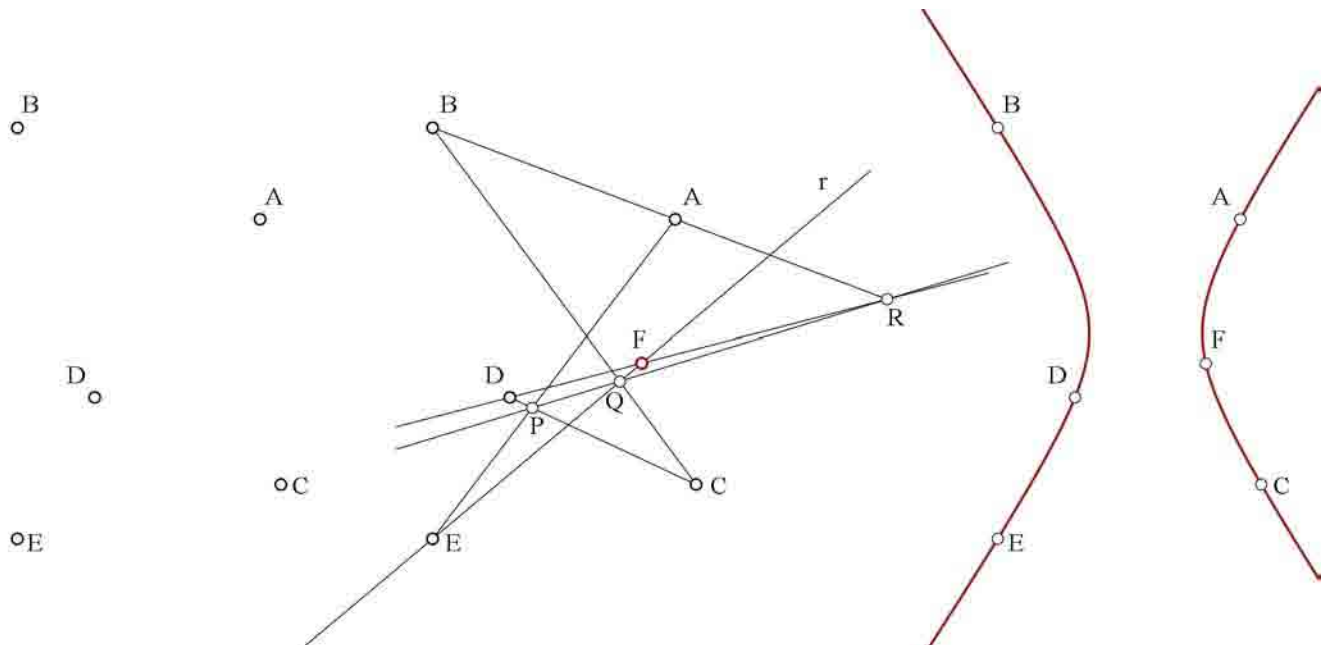
Siano dati cinque punti **A, B, C, D, E**. Vogliamo trovare un sesto punto **F** che appartiene alla conica individuata dalla cinquina di punti dati. Il teorema di Pascal consente di trovare un qualsiasi altro punto della conica Γ .

Questa costruzione è di apprezzabile efficacia nell'ambiente informatico in un caso particolare: quando i cinque punti sono dati a caso e appartengano sì ad una conica, ma non allo stesso ramo della curva (ove questa sia digrammica); in altre parole quando i punti appartengono ai due rami dell'iperbole Γ . In questo caso, infatti, non sarà possibile tracciare la singola curva passante per i cinque punti dati perché non esiste. Esiste, invece, la conica iperbole che è sempre una figura omologica del cerchio ma è formata da due curve distinte e simmetriche. Nel caso appena descritto, alcuni dei cinque punti dati potranno appartenere al primo ramo dell'iperbole e gli altri, viceversa, al secondo. Per verificare la condizione descritta e costruire i due rami, occorrerà costruire i punti necessari per disporre di almeno tre

punti per ogni ramo dell'iperbole. Ad esempio, se sono dati tre punti su un ramo e due su un altro, basta costruire un solo punto; se, invece, sono dati quattro punti su un ramo e uno sull'altro, saranno necessari due nuovi punti. In questo modo per i sei o sette punti complessivi sarà possibile condurre i due rami dell'iperbole. Questa costruzione è uno strumento di verifica semplice e veloce della condizione descritta ed è un metodo rigoroso per determinare, attraverso il disegno, la conica individuata da cinque punti.

Sono dati cinque punti **A, B, C, D, E** (fig. 53). Osservando la figura, è facile comprendere che per questi punti non può passare né un'ellisse, né una parabola e intuire che i punti **B, D** ed **E** appartengono ad un ramo dell'iperbole e i punti **A** e **C** al ramo opposto. È altresì evidente, che per costruire il ramo dell'iperbole che passa per **A** e per **C** occorre un sesto punto **F**. I cinque punti dati individuano uno dei possibili pentagoni di Pascal che ha per lati i segmenti **AB, BC, CD, DE, EA**. Inserendo una retta **r** arbitraria, che esce da uno dei cinque punti dati, e posto che a questa retta appartenga un sesto punto **F** della conica, il pentagono suddetto, si trasforma in uno degli infiniti esagoni di Pascal inscrittibili nella conica stessa. Posto che si vuole costruire un punto appartenente al ramo **AD** dell'iperbole, conduciamo per il punto **E** una retta **r**, che rappresenta un lato dell'esagono di Pascal. Partendo dal punto **E** costruiamo parte dell'esagono di Pascal di lati **EA, AB, BC, CD**. È importante nella scelta dell'esagono che i punti **E** ed **F** siano consecutivi (il verso non ha importanza).

Consideriamo ora il lato **AE** e il lato terzo consecutivo, suo opposto, che è il lato **CD**, sia che nel conteggio dei lati si segua il verso orario che quello antiorario. **AE** e **CD** sono dunque opposti e perciò si incontrano in un punto **P** della retta di Pascal. Consideriamo ora il lato **r**, uscente da **E** e il terzo consecutivo suo opposto, che è **BC**: questi due lati si incontrano in un punto **Q** della retta di Pascal, che resta così individuata: **PQ**. I due lati opposti dell'esagono, che ancora non abbiamo considerato, sono **AB** e l'incognito **FD**. Ma sappiamo che questi due lati debbono incontrarsi nel punto **R** che **AB** ha in comune con la retta di Pascal. Dunque il lato **DF** passa per **R** e, perciò, il punto **F** resta individuato come intersezione della retta **r** con la retta **DR**. È possibile pure



53/ Dati cinque punti **A, B, C, D, E** di una conica trovare un altro punto **F** della conica. Questa costruzione è di apprezzabile efficacia nell'ambiente informatico in un caso particolare: quando i cinque punti sono dati a caso e appartengono sì ad una conica, ma non allo stesso ramo della curva (ove questa sia digrammica); in altre parole quando i punti appartengono ai due rami dell'iperbole **G**.

osservare l'esagono di Pascal completato **ABCDFE**. Una volta trovato il punto **F**, possiamo costruire le tangenti nei punti **E** e **B** e nei punti **C** ed **A** (vedi 4.24), e applicare la costruzione della conica passante per tre punti e due tangenti al fine di ottenere i due rami dell'iperbole.

thinkdesign

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, costruisce la retta **r** passante per **E**. Costruisce i lati del poligono di Pascal che passa per i punti selezionati, ovvero **EABCD**.

Inserisci/ Punto/ Su intersezione di curve/superfici, costruisce i due punti **P** e **Q**; sono rispettivamente le intersezioni dei lati opposti **AE** e **CD**, e dei lati opposti **r** e **CB**.

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, costruisce la retta di Pascal che passa per i punti **P** e **Q**;

Modifica/ Aggiusta curve, estende la retta **AB** fino al punto **R** intersezione con la retta di Pascal (**PQ**);

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, costruisce la retta **RD** individuando il punto **F** intersezione con la retta **r**.

Adesso si costruiscono le tangenti nei punti **B** ed **E** per poter disegnare il ramo di iperbole passante per i tre punti **B, E, D** (vedi 4.24).

Inserisci/ Curve/Coniche/Conica, dati per i tre punti **B, E** e **D** e le due tangenti in **B** ed **E**, consente di disegnare il ramo della conica Γ .

Per costruire il secondo ramo di iperbole passante per i tre punti **A, C** ed **F** si ripetono le ultime due operazioni anzidette. Ovvero si trovano le due tangenti in **A** e **C** e si applica il comando conica per tre punti e due tangenti (vedi 4.24).

Costruzione della conica dati due fasci prospettivi

Sappiamo che la curva proiezione di un cerchio è una conica e che due fasci di rette proiettivi s'intersecano in una conica e che due fasci di rette proiettivi s'intersecano in una conica. Quindi una conica è il prodotto di due fasci proiettivi. Il modellatore consente di verificare sperimentalmente che, dati due fasci prospettivi, è possibile determinare una conica traslando e ruotando i due fasci nel piano. L'intersezione delle rette corrispondenti darà luogo ai punti della conica. Per fare ciò si costru-

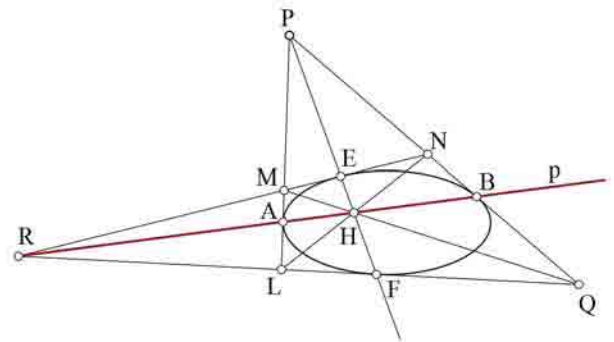
scono due fasci prospettivi generici di centri S' ed S'' , con le rette corrispondenti a', b', c', d', e' ed a'', b'', c'', d'', e'' (vedi fig. 15). Sarebbe sufficiente prendere solo tre coppie di rette corrispondenti per determinare una conica, dato che sono sufficienti cinque punti per determinarla. Lo scopo, però, è verificare che, per quei due fasci proiettivi (traslati e ruotati liberamente), passi effettivamente un'unica conica. Per cui conviene prendere almeno un'altra coppia di rette. Una volta disegnati i due fasci prospettivi, riferiti ad una medesima retta di sostegno p , si possono traslare e ruotare liberamente nel piano conservando sempre la relazione di proiettività. I due fasci non saranno più prospettivi ma saranno comunque due fasci proiettivi, per cui sarà possibile passare da una forma ad un'altra per mezzo di un numero finito d'operazioni di proiezione e sezione. Intersecando i due fasci, le coppie di rette corrispondenti s'incontrano in punti di una conica, ad esempio a' e a'' in A e così via. Una volta determinati i sette punti A, B, C, D, E, S', S'' è possibile costruire la conica che passa per essi utilizzando le considerazioni precedenti. Nell'esempio della figura la conica determinata dai fasci proiettivi è un'ellisse.

Sistema polare rispetto ad una conica

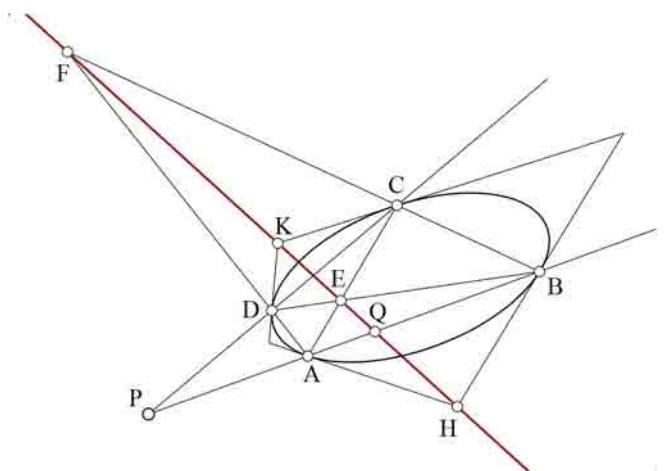
Un cerchio divide il piano in due regioni. L'una è composta da tutti i punti da cui non è possibile tracciare una tangente al cerchio (parte interna) e l'altra da tutti i punti da cui è possibile tracciare sempre due tangenti al cerchio (parte esterna). Questa proprietà appartiene anche alle coniche in generale, per cui una conica qualunque divide il piano in due regioni: una di punti interni alla linea e l'altra di punti esterni. E non si può passare da una regione all'altra senza attraversare la linea. Da quanto detto si deduce che una tangente di una conica è composta da tutti i punti esterni alla linea. Inoltre una retta t del piano potrà incontrare la conica in due, uno o non avere nessun punto di contatto con essa. Esiste in proiettiva una relazione fra un punto del piano e una conica di esso o fra una retta del piano e la conica e questa relazione è nota come *sistema polare ad una conica*.

Costruzione della retta p polare del punto P rispetto alla conica

Sia P un punto esterno ad una conica e siano A, B i punti di contatto delle due tangenti staccate dal punto P (fig. 54). Sia AB una retta p del piano che venga tagliata da un'altra retta in H , condotta sempre da P , e intersecante la conica in altri due punti E ed F . Conduciamo le tangenti in E ed F alla conica. Le rette tangenti s'intersecano in un punto R appartenente alla retta p . Le diagonali MQ ed NL del quadrangolo circoscritto alla conica s'incontrano nello stesso punto H individuato



54/ Costruzione della retta p polare del punto P rispetto alla conica.



55/ Costruzione alternativa della retta p polare del punto P rispetto alla conica.

prima. La forma **PHEF** è armonica, ovvero tracciando la retta per i punti **EHF** è possibile individuare il punto **P** come quarto armonico di **H** rispetto alla coppia **EF**. Allora un punto **P** esterno ad una conica e la retta **AB** che unisce i punti di contatto delle tangenti condotte dal punto stesso, sono divisi armonicamente da ogni coppia di punti ove una trasversale condotta da **P** sega la conica.

E' possibile individuare la retta **p** in un altro modo (fig. 55). Sia data una conica e un punto **P** non appartenente alla conica (può essere interno o esterno non cambiano le proprietà). Da **P** conduciamo due rette qualsiasi a intersecare la conica nelle coppie di punti **A, B** e **C, D**. I punti **ABCD** sono i vertici di un quadrangolo semplice. **P** è un punto diagonale e gli altri due punti **E** ed **F** individuano la retta **p** che col punto **P** separa armonicamente le coppie di punti in cui le trasversali condotte da **P** segano la conica. Inoltre le rispettive tangenti ai vertici **A, B, C, D** del quadrangolo inscritto alla conica s'incontrano in due punti **H, K** della retta **p**.

Da quanto detto è evidente che la retta **p** è individuata da una sola trasversale condotta per **P** a tagliare la conica in due punti **AB**. Infatti il punto **Q** è il quarto armonico di **P** rispetto alla coppia di punti **A, B**. E' sufficiente costruire le tangenti nei punti **A** e **B** e individuare la retta **p** come congiungente i punti **H** e **Q**.

*La retta **p** è detta la polare del punto dato **P**. Ogni punto **P** del piano ha rispetto ad una conica data una determinata polare **p** determinata dalle seguenti costruzioni:*

*la retta formata dai coniugati armonici di **P** rispetto ai punti in cui la secante per **P** taglia la conica;*

*la retta formata dai punti diagonali dei quadrangoli inscritti al cerchio in cui due vertici opposti sono allineati con **P**;*

*la retta formata dai punti intersezione delle tangenti condotte alla conica nei punti staccati su di essa dalle secanti che escono da **P**;*

*La retta polare di un punto esterno ad una conica è la congiungente i due punti di contatto delle tangenti staccate dal punto **P** stesso alla conica. La polare di un punto che appartiene alla conica è la tangente nel punto stesso.*

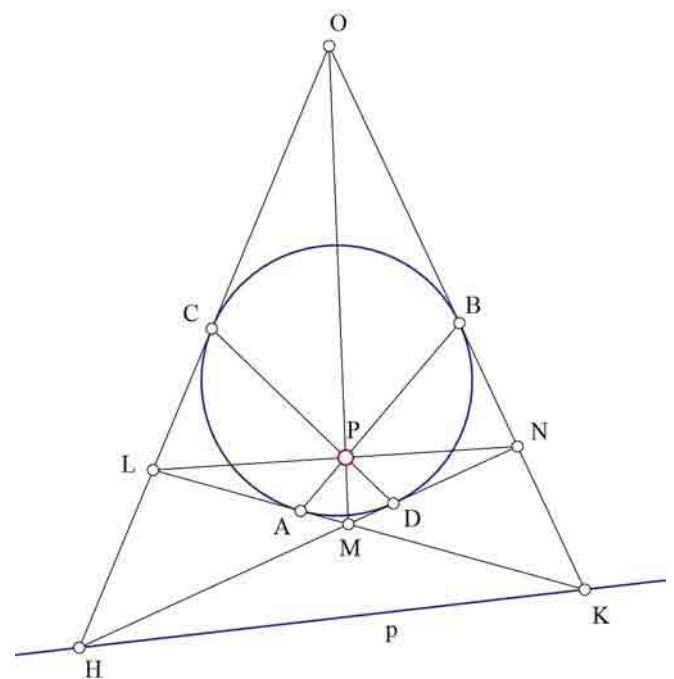
2.11 – Costruzione del punto **P** detto polo della retta **p** rispetto al cerchio

Siano dati una retta **p** e una conica. Prendiamo due punti **H** e **K** sulla retta **p** e costruiamo le due coppie di tangenti al cerchio (fig. 56). Le due diagonali **OM** e **LN** del quadrilatero formato dalle coppie di tangenti e le due rette che uniscono i punti di contatto **AB** e **CD** s'incontrano in uno stesso punto **P**. Il punto **P** potrebbe essere individuato anche solo per mezzo del punto **H**, costruendo il fascio armonico di rette che passano per i punti **KPMO**.

*Il punto **P** è detto il polo della retta **p** rispetto alla conica e può essere definito come:*

*il punto dove si tagliano le coniugate armoniche della retta **p** rispetto alle coppie di tangenti alla conica condotte dai punti appartenenti a **p**;*

*il punto intersezione delle diagonali dei quadrangoli circoscritti alla conica e aventi i lati incidenti in punti appartenenti a **p**;*



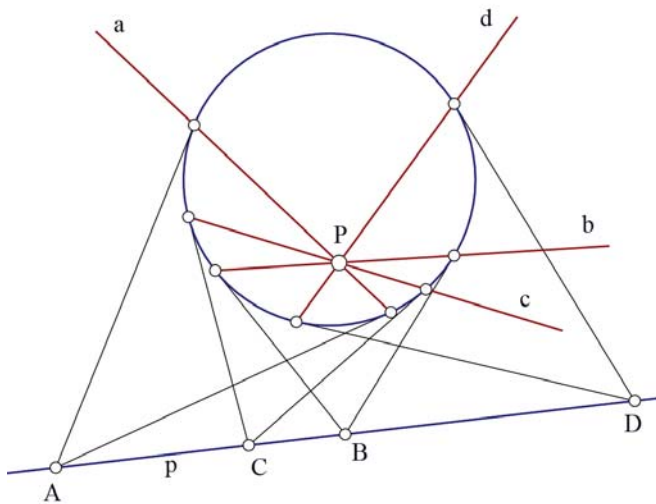
56/ Costruzione del punto **P** detto polo della retta **p** rispetto alla conica.

il punto dove s'incontrano le rette che uniscono i punti di contatto delle tangenti condotte dalla retta p .

Il polo di una retta tangente alla conica è il punto di contatto stesso.

In virtù di quanto è stato detto, dato una conica, ad ogni punto del piano corrisponde una retta polare e viceversa ad ogni retta corrisponde un polo. Se p è la polare di un punto P allora il punto P è il polo della retta p . Esiste una corrispondenza univoca fra i punti e le rette del piano che si dicono polari reciproche rispetto alla conica. Resta valido il principio di dualità nel piano, per cui ad una retta una punteggiata armonica corrisponde un fascio armonico di rette che passa per il punto polare della retta punteggiata. Le due forme sono proiettive. Se un punto percorre una retta p , la retta polare corrispondente ruota attorno al polo P della retta percorsa, cioè descrive un fascio di raggi che ha per centro il polo della retta (fig. 57).

Costruzione del polo di una retta rispetto ad un cerchio:



57/ Se un punto percorre una retta p , la retta polare corrispondente ruota attorno al polo P della retta percorsa, cioè descrive un fascio di raggi che ha per centro il polo della retta.

thinkdesign

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, costruisce la retta tangente dal punto H al punto di contatto con il cerchio D; si ripete la costruzione per la seconda tangente HC.

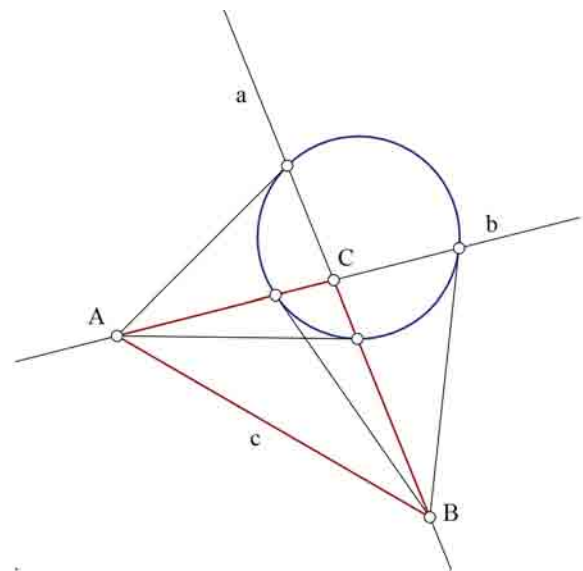
Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, costruisce la retta polare DC di H rispetto al cerchio unendo i due punti di contatto.

Si ripete la costruzione per un altro punto K della retta data.

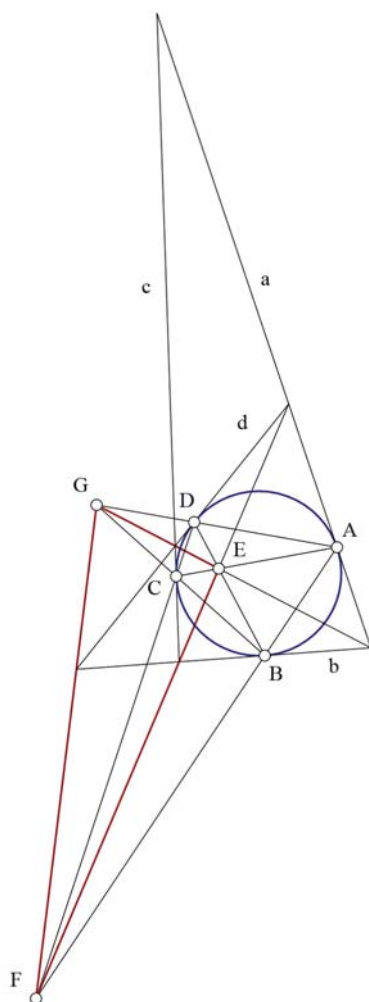
Inserisci/ Punto/ Su intersezione di curve/superfici, costruisce il punto polo P intersezione delle diagonali DC e AB.

Costruzione del triangolo polare rispetto ad un cerchio (o ad una conica generica)

Dati due punti e un cerchio, se l'uno giace sulla retta polare dell'altro e viceversa oppure, se date due rette e un cerchio l'una passa per il polo dell'altra, i punti e le rette in questa particolare posizione si dicono *armonici* o *coniugati* rispetto al cerchio.



58/ Un triangolo coniugato o polare rispetto al cerchio è formato da vertici che sono tutti poli rispettivi dei lati opposti.



59/ Sia dato un cerchio si costruisca il quadrangolo inscritto **ABCD**. I punti **EFG** dove si segano le diagonali e i lati opposti si dicono *punti diagonali*. Il triangolo formato dai tre punti diagonali è chiamato *triangolo diagonale*.

Un *triangolo coniugato* o *polare* rispetto al cerchio è formato da vertici che sono tutti poli dei lati opposti. Dato un cerchio, costruire un triangolo polare è semplice (fig. 58): si prende un punto **A** qualsiasi del piano e si costruisce la polare **a** (vedi 4.15). Da un punto **B** della polare **a** così disegnata si trova la retta polare **b** corrispondente. Le due rette polari s'intersecano nel polo **C** dello spigolo **c** passante per i due punti **A** e **B**.

Il triangolo **ABC** è un triangolo polare. In un quadrangolo completo inscritto al cerchio e in un quadrilatero completo circoscritto al cerchio, il triangolo diagonale è un triangolo polare, se i lati del quadrilatero sono le tangenti nei vertici del quadrangolo, e i loro triangoli diagonali coincidono in unico triangolo polare.

Sia dato un cerchio si costruisca il quadrangolo inscritto **ABCD** (fig. 59). I punti **EFG** dove si segano le diagonali e i lati opposti si dicono *punti diagonali*. Il triangolo formato dai tre punti diagonali è chiamato *triangolo diagonale*. La polare del punto **F** rispetto al cerchio è la retta **GE**, così come **FE** è la polare di **G** e **FG** è la polare di **E** (vedi 4.15). Quindi il triangolo **EFG** è un triangolo polare. E' facile verificare che **EFG** è il triangolo diagonale e polare anche del quadrilatero circoscritto **abcd**.

thinkdesign

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, costruisce il quadrangolo **ABCD** inscritto nel cerchio, lo snap *punto su curva* individua un punto scelto sulla curva selezionata.

Modifica/ Aggiusta curve, estende gli estremi delle rette dei lati opposti del quadrangolo fino ai punti d'intersezione **F** e **G**.

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, costruisce il triangolo diagonale passante per i punti diagonali **E**, **F** e **G**.

Strumento/ Disegno/ Info/Analisi/ Locale, costruisce le tangenti **abcd** nei punti **ABCD** del cerchio selezionato. *Modifica/ Aggiusta curve*, estende gli estremi delle rette dei lati opposti del quadrilatero fino ai punti d'intersezione.

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, costruisce le tre diagonali del quadrilatero **abcd** unendo i vertici opposti;

Inserisci/ Punto/ Su intersezione di curve/superfici, costruisce i tre punti che individuano le diagonali; è possibile verificare che i punti trovati coincidono con i punti **EFG**.

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, costruisce i lati del triangolo polare **EFG**.

Costruzione del parallelogramma inscritto nel cerchio, del parallelogramma circoscritto nel cerchio e di due suoi diametri coniugati

Due rette che passano l'una per il polo dell'altra si dicono *rette coniugate*²³. Due diametri che passano l'uno

per il polo dell'altro si dicono anch'essi coniugati. Un diametro, infatti, non è altro che la retta polare di una direzione del piano (o 'punto all'infinito') come il centro è il polo di una giacitura (o 'retta all'infinito'). Quando due diametri sono coniugati vuol dire che ognuno passa nel polo dell'altro. Questa condizione nel cerchio determina che i diametri coniugati siano sempre perpendicolari fra loro. Un diametro coniugato taglia a metà tutte le corde parallele all'altro diametro e viceversa. La tangente agli estremi di un diametro coniugato sono parallele al diametro stesso. Perciò: in un parallelogrammo **pqrs** circoscritto al cerchio, le diagonali sono sempre due diametri coniugati che si tagliano nel centro del cerchio **C** (fig. 60); un parallelogrammo **PQRS** inscritto al cerchio è sempre un rettangolo in cui le diagonali si tagliano sempre nel centro **C** e i lati sono paralleli a due diametri coniugati.

Costruzione del parallelogrammo circoscritto al cerchio:

thinkdesign

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, da un punto esterno qualsiasi alla circonferenza conduciamo due tangenti **p** e **q** al cerchio.

Inserisci/ Disegno/ Linea/ Parallele, costruiamo il diametro coniugato che passa per il centro **C** e per il punto intersezione degli spigoli **pq**; sappiamo che le diagonali del parallelogrammo sono due diametri coniugati e quindi sono perpendicolari fra loro. Allora basta costruire l'altro diametro coniugato per **C** perpendicolare al primo, e i punti intersezione con i lati **p** e **q** daranno i vertici del parallelogrammo circoscritto. Disegniamo, infine, i lati **r** ed **s**, passanti per i vertici trovati, paralleli ai lati **p** e **q**.

Costruzione del parallelogrammo inscritto:

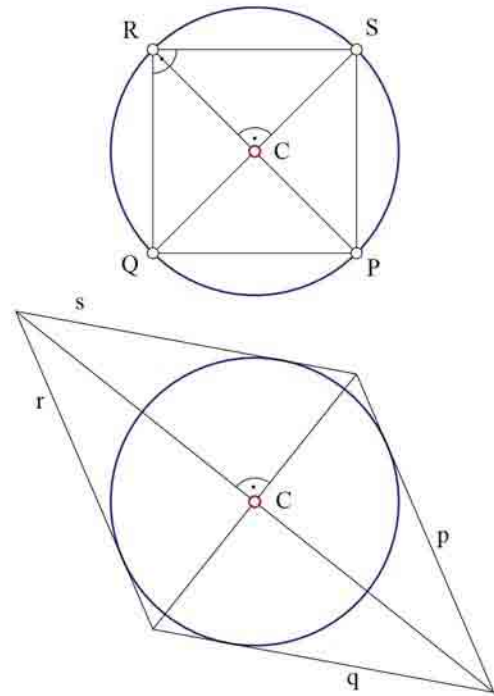
thinkdesign

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, da un punto del cerchio **P** tracciamo una corda qualsiasi **PQ**.

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, dal punto **Q** disegniamo un diametro coniugato **QS**. Sappiamo che questo dovrà passare per il centro **C**.

Inserisci/ Disegno/ Linea/ Parallele, dal punto **S** conduciamo la parallela **SR** a **PQ**.

Inserisci/ Disegno/ Linea/ 2 Punti, costruiamo gli spi-



60/ Costruzione del parallelogrammo inscritto nel cerchio, del parallelogrammo circoscritto nel cerchio e di due suoi diametri coniugati.

goli rimanenti; è possibile verificare che il parallelogrammo inscritto è un rettangolo.

Centro, diametri, assi delle coniche

Le coniche, tranne la parabola, sono dotate di un punto centrale **O** al finito. Ovvero la retta all'infinito potrà tagliare i due punti distinti o non tagliare la conica. Nel primo caso il polo **O** è un punto esterno alla curva conica che è un'iperbole e sarà l'incontro dei due asintoti. Nel secondo caso sarà un punto interno all'ellisse e al cerchio. Come per il cerchio ogni retta passante per il centro **O** è un diametro. E come per il cerchio il polo del diametro è il punto della retta all'infinito. Si può anche dire che un diametro è la polare di un punto all'infinito. Una corda è un segmento che unisce due punti qualsiasi di una conica e da quanto detto si può dedurre:

- Un diametro contiene i punti di mezzo delle cor-

de fra loro parallele, che si dirigono al polo del diametro;

- Un diametro contiene i punti di mezzo di tutte le corde ad esso coniugate.
- Le tangenti alle estremità di un diametro sono parallele. Viceversa se le tangenti alle estremità di una corda sono parallele, la corda è un diametro, perché il suo polo è un punto della retta all'infinito. I diametri si tagliano tutti a metà nel punto O . Allora se due corde si tagliano a metà, quelle sono due diametri e il punto intersezione è il centro O .

Si capisce che il centro O è un punto di simmetria per le coniche. Ovvero ogni punto M della conica avrà il suo corrispettivo simmetrico N sulla retta MO . I due segmenti MO ed NO sono uguali in lunghezza.

Data una conica, o un tratto di conica, è possibile individuare il centro O attraverso le proprietà delle corde. E' sufficiente disegnare due corde parallele e unire con una retta i punti centrali P e Q delle due corde. La retta PQ è un diametro della conica. Si ripete la costruzione con altre due corde parallele. Il punto intersezione dei due diametri così disegnati è il punto centrale O .

In una conica di centro O , due diametri coniugati si tagliano a metà e tagliano a metà le corde parallele all'altro diametro. Nell'iperbole dei due diametri coniugati l'uno taglia la linea e l'altro non la taglia. Nell'ellisse e nel cerchio tutti i diametri coniugati fra loro tagliano la linea. Questo perché nell'iperbole il centro O è un punto esterno alla conica.

Come per il cerchio se un parallelogrammo è inscritto in una conica le diagonali si tagliano nel centro e due lati consecutivi sono paralleli a due diametri coniugati. Se un parallelogrammo è circoscritto le diagonali si tagliano nel centro e sono due diametri della conica.

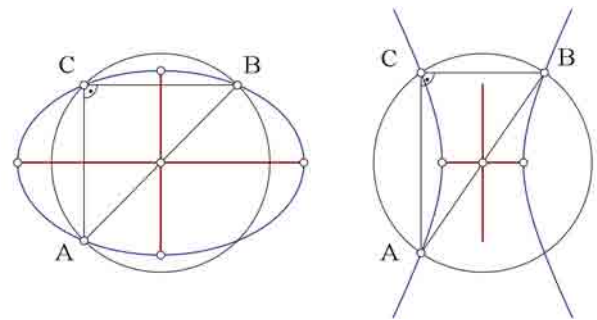
E' evidente che affinché un parallelogrammo sia iscrivibile in una conica questo deve essere costituito da rette parallele ai rispettivi diametri coniugati.

Se da un punto di una conica ne proiettiamo gli estremi di un diametro otteniamo due rette parallele a due diametri coniugati delle linea. Viceversa se dagli estremi di un diametro conduciamo due rette una delle quali sia parallela ad un altro diametro e l'altra al suo co-

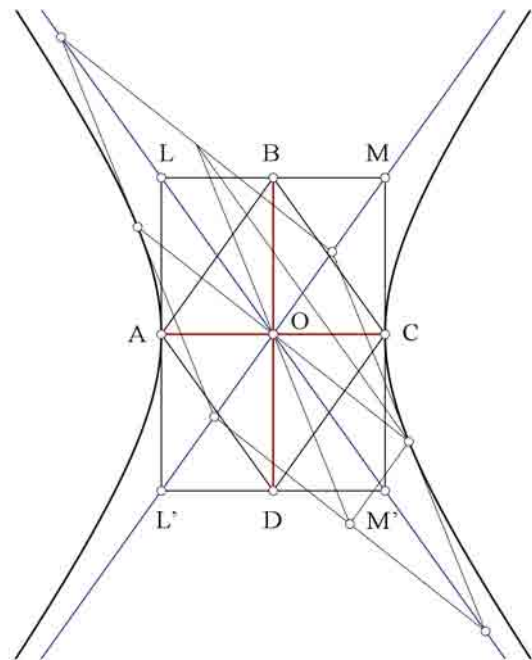
niugato quelle due rette si taglieranno in un punto della conica.

L'unica conica che tutte le coppie di diametri coniugati fra loro ad angolo retto è il cerchio. In un ellisse e in una iperbole c'è solo una coppia di diametri coniugati perpendicolari. Tali diametri sono chiamati assi.

Costruirli è semplice. Si disegna un diametro qualsiasi AB della conica (fig. 61). Si costruisce una circonferenza di diametro AB e centro O . Il cerchio taglia la conica, ellisse o iperbole, in altri due punti oltre ad A e B . Le



61/ In un ellisse e in una iperbole c'è solo una coppia di diametri coniugati perpendicolari. Tali diametri sono chiamati assi.



62/ Costruzione dei diametri coniugati ortogonali (o assi principali) di un iperbole.

retta **AC**, **BC** saranno parallele agli assi. La lunghezza dei diametri nell'ellisse è l'intersezione di questi con la linea.

Consideriamo l'iperbole e conduciamo dagli estremi del diametro **AC** la tangente alla linea fino a intersecare gli asintoti nei punti **L** ed **L'** (fig. 62). *La porzione di tangente all'iperbole compresa tra gli asintoti ha il suo punto di contatto nel punto di mezzo. M ed M' sono i punti dove la tangente nell'altro estremo **C** interseca gli asintoti. **LM** e **L'M'** sono paralleli e tagliano il diametro coniugato **BD** di **AC** nei punti **B** e **D**.*

Nell'iperbole il diametro non secante la linea ha una sua grandezza che si può stabilire in due modi simili:

- *Staccando su di esso un segmento uguale a quello intersecato dagli asintoti sulla tangente in un estremo del coniugato, secante la curva, in modo che il centro della conica sia il punto di mezzo del segmento.*
- *Conducendo dagli estremi del coniugato due rette parallele ad uno stesso asintoto ad incontrare così il diametro dato negli estremi di esso; oppure staccando da uno stesso estremo del coniugato le parallele agli asintoti a tagliare il diametro dato negli estremi richiesti.*

Non dimostriamo queste due costruzioni anche perché è sufficiente osservare che **ABCD** è un parallelogrammo in cui i lati sono paralleli agli asintoti. Non dimostriamo neanche che *nell'ellisse la somma dei quadrati di due semidiametri coniugati è costante ed uguale alla somma dei quadrati dei semiassi; nell'iperbole è costante la differenza²⁴.*

Costruzione dell'ellisse dati una coppia di diametri coniugati

I programmi per la rappresentazione matematica consentono di costruire una conica a partire da una coppia di diametri coniugati. Tuttavia bisogna disegnare la curva in quattro parti, considerando, di volta in volta, tre estremi dei diametri e due tangenti a detti estremi. Esiste, però, una soluzione più semplice, suggerita da Riccardo Migliari, che fa uso delle proprietà proiettive del cerchio (fig. 63). Dati, infatti, una coppia di diametri coniugati, si costruisce la prospettività che lega questi diametri agli assi perpendicolari di un cerchio nello spa-

zio e si genera poi l'ellisse per proiezione: il modellatore thinkdesign riconosce questa curva come ellisse. Il procedimento può essere esteso alla parabola e all'iperbole, evitando di proiettare i punti del cerchio che corrispondono ai punti all'infinito delle due coniche, poiché questa operazione genererebbe un errore di calcolo.

thinkdesign

Modifica/ Sposta/copia, copia il diametro **b** dal punto medio **M** al punto estremo **E** dell'altro diametro **a**. Indichiamo questa copia di **b** con la lettera **c**.

Si costruisce poi un cerchio, di diametro eguale a **b**, su un piano qualsiasi che, per comodità, può essere assunto verticale e passante per il diametro **c**.

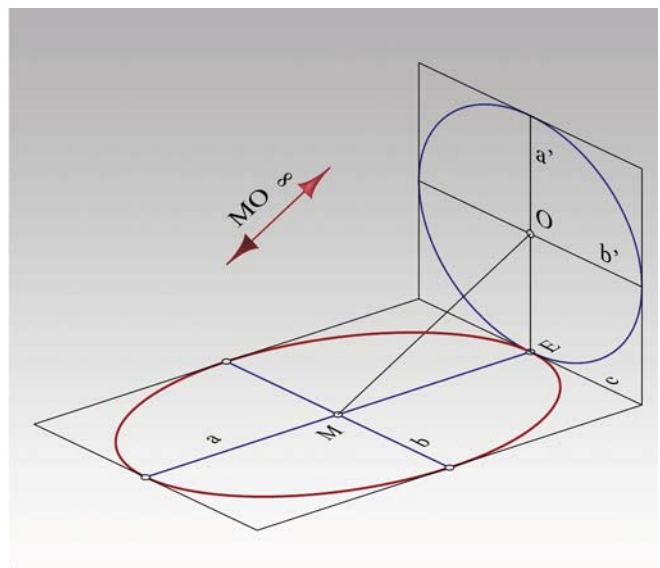
Modifica/Piano di lavoro/Sposta, sposta il piano di lavoro nel punto **E**;

Modifica/Piano di lavoro/Allinea asse x, allinea l'asse **x** con il diametro **c**;

Modifica/Piano di lavoro/Seleziona, consente di ruotare il piano in posizione verticale.

Inserisci/Disegno/Linea/2 punti, consente di disegnare l'asse coniugato **a'** di lunghezza pari al diametro **b** dato dell'ellisse.

Modifica/ Sposta/copia, copia il diametro **c** dal punto **E** al punto medio **O** di **a'**. Indichiamo la copia del diametro con la lettera **b'**.



63/ Costruzione dell'ellisse dati una coppia di diametri coniugati.

Inserisci/Disegno/Cerchi e archi/Centro, consente di disegnare il cerchio di centro **O** e diametri **a'** e **b'**, che per costruzioni hanno lunghezza pari a **b**.

Ora è sufficiente proiettare il cerchio di centro **O** secondo la direzione data dalla retta **OM**, che unisce i centri delle due curve corrispondenti nella prospettiva.

Inserisci/Curva/Proietta, consente di costruire la curva proiezione del cerchio sul piano individuato dai diametri dati **a** e **b**, secondo la direzione **OM**. E' possibile verificare che il modellatore riconosce tale curva come un'ellisse: quella individuata dai due diametri coniugati dati.

Costruzione dell'ellisse dati una coppia di rette coniugate

Data una coppia di rette coniugate qualsiasi è possibile disegnare l'ellisse che le appartiene (fig. 64). Le due rette coniugate sono due corde dell'ellisse. Sia **AB** e **DC** la coppia di rette che s'intersecano nel punto **P**. Si costruisce il quarto armonico **Q** del punto **P** rispetto alla coppia **C, D**. Le tangenti all'ellisse nei punti **A** e **B** sono le rette che passano per il punto **Q** e congiungono i rispettivi punti. Si ripete la costruzione per trovare il

punto **R** situato sull'altra retta coniugata **AB**. Ora è possibile disegnare l'ellisse con il comando conica per tre punti e due tangenti. Vorrei far notare che la proiezione di un cerchio e di due diametri coniugati qualsiasi è generalmente una conica ellittica. I diametri coniugati del cerchio si proiettano in due rette coniugate e non due diametri coniugati.

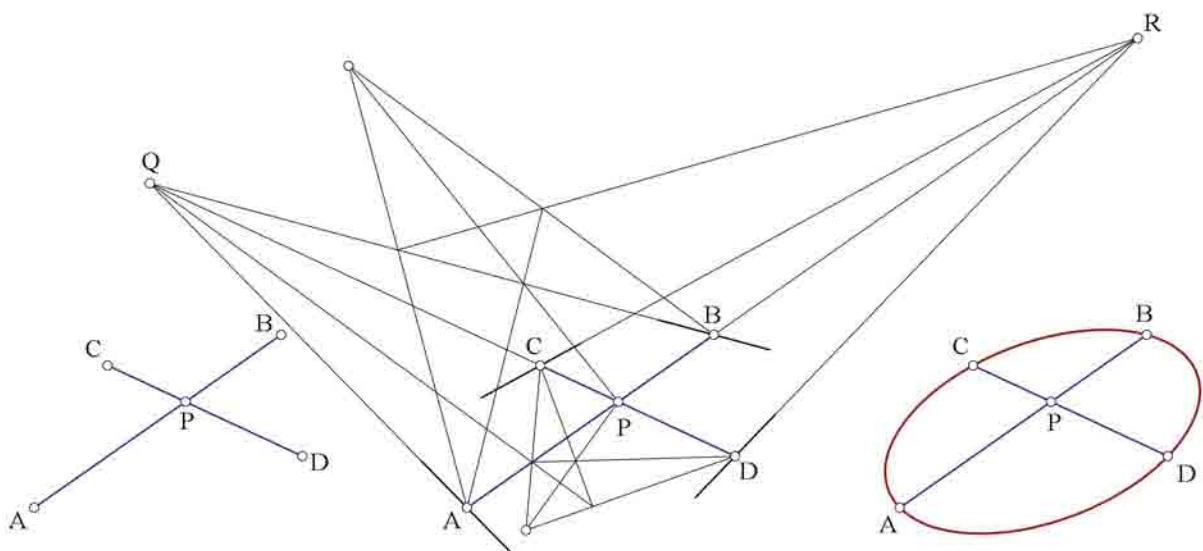
Costruzione dell'iperbole equilatera dati due fasci proiettivi inversamente congruenti

Se nell'iperbole i due diametri sono uguali, gli asintoti sono fra loro ortogonali e l'iperbole si dice equilatera. Se sono dati due fasci nel piano di centri **S** ed **S'** proiettivi e inversamente congruenti, tali che sia possibile capovolgere uno dei due fasci e sovrapporlo all'altro, allora l'intersezione delle rette corrispondenti è un'iperbole equilatera.

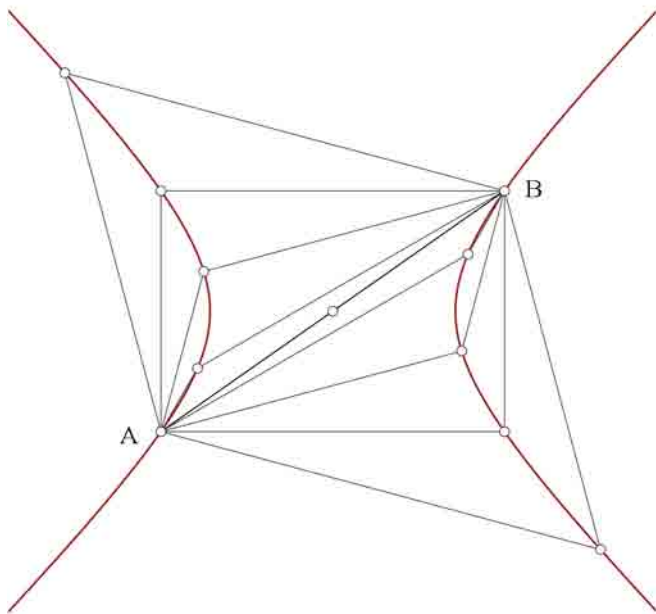
Allora se dagli estremi di un diametro qualsiasi **AB** di un'iperbole equilatera proiettiamo i punti della curva otteniamo due fasci inversamente uguali (fig. 65).

La conica non dotata di centro: la parabola

La parabola come è noto non ha un centro o meglio il

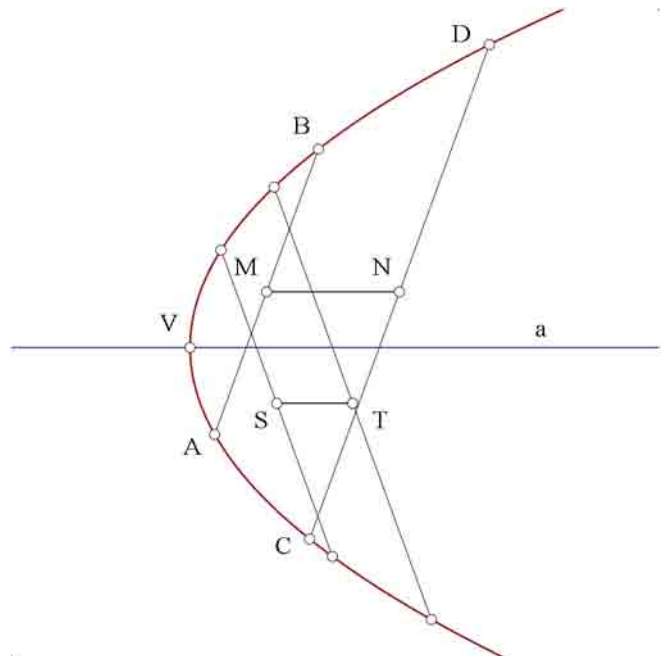


64/ Costruzione dell'ellisse dati una coppia di rette coniugate.



65/ Costruzione dell'iperbole equilatera dati due fasci proiettivi inversamente congruenti.

polo **O** è all'infinito. Questo perché la conica è toccata dalla retta all'infinito. Quattro rette del piano, tre qualunque delle quali non passanti per lo stesso punto, determinano una parabola, poiché la retta all'infinito del piano è una quinta retta tangente della parabola. Infatti per il teorema di Pascal e Brianchon date cinque rette d'involuppo è possibile trovare i punti di contatto di una qualsiasi tangente. Allora è sufficiente trovare due punti di contatto a applicare il comando parabole per due punti e due tangenti. Sono date quattro rette **a, b, c, d** (fig. 66). Poniamo che vogliamo trovare il punto di contatto della retta **a**. Allora applichiamo il teorema di Brianchon: in un pentagono semplice circoscritto ad una conica la retta che unisce un vertice con il punto di contatto del lato opposto, e le rette che uniscono le altre due coppie di vertici non consecutivi s'incontrano in uno stesso punto **P**. Il lato opposto nel nostro caso è la retta **a**. Si deve unire il vertice **ab** con il punto intersezione della retta **d** con la retta all'infinito **r**. Allora il segmento che unisce i due punti **ab** con **dr_∞** sarà parallelo a **d**. Con lo stesso ragionamento si costruisce un segmento parallelo ad **a** staccandolo dal vertice **bc**. Uniamo il vertice **bc**



67/ Costruzione dell'asse **a** e del vertice **V** della parabola.

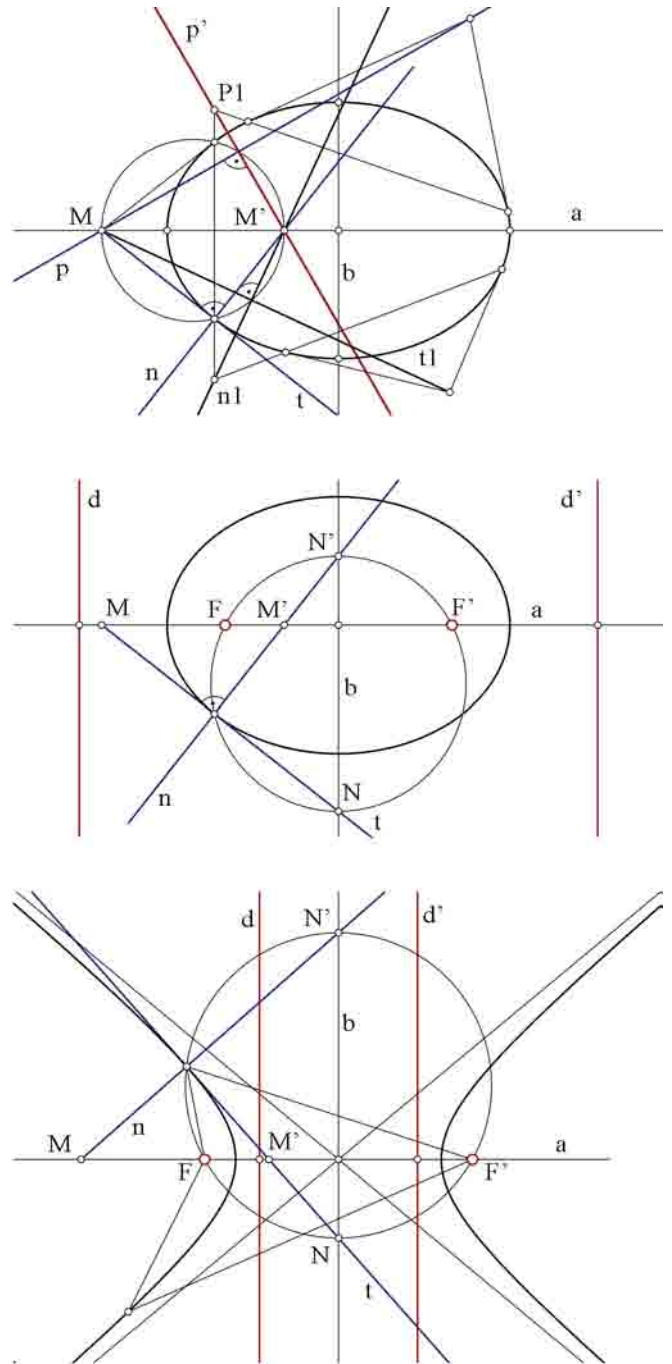
con il punto **P** intersezione delle due diagonali trovate. Quest'ultima retta interseca il lato opposto **a** nel punto **A** di contatto cercato. Si può ripetere questa semplice costruzione per trovare un altro punto di contatto **D**. Trovati due punti di contatto la parabola è determinata tramite l'algoritmo della rappresentazione matematica. Adesso poniamoci il problema di disegnare un diametro qualsiasi e poi di trovare il vertice della parabola e il rispettivo asse. L'asse non è altro il diametro che è tagliato perpendicolarmente dalle sue corde coniugate. Si taglia la parabola con due corde parallele qualsiasi **AB** e **CD** (fig. 67). Poi si unisce con una retta i punti di mezzo **MN** delle corde suddette. Quest'ultima retta è il diametro coniugato delle due corde. Ricordo, infatti, che un diametro divide a metà tutte le sue corde coniugate. Ovviamente il diametro trovato ci dà la direzione di tutti i diametri della parabola. Ora poniamoci il problema di come trovare il vertice e l'asse della parabola. Si costruiscono altre due corde che hanno la direzione specchiata rispetto al diametro trovato **MN**. Poi si costruisce il diametro **ST** coniugato a queste due nuove corde. Adesso basta disegnare la bisettrice dei due diametri coniugati

trovati. Ricordo che due rette parallele hanno la bisettrice che passa per il punto medio della loro minima distanza ed ha la stessa direzione delle rette. La bisettrice **a** sarà l'asse della parabola e il punto intersezione con la linea sarà il vertice **V** della parabola. L'asse è anche asse di simmetria ortogonale della parabola.

Fuochi delle coniche

Data una conica, ogni punto **F** del piano per il quale passano due e quindi infinite coppie di rette coniugate ad angolo retto, sarà chiamato un fuoco della conica. *Le rette coniugate e ad angolo retto con quelle che passano per un punto **M** di un asse di una conica, passano tutte per un altro punto **M'** di quell'asse.* Verifichiamo questo teorema (fig. 68). Ogni retta **p** nel piano ha la sua coniugata retta **p'** ad angolo retto rispetto alla conica data **C**. Tale retta si ottiene trovando il polo **P1** della retta **p** rispetto alla conica, e conducendo da **P1** la perpendicolare **p'** alla **p**: **p'** è la retta cercata. Viceversa la coniugata ad angolo retto con **p'** è **p**. Adesso prendiamo un punto **M** sopra l'asse **a** della conica. Da **M** stacciamo una retta **t** e sia **n** la coniugata di **t** ad angolo retto con **t**. La retta **n** interseca l'asse **a** nel punto **M'**. E' possibile verificare che se si stacca un'altra retta **t1** sempre dal punto **M** la sua coniugata perpendicolare **n1** passerà sempre per il punto **M'**. Allora i raggi proiettivi staccati da **M** ed **M'** formano un cerchio di diametro **MM'**, ovvero due rette corrispondenti, coniugate di **M** ed **M'**, s'intersecano nei punti di una circonferenza. *Le coppie di rette ad angolo retto, fra loro coniugate, rispetto ad una conica, sono tagliate da ogni asse di essa in coppie di punti coniugati di una stessa involuzione, la quale nell'ellisse e nell'iperbole ha un per punto centrale il centro della conica e nella parabola è un'involuzione simmetrica di cui l'elemento doppio all'infinito è il punto di contatto della parabola colla retta all'infinito.* Per capire cosa sia un'involuzione si rimanda alla nota esplicativa e per un maggiore approfondimento si rimanda direttamente al testo originale di Aschieri²⁵. Per costruire sulla conica (ellisse o iperbole) i due fuochi è possibile utilizzare la seguente costruzione:

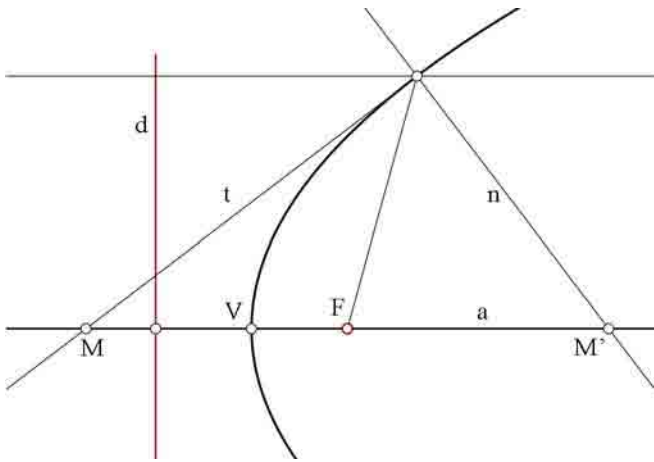
si disegnano due rette coniugate **t** ed **n** ad angolo retto. Per convenienza prendiamo la retta **t** tangente alla linea. Le due rette tagliano gli assi **a** e **b** rispettivamente nelle



68/ Costruzione dei fuochi **F** ed **F'** e delle direttrici **d** e **d'** delle coniche dotate di centro come l'iperbole e l'ellisse. La direttrice **d** (o **d'**) è la retta polare del punto **F** (o **F'**) rispetto alla conica.

coppie di punti M ed M' , ed N ed N' di punti coniugati. Uno dei due segmenti contiene il centro O della conica. Si costruisce il cerchio che ha come diametro il segmento che contiene O , nel nostro caso NN' . Il cerchio taglia il diametro AB in due punti F ed F' che sono i fuochi della conica. *Nell'ellisse e nell'iperbole i due fuochi sono gli elementi doppi dell'involutione determinata sopra l'asse dalle coppie di rette coniugate ad angolo retto.*

Il diametro che contiene i due fuochi si dice anche asse focale. Nella parabola il punto F fuoco della linea è dato dal punto di mezzo del segmento MM' formato da due qualsiasi rette coniugate t ed n perpendicolari. L'altro fuoco della parabola è un punto all'infinito (fig. 69). E' possibile osservare che *la tangente e la normale in un punto P alla linea, sono le bisettrici degli angoli dei raggi che da quel punto della linea ne proiettano i fuochi.* Inoltre se da un punto esterno ad una conica



69/ Costruzione del fuoco F della parabola e della sua direttrice d .

conduciamo le tangenti e le rette che vanno ai fuochi, gli angoli determinati dalle due coppie hanno le stesse bisettrici.

La retta polare di un fuoco è detta *direttrice*. Nell'ellisse e nell'iperbole esistono due direttrici, d e d' , che sono perpendicolari all'asse focale ed equidistanti dal centro. Rimandiamo al testo originale per la dimostrazione che in una conica è costante il rapporto delle distanze di un

punto dalla linea dal fuoco e dalla corrispondente direttrice. *Per la parabola ogni punto è equidistante dal fuoco e della direttrice*²⁶.

Nell'ellisse la somma, nell'iperbole la differenza, dei segmenti che uniscono un punto della curva coi fuochi è costante ed uguale alla grandezza dell'asse focale.

Laboratorio sperimentale della geometria descrittiva

In questo laboratorio descriverò due esercizi utili nella rappresentazione matematica. Nel primo ci occuperemo di come costruire un cono quadrico date cinque rette qualsiasi di una stella di centro S , e di come trovare i rispettivi assi principali triortogonali. Questo problema può avere differenti casi rispetto ai dati che vengono assegnati²⁷. Nel secondo esercizio ci occuperemo della ricostruzione esatta di un iperboloido rigato generico date tre rette sghembe qualsiasi. Questi due esercizi racchiudono diverse conoscenze descritte in questo capitolo e sono, in effetti, un possibile contributo al rinnovamento della geometria descrittiva nel metodo della rappresentazione matematica.

Costruzione del cono quadrico date cinque rette qualsiasi passanti per uno stesso punto S e costruzione degli assi e delle sezioni principali

Sono date cinque rette qualsiasi a, b, c, d, e e passanti per uno stesso punto S (vedi fig. 23). Sappiamo che un cono quadrico è determinato da cinque enti e quindi da cinque generatrici. Per ricostruire il cono applichiamo i teoremi di Pascal e Brianchon. Tagliamo con un piano α qualsiasi, non passante per il punto S , le cinque rette date. Otteniamo una cinquina di punti A, B, C, D, E . Adesso possiamo disegnare la conica C passante per questi cinque punti utilizzando il pentagono di Pascal e Brianchon. Ricordo che nella rappresentazione matematica una conica generica è definita da *tre punti e da due tangenti*, per cui bisogna sempre riportare il problema a questo caso (vedi parte seconda: *costruzione di una conica dati cinque punti*). La conica C è la direttrice del cono quadrico individuato dalle cinque rette date e dal vertice S . Adesso disegniamo i tre assi e le tre sezioni principali del cono quadrico trovato. Per prima cosa individuamo l'asse a principale del cono quadrico²⁸. Disegniamo una sfera di centro S e raggio qualsiasi (fig. 70). Tagliamo il

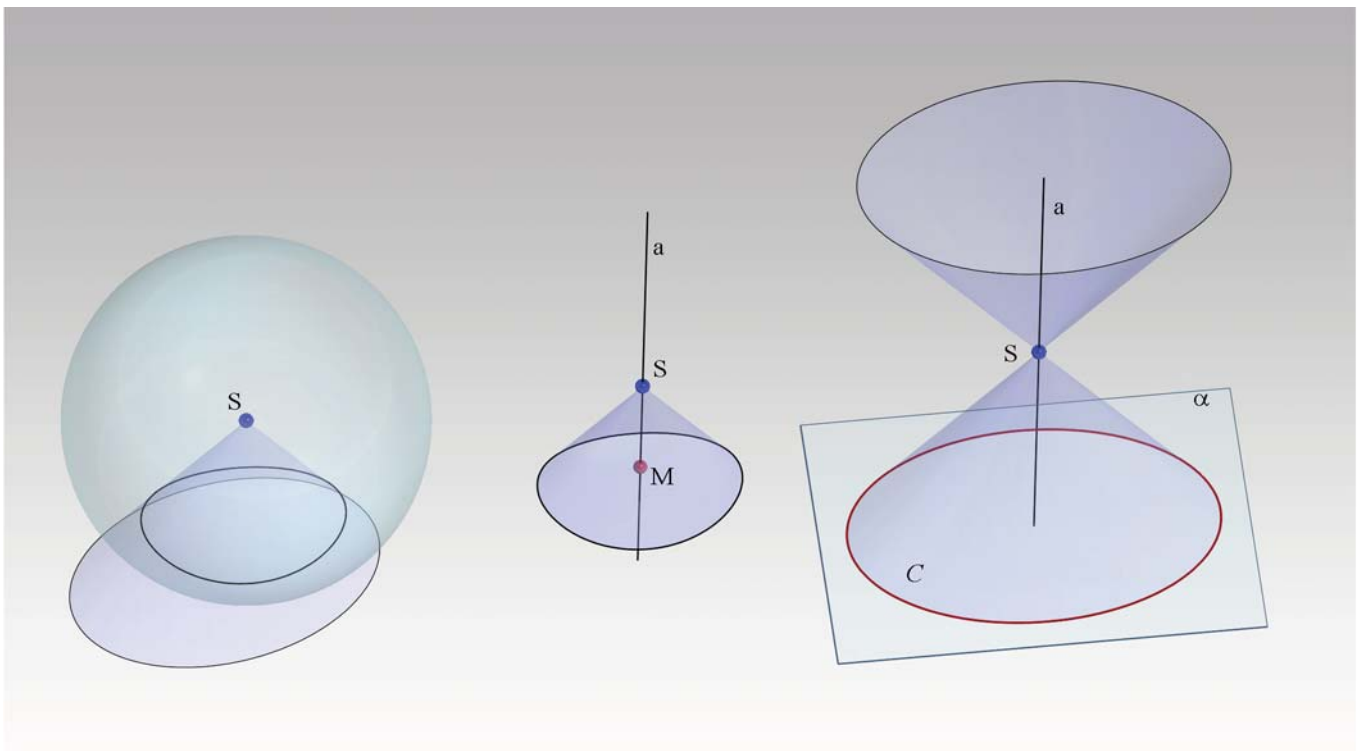
cono quadrico con la sfera e costruiamo il solido formato dalla superficie del cono e dalla porzione della superficie sferica che chiude il cono. La superficie quadrica del cono è a due falde tuttavia affinché la costruzione funzioni bisogna prendere in considerazione una falda soltanto. Il modellatore consente di trovare il centro **M** di massa di un volume chiuso. L'asse **a** verticale del cono quadrico è la retta passante per il vertice **S** e per il centro **M**.

Adesso dobbiamo trovare gli altri due assi principali del cono quadrico che sappiamo essere ortogonali fra loro. Basta costruire un piano secante α qualsiasi ortogonale all'asse **a**. Il piano taglia la quadrica in un'ellisse **C**. È evidente che l'asse maggiore e l'asse minore di questa ellisse sono paralleli agli altri due assi principali del cono quadrico. Allora disegniamo una circonferenza qualsiasi con centro **O** nel centro dell'ellisse, e che intersechi l'ellisse in quattro punti **E, F, G, H** (fig. 71). Il centro **O** dell'ellisse è dato dall'intersezione dell'asse **a** con il piano α ²⁹. Le direzioni degli assi ortogonali **b'** e

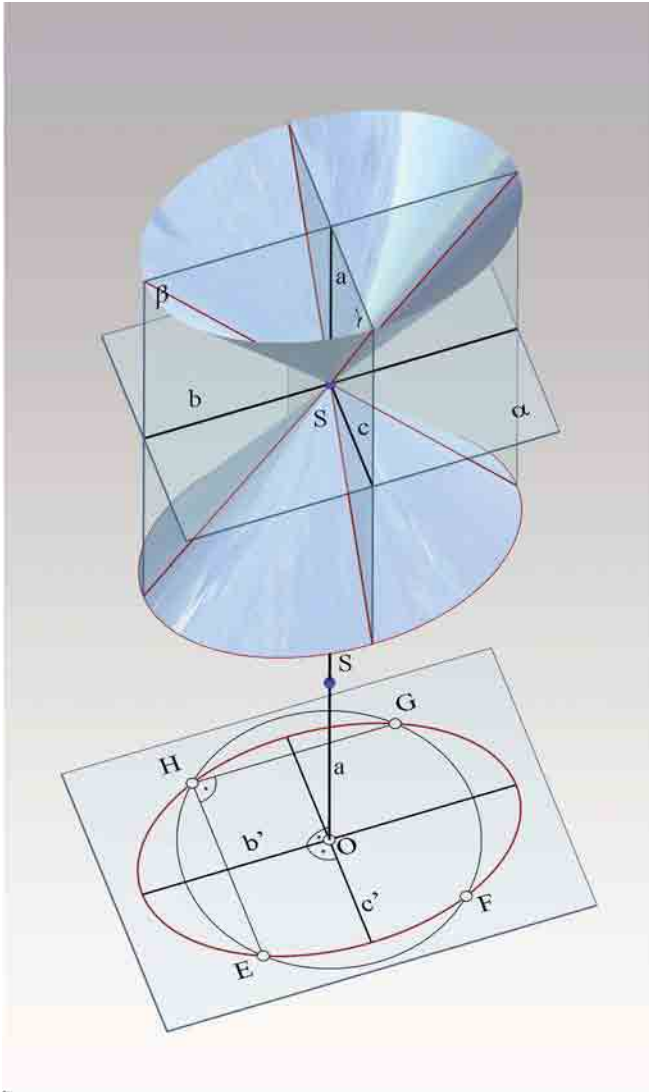
c' dell'ellisse sono dati dal quadrato formato dai quattro punti **E, F, G, H**. Disegniamo la retta **b'** parallela al lato **EF** passante per **O**, e la retta **c'** parallela **FG** passante per **O**. Le due rette **b'** e **c'** sono rispettivamente l'asse maggiore e l'asse minore dell'ellisse. I due assi principali del cono passano per il vertice **S** e sono paralleli ai due assi maggiori dell'ellisse. Adesso possiamo disegnare le sezioni principali del cono quadrico. Infatti i tre assi principali individuano a coppie i tre piani principali del cono quadrico α, β, γ . Il piano α è individuato dall'asse **b** e dall'asse **c**; il piano β dall'asse **a** e **b**; infine il piano γ dalla coppia **ac**. Nel cono quadrico le tre sezioni principali sono un'ellisse degenera nel punto **S** e quattro generatrici rette.

Costruzione di un iperboloide ad una falda date tre rette sghembe r, s, t

Il metodo proposto per realizzare un iperboloide rigato generico è quello di partire da un iperboloide di rotazione per poi trasformarlo in un iperboloide ad una falda



70/ Costruzione dell'asse principale a di un cono quadrico.



71/ Costruzione degli assi triortogonali a, b, c principali di un cono quadrico e delle sue sezioni principali.

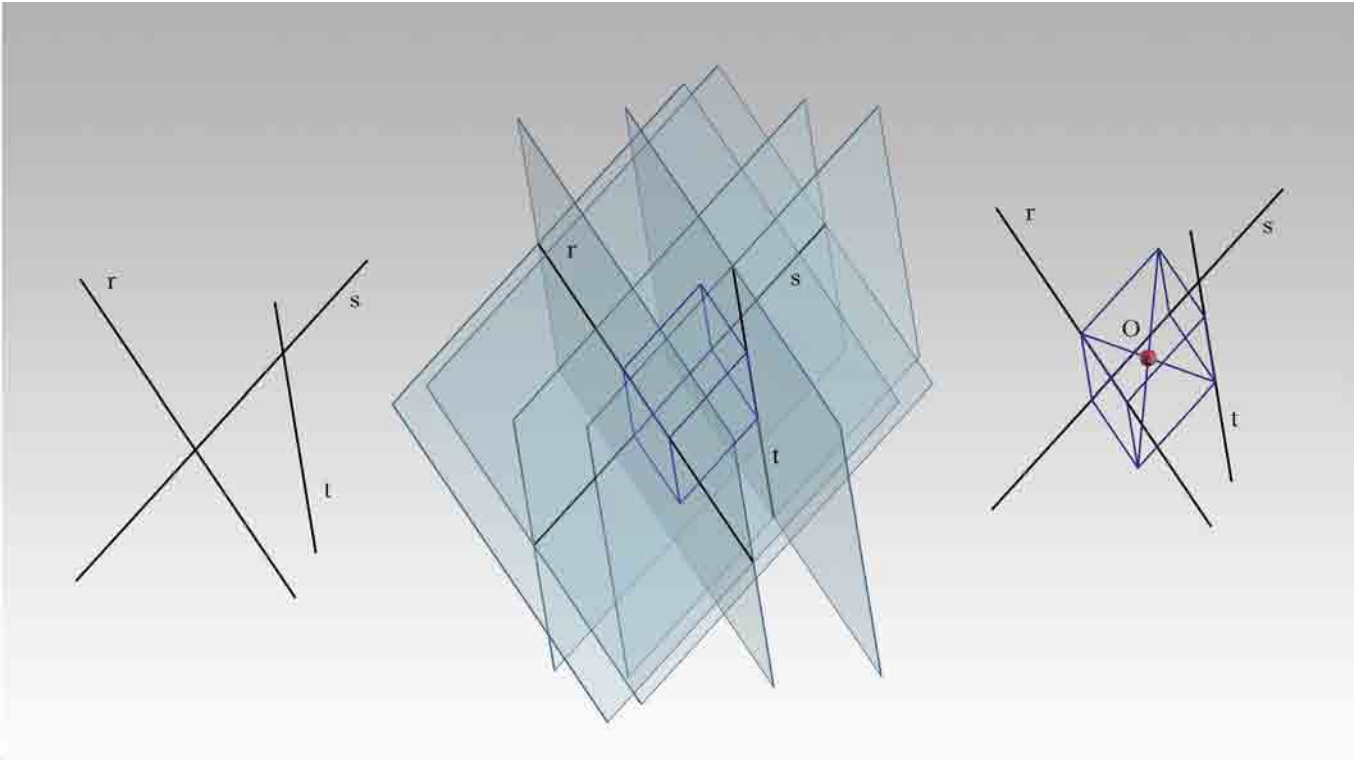
(vedi Laboratorio informatico del primo capitolo). Nella ricostruzione che si propone di seguire si fa riferimento a questo principio.

Sono date tre rette sghembe r, s, t qualsiasi nello spazio (fig. 72). Sappiamo, ormai, che queste rette determinano un iperboloide rigato. Inoltre sappiamo che quest'iperboloide avrà tre assi triortogonali principali. L'obiettivo è quello di ricostruire l'intera superficie in modo esatto e di trovare le caratteristiche

principali di essa: i tre assi e le tre sezioni principali. Per prima cosa troviamo il centro O della superficie quadrica. Per fare ciò serviamoci della costruzione di Hachette. Costruiamo il parallelepipedo individuato dalle tre generatrici date. Basta costruire i piani che a due a due individuano le tre rette. Intersecando i sei piani, a coppie paralleli fra loro, s'individuano gli spigoli del parallelepipedo unico individuato dalle tre rette r, s, t . Il centro della quadrica O è l'intersezione di due diagonali qualsiasi del parallelepipedo stesso.

Il prossimo obiettivo è trovare gli assi principali della quadrica. Per comodità troviamo gli assi del cono asintotico della quadrica data. La direzione degli assi principali del cono asintotico coincidono con quelli dell'iperboloide rigato. Sappiamo che un cono quadrico è individuato da cinque generatrici. Tre generatrici le abbiamo già, perché sono le tre rette parallele alle tre rette r, s, t passanti per il centro O . Il cono asintotico, infatti, ha le generatrici parallele a quelle dell'iperboloide di riferimento. Altre due generatrici possiamo ricavarle facilmente: si costruisce un piano qualsiasi individuato dalla retta s e da un primo punto P' sulla retta t (fig. 73). Il piano interseca la retta r in un secondo punto P'' . Unendo i due punti si ha una quarta retta generatrice p qualsiasi delle quadrica che si appoggia evidentemente alle tre rette date r, s, t . Ripetiamo l'operazione per trovare una quinta retta generatrice q . Le due rette p e q fanno parte della seconda schiera di rette che costituiscono l'iperboloide, mentre le tre rette date r, s, t , fanno parte della prima schiera di rette. Adesso disegniamo le cinque rette parallele alle generatrici p, q, r, s, t passanti per il punto centrale O della quadrica che è anche il vertice del cono asintotico. Abbiamo individuato cinque rette appartenenti al cono asintotico. Adesso applichiamo la costruzione di un cono quadrico date cinque rette passanti per uno stesso punto O (vedi la costruzione precedenti). Una volta trovato il cono asintotico individuiamo anche i tre assi principali a, b, c . Abbiamo in questo modo costruito il cono asintotico e trovato gli assi principali a, b, c della quadrica rigata, perché gli assi del cono asintotico coincidono con quelli dell'iperboloide iperbolico.

Ora conviene trovare l'iperbole i sezione principale appartenente al piano principale individuato dalla

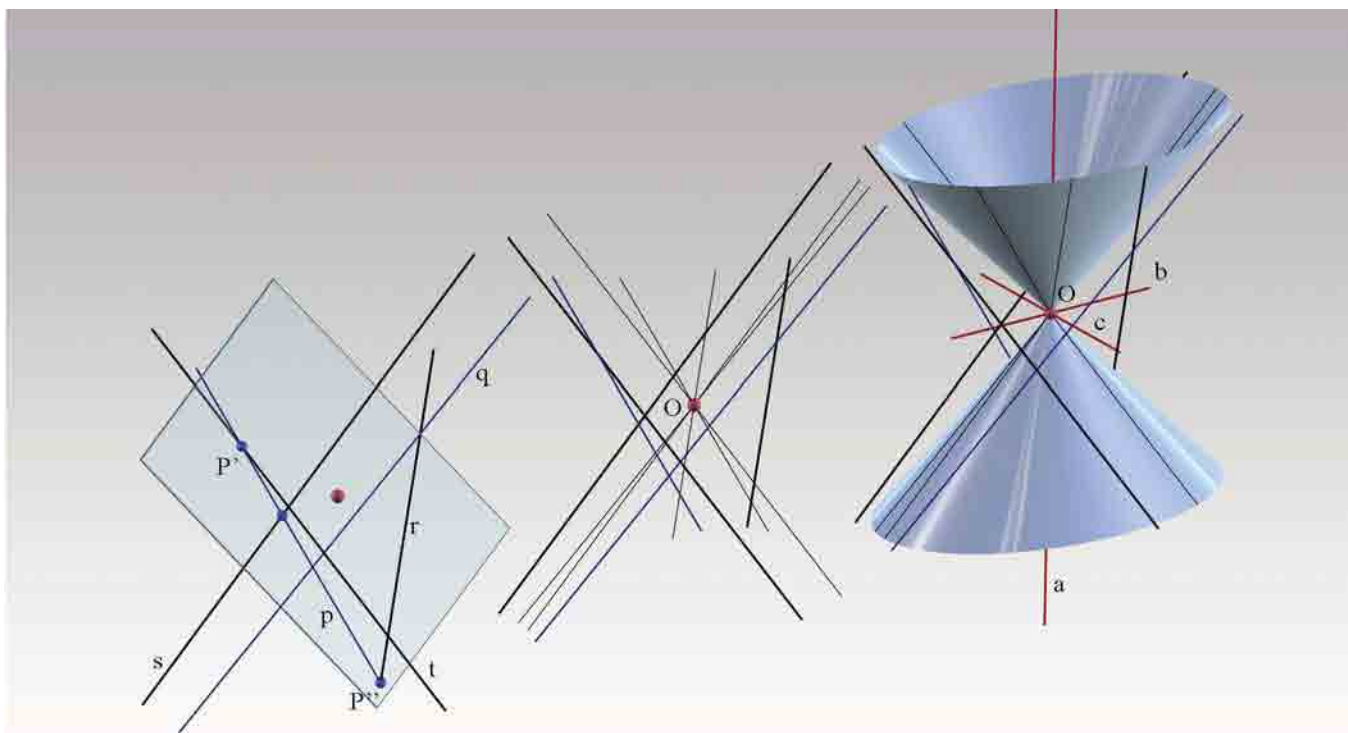


72/ Costruzione di un iperboloide ad una falda date tre rette sghembe r, s, t . Costruzione del centro O della superficie tramite il parallelepipedo di Hachette.

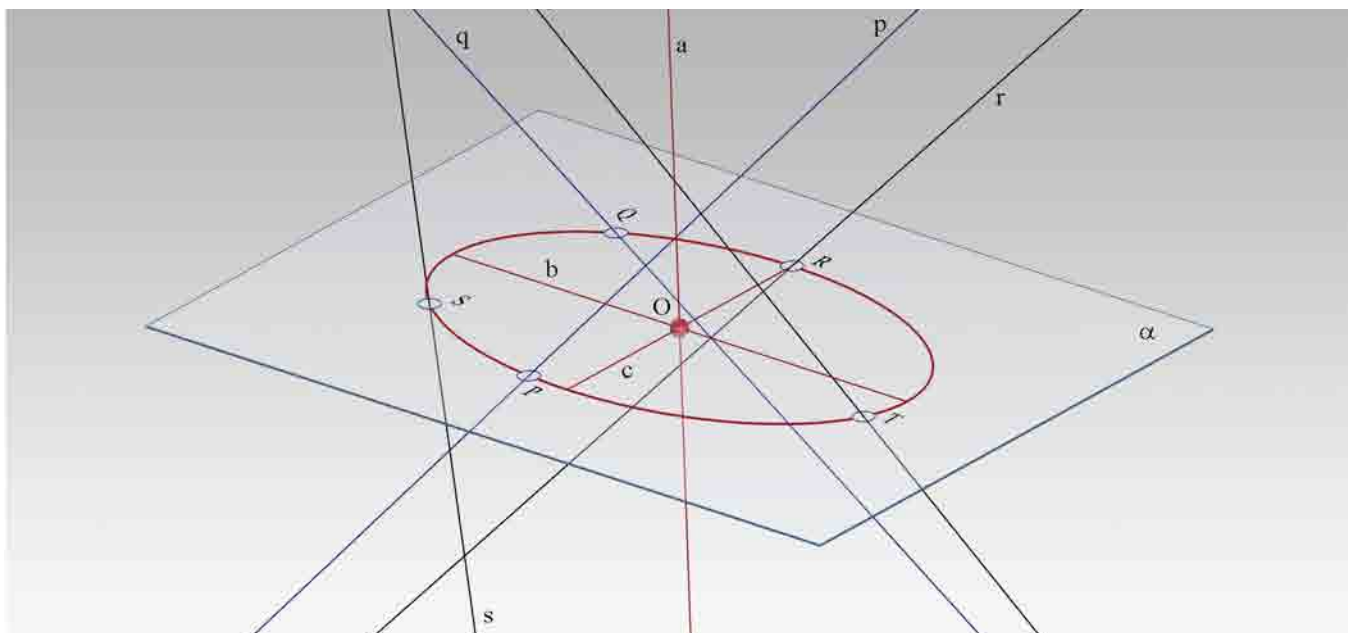
coppia di assi ab . Dopodiché si genererà l'iperboloide di rivoluzione con asse a e generatrice l'iperbole i . Infine basterà trasformare l'iperboloide di rivoluzione nell'iperboloide generico servendosi degli assi delle ellissi di gola come riferimenti di scala. Per avere come isoparametriche le rette, invece delle iperboli, è possibile rigenerare l'iperboloide di rivoluzione (dell'iperbole i) come iperboloide di rivoluzione di una retta z . Per trovare la retta generatrice z è sufficiente tagliare l'iperboloide di rivoluzione con il piano tangente che lo tocca ad un estremo dell'asse maggiore dell'ellisse di gola. Il piano tangente dovrà essere perpendicolare all'asse maggiore dell'ellisse di gola e quindi perpendicolare al piano dell'ellisse di gola stessa. Il piano taglierà la superficie di rivoluzione secondo una coppia di rette generatrici. Si ricostruisce l'iperboloide di rivoluzione utilizzando come generatrice una soltanto delle rette generatrici. A questo punto basterà ripetere la trasforma-

zione dell'iperboloide rigato di rivoluzione in iperboloide generico ed avere la superficie costituita da rette che passa per le tre rette date r, s, t .

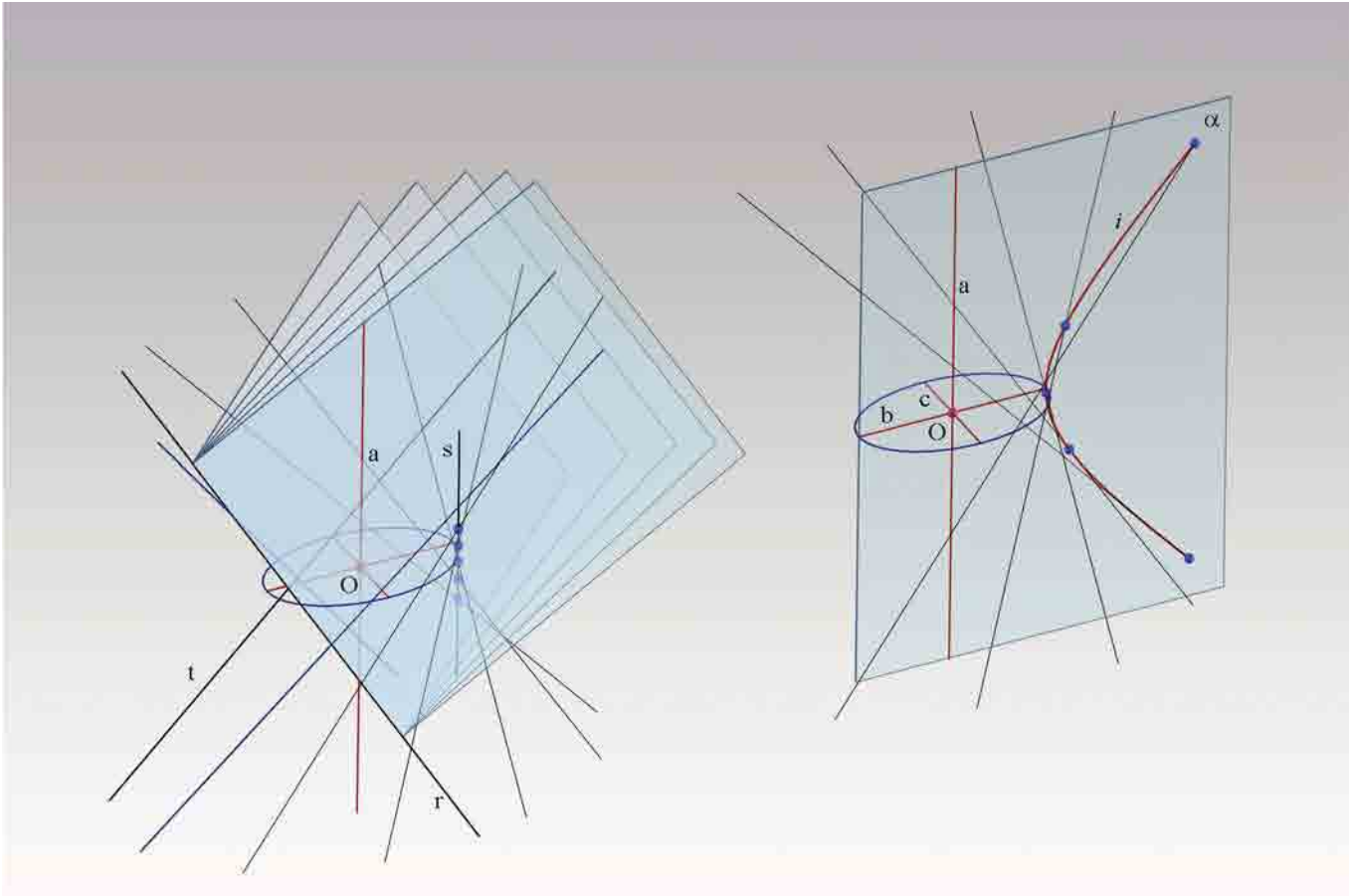
Troviamo l'iperbole i , sezione principale dell'iperboloide rigato. Per prima cosa bisogna determinare la lunghezza dell'asse maggiore b e dell'asse minore c dell'ellisse di gola dell'iperboloide. Per fare ciò si tagliano le rette p, q, r, s, t con un piano σ , passante per il centro O della superficie, ortogonale all'asse a (fig. 74). Poi si disegna la conica che passa per i cinque punti intersezione P, Q, R, S, T (vedi *costruzione di una conica passante per cinque punti dati*). Infine si disegnano l'asse maggiore b e l'asse minore c con la costruzione vista precedentemente (vedi *Costruzione del cono quadrico date cinque rette qualsiasi passanti per uno stesso punto S e costruzione degli assi e delle sezioni principali*). Sappiamo che l'iperbole i è situata sul piano individuato



73/ Costruzione di un iperboloide ad una falda date tre rette sghembe r, s, t . Costruzione del cono asintotico della superficie quadrica.



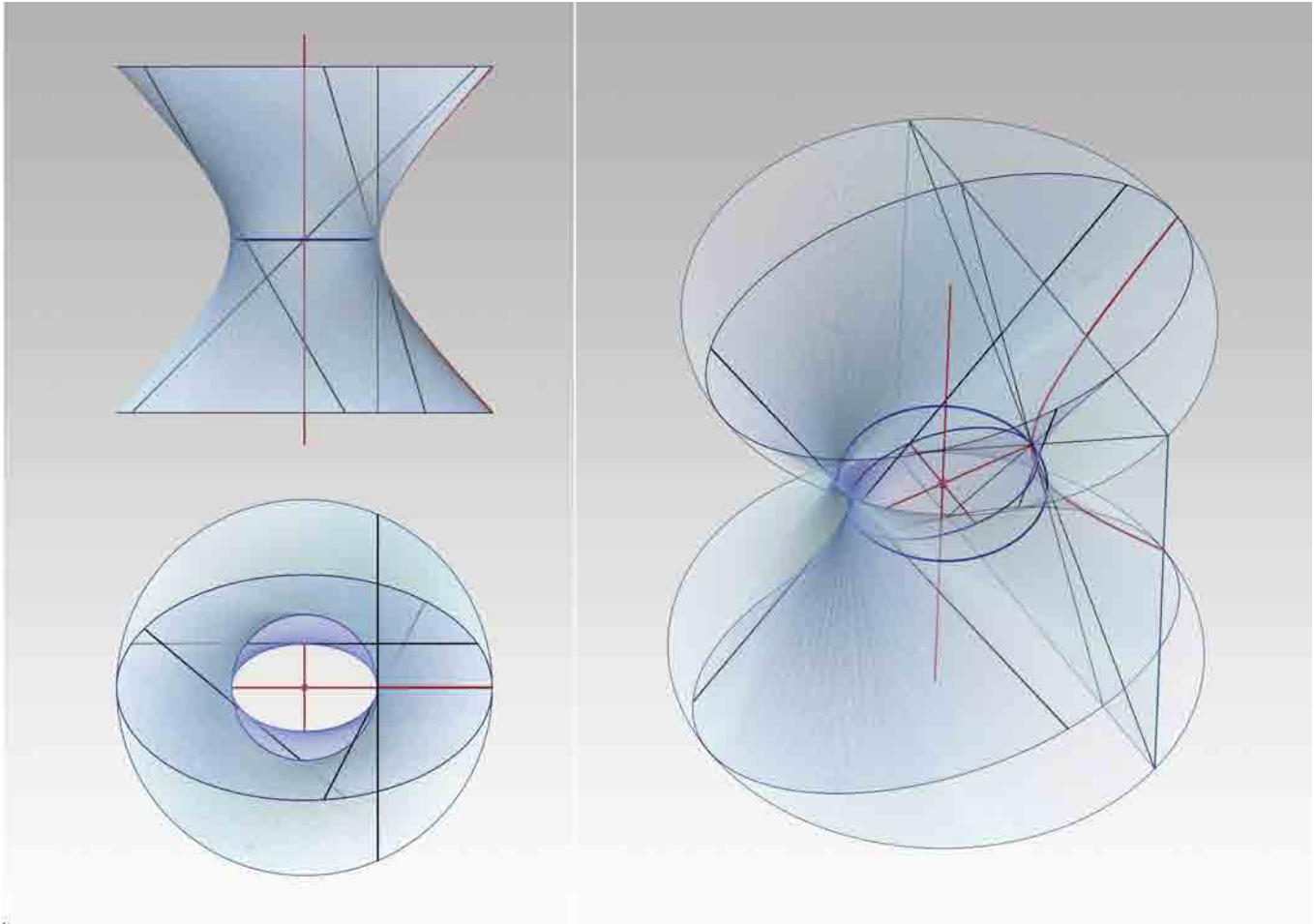
74/ Costruzione di un iperboloide ad una falda date tre rette sghembe r, s, t . Costruzione dell'ellisse di gola della superficie quadrica.



75/ Costruzione di un iperboloido ad una falda date tre rette sghembe r , s , t . Costruzione dell'iperbole i sezione principale della superficie quadrica.

dagli assi a e b ³⁰. Dove a è l'asse che non taglia l'iperboloido, e b è l'asse maggiore dell'ellisse di gola (fig. 75). Rinominiamo questo piano con la lettera α . Per trovare cinque punti dell'iperbole i sarebbe sufficiente trovare le intersezioni delle rette p , q , r , s , t con il piano α . Non è detto però che i punti appartengano tutti al ramo che c'interessa, per cui è meglio ricostruire cinque generatrici appositamente distribuite in modo da avere anche una distribuzione omogenea dei punti che individuano un ramo dell'iperbole i . Allora possiamo, utilizzando le tre rette date r , s , t , ricostruire cinque generatrici facendo attenzione che siano distribuite congruamente. Per esempio è possibile servirsi della retta r come asse e costruire un fascio di piani che abbia lo stesso angolo di rotazione tra un piano e l'altro. Questi piani interseche-

ranno le altre due rette s e t in cinque coppie di punti che individuano le cinque generatrici (nella figura sono evidenziati solo i cinque punti individuati sopra la retta s). Intersecando il piano α con le cinque generatrici appena disegnate, troviamo i cinque punti per cui deve passare l'iperbole principale i . Applichiamo la nota costruzione della conica per cinque punti (vedi *costruzione di una conica passante per cinque punti dati*). L'iperbole così generata dovrà avere il suo centro nel punto O centro della quadrica e dovrà avere come diametri coniugati principali i due assi a e b . Ora si genera l'iperboloido di rivoluzione usando come linea generatrice l'iperboli i e come asse di rivoluzione la retta a . E' possibile notare che l'iperboloido così generato ha il cerchio di gola tangente all'ellisse



76/ Costruzione di un iperboloido ad una falda date tre rette sghembe r, s, t . Costruzione dell'iperboloido iperbolico generico tramite la trasformazione di un iperboloido rotondo.

di gola dell'iperboloido rigato nei due estremi dell'asse maggiore. Inoltre le due superfici avranno in comune la linea dell'iperbole i , che è costituita da due rami simmetrici rispetto all'asse a . Adesso possiamo generare l'iperboloido generico trasformando l'iperboloido di rivoluzione secondo la direzione dell'asse c , ovvero dell'asse minore dell'ellisse di gola. Nella trasformazione finale dovrà aversi che il diametro del cerchio di gola si trasformi nel diametro minore dell'ellisse di gola e che l'altro diametro perpendicolare rimanga invariato³¹. La trasformazione è quindi una trasformazione di scala in un'unica direzione che è quella dell'asse c (fig. 76). In questo modo abbiamo generato la superficie esat-

ta che passa per le rette date r, s, t . La superficie, così generata, ha le due isoparametriche u e v che sono rispettivamente delle ellissi, parallele all'ellisse di gola, e delle iperboli che hanno come asse maggiore la retta a (asse dell'iperboloido). Se si desidera avere la superficie costituita da isoparametriche che siano rette, almeno secondo uno dei due parametri, è possibile operare nel seguente modo. Una volta che abbiamo generato l'iperboloido di rivoluzione, lo tagliamo con un piano tangente in uno dei due punti estremi dell'asse maggiore b . E' evidente che quello che chiamo asse maggiore b è per l'iperboloido di rivoluzione un diametro del cerchio di gola. Il piano tangente per questioni geometriche vi-

sibili deve essere ortogonale all'asse **b** e quindi essere ortogonale al piano dell'ellisse di gola. Se si è avuta cura nell'esecuzione della costruzione il piano taglierà la superficie esattamente in una coppia di rette. Il modellatore *thinkdesign*, infatti, riconosce nelle due curve sezioni esattamente due linee *rette*, che sono le due generatrici che individuano il piano tangente. Adesso basterà scegliere una delle due rette e rigenerare l'iperboloide di rivoluzione e ripetere la trasformazione di scala secondo la direzione dell'asse minore **c**. La costruzione descritta consente di rappresentare scientificamente la superficie di un iperboloide ad una falda partendo da tre rette sghembe qualsiasi. Inoltre questa costruzione consente di trovare le caratteristiche più importanti dell'iperboloide rigato generico, ovvero che è un superficie rigata quadrica costituita da un doppio sistema di rette che ha tre assi triortogonali principali **a**, **b**, **c** e un punto centrale **O**.

Note

1. Poncelet Jean-Victor (1822), *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris.

2. Girard Desargues (Febbraio 21 or March 2, 1591-Ottobre 1661) è considerato il fondatore della geometria proiettiva soprattutto grazie al teorema che porta il suo nome.

3. Blaise Pascal (Giugno 19, 1623 – Agosto 19, 1662) ha scoperto il teorema che porta il suo nome sulle proprietà di un esagono inscritto in una conica all'età di sedici anni.

4. Aschieri, Ferdinando (1888), *Geometria Proiettiva*, Milano, Ulrico Hoepli.

5. Fiedler Guglielmo (1874), *Trattato di Geometria Descrittiva*, Firenze, Successori Le Monnier.

6. Severi Francesco (1926), *Geometria Proiettiva*, Firenze, Vallecchi Editore.

7. Per le sperimentazioni nel laboratorio informatico sono state utilizzate le versioni di *thinkdesign* 2008.1 di Rhinceros 4.0.

8. In geometria proiettiva generalmente si indicano con forme di prima specie le cinque figure seguenti: 1) un numero qualunque o la totalità delle rette passanti per un punto fisso **O** e situate su uno stesso piano. Questa figura è chiamata il *fascio di rette*. 2) La figura composta da un numero qualunque o la totalità dei piani passanti per una stessa retta **s** è detta *fascio di piani* ed **s** è detto l'asse del fascio. 3) la figura composta da un numero qualunque o dalla totalità dei punti di una retta è detta *punteggiata*.

9. Si rimanda al paragrafo sulle forme piane sulla generazione proiettiva delle coniche per capire cosa si intende per gruppo armonico. Questo concetto è di fondamentale importanza nella

proiettiva sia da un punto di vista teorico ma soprattutto da un punto di vista sperimentale.

10. Severi Francesco (1926), *Geometria Proiettiva*, Vallecchi Editore, Firenze. pag. 73. "Il teorema fondamentale della Geometria Proiettiva".

11. Vedi la nota n°2.

12. E' spiegato nei paragrafi successivi che se i fasci proiettivi sono congruenti e inversi il risultato non è più un cerchio ma un iperbole equilatera.

13. Questo spiega anche le proprietà della proiezione stereografica di una quadrica rigata. E' possibile approfondire il concetto nel capitolo dedicato alle quadriche.

14. Migliari Riccardo (2005), *Ha la prospettiva un futuro? (has man a future?)*, da *Ikhnos* - Analisi grafica e storia della rappresentazione. L'articolo è consultabile anche in internet all'indirizzo: www.migliari.it

15. I programmi che ne fanno uso sono, fra gli altri, Rhinceros e *thinkdesign*, con cui ho condotto tutti gli esperimenti che sono descritti in questo studio.

16. I programmi che ne fanno uso vengono utilizzati prevalentemente, oltre che per la modellazione poligonale, per l'animazione e il per rendering. L'esempio studiato è stato condotto in ambiente Cinema4D.

17. Aschieri, Ferdinando (1888), *Op. Cit.*, Milano, Ulrico Hoepli. pag. 228. Questo problema è stato affrontato in parte, ovvero sia nel caso specifico delle sole circonferenze, da Leonardo Baglioni in un articolo, *Edward Kasner: il signore degli anelli*, pubblicato su *Ikhnos 2008* che tratta di circonferenze a diversa giacitura tangenti fra loro. L'articolo è abbinato ad altri due studi di Riccardo Migliari e Federico Fallavollita che trattano del problema di Apollonio nello spazio: nel primo, *Rappresentazione come sperimentazione*, Riccardo Migliari sviluppa una soluzione sintetica originale per trovare una sfera tangente ad altre quattro date partendo da una rilettura critica del saggio *Apollonius Gallus*(1600) di François Viète e del saggio *Problema Apolloniacum*(1594) di Adrian van Roomen; il secondo articolo, *L'estensione del problema di Apollonio nello spazio e l'Ecole Polytechnique*, è una rilettura sintetica delle diverse soluzioni date del medesimo problema in due studi dell'Ecole Polytechnique: una *mémoire* del 1815 di Louis de Tours Gaultier, dove è esposta la teoria dei radicali, e un capitolo del *Traité de Géométrie Descriptive* del 1828 di Jean Nicolas Pierre Hachette. Questi tre studi, sotto la guida indicata da Riccardo Migliari, sono un contributo al rinnovamento della geometria descrittiva, o meglio alla *rappresentazione come sperimentazione*.

18. Fiedler Guglielmo (1874), *Op. Cit.*, Firenze. pag. 342.

19. Aschieri Ferdinando (1888), *Op. Cit.*, Milano, Ulrico Hoepli. pag. 57.

20. Docci Mario / Migliari Riccardo (1992), *Scienza della Rappresentazione – Fondamenti e applicazioni della geometria descrittiva*, Roma, pag. 38.

21. Coxeter Harold Scott MacDonald (1974), *Projective*

Geometry, Springer, seconda edizione 2003. La prima edizione di questo libro è stata pubblicata dalla Blaisdell Publishing Company nel 1964. La seconda edizione è stata pubblicata dall'Università di Toronto Press nel 1974. Nel libro c'è un paragrafo (11.1) che s'intitola: *Is the Circle a conic?*. "The attentive reader must have noticed that most of the conics appearing in our figures look like something that has been familiar ever since he first saw the full moon: they look like *circles*. This observation raises the important question: *is the circle a conic?* We can answer *Yes* as soon as we have found a characteristic property of a conic that is also a property of the familiar circle."

22. Aschieri F. (1888), *Op. Cit.*, cap. V.

23. Aschieri F. (1888), *Op. Cit.*, pag. 119.

24. Aschieri F. (1888), *Op. cit.*, pag. 175

25. Aschieri (1888), *Op. Cit.*, pag. 60. "Due corrispondenze P, P' a cui danno, in generale, luogo due forme proiettive sovrapposte, si dicono fra loro *inverse* e quando coincidono, le due forme proiettive sovrapposte si dicono *in involuzione* od in *corrispondenza involutoria*; oppure più brevemente si dice che si ha un'*involuzione* di punti, di raggi o di piani, secondo che le due forme proiettive sono due punteggiate, fasci di raggi o fasci di piani. Due elementi corrispondenti si dicono *coniugati*, perché si corrispondono appunto *in doppio modo* o con *permutabilità*. In un'*involuzione* gli *elementi uniti* si diranno *elementi doppi*". 26. Aschieri F (1888). *Op. Cit.*, pag. 192.

27. Esattamente come avviene nel piano in cui una conica è determinata da cinque enti dati, così avviene nello spazio per il cono quadrico. Allora una variante dello stesso problema potrebbe essere quello di assegnare quattro rette della stella e un piano qualsiasi passante per una delle rette. Oppure assegnare cinque piani qualsiasi passanti per il vertice S .

28. La costruzione che individua l'asse a del cono utilizza l'efficace e rapido metodo sviluppato da Marta Salvatore per trovare l'asse di un cono quadrico. Questo metodo è descritto nell'articolo pubblicato su *Atti del convegno internazionale La geometria tra didattica e ricerca* (17-18-19 Aprile 2008) col titolo: *Contributi alla ricerca delle sezioni circolari di un cono quadrico*.

29. Se è data un'ellisse e dobbiamo trovare il centro O , si può procedere come segue: si costruisce una coppia di corde parallele e si disegna una prima retta che unisce i loro punti di mezzo. Si ripete la costruzione trovando una seconda retta. Il punto intersezione delle due rette è il centro O dell'ellisse.

30. Le iperboli principali sono due, perché le sezioni principali sono due: quella individuata dalla coppia di assi ab e quella individuata dalla coppia ac . L'iperbole che costruiamo è quella che sta sul piano formato dalla coppia ab , dove b è l'asse maggiore dell'ellisse di gola dell'iperboloide rigato.

31. Il diametro del cerchio di gola che deve essere considerato nella costruzione è quello che coincide con il diametro c dell'ellisse di gola.

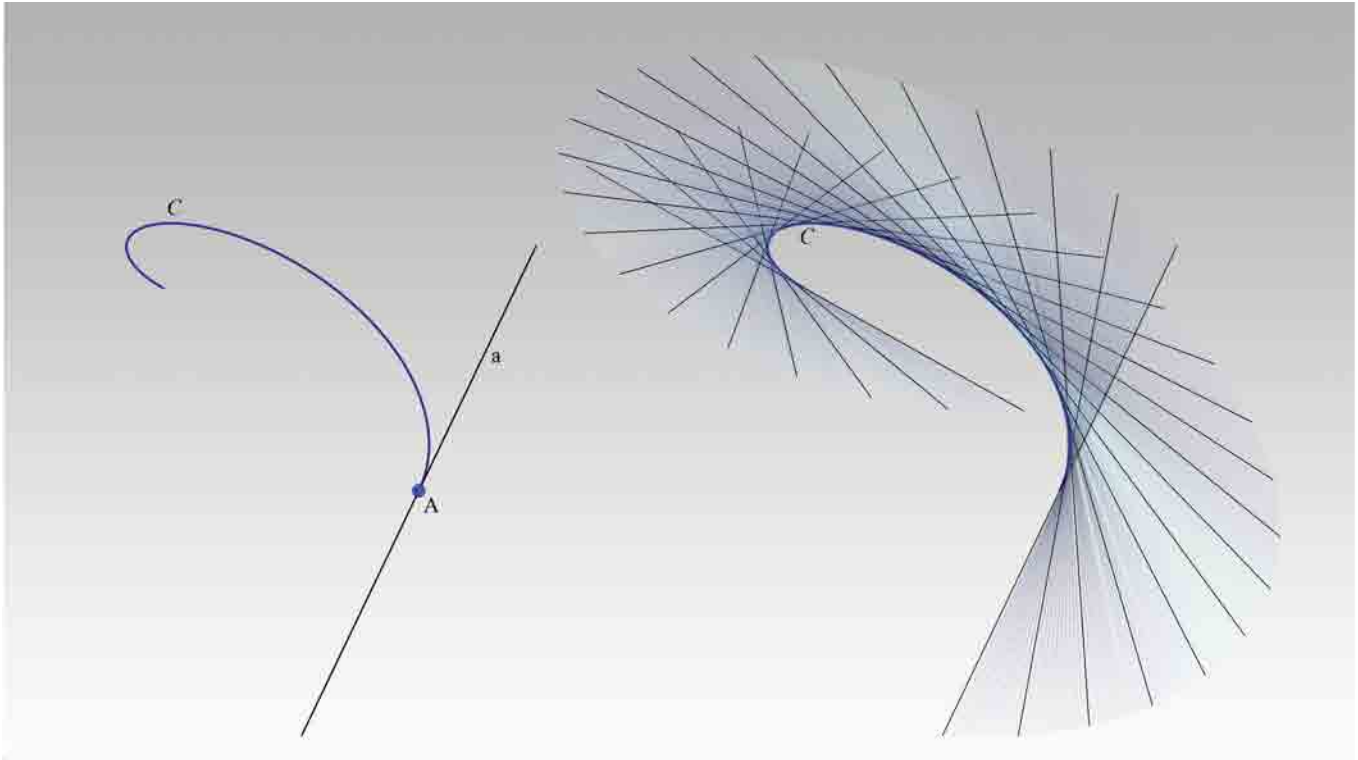
Le superfici rigate e le superfici sviluppabili nel quadro del rinnovamento della geometria descrittiva

In questo capitolo, intitolato Le superfici rigate e le superfici sviluppabili nel quadro del rinnovamento della geometria descrittiva, rivedremo alcune delle proprietà studiate e altre nuove secondo una catalogazione delle superfici proposta, in gran parte, da Gino Fano nel suo trattato di Geometria Descrittiva¹. Nella vasta letteratura sulle superfici rigate è il testo che ha saputo maggiormente riepilogare la descrizione di queste superfici secondo un approccio puramente sintetico descrittivo. Anche qui, però, come nei due capitoli precedenti alcune delle proprietà descritte non vengono rappresentate dal matematico ma sono solo enunciate per via sintetica e, in alcuni casi, per via analitica. Il lavoro di ricerca è consistito, in una prima fase, nella rilettura attenta dei vari problemi e in una seconda fase nella rappresentazione. Questo capitolo, in conclusione, riassume diverse questioni alla luce dei nuovi strumenti e cerca, come obiettivo primario, di illustrare, attraverso il metodo della rappresentazione matematica, proprietà che prima erano state solo descritte analiticamente ma mai effettivamente disegnate. Per esempio attualmente, il laboratorio virtuale consente di poter disegnare direttamente nello spazio tridimensionale il paraboloide delle normali di una superficie rigata. Oppure possiamo individuare in modo esatto il punto centrale di una generatrice di una superficie rigata. O ancora possiamo ottenere, in modo automatico, una proiezione stereografica di una quadrica rigata e ottenere un disegno che metta in luce, attraverso un'unica rappresentazione, diverse proprietà di queste bellissime superfici. E' abbastanza singolare che di questo disegno non si trovi traccia alcuna nei vari testi di geometria descrittiva. In fondo la sua rappresentazione può essere benissimo fatta attraverso gli strumenti tradizionali, intendo senza il

computer, e tuttavia questa rappresentazione passa attraverso un ragionamento del tutto spaziale. Proprio qui è possibile scorgere la grande potenzialità dei nuovi strumenti digitali, ovvero la possibilità di ragionare e rappresentare direttamente nello spazio ci dà un vantaggio considerevole rispetto ai diversi studiosi che ci hanno preceduto. Oggi diventa necessario poter recuperare e rielaborare gli studi di geometria descrittiva e rappresentarli direttamente nello spazio per arricchire ugualmente il campionario possibile delle figure astratte di questa disciplina. Figure che sono un risultato notevole sia per la comprensione della geometria descrittiva stessa e sia come ispirazione per i futuri architetti e designer. Il capitolo è strutturato in cinque parti:

- Le linee sghembe e le superfici sviluppabili.
- Le quadriche rigate.
- Le superfici rigate e le proprietà grafiche e metriche.
- Le superfici rigate elicoidali.
- La curvatura delle superfici rigate e delle superfici sviluppabili.

Oggi si usa comunemente il termine *superficie rigata* per indicare una superficie generata dal movimento di una retta. Come insegna Hachette, però, esistono due tipi di superfici generate da una retta: le *superfici sviluppabili*, che hanno la proprietà di poter essere sviluppate nel piano senza strappi o piegature, e le *superfici rigate* (sghembe) che non sono affatto sviluppabili. Noi ci atterremo a questa distinzione ricordando che oggi, tuttavia, si adopera indistintamente il termine superfici rigate per indicare sia le superfici rigate sghembe e sia le superfici sviluppabili.



1/ Le infinite tangenti a una curva sghemba C , detto spigolo di regresso, hanno per luogo geometrico una superficie sviluppabile.

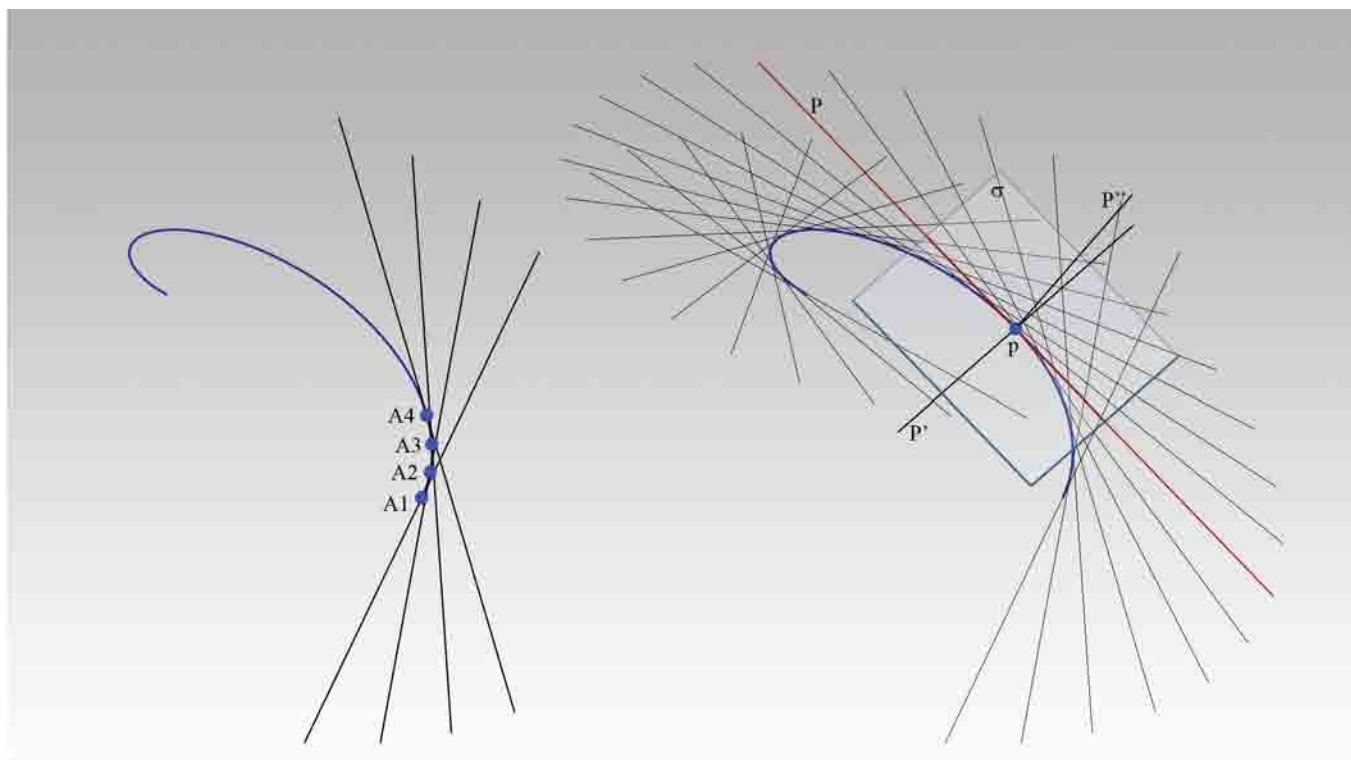
Le linee sghembe e le superfici sviluppabili

Le infinite tangenti a una curva sghemba C , detto *spigolo di regresso*, hanno per luogo geometrico una *superficie sviluppabile* (fig. 1). E' una superficie che contiene un sistema continuo di infinite rette e può essere generata dal movimento di una retta secondo una determinata legge. Data una curva C e una sua tangente a in un punto A , possiamo immaginare di far scorrere la tangente a lungo la curva direttrice C in modo che questa assuma ogni volta la posizione della tangente successiva. Le infinite rette che la compongono sono le *generatrici* della superficie.

Consideriamo la figura generata da una curva C sghemba e una successione di punti molto vicini $A1, A2, A3, \dots$. Adesso consideriamo le rette che formano i punti consecutivi come $A1A2$ e $A2A3$ e così via e i piani che formano i punti consecutivi $A1A2A3, A2A3A4, \dots$. La spezzata, quando i punti si avvicinano indefinitamente,

tende a coincidere con la curva stessa. La figura al limite continuerà ad essere formata dalle tangenti $A1A2$ e dai piani individuati dalla terna consecutiva di punti (fig. 2).

Si può dire anche che *le tangenti di una curva sghemba sono le intersezioni delle coppie dei piani osculatori consecutivi*. Due tangenti consecutive sono incidenti nel punto della curva stessa (al limite) e i punti della curva sono intersezioni delle terne consecutive dei piani osculatori. Il piano osculatore di una curva C in un suo punto P è quello determinato dalla posizione limite del piano individuato dal punto P e da altri due punti della curva, che si avvicinano indefinitamente al punto P . Cioè è il piano che congiunge il punto P con i due punti consecutivi. Il piano osculatore contiene la tangente nel punto di contatto con la curva. Pertanto è il piano individuato dalla tangente e da il punto che si avvicina indefinitamente al punto P . Nella modellazione matematica è



2/ Costruzione del piano osculatore α ad una curva sghemba C . Il piano α è tangente alla superficie sviluppabile nel punto P di contatto.

possibile individuare il piano osculatore σ dalla coppia di rette della tangente p e della *bitangente* p' nel punto P . La retta p'' è *binormale* ed è la retta ortogonale al piano osculatore nel punto P .

Il piano osculatore di una curva sghemba in un punto P è attraversato dalla curva stessa nel punto considerato.

Un piano tangente ad una curva è un piano che passa per la tangente nel punto generico P ma può essere distinto dal piano osculatore. La curva, in questo caso, sta tutta da una medesima parte in prossimità di P .

La particolarità della superficie sviluppabile è che due generatrici consecutive sono sempre incidenti fra loro.

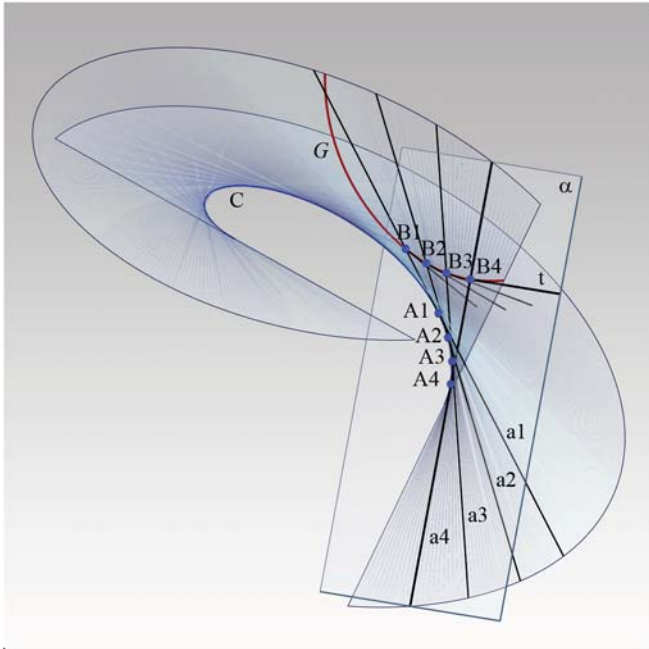
Una superficie della quale due generatrici consecutive sono incidenti, o è formata da rette che s'incontrano in un medesimo punto, e allora sarà un cono o un cilindro, o è una superficie formata dalla tangenti a una curva sghemba che è luogo geometrico delle coppie di generatrici consecutive (esempio un elicoide sviluppabile).

Come i coni e i cilindri la superficie del genere ha due proprietà uniche:

- la superficie S ammette in tutti i punti di una sua generatrice lo stesso piano tangente;
- la superficie può svilupparsi sopra un piano per una regione limitata.

Piano tangente di una sviluppabile

Data una curva sghemba C abbiamo la superficie sviluppabile S formata dalle tangenti alla curva sghemba (fig. 3). Consideriamo una curva G appartenente alla superficie S diversa dalla curva sghemba C e consideriamo i punti consecutivi $B1, B2, B3, B4, \dots$ su di essa. Per ogni punto considerato passerà una tangente $a1, a2, a3, a4, \dots$ che avrà, sulla curva c , il punto di contatto $A1, A2, A3, A4 \dots$. Le rette $B1B2, B2B3, \dots$ sono le tangenti alla curva G e sono in piani individuati dalle tangenti consecutive $a1a2, a2a3, \dots$ che sono anche gli infiniti

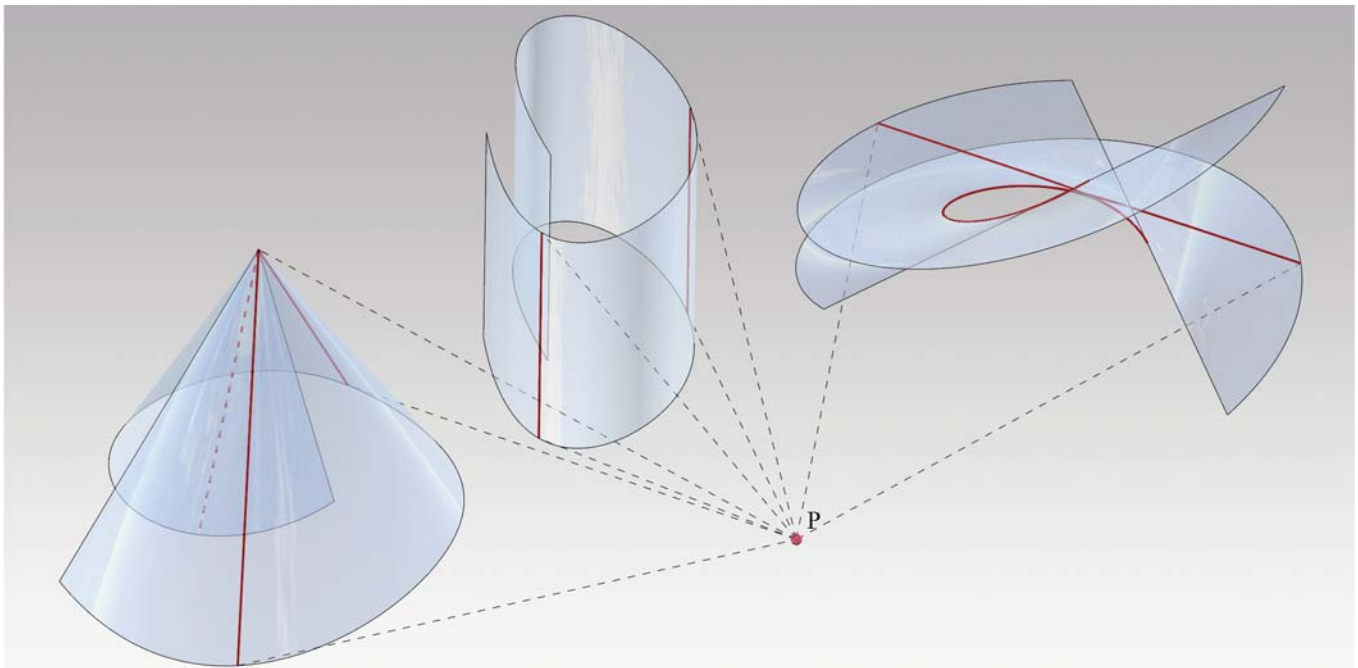


3/ Un piano tangente in un punto (nella figura il piano α nel punto $B4$) della superficie sviluppabile è tangente lungo l'intera generatrice retta (retta $a4$) passante per il punto considerato.

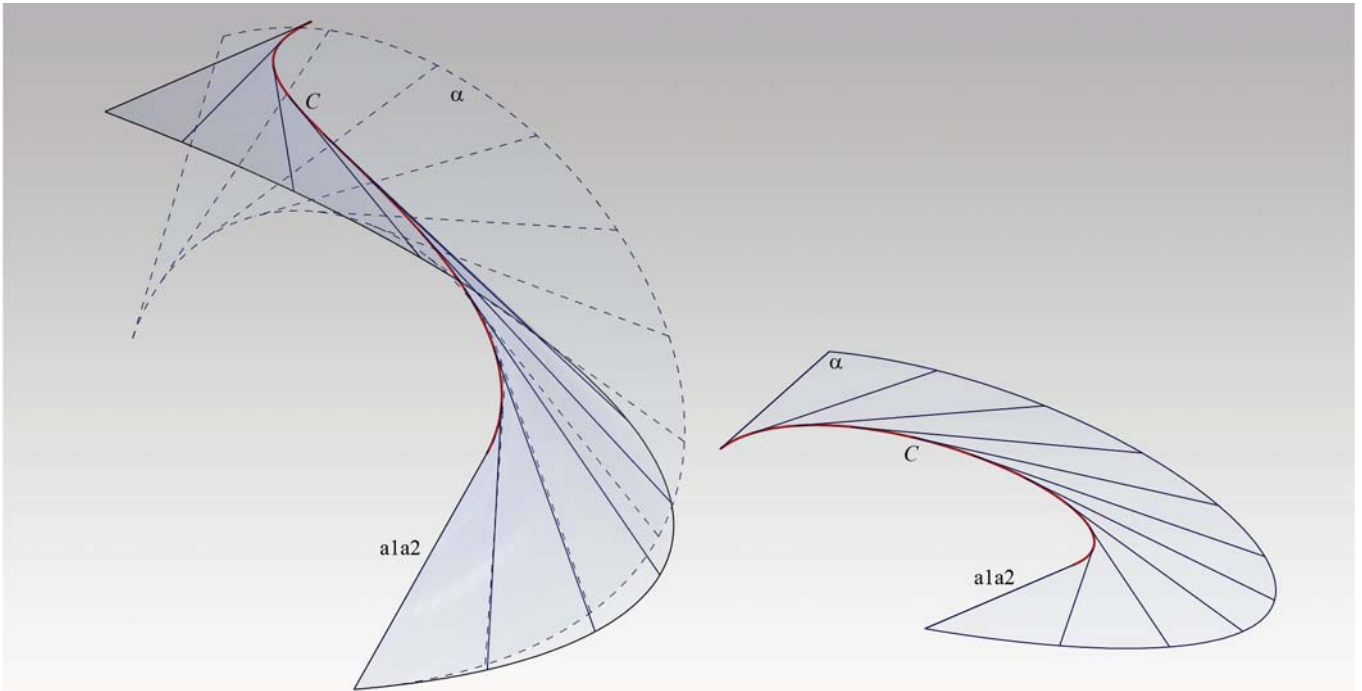
piani osculatori alla linea C . Consideriamo un punto $B4$ qualsiasi sulla generatrice $a4$, e una linea G qualsiasi appartenete alla superficie S . Nel punto $B4$ la tangente t alla linea G appartiene al piano osculatore α passante per $a4$. Questo piano è *tangente alla superficie S in un punto qualsiasi della generatrice considerata, per cui è tangente per l'intera generatrice della superficie.*

I piani tangenti ad una superficie sviluppabile sono anche piani osculatori della curva sghemba. Questa proprietà appartiene solo alle sviluppabili, oltre che ai coni e ai cilindri. Generalmente un piano tangente tocca una superficie solo in un punto ben determinato.

Un'altra proprietà notevole delle sviluppabili è che il *contorno apparente* di una sviluppabile si compone sempre di una o più generatrici (fig. 4). Nel caso dei cilindri e dei coni la questione è evidente, nel caso di una superficie sviluppabili generica può risultare meno intuitivo. In quest'ultimo caso ho considerato lo spigolo di regresso anch'esso parte del contorno apparente. Nella figura ho evidenziato solo le generatrici che formano



4/ Un'altra proprietà notevole delle sviluppabili è che il contorno apparente di una sviluppabile si compone sempre di una o più generatrici.



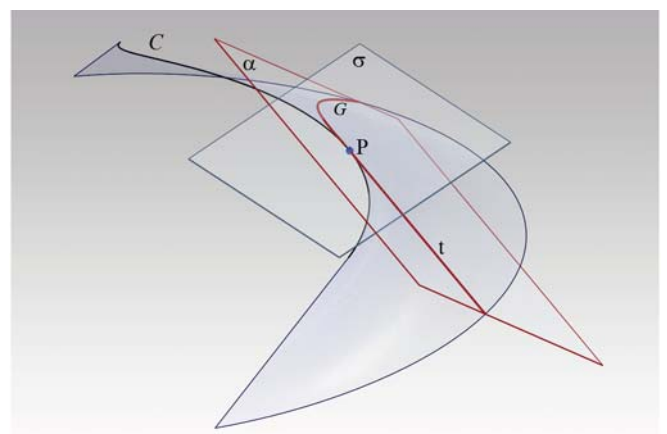
5/ La superficie formata dalle tangenti ad una curva sghemba gode della proprietà di svilupparsi su un piano e mantenere inalterate sopra di essa le lunghezze e gli angoli.

il contorno apparente ideale (linee colore rosso), ovvero ho considerato le superfici sviluppabili infinitamente estese lungo la direzione delle generatrici. Il punto P è il centro di proiezione.

Sviluppo di una superficie S formata dalle infinite tangenti alla curva sghemba C

La superficie sviluppabile S è formata dalle infinite tangenti consecutive alla curva sghemba C . Le coppie di tangenti $a1a2$, $a2a3$, ..., formano i vari infiniti piani tangenti alla superficie lungo le generatrici. Immaginiamo il piano α formato dalle due tangenti consecutive $a1a2$ e immaginiamo di sviluppare nel piano il tratto di superficie consecutiva $a2a3$, facendola ruotare attorno alla retta $a2$. Possiamo ripetere l'operazione per il tratto successivo intorno alla retta $a3$ che è stata ruotata sul piano α . Tutti i tratti successivi della superficie vengono così a disporsi sopra il piano considerato α . La superficie che si ottiene è la sviluppata della superficie S (fig. 5).

La superficie formata dalle tangenti ad una curva sghemba gode della proprietà di svilupparsi su un piano e mantenere inalterate sopra di essa le lunghezze e gli angoli.



6/ Un piano α , passante per la tangente t nel punto P nella curva C , sega la superficie sviluppabile secondo due linee: una generatrice della superficie che coincide con la tangente t e una linea piana G . Il piano σ è il piano osculatore della curva sghemba C (spigolo di regresso della superficie) nel punto P .

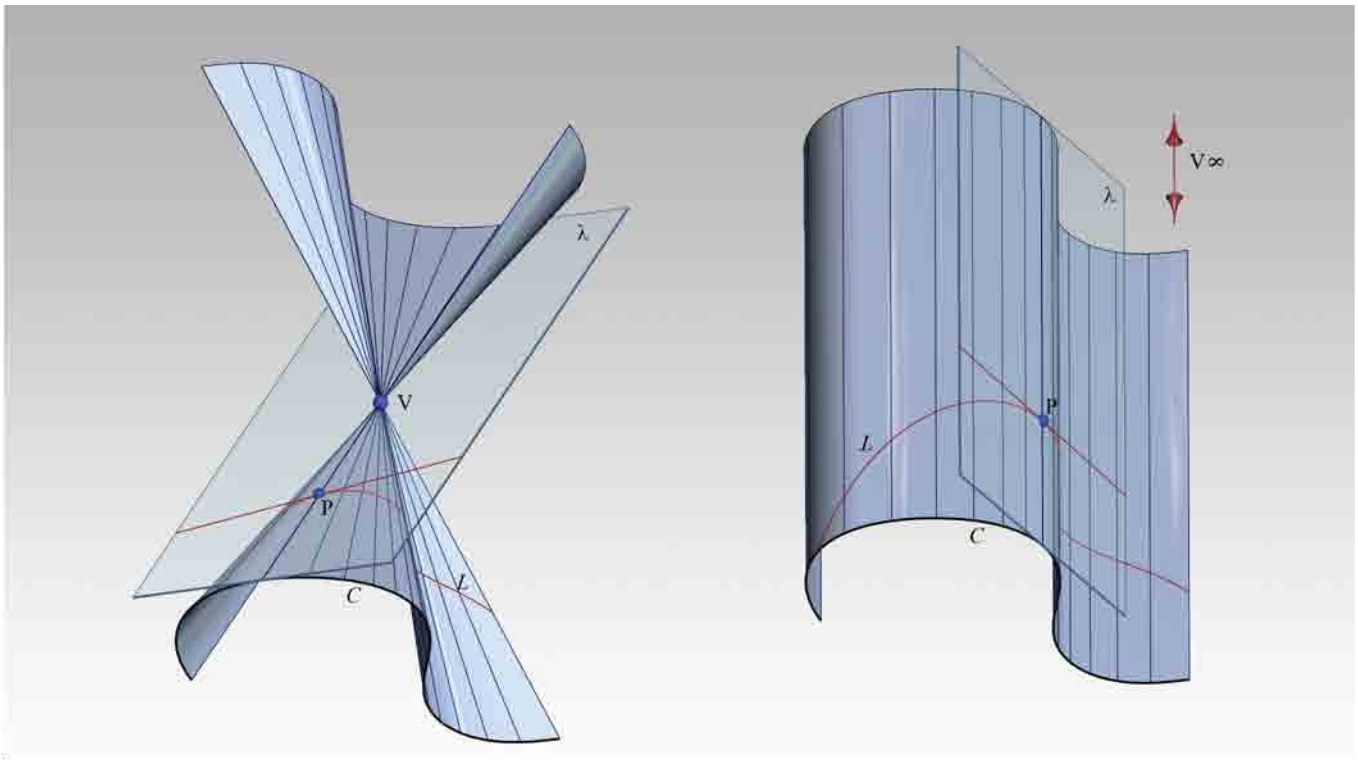
Alla linea sghemba come luogo di punti corrisponde per dualità la sviluppabile come involuppo di piani, per cui si dice che la figura duale di una curva sghemba è una sviluppabile.

Ogni sezione piana della rigata sviluppabile che passa per le tangenti di una curva sghemba C ha per punti di regresso le intersezioni del piano secante con la curva stessa e le tangenti cuspidali sono le tracce dei piani osculatori a C in queste intersezioni. Si dice che la linea C è lo spigolo di regresso della superficie sviluppabile luogo geometrico delle sue tangenti (fig. 6). Nell'esempio illustrato il piano α , passante per la tangente t nel punto P della curva C , sega la superficie sviluppabile secondo due linee: una generatrice della superficie che coincide con la tangente t e una linea piana G . Il piano σ è il piano osculatore della curva sghemba C (spigolo di regresso della superficie) nel punto P .

Coni e Cilindri

I coni e i cilindri possono essere considerate una particolare classe di superfici sviluppabili. Lo spigolo di regresso sarebbe il punto dove convergono le generatrici: un punto proprio V , detto vertice, per il cono e un punto improprio V_∞ , o meglio una direzione, per il cilindro (fig. 7).

Proiettando una linea C da un punto qualsiasi non appartenente al piano di essa si ottiene un cono o un cilindro (se il punto è una direzione). I punti e le rispettive tangenti della linea vengono proiettati formando le generatrici e i piani tangenti al cono. Il centro di proiezione è detto vertice. Due generatrici successive formano un piano tangente e due piani tangenti successivi s'intersecano in una generatrice. Il cono può essere pensato anche come generato dal movimento di una retta con continuità in una stella, secondo una determinata leg-



7/ Proiettando una linea C da un punto qualsiasi non appartenente al piano di essa si ottiene un cono o un cilindro (se il punto è una direzione). I punti e le rispettive tangenti della linea vengono proiettati formando le generatrici e i piani tangenti al cono.

ge. E come suo duale si può pensare all'involuppo di un piano lungo una stella. Il cono come luogo geometrico quindi può essere considerato come la figura duale nello spazio dell'involuppo piano di rette e il cono come involuppo è la figura duale della linea piana.

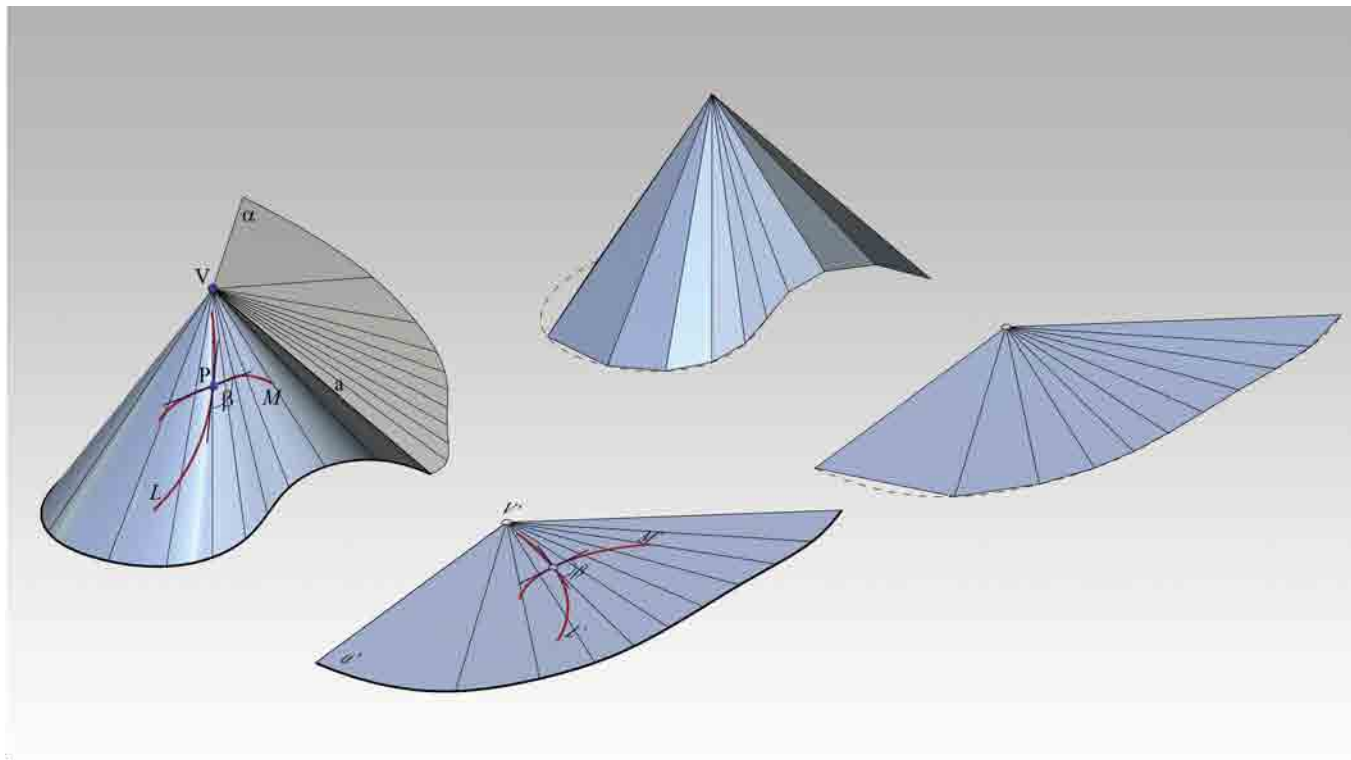
Le sezioni piane di un cono non passanti per il vertice sono tutte prospettive. Oltre alle sezioni piane si possono tracciare curve sghembe sulla superficie di un cono. Consideriamo una curva sghemba L sulla superficie conica e un punto P di essa. La tangente nel punto P della curva sghemba deve stare sul piano λ tangente al cono lungo la generatrice che passa per P .

Ogni linea che incontri tutte le generatrici in un solo punto è detta direttrice del cono. Le sezioni piane sono particolari direttrici. Se il vertice di un cono è improprio, la superficie è chiamata cilindro e tutte le generatrici sono parallele fra loro. I piani tangenti sono paralleli

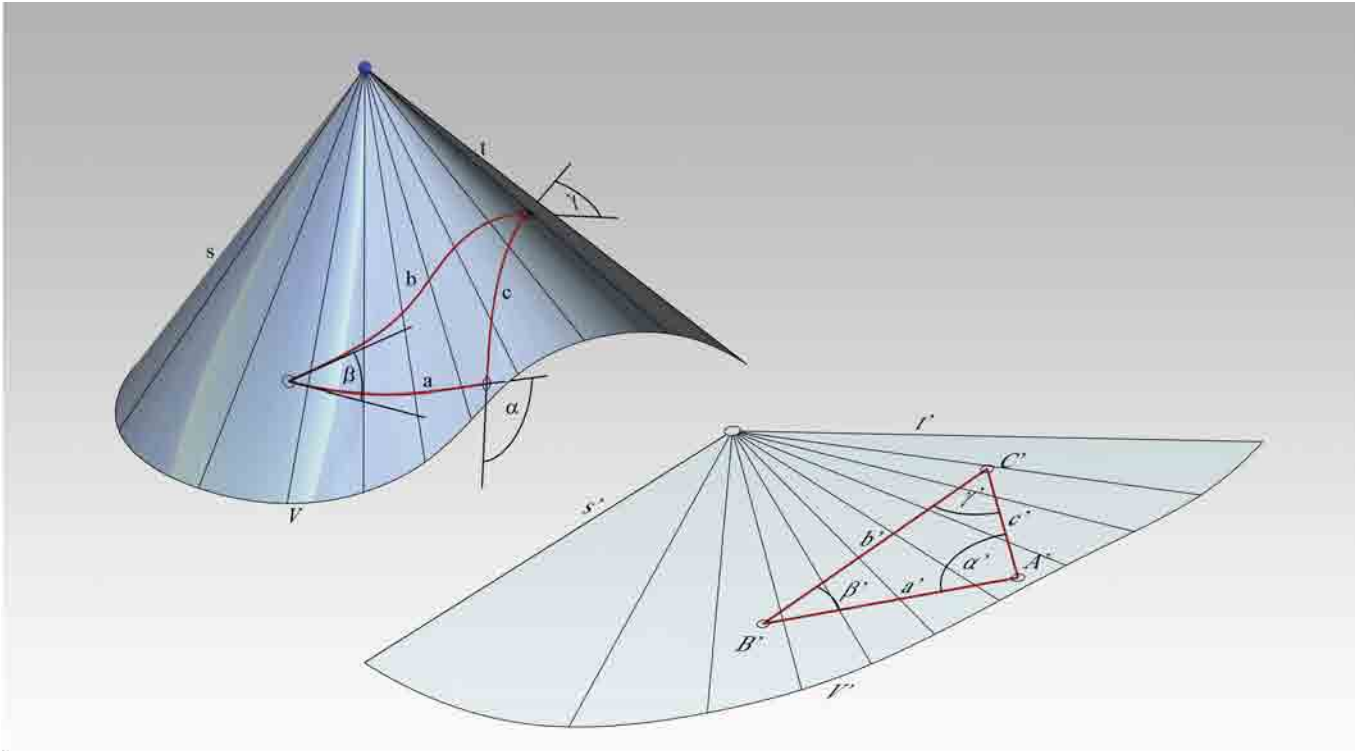
alle direzioni delle tangenti e le curve piane intersezioni (non parallele alle generatrici) sono affini tra loro.

Sviluppo del cono e del cilindro sopra un piano

Consideriamo una generatrice a di un cono qualsiasi e il suo piano tangente α in a (fig. 8). Immaginiamo di srotolare la superficie conica tenendo fermo il vertice V e facendo in modo che un'altra generatrice b (molto vicina ad a) si venga a trovare nel piano α . La generatrice b si troverà nella nuova posizione b' . La porzione di superficie tra a e b è sviluppata nel piano α nella porzione $a b'$. L'operazione di distendere le facce di una piramide su un piano è la stessa precedentemente descritta: basta immaginare che le facce della piramide diventino sempre più fitte fino a coincidere con la superficie conica. Allora ogni arco di linea sul cono viene sviluppato in una linea piana di uguale lunghezza. Inoltre



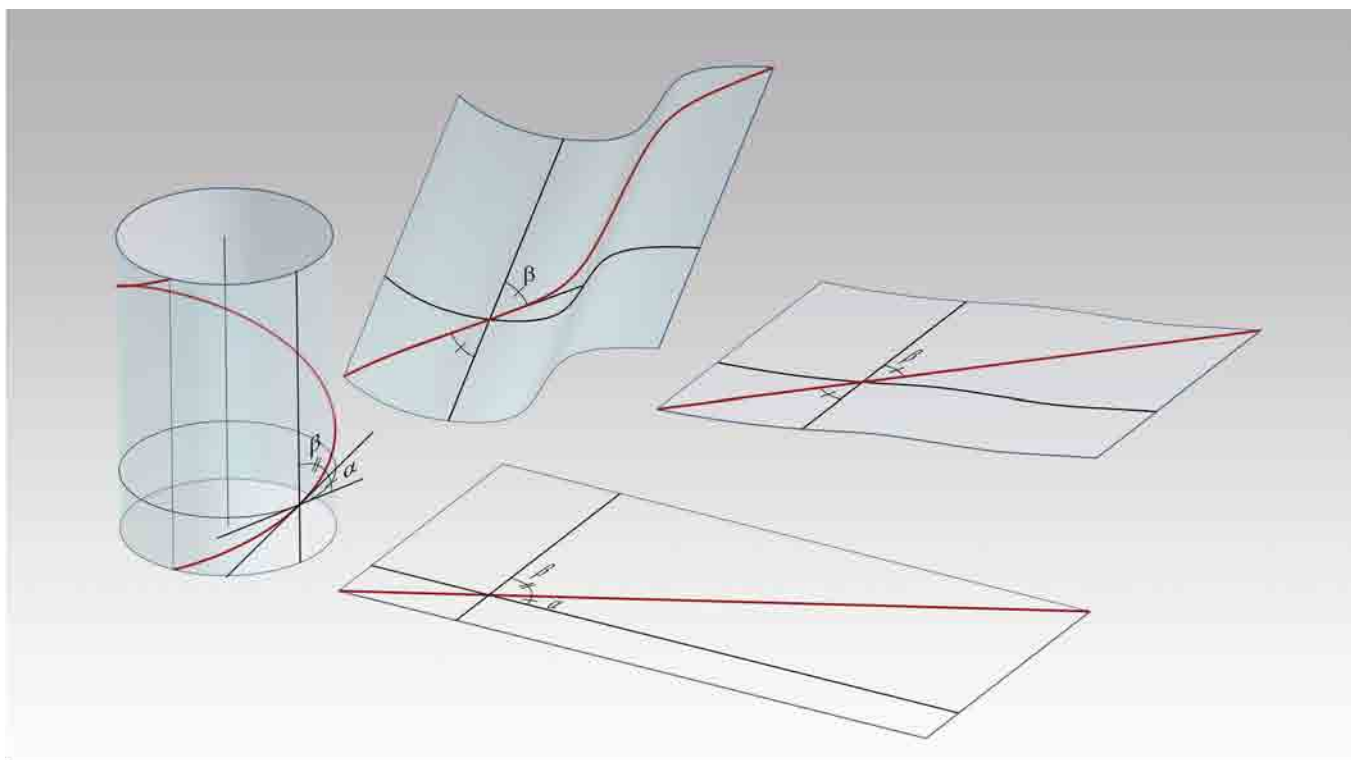
8/ Un cono essendo una superficie sviluppabile può essere sviluppata nel piano conservando la lunghezza e gli angoli delle linee tracciate sulla sua superficie.



9/ Le linee geodetiche appartenenti ad una superficie conica quando vengono rettificare sono delle rette e viceversa. Le geodetiche sono l'equivalente delle rette nel piano, ovvero sono le linee di minima distanza fra due punti della superficie.

gli angoli fra le diverse linee vengono mantenuti. Allora due linee **L** e **M** disegnate sulla superficie del cono e che s'incontrano in un punto **P** secondo un certo angolo β , nello sviluppo saranno due linee **L'** e **M'** di uguale lunghezza che s'incontreranno secondo lo stesso angolo β . Per avere la corrispondenza biunivoca fra la porzione di superficie del cono considerata e quella sviluppata nel piano è opportuno immaginare il cono aperto lungo una sua generatrice **a** (nel curva direttrice fosse una curva chiusa) in modo che abbia due lembi corrispondenti lungo quella generatrice. Inoltre è opportuno limitarsi a porzioni di superficie conica che, una volta sviluppate, non ricoprano più di una volta nessuna parte di piano. Può accadere, infatti, che continuando a sviluppare il cono sul piano α intorno al vertice **V**, si ricopra due volte lo stesso piano e si sovrappongano l'una sull'altra le porzioni di superficie sviluppata.

Queste proprietà consentono di ridurre lo studio delle figure sopra una superficie conica allo studio di figure piane. Per esempio nello studio delle *linee geodetiche*. Queste linee misurano la minima distanza fra due punti **A** e **B** di una superficie e possono essere considerate le corrispettive delle linee rette sopra un piano. E' evidente che le geodetiche di un cono vengono sviluppate secondo linee piane e viceversa ogni linea piana è lo sviluppo di arco di geodetica. Nella modellazione matematica è possibile effettuare questa operazione in modo da controllarne gli sviluppi avendo cura, però, di rispettare alcune regole. Per esempio quando si fa l'operazione inversa di proiettare le linee sviluppate nel piano sulla superficie conica bisogna fare in modo che la lunghezza delle linee rientri nei bordi della superficie, in modo da garantire una corrispondenza biunivoca e non creare ambiguità di nessun tipo. Per esempio sono date la su-



10/ 11/ Nel caso del cilindro di rotazione le eliche cilindriche sono anche delle lossodromie della superficie perché formano un angolo costante con le generatrici del cono che sono anche meridiani della superficie

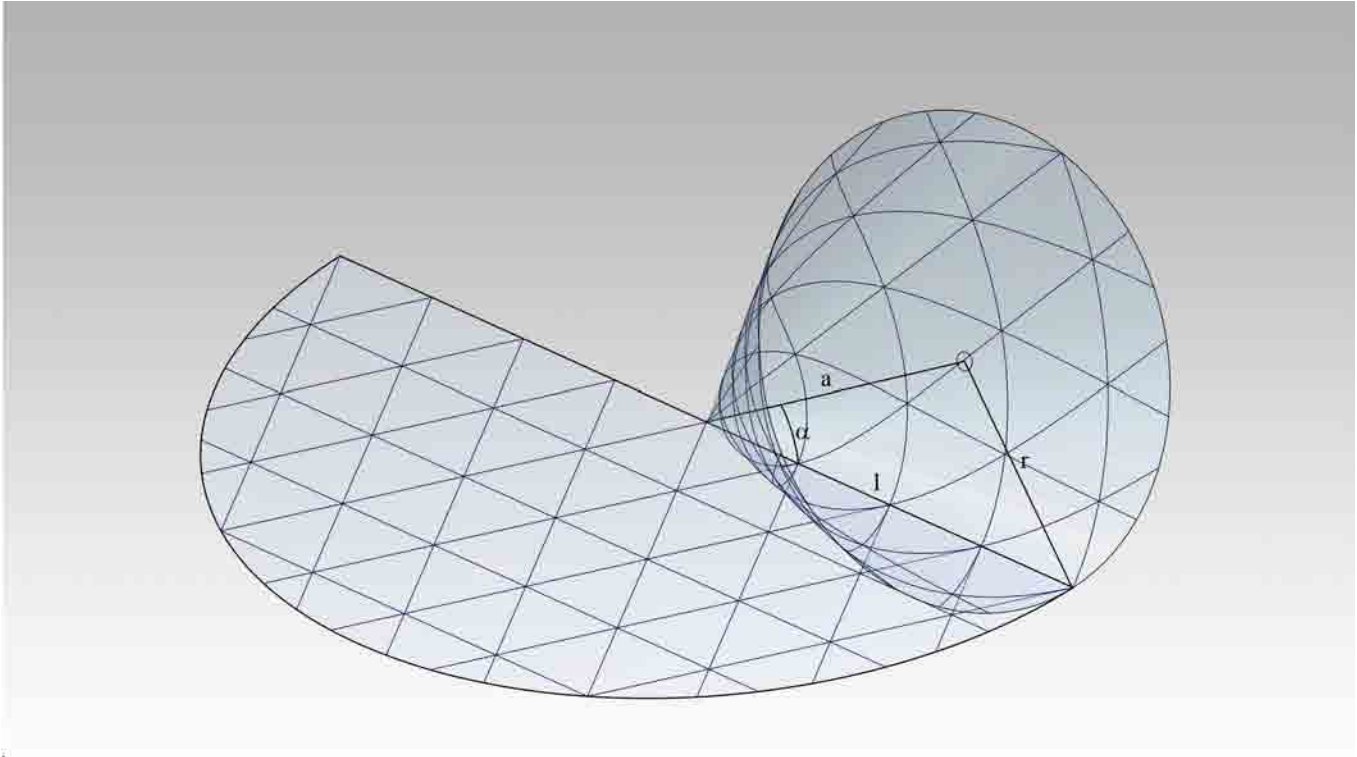
superficie conica C e il suo sviluppo piano C' , attraverso i suoi tre bordi s' , t' , v' (fig. 9). Consideriamo il triangolo rettangolo A' , B' , C' . Questo triangolo è formato da tre segmenti di una certa lunghezza 5 , 4 , 3 che formano un triangolo rettangolo in α' . Sulla superficie conica il triangolo è formato da segmenti di curve geodetiche a , b , c della medesima lunghezza 5 , 4 , 3 e che formano gli stessi angoli α , β , γ . Gli angoli α , β , γ si misura nei rispettivi piani formati dalle tangenti agli estremi delle curve a , b , c .

Se svolgiamo sopra un piano tangente una superficie cilindrica otteniamo lo sviluppo del cilindro. Come nel caso del cono abbiamo considerato una piramide, per il cilindro pensiamo ad un prisma e al suo caso limite. La porzione di piano è limitata da due rette parallele che corrispondono alle generatrici del cono anch'esse parallele fra loro. Nel caso del cilindro, a differenza del

cono, non avviene mai che due o più porzioni di piano vengano ricoperte dallo sviluppo.

Come per il cono le linee geodetiche del cilindro si trasformano in dei segmenti di retta nello sviluppo piano. Inoltre queste rette nello sviluppo incontrano le rette generatrici parallele sempre sotto uno stesso angolo β . Le geodetiche cilindriche di conseguenza incontrano anch'esse le generatrici del cilindro tutte sotto un medesimo angolo costante β . Nel caso generale in cui quest'angolo non sia nullo o retto, le geodetiche cilindriche sono anche *eliche cilindriche* (fig. 10).

Una retta che ruota attorno ad un asse e appartiene al piano formato dalla due entità genera un cono o un cilindro di rotazione rispettivamente se la retta è o non è incidente l'asse. Nel caso del cilindro di rotazione le eliche cilindriche sono anche delle *lossodromie* della superficie perché formano un angolo costante con le



12/ 13/ Nel caso di un cilindro rotondo l'ampiezza dell'arco di circonferenza rettificato è pari ad un angolo piatto quando la generatrice del cono forma un angolo di 30° con l'asse del cono.

generatrici del cono che sono anche meridiani della superficie. L'angolo α si misura nel piano formato dalla tangente all'elica nel punto considerato e la generatrice passante per quel punto (fig. 11).

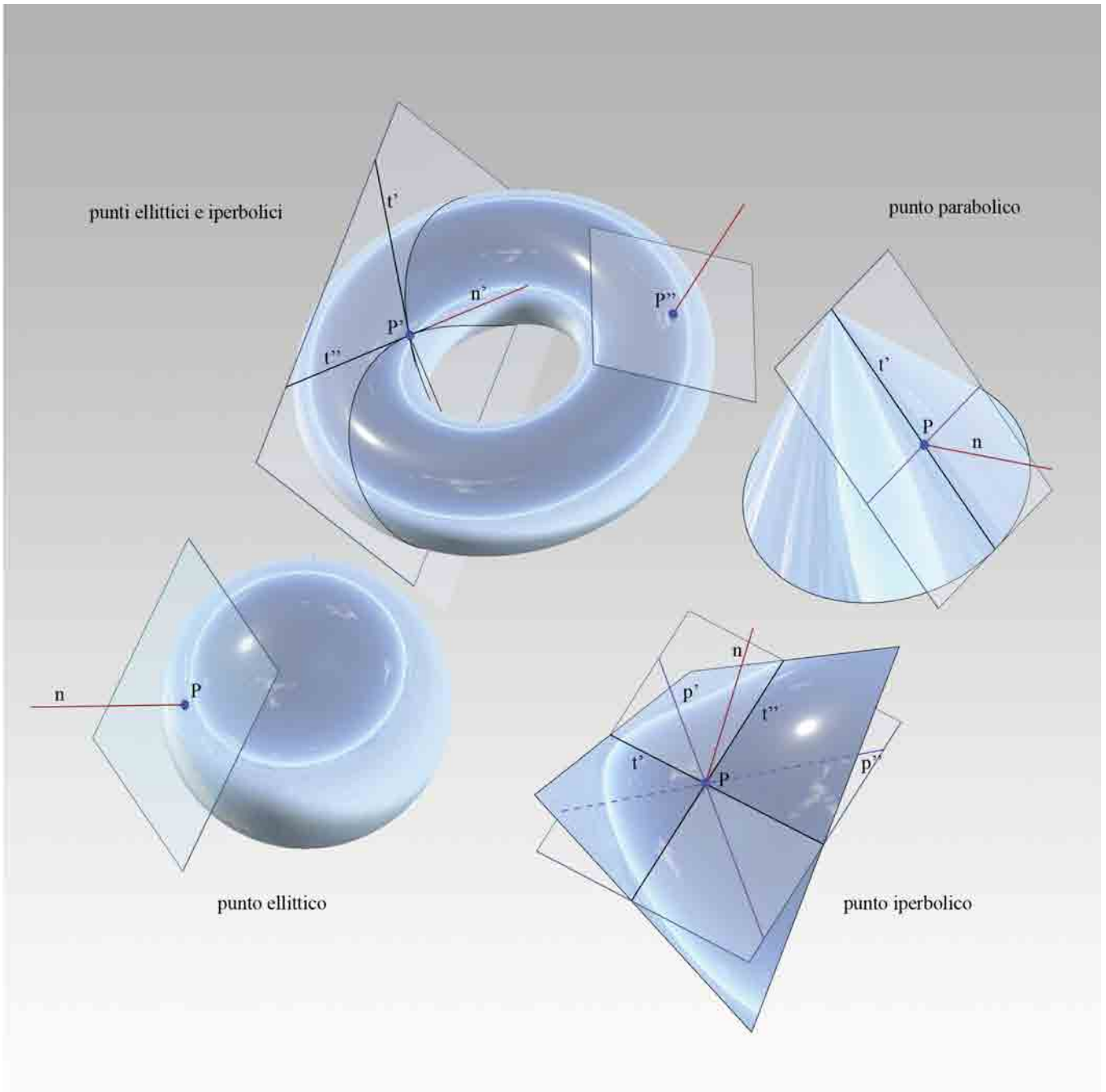
Un cilindro rotondo di raggio r si sviluppa sul piano un rettangolo di larghezza pari alla generatrice l e di lunghezza pari alla circonferenza $2\pi r$. Per capire l'ampiezza dell'angolo che forma lo sviluppo di un cono consideriamo un piano passante per l'asse e una generatrice qualsiasi (fig. 12). La generatrice l forma un angolo α con l'asse a del cono. Allora il raggio della base del cono è pari ad $l \sin \alpha$. La circonferenza della base è uguale ad $2\pi l \sin \alpha$. Lo sviluppo del cono avrà come raggio la generatrice l e come arco di base la lunghezza pari alla circonferenza del cono. L'area della *superficie laterale* di un cono si ottiene moltiplicando la lunghezza della circonferenza di base per la misura dell'apotema e

dividendo tale prodotto per due. Per cui l'ampiezza della superficie sviluppata è pari $l 2\pi l \sin \alpha / 2 = \pi r l$. Siccome α è sempre minore di un angolo retto allora la superficie di sviluppo non coprirà mai interamente il piano. Nel caso α sia uguale a 30° l'ampiezza della porzione della superficie sarà uguale ad un semipiano.

Nel cono (o cilindro) circolare retto è possibile disegnare comodamente una rete di geodetiche che si richiuda perfettamente (fig. 13). La rete di geodetiche può creare una maglia triangolare che viene prima disegnata nel piano, attraverso delle rette, e , successivamente, "proiettata" sulla superficie conica.

Tangenti principali. Punti ellittici, parabolici, iperbolici

Il piano tangente di una superficie qualsiasi in un determinato punto è dato dalle tangenti alle linee tracciate



14/ 15/ 16/ Rappresentazioni delle superfici a punti ellittici (sfera), parabolici (sviluppabili), iperbolici (superfici rigate). Il toro è una superficie a punti sia ellittici e sia parabolici

sulla superficie passanti per quel punto. Se immaginiamo le infinite linee tracciate sulla superficie che passano per quel punto, le rispettive tangenti formano un fascio di rette. Ogni superficie è incontrata, generalmente, dal piano tangente in un suo punto generico secondo una curva avente nel punto di contatto un punto doppio.

Le tangenti principali sono le tangenti alle linee intersezioni del piano tangente con la superficie nel punto di contatto (fig. 14). Queste sono chiamate anche *tangenti tripunte* o *d'inflessione* perché devono considerarsi come aventi tre punti di contatto con la superficie nell'intorno del punto.²

In un punto **O** di una superficie ci saranno solo due tangenti principali reali e distinte, una sola (cioè due coincidenti) oppure nessuna a seconda che il punto è un *nodo*, una *cuspidale* o un *punto isolato*. Quando vi sono due tangenti principali **t'** e **t''** distinte il *punto è iperbolico* (per esempio in un paraboloide iperbolico); se la tangente **t'** è una sola il *punto sarà parabolico* (i coni e i cilindri); infine se non esistono tangenti principali il *punto sarà ellittico* (la sfera).

Una superficie rigata ha tutti i suoi punti iperbolici mentre nelle sviluppabili i punti sono parabolici. Infatti immaginiamo un cono. Il piano tangente in un suo punto sarà tangente alla superficie lungo tutta la sua generatrice passante per il punto scelto e taglierà la superficie secondo la generatrice contata due volte. Se la superficie è una sviluppabile generica è possibile che il piano tangente tagli la superficie secondo la generatrice e una curva residua.

Il comportamento di una superficie rispetto al piano tangente in un intorno piccolo dipende dalla specie del punto considerato. In prossimità di un *punto ellittico*, la superficie sta tutta da una stessa parte rispetto al piano tangente in quel punto. In prossimità di un *punto parabolico* generalmente la superficie sta tutta da una parte rispetto al piano tangente. In certi casi lungo la direzione della tangente principale la superficie potrebbe variare. In prossimità di un *punto iperbolico*, la superficie sta da una parte del piano tangente lungo le direzioni

comprese in uno dei due angoli formati dalle tangenti principali, e nelle direzioni dell'altro angolo sta dall'altra parte. Va ricordato che una superficie che non sia una rigata o una sfera, come può essere il toro, può essere costituita da punti di diverso tipo (fig. 15).

Linee asintotiche

Una linea asintotica è una linea appartenente alla superficie dove tutte le tangenti sono tangenti principali della superficie. Se immaginiamo di prendere un punto **P** su una superficie e di individuare la direzione di una tangente principale **t**. Esiste il punto successivo **P1** nella direzione **t**, che ha la tangente principale **t2**, e così via. E' possibile, allora, individuare la linea della superficie formata dai vari punti così individuati.

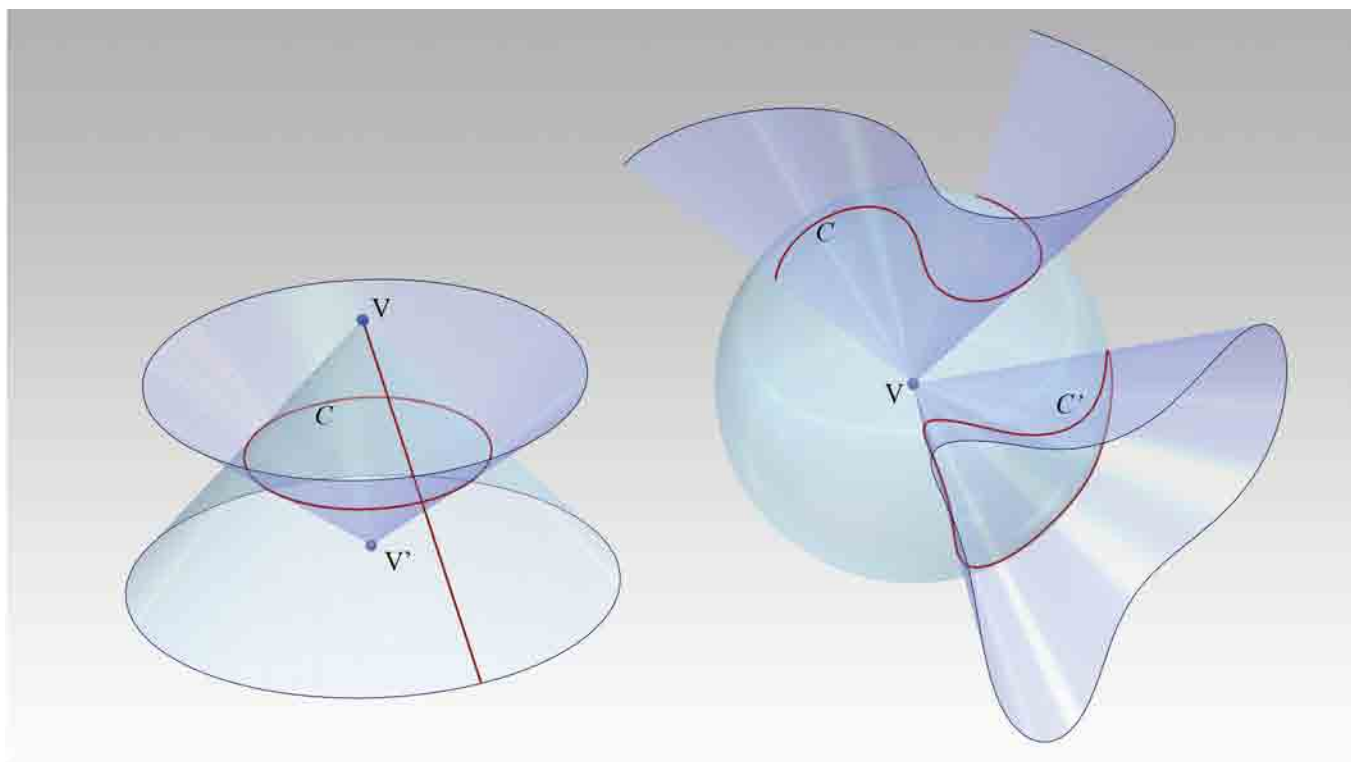
Da quanto detto in una superficie iperbolica per ogni punto passeranno due linee asintotiche. In particolare per *una superficie quadrica rigata le generatrici sono tutte linee asintotiche*. Perché una retta nella superficie rigata fa sempre parte dell'intersezione del piano tangente colla superficie in qualsiasi punto della retta. Per cui la generatrice è tangente principale in ogni suo punto ed è perciò essa stessa la linea asintotica. *In una superficie sviluppabile le generatrici rette saranno tutte linee asintotiche.*

Linee di curvatura. Proprietà delle normali a una superficie nei punti di una linea di curvatura

In un punto iperbolico di una superficie si dicono *tangenti coniugate* due tangenti che separano armonicamente la coppia delle tangenti principali. Allora vi sono infinite tangenti coniugate, che formano un'*involutione iperbolica*, nella quale le due tangenti principali sono i due elementi doppi³. Nelle superfici quadriche due tangenti coniugate sono rette coniugate fra loro nel sistema polare della quadrica.

Le asintotiche di una superficie godono della proprietà caratteristica di avere in ogni loro punto come piano osculatore lo stesso piano ivi tangente alla superficie⁴.

La linea di curvatura è una linea appartenente alla su-

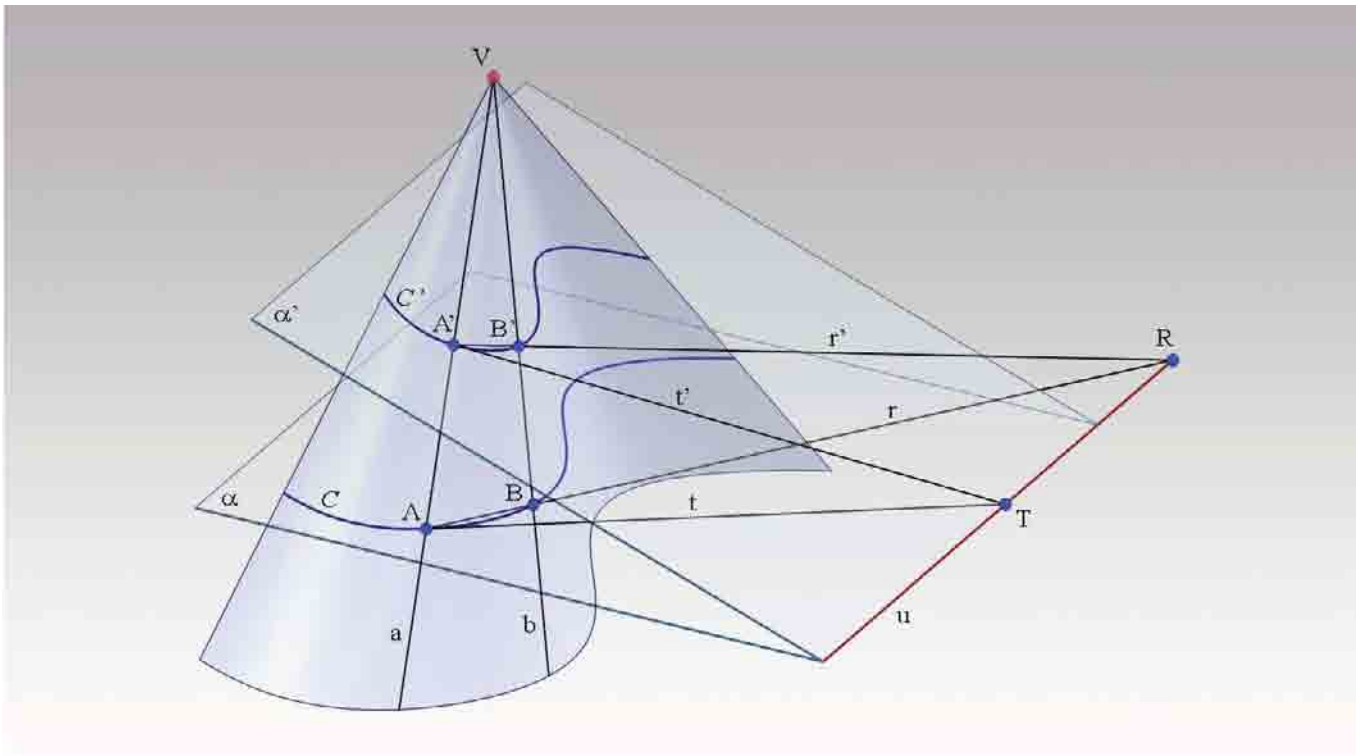


17/ Le normali a una superficie nei punti di una linea di curvatura formano una rigata sviluppabile; e viceversa ogni linea tracciata sopra una superficie, dove le normali formino una sviluppabile, è una linea di curvatura.

perficie che ha le tangenti tutte normali alle rispettive coniugate. In un involuzione di rette (non circolare), vi è una sola coppia di rette coniugate perpendicolari. In una superficie generica in ogni punto vi sarà solo una coppia di tangenti coniugate perpendicolari. Se il punto è parabolico, come per la superficie sviluppabile, la coppia di tangenti si compone della sola tangente principale e di quella perpendicolare ad essa. Per ogni punto di una superficie, che non sia un ombelico⁵, passano due linee di curvatura fra loro ortogonali (fig. 16). Le linee di curvatura passanti per un punto iperbolico di una superficie (per esempio una paraboloidi iperbolico) bisecano gli angoli formati dalle asintotiche che passano per questo punto. E delle linee di curvatura passanti per un punto parabolico, una è ivi tangente e l'altra normale alle due asintotiche coincidenti⁶. Nell'esempio illustrato mi sono limitato a mettere in evidenza la direzione delle

due tangenti \mathbf{p}' e \mathbf{p}'' (rette viola) delle linee di curvatura nel punto \mathbf{P} di una rigata (iperboloidi iperbolico) e della tangente doppia \mathbf{p}' di una sviluppabile (cono). Le rette rosse indicano la direzione della normale \mathbf{n} al piano tangente nel punto \mathbf{P} considerato, mentre le linee nere rappresentano le linee asintotiche passanti per \mathbf{P} , che sono le generatrici rette della superficie rigata.

La normale ad una superficie in un suo punto è la retta ortogonale al piano tangente alla superficie nel punto considerato. Le normali a una superficie nei punti di una linea di curvatura formano una rigata sviluppabile; e viceversa ogni linea tracciata sopra una superficie, dove le normali formino una sviluppabile, è una linea di curvatura. Una superficie dove ogni punto è ombelico, come la sfera, ogni linea tracciata sulla superficie è linea di curvatura (fig. 17). Infatti tutte le normali alla superficie s'incontrano a due a due proprio nel centro della



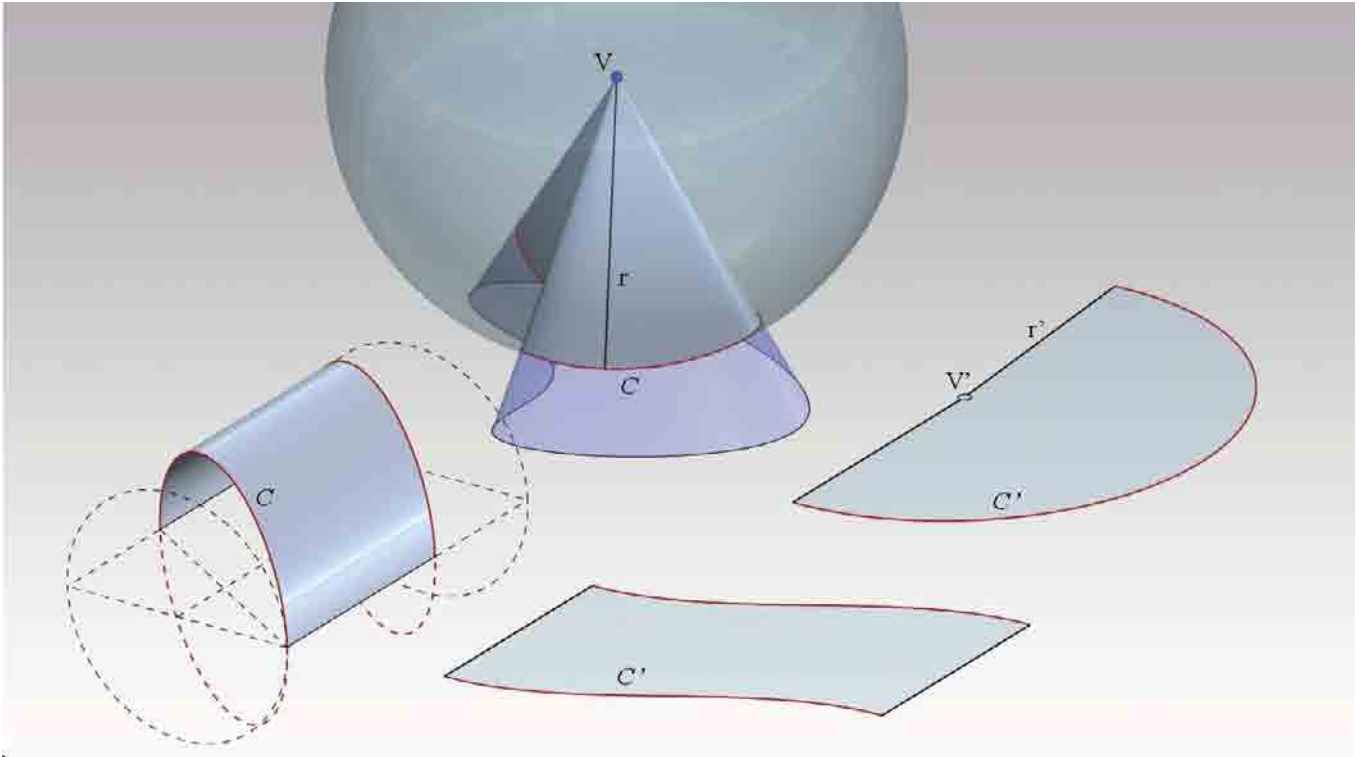
18/ Le sezioni determinate in un cono da due piani non passanti per il vertice sono curve omologiche dove il vertice V è il centro dell'omologia e la retta u intersezione dei due piani sezione è l'asse dell'omologia.

sfera. Per cui qualsiasi superficie ortogonale alla sfera sarà una sviluppabile, in particolare sarà un cono con il vertice nel centro della sfera. Per capirlo basta affidarci all'intuito. Qualsiasi punto della sfera ha la normale che passa per il centro della sfera. Quindi tutte le normali sono incidenti in un punto. Una superficie che taglia ortogonalmente una stella di rette è una sfera. La sfera è la sola superficie in cui ogni linea di essa è linea di curvatura.

Sezioni omologiche piane di coni e cilindri

Un cono od un cilindro nella rappresentazione matematica sono determinati da una direttrice piana qualsiasi e dal vertice, che nel caso del cono è un punto proprio mentre nel caso del cilindro è una direzione. Un importante teorema sui coni dice che: *Le sezioni determinate in un cono da due piani non passanti per il*

vertice sono curve omologiche dove il vertice V è il centro dell'omologia e la retta u intersezione dei due piani sezione è l'asse dell'omologia. Allora dato un cono di vertice V e direttrice qualsiasi, tagliamolo con due piani α e α' (fig. 18). Questi determinano due curve omologiche C e C' . Allora una retta r appartenete al primo piano α che taglia la curva C in due punti A e B e interseca l'asse u dell'omologia nel punto R , deve avere la sua corrispondente r' sul piano α' e che taglia la curva C' nei rispettivi punti A' e B' . Questi ultimi sono determinati dalle due generatrici a e b del cono che passano per i punti considerati. Le tangenti t e t' alle due curve nei punti corrispondenti come A ed A' s'intersecano sull'asse dell'omologia nel punto T . Sia dato un punto P nello spazio e un cono generico, e si voglia costruire il *piano tangente* al cono passante per il punto P . La costruzione più generale possibile fa



19/ 20/ La sezione piana dell'ellissi C di un cilindro di rotazione si sviluppa in un arco di senoide. La linea d'intersezione di una sfera di centro V con la superficie conica generica di vertice V è una curva sghemba che rettifica dà luogo ad un arco di cerchio di raggio pari alla lunghezza del raggio r della sfera.

uso delle proprietà del contorno apparente. Per cui si determina il contorno apparente del cono dal punto P . Questo sarà costituito da un certo numero di generatrici rette. Queste saranno sempre due nel caso di un cono quadrico. Una volta individuate le generatrici rette appartenenti al contorno apparente è sufficiente disegnare il piano individuato dal punto P e dalla relativa tangente. La costruzione è la stessa per un cilindro.

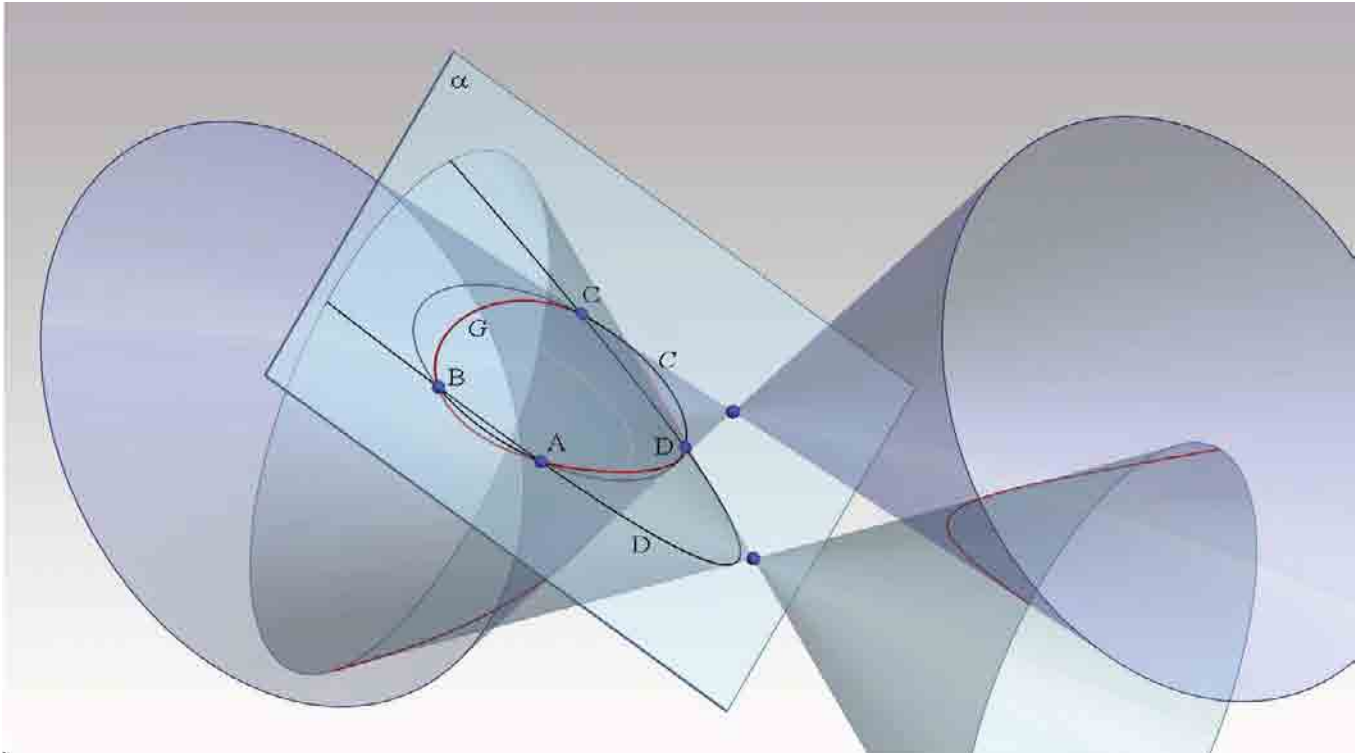
Casi particolari di sviluppo di un cono e di un cilindro

Caso di un cilindro di rotazione e dell'ellisse sua intersezione obliqua con un piano non parallelo né perpendicolare alle generatrici. La sezione piana dell'ellissi C si sviluppa o rettifica in un arco di senoide⁷ (fig. 19). Questa proprietà risulta importante per le volte oblique. Infatti l'intradosso di una volta obliqua è una porzione

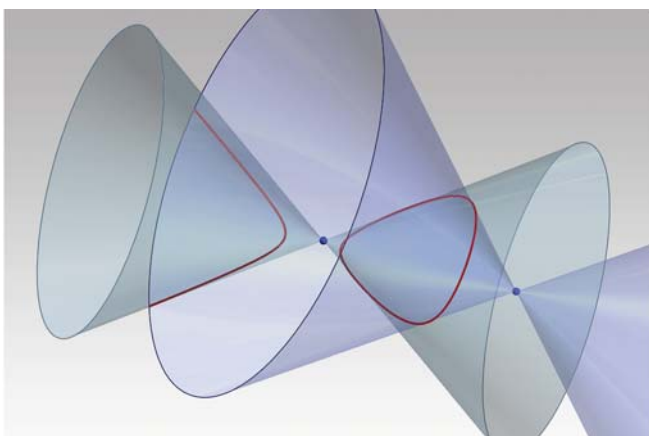
di superficie cilindrica, generalmente rotondo, compresa fra due sezioni oblique parallele. Vedremo nell'appendice come applicare all'apparecchio elicoidale tale proprietà. Un altro caso interessante si presenta quando si deve sviluppare un cono qualsiasi oppure un cono quadrico generico (non di rotazione). E' possibile tagliare il cono con una sfera di raggio a piacere r e centro nel vertice V del cono (fig. 20). La linea intersezione è una curva sghemba che potrebbe sembrare particolarmente complessa nella sua rettificazione. Questa curva, però, ha la proprietà di tagliare ad angolo retto tutte le generatrici del cono, e di disporsi nello sviluppo secondo un arco di cerchio di raggio r uguale a quello della sfera.

Coni e cilindri di 2° grado e loro intersezioni.

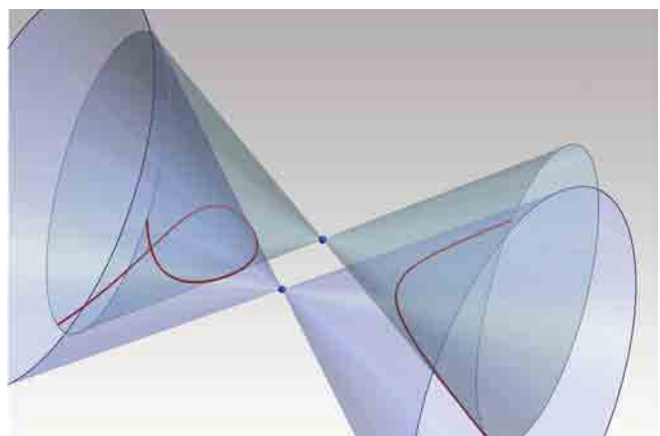
Un cono o cilindro di secondo grado è una superficie



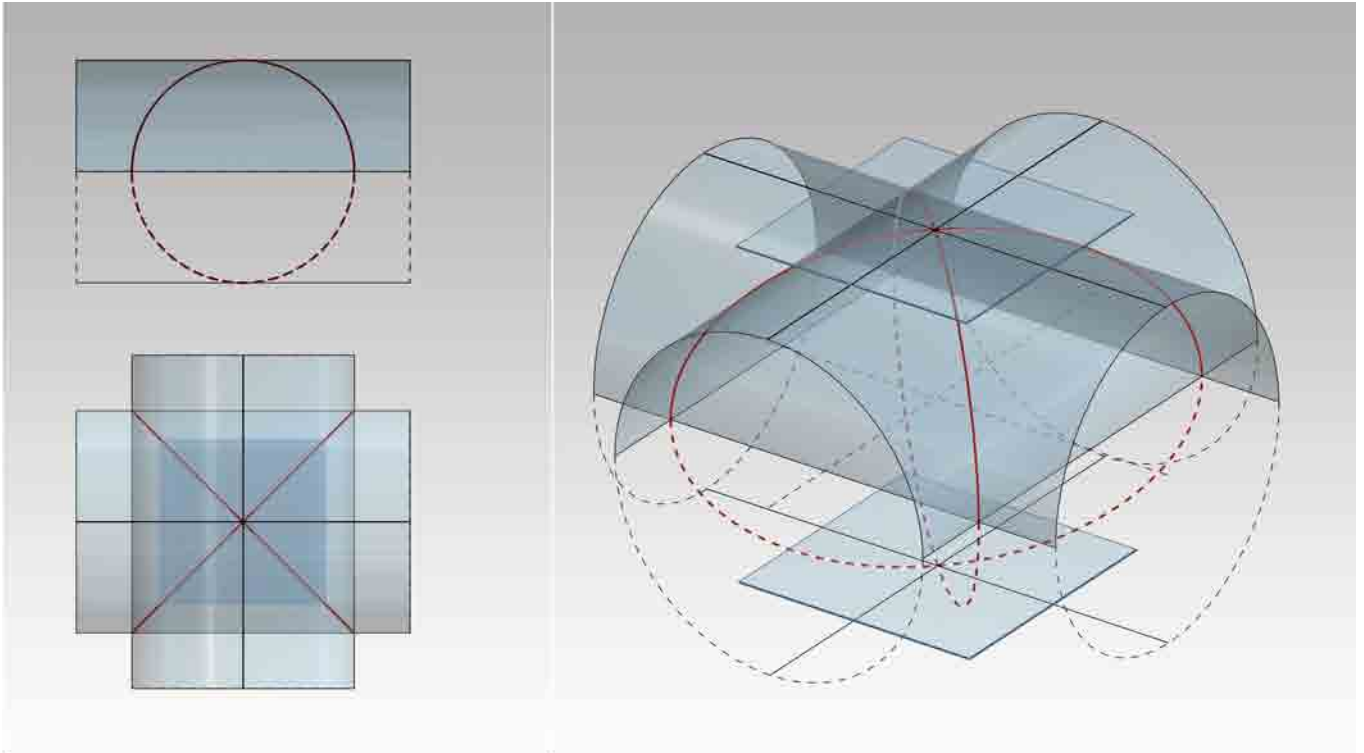
21/ 22 Due coni (o cilindri) quadrici s'incontrano, generalmente, secondo una linea sghemba **G**, la quale è incontrata da un piano α generico (che non passi per una generatrice o una possibile conica comune ai due coni) in quattro punti distinti **A**, **B**, **C**, **D**, comuni alle due coniche **C** e **D** secondo cui lo stesso piano taglia i due coni. Si dice che questa linea è una curva sghemba di 4°ordine o quartica sghemba. Si dice che l'intersezione **C** avviene per penetrazione mutua quando tutte le generatrici dei due coni incontrano l'altro.



23/ La curva intersezione **C** si dice penetrazione semplice quando solo le generatrici di uno dei due coni incontrano l'altro.



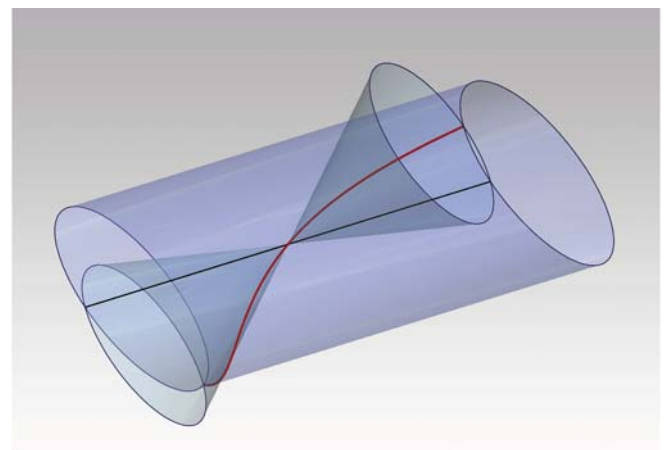
24/ Quando solo una parte delle generatrici dei due coni s'incontrano si dice che l'intersezione avviene per sfaldamento.



25/ Due cilindri quadrici che ammettono gli stessi piani tangenti lungo due generatrici s'intersecano secondo delle curve piane, in particolare secondo due coniche.

ottenuta proiettando una conica da un punto V esterna al piano di essa. Come sappiamo le sezioni piane di un cono quadrico sono coniche e nel caso del cilindro sono curve affini. Esistono tre tipi di cilindri quadrici (ellittici, parabolici, iperbolici) secondo il tipo di direttrice. Il cono quadrico, invece, contiene tutte e tre i tipi di coniche. I coni quadrici, come il cono ellittico in figura, hanno tre assi triortogonali principali passanti per il centro della superficie che è il vertice. Nel caso del cono quadrico circolare i tre assi si riducono ad uno solo perché la sezione principale è una circonferenza che non ha assi principali.

Due coni (o cilindri) quadrici s'incontrano, generalmente, secondo una linea sghemba G , la quale è incontrata da un piano α generico (che non passi per una generatrice o una possibile conica comune ai due coni) in quattro



26/ Due coni quadrici aventi una generazione comune, ma non lo stesso piano tangente lungo la generazione comune, s'incontrano secondo un'altra curva sghemba di 3° ordine, detta cubica sghemba.

punti distinti **A, B, C, D**, comuni alle due coniche *C* e *D* secondo cui lo stesso piano taglia i due coni. Si dice che questa linea è una curva sghemba di 4° ordine o quartica sghemba (fig. 21).

L'intersezione di due coni e di due cilindri quadrici che non abbiano il vertice comune può dar luogo a tre casi fondamentali:

- le generatrici di uno almeno dei due coni incontrano tutte le generatrici dell'altro. Si dice *compenetrazione semplice* quando solo le generatrici di uno dei due coni incontrano tutte quelle dell'altro (fig. 22);
- Mentre si dice che l'intersezione avviene per *compenetrazione mutua* quando tutte le generatrici dei due coni s'incontrano (fig. 23). *La curva intersezione è formata da due rami di curve sghembe*, perché bisogna sempre considerare le due falde del cono.
- Quando solo una parte delle generatrici dei due coni s'intersecano si dice che l'intersezione avviene per *sfaldamento* (fig. 24).

Infine i coni sono esterni l'uno all'altro e non hanno nessuna intersezione reale.

Può avvenire che la curva intersezione fra due cilindri di rotazione sia una curva piana (fig. 25). E' il caso che si riscontra, per esempio, nelle volte composte. Queste volte sono per lo più costituite da cilindri di rotazione e le volte composte, come la volta a crociera, hanno come curve intersezioni nei costoloni archi di ellisse. Consideriamo i due cilindri con assi appartenenti al piano orizzontale. Le superfici cilindriche, che costituiscono l'intradosso della volta, hanno lo stesso piano tangente lungo le rispettive generatrici culminanti, e hanno in comune il piano tangente diametralmente opposto. Le due superfici si toccano, allora in due punti che appartengono ad una stessa verticale. I due cilindri si tagliano secondo due sezioni di ellissi appartenenti a due piani verticali diagonali.

Due coni quadrici aventi una generazione comune, ma non lo stesso piano tangente lungo la generazione comune, s'incontrano secondo un'altra curva

sghemba di 3° ordine, detta cubica sghemba (fig. 26).

Le quadriche rigate

Le quadriche sono superfici di secondo grado. Una quadrica ha in comune con una retta non contenuta in essa, o due punti distinti, o un solo punto (due punti coincidenti) o nessun punto. La retta si dice rispettivamente: secante, tangente, o esterna alla superficie. Inoltre un piano interseca una superficie quadrica qualsiasi sempre secondo una conica o, al limite, in una coppia di rette nel caso delle quadriche rigate⁸.

I punti di una quadrica rispetto ad un piano tangente, sono tutti ellittici o iperbolici. Le quadriche a punti ellittici rispetto a un piano hanno tre comportamenti differenti:

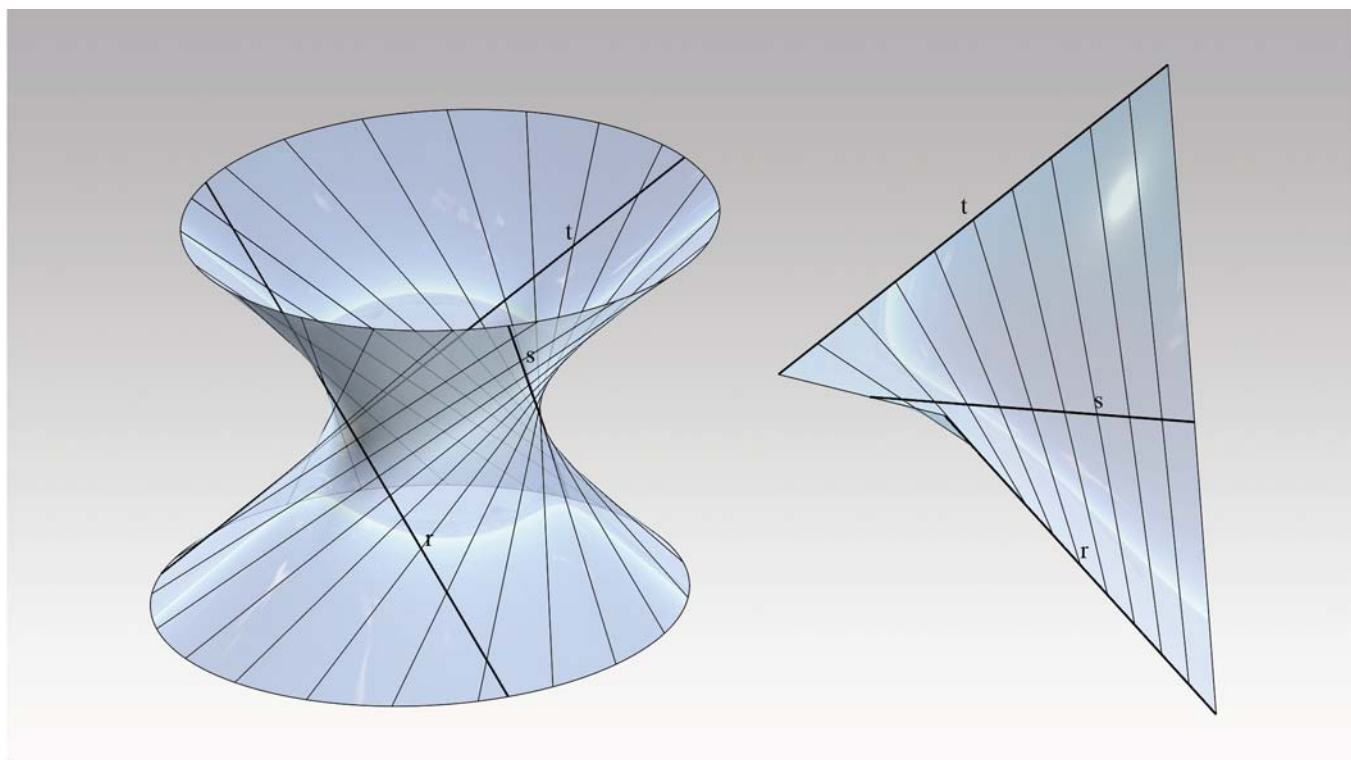
- Quando il piano è esterno completamente non c'è nessuna intersezione;
- Quando il piano è secante si ha sempre una conica;
- Quando il piano è tangente la tocca solo in un punto (pensiamo al piano tangente ad una sfera).

Le quadriche a punti ellittici sono l'ellissoide, l'iperboloido a due falde, il paraboloido ellittico.

Le quadriche a punti iperbolici sono superfici rigate che contengono un doppio sistema di generatrici rette o schiere rigate e hanno le seguenti proprietà:

- per ogni punto della superficie rigata quadrica passano due rette appartenenti alle due schiere;
- due generatrici di una stessa schiera sono sempre sghembe fra loro, mentre due generatrici appartenenti a schiere diverse sono sempre incidenti fra loro;
- Le infinite rette di una schiera di rette segano sopra l'altra schiera infinite punteggiate proiettive, e sono proiettate da queste secondo fasci di piani proiettivi.

E' una *schiera rigata* la superficie che si appoggia sopra tre rette sghembe **r, s, t** qualsiasi. Le tre rette sono a loro volta generatrici dell'altro sistema di rette. In altre parole comunque si prendano tre rette su una stessa schiera di rette, la superficie generata da una retta che nel suo movimento si appoggi a quelle tre è sempre la stessa. Le quadriche rigate, esclusi i coni e cilindri quadrici,



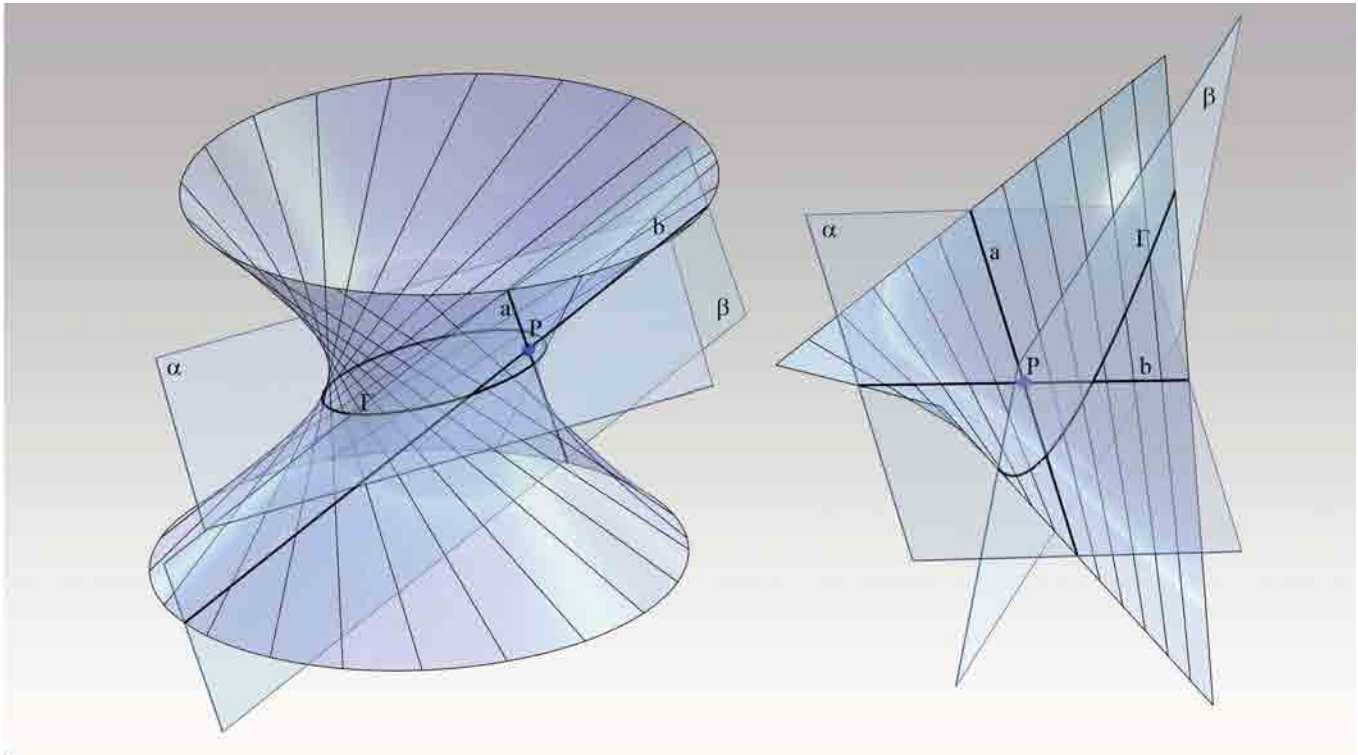
27/ Le quadriche rigate con due schiere di rette possono essere di due tipi: l'iperboloide ad una falda (o iperboloide iperbolico) e il paraboloide iperbolico.

possono essere di due tipi: l'iperboloide ad una falda (o iperboloide iperbolico) e il paraboloide iperbolico (fig. 27). Quest'ultimo si distingue perché è formato da due schiere di rette che hanno due piani direttori, ovvero le rette generatrici di una schiera sono tutte parallele ad uno dei due piani e viceversa. Allora quando le tre direttrici date r , s , t sono parallele ad un medesimo piano, queste individuano un paraboloide iperbolico. Esiste anche l'iperboloide di rivoluzione che si costruisce facendo ruotare una retta sghemba rispetto ad un asse. L'iperboloide di rivoluzione e il paraboloide iperbolico possono essere visti come casi particolari dell'iperboloide generico ad una falda. Per dimostrare che tre rette sghembe individuano un'unica quadrica rigata si rimanda al capitolo della proiettiva.

Un piano α qualsiasi taglia la quadrica rigata sempre secondo una conica Γ (fig. 28). In questo caso il piano è

detto *secante* e può avvenire che il piano tagli la superficie secondo una conica eventualmente spezzata in una coppia di rette. Non esistono piani esterni a una superficie rigata quadrica. Se il piano incontra la quadrica in una coppia di rette a e b incidenti in un punto P allora questo è un piano tangente alla superficie nel punto di contatto. Infatti il piano tangente a una quadrica rigata taglia la superficie secondo due rette appartenenti alle due schiere rigate passanti per il punto scelto.

I diversi piani tangenti alla quadrica lungo una generatrice formano un fascio di piani che è proiettivo alla punteggiata dei punti di contatto. Cioè ad ogni piano del fascio corrisponde un punto della retta punteggiata. Se si considerano quattro generatrici qualsiasi di una medesima schiera, nel paraboloide iperbolico quattro generatrici di una schiera segano le generatrici dell'altra schiera secondo dei rapporti semplici uguali.



28/ Un piano α qualsiasi taglia la quadrica rigata sempre secondo una conica Γ . Se il piano incontra la quadrica in una coppia di rette a e b incidenti in un punto P allora questo è un piano tangente alla superficie nel punto di contatto.

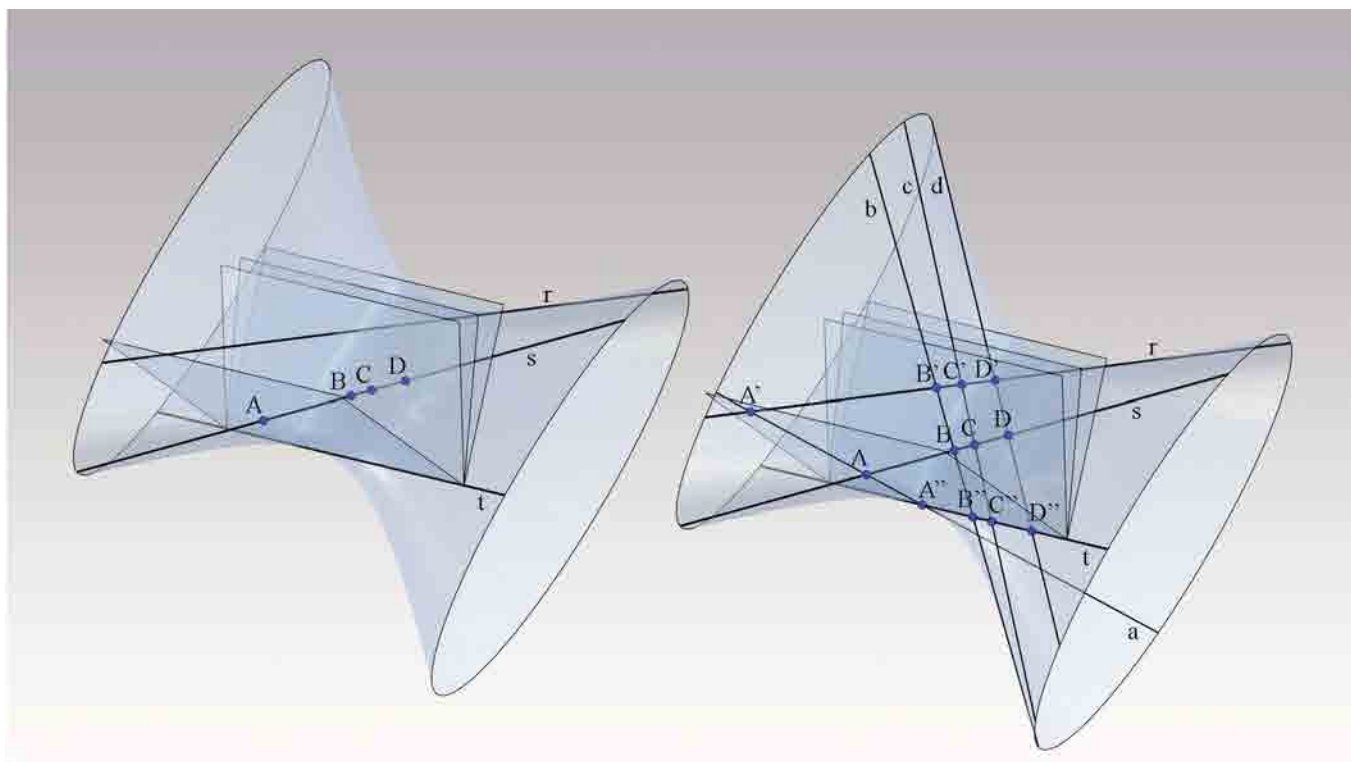
Nell'iperboloide ad una falda quattro generatrici di una schiera segano le generatrici dell'altra secondo dei birapporti uguali⁹.

Prendiamo sulla terza retta t un fascio armonico di piani (fig. 29). Per fare ciò basta disegnare una quaterna armonica di punti A, B, C, D sulla seconda direttrice s e far passare i quattro piani per la terza direttrice t e i quattro punti. Il fascio di piani di asse t intersecherà anche la prima direttrice r secondo una quaterna armonica A', B', C', D' , perché due forme prospettive di prima specie conservano il rapporto armonico. Per le coppie di punti corrispondenti passano le quattro generatrici a, b, c, d della seconda schiera che si appoggiano alle tre direttrici date. Queste tagliano la terza direttrice t secondo un'altra quaterna armonica di punti A'', B'', C'', D'' . E' evidente che le quattro generatrici a loro volta formano una quaterna armonica

di rette. Concludendo il fascio intersecherà l'altra schiera di rette secondo una schiera armonica di rette.

Il sistema polare rispetto ad una quadrica rigata

In una quadrica rigata è possibile determinare un sistema polare rispetto ad essa, ovvero dato un punto P nello spazio è determinato il piano polare π della quadrica e viceversa. Se il punto P appartiene alla superficie il piano polare corrispondente è il piano tangente alla superficie in quel punto. Se un punto P appartiene al piano polare θ di Q , quest'ultimo a sua volta apparterrà al piano polare π di P . I due punti come i due piani sono coniugati o reciproci rispetto alla superficie quadrica. Data una retta nello spazio è possibile associare ad ogni punto di essa un piano polare. Allora ad ogni retta dello spazio il sistema polare rispetto alla quadrica ne associa una seconda, tale che i piani polari dei punti di una delle due rette for-



29/ Nell'iperboloide ad una falda quattro generatrici di una schiera segano le generatrici dell'altra secondo dei birapporti uguali.

ma un fascio di piani attorno all'altra retta e viceversa. In generale le due rette polari sono due rette sghembe ma è possibile che siano incidenti in un punto e quindi appartengano allo stesso piano. Il polo del piano allora apparterrà al piano stesso e sarà il punto intersezione delle due rette. In questo caso le due rette saranno tangenti alla quadrica e saranno anche due *tangenti coniugate*. Non esiste un punto **P** interno ad una quadrica rigata. Da ogni punto *esterno* **P** possono essere costruiti infiniti piani tangenti alla quadrica. Questi sono i *piani proiettanti* da quel punto le singole generatrici della quadrica. I punti di contatto di questi piani tangenti appartengono tutti al piano polare del punto **P** rispetto alla quadrica. Questi piani involuppano un cono quadrico che è il cono circoscritto alla quadrica dal punto **P**. I punti di contatto formano una conica che è il contorno apparente della quadrica rispetto al punto **P**. Se il punto **P** appartiene

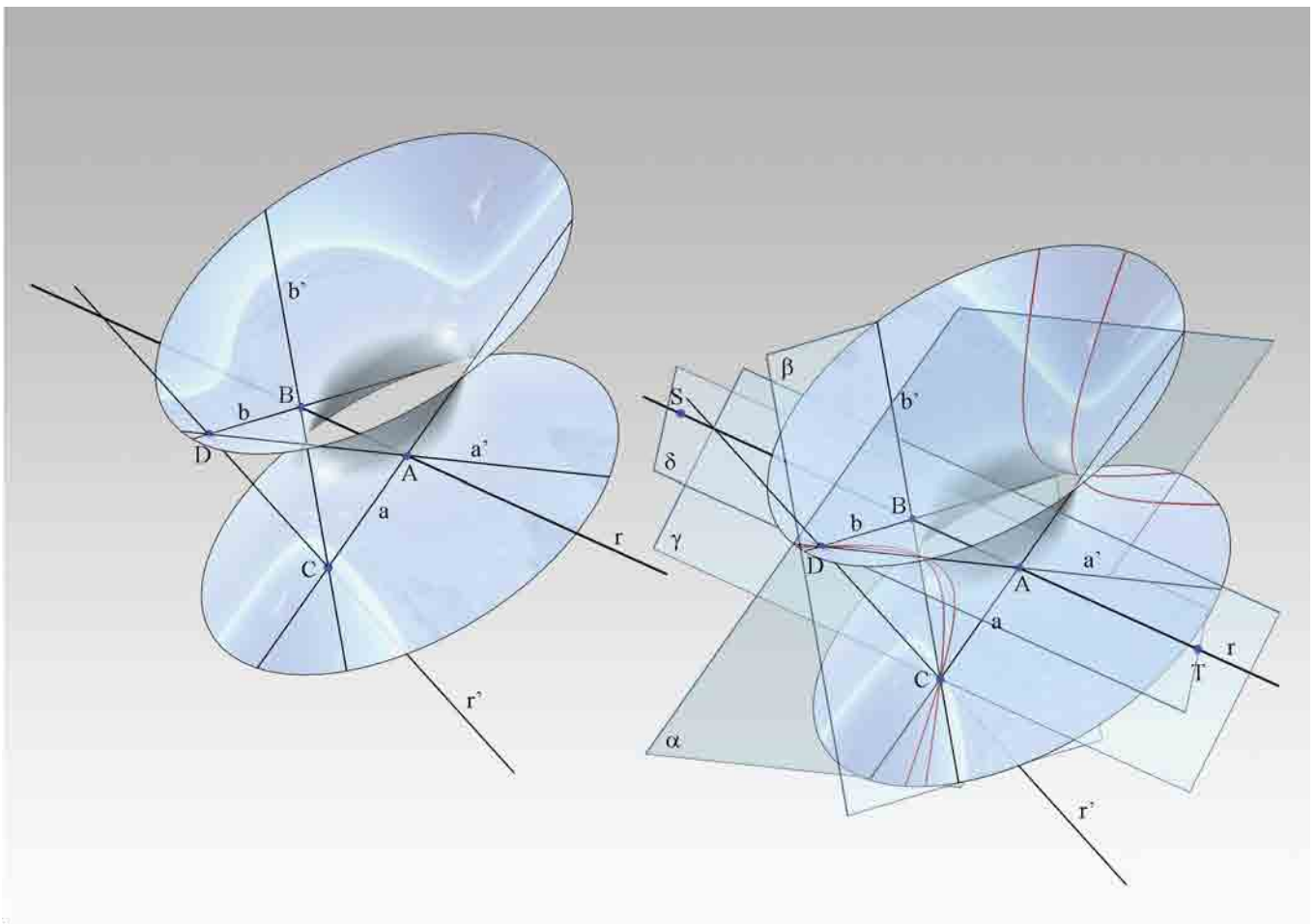
alla quadrica rigata per quel punto passeranno i piani tangenti che si appoggiano alle due rette generatrici che passano per quel punto. Allora il cono circoscritto di spezza in due fasci di piani aventi le due generatrici come assi. Per approfondire la questione si rimanda al secondo capitolo.

Piani tangenti ad una quadrica rigata per una retta data **r**

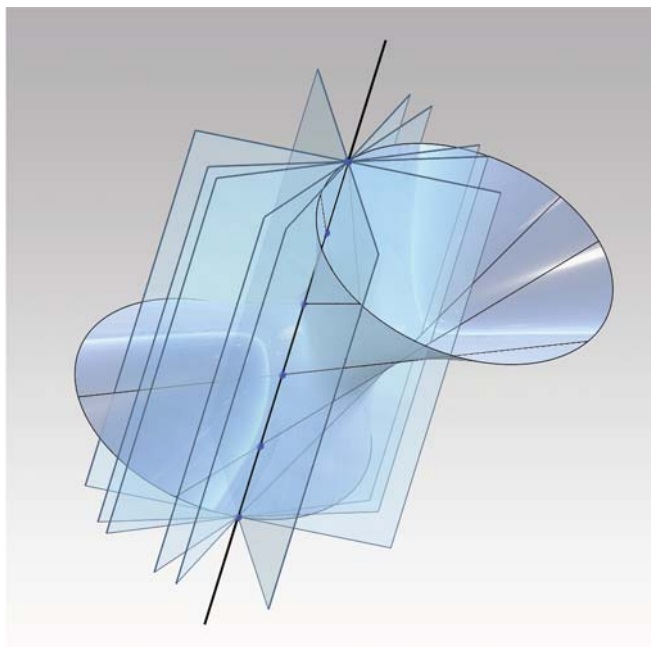
*Per una retta data **r** generica nello spazio si possono condurre alla superficie quadrica rigata o due piani tangenti distinti, o uno solo (due coincidenti), o infine nessuno. Data una quadrica rigata si possono condurre per ogni retta secante **r** due piani tangenti, mentre per una retta esterna non ne passa alcuno.* Allora se **r** è una retta secante incontra la quadrica in due punti **A** e **B** (fig. 30). La retta **r** si appoggia ad entrambe le rette generatrici

ci (\mathbf{a} e \mathbf{b} , \mathbf{a}' e \mathbf{b}') delle due schiere passanti per quei due punti. Per la retta \mathbf{r} passano i due piani tangenti \mathbf{ab}' (il piano γ) e $\mathbf{a'b}$ (il piano δ). Le rette senza apice e con apice appartengono rispettivamente alla prima e alla seconda schiera di rette della quadrica. La retta \mathbf{r}' coniugata di \mathbf{r} rispetto alla quadrica contiene i punti di contatto \mathbf{C} e \mathbf{D} dei due piani tangenti γ e δ . La retta \mathbf{r}' è anch'essa secante la quadrica. Un metodo alternativo per determinare la coniugata \mathbf{r}' di una retta data \mathbf{r} rispetto alla quadrica è il seguente: si staccano due punti \mathbf{S} e \mathbf{T} a piacere sulla retta \mathbf{r} . Si costruiscono i piani polari rispettivi alla quadrica che intersecano la quadrica

secondo due sezioni coniche Σ e \mathbf{T} : contorni apparenti della quadrica dai due punti \mathbf{S} e \mathbf{T} . Le due coniche Σ e \mathbf{T} contornano apparente s'intersecano nei due punti \mathbf{C} e \mathbf{D} che a loro volta individuano la retta \mathbf{r}' intersezione dei due piani polari delle coniche sezione. Se la retta \mathbf{r} è esterna alla quadrica rigata non è possibile costruire nessun piano tangente, perché il piano tangente dovrebbe incontrare le generatrici contenute nel piano stesso. Se la retta \mathbf{r} è una retta appartenente alla quadrica, ovvero una sua generatrice, i piani passanti per la \mathbf{r} sono tutti tangenti alla quadrica (fig. 31). La retta \mathbf{r}' coniugata di \mathbf{r} è la retta stessa. La retta \mathbf{r} diventa l'asse di un fa-



30/ Data una quadrica rigata si possono condurre per ogni retta secante \mathbf{r} due piani tangenti, mentre per una retta esterna non ne passa alcuno. Ogni retta \mathbf{r} determina anche la sua coniugata \mathbf{r}' rispetto alla quadrica.



31/ Se la retta r è una retta appartenente alla quadrica, ovvero una sua generatrice, i piani passanti per la r sono tutti tangenti alla quadrica. La retta r diventa l'asse di un fascio di piani tangenti alla quadrica, dove per ogni punti di contatto di r corrisponde un piano del fascio.

scio di piani tangenti alla quadrica, dove per ogni punti di contatto di r corrisponde un piano del fascio.

Nel caso in cui la retta r ha con la superficie un solo punto di contatto, per la retta r passerà un solo piano tangente e la retta polare r' sarà tangente alla quadrica. Allora quando una retta r è tangente alla quadrica si può costruire per essa un solo piano tangente alla quadrica, che è quello individuato dalle due generatrici passanti per il punto di contatto.

L'immagine di una quadrica rigata

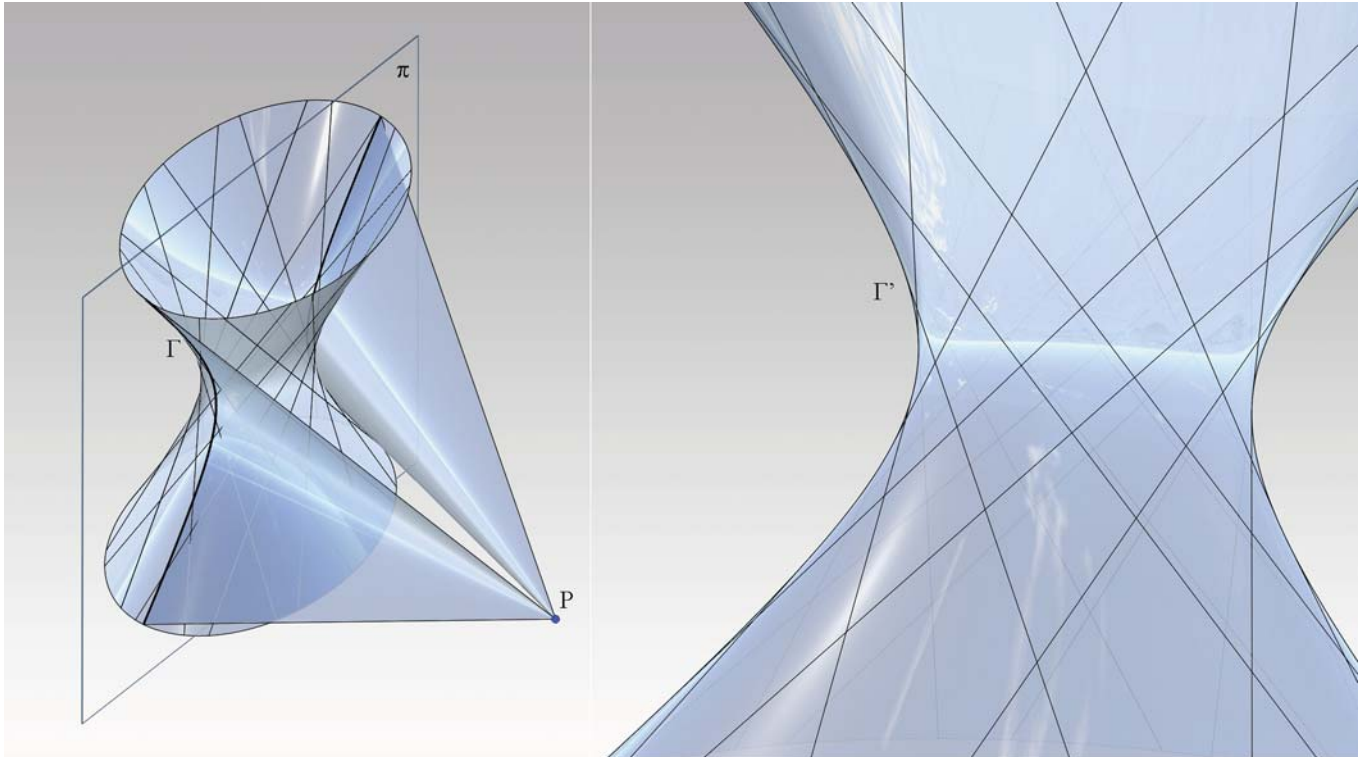
Cerchiamo di capire le proprietà dell'immagine di una quadrica. Per fare ciò immaginiamo che lo schermo del monitor sia il quadro π rappresentato in figura, e sia data una quadrica Q e un punto esterno C (fig. 32). Dal punto C circoscriviamo la quadrica con il cono quadrico che la tocca lungo la conica Γ , il suo contorno apparente, e interseca il quadro secondo la proiezione conica Γ' .

La conica Γ' che è il contorno apparente della superficie rispetto al punto di vista divide il piano del quadro π in due regioni, delle quali una sola regione contiene i punti della quadrica. La conica Γ' è detta *conica limite* e si dice che: *la proiezione di una quadrica rigata da un punto non appartenente ad essa ricopre due volte la regione di piano esterna alla conica limite*. Infatti una retta proiettante incontra la quadrica in due punti soltanto che coincidono con un unico punto immagine. Le rette generatrici della quadrica risultano essere tutte tangenti alla conica del contorno apparente o conica limite. Da questa proprietà delle quadriche rigate Hilbert dimostra alcune teoremi sulle configurazioni piane della geometria proiettiva¹⁰.

Il contorno circoscritto alla quadrica da un punto P è il suo contorno apparente. Il contorno è sempre una conica. Nel caso di un paraboloide iperbolico la conica è sempre una parabola.

Il cono che circoscrive la quadrica da un punto P la tocca secondo una conica che è individuata anche dall'intersezione del piano polare di P con la superficie. Quindi se si conosce il piano polare di P è possibile individuare esattamente il contorno della quadrica. Esiste una costruzione elegante per determinare il piano polare di P . Sono dati una quadrica Γ e un punto P esterna ad essa. Stacciamo una retta r qualsiasi dal punto P che intersechi la quadrica in due punti A e B . Costruiamo il punto Q quarto armonico di P rispetto alla coppia di punti A e B . Ripetiamo la costruzione per altri due punti Q' e Q'' staccando altre due rette r' e r'' . I tre punti così trovati individuano il piano polare π di P rispetto alla quadrica. Sezionando la quadrica con il piano π otteniamo la conica contorno apparente. E' possibile anche costruire il cono circoscritto alla quadrica che ha come direttrice la conica C e come vertice il punto P dato.

Una quadrica rigata è completamente determinata se sono date tre sue generatrici rette appartenenti ad un sistema di rette. L'altra schiera è automaticamente determinata.



32/ La conica Γ' è detta conica limite e si dice che: la proiezione di una quadrica rigata da un punto non appartenente ad essa ricopre due volte la regione di piano esterna alla conica limite. La conica limite divide il piano in due regioni.

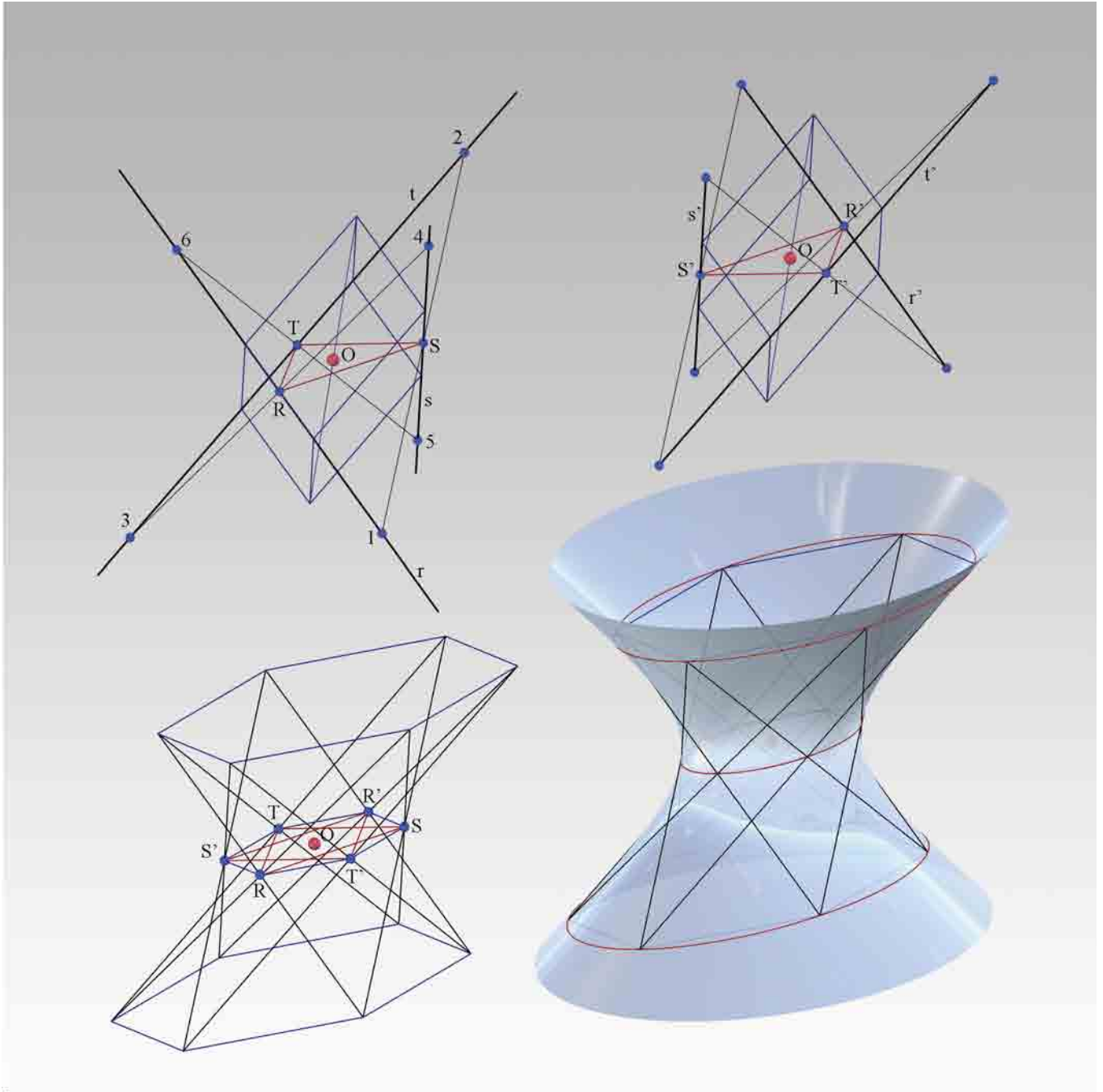
La superficie sarà un iperboloide ad una falda o un paraboloido iperbolico a seconda che le tre rette siano o non siano parallele a un determinato piano direttore.

Per cui conviene verificare, per prima cosa, se le tre rette date appartengano o meno allo stesso piano direttore. Per fare ciò basta traslare due delle tre generatrici su un punto della prima e verificare se il piano formato dall'intersezione della prima con la seconda generatrice contenga anche la terza retta.

In caso affermativo vorrà dire che le tre rette apparterranno alla medesima giacitura del piano direttore, quindi la superficie sarà un paraboloido iperbolico. In caso contrario, vale a dire se la terza retta sarà incidente in un punto il piano formato dalle prime due generatrici, la superficie sarà un iperboloide rigato.

Iperboloide ad una falda

L'iperboloide iperbolico o iperboloide ad una falda è una superficie quadrica rigata che è individuata da tre rette sghembe. La superficie è costituita da un doppio sistema di rette (o schiere di rette) e possiede tre assi triortogonali principali x , y , z ed un centro O . Le rette di una schiera sono tutte sghembe fra loro e tutte incidenti le rette dell'altra schiera. La superficie rispetto ai tre piani principali, individuati dalle tre coppie rispettive dei tre assi, ha proprietà di simmetria ortogonale. Ho studiato un metodo specifico per disegnare esattamente la superficie dell'iperboloide rigato individuato da tre rette sghembe col metodo della rappresentazione matematica. Per lo studio di questo metodo si rimanda al capitolo della Geometria Proiettiva, in particolare al paragrafo *Laboratorio sperimentale della geometria descrittiva*. Adesso studiamo alcune proprietà di questa



33/ I simmetrici successivi di un punto qualsiasi dello spazio in rapporto ad un triangolo percorso due volte costituisce una forma chiusa e determinata, in cui i raggi di simmetria sono le generatrici di un unico iperboloide rigato ad una falda.

superficie. Per individuare il centro **O** della superficie adoperiamo la costruzione del parallelepipedo di Hachette. Costruiamo il parallelepipedo individuato dalle tre generatrici date. Basta costruire i piani che a due a due individuano le tre rette. Intersecando i sei piani, a coppie paralleli fra loro, s'individuano gli spigoli del parallelepipedo unico individuato dalle tre rette **r**, **s**, **t**. Il centro della quadrica **O** è l'intersezione di due diagonali qualsiasi del parallelepipedo stesso. Ora esaminiamo le proprietà di questa figura. Nominiamo **S**, **T**, **R** i punti mediani degli spigoli **r**, **s**, **t** del parallelepipedo (fig. 33). Se costruiamo la retta che si appoggia alle tre rette date passante per il punto **S**, punto medio dello spigolo del parallelepipedo individuato dalle tre rette date, questa tocca le due rette **T** ed **R** nei punti **1** e **2**. Il punto **S** divide il segmento **12** esattamente nella sua metà. Adesso disegniamo lo spigolo **23** in modo che il punto **2** sia simmetrico di **3** rispetto al punto **R**, punto medio dello spigolo del parallelepipedo. Poi disegniamo lo spigolo **34** che passa per il punto **T** e si appoggia alle tre rette date iniziali. Il punto **3** è simmetrico del punto **4** rispetto al punto medio **T**. Dal punto **4** stacciamo un segmento fino al punto **5**, simmetrico del punto **4** rispetto al punto medio **S**. Dal punto **5** stacciamo un'altra retta fino al punto **6**, in modo che il punto **5** sia simmetrico del **6** rispetto al punto medio **R**. Infine chiudiamo l'esagono unendo il punto **6** con il punto **1**. Il punto **6** sarà simmetrico di **1** rispetto al punto medio **T**. In definitiva:

*I simmetrici successivi di un punto qualsiasi dello spazio in rapporto ad un triangolo percorso due volte costituisce una forma chiusa e determinata, in cui i raggi di simmetria sono le generatrici di un solo iperboloido rigato ad una falda.*¹¹

Se si ripete la costruzione prendendo come tre spigoli **r'**, **t'**, **s'** di riferimento iniziale quelli opposti ai tre iniziali **s**, **t**, **r**, si ottiene un altro esagono di rette appartenenti alla stessa superficie quadrica. Sovrapponendo i due modelli si ottiene la rete minima dell'iperboloido rigato costituita da dodici generatrici rette che determinano sei a sei due esagoni chiusi e che sono paralleli

due a due, ciascuno in un poligono differente. Si ottiene, in altre parole, un poliedro concavo a facce triangolari con basi esagonali, che sono uguali fra loro. L'esagono centrale formato dai due triangoli **S**, **T**, **R** ed **S'**, **T'**, **R'** è affine e omotetico agli altri due di base. Il centro **O** della superficie è il centro dell'esagono centrale. I sei punti dell'esagono centrale appartengono ad un'ellisse diametrale, cioè ad una sezione che passa per il centro dell'iperboloido.

Osservando la forma appena descritta si può stabilire un ulteriore teorema:

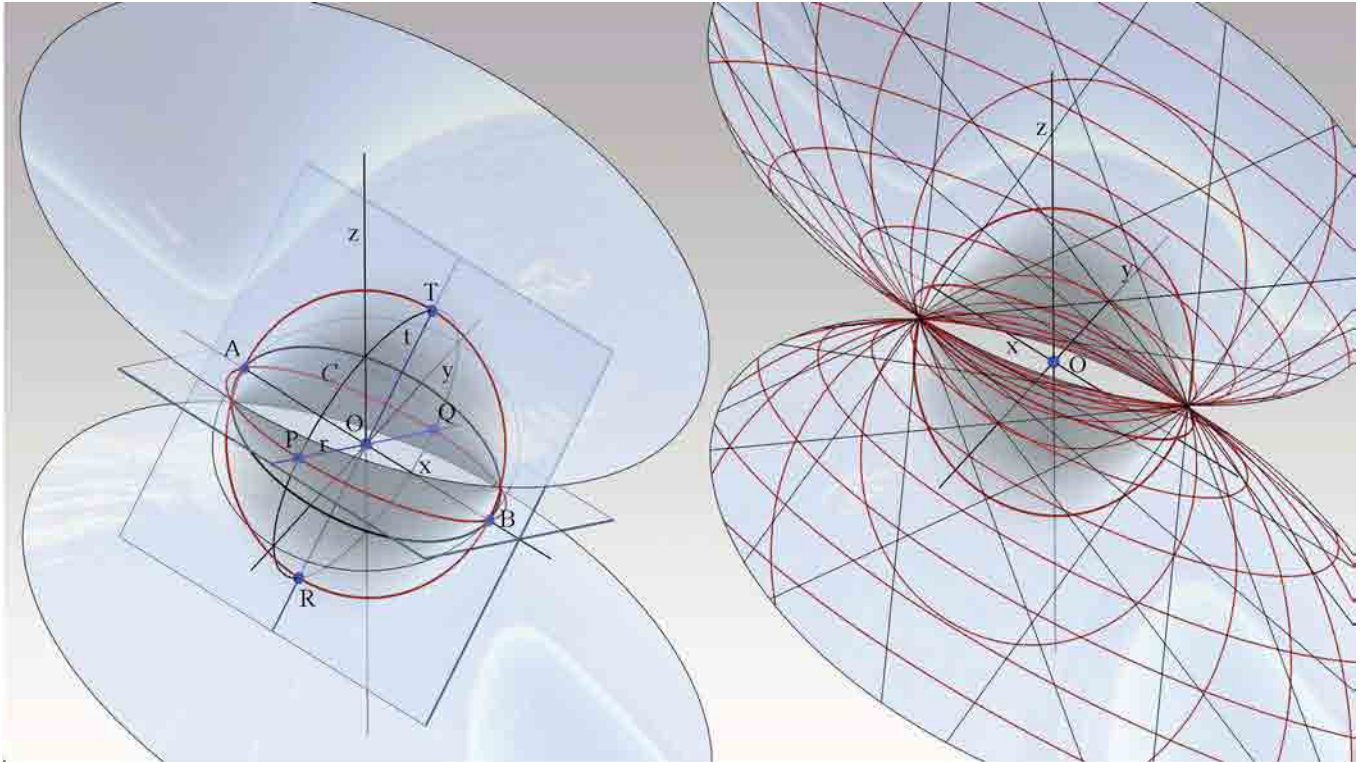
I simmetrici successivi d'un punto dello spazio in rapporto ai vertici alternati d'un pentagono regolare affine percorso due volte costituiscono una forma chiusa e determinata, dove i raggi di simmetria sono le generatrici di un solo iperboloido iperbolico.

Come per il cono retto le sezioni piane di un iperboloido ad una falda sono delle ellissi, delle parabole e delle iperboli (fig. 34). Se prendiamo su un iperboloido cinque rette d'uno stesso sistema e per il centro di questa superficie facciamo passare cinque parallele a queste rette, il cono ellittico che passerà per queste parallele gode della proprietà che non esiste alcuna retta sull'iperboloido appartenente all'uno o all'altro sistema di generazione che non abbia la sua parallela su questo cono, che nominiamo cono asintotico¹². Gli assi principali del cono asintotico coincidono con quelli della superficie quadrica di riferimento. Ammettendo questa proposizione come dimostrata, e avendo costruito il cono asintotico di cui conosciamo il vertice, e cinque rette date, potremo riconoscere il tipo di curva che risulta dall'intersezione dell'iperboloido con un piano dato. Avendo costruito un piano per il vertice del cono parallelo al piano dato, o il piano avrà in comune con il cono solo il vertice, o sarà tangente, o infine sarà secante e conterrà due generatrici del cono. Le sezioni corrispondenti a questi tre casi saranno o delle ellissi, o delle parabole o delle iperboli.

Tra le infinite sezioni dell'iperboloido rigato esiste un doppio sistema di sezioni circolari (fig. 35). Due sistemi di piani paralleli tagliano la superficie secondo dei cerchi.



34/ Come per il cono retto le sezioni piane di un iperboloide ad una falda sono delle ellissi, delle parabole e delle iperboli. Avendo costruito un piano parallelo al piano dato per il vertice del cono asintotico, o il piano avrà in comune con il cono solo il vertice, o sarà tangente, o infine sarà secante e conterrà due generatrici del cono. Le sezioni corrispondenti a questi tre casi saranno o delle ellissi, o delle parabole o delle iperboli.

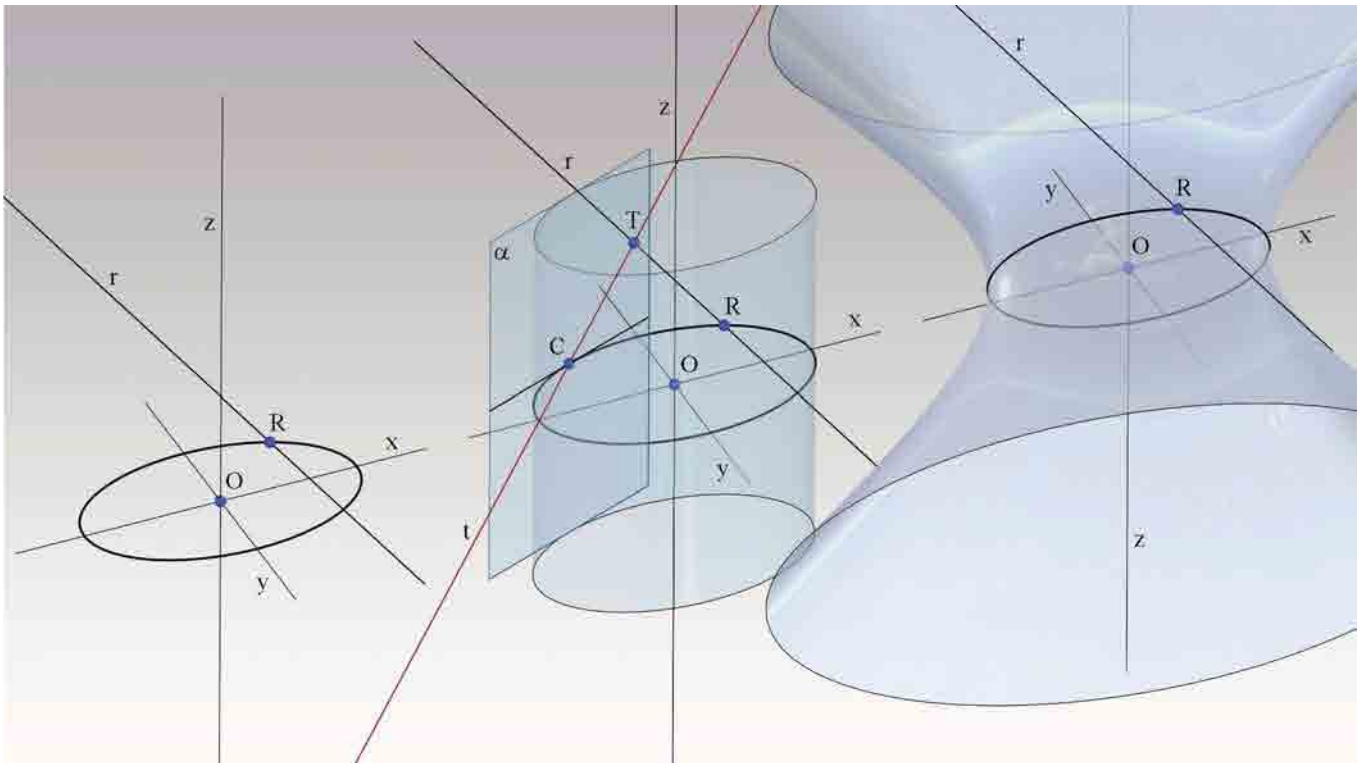


35/ Tra le infinite sezioni dell'iperboloide rigato esiste un doppio sistema di sezioni circolari.

Tutti i cerchi d'uno stesso sistema hanno i loro centri su una retta che passa per il centro della superficie e che è inclinata rispetto ai piani principali. Due piani paralleli all'ellisse di gola tagliano la superficie secondo dell'ellisse simili all'ellisse di gola e che sono uguali. Due altri piani passanti per gli assi maggiori di queste ellissi inclinati diversamente, tagliano la superficie secondo due cerchi uguali e paralleli d'un diametro uguale all'asse maggiore delle ellissi. Per costruire le sezioni circolari di un iperboloide a una falda conviene partire dall'ellisse Γ di gola¹³. Si costruisce un cerchio C , con centro O della superficie, su un piano di simmetria ortogonale xy , di diametro pari all'asse maggiore AB dell'ellisse di gola sull'asse x della superficie. L'intersezione di questo cerchio C con la superficie dell'iperboloide darà quattro punti P, Q, R, S . Unendo i punti a due a due (che sono situati simmetricamente rispetto al centro) otterremo due rette r e t passanti per il centro O della superficie. Il piano

passante per queste rette e per l'asse maggiore x dell'ellisse darà le due giaciture dei piani secanti l'iperboloide secondo dei cerchi. Tagliano la superficie con dei piani paralleli a quelli si trovano tutte sezioni circolari. Quanto detto ci suggerisce che per costruire l'iperboloide a una falda è possibile prendere come direttrici due ellissi uguali e parallele oppure due cerchi uguali e paralleli e supporre che la generatrice si appoggi costantemente a queste due curve¹⁴.

Se sono dati l'ellisse di gola e una sola retta r generatrice della superficie questa superficie è determinata¹⁵. In effetti consideriamo l'ellisse di gola come la base di un cilindro retto (fig.36). Un piano qualsiasi tangente α a questo cilindro taglia la retta data r in un punto T . Lo spigolo di contatto del cilindro e del piano incontra l'ellisse di gola in un altro punto C : la retta t che unisce questi due punti appartiene alla superficie. In questo modo è possibile costruire quante generatrici si vuole.



36/ Se sono dati l'ellisse di gola e una sola retta r generatrice dell'iperboloide ad una falda questa superficie è determinata.

Proiezione stereografica di un iperboloide ad una falda

Consideriamo un punto O' sulla superficie dell'iperboloide e proiettiamo la stessa su un piano π' distinto da O' . Ogni retta proiettante, che non sia contenuta nel piano γ tangente alla quadrica nel punto O' , incontra la superficie in un punto P e il piano π' in un altro punto P' , proiezione di P . Viceversa ogni punto Q' del piano π' , che non appartenga alla retta $\gamma\pi'$, ha il suo corrispondente Q sulla superficie. Sussiste dunque una relazione biunivoca fra i punti del piano π' e la quadrica. La proiezione dell'iperboloide, così costruita, si dice *rappresentazione stereografica* (fig.37).

In questa rappresentazione esistono alcuni elementi eccezionali.

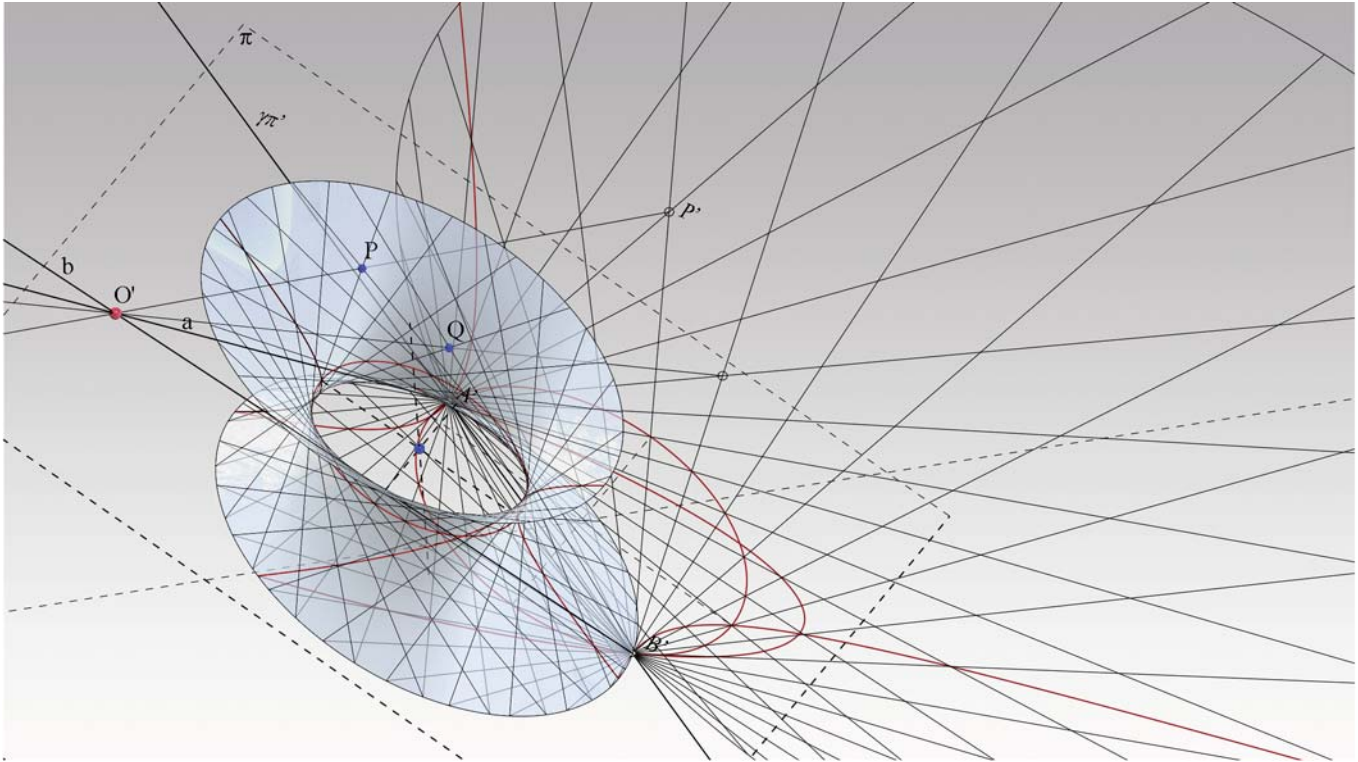
Consideriamo un punto R' del piano π' che appartiene alla retta $\gamma\pi'$, esso non ha altri punti comuni colla quadrica all'infuori del punto O' . Ciò significa che agli

infiniti punti della retta $\gamma\pi'$ corrisponde il solo punto O' della quadrica. Inoltre, per il punto O' passano due generatrici a e b della quadrica, e sono quelle che individuano il piano γ . Queste due generatrici intersecano il piano π' in due punti A' e B' che sono immagini degli infiniti punti delle generatrici a e b .

E' evidente che il punto O' della quadrica e i punti A' e B' del piano π' hanno infiniti omologhi corrispondenti. Riassumendo: i punti A' e B' sono detti *punti fondamentali* e sono le tracce sul piano π' delle due generatrici proiettanti a e b (fig.38).

Le generatrici della schiera a sono proiettate sul piano π' come rette del fascio di centro B' e le generatrici della schiera b sono proiettate come rette del fascio A' . Infatti, tutte le generatrici della schiera a si appoggiano alla generatrice b e dunque le loro proiezioni appartengono tutte a B' , e viceversa.

Nella proiezione stereografica, dunque, le due schiere



37/ Consideriamo un punto O' sulla superficie dell'iperboloide e proiettiamo la stessa su un piano π' distinto da O' . La proiezione dell'iperboloide, così costruita, si dice rappresentazione stereografica.

di generatrici della quadrica si proiettano sul piano π' secondo due fasci di rette hanno centro nei due punti fondamentali A' e B' .

Qualsiasi sezione piana della superficie, distinta da O' , si proietta, perciò, in una conica che passa per i due punti fondamentali A' e B' .

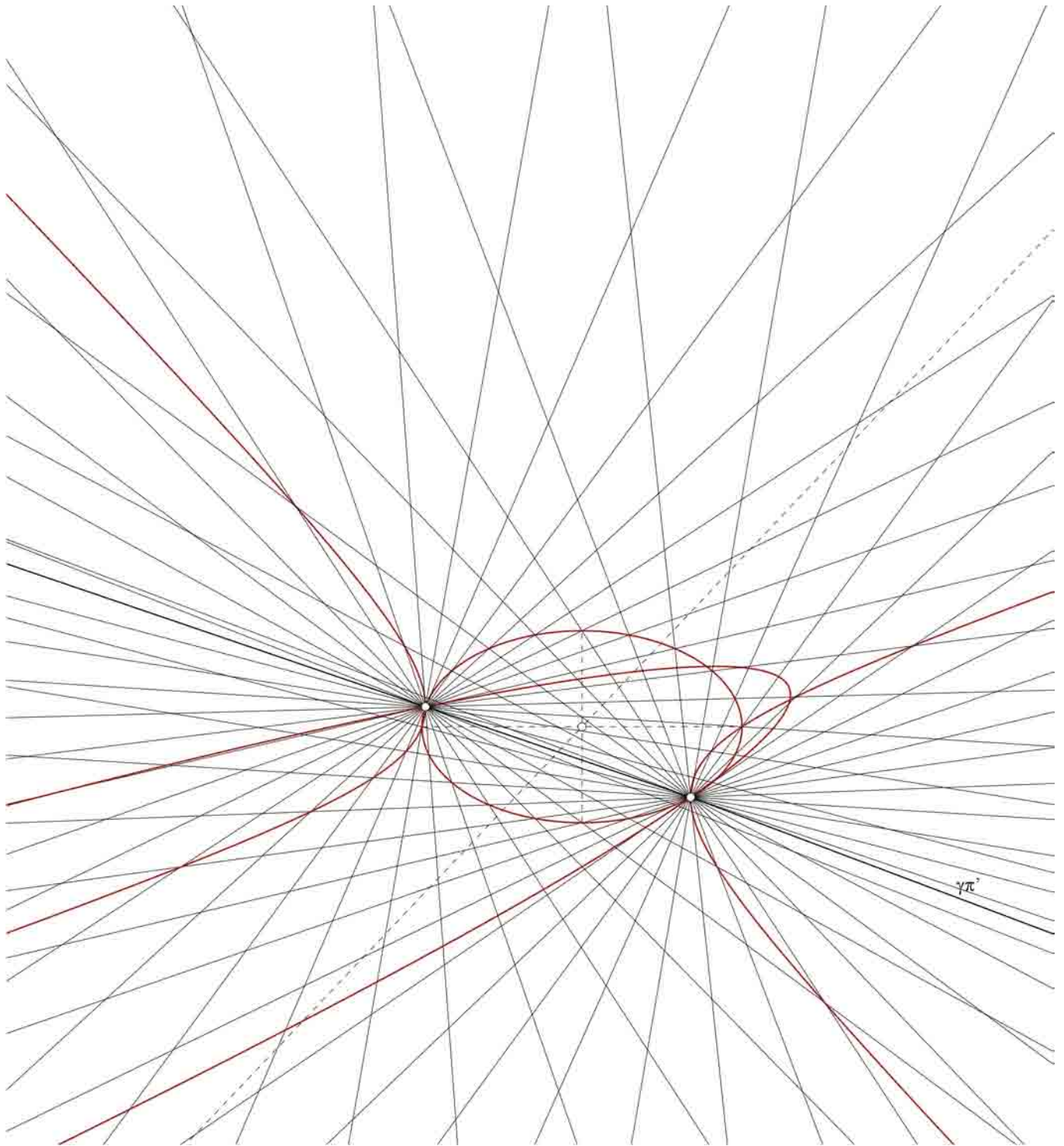
Viceversa, qualsiasi conica del piano π' che passi per i due punti A' e B' è l'immagine di una sezione piana della quadrica.

Le coniche sezione che passano per il punto O' sono contenute nel piano proiettante e hanno come immagine sul piano π' la propria traccia. Siccome il punto O' ha come immagine nel piano π' i punti della retta $A'B'$, si può dire che le coniche passanti per O' sono proiettate in due rette spezzate, l'una è la traccia del piano proiettante e l'altra è la retta $A'B'$. Questa costruzione rende bene ragione della relazione

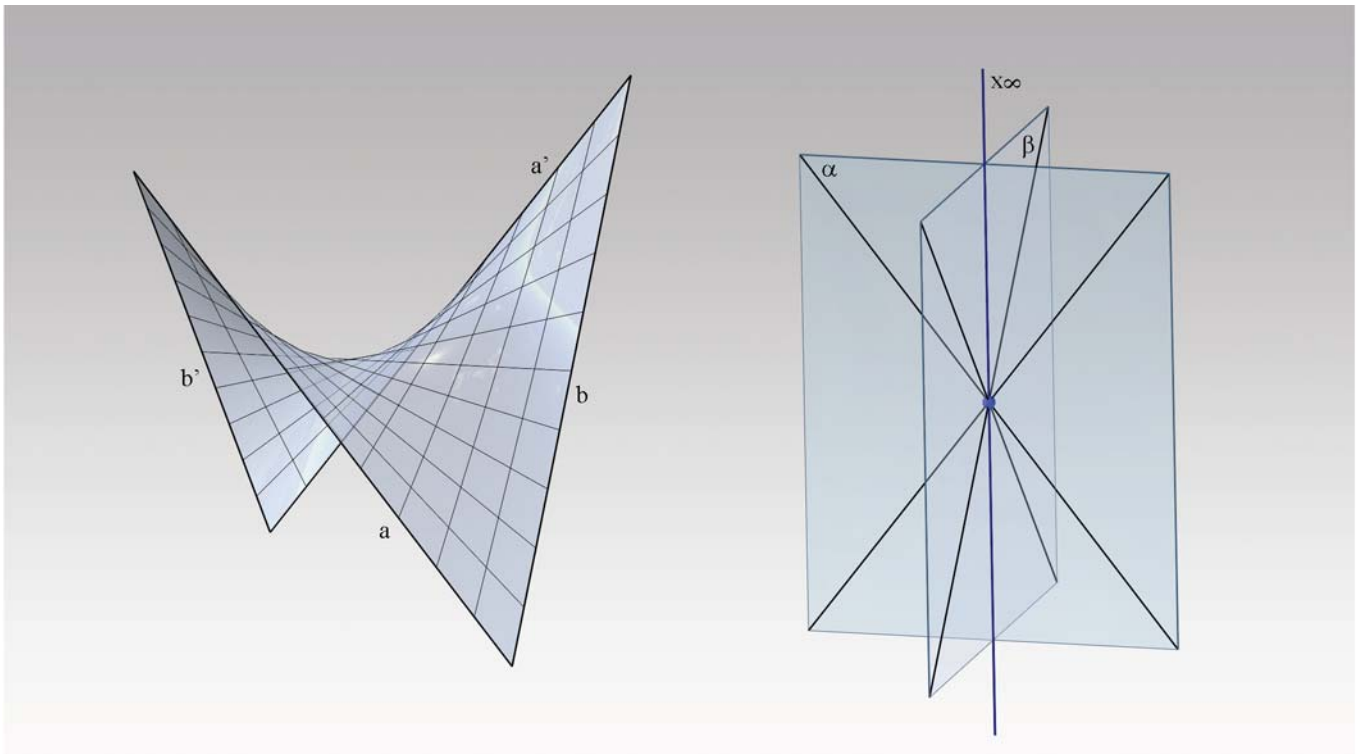
proiettiva che intercede tra le due schiere di generatrici di una superficie rigata quadrica.

L'iperboloide di rivoluzione

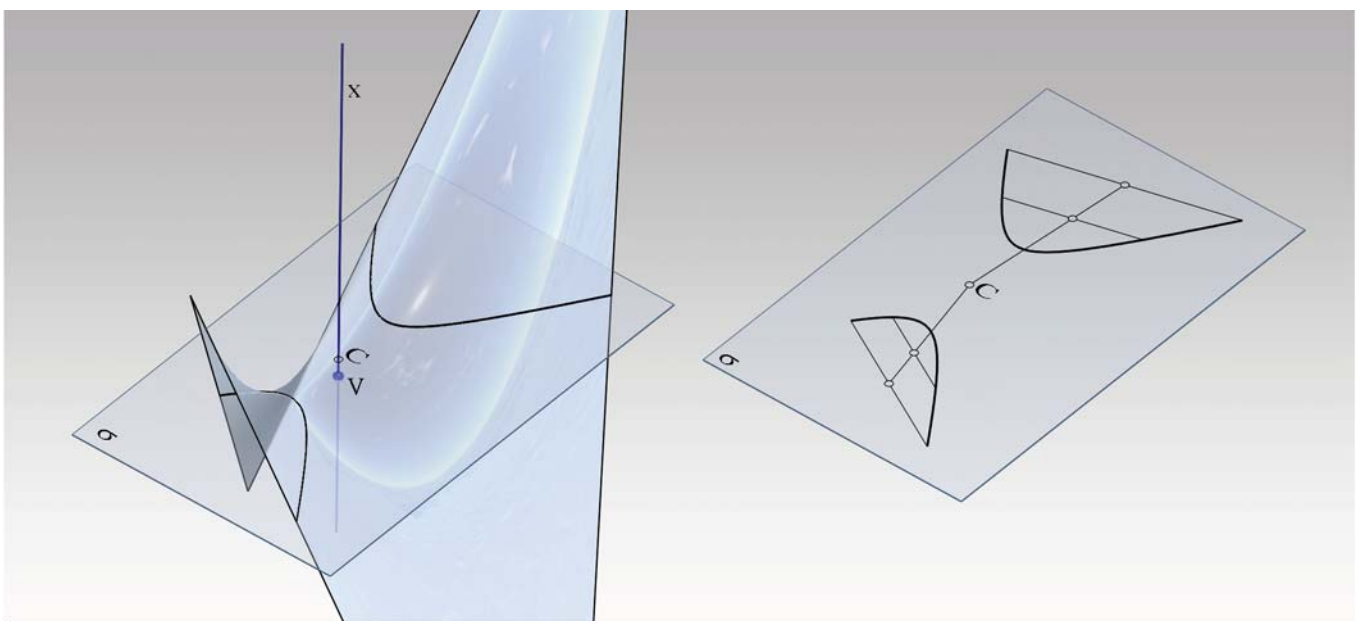
Una retta che ruota attorno ad un'altra retta fissa genera una superficie di rivoluzione in cui le sezioni meridiane sono delle iperboli che hanno per semi asse principale la minima distanza delle due rette date. La retta generatrice è in tutte le sue posizioni parallela a un piano meridiano e la sua distanza da questo piano è uguale alla minima distanze delle due rette date. Un piano qualsiasi perpendicolare all'asse di rivoluzione taglia la superficie secondo un cerchio. Il cerchio di gola divide la superficie in due parti uguali e simmetriche. *Il cerchio di gola è anche linea di stringimento della superficie, cioè è costituita da tutti i punti centrali delle infinite generatrici.*



38/ Rappresentazione stereografica di un iperboloide ad una falda.



39/ Costruzione del paraboloido iperbolico e dei due piani direttori dato un quadrilatero sghembo.



40/ Costruzione del vertice V e dell'asse x del paraboloido iperbolico.

Il paraboloido iperbolico

La quadrica potrà essere toccata all'infinito in una conica, oppure nel sistema di due rette, cioè toccata dal piano all'infinito. Nel primo caso la quadrica è un iperboloido ad una falda nel secondo caso è un *paraboloido iperbolico*¹⁶.

Partendo dalla definizione del paraboloido iperbolico, ovvero che questa superficie ha per generatrice una retta mobile che si appoggia su tre rette fisse parallele a un medesimo piano, si dimostra sinteticamente, come per l'iperboloido rigato, che essa gode della proprietà della doppia generazione di una linea retta¹⁷. Un paraboloido iperbolico è determinato da un qualsiasi quadrilatero sghembo e ha due piani direttori. Per questa particolare proprietà la superficie, come vedremo, può essere considerata anche come superficie di traslazione. Possiamo anche definire il paraboloido iperbolico una superficie generata da una retta mobile che s'appoggia su due rette fisse e che è costantemente parallela a un medesimo piano.

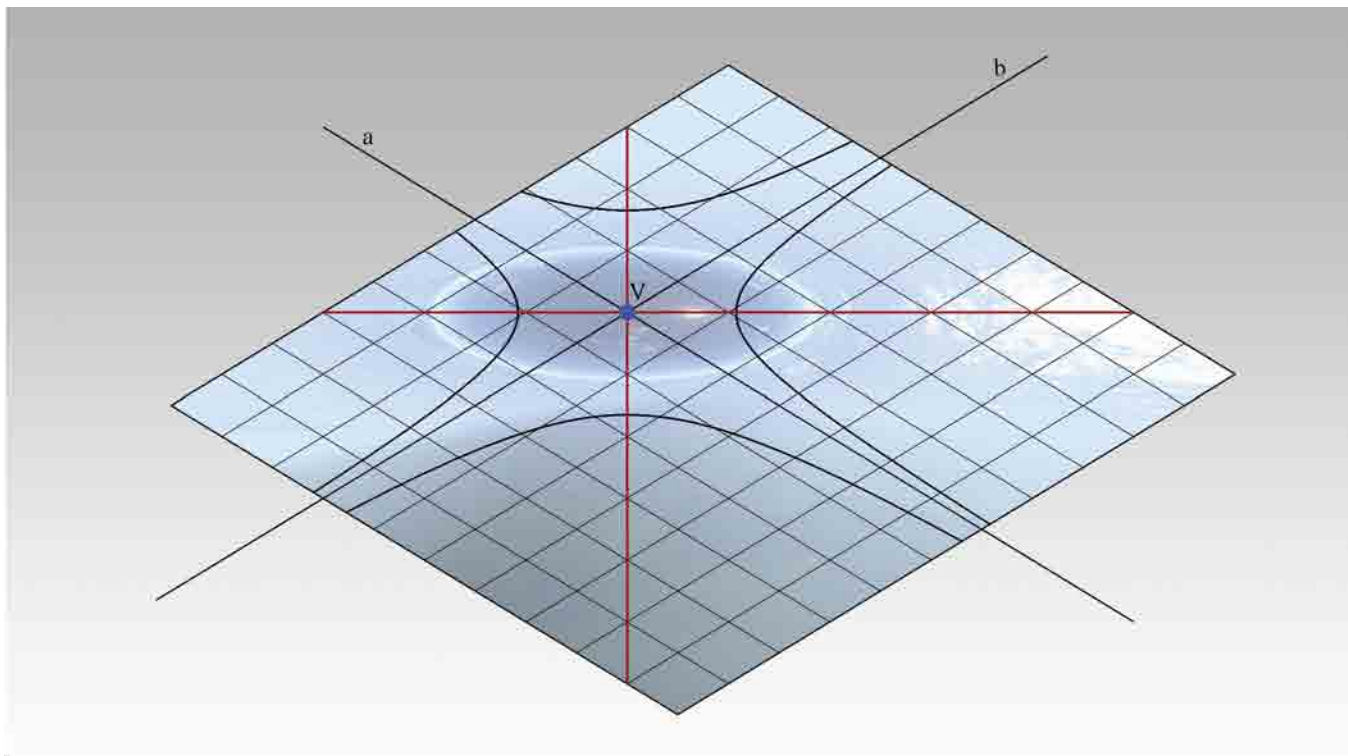
La sezione principale di un paraboloido iperbolico è una parabola a differenza dell'iperboloido generico rigato che è un'ellisse¹⁸. Il centro del paraboloido iperbolico è una direzione, in particolare è la direzione dell'asse principale x . La superficie, come l'iperboloido a una falda, ha tre assi triortogonali (x, y, z), di cui due all'infinito (y, z), e tre piani di simmetria ortogonali. Nel paraboloido iperbolico le generatrici appartenenti ad una schiera determinano sull'altra schiera dei rapporti uguali.

Studiamo le proprietà di questa superficie quadrica partendo da un qualsiasi quadrilatero sghembo $aa'bb'$. Il piano individuato dalle due rette aa' della medesima schiera individua un piano direttore α (fig. 39). Mentre il piano individuato dalle due rette bb' individua il secondo piano direttore β . Due rette sghembe nello spazio individuano un piano o meglio una giacitura, che rappresenta la direzione di tutti i piani paralleli al piano individuato. Per costruirlo basta traslare una delle due rette, la retta a , sopra l'altra, la retta a' , fino a farle diventare due rette incidenti in un punto A . Il piano individuato dalle due rette è il piano direttore α della schiera di rette a . Si ripete l'operazione per trovare il secondo piano direttore β della seconda schiera di rette b . *La direzione d dell'asse del paraboloido*

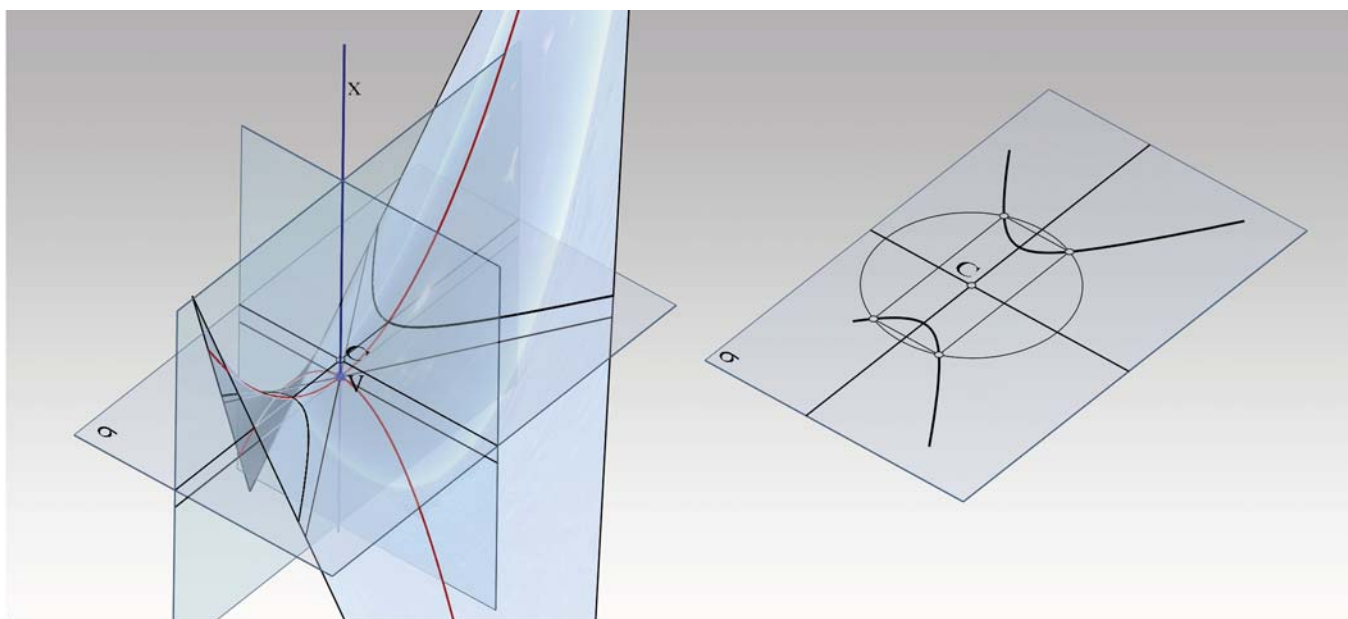
è dato dall'intersezione dei due piani direttore α e β . Esiste una particolare immagine del paraboloido iperbolico che mette subito in evidenza le proprietà di questa superficie. La proiezione d'un quadrilatero sghembo in direzione dell'asse del paraboloido iperbolico è, su un qualsiasi piano tangente al paraboloido, un parallelogrammo. Le generatrici del paraboloido iperbolico vengono proiettate come rette parallele ai lati del parallelogrammo.

Questo tipo di proiezione ortogonale del paraboloido iperbolico può essere considerata una proiezione stereografica, supponendo uno dei piani di proiezione perpendicolare ai diametri¹⁹. Infatti il centro di proiezione è un punto all'infinito che coincide con la direzione del centro del paraboloido stesso ed appartiene ai diametri della superficie. Allora il centro di proiezione è un punto che appartiene alla superficie e le caratteristiche della proiezione stereografica sono conservate.

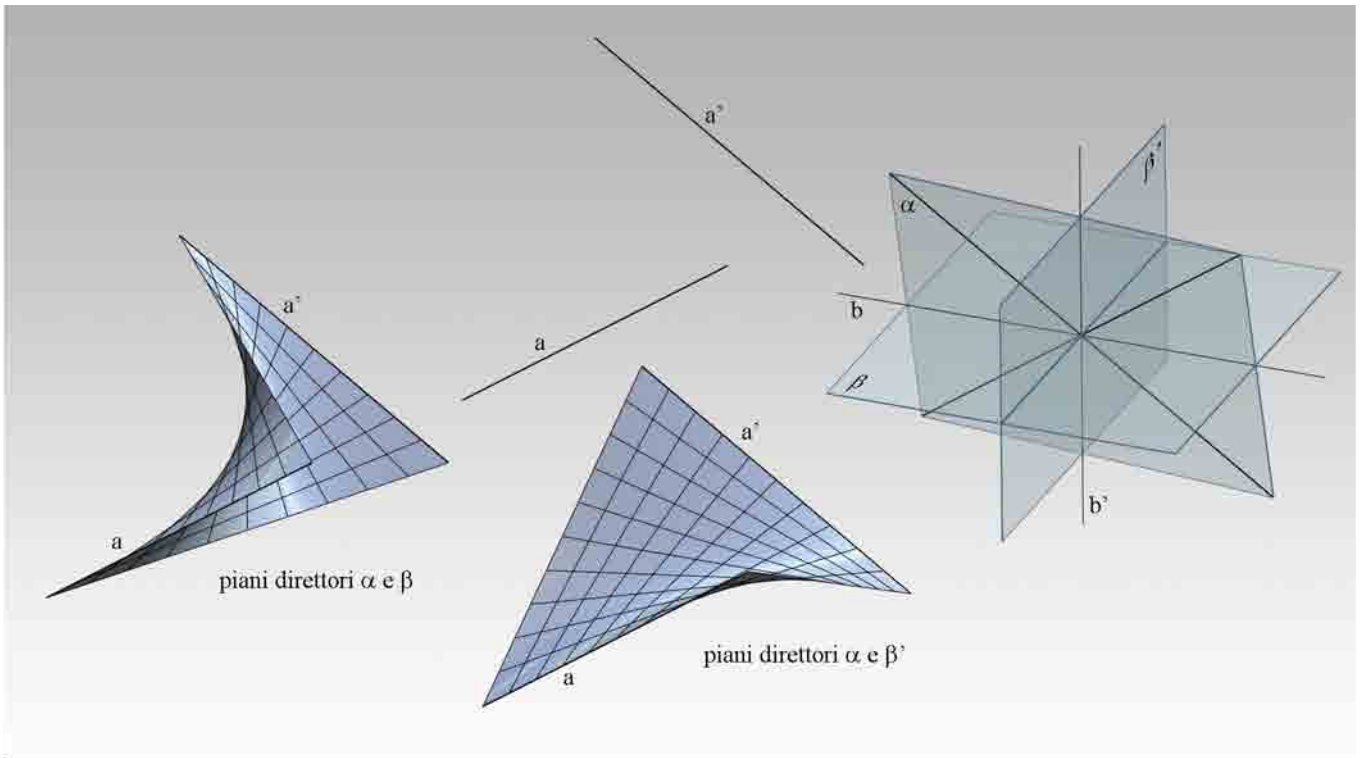
Consideriamo la direzione dell'asse del paraboloido come la direzione verticale. Le sezioni piane d'un paraboloido iperbolico non possono essere delle curve chiuse, sono delle parabole o delle iperboli. Perché quale che sia il piano secante, due rette della superficie saranno parallele a questo piano e i punti della curva intersezione situati su queste rette saranno all'infinito²⁰. I piani non verticali che tagliano il paraboloido hanno come proiezione delle coniche che sappiamo devono passare per i due punti fondamentali A e B . Notiamo, però, che i due punti sono due direzioni A_∞ e B_∞ , dunque le coniche sono delle iperboli cogli asintoti paralleli alle rette a e b . I piani orizzontali allora avranno come asintoti anch'essi due rette proiezioni di due generatrici a e b e saranno esattamente quelle che individuano il piano tangente orizzontale nel punto V vertice della superficie. Allora per individuare la posizione dell'asse x e del vertice V della superficie possiamo seguire il ragionamento appena enunciato. Tagliamo con un piano qualsiasi σ orizzontale la quadrica (fig. 40). Questo taglia la quadrica secondo una iperbole. Troviamo il centro C dell'iperbole sezione. Per fare ciò è sufficiente tagliare il primo ramo della curva con due corde parallele e tracciare la retta che unisce i punti medi delle due corde. Si ripete la costruzione per il secondo ramo trovando un'altra retta. L'intersezione delle due rette dà il



41/ Assonometria ortogonale del paraboloido iperbolico con il piano di proiezione ortogonale all'asse del paraboloido. La proiezione del quadrilatero sghembo è un parallelogrammo con le generatrici rette tutte parallele ai lati del parallelogrammo.



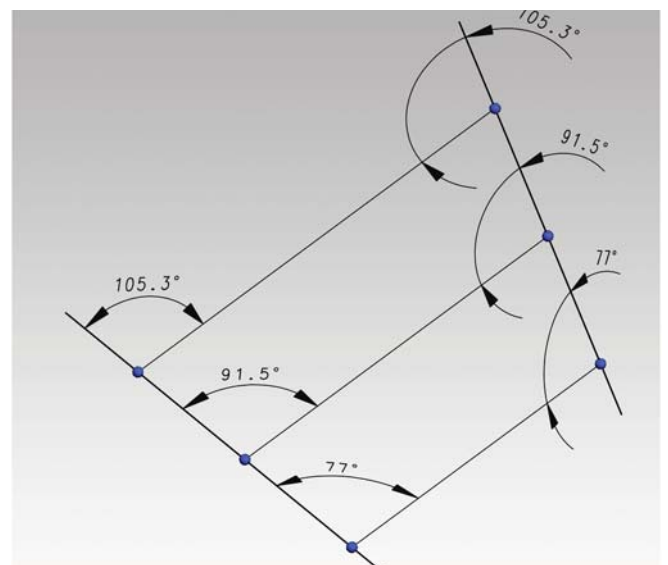
42/ Costruzione della coppia di parabole coniugate perpendicolari dette anche parabole principali.



43/ Costruzione del paraboloide iperbolico equilatero date due direttrici rette sghembe a ed a' .

centro C dell'iperbole sezione orizzontale. L'asse x è la retta parallela alla direzione d_∞ passante per il punto C . L'asse x interseca la quadrica nel vertice V .

Osserviamo ancora che a seconda che il piano sezione orizzontale stia sopra o sotto il vertice V l'iperbole sezione avrà sempre come asintoti le rette generatrici a e b nella proiezione ortogonale all'asse x ma la curva sarà compresa tutta o nell'angolo α o nell'angolo β (fig. 41). Per trovare le due parabole principali si possono seguire due strade. La prima consiste nel trovare la coppia di diametri coniugati ad angolo retto di una qualunque sezione iperbolica fatta con un piano ortogonale all'asse x (fig. 42). Per fare ciò si taglia l'iperbole sezione con un cerchio con centro C nel centro stesso dell'iperbole e raggio qualsiasi. La coppia di diametri coniugati ortogonali passa per il centro ed ha i lati paralleli al rettangolo individuato dai quattro punti intersezione del cerchio con la curva sezione. La coppia di diametri coniugati ortogonali sono detti anche diametri principali



44/ Il luogo geometrico delle rette che s'appoggiano su due rette sghembe e formano con esse degli angoli uguali e dallo stesso lato di questi è un paraboloide iperbolico equilatero

e sono l'asse trasverso, o focale, e il suo coniugato. Le parabole principali si trovano sezionando la superficie del paraboloido con due piani passanti per l'asse e per i due diametri principali dell'iperbole sezione. La seconda strada consiste nel trovare le bisettrici delle due generatrici che passano per il vertice V del paraboloido. Le parabole principali sono date dall'intersezione dei due piani passanti per l'asse e per le due bisettrici trovate. Facendo scorrere le due parabole principali l'una sull'altra si genera il paraboloido per traslazione.

Il paraboloido iperbolico equilatero

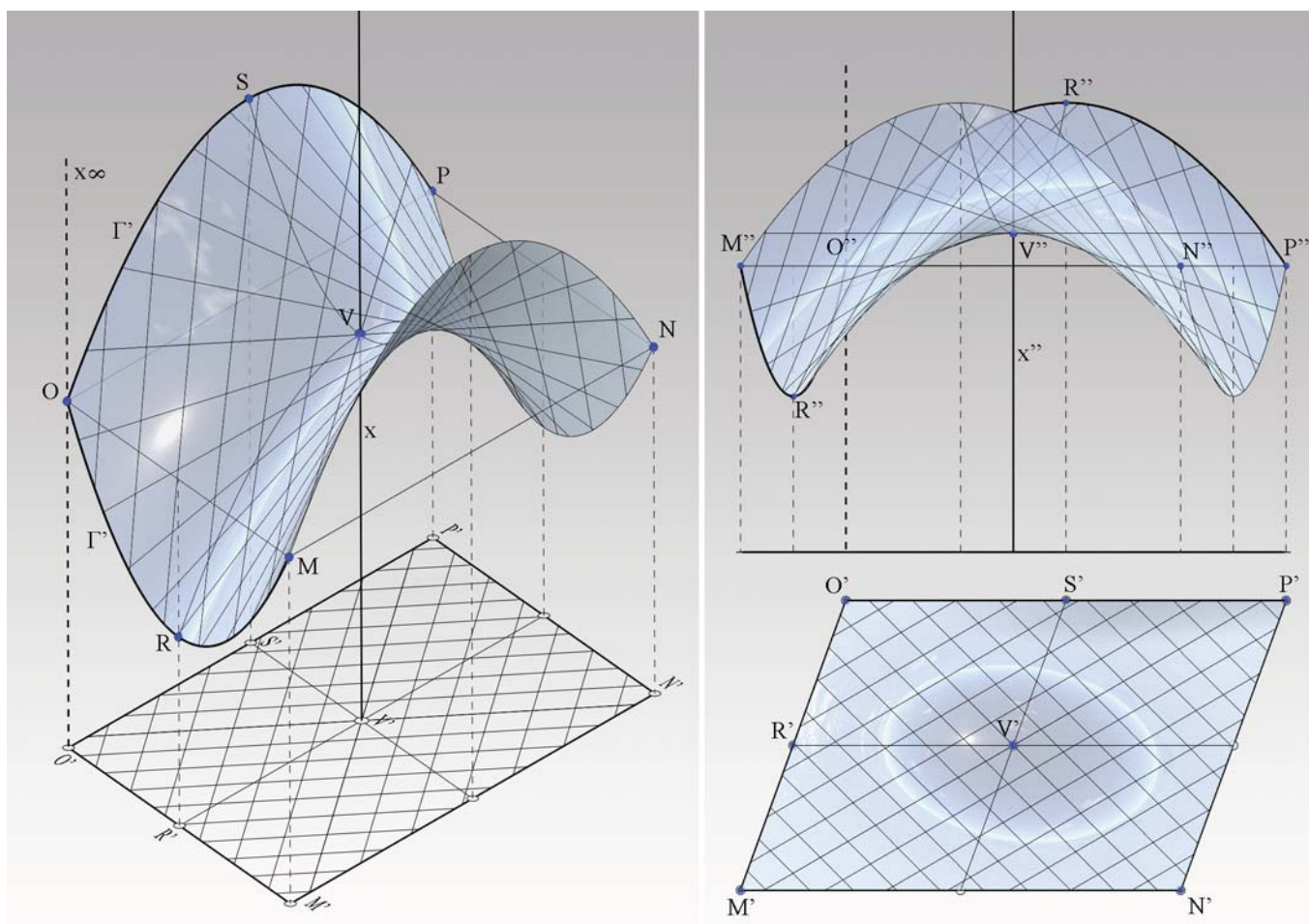
Se sono date due rette sghembe come direttrici possiamo determinare due paraboloidi iperbolici dove le generatrici tagliano le direttrici secondo degli angoli uguali. Questi paraboloidi iperbolici sono detti paraboloidi iperbolici retti o equilateri, i loro piani direttori sono ortogonali. In altre parole il luogo geometrico delle rette che s'appoggiano su due rette sghembe e formano con esse degli angoli uguali e dallo stesso lato di questi è un paraboloido iperbolico equilatero. Allora esistono per ciascuna coppia di rette sghembe d'una schiera di rette due generatrici dell'altra schiera che le intersecano sotto lo stesso angolo. Sono date due rette sghembe a e a' che formano un piano direttore α (fig. 43). Sappiamo che il piano direttore dell'altra schiera è ortogonale al piano α , ma esistono infiniti piani ortogonali ad un piano dato. Bisogna determinare le due bisettrici b e b' della coppia di rette a e a' che determina il primo piano direttore α . Il primo paraboloido iperbolico equilatero avrà come secondo piano direttore β il piano ortogonale al piano α e passante per la prima bisettrice g . Il secondo iperboloido equilatero avrà come secondo piano direttore β' il piano ortogonale sempre ad α e passante per la seconda bisettrice b' . Se la costruzione è corretta i due angoli misurati fra le diverse generatrici e le due direttrici date devono risultare uguali fra loro (fig. 44). I piani direttori sono ortogonali per costruzione. E' possibile seguire un metodo alternativo per costruire un paraboloido equilatero. Consideriamo un qualsiasi rettangolo $ABCD$. Su due vertici opposti di questo rettangolo, ad esempio A e C innalziamo due segmenti AE , CF perpendicolari al piano del rettangolo e di eguale altezza. Costruiamo ora i segmenti BE e DF .

Questi due segmenti sono evidentemente eguali e individuano due quadrilateri sghembi equilateri: $EBFDE$ e $EFDBE$. Ciascuno di questi due quadrilateri genera una rigata quadrica che chiameremo *paraboloido iperbolico equilatero* o anche *paraboloido iperbolico retto*.

Il paraboloido iperbolico come superficie di traslazione

Il paraboloido iperbolico come superficie di traslazione è generato facendo scorrere una parabola parallelamente a se stessa e appoggiandosi in un proprio punto su un'altra parabola; le due parabole, l'una direttrice e l'altra generatrice o viceversa, hanno i loro assi paralleli e diretti in senso contrario e sono due *parabole coniugate*. La direzione degli assi delle parabole coniugate è quella dell'asse principale che taglia la superficie nel suo vertice V . *Esistono infinite coppie di parabole coniugate che possono essere prese come generatrice e direttrice (e viceversa), fra queste ve ne è una sola di coppia che ha le parabole perpendicolari fra loro, queste sono dette parabole principali*. Per capire questo teorema è sufficiente ricordare la definizione di *diametri coniugati*. *Un piano diametrale è un qualsiasi piano passante per il centro della superficie*. E' evidente che questi piani tagliano una quadrica sempre secondo delle coniche, dette appunto *sezioni diametrali*. Le sezioni parallele ad un piano diametrale in un paraboloido iperbolico producono sempre *curve parabole congruenti*. Ogni piano diametrale determina anche il suo diametro coniugato. Per qualsiasi conica e superficie quadrica esistono infinite coppie di diametri (e piani diametrali) coniugati fra loro. Fra queste infinite coppie c'è ne una soltanto con i piani ortogonali fra loro ed è quella dei *piani diametrali principali* o *piani di simmetria ortogonale*.

Consideriamo due parabole Γ e Γ' su due piani verticali (fig. 45). L'intersezione dei due piani su cui giacciono le parabole ci dà la direzione x_∞ dell'asse del paraboloido e dei diametri. Sia O il loro punto d'incontro. E' possibile individuare un parallelogrammo $OMNP$ che può essere rettangolo oppure obliquo come in figura. Le rette OM e NP sono due diametri coniugati delle parabole sezioni. Facendo passare una retta parallela alla direzione dell'asse x per i punti medi delle corde coniugate OM e OP delle parabole è possibile individuare i vertici R e



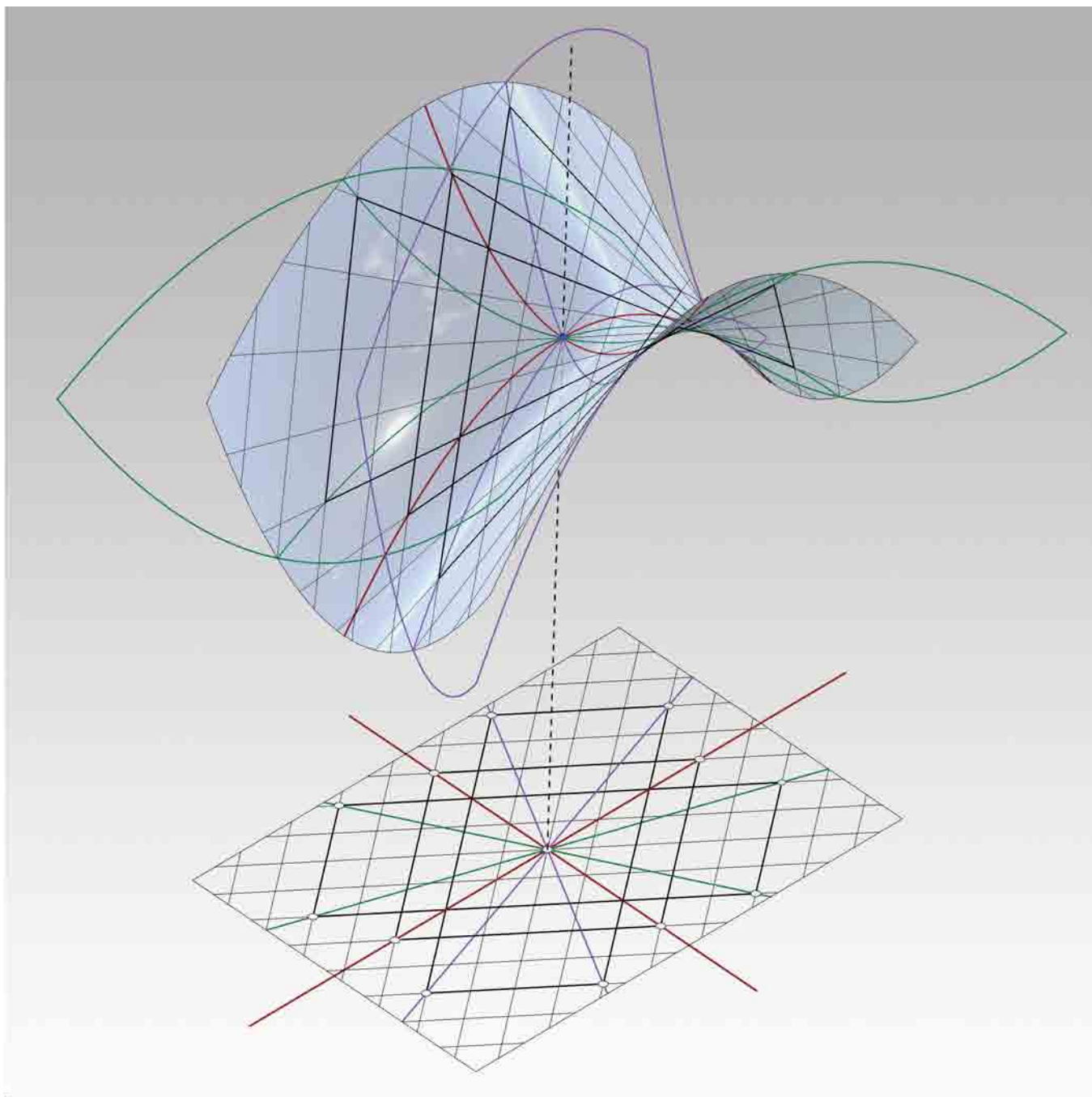
45/ Il paraboloido iperbolico come superficie di traslazione è generato facendo scorrere una parabola parallelamente a se stessa e appoggiandosi in un proprio punto su un'altra parabola; le due parabole, l'una direttrice e l'altra generatrice o viceversa, sono due parabole coniugate.

S delle due parabole coniugate. Facendo traslare l'una parabola sull'altra e viceversa si genera il medesimo paraboloido iperbolico. Se le due rette **OM** e **OP** sono due diametri delle parabole come in figura, il punto **V** è il vertice della superficie: si costruiscono le due rette che uniscono i punti medi dei lati del parallelogrammo **OMNP** che individuano il centro **V'**; si fa passare una retta parallela alla direzione dell'asse x_∞ per il punto **V'**; questa retta è l'asse principale della superficie e la taglia nel suo vertice **V**.

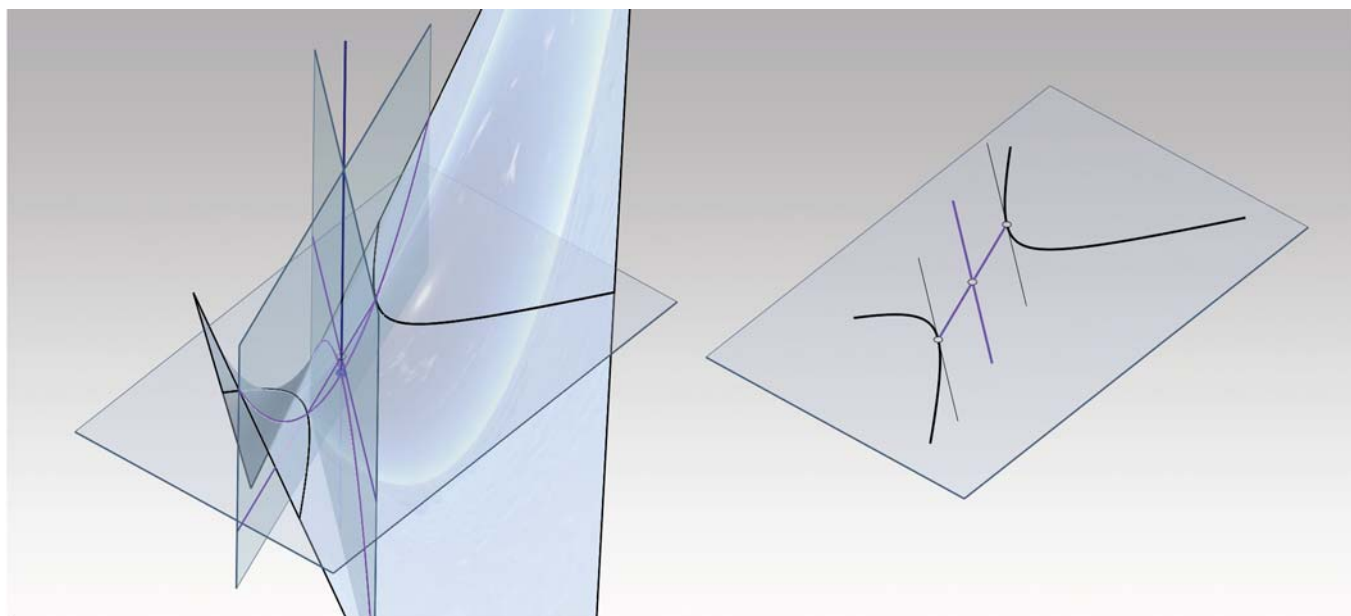
Se tagliamo la superficie con un piano parallelo al parallelogrammo di base **OMNP** passante per **V** otteniamo

una sezione iperbolica degenera in due generatrici rette della superficie. Se **OMNP** è un quadrato il paraboloido iperbolico è anche equilatero.

E' importante notare che le due parabole Γ e Γ' generalmente non sono due parabole principali ma sono solo due parabole coniugate. Nel caso in cui siano perpendicolari fra loro allora sarebbero due parabole principali, perché tra le infinite coppie di parabole coniugate che individuano un paraboloido ve ne è una sola che ha le curve ortogonali fra loro ed è quella composta da parabole principali. Un modo semplice per individuare le parabole principali dato un paraboloido iperbolico, sia



46/ Esistono infinite coppie di parabole coniugate che possono essere prese come generatrice e direttrice (e viceversa), fra queste ve ne è una sola di coppia che ha le parabole perpendicolari fra loro, queste sono dette parabole principali.



47/ La coppia di diametri coniugati dell'iperbole sezione individua anche due piani diametrali coniugati della superficie. Tagliando il paraboloido con la coppia di piani diametrali si ottengono due parabole coniugate.

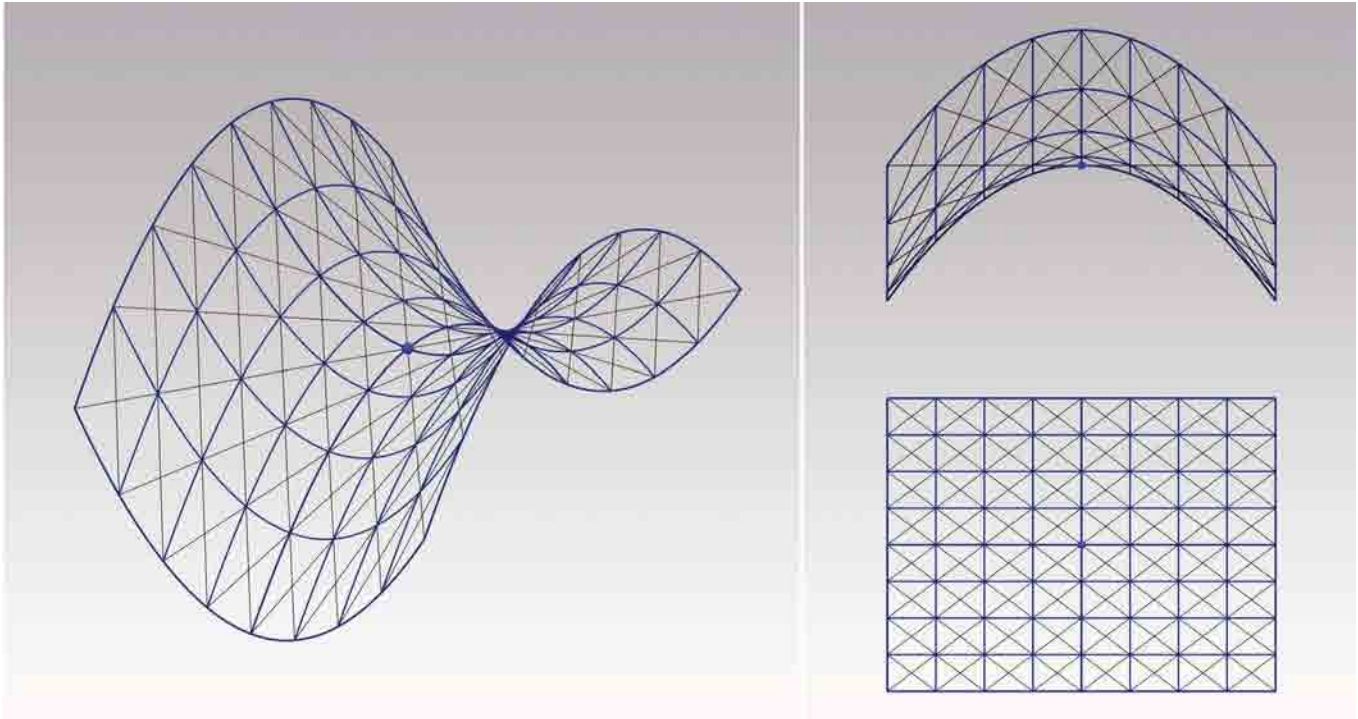
come superficie di traslazione e sia come superficie rigata, è quella di individuare l'asse x e il vertice V del paraboloido. Poi è sufficiente costruire il piano tangente nel vertice V alla superficie. Questo taglierà la superficie in due rette generatrici incidenti nel punto di contatto V . Si disegnano le bisettrici delle tangenti principali alle linee asintotiche nel punto V . Ricordo che le linee asintotiche per un paraboloido coincidono con le rette generatrici, per cui dobbiamo semplicemente costruire le bisettrici delle due rette generatrici passanti per il vertice V . Le bisettrici per costruzioni sono due rette perpendicolari fra loro. Adesso basta tagliare il paraboloido iperbolico con due piani passanti per le due bisettrici e la normale alla superficie nel punto V che è l'asse x . Le sezioni trovate sono le due parabole principali della superficie.

Abbiamo detto che le coppie di parabole coniugate che possono essere assunte come generatrice e direttrice sono infinite. Avere una verifica sperimentale di tale proprietà è semplice perché per individuare una qualsiasi coppia di parabole coniugate è sufficiente disegnare le diagonali di uno degli infiniti quadrilateri sghembi che identificano un paraboloido iperbolico e tagliare il paraboloido con i due piani diametrali passanti per queste diagonali (fig. 46).

Consideriamo adesso nuovamente una sezione piana ortogonale all'asse del paraboloido. Questa è un'iperbole che ha il proprio centro su un punto dell'asse e ha come asintoti le direzioni dei due piani direttori. Possiamo disegnare un'infinità di coppie di diametri coniugati dell'iperbole. Per fare ciò basta disegnare un diametro. Poi si determina la tangente all'iperbole nei punti estremi del diametro. La retta parallela alla tangente passante per il centro ci dà il diametro coniugato. La coppia di diametri coniugati individua anche due piani diametrali coniugati della superficie. Tagliando il paraboloido con la coppia di piani diametrali si ottengono due parabole coniugate (fig. 47).

L'identità tra le due definizioni del paraboloido iperbolico come superficie rigata e superficie di traslazione permette di costruire una rete quasi regolare di parabole e rette della superficie. Inoltre permette di delimitare la superficie secondo diversi tipi di confini d'una porzione di superficie. Possiamo ottenere, allora, al di là di un quadrilatero sghembo, diversi tipi di poligoni curvilinei sghembi:

- dei triangoli formati da due generatrici e una parabola o due parabole e una generatrici;
- dei quadrilateri formati da tre generatrici e una



48/ Una superficie quadrica rigata può essere tassellata facilmente, secondo dei triangoli rigidi, seguendo le generatrici rette e le sezioni coniche parallele ai piani diametrali coniugati.

parabola, due generatrici e due parabole in due modalità differenti: sia una generatrice e tre parabole e sia quattro parabole;

- degli esagoni formati da quattro generatrici e due parabole, quattro parabole e due generatrici, ecc;

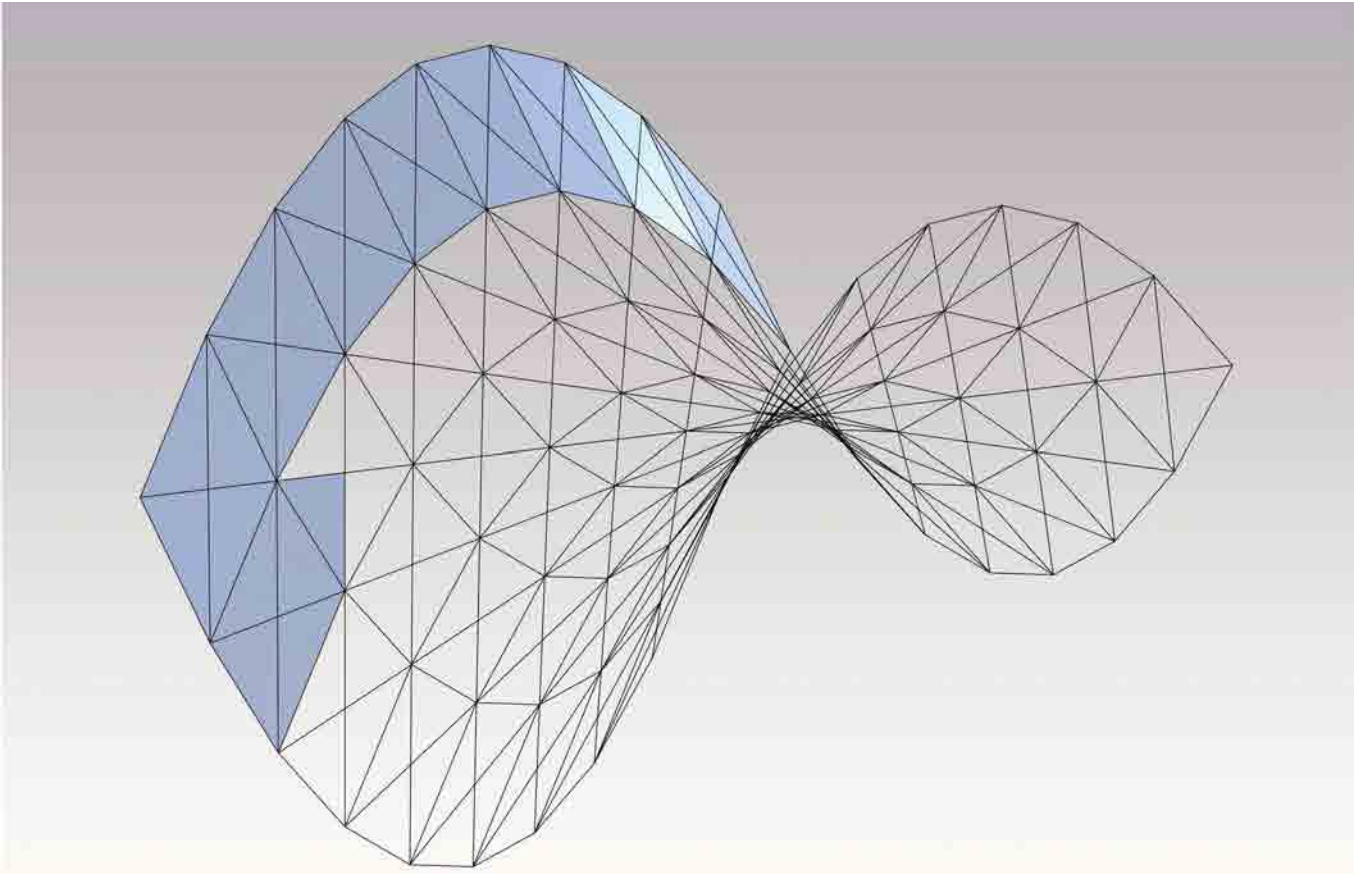
Se consideriamo anche le sezione delle iperboli le possibilità aumentano.

Riduzione in facce piane della superficie quadrica rigata

Una superficie quadrica rigata può essere tassellata facilmente, secondo dei triangoli rigidi, seguendo le generatrici rette e le sezioni coniche parallele ai piani principali. E' possibile seguire anche sezioni coniugate ma è preferibile seguire le parabole principali per sfruttare la simmetria ortogonale di queste sezioni rispetto alla superficie. Consideriamo un paraboloide iperbolico (fig. 48). Tagliamo la superficie con dei piani paralleli ai due piani direttori in modo da ottenere le due schiere di rette. Nell'esempio illustrato ho deciso di tagliare la

superficie usando lo stesso passo, cioè la stessa distanza fra un piano di taglio e il suo successivo. Queste sezioni viste dall'alto (se consideriamo l'asse principale della parabola in posizione verticale) avranno la stessa distanza. Un'altra accortezza è quella di sezionare la superficie partendo dal vertice **V**.

Adesso è sufficiente sezionare la superficie secondo i due piani principali diametrali (perpendicolari fra loro) delle parabole principali. Anche qui è importante sezionare partendo dal vertice e considerando i successivi punti intersezioni delle sue schiere di generatrici rette. E' comodo sezionare la superficie prendendo come riferimenti lungo la parabola principale coniugata i punti intersezioni delle due schiere di rette. Una volta ottenuto la rete di parabole e di rette bisogna disegnare i poligoni che descrivono le parabole. Per fare ciò si disegna un poligono inscritto nella parabola principale appoggiandosi ai punti intersezioni con le rette generatrici. Le parabole sono congruenti quindi non è necessario ripetere l'operazione per ogni curva ma basta farlo per una



49/ Tassellazione semiregolare di un paraboloido iperbolico.

soltanto e poi copiare la stessa. In questo modo abbiamo ottenuto una rete poligonale di rette e punti che descrivono il paraboloido. Inoltre la rete è formata sempre da triangoli. Ora si costruiscono i piani individuati dai triangoli per ottenere la tassellazione ideata del paraboloido iperbolico (fig. 49).

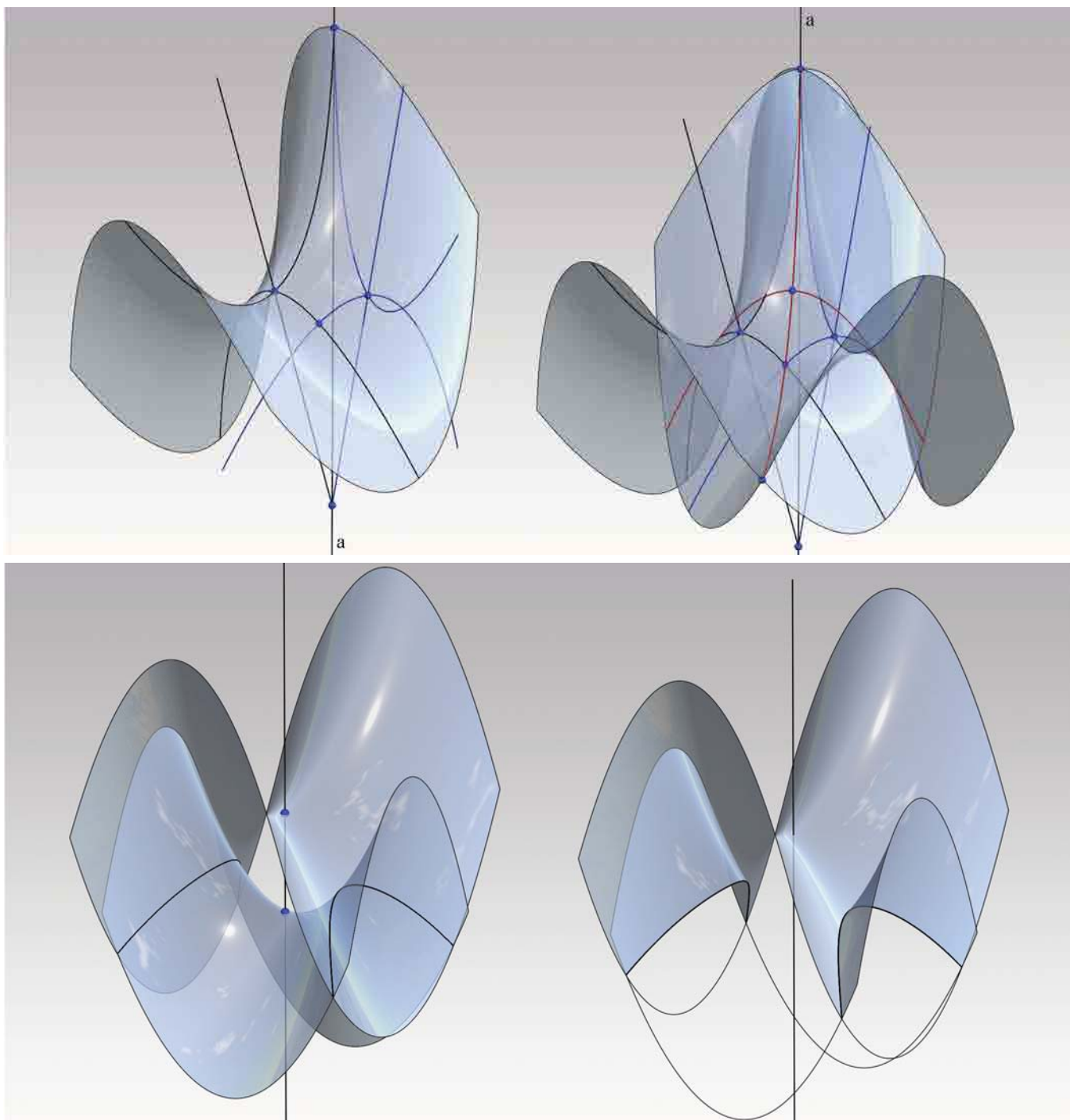
Per l'iperboloido ad una falda il discorso è esattamente lo stesso. Tracciamo una serie di generatrici di ambedue le schiere tenendo presente un qualsiasi piano di simmetria ortogonale della superficie. Tracciamo poi le sezioni ellittiche parallele al piano principale dell'ellisse di gola. In questo modo abbiamo tracciato una rete di curve e rette quasi regolari che s'intersecano a vicenda nei diversi punti. Ora sostituiamo alle ellissi affini dei poligoni inscritti che abbiano come vertici i diversi punti d'intersezione. In questo modo abbiamo ottenuto una

rete di triangoli rigidi che costituiscono una superficie poligonale di facce piane triangolari.

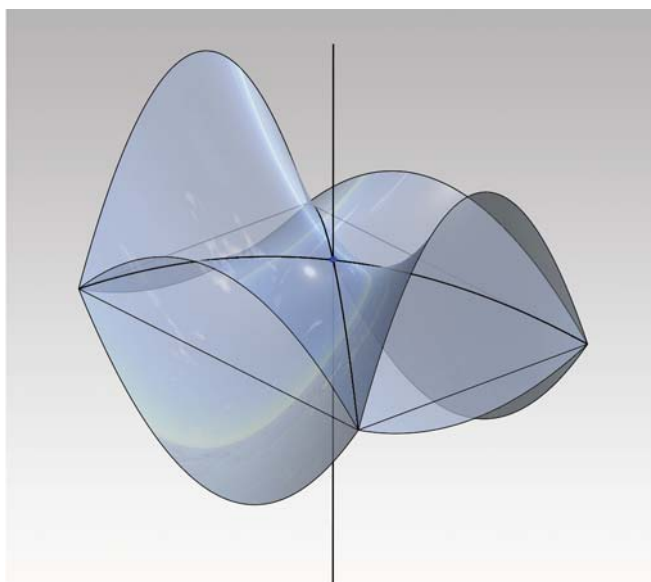
L'intersezione di due paraboloidi iperbolici

La curva intersezione di due paraboloidi iperbolici è in generale una curva di quarto ordine sghemba. Esistono, però, dei casi particolari in cui la curva di quarto ordine degenera in coniche. Per studiare i vari casi conviene considerare il paraboloido come superficie rigata o come superficie di traslazione. Esaminiamo prima il caso dei paraboloidi come superfici di traslazione.

1. Consideriamo il caso dell'intersezione di due paraboloidi iperbolici uguali, l'uno dei due ottenuto facendo ruotare l'altro attorno ad un asse \mathbf{a} situato nel piano di una delle due parabole principali o coniugate. In questo caso la curva intersezione si decompone in due coniche



50/51 L'intersezione di due paraboloidi iperboliche uguali, l'uno dei due ottenuto facendo ruotare l'altro attorno ad un asse a situato nel piano di una delle due parabole principali o coniugate. In questo caso la curva intersezione si decompone in due coniche (curve rosse). Possiamo intersecare due paraboloidi ad assi concorrenti e ottenere in generale delle intersezioni comparabili a quelle delle lunette cilindriche.

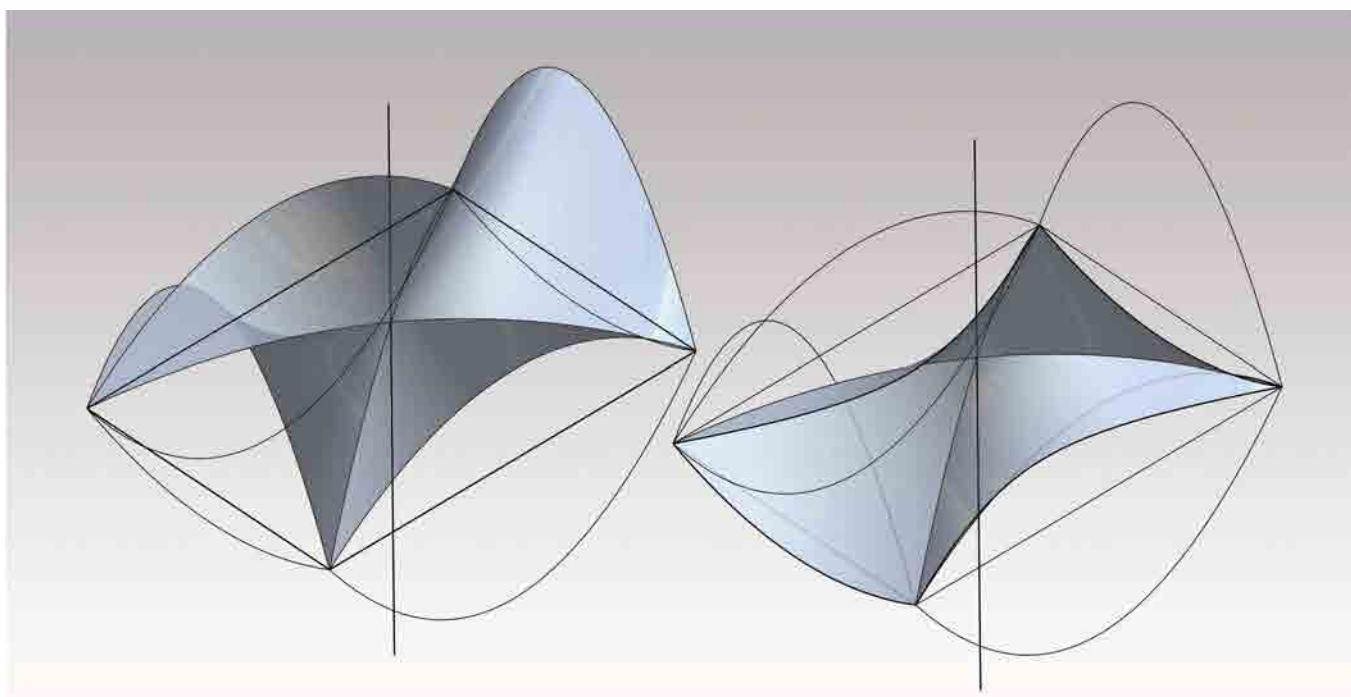


52/ Due paraboloidi aventi sia lo stesso asse e sia lo stesso vertice in un punto. I due paraboloidi sono bitangenti e hanno lo stesso piano tangente al vertice. La curva d'intersezione si decompone in due parabole con lo stesso vertice e lo stesso asse ma in piani differenti.

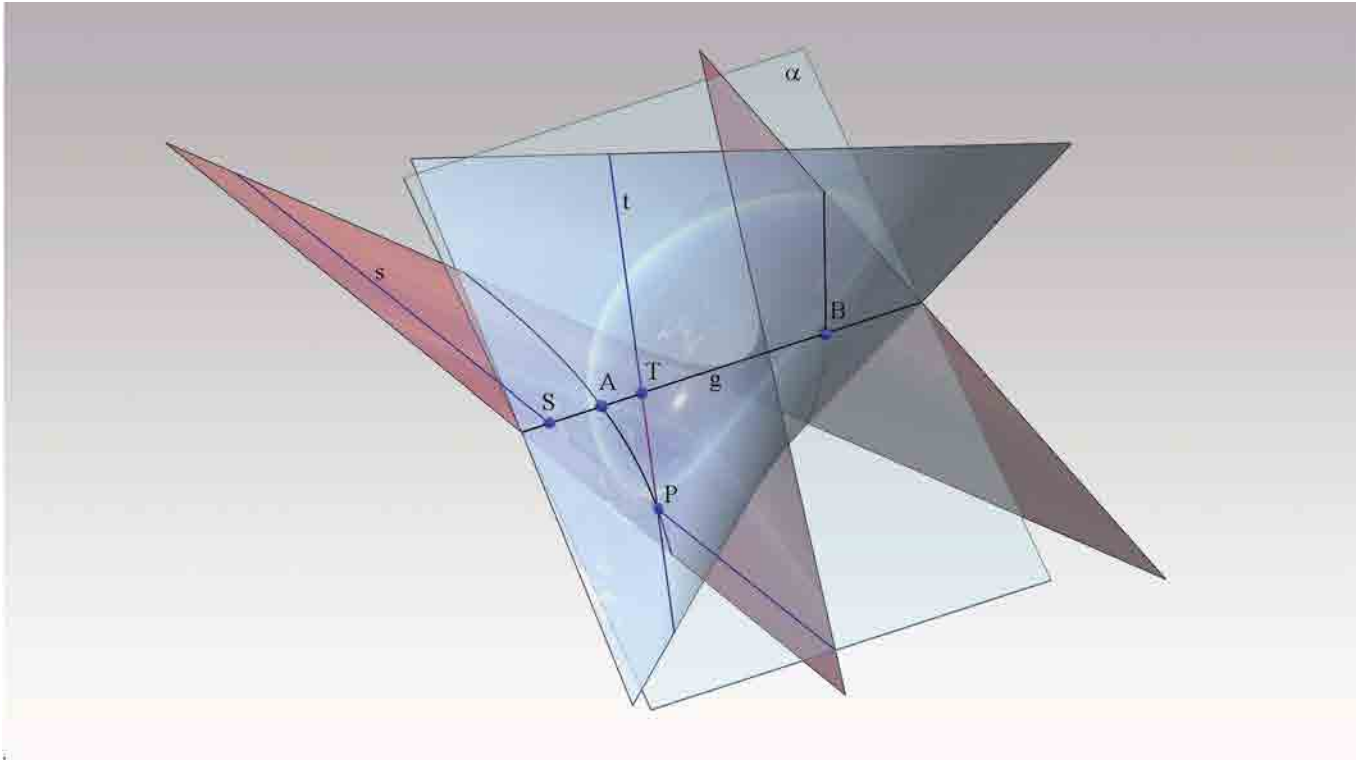
(curve rosse). Infatti i due paraboloidi sono simmetrici rispetto al piano bisettore dell'angolo diedro di rivoluzione, e hanno quindi una curva in comune in questo piano che non può che essere un'iperbole. Anche l'altro ramo della curva intersezione è un'iperbole e i due paraboloidi si dicono bitangenti (fig. 50).

2. Possiamo intersecare due paraboloidi ad assi concorrenti e ottenere in generale delle intersezioni comparabili a quelle delle lunette cilindriche (fig. 51). Nel caso illustrato ho costruito due paraboloidi iperbolici partendo da una coppia di parabole principali. I due paraboloidi hanno lo stesso asse x e l'uno è ruotato di 90° gradi rispetto all'altro. Si crea una caratteristica volta lunetta formata da porzioni di paraboloidi iperbolico.

3. Possiamo considerare due paraboloidi aventi sia lo stesso asse e sia lo stesso vertice in un punto. Questo caso è comunemente usato nelle tecniche costruttive. I due paraboloidi sono bitangenti e hanno lo stesso piano tangente al vertice (fig. 52). La curva d'intersezione



53/ Come nelle volte a crociera cilindriche anche per i paraboloidi è possibile ottenere due diverse coperture tagliando o tenendo determinate porzioni di superficie

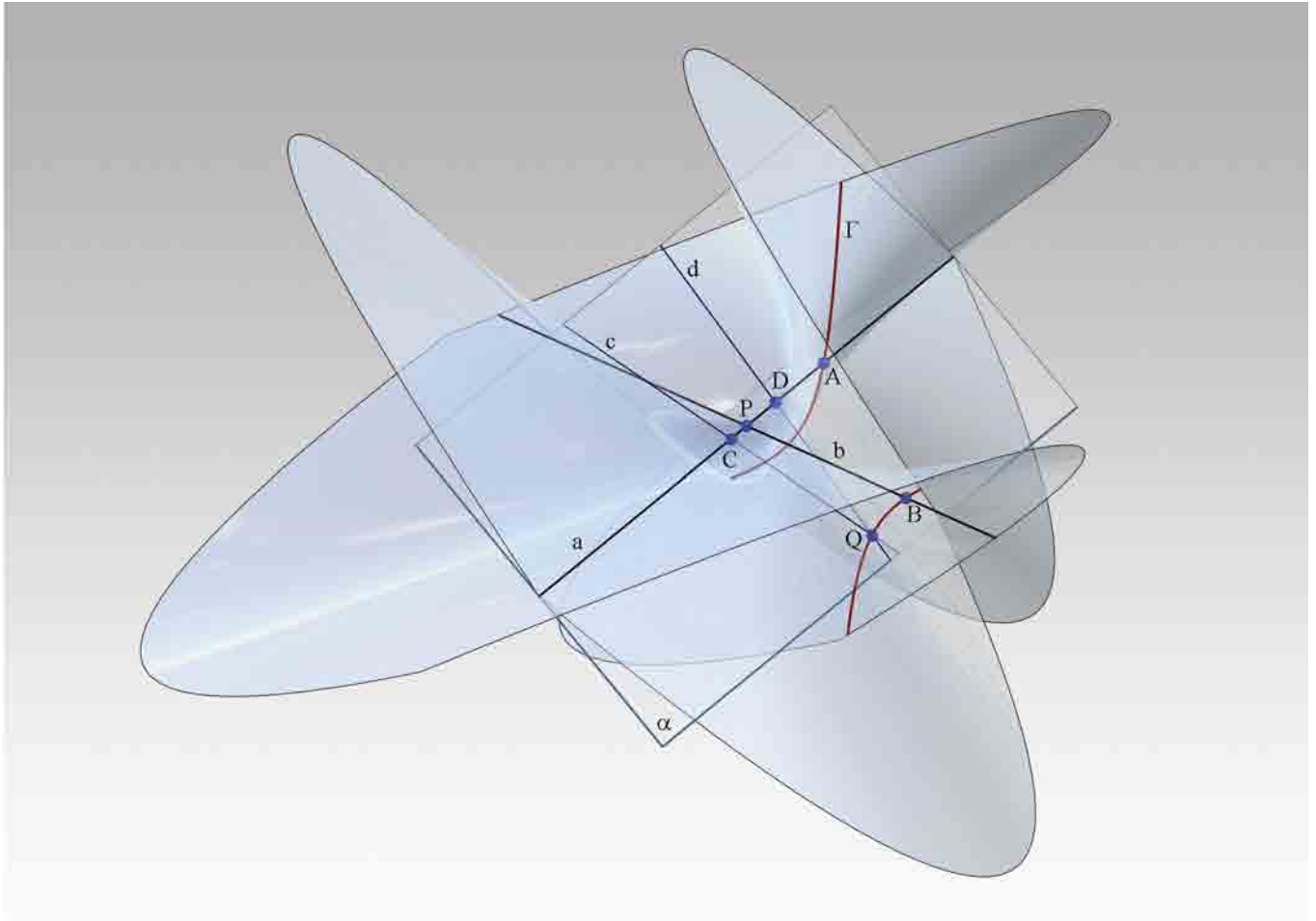


54/ Se i due paraboloidi hanno una generatrice g in comune la curva intersezione si decompone in una curva sghemba del terzo ordine che si appoggia su due punti A e B della generatrice in comune e nei quali i paraboloidi sono tangenti.

ne si decompone in due parabole con lo stesso vertice e lo stesso asse ma in piani differenti. La penetrazione diventa bitangenziale ed è comparabile a quella di due cilindri quadrici bitangenti a due piani paralleli e che formano una volta a crociera. Come nelle volte a crociera cilindriche anche per i paraboloidi è possibile ottenere due diverse coperture tagliando o tenendo determinate porzioni di superficie. Limitando le porzioni dei due paraboloidi comprese fra le due parabole diagonali e le tracce d'iperboli sul piano d'imposta otteniamo una volta a crociera formata da due paraboloidi su un piano d'imposta rettangolare (fig. 53). In questo caso la volta presenta quattro timpani piani verticali che possono restare aperti o no e poggiano su quattro punti. Se, viceversa, tagliamo le porzioni dei due paraboloidi situate sopra alle parabole diagonali, tagliamo ugualmente i timpani, e otteniamo una volta a padiglione. La volta ha come imposta le due iperboli sezioni orizzontali. L'intersezione di due paraboloidi definiti come super-

fici rigate è utile quando i due paraboloidi hanno una o due generatrici in comune.

1. Se i due paraboloidi hanno una generatrice g in comune la curva intersezione si decompone in una curva sghemba del terzo ordine che si appoggia su due punti A e B della generatrice in comune e nei quali i paraboloidi sono tangenti (fig. 54). In altre parole se due paraboloidi rigati sono bitangenti in due punti A e B distinti d'una stessa generatrice g , s'intersecano secondo questa generatrice e ancora secondo una curva sghemba di terzo ordine. Ciascuna generatrice dei due paraboloidi appartenente allo stesso sistema della generatrice in comune, taglia la curva sghemba in due punti, e quelle appartenenti all'altro sistema tagliano la curva sghemba in un solo punto. Un piano α passante per la generatrice comune g taglia ciascuno dei due paraboloidi secondo un'altra generatrice s e t e li tocca in due punti distinti S e T . Le due generatrici così ottenute s'intersecano in un punto P del



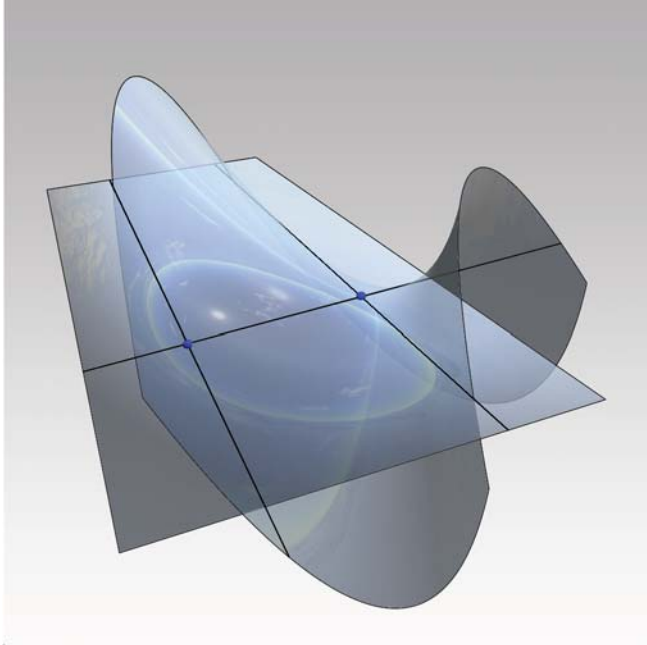
55/ Due paraboloidi hanno due generatrici in comune appartenenti alle due schiere opposte. Le due generatrici **a** e **b**, essendo concorrenti in un punto **P**, determinano anche un piano α tangente comune ai due paraboloidi. La loro intersezione si decompone nella conica degenerata formata dalle due generatrici comuni e in un'altra conica Γ che è una parabola o un'iperbole.

piano che appartiene anche alla curva sghemba. In generale le generatrici dei due piani non facenti parte dello stesso sistema della generatrice in comune tagliano la curva sghemba in un solo punto. Mentre quello dello stesso sistema della generatrice in comune tagliano la curva sghemba in due punti.

2. Se i due paraboloidi hanno due generatrici in comune, queste possono appartenere o alle due schiere opposte oppure appartenere alla medesima schiera.

Nel primo caso le due generatrici **a** e **b**, essendo concorrenti in un punto **P**, determinano anche un piano α

tangente comune ai due paraboloidi (fig. 55). La loro intersezione si decompone nella conica degenerata formata dalle due generatrici comuni e in un'altra conica Γ che è una parabola o un'iperbole. I punti di queste coniche possono essere anche determinati facendo passare dei piani ausiliari α per l'una o l'altra generatrice in comune (nel caso in figura il piano α passa per la generatrice **a**). Un tale piano α è tangente ai due paraboloidi in due punti distinti **C** e **D** della generatrice α ; e taglia ciascuno dei due paraboloidi secondo un'altra generatrice (**c** e **d**) della seconda schiera di rette non appartenente a quella in comune **g**. Il punto **Q** intersezione delle due rette **c** e **d**, è



56/ Nel caso in cui le due generatrici in comune ai due paraboloidi facciano parte dello stesso sistema allora le due rette non possono incontrarsi. La curva intersezione dei due paraboloidi si decompone in queste due generatrici e altre due dell'altro sistema, dove una è all'infinito.

un punto della conica intersezione. E' evidente che due punti d'intersezione **A** e **B** sono sulle due generatrici **a** e **b**. Per costruire l'intersezione conica **G**, conviene estendere i due paraboloidi tramite le parabole coniugate. Nel caso in cui le due generatrici in comune ai due paraboloidi facciano parte dello stesso sistema allora le due rette non possono incontrarsi (fig. 56). La curva intersezione dei due paraboloidi si decompone in queste due generatrici e altre due dell'altro sistema, dove una è all'infinito. In effetti, come due generatrici d'uno stesso sistema definiscono un piano direttore, nel caso sono in comune ai due paraboloidi iperbolici, queste definiscono un piano direttore comune. Ne risulta che i due paraboloidi, avendo nel piano all'infinito una terza generatrice comune ne hanno anche una a distanza finita.

Superfici Rigate

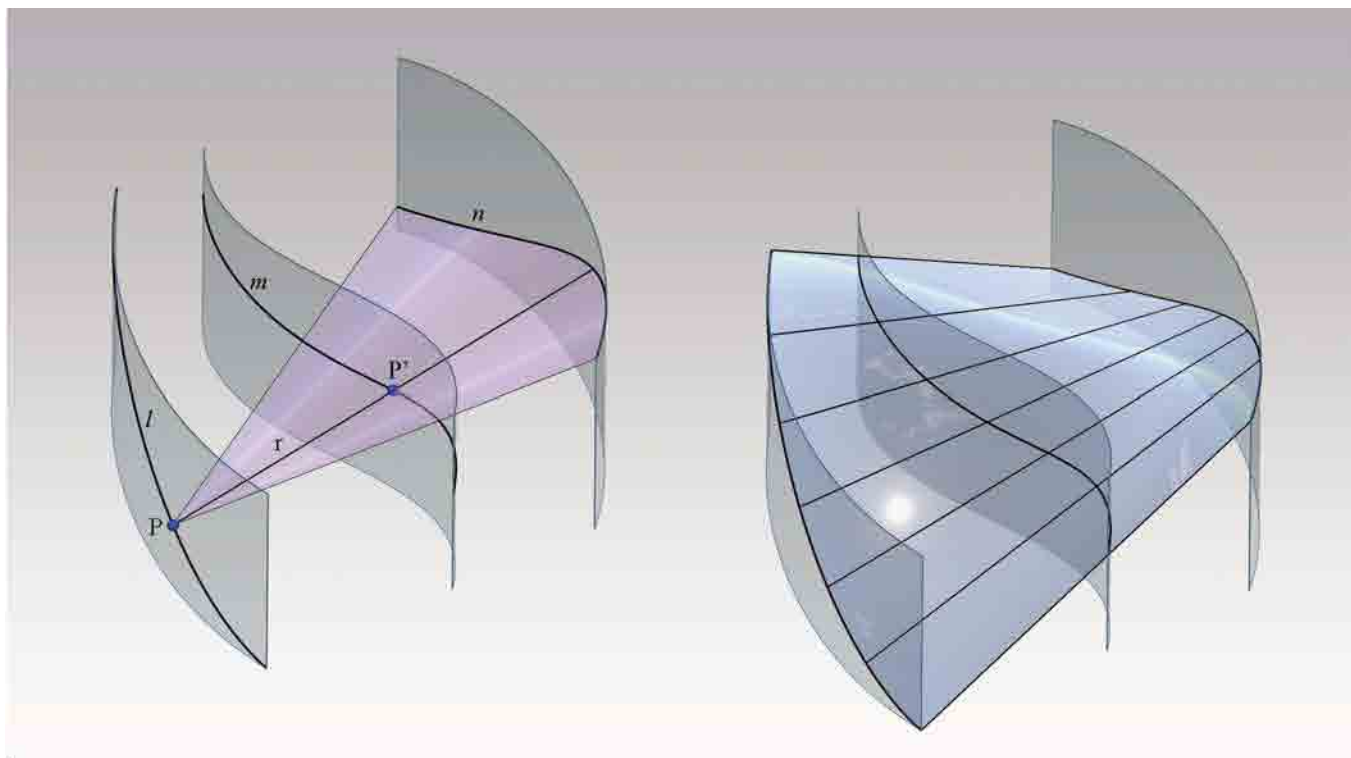
Proprietà grafiche delle rigate

Una *superficie rigata generica* è una superficie generata dal movimento di una linea nello spazio, secondo una

legge determinata. Ogni rigata contiene un sistema di infinite rette e generalmente in ogni punto della superficie passa solamente una retta. In questa definizione generica rientrano tutte le superfici generate da una retta. Esistono però due tipi di superfici generate da una retta: le superfici sviluppabili e le superfici rigate. Le prime, che comprendono anche i coni e i cilindri, sono superfici che si comportano in modo particolare rispetto ad un piano tangente. Un piano che è tangente in un punto è pure tangente lungo tutta la generatrice della superficie. Questo fatto è una caratteristica unica delle sviluppabili. Invece per una rigata generica il piano tangente varia da punto a punto (per esempio le quadriche rigate) anche lungo la stessa generatrice. Queste superfici sono state chiamate inizialmente superfici sghembe o semplicemente superfici rigate²¹. Il nome sghembe è dovuto ad una caratteristica delle rette generatrici della superficie. In generale due rette di una superficie rigata prese molto vicine saranno comunque sghembe fra loro. Da qui il nome di superfici sghembe. Vedremo, viceversa, come nelle sviluppabili due generatrici consecutive generiche sono sempre incidenti fra loro. Questa caratteristica è evidente per i cilindri e i coni dove le generatrici s'incontrano in un medesimo punto detto vertice (proprio o una direzione). Nelle sviluppabili generiche è una relazione-limite, ovvero due rette successive di una superficie sviluppabili sono incidenti in un punto sempre. Se il piano tangente in un punto di una rigata è tangente lungo tutta la generatrice passante per esso, allora la generatrice è detta *singolare*. In una superficie sviluppabili tutte le rette sono generatrici singolari mentre in una superficie rigata, generalmente, nessuna delle generatrice è singolare. Non è da escludere che una superficie rigata sghemba possa avere una o più generatrici singolari. In conclusione quando ci riferiamo alla superfici rigate intendiamo generalmente le superfici rigate sghembe.

Costruzione di una rigata avente tre direttrici assegnate

Una direttrice di una rigata è una qualsiasi curva appartenente alla superficie che incontri tutte le generatrici in un punto. Secondo la definizione di Monge date tre linee direttrici, per queste passerà solamente una determinata superficie rigata. La retta



57/ La retta generatrice che si appoggia costantemente alle tre linee date genera la superficie rigata.

generatrice si appoggerà costantemente alle tre linee date generando la superficie. Per determinare la superficie bisogna costruire le sue generatrici. Sono date tre linee sghembe qualsiasi l , m ed n (fig. 57).

Si prende sulla prima linea l un punto P . Si genera un cono che ha come vertice il punto P e come direttrice la linea retta n . L'intersezione del cono con la direttrice m dà il punto P' . Per P e P' passa la retta generatrice r . E' possibile che l'intersezione dia più di una generatrice che passi per quel punto. In generale, comunque, esiste sempre una retta che passa per il punto P e si appoggia ad entrambe le linee m , n ed l . Di conseguenza esiste sempre la rigata che si appoggia a tre qualsiasi linee nello spazio. La costruzione della superficie è la stessa se si prende un punto su m o su n .

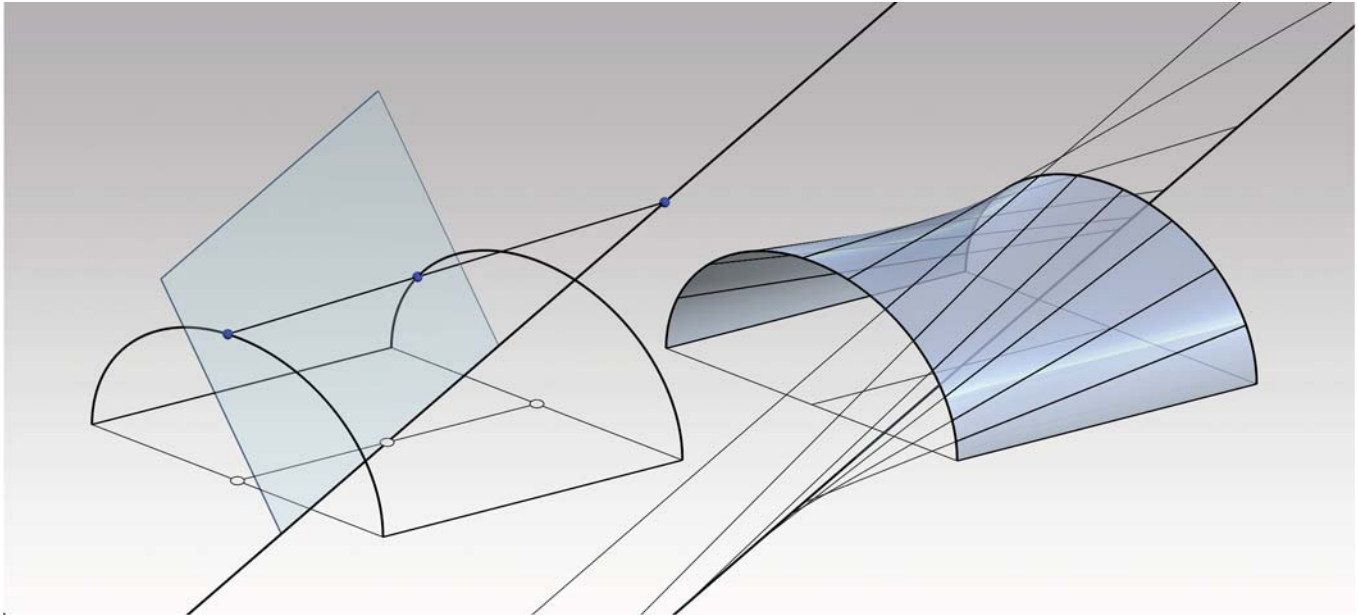
E' possibile costruire un numero a piacere di generatrici sufficiente a descrivere la porzione di superficie che interessa.

Classificazione delle rigate. Esempi.

Le rigate possono essere classificate in base alla natura e al numero delle direttrici rette.

1. Rigate aventi una sola direttrice retta:

a) Un esempio classico è la superficie della *volta a sbieco* (*surface du biais passé*). Due direttrici sono cerchi uguali e appartenenti a piani paralleli ma sfalsati rispetto ai centri (fig. 58). La terza direttrice è una retta che è ortogonale ai piani che contengono i cerchi e passa per il punto medio della congiungente i due centri dei cerchi. Un piano α che passa per la direttrice rettilinea d taglia i due cerchi in due punti. Questi individuano una retta a . Tale retta a si appoggia ai due cerchi e alla retta d , quindi è una generatrice della superficie rigata. Se l'obliquità della volta è oltre un certo limite, i punti intersezione del piano passante per d con i due cerchi sono possibili solo entro un determinato angolo diedro. Costruire questa superficie con un modellatore è semplice. Basta disegnare un certo numero



58/ Rigate aventi una sola direttrice retta: la superficie della volta a sbieco (surface du biais passé).

di generatrice e generare la superficie come un loft.

b) La vite a filetto triangolare. Si compone di una retta che si appoggia su un'elica circolare e sull'asse dell'elica e forma un angolo costante α con l'asse. La terza direttrice è il cerchio all'infinito su cui si appoggia la generatrice. Questa linea è quella che hanno in comune i coni con l'asse parallelo a quello dell'elica e le generatrici inclinate secondo l'angolo α .

c) I cilindroidi sono superfici rigate con una direttrice rettilinea impropria. Hanno le generatrici parallele a un medesimo piano, chiamato piano direttore della rigata. Tagliamo un cilindro retto con due piani non paralleli (fig. 59). Chiamiamo le due sezioni s e t . I due piani s'intersecano secondo una retta r . Adesso trasliamo la sezione s nel suo piano e nella direzione parallela ad r . La superficie che si ottiene non è più un cilindro ma è una superficie rigata cilindroide a piano direttore. Ogni punto della curva s rimane legato allo stesso punto della curva t tramite una retta. Ogni nuova generatrice sarà parallela al piano individuato dalla direzione r e dalla generatrice del cilindro di partenza.

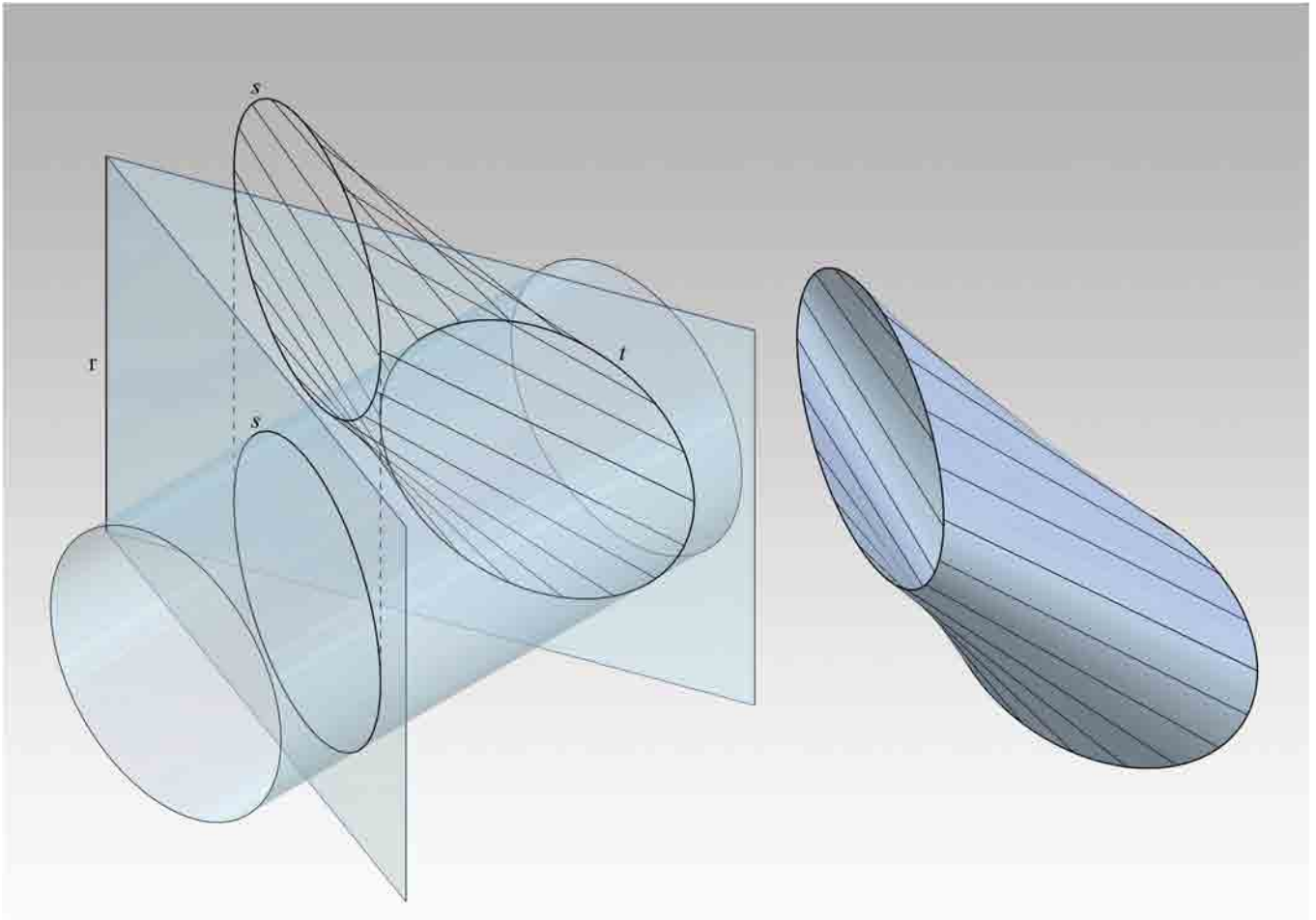
2. Rigate con due direttrici rette. La terza direttrice d può essere una linea qualsiasi. Una generatrice che passa per un punto P della d è data dall'intersezione dei

due piani passanti per P e le due direttrici rette. Quando una direttrice retta è una direzione allora le generatrici saranno parallele a un piano direttore e la rigata è detta conoide. Il conoide retto è dato quando la direttrice d è perpendicolare al piano direttore. Le generatrici sono tutte perpendicolari alla retta d e si appoggiano alla terza direttrice, che può essere una linea qualsiasi.

a) Un esempio di conoide retto è la vite a filetto rettangolare o elicoide retto. La terza direttrice è un'elica circolare che come asse ha la retta d . Il piano direttore è perpendicolare all'asse d . Le generatrici sono tutte perpendicolari all'asse e si appoggiano all'elica. La medesima superficie può essere generata con un movimento roto-traslatorio della retta generatrice attorno all'asse.

b) La superficie della volta d'ingresso in una torre rotonda, in cui la prima direttrice d è l'asse del cilindro della torre mentre la terza direttrice è una curva sghemba sull'estradosso del cilindro. Questa curva generalmente è simmetrica ed è la proiezione di una semicirconferenza o di una semiellisse sul piano sviluppato della superficie cilindrica. Le generatrici sono parallele al piano direttore orizzontale.

c) Il cono a cuneo, dove la prima direttrice è la linea d , mentre la terza direttrice è un cerchio c che sta su un



59/ I cilindroidi sono superfici rigate con una direttrice rettilinea impropria.

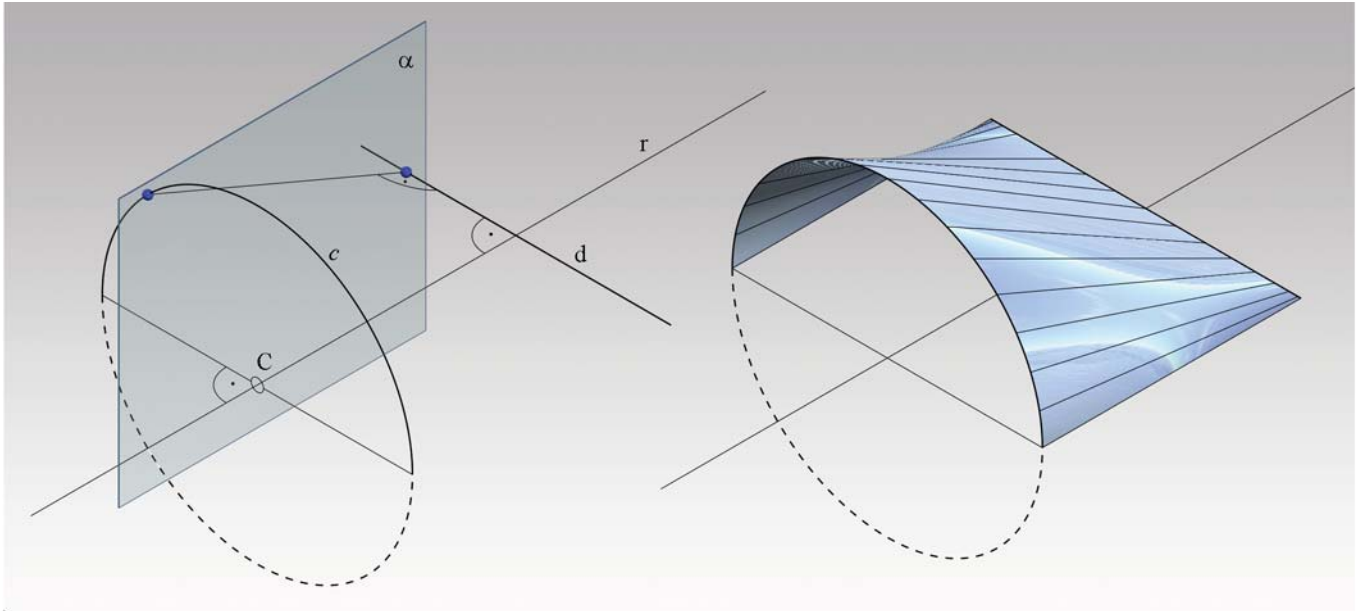
piano parallelo alla retta \mathbf{d} (fig. 60). Il centro \mathbf{C} è su una retta \mathbf{r} perpendicolare alla retta \mathbf{d} . Le generatrici sono le perpendicolari alla retta \mathbf{d} condotte dai punti del cerchio. Il piano direttore α è il piano verticale.

3. Le rigate con tre direttrici rettilinee, che sono le rigate quadriche, ovvero: l'iperboloide iperbolico e il paraboloido iperbolico.

Rigate algebriche. Ordine della rigata determinata da tre direttrici algebriche

Una superficie si dice algebrica quando può essere rappresentata in coordinate cartesiane x, y, z con una funzione $(F(x, y, z) = 0)$. Il grado n o ordine della superficie esprime il numero costante dei punti di contatto fra una

retta generica dello spazio e la superficie stessa. Per cui una rigata algebrica sarà di ordine n e una retta generica r incontrerà la superficie in n punti. L'ordine di una rigata algebrica è uguale al numero delle sue generatrici che si appoggiano a una retta generica dello spazio. Date tre linee direttrici l, m, n la rigata è di ordine $2lmn$. Una quadrica rigata che si appoggia su tre direttrici rette ha grado 2. Nel caso in cui si hanno due direttrici rette e una terza l di ordine 1, allora la superficie sarà di ordine $2l$. Nel caso del cono a cuneo le tre direttrici sono due rette (m ed n) e un cerchio (l). Inoltre queste linee non hanno nessun punto in comune per cui il grado della superficie è $2 \cdot 2 = 4$. Il ragionamento è simile per gli altri due casi. Se due delle tre direttrici hanno qualche punto a comune,



60/ Rigate con due direttrici rette: Il cono a cuneo, dove la prima direttrice è la linea **d**, mentre la terza direttrice è un cerchio **c** che sta su un piano parallelo alla retta **d**.

la rigata è formata anche dai coni che hanno come vertici questi punti e che si appoggiano alla terza direttrice. L'ordine del cono è uguale al grado della direttrice. Se si vuole considerare solo la rigata restante, cioè quella parte che non contiene i coni, l'ordine della superficie si dovrà diminuire di **n** unità per ogni punto comune a **L** e **M** e così via. Per cui l'ordine della rigata è:

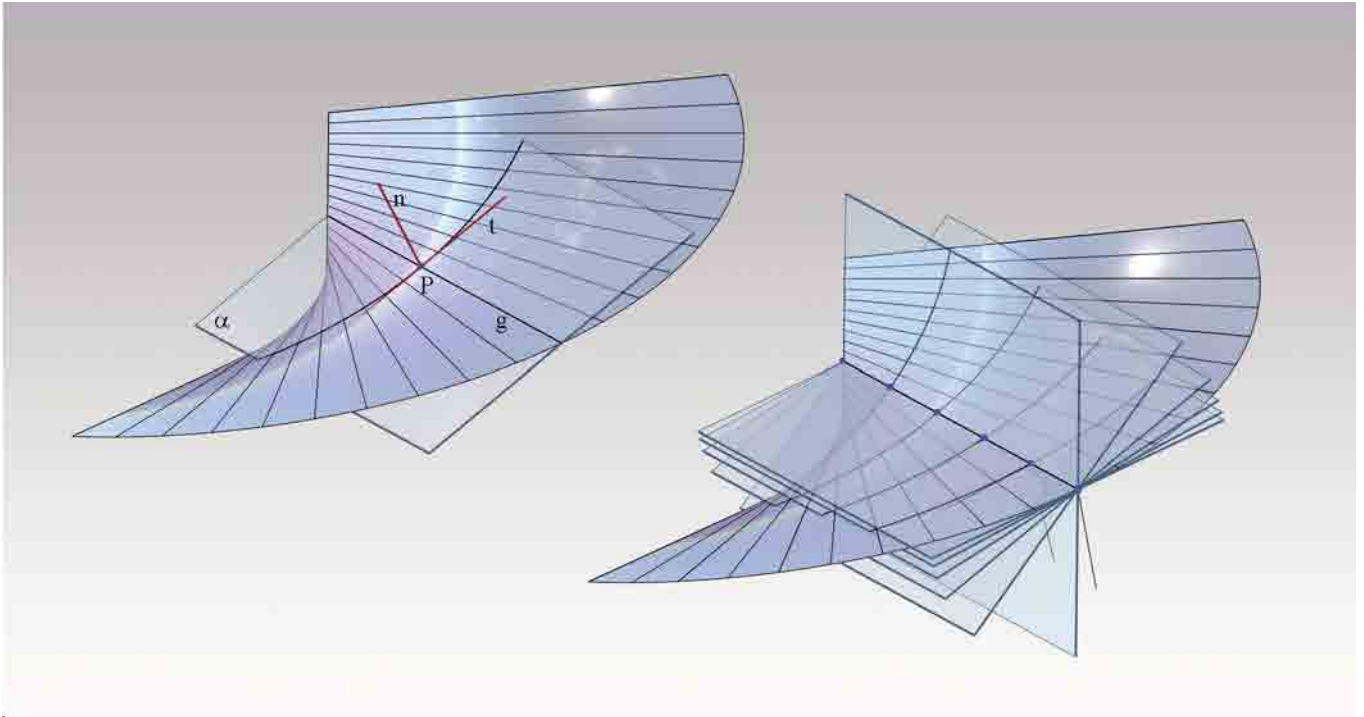
$$2lmn - xl - yn - zn$$

dove **l**, **m**, **n** è il grado delle direttrici e **x**, **y**, **z** sono i punti a comune a due a due fra le tre direttrici. Per capire meglio conviene osservare un esempio come la volta a sbieco. Questa superficie ha come direttrici due cerchi, **m** ed **n** di grado 2, e una retta **l** di grado 1. I due cerchi hanno due punti in comune che sono i punti ciclici che sono i punti immaginari all'infinito per cui passano tutte le circonferenze. L'ordine della rigata è $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Dobbiamo ancora escludere, però, il cono quadrico che proietta i due cerchi e passa per il punto medio del segmento che passa fra i loro centri. Allora la rigata della volta a sbieco è una superficie di 4° grado.

Teorema di Chasles

Il piano tangente ad una rigata in un punto **P** contiene la generatrice **g** passante per il punto **P** (fig. 61). Il piano tangente deve contenere tutte le tangenti nel punto **P** alle linee della superficie che passino per tale punto. Di conseguenza la tangente nel punto **P** della linea generatrice è la retta stessa **g**. Inoltre sappiamo che il punto **P** è un punto doppio della superficie e quindi il piano tangente α ha come intersezioni con la superficie rigata nell'intorno considerato due linee: l'una è la retta **g** e l'altra è una curva qualsiasi. Le tangenti **g** e **t** a queste due linee sono le tangenti principali. La normale **n** alla superficie nel punto **P** è perpendicolare al piano tangente α . **P** sarà un punto iperbolico a meno che **g** non sia una generatrice singolare e allora **P** sarà un punto parabolico. I piani tangenti agli infiniti punti della generatrice **g** passeranno tutti per la retta **g**. Si forma un fascio di piani che ha come asse la retta **g**. Ad ogni piano corrisponde un punto sulla retta **g**. Si viene a creare una corrispondenza proiettiva fra due forme di prima specie. Ad ogni elemento della punteggiata **g** viene associato un elemento del fascio di asse **g**.

I piani tangenti a una rigata generica nei punti di una



61/ Teorema di Chasles: i piani tangenti a una rigata generica nei punti di una generatrice semplice g formano un fascio avente per asse la retta g , tale da creare una proiettività tra i piani del fascio e i punti della punteggiata g .

generatrice semplice g formano un fascio avente per asse la retta g , tale da creare una proiettività tra i piani del fascio e i punti della punteggiata g .

Nel caso la superficie sia una sviluppabile il piano tangente lungo una generatrice g avrà sempre la stessa posizione. Il piano tangente, quindi, è tangente lungo tutta la generatrice della superficie.

Conseguenze del teorema di Chasles

Il teorema di Chasles ha portato Hachette²² a scoprire e a definire le *proprietà principali* delle superfici rigate²³. Data una rigata generica R , si considera una generatrice qualsiasi g su di essa. Esistono un'infinità di superfici quadriche tangenti (*raccordate*²⁴) ad R lungo l'intera generatrice g . Una superficie di esse ha per generatrici del sistema opposto tutte quelle rette tangenti alla rigata R che si appoggiano a g . Quindi basta prenderne tre qualsiasi per determinare un iperboloido tangente Q .

1) Una rigata sghemba qualsiasi ammette un'infinità di superfici quadriche tangenti ad essa lungo una

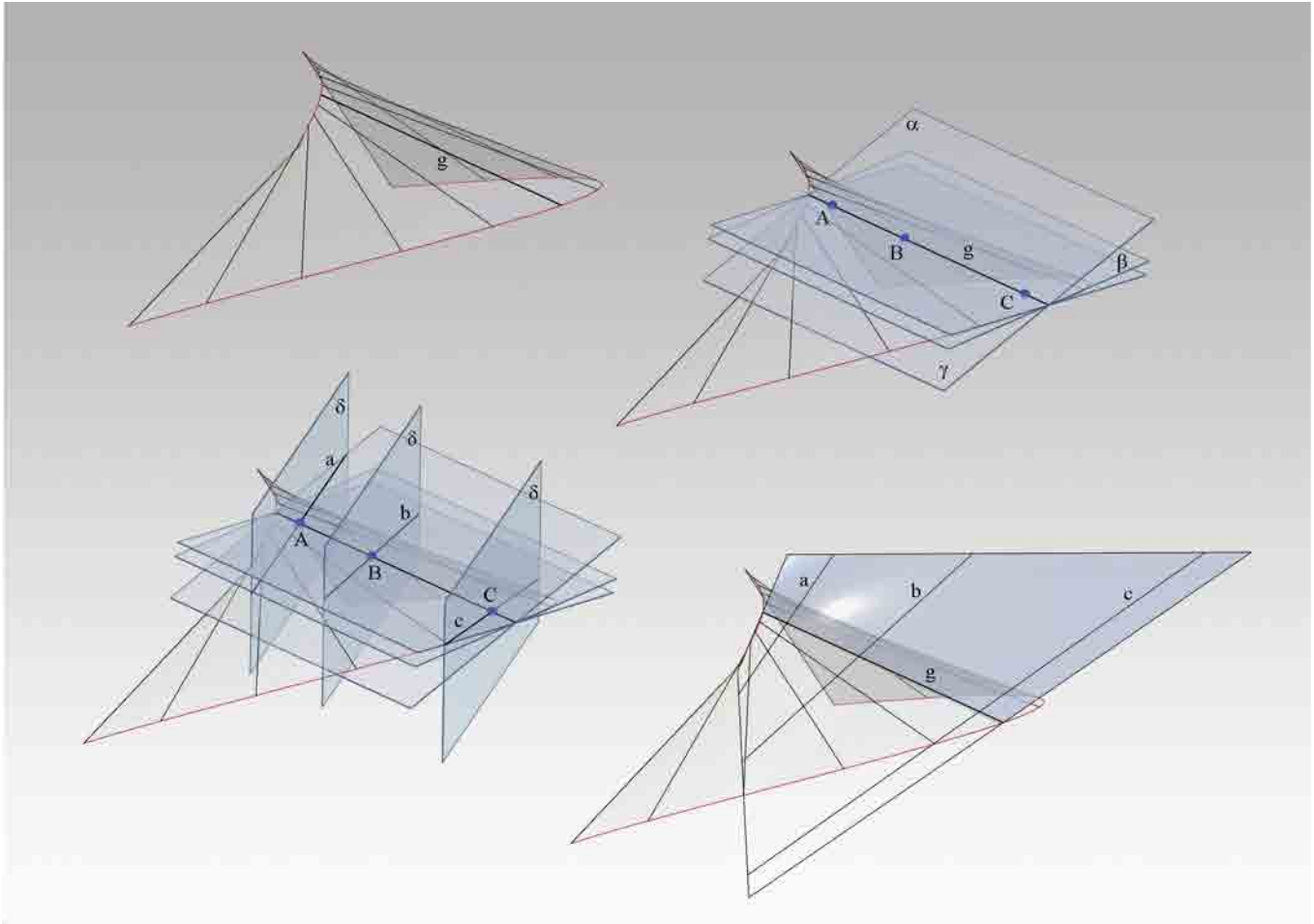
generatrice g , e per ogni retta generica dello spazio ne passa una e una sola.

E' possibile ottenere anche un paraboloido iperbolico tangente (fig. 62). Si prendono tre piani tangenti alla rigata R lungo la generatrice g . Questi toccano la superficie R in tre punti distinti A, B, C . E' sufficiente tagliare i tre piani tangenti α, β, γ con tre piani paralleli ad un piano direttore δ . Questi tagli individuano tre generatrici parallele ad un piano direttore δ che determinano un unico paraboloido iperbolico. Le tre rette a, b, c , quindi, determinano il paraboloido iperbolico di raccordo.

Questo è il principio utilizzato negli ingranaggi meccanici quando si vuole trasmettere il movimento di rotazione di un asse ad un altro asse sghembo con il primo. Se si hanno due solidi a forma di iperboloidi rotondi raccordati lungo una generatrice, questi si trasmettono il movimento da un asse all'altro (fig. 63).

2) Fra gli infiniti iperboloidi rigati di raccordo lungo una generatrici g ve ne è uno solo osculatore.

Questa superficie sarà in generale un iperboloido rigato

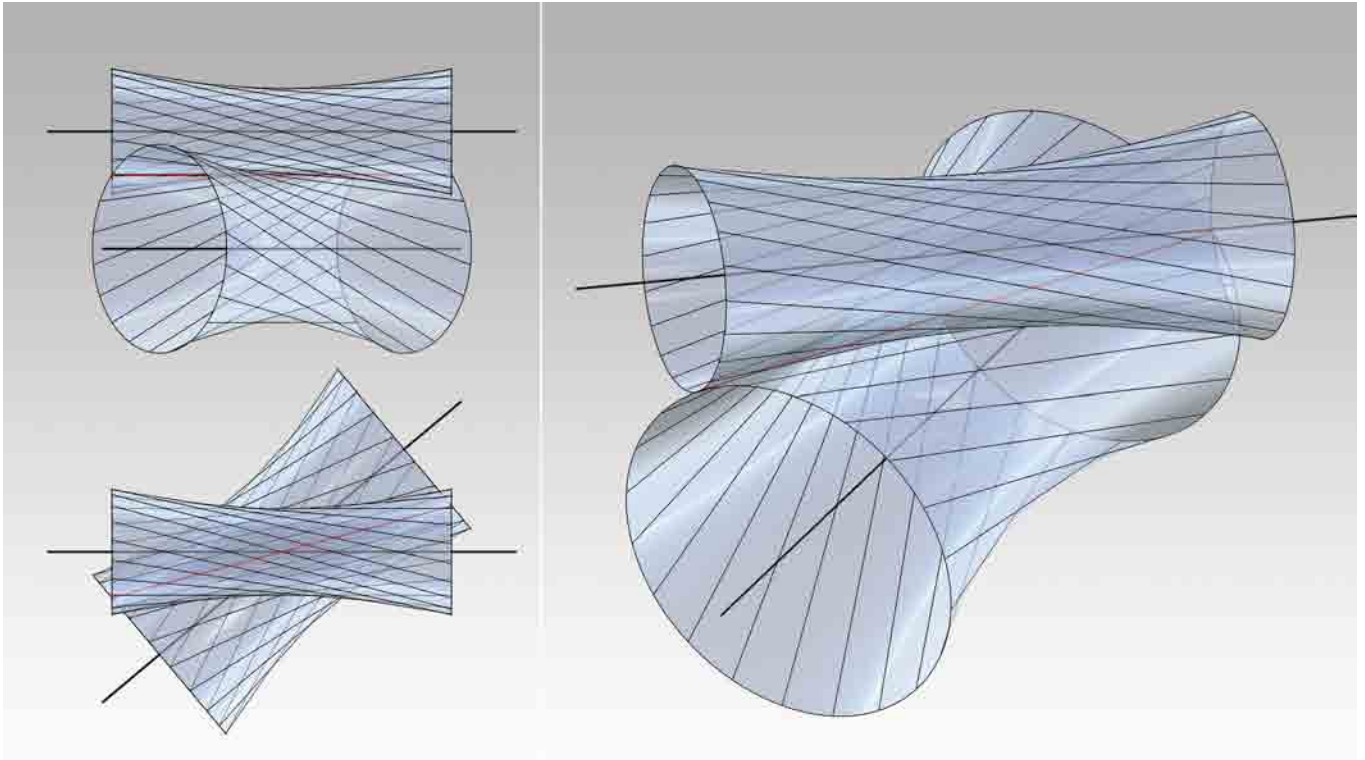


62/ Una rigata sghemba qualsiasi ammette un'infinità di superfici quadriche tangenti ad essa lungo una generatrice g , e per ogni retta generica dello spazio ne passa una e una sola.

generico²⁵. L'iperboloide osculatore è formato dalle seconde tangenti principali di R nei punti della generatrice g . Per trovare l'iperboloide osculatore si taglia la superficie R con tre piani tangenti α, β, γ in tre punti distinti A, B, C di g . Su questi punti si prendono le tangenti a, b, c alle tre curve restanti nei punti considerati. Le tre tangenti determinano l'iperboloide osculatore lungo la retta g . Un caso particolarmente interessante che può essere sperimentato attraverso la modellazione matematica riguarda la rigata quadrica osculatrice all'elicoide retto lungo una qualsiasi retta g (fig. 64). Questa ha per generatrici le tangenti alle eliche direttrici nei punti intersezione con la generatrice g . Siccome le rette sono tutte

perpendicolari alla generatrice g , la quadrica osculatrice è un paraboloido iperbolico. Le tangenti alle eliche direttrici nei punti di una stessa generatrice formano un paraboloido iperbolico equilatero, del quale un piano direttore è perpendicolare a quella generatrice e l'altro è perpendicolare all'asse.

3) Teorema di P.Serret: sopra una rigata sghemba, le asintotiche del secondo sistema segano le generatrici secondo punteggiate proiettive. Questo teorema estende a tutte le superfici rigate una nota proprietà delle quadriche rigate sulle quali il secondo sistema di asintotiche è costituito dal secondo sistema di generatrici. Consideriamo sempre il caso dell'elicoide conoide retto. Sap-



63/ Se si hanno due solidi a forma di iperboloidi rotondi raccordati lungo una generatrice, questi si trasmettono il movimento da un asse all'altro.

priamo che il primo sistema delle asintotiche nelle superfici rigate è sempre costituito dalle generatrici rette. Il secondo sistema delle asintotiche nell'elicoide conoide retto è costituito dalle eliche direttrici, aventi lo stesso asse della superficie. L'asse della superficie fa parte del secondo sistema di asintotiche. In un punto qualunque della superficie le due tangenti principali, cioè la generatrice retta e la tangente all'elica direttrice) sono fra loro perpendicolari.

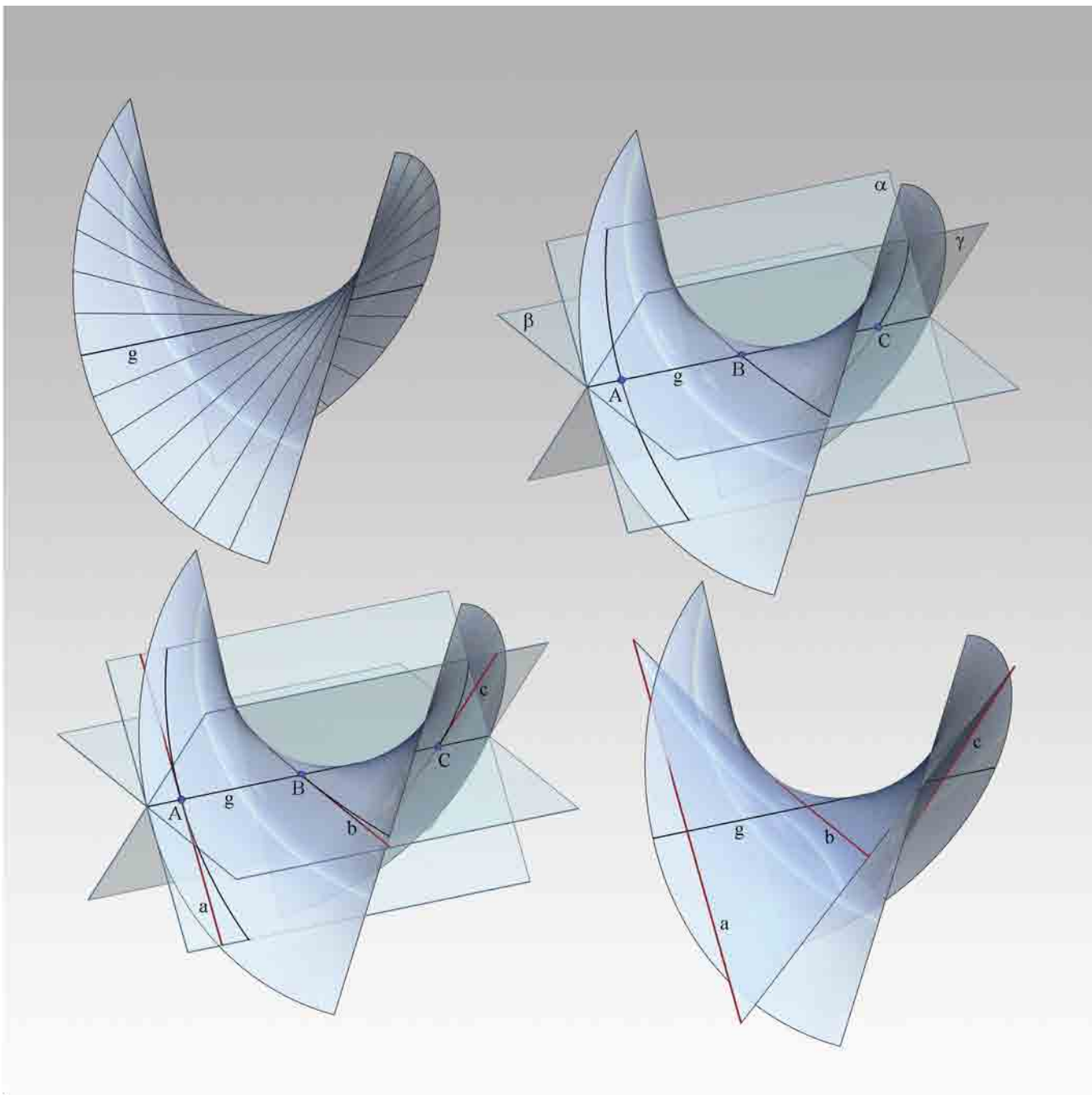
4) Due rigate sghembe aventi a comune una generatrice non singolare si toccano, in generale, in non più di due punti di questa generatrice. Se si toccano in tre punti di una stessa generatrice, esse saranno raccordate lungo l'intera generatrice. Due rigate R e S hanno in comune una generatrice g . La punteggiata g sarà proiettiva ad R come ad S . Esisterà un fascio di piani proiettivo ad R ed un altro proiettivo ad S . Per cui si crea una corrispondenza proiettiva anche fra i due fasci di piani che hanno come asse la stessa

retta g . In questa proiettività non potranno esserci più di due punti uniti altrimenti si avrebbe un'identità, cioè per ogni punto di g si avrebbe lo stesso piano tangente del fascio sia per R che per S .

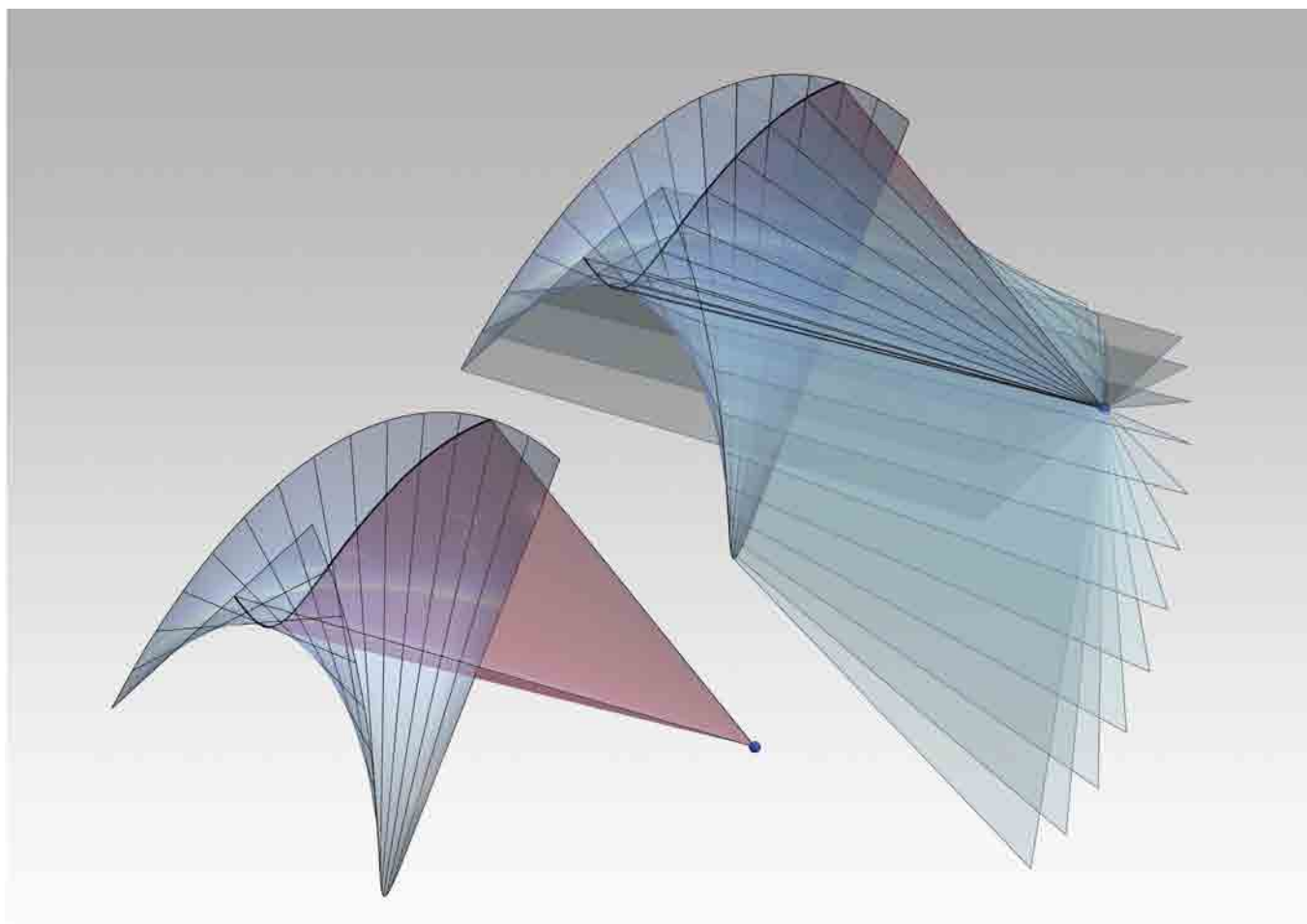
Sappiamo, infatti, che per raccordare un iperboloido ad una superficie rigata R generica lungo l'intera generatrice g è sufficiente costruire tre piani passanti per g (vedi figure 62, 63, 64). Questi toccano la superficie rigata in tre punti distinti sulla retta g . Si prendono tre rette qualsiasi passanti per i tre punti di contatto e appartenenti ai rispettivi piani tangenti alla superficie. Le tre rette determinano un iperboloido a una falda raccordato alla superficie R .

5) Se un piano passante per g è tangente a R in due o più punti di questa generatrice, g sarà certo generatrice singolare, e quel piano sarà tangente ad R in ogni punto di g . Le generatrici delle superfici sviluppabili sono tutte generatrici singolari.

6) Il cono circoscritto da un punto P a una rigata è



64/ Fra gli infiniti iperboloidi rigati di raccordo lungo una generatrici g ve ne è uno solo osculatore.



65/ Il cono circoscritto da un punto P a una rigata è costituito dall'involuppo degli ∞^1 piani che proiettano le generatrici della rigata da questo punto.

costituito dall'involuppo degli ∞^1 piani che proiettano le generatrici della rigata da questo punto (fig. 65).

Proprietà metriche delle rigate

Piani asintoti. Cono direttore

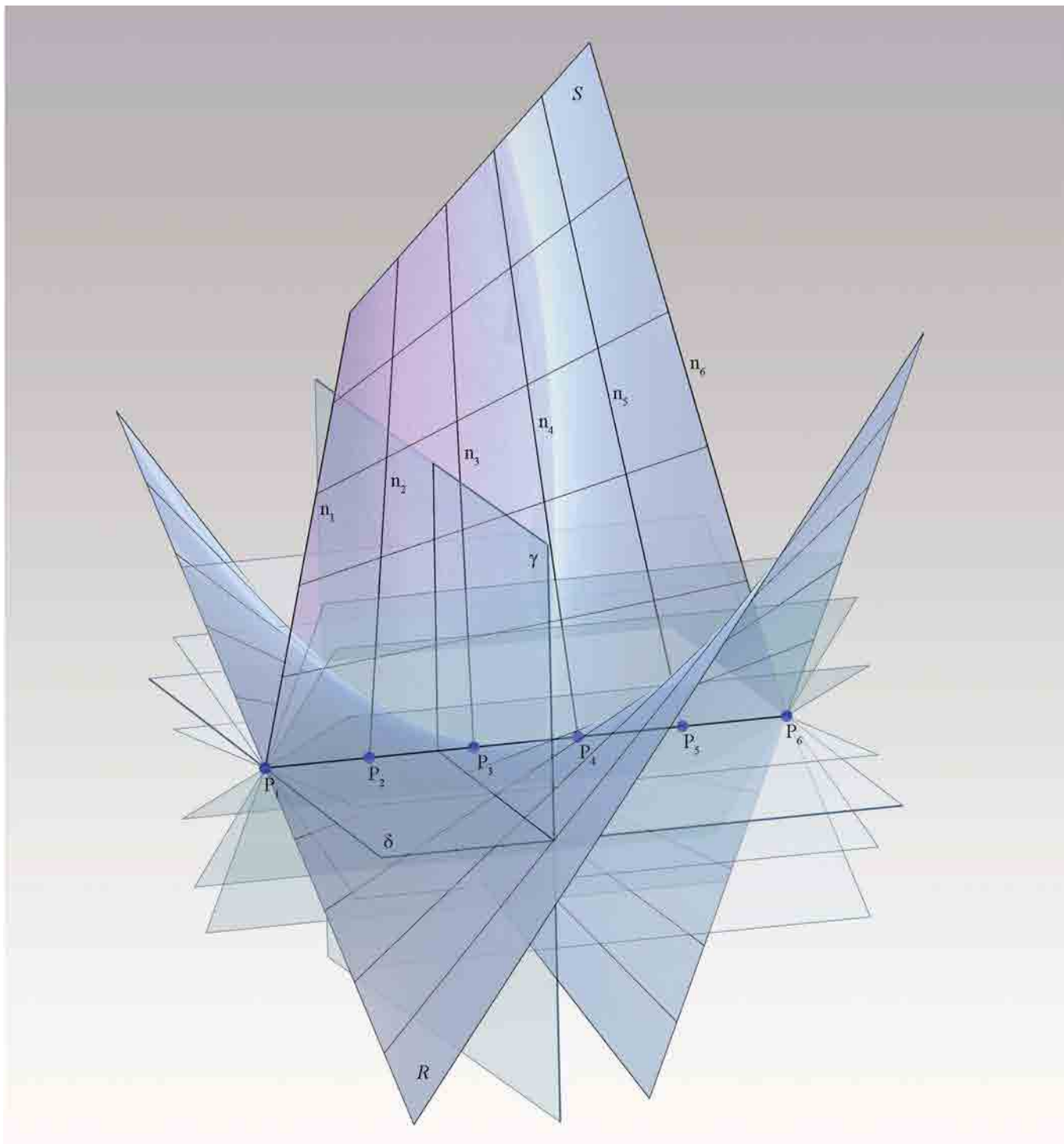
Un piano asintoto di una rigata è il piano tangente ad essa nel punto all'infinito delle singole generatrici. Il piano asintoto passa per la generatrice g e per la tangente alla curva all'infinito della rigata nel punto all'infinito. Si può anche dire che è il piano formato dalla retta g e dalla generatrice consecutiva g' .

I piani asintoti involuppano una superficie sviluppabile (sviluppabile asintotica) che ha le generatrici parallele

alla rigata. Ogni cono avente le generatrici parallele alle generatrici della rigata si dice *cono direttore*. Per ogni punto dello spazio esiste un cono direttore. Un esempio è il cono asintotico dell'iperboloide ad una falda. Quando le generatrici sono tutte parallele ad un piano il cono si dice *piano direttore*, e i piani asintoti sono piani direttori. Un esempio è il paraboloido iperbolico.

Paraboloido delle normali

Costruiamo delle normali n alla rigata sghemba R in punti P di una sua generatrice retta g (fig. 66). Queste rette costituiscono le generatrici di un'altra rigata N che è ortogonale alla prima lungo la generatrice g . Cer-



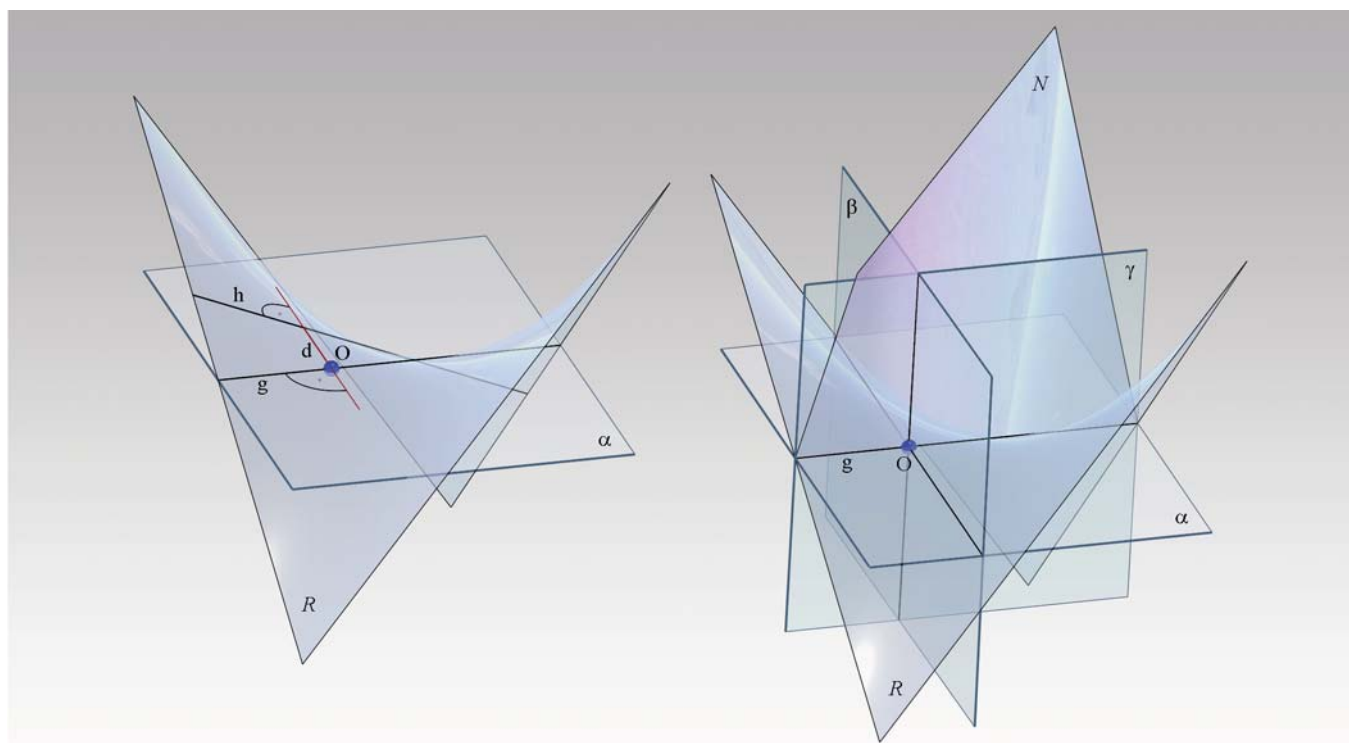
66/ Il paraboloido delle normali: le normali a una rigata sghemba lungo una sua generatrice \mathbf{g} formano sempre un paraboloido iperbolico, dove un piano direttore è ortogonale a \mathbf{g} e l'altro è parallelo a \mathbf{g} e perpendicolare al piano asintoto di \mathbf{g} .

chiamo di indagare la natura di tale superficie. Consideriamo un punto P sulla punteggiata g . Ad ogni punto corrisponde un piano α tangente alla superficie R nel punto considerato. Esiste una corrispondenza proiettiva tra il fascio di piani con asse g e la punteggiata g stessa. La normale n in un punto P ha direzione perpendicolare al piano tangente in P . Allora le normali saranno tutte parallele al piano γ ortogonale a g . La direzione Q^∞ delle normali al piano tangente in P si sposterà lungo la retta h^∞ all'infinito comune dei piani perpendicolari. Le normali ad R si possono vedere come l'unione dei punti corrispondenti sulle punteggiate g e h^∞ , cioè dei vari punti P e Q^∞ . Siccome una direttrice è impropria, il risultato è un paraboloido iperbolico. I due piani direttori individuano le due schiere rigate del paraboloido iperbolico. La prima ha come piano direttore il piano γ ortogonale alla retta g . Il secondo piano direttore δ è parallelo alla g e quindi è ortogonale al primo. Allora il paraboloido iperbolico ha i piani direttori ortogonali fra loro. La giacitura del secondo piano direttore

sarà parallela a g e perpendicolare al piano asintoto. *Le normali a una rigata sghemba lungo una sua generatrice g formano sempre un paraboloido iperbolico, dove un piano direttore è ortogonale a g e l'altro è parallelo a g e perpendicolare al piano asintoto di g .*²⁶

Punto centrale e piano centrale di una generatrice

Data una rigata R si prendono due generatrici g e h (fig. 67). Con d indichiamo la retta di minima distanza fra le due generatrici e con O il punto di contatto di d con g . Allora variando la posizione di h varierà anche la posizione di O e di d . Quando h tende a coincidere con g , il punto O assume una posizione determinata su g e lo stesso la retta d . Questa sarà sempre perpendicolare alla g nel punto O e siccome dovrà essere perpendicolare pure alla generatrice consecutiva g' , sarà ortogonale al piano asintoto γ di g . Il punto O è detto *punto centrale* della generatrice g . La retta d è tangente alla superficie nel punto O e il piano formato dalla g e dalla d è il piano tangente α nel punto centrale O ed è detto *piano centra-*



67/ Il paraboloido delle normali a una rigata sghemba lungo una generatrice g ha come vertice il punto centrale O di g .

le. Il piano centrale sarà ortogonale al piano asintoto di \mathbf{g} stessa.

Esiste un metodo preciso per determinare il punto e il piano centrale di una rigata sghemba qualsiasi. Consideriamo il paraboloido delle normali N lungo \mathbf{g} alla rigata R . La rigata R nell'esempio riportato è anch'esso un paraboloido iperbolico. Il secondo piano direttore α del paraboloido normale è parallelo al piano centrale di \mathbf{g} , perché questo è tangente in O alla R . Facciamo passare un piano α parallelo al secondo piano direttore per \mathbf{g} . L'intersezione del piano α con R darà luogo a due linee d'intersezione (generalmente una generatrice retta e una curva; nell'esempio riportato due rette) e a un punto O , il punto centrale di \mathbf{g} . Il piano centrale α è dunque il piano tangente alla superficie rigata nel punto centrale O ed è normale al piano asintoto γ di \mathbf{g} . Questo piano, cioè il piano asintotico di \mathbf{g} , è ortogonale ad entrambi i piani direttori del paraboloido delle normali (piani α e β) e il suo punto di contatto con il paraboloido delle normali è il vertice di questo. *Concludendo il paraboloido delle normali a una rigata sghemba lungo una generatrice \mathbf{g} ha come vertice il punto centrale O di \mathbf{g} .*

Consideriamo l'involuzione delle coppie di piani ortogonali del fascio di \mathbf{g} , allora il piano asintoto e il piano centrale sono coniugati. Alle infinite coppie corrispondono i punti di un'involuzione ellittica di punti sopra \mathbf{g} . Il punto centrale O ha come coniugato il punto all'infinito di \mathbf{g} . Il punto O è detto punto centrale dell'involuzione. Per la proprietà della potenza dell'involuzione sopra una punteggiata:

Le coppie di piani ortogonali passanti per una generatrice \mathbf{g} non singolare di una rigata sono tangenti a questa rigata in coppie di punti situati sopra a questa generatrice da lati opposti al punto centrale, e a distanze da O aventi prodotto costante.²⁷

Parametro di una generatrice

Prendiamo una generatrice \mathbf{g} di una rigata sghemba qualsiasi. Consideriamo un'altra generatrice $\mathbf{g1}$ vicina alla prima. Indichiamo con \mathbf{d} la minima distanza tra la retta \mathbf{g} e $\mathbf{g1}$. C e $C1$ sono i punti di contatto di \mathbf{d} con \mathbf{g} e $\mathbf{g1}$. Conduciamo da $C1$ la parallela $\mathbf{g0}$ alla retta \mathbf{g} . Indichiamo con ϵ l'angolo acuto formato dalle due rette $\mathbf{g0}$ e $\mathbf{g1}$. Adesso prendiamo un punto M sulla \mathbf{g} e costru-

iamo un piano ortogonale a \mathbf{g} . Detto piano α incontrerà le due rette $\mathbf{g0}$ e $\mathbf{g1}$ nei rispettivi punti $M0$ e $M1$. Adesso facciamo passare un piano β per \mathbf{g} e per il punto $C1$. Costruiamo un altro piano γ per \mathbf{g} ed $M1$. L'angolo diedro formato dai due piani è l'angolo φ formato dalle rette $MM1$ ed $MM0$. Indichiamo con \mathbf{u} la lunghezza dei due segmenti CM e $C1M0$. Adesso notiamo che i due rettangoli $MM0M1$ e $C1M0M1$ sono entrambi rettangoli in $M0$, perché il piano α è, per costruzione, ortogonale a \mathbf{g} e di conseguenza è ortogonale anche a $\mathbf{g0}$. Inoltre il segmento $MM0$ che è parallelo a $CC1$, è perpendicolare al piano $\mathbf{g0g1}$.

Allora si può ricavare il cateto $M0M1$ dalla relazione:

$$M0M1 = \mathbf{u} \cdot \operatorname{tg} \epsilon = \mathbf{d} \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

quindi:

$$\mathbf{u} = \mathbf{d} / \operatorname{tg} \epsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

Quando la retta \mathbf{g} si avvicina indefinitamente alla $\mathbf{g1}$, allora il punto C viene a coincidere con il punto centrale O della retta \mathbf{g} . Inoltre il piano $\mathbf{gC1}$ (piano β) coincide con il piano centrale della \mathbf{g} . L'angolo φ assume un valore limite ψ che è la misura dell'angolo formato dai due piani tangenti in O e in M alla rigata R . Con \mathbf{u} indichiamo la distanza dal punto O al punto M . La relazione al limite diventa:

$$\mathbf{u} = (\lim \delta / \operatorname{tg} \epsilon) \operatorname{tg} \psi$$

cioè :

$$\mathbf{u} = (\lim \delta / \epsilon \cdot \epsilon / \operatorname{tg} \epsilon) \cdot \operatorname{tg} \psi = (\lim \delta / \epsilon) \operatorname{tg} \psi$$

perché il $\lim \epsilon / \operatorname{tg} \epsilon = 1$

Nel rapporto di δ su ϵ entrambi i termini tendono a zero. Il rapporto può assumere tre valori differenti. Se il $\lim \delta / \epsilon = \mathbf{p}$, tende cioè a un numero finito diverso da zero. Allora \mathbf{g} è una generatrice non singolare, perché solo la distanza \mathbf{u} di M da O varia l'angolo ψ dei piani tangenti. Allora:

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} \operatorname{tg} \psi$$

da qui il teorema: *La distanza di un punto qualunque su di una generatrice \mathbf{g} dal punto centrale O è proporzionale alla tangente trigonometrica dell'angolo che il piano tangente in quel punto forma col piano centrale.*

Il valore di \mathbf{p} quindi esprime di quanto il punto si allontana da \mathbf{O} rispetto ad un piano del fascio che ruota partendo dal piano centrale. Questo valore si chiama *parametro* della generatrice.

Ora consideriamo un punto \mathbf{N} sempre su \mathbf{g} , dove il piano tangente è perpendicolare al piano tangente in \mathbf{M} , allora la distanza di \mathbf{N} da \mathbf{O} sarà:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{p} \operatorname{tg}(\psi \pm \pi/2) = -\mathbf{p} \operatorname{ctg}\psi$$

Allora:

$$\mathbf{u}\mathbf{u}' = -\mathbf{p}^2$$

Questo dimostra analiticamente quanto affermato nel teorema precedente.

I due piani passanti per \mathbf{g} ed inclinati di 45° sul piano centrale sono tangenti in \mathbf{R} in due punti equidistanti dal punto centrale e la cui comune distanza è misurata dal parametro della generatrice \mathbf{g} .

Dunque due rigate sono tangenti fra loro quando hanno nella generatrice in comune lo stesso piano centrale, lo stesso punto centrale e lo stesso parametro e quando allo spostarsi di un punto sopra \mathbf{g} i piani tangenti ruotano nel medesimo senso.²⁸

Generatrici singolari e cilindriche

Immaginiamo che il rapporto δ/ε tenda a zero quando la generatrice $\mathbf{g1}$ si avvicina a \mathbf{g} . Allora δ è infinitesimo di ordine superiore a ε . Per qualunque valore di \mathbf{u} diverso da zero deve essere $\operatorname{tg}\psi = \pm\infty$. Questo vuol dire che in ogni punto di \mathbf{g} diverso da \mathbf{O} , punto centrale, il piano tangente sarà sempre lo stesso. Cioè sarà il piano parallelo passante per \mathbf{g} e parallelo alla generatrice consecutiva. In \mathbf{O} il piano tangente è indeterminato perché per ogni valore determinato della $\operatorname{tg}\psi$ deve essere che $\mathbf{u}=\mathbf{O}$. Quindi se il limite del valore \mathbf{p} tende a zero, la generatrice \mathbf{g} è una *generatrice singolare conica*. \mathbf{O} è il punto singolare. La generatrice \mathbf{g} e la sua consecutiva $\mathbf{g1}$ s'incontrano nel punto singolare \mathbf{O} . Vuol dire che la distanza di queste due generatrice è infinitesima di ordine superiore al loro angolo. Quando la distanza tende a zero tende a zero anche l'angolo che esse formano, ma, le generatrici avvicinandosi si toccano prima che l'angolo da esse formato diventi nullo. Questo fatto avviene per le sviluppabili quando sono formate dalle ge-

neratrici tangenti a una curva sghemba. I punti singolari sono i punti della curva sghemba direttrice. In un cono il punto singolare è il vertice.

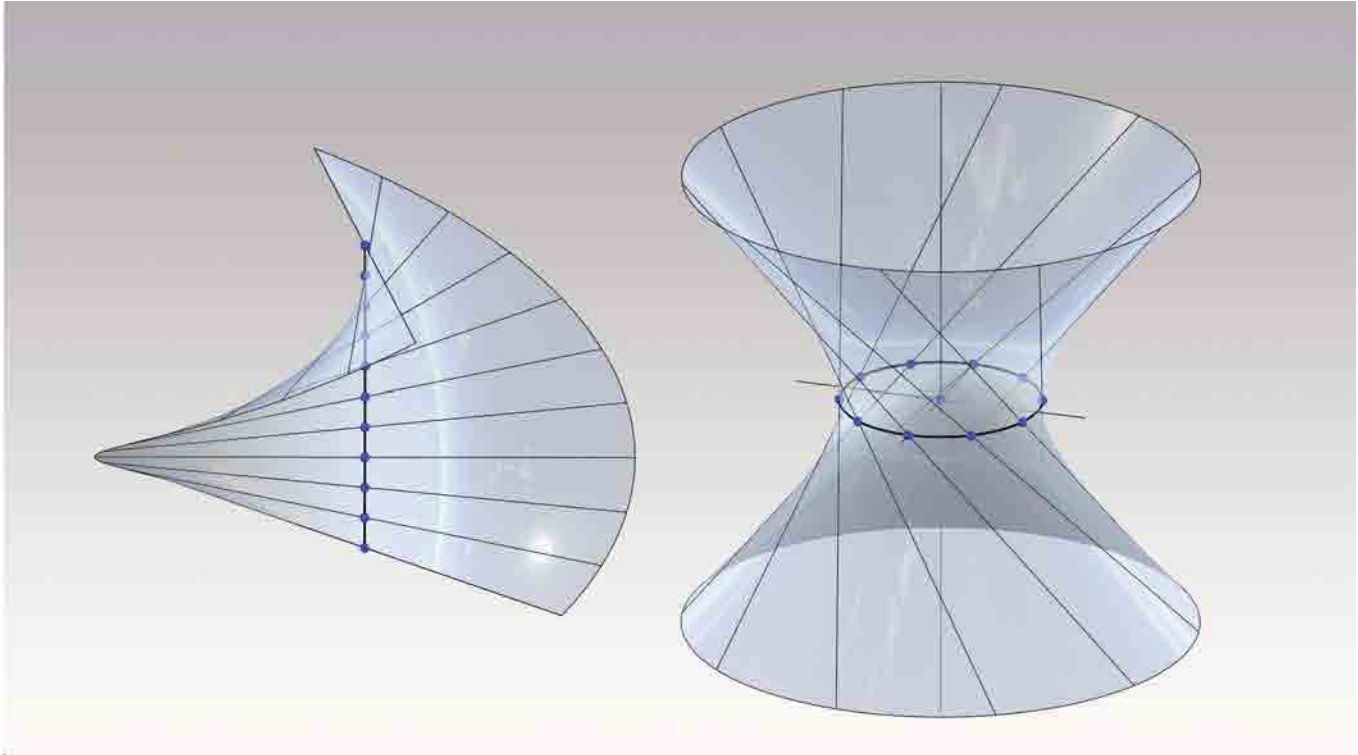
Nel caso che il rapporto δ/ε tende a zero con ε infinitesimo di ordine superiore a δ , per un valore di \mathbf{u} diverso da zero, deve essere $\operatorname{tg}\psi=0$, viceversa se $\mathbf{u}=\pm\infty$ il valore di $\operatorname{tg}\psi$ è indeterminato. La rigata avrà sempre lo stesso piano tangente lungo la generatrice \mathbf{g} ma con il punto singolare all'infinito. La generatrice si dice *singolare cilindrica*. Vuol dire che la generatrice \mathbf{g} e la consecutiva $\mathbf{g1}$ al limite formano un angolo nullo prima che esse coincidano, in altre parole siano già parallele prima d'incontrarsi.

Linea di stringimento

La linea di stringimento è formata da tutti i punti centrali delle generatrici di una rigata. E' la linea che definisce il luogo geometrico in cui le generatrici si accostano maggiormente l'una all'altra.

Una rigata sghemba può essere sempre ottenuta come deformazione di un'altra rigata qualsiasi, dove ogni generatrice della prima si trasforma nella generatrice della seconda rigata²⁹. La deformazione è intesa senza flessioni e estensioni. Le lunghezze e gli angoli sulla superficie rimangono invariati. I punti della linea di stringimento della prima rigata si trasformano nei nuovi punti della linea di stringimento della seconda rigata. In generale *ogni rigata avente una direttrice rettilinea propria, sulla quale tutte le generatrici sono ugualmente inclinate, ha questa direttrice per linea di stringimento.*

Un conoide retto ha per linea di stringimento la sua direttrice retta, perché le generatrici sono tutte perpendicolari alla retta direttrice e le incontra nei rispettivi punti centrali (fig. 68). *Inoltre qualsiasi rigata le cui generatrici sono ugualmente inclinate rispetto a una retta fissa ha i piani centrali tutti paralleli a questa retta.* Un iperboloido di rotazione ha come linea di stringimento il suo cerchio di gola. Le generatrici sono tutte ugualmente inclinate rispetto all'asse³⁰. I piani centrali saranno paralleli all'asse e toccheranno la superficie nei punti del cerchio di gola. Una rigata sviluppabile ha come linea di stringimento il suo spigolo di regresso. Le binormali di una curva sghemba formano una rigata, della quale la stessa curva è linea di stringimento. La binormale di una



68/ La linea di stringimento è formata da tutti i punti centrali delle generatrici di una rigata. E' la linea che definisce il luogo geometrico in cui le generatrici si accostano maggiormente l'una all'altra.

curva sghemba è la normale al piano osculatore della curva nel punto considerato.

Le superfici rigate elicoidali

La combinazione di un movimento uniforme di rotazione attorno ad un asse \mathbf{a} e di un movimento di traslazione genera un *movimento elicoidale*. Allora una qualsiasi linea \mathbf{l} assunta come generatrice e soggetta a questo movimento genera una *superficie elicoidale* o *elicoide*. Ciascun punto della superficie descrive nel movimento un'elica che ha lo stesso asse e lo stesso passo e verso del movimento appena descritto. La superficie così generata ha la proprietà di poter scorrere su sé stessa per effetto del movimento di rotazione e traslazione combinato. L'intersezione dell'elicoide con un cilindro rotondo di asse \mathbf{a} genera un'elica direttrice. Se la linea generatrice si appoggia all'asse l'elicoide si dice *chiuso* altrimenti si dice *aperto*. Nel caso l'elicoide sia aperto esisterà una distanza minima fra l'asse e la linea \mathbf{l} che definirà

attraverso il movimento elicoidale l'elica di gola. Se la generatrice è una retta si ha l'*elicoide rigato*. Se la retta generatrice \mathbf{g} si appoggia all'asse \mathbf{a} , questo sarà una direttrice della superficie rigata dell'elicoide che potrà essere *obliquo* o *retto*. Se la retta generatrice \mathbf{g} è sghemba rispetto all'asse \mathbf{a} esisterà un'elica di gola determinata dalla distanza minima \mathbf{d} della retta \mathbf{g} dall'asse \mathbf{a} . Siccome le infinite generatrici di un elicoide formano sempre lo stesso angolo con l'asse, il *cono direttore* di ogni elicoide rigato è un cono di rotazione coll'asse parallelo all'asse \mathbf{a} . Un elicoide retto, ovvero con la retta generatrice perpendicolare all'asse, ha il cono direttore che si trasforma in un piano direttore. I piani asintoti di elicoide sono tutti paralleli ai piani tangenti di un cono direttore e quindi ugualmente inclinati rispetto all'asse. I *piani centrali* sono tutti *paralleli all'asse della superficie*. Quando l'asse è anche direttrice retta della'elicoide esso è anche linea di stringimento perché è il luogo geometrico dei punti

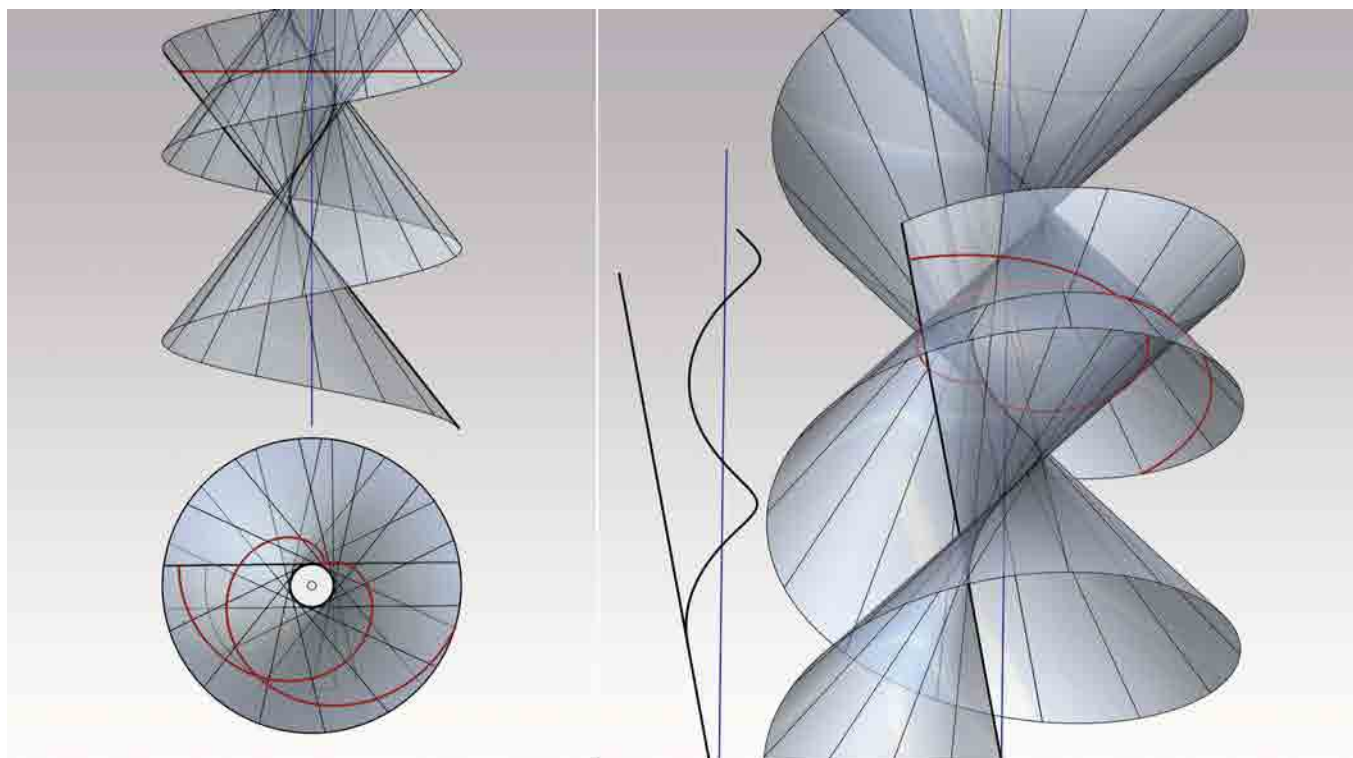
centrali delle infinite generatrici. Allora un elicoide rigato a direttrice retta ha la stesso asse come linea di stringimento. Se l'elicoide è aperto, e quindi l'asse non è una direttrice retta, l'elica di gola diventa la linea di stringimento.

Elicoide sviluppabile

Quando la generatrice retta nel suo movimento elicoidale si mantiene tangente ad un'elica circolare si genera l'elicoide sviluppabile (fig. 69). L'elica circolare direttrice a cui si appoggia la generatrice retta g mantenendosi tangente a questa è anche lo spigolo di regresso della sviluppabile ed è anche l'elica di gola.

Un'elicoide sviluppabile è completamente determinato una volta data l'elica circolare direttrice che è anche spigolo di regresso della superficie. Una volta costruita l'elica è sufficiente costruire la tangente in un estremo e questa sarà la generatrice della superficie elicoidale rigata. Consideriamo l'elicoide su una vista ortogonale all'asse della superficie. Lo spigolo di regresso apparirà come

un cerchio di raggio uguale a quello dell'elica. Se B è un punto qualsiasi dell'elica e b la sua tangente e generatrice dell'elicoide, questa sarà proiettata sul piano orizzontale come una tangente del cerchio proiezione dell'elica stessa. Allora tutte le tangenti del cerchio proiezione sono anche le proiezioni delle tangenti reali dell'elica cilindrica. Se immaginiamo un filo arrotolato attorno al cerchio e immaginiamo di svolgerlo mantenendo il filo sempre teso e tangente al cerchio, l'estremo di questo formerà i punti di una linea. Questa operazione può essere compiuta per qualsiasi tipo di linea l , piana o sghemba, e il tipo di linea che si ottiene è detta *evolvente* della linea l , mentre la linea l è detta *evoluta*. Ebbene da quanto detto ogni evolvente incontra ad angolo retto le tangenti della linea primitiva e perciò ogni evoluta è l'involuppo delle normali di questa linea. La curva sezione retta, ovvero con un piano ortogonale all'asse della superficie, di un elicoide sviluppabile è un'evolvente di un cerchio ed è proprio l'evolvente del cerchio proiezione su un piano



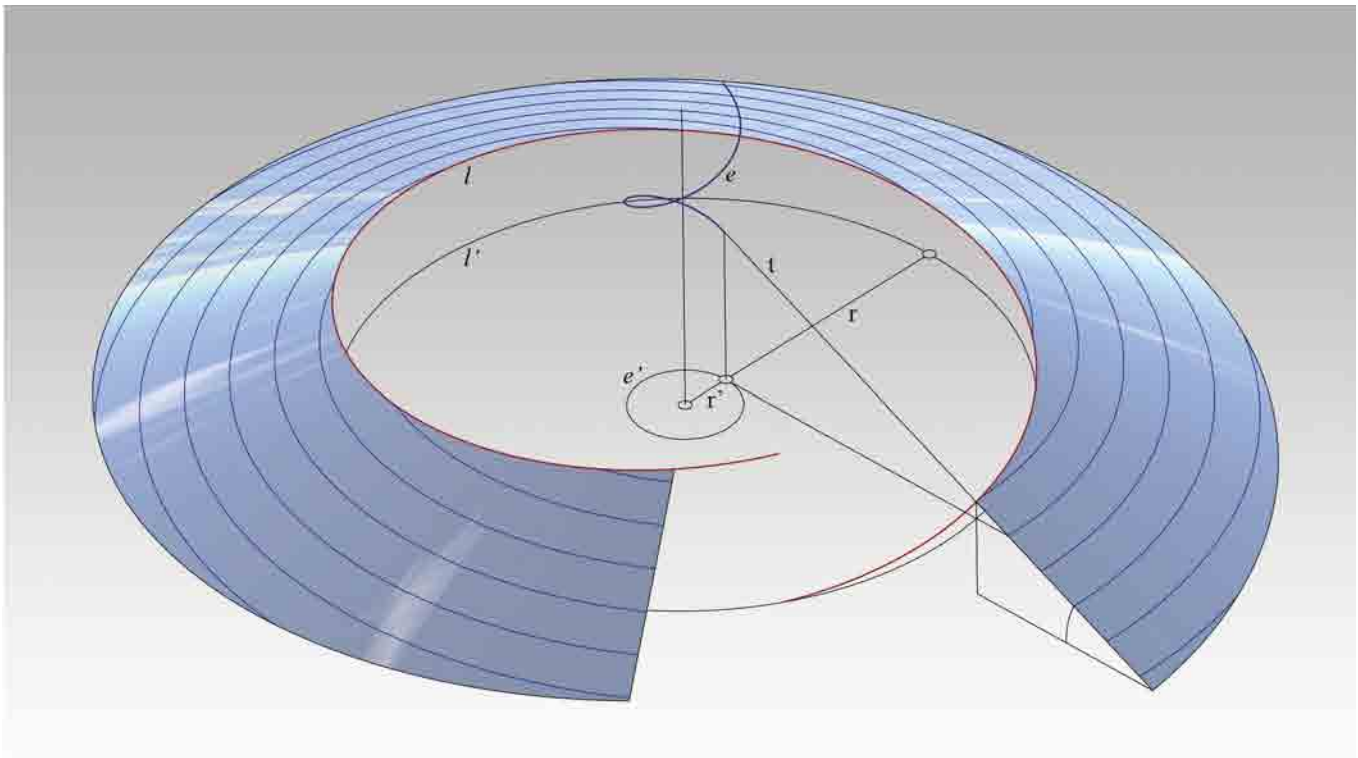
69/ Quando la generatrice retta nel suo movimento elicoidale si mantiene tangente ad un'elica circolare si genera l'elicoide sviluppabile.

orizzontale dello spigolo di regresso (se consideriamo l'asse dell'elicoide sviluppabile in posizione verticale). Un elicoide sviluppabile ha in ogni piano perpendicolare al suo asse infiniti punti doppi, appartenenti tutti a quel diametro del cerchio che passa per traccia dell'elica di regresso. L'elicoide sviluppabile attraversa sé stesso secondo infinite eliche coassiali di uguale verso e passo. Essendo una superficie sviluppabile il piano tangente in un punto P sarà tangente lungo tutta la generatrice p dell'elicoide. Svolgendo un elicoide sviluppabile sopra un piano, l'elica di regresso si dispone secondo un cerchio che ricopre infinite volte il piano. Le tangenti al cerchio sono le generatrici dell'elicoide e lo sviluppo ricopre infinite volte la regione di piano esterna al cerchio.

Superficie di pendenza uniforme

Si chiamano superfici a pendenza uniforme le superfici che hanno i piani tangenti ugualmente inclinati rispetto

ad un determinato piano di riferimento che normalmente si considera orizzontale. Fra queste superfici, a parte i piani e i coni di rotazione, ci sono le sviluppabili e luoghi delle tangenti ad un'elica cilindrica arbitraria. Il cono direttore di questa sviluppabile ha i piani tangenti di inclinazione costante ed è perciò un cono di rotazione. Un problema che si presenta comunemente è trovare la superficie a pendenza uniforme passante per una linea data. La superficie è in generale determinata se si conosce una direttrice qualsiasi e l'inclinazione rispetto al piano orizzontale. Se la linea data è un'elica circolare allora la superficie sviluppabile è l'elicoide sviluppabile. Supponiamo che la linea data sia un arco di elica circolare l di pendenza uniforme $1/12$ e si voglia raccordare con un a superficie a pendenza costante $1/2$ discendente verso l'esterno dell'arco (fig. 70). Per costruire l'elicoide sviluppabile passante per questa linea data e avente la pendenza desiderata bisogna trovare l'elica di regresso e che individua l'elicoide sviluppabile. Per



70/ Si chiamano superfici a pendenza uniforme le superfici che hanno i piani tangenti ugualmente inclinati rispetto ad un determinato piano di riferimento che generalmente si considera orizzontale.

prima cosa costruiamo il cerchio e' proiezione di base dell'elica data. L'elica data l e quella di regresso e da trovare devono avere lo stesso passo H e le rispettive pendenze di $1/12$ e $1/2$. Allora i raggi r ed r' dei cerchi proiettati devono soddisfare le relazioni:

$$H = 2\pi r \cdot 1/12 \quad H = 2\pi r' \cdot 1/2$$

Da cui $r' = r/6$

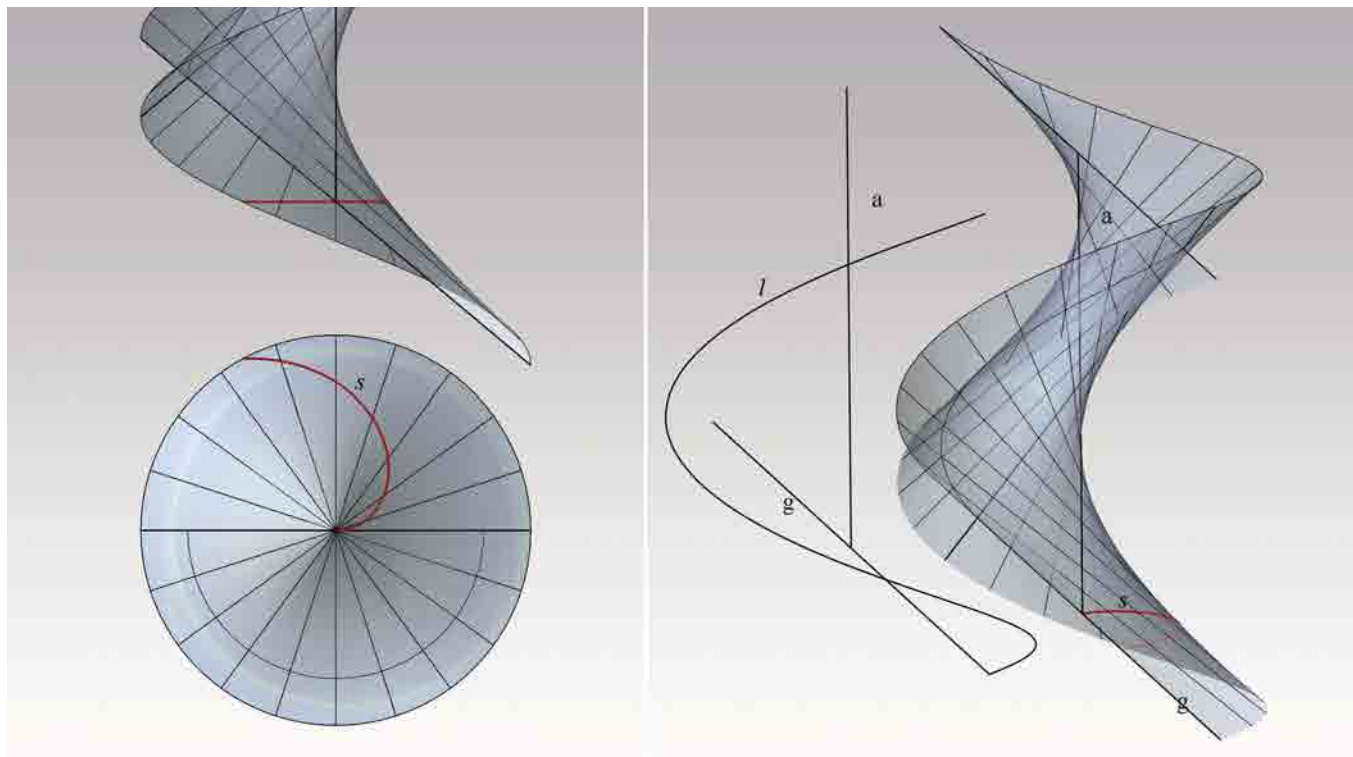
Adesso disegniamo l'elica di regresso. L'asse di questa deve coincidere con quello dell'arco dell'elica data l . Poi troviamo la tangente t all'elica di regresso, questa sarà la generatrice dell'elicoide sviluppabile. Una volta generato l'elicoide sviluppabile, è sufficiente traslarlo nel verso dell'asse in modo che le generatrici si appoggino anche all'elica data. Per fare ciò è sufficiente tagliare le due eliche, quella di regresso e quella data, con un piano passante per l'asse e prendere come punti di riferimento i due punti intersezione.

Se si taglia la superficie a pendenza uniforme con dei piani orizzontali mantenendo costante il passo si ottengono delle evolventi che sono anche le curve di livello della superficie.

Elicoide obliquo a direttrice rettilinea

L'elicoide obliquo è una superficie elicoidale rigata generata dal movimento di una retta g , obliqua rispetto ad un asse a , che si appoggia ad una direttrice retta a (l'asse), ad un'elica direttrice l e alla conica impropria (fig. 71). L'asse è anche spigolo di regresso della superficie rigata. La superficie è divisa dall'asse in due parti che vengono nominate *falda ascendente* e *falda discendente*.

Un piano passante per l'asse taglia la superficie secondo due sistemi di infiniti di generatrici rette fra loro parallele. I punti P_i intersezione di due generatrici di sistemi diversi sono punti doppi dell'elicoide. Questi punti appartengono alle eliche doppie della superficie. Taglian-



71/ L'elicoide obliquo è una superficie elicoidale rigata generata dal movimento di una retta g , obliqua rispetto ad un asse a , che si appoggia ad una direttrice retta a (l'asse), ad un'elica direttrice l e alla conica impropria.

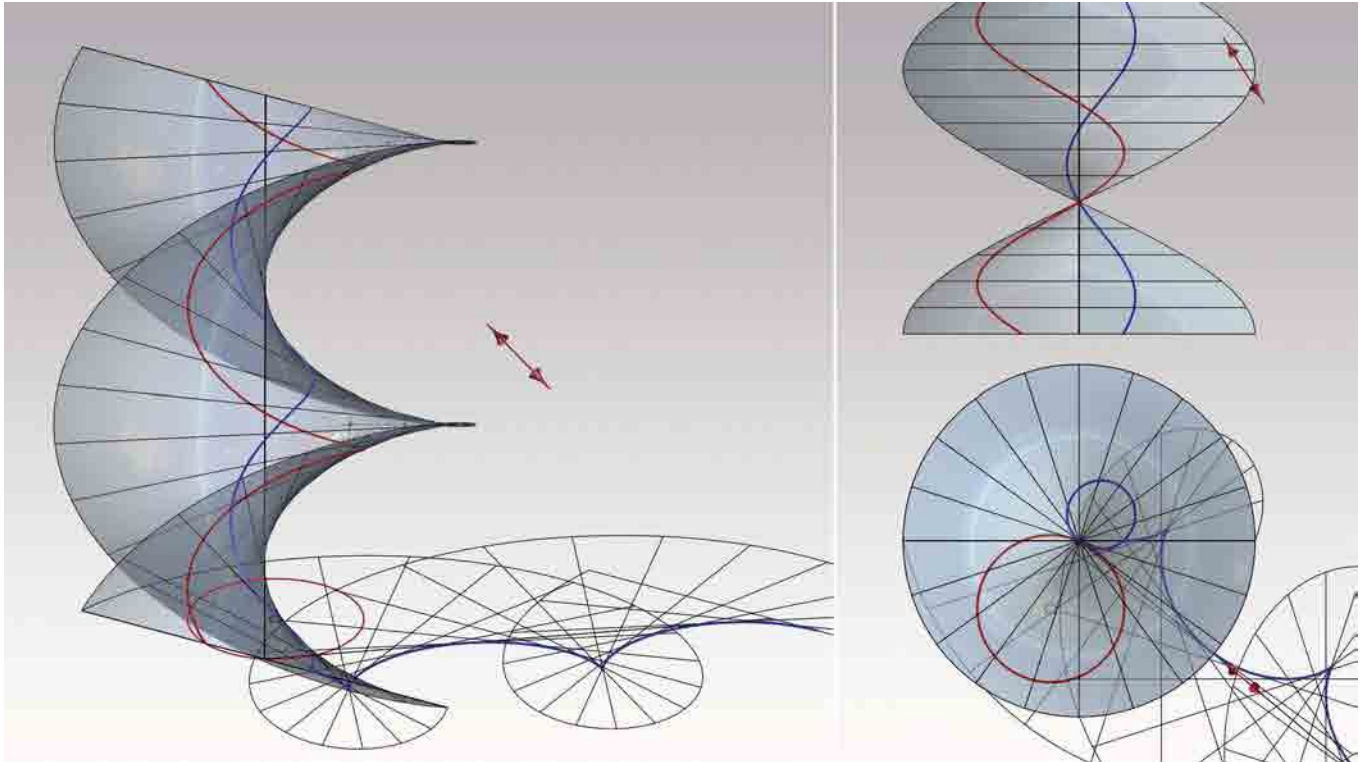
do con un piano ortogonale all'asse la superficie si ottiene una spirale s di Archimede³¹. Il piano tangente nel punto intersezione della generatrice coll'asse è un punto centrale della generatrice g .

Elicoide conoide retto

L'elicoide conoide retto è una superficie rigata generata dal movimento di una retta elicoidale attorno ad un asse mantenendosi perpendicolare ad esso (fig. 72). Le generatrici rette sono tutte parallele ad un piano direttore che è ortogonale all'asse. L'asse divide la superficie in due falde. Il piano tangente all'elicoide retto in un punto qualunque coincide con il piano osculatore all'elica direttrice passante per quel punto. Le linee asintotiche sono le rette generatrici e le eliche direttrici aventi lo stesso asse della superficie. Una proprietà unica di questa superficie rigata è che la *curvatura media* in ogni punto è nulla. *L'elicoide conoide retto è l'unica superficie rigata ad area minima*. Infatti in ogni punto della

superficie le due tangenti principali sono sempre perpendicolari fra loro: la generatrice e la tangente all'elica direttrice in quel punto. Questa proprietà appartiene solo alle superfici di aree minima.

Un'altra proprietà particolare che può essere sperimentata attraverso la modellazione matematica riguarda la rigata quadrica osculatrice all'elicoide lungo una qualsiasi retta g . Questa ha per generatrici le tangenti alle eliche direttrici nei punti intersezione con la generatrice g . Siccome le rette sono tutte perpendicolari alla generatrice g , la quadrica osculatrice è un paraboloide iperbolico. *Le tangenti alle eliche direttrici nei punti di una stessa generatrice formano un paraboloide iperbolico equilatero, del quale un piano direttore è perpendicolare a quella generatrice e l'altro è perpendicolare all'asse. Sezionando l'elicoide retto con un cilindro rotondo passante per il suo asse si ottiene una elica circolare avente lo stesso verso dell'elicoide e il passo a metà.* Queste elica per distinguerla dalle eliche aventi lo stes-



72/ L'elicoide conoide retto è una superficie rigata generata dal movimento di una retta elicoidale attorno ad un asse mantenendosi perpendicolare ad esso.

so asse della superficie viene chiamata *elica eccentrica*. Queste si presentano come *contorno apparente* dell'elicoide rispetto a una direzione a piacere, purché non sia parallela o perpendicolare all'asse. Se si proietta l'elicoide su un piano ortogonale all'asse si ottiene come contorno apparente una cicloide ordinaria. Le generatrici si proiettano tangenti alla cicloide. Se consideriamo l'asse dell'elicoide verticale e si proietta l'ombra di un elicoide retto con dei raggi paralleli, come possono essere approssimati quelli solari, si ottiene come contorno dell'ombra propria un'elica eccentrica mentre come contorno dell'ombra portata sul piano orizzontale una cicloide ordinaria³².

La curvatura delle superfici rigate e delle superfici sviluppabili

Come insegna Monge le superfici possono essere distinte, rispetto alla curvatura, in tre grandi categorie. La prima categoria comprende quelle superfici che nei loro punti non hanno nessun tipo di curvatura e sono le *superfici piane*. La seconda categoria riguarda quelle che in ciascuno dei loro punti hanno solamente una sola curvatura e sono, fondamentalmente, tutte le *superfici sviluppabili* come il cono. La terza categoria di superfici è composta da tutte le altre che sono dette superfici a *doppia curvatura*.³³

Oggi con il termine curvatura di una superficie s'intende la curvatura gaussiana di essa.

La curvatura di una linea, in un suo punto **P**, è l'inverso del raggio del cerchio osculatore della curva in quel punto:

$$k = 1/r$$

La linea retta ha curvatura nulla in ogni punto. Infatti in ogni punto il cerchio osculatore ha raggio infinito e coincide con la retta stessa.

Consideriamo ora una qualsiasi superficie σ e stacciamo su di essa un punto **P** (fig. 73). Costruiamo il fascio di piani che appartengono alla normale **n** nel punto **P**: questi piani tagliano la superficie σ ognuno secondo una curva sezione ed ognuna di queste curve ha, in **P**, una diversa curvatura **k**. La curvatura minima e la curvatura massima, tra quante possono essere misurate sulle curve sezione che passano per **P**, si dicono *curvature*

principali della superficie. Stabiliamo di chiamare *sezioni principali* quelle che hanno le suddette curvature. Le sezioni principali appartengono sempre a piani tra loro perpendicolari.

Si definisce *curvatura gaussiana* della superficie nel punto **P** (o anche semplicemente curvatura) il prodotto delle curvature principali:

$$K = k_1 * k_2 = 1/r_{\min} \cdot 1/r_{\max} = 1/(r_{\min} \cdot r_{\max})$$

Si definisce raggio medio gaussiano il valore

$$r_{\text{med}} = \sqrt{(r_{\min} \cdot r_{\max})}$$

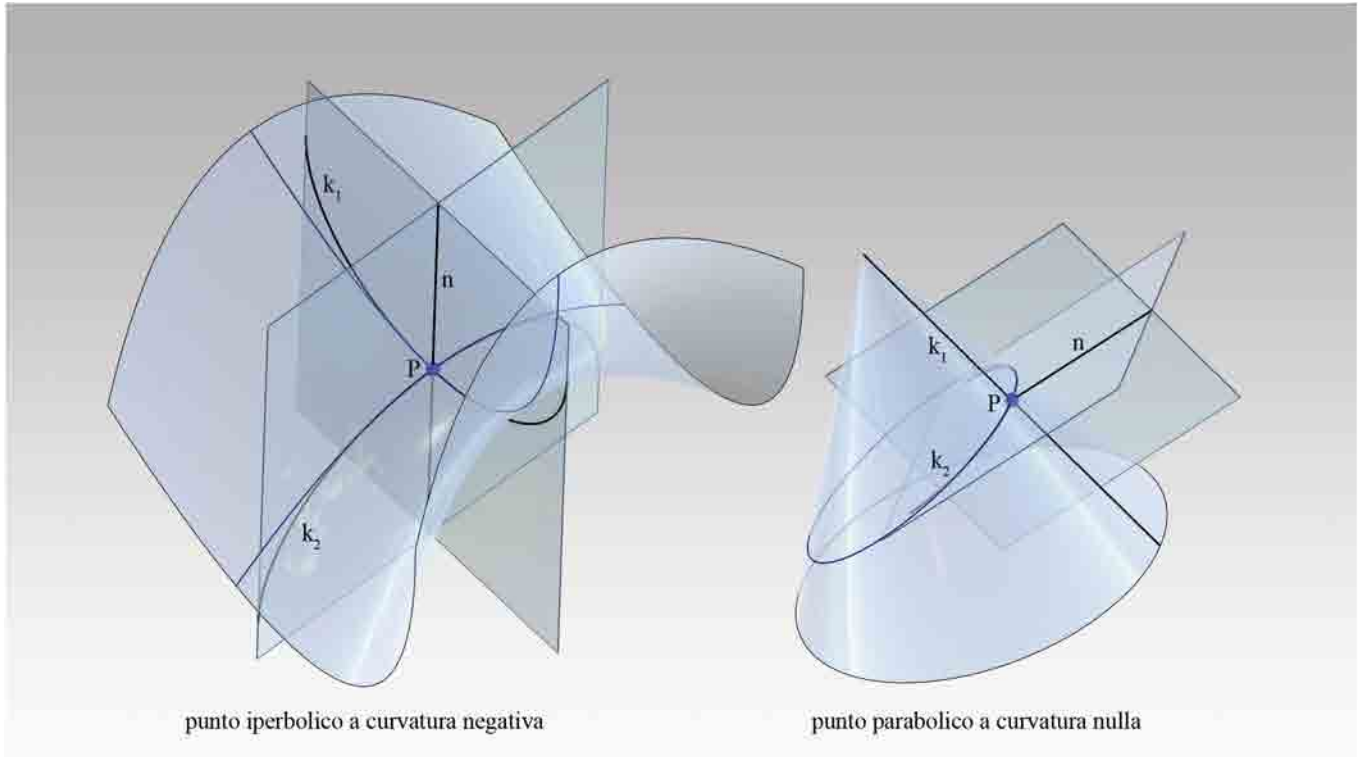
Il raggio medio gaussiano è quello della sfera che meglio approssima la superficie nel punto **P**.

Il prodotto delle curvature principali può essere positivo, negativo o nullo. È positivo quando i relativi cerchi osculatori si trovano entrambi dalla stessa parte della superficie. È negativo quando i relativi cerchi osculatori si trovano entrambi da parti opposte della superficie. Infine è nullo, quando una delle curve principali è retta. La curvatura media di una superficie è la media aritmetica della curvatura delle sezioni principali:

$$K_{\text{med}} = (k_1 + k_2) / 2$$

In base al tipo di piano tangente a all'analisi delle tangenti principali possiamo classificare i punti della superficie in *ellittici*, *iperbolici* e *parabolici*. In un punto **O** di una superficie ci saranno solo due tangenti principali reali e distinte, una sola (cioè due coincidenti) oppure nessuna a seconda che il punto è un *nodo*, una *cuspidale* o un *punto isolato*. Quando vi sono due tangenti principali **t'** e **t''** distinte il *punto* è *iperbolico* (per esempio in un paraboloide iperbolico); se la tangente **t'** è una sola il *punto* sarà *parabolico* (i coni e i cilindri); infine se non esistono tangenti principali il *punto* sarà *ellittico* (la sfera).

Una superficie rigata ha tutti i suoi punti iperbolici mentre nelle sviluppabili i punti sono parabolici. Infatti immaginiamo un cono. Il piano tangente in un suo punto sarà tangente alla superficie lungo tutta la sua generatrice passante per il punto scelto e taglierà la superficie secondo la generatrice contata due volte. Se la superficie è una sviluppabile generica è possibile che il piano tangente tagli la superficie secondo la generatrice e una curva residua.



73/ La curvatura gaussiana delle superfici rigate (punti iperbolici) e delle superfici sviluppabili (punti parabolici).

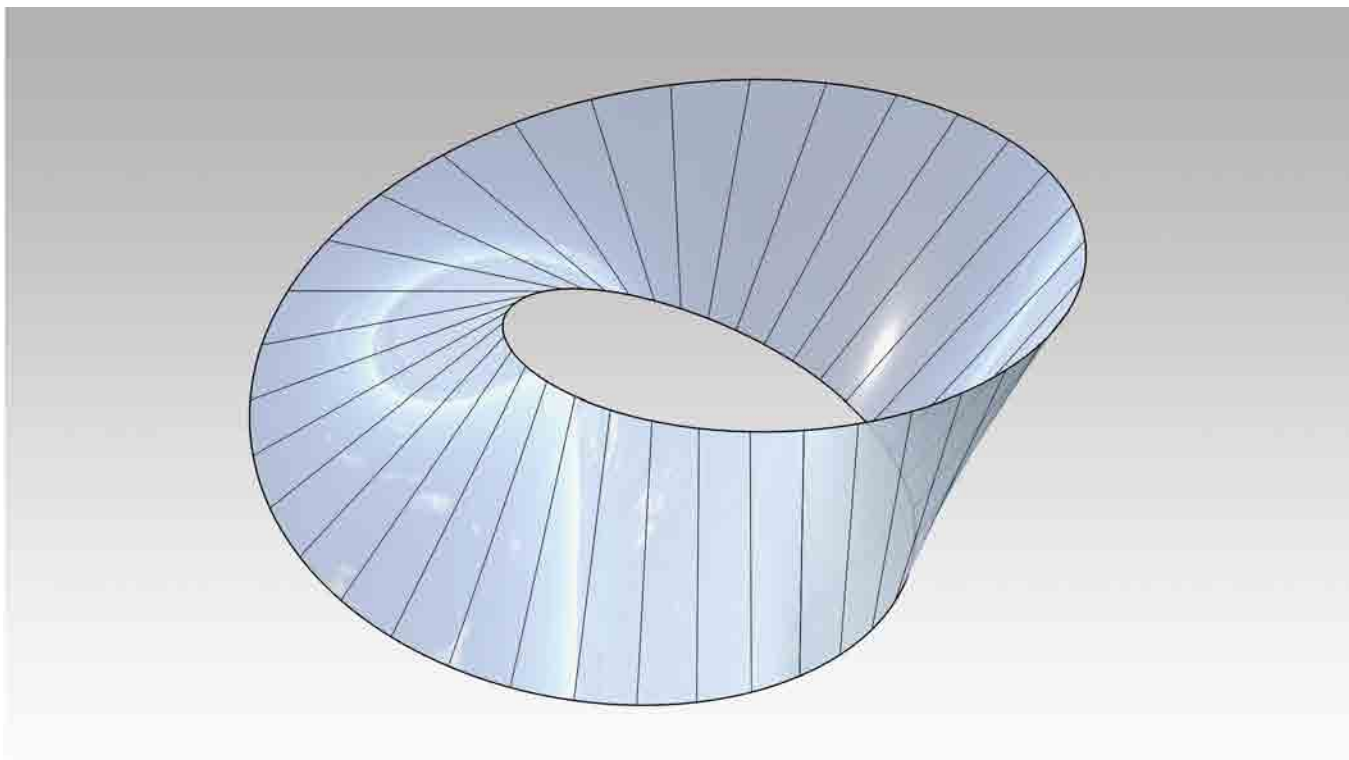
Il comportamento di una superficie rispetto al piano tangente in un intorno piccolo dipende dalla specie del punto considerato. In prossimità di un *punto ellittico*, la superficie sta tutta da una stessa parte rispetto al piano tangente in quel punto. In prossimità di un *punto parabolico* generalmente la superficie sta tutta da una parte rispetto al piano tangente. In certi casi lungo la direzione della tangente principale la superficie potrebbe variare. In prossimità di un *punto iperbolico*, la superficie sta da una parte del piano tangente lungo le direzioni comprese in uno dei due angoli formati dalle tangenti principali, e nelle direzioni dell'altro angolo sta dall'altra parte. Va ricordato che una superficie che non sia una rigata o una sfera, come può essere il toro, può essere costituita da punti di diverso tipo.

Superfici a curvatura totale identica nulla

Le superfici sviluppabili, insieme ai piani, sono le uniche superfici ad avere la curvatura Gaussiana nulla su

tutti i punti (vedi fig. 73). Questo perché tutti i punti della superficie sono punti parabolici che hanno l'una delle due curve principali a curvatura nulla: le rette hanno la curvatura che è uguale a zero. Se prendiamo un punto **P** su una superficie sviluppabile e costruiamo le due sezioni principali ortogonali fra loro, l'una sarà la retta generatrice **g** e l'altra sarà la curva **C** sezione perpendicolare a questa, determinata dal piano passante per la normale **n** e ortogonale al piano **gn**.

Fra le superfici sviluppabili che abbiamo visto possiamo aggiungere il *nastro di Möbius* (fig. 74). Questa superficie dal punto di vista topologico è costituita da un'unica faccia, perché partendo da un punto qualsiasi di essa possiamo percorrerla interamente senza attraversare il bordo per ritornare al punto di partenza. La superficie, infatti, possiede un unico bordo e non due come sarebbe logico aspettarsi. Il modo più diretto per capire e costruire questa superficie consiste nel ritagliare un rettangolo piano di carta per poi ripiegarlo su sé stesso



74/ Il nastro di Möbius è una superficie sviluppabile a curvatura gaussiana nulla.

unendone due estremità degli spigoli facendole fare un mezzo giro. Questa semplice costruzione dimostra che è una superficie sviluppabile. Per costruire la superficie attraverso il laboratorio virtuale ho utilizzato il metodo dello *scripting*³⁴ in Rhinoceros³⁵.

Superfici a curvatura totale negativa

Tutti i punti di queste superfici sono iperbolici e le curvatures principali hanno senso contrario, per cui il prodotto delle due curvatures principali è sempre negativo (vedi fig. 73). Tutte le superfici rigate hanno curvatura negativa. Le tangenti asintotiche sono reali in ciascun punto e determinano il piano tangente. Le linee asintotiche in ciascun punto hanno come bisettrici le linee di curvatura. Un esempio evidente è l'iperboloide a una falda, dove le asintotiche sono le rette della superficie.

Superfici a curvatura media nulla

Queste superfici sono composte da punti iperbolici e

quindi fanno parte delle superfici a curvatura totale negativa. Le linee asintotiche in questa superficie costituiscono una rete ortogonale fra loro. La curvatura media, definita come la media aritmetica della curvatura delle sezioni principali:

$$K_{\text{med}} = (k_1 + k_2) / 2$$

è sempre uguale a zero. Queste superfici sono chiamate *superfici minime*. L'unica superficie minima rigata è l'*elicoide conoide retto* (vedi fig. 72).

Note

1. Fano Gino (1925), *Lezioni di Geometria Descrittiva*, Torino, G. B. Paravia & C.
2. Fano Gino (1925), *Op. Cit.*, pag. 241, par. 242.
3. Fano Gino (1925), *Op. Cit.*, pag. 255. *La definizione si estende anche ai punti ellittici. Le tangenti principali sono in questo caso immaginarie-coniugate.*
4. Nella rappresentazione informatica il piano osculatore

in un punto P di una curva sghemba qualsiasi è individuato automaticamente dalla coppia della tangente e dalla bitangente che formano un angolo retto.

5. Fano, Gino (1925), *Op. Cit.*, pag. 256. “Si chiama ombelico o punto di curvatura sferica ogni punto ellittico nel quale l’involuzione delle coppie di tangenti coniugate sia una involuzione circolare o di angoli retti. Sicché ogni tangente sia coniugata alla sua perpendicolare. E’ facile convincersi che sono di questo tipo tutti i punti di una sfera (sia considerando la sfera come una quadrica; sia osservando che i piani tangenti alla sfera nei punti di un cerchio massimo involupano un cilindro, le cui generatrici, perpendicolari al piano del cerchio, sono, per la proprietà enunciata, le tangenti rispettivamente coniugate delle tangenti di quel cerchio.”

6. Fano Gino (1925), *Op. Cit.*, pag. 257.

7. Fano Gino (1925), *Op. Cit.*, pag. 293.

8. La dimostrazione del perché le sezioni piani delle superfici quadriche rigate sono sempre delle coniche si trova nel secondo capitolo *La genesi proiettiva delle superfici quadriche rigate*.

9. Consideriamo una retta punteggiata e stacciamo su di essa quattro punti **A**, **B**, **C** e **D**. Il birapporto di questi quattro punti, che si scrive **(ABCD)**, è il rapporto dei rapporti semplici **(ABC)** e **(ABD)**, dove con **(ABC)** si intende **AC/BC** e con **(ABD)** si intende **AD/BD**.

10. Hilbert David, Cohon-Vossen Stefan (1972), *Geometria Intuitiva*, Torino.

11. Gheorghiu Adrian, Dragomir Virgil (1968), *La représentation des structures constructives*, Paris. Pag. 98.

12. Per un approfondimento si rimanda al primo capitolo.

13. La soluzione per la costruzione delle sezioni circolari di un iperboloido è un’interpretazione, attraverso il metodo della rappresentazione matematica, delle considerazioni di Hachette.

14. Per un approfondimento si rimanda al primo capitolo.

15. Hachette J. N. P. (1828), *Op. cit.*, pag. 79, par. 138.

16. Aschieri Ferdinando (1888), *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Milano. Pag.302.

17. Per un approfondimento si rimanda al primo capitolo.

18. L’iperboloido ad una falda ha tre sezioni principali: un’ellisse e due iperboli. Quando l’ellisse si trasforma in una circonferenza allora la superficie è un iperboloido di rivoluzione.

19. I diametri di una superficie quadrica sono corde che passano per il centro della quadrica. Per un approfondimento si rimanda al capitolo *La genesi proiettiva delle superfici quadriche rigate*.

20. Per un approfondimento si rimanda al primo capitolo.

21. E’ interessante rileggere la prefazione di Hachette al suo trattato. Hachette è stato l’inventore del termine rigata. Non si può dire che le abbia inventate lui perché erano già note da diverso tempo. Però è stato il primo a studiarle in modo sistematico e a darne una classificazione che è ancora validissima ai giorni nostri. Inizialmente le rigate erano chiamate *surface gauche*, un termine che le aveva assegnato Gaspard Monge. Monge era professore all’Ecole Polytechnique dove Hachette era stato prima studente (di Monge appunto) e successivamente suo assistente e professore.

Nella prefazione Hachette racconta un aneddoto per spiegare il nome rigate. Studiando approfonditamente queste superfici Hachette era rimasto giustamente colpito dall’armonia di alcune di esse, in particolare si era appassionato alle quadriche rigate. Per cui propose a Monge di ribattezzare le surface gauches con un termine più elegante che rendesse giustizia alla bellezza intrinseca di tali superfici: surface réglée.

22. Si rimanda al primo capitolo per un approfondimento delle proprietà principali delle superfici rigate.

23. Queste proprietà sono state studiate e scoperte da Hachette e sono riportate nel trattato del 1828. Gino Fano le raggruppa sotto il titolo *conseguenze del teorema di Chasles*, perché è stato Chasles a definire il teorema che porta oggi il suo nome. Hachette, però, è stato colui che per primo ha studiato e scoperto le proprietà delle superfici rigate legate a quel teorema.

24. Fano Gino (1925), *Op. Cit.*, pag. 355. Fano utilizza il termine raccordate per dire tangenti.

25. Fano Gino (1925), *Op. Cit.*, pag. 355. *Questa quadrica osculatrice alla R sarà, in generale, un iperboloido rigato; sarà invece un paraboloido ogni qualvolta la curva all’infinito della rigata abbia nel punto all’infinito di g un flesso, oppure g stessa sia impropria.*

26. Fano Gino (1925), *Op. Cit.*, pag. 358. Fano parla di *paraboloido iperbolico equilatero*, perché i piani direttori della superficie sono sempre ortogonali fra loro. Però la perpendicolarità fra i due piani direttori non è una condizione sufficiente per stabilire se un paraboloido è equilatero. La condizione *necessaria e sufficiente* è che le generatrici della prima schiera formino angoli uguali con quelle della seconda schiera. Grazie alla rappresentazione matematica ho potuto verificare che il *paraboloido delle normali* non è generalmente un paraboloido equilatero perché l’angolo in questione è diverso.

27. Fano Gino (1925), *Op. Cit.*, pag. 359.

28. Fano Gino (1925), *Op. Cit.*, pag. 362.

29. Pierre Ossian Bonnet (Dicembre 22, 1819 - 22 Giugno 1892) è il matematico che ha studiato queste proprietà. E’ noto per il teorema di Gauss-bonnet sulla geometria differenziale.

30. Le generatrici dell’iperboloido rotondo, essendo tutte ugualmente inclinate rispetto all’asse della superficie, determinano un cono asintotico rotondo.

31. Fano Gino (1925), *Op. Cit.*, Pag. 422.

32. Fano Gino (1925), *Op. Cit.*, Pag. 430.

33. Monge Gaspard (1838), *Trattato di Geometria Descrittiva*, Firenze. Pag. 137.

34. Il programma, detto script, definisce il controllo delle operazioni richieste al calcolatore. Spesso progettati per l’uso interattivo, e con molti comandi eseguibili individualmente di complessità anche elevata (ad esempio si possono creare degli algoritmi in grado di valutare diverse possibilità in base ai dati). Gli script vengono spesso usati per compiti a singola passata, tipicamente di tipo amministrativo o di utilità. Il codice degli script è tipicamente contenuto in file di testo e vengono interpretati. Un esempio di

linguaggio di scripting è VBScript (abbreviazione di Microsoft's Visual Basic Scripting Edition), questo è un sottoinsieme di Visual Basic utilizzato nelle Active Server Pages e in Windows Script Host come linguaggio di scripting general-purpose. VBScript è anche usato come sostituto per i file batch di MS-DOS.

35. <http://www.rhino3.de/>, sito di Jess Maertterer, consultato il 3/02/2009.

Bibliografia

- ALBISINNI/ DE CARLO (2008), Piero Albinini, Laura De Carlo, *Le potenzialità formative del modello digitale*, in "Abitare Virtuale", Roma, 2008.
- ASCHIERI (1887), Ferdinando Aschieri, *Geometria Descrittiva*, Milano, 1887, 1897.
- ASCHIERI (1888), Ferdinando Aschieri, *Geometria Proiettiva. Lezioni di Ferdinando Aschieri*, Milano, 1888.
- ASCHIERI (1895), Ferdinando Aschieri, *Geometria Proiettiva dello Spazio*, Hoepli, Milano, 1895.
- ASCHIERI (1896), Ferdinando Aschieri, *Lezioni di Geometria Descrittiva*, Milano, 1896.
- BOMPIANI (1928), Enrico Bompiani, *Geometria Descrittiva*, Roma, 1948.
- BOMPIANI (1946), Enrico Bompiani, *Lezioni di geometria descrittiva, esercizi e complementi di geometria descrittiva*, Roma, 1946.
- BOMPIANI (1968) Enrico Bompiani, Carmelo Longo, *Lezioni di Geometria Descrittiva per gli allievi di Architettura*, Roma, 1968
- BONFIGLI (1960), Clemente Bonfigli, C.R. Braggio, *Geometria descrittiva e prospettiva con applicazioni ed esercizi*, Milano, 1960.
- BORTOLOTTI (1942), Enea Bortolotti, *Geometria Descrittiva. Lezioni redatte per uso degli studenti della R. Università di Firenze*, Padova, 1942.
- BOYER (1968), Carl B. Boyer, *Storia della Matematica*, Milano, 1980.
- BREYMANN (1885), Gustav Adolf Breymann, *Costruzioni in pietra e strutture murali*, Milano, 1885.
- BRICARD (1911), Raoul Bricard, *Géométrie Descriptive*, Parigi, 1911.
- BURALI (1921), Burali Forti, *Geometria descrittiva*, Torino-Genova, 1921.
- CAMPEDELLI (1949), Luigi Campedelli, *La geometria Analitica e gli Elementi della Geometria Proiettiva* in "Lezioni di Geometria", Padova, 1970, vol.I
- CAPPELLONI (1935), A. Cappelloni, *Applicazioni di geometria descrittiva in Trattato generale teorico pratico dell'arte dell'ingegnere civile, industriale ed architetto. Applicazioni di geometria descrittiva*, Vallardi, Milano, 1935.
- CASTELNUOVO (1903), Guido Castelnuovo, *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva*, Roma, 1903-1905.
- CATALDI (1979), Giancarlo Cataldi, *Sistemi statici in architettura*, Padova, 1979.
- CHASLES (1837), Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie particulièrement de celles qui se rapportent a la géométrie moderne, suivis d'un Mémoire de Géométrie sur Deux Principes Généraux de la science: la Dualité et l'Homographie*, Bruxelles, 1837.
- CHISINI (1967), Oscar Chisini, *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva*, Bologna, 1967.
- CIANI (1922), Edgardo Ciani, *Lezioni di Geometria Proiettiva ed Analitica*, Pisa, 1922.
- CIANI (1932), Edgardo Ciani, *Lezioni di geometria descrittiva*, Padova, 1932.
- CICOGNA (1944), Giampiero Cicogna, *Elementi di Proiettiva e Prospettiva*, Torino, 1944.
- COMESSATTI (1932), Annibale Comessatti, *Lezioni di Geometria Descrittiva con Applicazioni*, Padova, 1932-1939.
- COXETER (1973), Harold Scott MacDonald Coxeter, *Projective Geometry*, Toronto, 1973
- CREMONA (1873), Luigi Cremona, *Elementi di Geometria proiettiva*, Milano, 1873.
- CUNDY (1974), Henry Martyn Cundy, A.P. Rollet, *I modelli matematici*, Milano, Feltrinelli, 1974.

DE CARLO (1995), Laura De Carlo, *Geometrie del pensiero costruttivo nel trattato di stereotomia di Alonso de Vandelvira*, in “Disegnare, idee, immagini”, n. 28, Roma 2004.

DE ROSA (2000), Agostino De Rosa, Anna Sgrosso, Andrea Giordano, *La geometria nell'immagine*, Torino, UTET, 2000.

DE RUBERTIS (2006), Roberto de Rubertis, *Informatica ed Evoluzione*, in: Informatica e fondamenti scientifici della rappresentazione, Roma, 2006.

DE KERCKHOVE (2001), Derrick De Kerckhove, *L'architettura dell'intelligenza*, Roma, 2001.

DEL RE (1859), Alfonso Del Re, *Lezioni di Geometria descrittiva dettate nella R. Università di Napoli*, Napoli, 1859.

DINO (1885), Salvatore Dino, *Elementi di Geometria Proiettiva*, Napoli, 1885.

DESARGUES (1639), Girard Desargues, *Brouillon Project d'une atteinte aux evenements des rencontres du cone avec un plan*, Parigi, 1639.

DESARGUES (1640), Girard Desargues, *Brouillon Project d'Exemple d'une Manière universelle du S. G. D. L. touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe des pierre en l'Architecture: et de l'esclaircissement d'une manière de réduire au petit pied en Perspective comme en Géométral, et de tracer tous quadrans plats d'heures égales au soleil*, Parigi, 1640.

DOCCI/ MAESTRI (2000), Mario Docci, Diego Maestri, *Scienza del Disegno*, Torino, 2000.

DOCCI /MIGLIARI (1992), Mario Docci, Riccardo Migliari, *Scienza della Rappresentazione*, Roma, 1992

DUPIN (1818), Charles Dupin, *Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge*, s.l., 1818.

EMMER (2006), Michele Emmer, *Visibili Armonie*, Torino, 2006.

EMMER (1991), Michele Emmer, *Bolle di sapone, un viaggio tra arte, scienza e fantasia*, Firenze, 1991.

EMMER (2003), Michele Emmer, *Dal mondo piatto alle ipersuperfici*, Roma, 2003.

ENRIQUEZ (1902), Federigo Enriquez, *Lezioni di Geometria Descrittiva*, Bologna, 1902.

ENRIQUEZ (1903), Federigo Enriquez, *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Firenze, 1926.

EUCLIDE (0 III a.C), Euclide, *Tutte le opere*, introduzione, traduzione, note e apparati di Fabio Acerbi, Bompiani, Milano 2007

FANO (1902), Gino Fano, *Lezioni di Geometria Descrittiva, date nel R. Politecnico di Torino*, Torino, 1925.

FASOLO (1975), Orseolo Fasolo, *Lezioni di geometria descrittiva raccolte e coordinate da R. Migliari*, Roma, 1975.

FASOLO (1980), Orseolo Fasolo, *Fondamenti geometrici della rappresentazione progettuale e tecnica dell'architettura*, Tomi I e II: Modelli, Linee, Roma, 1980, 1983.

FASOLO (1984), Orseolo Fasolo, *Un modo nuovo ma antico di fare e di insegnare la prospettiva, note di cronaca e storia delle applicazioni della geometria descrittiva ai problemi della rappresentazione*, in “Quaderni di Applicazioni della Geometria Descrittiva”, n. 3, Roma 1984.

FASOLO (1989), Orseolo Fasolo e altri, *L'omologia e le sue applicazioni alla rappresentazione progettuale e tecnica dell'architettura*, in “Quaderni di applicazioni della geometria descrittiva”, n. 4, Roma, 1989

FIEDLER (184), Guglielmo Fiedler, *Trattato di Geometria descrittiva*, Firenze, 1874.

FLAUTI (1815), Vincenzo Flauti, *Geometria di Sito sul piano e nello spazio*, Napoli, 1815.

FRÉZIER (1737), Amedé François Frézier, *La Théorie et la Pratique de la Coupe des Pierres et des Bois, pour la Construction des Voûtes - Et autres Parties des Bâtimens Civils & Militaires, ou Traité de Stéréotomie à l'usage de l'architecture*, 3 vv., Strasburgo, 1737-1739. Il terzo volume contiene la *Dissertation sur les Ordres d'Architecture*.

GAIANI (2008), Marco Gaiani, *Architectorum delineamenta, ovvero le interfacce di lavoro dell'architetto*, in: *Abitare virtuale significa rappresentare*, ROMA, 2008.

GANASSINI (1959), Maria Luisa Ganassini, *Applicazioni della Geometria Descrittiva - Prospettiva*, Roma, 1959.

GAULTIER (1815), Louis de Tours Gaultier, *Mémoire, Sur les Moyens généraux de construire graphiquement un Cercle determine par trois conditions*,

et une Sphère determine par quatre conditions, in: *Journal de l'École polytechnique*, Paris, 1815.

GHEORGHIU (1978), Adrian Gheorghiu, Virgil Dragomir, *Geometry of structural forms*, Bucharest, 1978.

GIOVANARDI (1950), Mario Giovanardi, *Elementi di Geometria Descrittiva*, Napoli, s.d. (1950?).

GORRIERI (1922), Domenico Gorrieri, *Applicazioni di Geometria Descrittiva*, Bologna, 1922.

HACHETTE (1804), Jean Pierre Nicholas Hachette, *Correspondance su l'école polytechnique*, Parigi, 1804-1815.

HACHETTE (1818), Jean Pierre Nicolas Hachette, *Second Supplément de la géométrie descriptive, par M. Hachette, Professeur adjoint de la faculté des sciences ... suivi de l'analyse géométrique de M. John Leslie, Professeur de Mathématiques ...*, Parigi, 1818.

HACHETTE (1828), Jean Pierre Nicholas Hachette *Jean Pierre Nicholas Hachette ancien professeur de l'École Polytechnique, Traité de Géométrie Descriptive comprenant les Application de cette Géométrie aux ombres, à la Perspective et à la Stéréotomie ...*, Parigi, 1828..

HILBERT (1972), David Hilbert, *Geometria Intuitiva*, Torino, 1972.

INZERILLO (1988), Michele Inzerillo, Giuseppe Catalano, Cosimo Quattrocchi, *Analisi computerizzata sulle proiezioni prospettiche di aggregati di quadriche e poliedri, Parte prima: Ellissoidi*, Palermo, 1988.

KRYLOV (1971), P. Krylov Lobandieski, S. Maine, *Géométrie Descriptive*, Mir, Mosca, 1971.

LACROIX (1795), Sylvestre François Lacroix, *Saggio di Geometria riguardante Le Superficie Piane e Curve o sia Elementi della Geometria Descrittiva*, Firenze, 1829.

LALA (1949), Augusto Lala, *Prospettiva con l'uso del Riportatore - una innovazione nel campo della Geometria Descrittiva - Metodo rapidissimo e di facile applicazione*, Napoli, 1949.

LAMBERT (1739), Johann Heinrich Lambert, *La perspective affranchie de l'embaras du plan géometral par I.H. Lambert*, Zurigo, 1739.

LAUTARD (1939), A. Lautard, O. Berry, *Géométrie Descriptive, édition italienne*, s.l., 1939.

LEROY (1842), Charles Felix Auguste Leroy, *Traité de géométrie descriptive; suivi de la méthode des plans cotes et de la théorie des engrenages cylindriques et coniques : avec une collection d'epures composee de 69 planches*, Parigi, 1872.

LEROY (1845), Charles Felix Auguste Leroy, *Traité de Stéréotomie comprenant les Applications de la Géométrie Descriptive a la Théorie des Ombres, la Perspective Linéaire, la Gnomonique, la Coupe des Pierres et la Charpente*, Parigi, 1870.

LORIA (1919), Gino Loria, *Metodi di Geometria Descrittiva*, Milano, 1919.

LORIA (1921), Gino Loria, *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*, Milano, 1921.

LORIA (1924), Gino Loria, *Complementi di Geometria Descrittiva*, Milano, 1924.

LORIA (1925), Gino Loria, *Curve sghembe speciali, algebriche e trascendenti*, Zanichelli, Bologna, 1925.

LORIA (1930), Gino LORIA, *Pagine di Storia della Scienza*, Torino, 1930.

LORIA (1931), Gino LORIA, *Il Passato e il Presente delle principali Teorie Geometriche - Storia e Bibliografia*, Padova, 1931.

MIGLIARI (1982), Riccardo Migliari, *Dieci lezioni di geometria descrittiva. Il modello prospettico frontale*, in "Quaderni di Applicazioni della Geometria Descrittiva", n. 1, Roma, 1982.

MIGLIARI (1983), Riccardo Migliari, *Dieci lezioni di geometria descrittiva. Il modello prospettico d'angolo e il modello prospettico a quadro inclinato con la descrizione di utili procedimenti ed alcune considerazioni sull'anamorfose e sulla sostanziale identità dei modelli*, in "Quaderni di Applicazioni della Geometria Descrittiva", n. 2, Roma, 1983.

MIGLIARI (1995), Riccardo Migliari, *La prospettiva e l'infinito*, in "Disegnare, idee, immagini", Anno VI, n. 11, Roma 1995.

MIGLIARI (2003), Riccardo Migliari, *Geometria dei modelli*, Roma, 2003.

MIGLIARI (2008), Riccardo Migliari, *Rappresentazione come sperimentazione*, in: Ikhnos, *Analisi grafica e storia della rappresentazione*, Siracusa, 2008.

MONGE (1780), Gaspard Monge, *Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres des surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et des pénombres*, in “Mémoires présentés par divers Savants”, Parigi, 1780.

MONGE (1794), Gaspard Monge, *Mort aux tyrans - Programmes des courses révolutionnaires sur la fabrication des salpêtres, des poudres et des canons ... par les citoyens Guyton, Fourcroy ... Monge, par ordre du Comté de Salut Public*, Parigi, 1794.

MONGE (1798), Gaspard Monge, *Géométrie descriptive, leçons données aux Écoles Normales, l'an III de la République, par Gaspard Monge ...*, Parigi, 1798.

MONGE (1820), Gaspard Monge, *Géométrie descriptive, par G. Monge ... édition augmentée d'une théorie des ombres et de la perspective, extraite des papiers de l'auteur par M. Brisson*, Parigi, 1820.

OLIVIER (1842), Théodore Olivier, *Cours de Géométrie Descriptive*, Parigi, 1842, 1843.

OLIVIER (1843), Théodore Olivier, *Compléments de Géométrie Descriptive*, Parigi, 1843-1870.

OLIVIER (1847), Théodore Olivier, *Additions au Cours de Géométrie Descriptive: démonstration nouvelle des propriétés principales des sections coniques*, Parigi, 1847.

OLIVIER (1847), Théodore Olivier, *Applications de la géométrie descriptive : aux ombres, à la perspective, à la gnomonique, aux engrenages*, Parigi, 1847.

OLIVIER (1851), Théodore Olivier, *Mémoire de Géométrie Descriptive théorique et appliquée*, Parigi, 1851.

PANOFSKY (1927), Erwin Panofsky, *La Prospettiva come “forma simbolica” e altri scritti*, Milano, 1966.

PASCUCCI (1984), Achille Pascucci, *Quadriche a doppia curvatura, tipologia di coperture a pianta quadrilatera (Da Monge al computer come strumento di ricerca), con un complemento di A. Pero Nullo, Fascio di quadriche rigate sostenuto da un quadrilatero sghembo*, Roma, 1984.

PASI (1844), Carlo Pasi, *Geometria Descrittiva*, Pavia, 1844.

PERAZZO (1913), Umberto Perazzo, *Lezioni di*

Geometria Descrittiva, Torino, 1913.

PIEGL (1997), Les Piegl, Wayne Tiller, *The NURBS Book*, Springer, Berlino, 1995.

PILLET (1921), Jules Pillet, *Traité de géométrie descriptive*, Parigi, 1921.

PITTARELLI (1914), Giulio Pittarelli, *Applicazioni di geometria descrittiva, 2° ed. riv. e ampl. dallo studente A. Irianni*, Roma, 1914.

PONCELET (1822), Jean Victor Poncelet, *Traité des Propriétés Projectives des Figures, Ouvrage utile a ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'operations géométriques sur le terrain*, Parigi, 1865.

POUDRA (1859), Noël Germain Poudra, *Examen critique du traité de perspective lineaire de m. de la gournerie*, Parigi, 1859.

POUDRA (1864), Noël Germain Poudra, *Histoire de la perspective ancienne et moderne*, Parigi, 1864.

REGIS (1891), Domenico Regis, *Applicazioni della geometria descrittiva. Corso ... nella R. Scuola di Applicazione per gli Ingegneri in Torino*, Roma-Torino-Firenze, 1891.

REYE (1866), Teodoro Reye, *La geometria di posizione*, Venezia, 1884.

ROBERTS (2006), Siobhan Roberts, *Il re dello spazio infinito*, Milano, 2006.

ROGERS (1990), David F. Rogers, James Alan Adams, *Mathematical Elements for Computer Graphics*, Mc Graw-Hill, New York, 1990.

SAGGIO (2007), Antonino Saggio, *Introduzione alla rivoluzione informatica in Architettura*, Roma, 2007.

SACCARDI (1976), Ugo Saccardi, *Applicazioni della Geometria Descrittiva*, Firenze, 1976.

SELLER (1949), Giovanni Seller, *Geometria Descrittiva. Elementi ed applicazioni*, Milano, 1949.

SERENI (1826), Carlo Sereni, *Geometria Descrittiva. Trattato di Carlo Sereni Ingegnere in capo di Roma, professore di Geometria Descrittiva e d'Idrometria e membro del collegio filosofico all'Università della Sapienza, Roma*, 1845.

SERENI (1846), Carlo Sereni, *Applicazioni di Geometria Descrittiva di Carlo Sereni Ingegnere in capo di Roma, membro del collegio filosofico, professore d'Idrometria e di Geometria Descrittiva all'Università*

della Sapienza, socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Roma, 1846.

SEVERI (1906), Francesco Severi, *Complementi di Geometria Proiettiva*, Bologna, 1906.

SEVERI (1918), Francesco Severi, *Lezioni di Geometria Descrittiva dettate nella R. Università di Padova e nella Libera Università di Ferrara e raccolte dall'Assistente Prof. A. Comessatti*, Padova, 1918.

SEVERI (1921), Francesco Severi, *Geometria Proiettiva*, Padova, 1921.

SEVERI (1936), Francesco Severi, *Applicazioni di Geometria Descrittiva. Lezioni date nella Facoltà di Architettura della R. Università degli Studi di Roma, raccolte da Michele Campanella*, Roma, 1936.

SCHMITT (1996), Gerhard Schmitt, *Information Architecture*, Roma, 1996.

TATON (1951), René Taton, *L'oeuvre scientifique de Monge*, Parigi, 1951.

TAYLOR (1715), Brook Taylor, *Principles of linear perspective, or the Art of designing upon a plane the representation of all sortes of objects, as they appear to the eye*, Londra, 1715.

TESSARI (1880), Domenico Tessari, *La teoria delle ombre e del chiaro-scuro*, Torino, 1880.

THOMPSON (1961), D'Arcy Wentworth Thompson, *Crescita e forma*, Torino, 1969.

WAISMANN (1971), Friedrich Waismann, *Introduzione al pensiero matematico*, Torino, 2004.

Appendice.

Le superfici rigate e le superfici sviluppabili in alcuni apparecchi per pietre da tagli

Nelle costruzioni in pietra da taglio si impiegano pietre estratte da cave in grandi quantità e ridotte in opportuni conci. Questi conci generalmente sono di forma regolare e il più possibile simili fra loro. La forma e la posizione dei conci deve essere tale da permettere la stabilità della costruzione indipendentemente dal materiale legante eventualmente impiegato. Infatti la malta generalmente impiegata serve per riempire gli interstizi e le imprecisioni dovute alla messa in opera ma non dovrebbe avere un apporto strutturale. Un arco è un tipico esempio di apparecchio in pietra da taglio. I *cunei* o *conci* sono le pietre lavorate e impiegate nella costruzione di volte. Le facce di ogni singolo concio che sono adiacenti l'una alle altre sono chiamate *giunti*, mentre le facce esterne che sono visibili sono chiamate *facce da paramento*. Ovviamente la stereotomia può impiegare anche materiali diversi come il legno e il metallo. In questo caso specifico mi riferisco al taglio delle pietre, il problema può essere suddiviso in tre sottoproblemi principali:

- data una determinata forma da costruire progettare il modo più conveniente per comporla in singoli conci. Bisogna determinare l'apparecchio, cioè disegnare le diverse superfici che separano i diversi conci;

- la geometria descrittiva serve appunto per determinare i diversi giunti e poter rappresentare in modo preciso le forme che compongono l'apparecchio. E' fondamentale quindi determinare le linee e le superfici dei conci.

- L'ultima parte consiste nel trovare il modo più conveniente per tagliare i conci.

Da quanto detto è evidente che la scelta dell'apparecchio più opportuno nasce da varie questioni che vanno dalla statica all'estetica e da considerazioni di carattere più pratico legate all'esecuzione e al costo dell'opera. A noi interessa solo l'aspetto geometrico della questione ma, in alcuni casi, l'aspetto geometrico è determinante per l'economicità e la fattibilità dell'opera.

Esistono alcune regole fondamentali che bisognerebbe seguire nel determinare l'apparecchio¹:

1. *Si deve evitare che le facce di un concio s'incontrino ad angolo acuto*, perché lo spigolo di un diedro acuto è più rompersi facilmente.

2. *Le superfici dei giunti dovrebbero essere piani o superfici sviluppabili o al limite superfici rigate*. Le diverse superfici dei giunti adiacenti dovrebbero combaciare il più possibile, in modo da distribuire le spinte in modo uniforme su tutta la faccia e non solo in alcuni punti. Da qui si capisce la preferenza per giunti costituiti da facce piane o comunque da superfici facilmente lavorabili come le rigate e le sviluppabili. Queste ultime hanno il vantaggio di poter essere sviluppate su piano in modelli di cartone o in latta e poter essere controllate in modo più preciso ed efficace.

3. *Si devono evitare gli angoli rientranti fra due giunti di uno stesso concio*.

4. Le dimensioni dei conci dovrebbero essere il più simili fra loro, soprattutto le dimensioni lungo una direzione rispetto all'altra.

Da quanto detto si capisce che il modo migliore per far incontrare i giunti è ad angolo retto. Inoltre sulle superfici di paramento andrebbero scelte come *linee di giunti* le *linee di curvatura* della superficie stessa. I giunti allora sarebbero *le sviluppabili* formate lungo le normali a queste linee. Questa sarebbe la scelta più opportuna anche se non è sempre possibile. I conci di un apparecchio si distribuiscono generalmente lungo filari o corsie. Le superfici costituite dai diversi giunti adiacenti di un filare con quello adiacente sono detti letti dei conci e letti di posa. In un muro i letti di posa sono le superfici orizzontali costruite dei vari conci. Normalmente i giunti che dividono i conci lungo uno stesso filare sono falsati rispetto al filare adiacente, perciò sono detti conci *discontinui*. La pressione maggiore del carico si

esercitata lungo i letti dei conci, cioè tra i diversi letti. Con volta si usa indicare qualsiasi copertura in muratura formata da elementi che disposti in un certo ordine si sostengono a vicenda per mutuo contrasto, trasmettendo gli sforzi ai piedritti verticali. Il piano d'imposta è il piano dove nasce la volta. Di solito indicata il piano di partenza della superficie interna o d'intradosso. La superficie esterna è detta di estradosso. Le volte possono essere semplici, se sono formate da un'unica superficie d'intradosso, o composte, se sono formate da più superfici. Esistono numerose tipi di volte semplici che generalmente sono classificate secondo la loro genesi geometrica. Tra le più utilizzate ci sono quelle cilindriche o volte a botte. Dal nome si intuisce che sono generate da forme cilindriche e vengono classificate in base alla natura della direttrice e della generatrice della superficie d'intradosso. Quando le generatrici sono perpendicolari ai due piani di fronte allora la volta è detta cilindrica retta. Può capitare che i piani frontali siano obliqui rispetto alle generatrici della superficie allora la volta è detta obliqua. L'angolo di obliquità misura l'angolo formato dalle generatrici con il piano di testa. Più l'angolo è piccolo e maggiore sarà l'obliquità della volta. Per una volta cilindrica retta tale angolo è retto.

Apparecchio elicoidale

Queste volte si usano per coprire aree aventi forma di parallelogramma². La superficie d'intradosso della volta è una porzione di cilindro retto sezionato con due piani obliqui rispetto all'asse. Questa volta è interessante perché crea un problema di carattere statico ed estetico che può essere risolto con la geometria descrittiva. In questo caso, infatti, le linee dei giunti dei conci longitudinali e quelle dei giunti discontinui non possono seguire le linee di curvatura dell'intradosso (le generatrici rette e gli archi perpendicolari all'asse), perché i conci di testa sarebbero obliqui rispetto al piano di fronte e non sarebbero contrastati ai lati, dove le forze sono maggiori. Questo produrrebbe delle spinte a vuoto che sono assolutamente da evitare se non vogliamo il crollo della copertura. Per ovviare a questo problema si sono escogitate varie soluzioni, qui illustrerò la soluzione dell'apparecchio elicoidale (fig. 1).

Siccome la volta è cilindrica è possibile sfruttare le pro-

prietà delle superfici sviluppabili e conviene disegnare lo sviluppo dell'intradosso. Nel nostro caso la superficie d'intradosso è un cilindro di rotazione, perciò lo sviluppo delle linee di fronte, oblique rispetto all'asse, nello sviluppo si trasformano in sinusoidi.

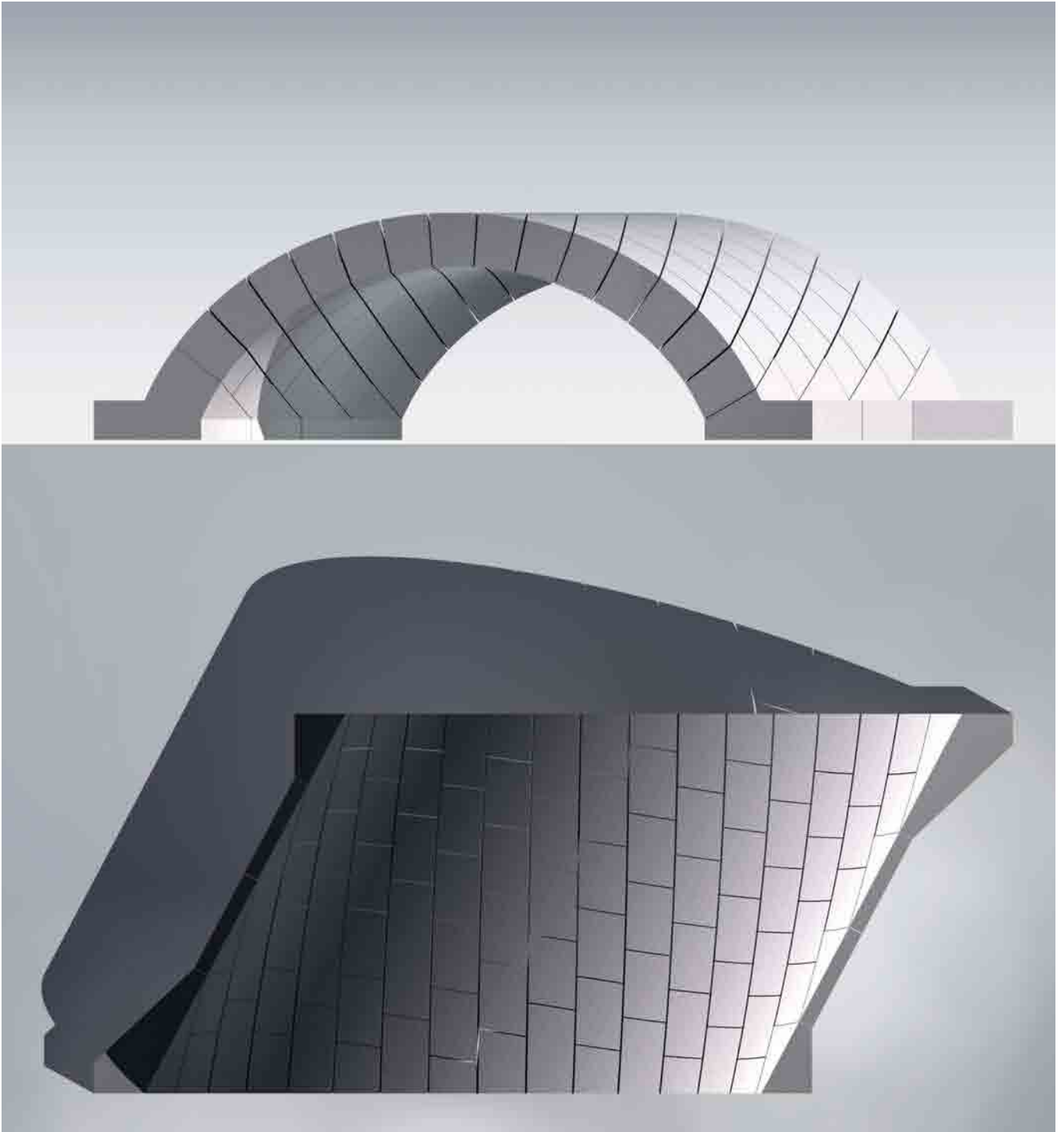
Esistono diversi apparecchi per le volte oblique, fra i più usati ci sono:

- l'apparecchio secondo generatrici ad archi di sezioni rette, in cui la disposizione dei conci interni segue l'andamento della volta retta. Allora i giunti longitudinali seguono le generatrici del cilindro. Per i conci frontali questi subiscono una rotazione secondo l'andamento della sezione obliqua. In questo modo i conci delle fronti sono tutti di dimensioni diverse. Questo sistema può essere utilizzato per volte con angolo di obliquità basso. Un altro tipo di sistema è l'apparecchio ad anelli, in cui i conci sono sistemati secondo archi retti sistemati a risega secondo la direzione normale ai lati di fronte. Per collegare fra loro questi archi si usa adoperare lo stesso concio in chiave per i due archi adiacenti;

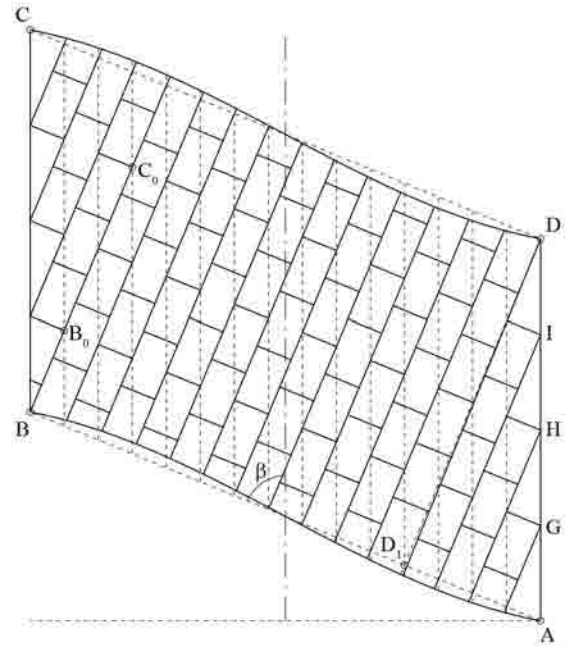
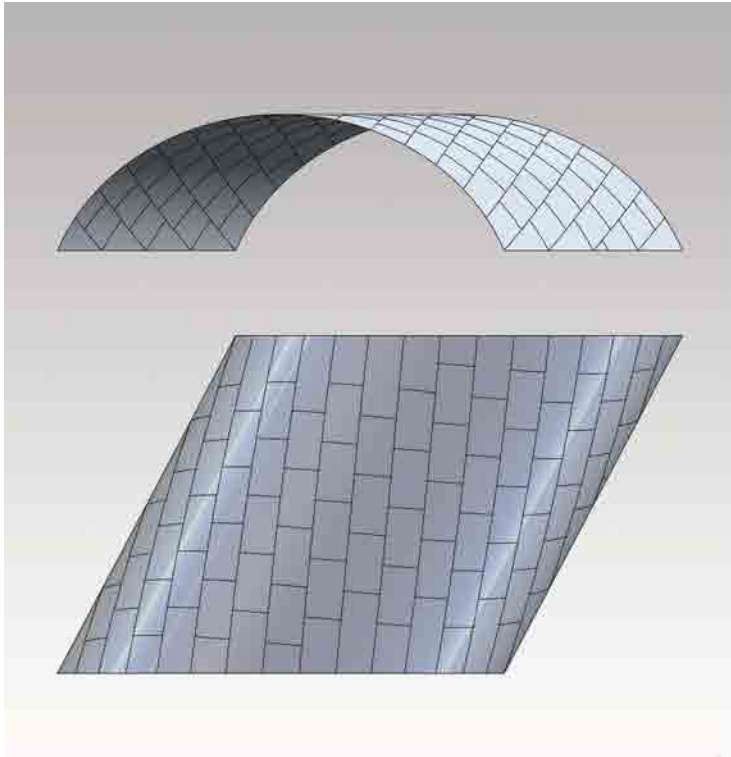
- un ulteriore apparecchio è formato da letti dei conci perpendicolari ai piani di fronte. Questo apparecchio si usa per piccole coperture come i passaggi nei muri. Di solito le due fronti sono formate da due archi di cerchio uguali. I letti dei conci si dispongono in piani perpendicolari alle fronti. Questi piani passano tutti per una medesima retta r , perpendicolare alle fronti e passante per il punto medio che collega i centri dei due archi delle fronti stesse. Questi piani segano la superficie cilindrica d'intradosso secondo archi d'ellisse. I conci discontinui generalmente sono sezioni parallele ai piani delle fronti. Questo sistema, solitamente, è utilizzato in piccole luci e la volta può essere formata da una singola serie di conci, senza il bisogno di giunti discontinui.

L'apparecchio elicoidale consente di avere, almeno per i conci interni, tutti i cunei uguali mantenendo le ortogonalità sui lati di fronte in modo da avere una distribuzione di carichi il più uniforme possibile.

Il parallelogramma **ABCD** è l'imposta della volta, che è di forma cilindrica di rotazione (fig. 2). L'angolo di obliquità è l'angolo β misurato (sul primo piano di proiezione) dall'asse della volta e dalla proiezione dell'arco di fronte (che è un segmento di retta). I piani di fron-



1/ Apparecchio elicoidale.



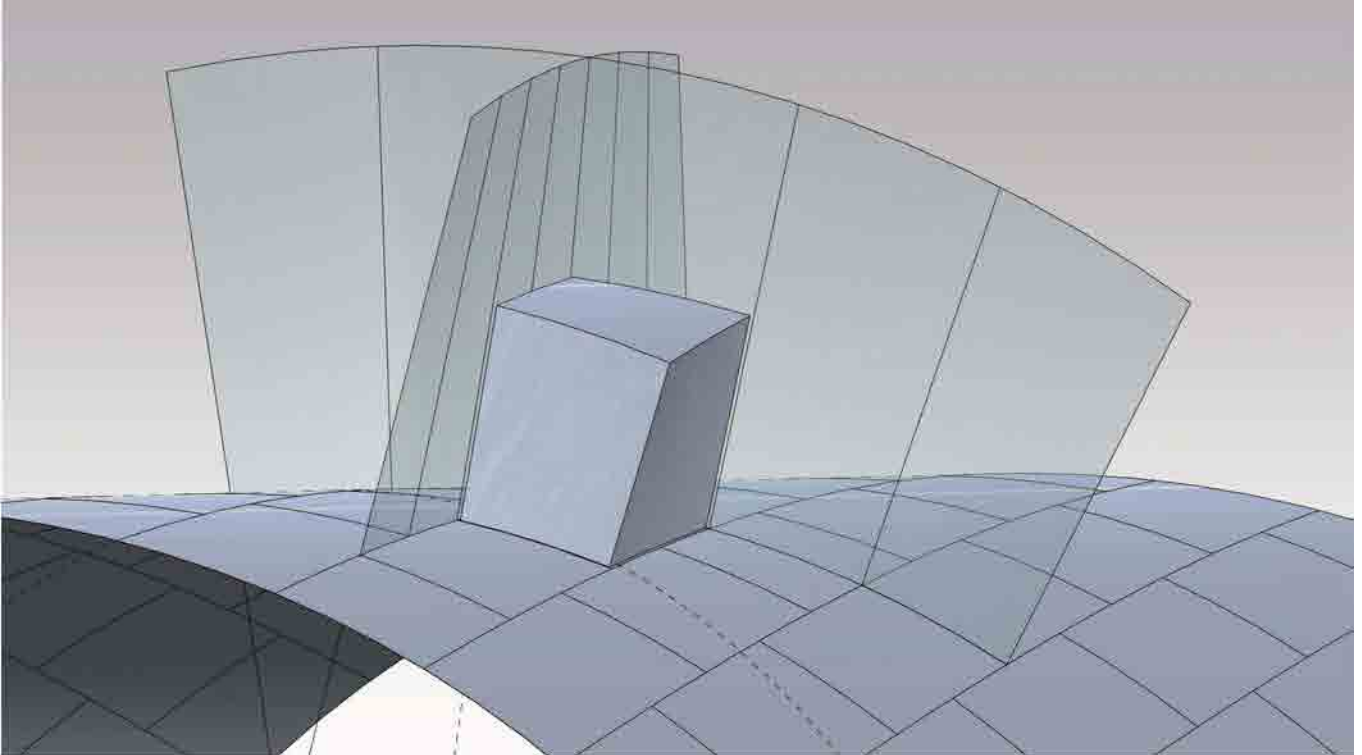
2/ Sviluppo della superficie cilindrica dell'apparecchio elicoidale.

te essendo delle sezioni piane del cilindro di rotazione sono delle ellissi che si proiettano sul secondo piano di proiezione come cerchi. La superficie d'intradosso si sviluppa nel piano secondo un quadrilatero formato da due lati retti e paralleli (i lati **AD** e **BC**) e in due linee curve, sinusoidi. Per disegnare le linee dei giunti conviene utilizzare la superficie di sviluppo e in un secondo momento proiettare tali linee sulla superficie oggettiva dell'intradosso. Utilizziamo come linee dei giunti trasversali discontinue delle linee rette parallele alle corde **AB** e **CD**. Come linee dei giunti longitudinali utilizziamo delle rette ortogonali alle prime. Le linee dei giunti oggettive sono due sistemi di eliche, che avranno lo stesso passo e lo stesso asse coincidente con l'asse del cilindro d'intradosso. Come superfici dei giunti laterali si adoperano delle rigate ortogonali alla superficie cilindrica lungo le eliche suddette (fig. 3). Queste superfici rigate sono tutte degli elicoidi uguali secondo i due sistemi dei giunti. Inoltre gli elicoidi sono retti ed hanno il piano direttore perpendicolare all'asse del cilindro. La

superficie d'estradosso è un altro cilindro con lo stesso asse del primo. I conci interni hanno le quattro facce laterali formate da elicoidi retti e le due facce d'intradosso e d'estradosso cilindriche. Inoltre tutti gli spigoli, tranne i quattro ortogonali all'intradosso (che sono delle rette), sono eliche. Le facce degli elicoidi così formati sono la superficie minima rispetto agli spigoli che le limitano. Ricordiamo, infatti, che l'elicoido retto è l'unica superficie minima costituita da rette (escludendo il piano). Il concio interno può essere spostato con un movimento elicoidale sia nel seno longitudinale che trasversale e sovrapporsi al concio successivo senza scarti (fig. 4). Questo implica che i conci interni sono tutti uguali. Questo è un vantaggio notevole sia per il disegno dell'apparecchio e sia per la sua realizzazione effettiva.

Lo sviluppo dell'intradosso

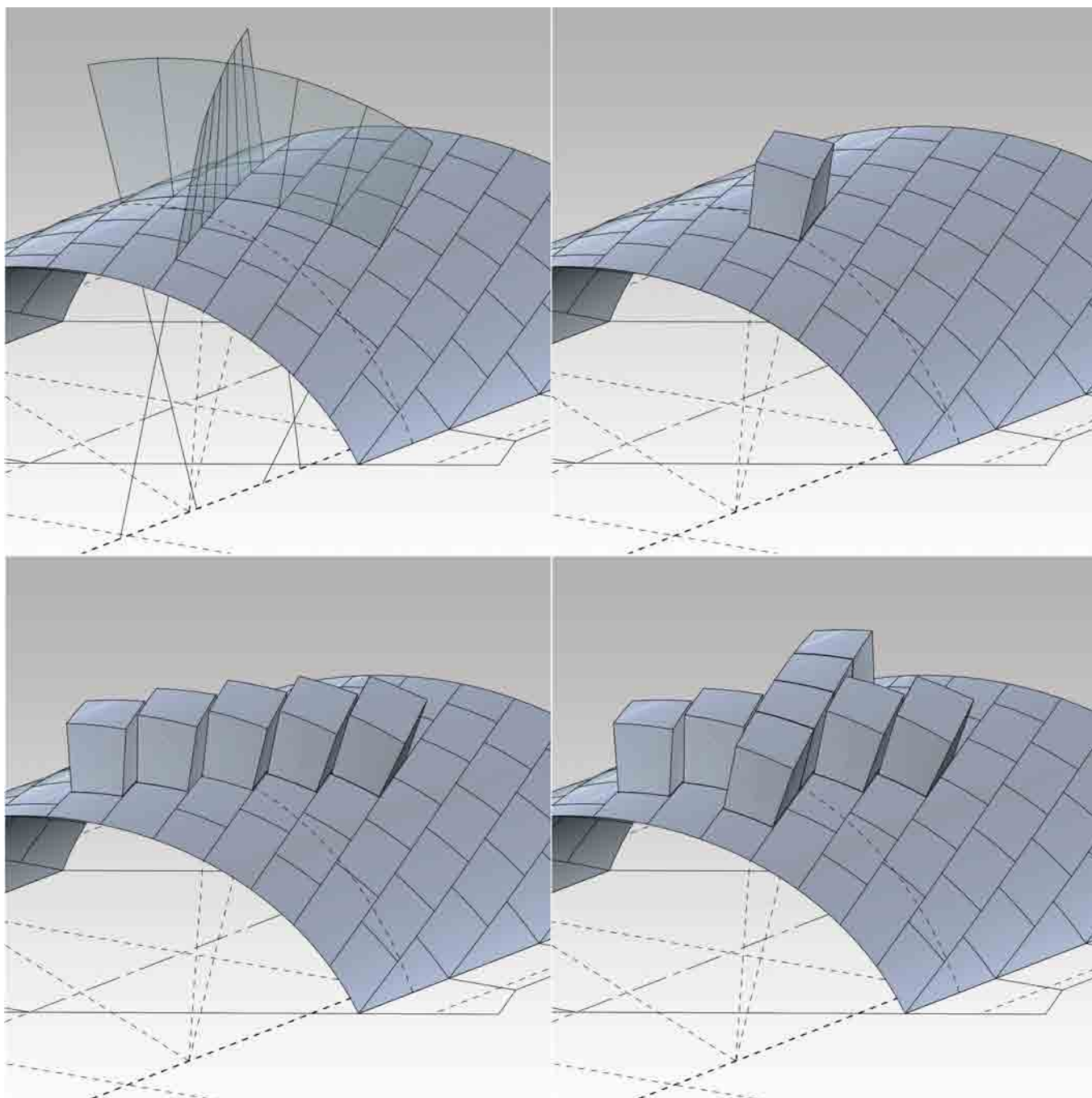
I modellatori NURBS come thinkdesign consentono di costruire automaticamente lo sviluppo piano di una superficie sviluppabile. Per cui una volta ottenuto il



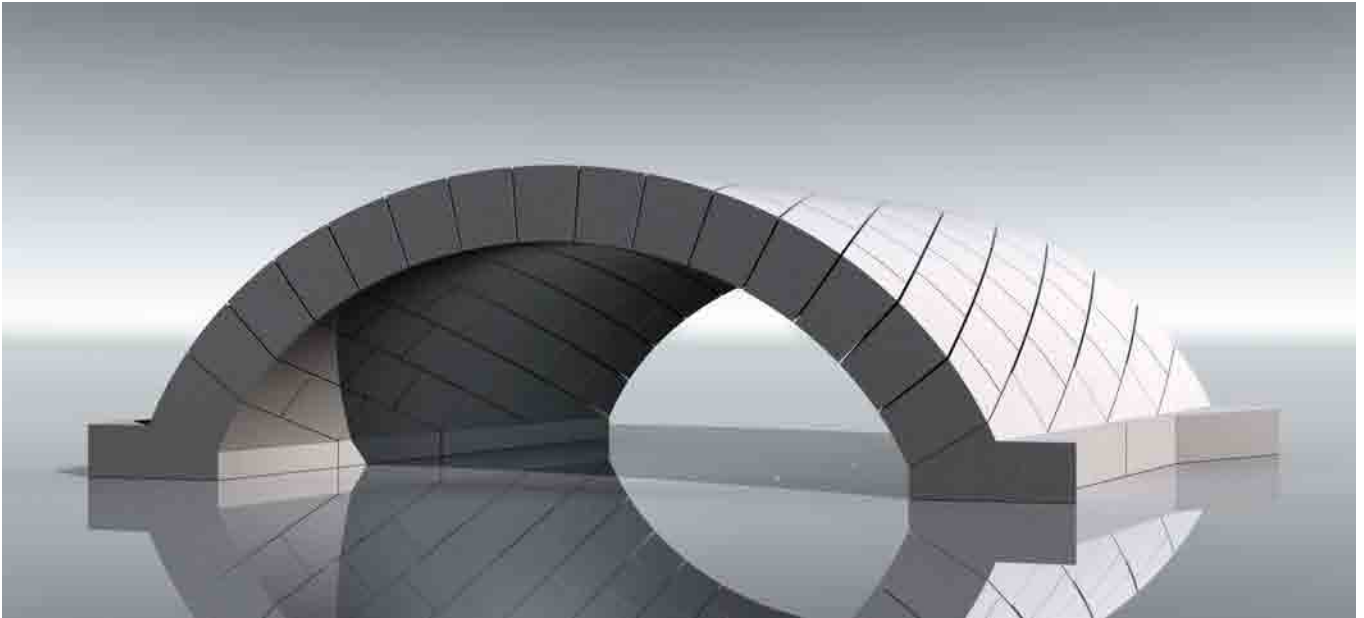
3/ Costruzione di un concio della volta dell'apparecchio elicoidale.

quadrilatero mistilineo (formato da due rette e da due sinusoidi), bisogna decidere il numero dei conchi che si vogliono avere sulla fronte della volta. Allora dividiamo la corda **AB** in numero dispari di parti, per esempio **15**. I ricorsi longitudinali, nello sviluppo, sono delle rette passanti per questi punti e perpendicolari alle corde **AB**. Affinché i conchi dividano in maniera esatta la superficie è importante che la linea del giunto longitudinale uscente da **D** passi per un punto della divisione della corda **AB**. Questo vuol dire che i due sistemi di linee non saranno perfettamente perpendicolari ma i conchi saranno comunque uguali fra loro. Per fare ciò si stacca una retta **d** perpendicolare ad **AB** dal punto **D**. Questa retta secca la corda **AB** in un punto **D₁**. Si prende il punto di divisione della corda **AB** più prossimo dalla parte più prossima all'interno della superficie. Nell'esempio è quarto punto a partire da **A**. Allora le rette longitudinali sono quelle parallele alla retta che passa per i punti **D** e **4**. Questa operazione ha lo scopo, in aggiunta ad avere tutti i conchi interni uguali, di avere le eliche longitudinali

il più possibile perpendicolari agli archi di fronte. Come linee dei giunti longitudinali si hanno delle rette passanti per i punti di divisione. Sugli spigoli laterali **CB** e **AD** abbiamo tre linee per parte che vengono intersecate. Per determinare le linee dei giunti discontinue si prendono le rette parallele alla corda **AB** a partire dai punti d'intersezione **G**, **H**, e **I**. Se i conchi sono ancora grandi e li si vuole suddividere ulteriormente si può dividere in tre parti lo spigolo **C₁B₁**. Per i conchi frontali (nello sviluppo sono quelli tagliati dalle due sinusoidi), conviene mantenere una dimensione il più omogenea possibile in rapporto alla divisione fatta. Lo sviluppo della superficie d'estradosso non è necessaria ai fini della modellazione. Infatti una volta ottenuto il disegno dell'intradosso è sufficiente proiettarlo sulla superficie in modo da avere le linee dei giunti oggettive. Le superfici elicoidali passanti per le linee dei giunti e ortogonali al cilindro d'intradosso taglieranno il cilindro d'estradosso secondo altre eliche. In questo modo i conchi sono tutti determinati. Per disegnare la superficie elicoidale passante per un'elica



4/ Il concio interno può essere spostato con un movimento elicoidale sia nel seno longitudinale che trasversale e sovrapporsi al concio successivo senza scarti. I conci interni sono tutti uguali.



5/ Sui piedritti poggiano nell'esempio illustrato otto cuscinetti d'imposta di cui quattro sono frontali e altri quattro interni.

longitudinale o trasversale (giunti discontinui) conviene costruire una superficie spinata che abbia come *spine* l'elica e come generatrici è sufficiente dare le due ortogonali iniziali e finali al cilindro agli estremi dell'elica. E' possibile volendo calcolare il passo dell'elica e costruire l'elicoide retto come primitiva, ma è più comodo e ugualmente corretto il sistema suddetto.

Diversi tipi di conci

Nella volta elicoidale esistono tre tipi di conci differenti:

- I *conci interni* o *correnti* che sono quelli interni alla volta e sono tutti uguali fra loro.

- I *conci frontali* o *di testa* che hanno oltre all'intradosso anche la faccia frontale visibile. Questa è una superficie piana.

- I *cuscinetti* d'imposta che poggiano sui piedritti.

I cunei interni sono tutti uguali e sono formati da sei superfici, di cui:

due sono di forma cilindrica (estradosso e intradosso), e le rimanenti sono elicoidi retti. Gli spigoli delle facce sono tutti delle eliche tranne i quattro in senso verticale che sono delle rette. Il singolo concio è posizionato con la superficie d'estradosso tangente al piano orizzontale

(nel suo punto di mezzo rispetto al parallelogrammo di sviluppo) e con le generatrici perpendicolari al secondo piano di quadro.

I conci frontali differiscono con quelli interni per la faccia piana frontale che è di paramento come quella d'intradosso. Le dimensioni dei conci sono diverse e dipendono dalla loro posizione rispetto al piano obliquo della volta.

I conci d'imposta sono uniti con dei cuscinetti per evitare l'angolo acuto che si viene a formare nell'apparecchio alla base. Essi sono costituiti da una base orizzontale che consente un inserimento coerente con la costruzione. Sui piedritti poggiano nell'esempio illustrato otto cuscinetti d'imposta di cui quattro sono frontali e altri quattro interni (fig. 5). Il cuscinetto d'imposta interno è formato da un prisma retto a sezione pentagonale e da un ulteriore pezzo costituito da due facce cilindriche triangolari, che sono quelle d'intradosso ed estradosso della volta, e da due superfici elicoidali rette. In tutto il concio è costituito da dieci facce. I cuscinetti frontali son diverse a seconda che si trovino nell'angolo acuto o ottuso della volta rispetto al piedritto. Negli angoli acuti si è unito l'ultimo concio della volta con il cuscinetto d'imposta, mentre nell'angolo ottuso si può lasciare

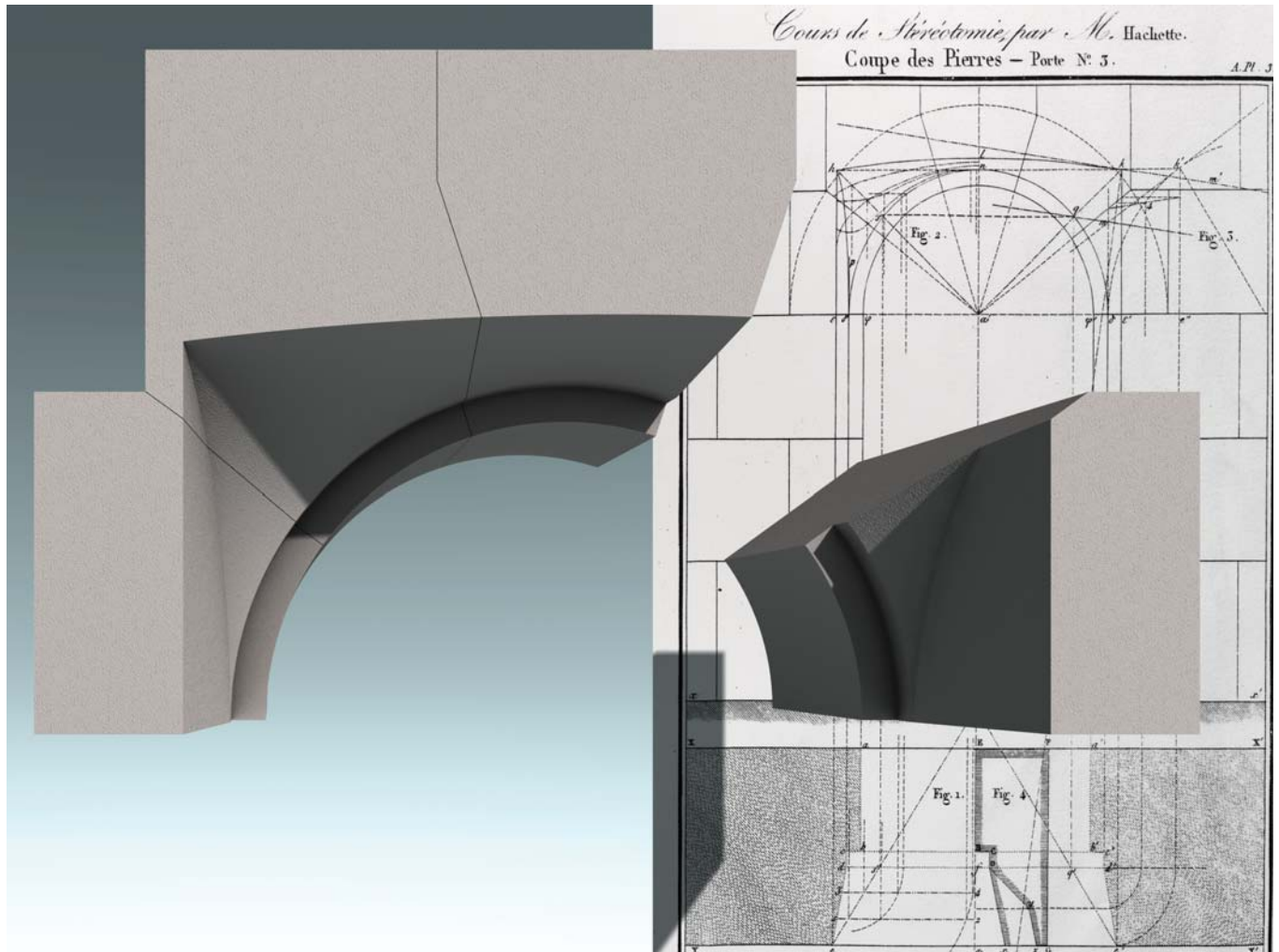
indipendente l'ultimo concio. Inoltre è preferibile cambiare la forma della base in modo da avere i lati esterni perpendicolari ai piani di fronte.

Modellazione della *épure de l'arrière-voussure de Marseille*

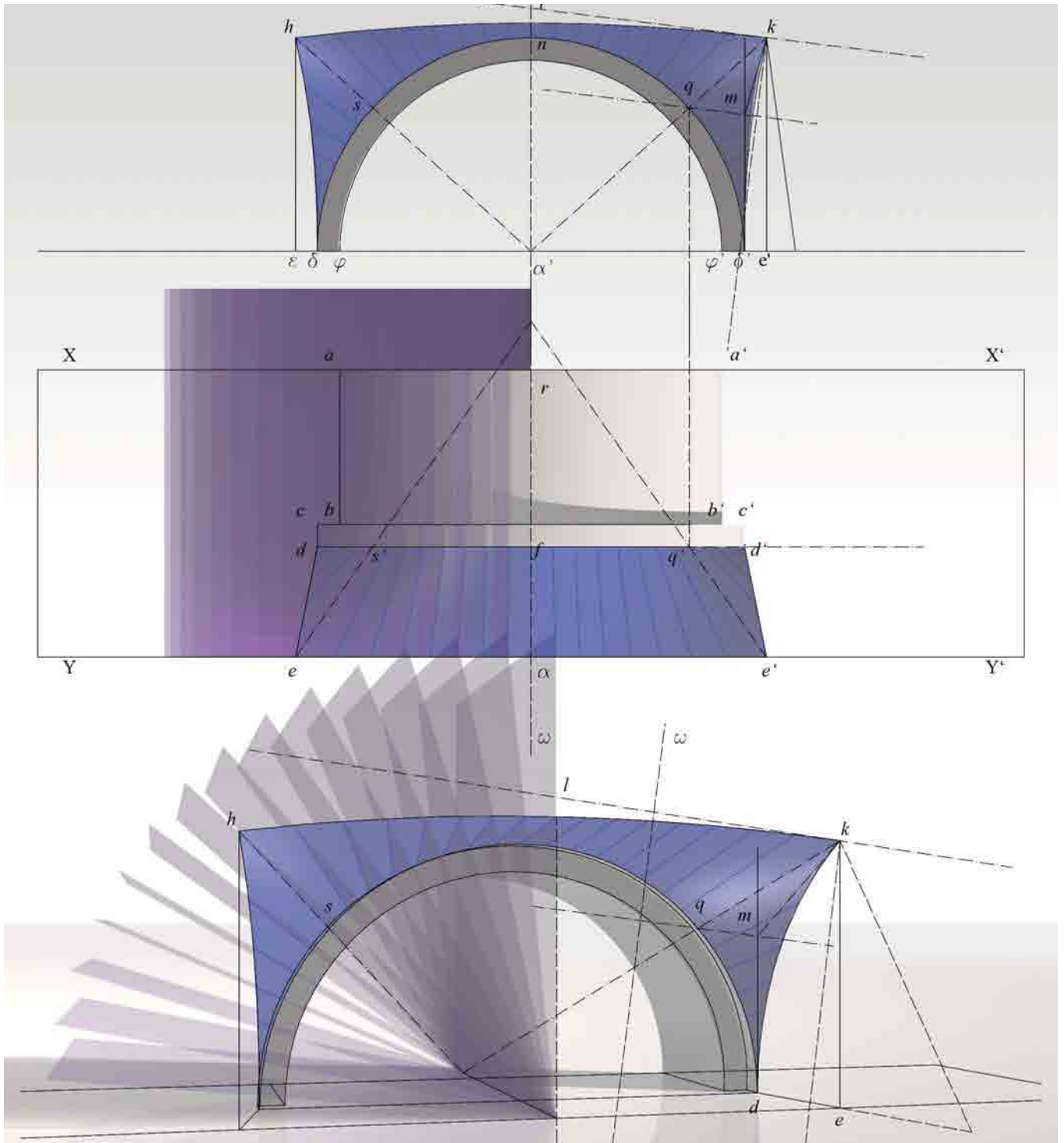
L'esempio rappresentato è un esercizio di stereotomia utile per capire le attuali procedure informatiche di generazione e costruzione della forma.³La modellazione di questo disegno⁴ è un'applicazione immediata dei principi che abbiamo esposto nel primo capitolo della

tesi. Si tratta d'un esercizio di stereotomia in cui l'oggetto è una particolare volta chiamata *arrière-voussure de Marseille*⁵ (fig. 6).

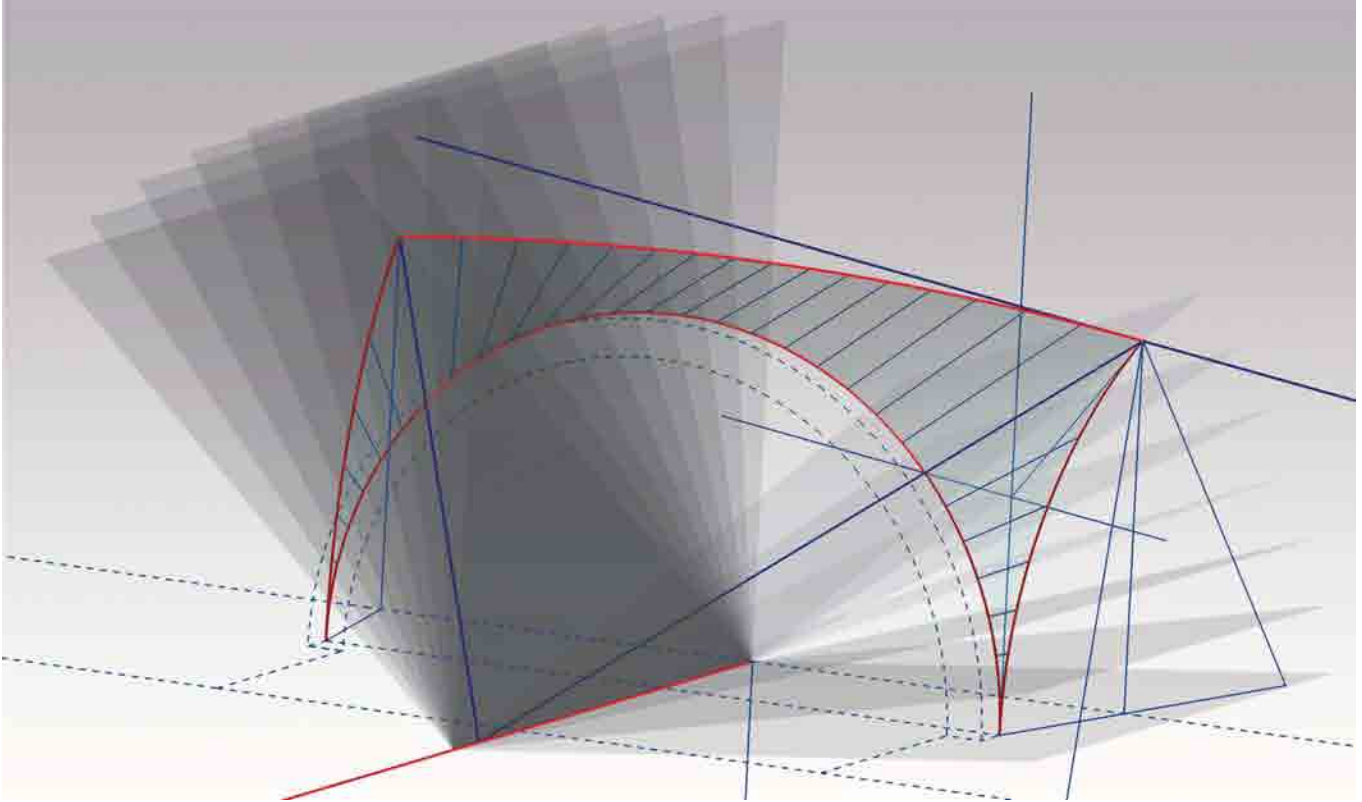
Il piccolo varco creato nello spessore del muro⁶, chiamato *volta di Marsiglia*, si compone d'una volta a botte (*porte droite*) e d'una seconda volta (*arrière-voussure*), destinata a coprire l'allargamento di questa porta. Praticato per facilitare l'entrata delle carrozze e impedire che le ante in legno, che chiudono l'apertura, non urtino. Quest'ultima parte del passaggio, l'*arrière-voussure*, è formata da diverse superfici rigate dove le tre direttrici



6/ Rappresentazione della volta dell'*arrière-voussure de Marseille* composta da cinque conci di pietra. I piani di taglio seguono l'andamento delle generatrici rette delle superfici rigate che formano l'intradosso. Per questioni di stabilità le superfici di taglio migliori dovrebbero seguire l'andamento di vari iperboloidi. Hachette, giustamente, ha scelto dei piani privilegiando l'aspetto pratico legato all'esecuzione del concio.



7/ Rappresentazione della *épure* de La Coupes des Pierres Arrière-voussure de Marseille di Hachette.



8/ Costruzione del modello de La Coupes des Pierres Arrière-voussure de Marseille.

sono sempre due archi di cerchio e una retta orizzontale. La particolarità dell'apertura consiste nel costruire la tangenza fra le tre superfici rigate che formano lo svasamento della seconda volta. Per fare ciò è necessario conoscere le proprietà già ricordate.

Nella prima superficie dell'*arrière-voussure*, la posizione della generatrice retta è determinata da tre condizioni: la prima, deve passare per il cerchio verticale della scanalatura, di diametro dato; la seconda, deve appoggiarsi ad un secondo arco di cerchio situato, come il primo, su un piano; la terza deve appoggiarsi all'asse orizzontale (fig. 7, 8).

L'*arrière-voussure* e la scanalatura hanno lo stesso piano di giunzione della prima volta (*porte droite*); e poiché tutti i piani di giuntura di questa apertura passano per l'asse orizzontale, ne segue che tagliano la superficie della volta secondo delle linee rette, che sono gli spigoli delle pietre di taglio di questa volta.

Supponiamo che l'arco di cerchio, che serve da direttrice alla retta generatrice della prima superficie de l'*arrière-voussure*, sia dato: questo arco, quale che sia il suo raggio⁷, sarà tagliato dalle verticali dei piani di strombatura, in due punti. I piani passanti per questi punti e per l'asse della porta dritta, tagliano il cerchio della scanalatura in due altri punti. Questi quattro punti determinano la posizione e la lunghezza delle *rette limite* della prima superficie della volta. Ne segue che questa superficie copre solamente lo spazio che corrisponde alla parte centrale (in pianta è la parte trapezoidale).

Due ulteriori superfici rigate coprono lo spazio corrispondente ai due triangoli in pianta, dove le generatrici si appoggiano, come per la prima superficie, per il cerchio della scanalatura e per l'asse. Queste hanno per direttrici dei cerchi dello stesso raggio, dati nei piani di svasamento. Il raggio di questi cerchi è almeno uguale alla metà della larghezza della scanalatura; se fosse più

piccolo, le ante in legno, che si aprono secondo archi di cerchio non potrebbero appoggiarsi contro i piani di svasamento. La condizione più importante, tuttavia, è che abbiano la stessa tangente nel punto di contatto con l'*arrière-voussure*. Così facendo si mette in atto quella condizione per cui: due superfici rigate che hanno una retta comune e tre piani tangenti comuni in tre punti differenti di questa retta, sono tangenti l'uno all'altra in tutti i punti della retta comune⁸.

Note

1. Fano Gino (1925), *Lezioni di Geometria Descrittiva*, Torino. Pag. 347.

2. Fano Gino (1925), *Op. Cit.*, Pag. 451.

3. De Carlo Laura (2004), *Geometrie dal pensiero costruttivo nel trattato di stereotomia di Alonso de Vandelvira*, in: *Disegnare, idee immagini*, n.28.

4. Hachette Jean Nicolas Pierre (1828), *Traité de Géométrie Descriptive*, Paris. «Porte N°3 Arrière-voussure de Marseille» pag. 315. L'esercizio è complesso e richiederebbe una trattazione più lunga per poterlo descrivere in modo esaustivo.

5. Hachette J. N. Pierre (1828), *Op. cit.*, pag 93. «Troisième exemple. Surface réglée de l'arrière-voussure de Marseille».

6. Gli autori che hanno scritto sul taglio delle pietre, hanno distinto cinque specie di volte, che chiamiamo portes, voutes, descentes, trompes, escaliers. Le porte sono piccole volte praticate nello spessore del muro e destinate a coprire un passaggio o a illuminare l'interno di una volta. Le volte e le porte che si intersecano, o si collegano, nascono dallo stesso piano orizzontale.

7. Una condizione importante è che gli archi consentano l'apertura delle ante.

8. Gli altri due piani tangenti si hanno lungo la retta generatrice nei punti d'intersezione con la seconda e la terza direttrice.

Abstract

The objective of this study is to reveal the properties of ruled surfaces and developable surfaces through Virtual laboratory and, overall, to be a contribution to the renewal of descriptive geometry. The basis of the research lies within the scientific foundations of drawing and of mathematical representation method.

The study's structure can be divided into two essential moments:

- the historical recognition on ruled surfaces from the point of view of solid geometry and descriptive and projective geometry, going from the treaty of J.N. P. Hachette (1828) to the texts of G. Fiedler (1878), F. Aschieri (1888) and G. Fano (1925);

- the rereading of theoretical propositions concerning this two type of surfaces, through a series of experiments carried out within the virtual laboratory of new descriptive geometry.

A virtual laboratory can be defined as a digital workshop, where it is possible to control directly in a three-dimensional space the problems of shapes' generation that may be found in geometry and

architecture. As a matter of fact, computer, besides its limits in modelling, has proved to be an essential tool for the display of some properties of ruled surfaces. Several theoretical concepts I have analysed are only enunciated in literature, but were never represented. The reason is the complexity of these drawings that could only be realised with the rule and compasses at that time. I am referring to some properties explained by J. N. P. Hachette and G. Fano, but not only these. Hachette was a mathematician, as was Monge before him. Most of his thoughts on ruled surfaces are the result of analytical studies or geometrical intuitions; as a consequence, when the representation becomes too complex it is left to the readers' imagination.

In conclusion, the objective of this research is also to reveal through representation what was only enunciated with words on theoretical basis. In this respect, I believe that the greatest contribution of informatics revolution to the study of descriptive geometry is the consolidation of drawing as an instrument of the logic, in other words as a tool for discovery and verification of geometrical thoughts.

