



**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA

Dipartimento di Scienze Statistiche  
Dottorato di Ricerca in Statistica Metodologica  
XXXIII Ciclo - anno 2017

# Persistenza del Tasso di Cambio: il caso dell'Australia rispetto agli USA

**Relatore:**  
Prof. Stefano Fachin

**Presentata da:**  
Roberto Galli

Sessione primaverile  
Anno Accademico 2020/2021  
CCBY

# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduzione</b>  | <b>3</b>  |
| <b>1 Impostazione teorica</b>                              | <b>7</b>  |
| 1.1 REH e IKE . . . . .                                    | 7         |
| 1.2 VAR . . . . .  | 16        |
| 1.2.1 I(1) . . . . .                                       | 21        |
| 1.2.2 I(2) . . . . .                                       | 26        |
| <b>2 Analisi Grafica</b>                                   | <b>36</b> |
| <b>3 Analisi Empirica</b>                                  | <b>46</b> |
| 3.1 Determinazione dell'ordine di Cointegrazione . . . . . | 50        |
| 3.2 Le Forze di Attrazione . . . . .                       | 53        |
| 3.3 I Trend Stocastici Comuni . . . . .                    | 57        |
| 3.4 Proprietà di Integrazione e Cointegrazione . . . . .   | 59        |
| 3.5 Esclusione delle Materie Prime . . . . .               | 61        |
| 3.6 Esclusione degli Indici Azionari . . . . .             | 73        |
| <b>Conclusioni</b>   | <b>85</b> |
| <b>Appendice</b>   | <b>88</b> |

---

## Sommario

Le ampie e persistenti oscillazioni del tasso di cambio rispetto al suo valore di equilibrio di lungo periodo rappresentano un classico enigma della macroeconomia internazionale. Ad esso è frequentemente associato quello relativo alla persistente deviazione del differenziale dei tassi di interesse tra i due paesi dalla variazione attesa del tasso di cambio. Una loro soluzione può essere trovata considerandoli simultaneamente e assumendo che gli agenti economici abbiano un comportamento eterogeneo, con aspettative basate sull'approccio di una imperfetta conoscenza della realtà piuttosto che su quello classico di aspettative razionali. L'impiego, poi, della metodologia del modello I(2) permette di dare una spiegazione più articolata della dinamica delle variabili nel medio e nel lungo periodo.

# Introduzione

La teoria della Parità del Potere d'Acquisto (*Purchasing Power Parity* - PPP) stabilisce che un paniere di beni abbia lo stesso prezzo in due paesi una volta che sia espresso nella medesima valuta [Krugman et al., 2012]. In altre parole la teoria asserisce che il tasso di cambio tra due paesi sia pari al rapporto del prezzo dello stesso paniere di beni nelle due nazioni. Nella realtà, invece, si riscontrano ampie e persistenti oscillazioni del tasso di cambio intorno al suo valore di equilibrio, come evidenziato nella Figura (1), e ciò dà vita a quello che è noto come *Purchasing Power Parity puzzle*.

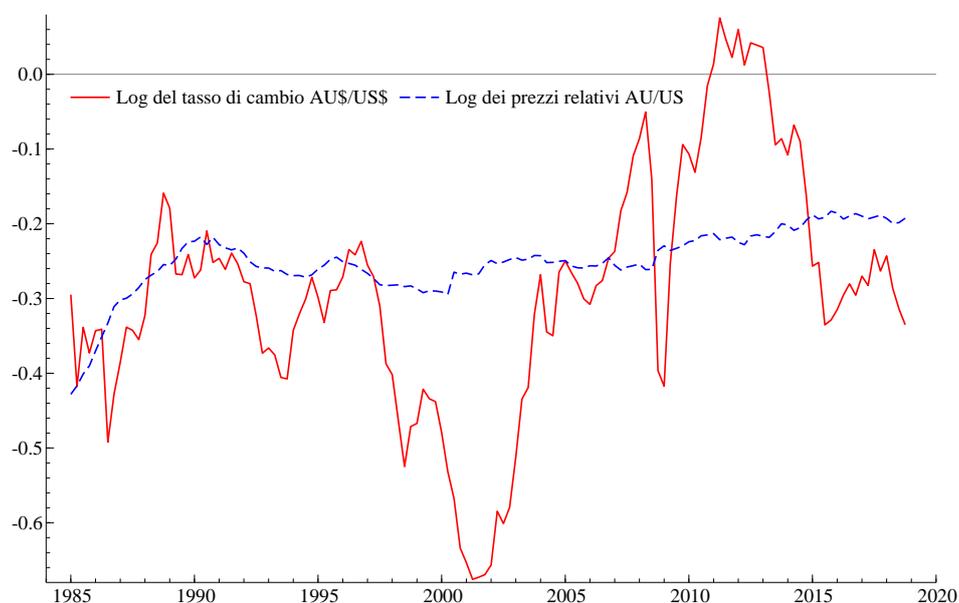


Figura 1: Il log del tasso di cambio e il log dei prezzi tra Australia e USA.

---

Per la sua soluzione sono state avanzate diverse ipotesi. Ad esempio, alcuni [Bacchiocchi and Fanelli, 2005], facendo riferimento ad un contesto di Concorrenza Imperfetta, spiegano l'andamento divergente tra il tasso di cambio e il rapporto dei prezzi (PPP) attraverso l'adozione di un *mark-up* variabile sui costi di produzione, adottato dalle imprese al fine di non perdere quote di mercato. Altri [Frydman and Goldberg, 2007], invece, sostengono che sia necessario abbandonare l'ipotesi di Aspettative Razionali (REH), cioè di un mondo preordinato in cui la conoscenza è diffusa in modo omogeneo tra tutti gli operatori e in cui gli errori di previsioni possono avvenire ma avere soltanto carattere temporaneo. A questa impostazione i due autori sostituiscono quella di Imperfetta Conoscenza (IKE), che riconosce come gli agenti economici hanno una conoscenza solo parziale della realtà che li circonda, seguono un comportamento eterogeneo tra di loro e, soprattutto, ammettono che gli *shock* che colpiscono il sistema economico possono avere effetti permanenti e provocare nelle variabili uno scostamento prolungato dal loro valore di equilibrio di lungo periodo.

Dal punto di vista modellistico, la soluzione al *puzzle* della Parità del Potere d'Acquisto viene individuata considerandolo congiuntamente al *puzzle* della Parità Scoperta dei Tassi di Interesse (*Uncovered Interest rate Parity* - UIP), secondo cui il differenziale dei tassi di interesse dei due paesi non coincide con la variazione attesa del tasso di cambio. Seguendo Frydman and Goldberg [2007] attraverso l'inserimento nell'UIP di un premio all'incertezza (*Uncertainty Premium*) che varia nel tempo si è in grado di tener conto del mutare dell'avversione alla perdita<sup>1</sup> man mano che il tasso di cambio si allontana dal suo valore di equilibrio di lungo periodo.

Questo approccio è stato seguito da Johansen et al. [2010] e Juselius [2017] per spiegare l'andamento del tasso di cambio tra Germania e USA attraverso un VAR cointegrato I(2). La metodologia è stata applicata con successo anche da

---

<sup>1</sup>Il concetto di avversione alla perdita, diverso da quello di avversione al rischio, è dovuto a Kahneman and Tversky [1979]

---

[Juselius and Assenmacher \[2017\]](#) per il tasso di cambio tra Svizzera e USA, nel quale il ruolo della componente finanziaria sull'evoluzione del tasso di cambio è dominante. [Juselius and Stillwagon \[2018\]](#) analizzano invece il tasso di cambio tra Regno Unito e Stati Uniti, modellando le aspettative di mercato non solo attraverso le variabile effettivamente osservate ma anche attraverso l'utilizzo di previsioni fornite da istituti specializzati. Infine, [Salazar \[2017\]](#) utilizza questa metodologia con riguardo al tasso di cambio tra Cile e USA, caratterizzato dalla peculiarità del Cile di essere un economia prevalentemente focalizzata sulla esportazione di materie prime, quali il rame.

In questo lavoro si analizza il caso del tasso di cambio dell'Australia rispetto agli USA, che può essere considerato per certi versi una sintesi dei casi sopra elencati. L'Australia è, infatti:

- analogamente al Cile [[Salazar, 2017](#)], un paese fortemente legato all'esportazione di materie prime: è il più grande esportatore mondiale di carbone (con una quota del 30 per cento) e si appresta ad esserlo nel Gas liquido (oggi al 20 per cento);
- similmente alla Svizzera [[Juselius and Assenmacher, 2017](#)], è dal punto di vista finanziario considerato tra i paesi più stabili del pianeta: è una tra le poche nazioni a vantare un debito pubblico valutato con la tripla A;
- come Il Regno Unito [[Juselius and Stillwagon, 2018](#)], condivide con gli Stati Uniti la stessa impostazione finanziaria basata sui mercati finanziari piuttosto che sulle banche commerciali.

L'analisi viene realizzata, in primo luogo, attraverso un VAR cointegrato I(2), in cui vengono inseriti gli indici di borsa dei due paesi come variabili in grado di contribuire a spiegare le variazioni attese del tasso di cambio nell'ambito della UIP. Successivamente, dato il forte legame esistente tra l'indice dei prezzi delle materie prime (*commodities*) e l'indice di borsa australiano, vengono analizzati gli

---

effetti dell'esclusione dell'indice dei prezzi delle materie prime. Infine, si procede ad analizzare il caso "classico" in cui le variabili esplicative considerate sono i tassi a breve e a lunga dei due paesi. Questo permette di effettuare anche un confronto con i risultati ottenuti attraverso gli indici azionari.

Il lavoro è organizzato come segue: il Capitolo (1) mostra l'impostazione teorica sottostante la determinazione del tasso di cambio; il Capitolo (2) fornisce una rappresentazione grafica dei fatti stilizzati; il (3) espone il modello empirico; il Paragrafo (3.5) considera il caso in cui si esclude dall'analisi l'indice dei prezzi delle materie prime australiane; il Paragrafo (3.6) propone il caso "classico" in cui il tasso di cambio è spiegato attraverso i tassi di interesse a breve e a lunga. Infine le Conclusioni.

# Capitolo 1

## Impostazione teorica

### 1.1 REH e IKE

Negli ultimi decenni gli economisti hanno fatto enormi sforzi per la costruzione di modelli che descrivessero adeguatamente la realtà circostante e avessero capacità previsive. Il grado di raffinamento raggiunto ha portato alla creazione di modelli micro fondati, che spiegano il funzionamento del sistema economico partendo dal comportamento dei singoli attori economici. Questi sono supposti agire e fare previsioni seguendo una serie di comportamenti che vengono sinteticamente definiti "Razionali" (*Rational Expectation Hypothesis*, REH), cioè perseguono il proprio interesse, hanno una avversione al rischio e le stesse informazioni degli altri soggetti economici. Questi modelli sono completamente predeterminati, cioè sono in grado di considerare tutte le alternative che possono presentarsi con le relative probabilità. In pratica, se vi è un errore di previsione, questo non può che essere casuale e transitorio.

Le verifiche empiriche dimostrano che questi modelli sono lungi dal raggiungere gli obiettivi che si prefiggono e possono avere previsioni a livello micro che sono in contrasto con quelle fornite a livello macro. Sebbene la versione moderna della REH sia attribuibile a [Muth \[1961\]](#), delle criticità in essa contenute si dibatteva già da molto tempo. [Hayek \[1945\]](#) al riguardo si esprimeva così:

---

*“Il carattere peculiare del problema di un ordine economico razionale è determinato proprio dal fatto che la conoscenza delle circostanze di cui dobbiamo servirci non esiste mai in forma concentrata o integrata ma unicamente come frammenti dispersi di conoscenza incompleta e spesso contraddittoria che tutti i singoli individui possiedono. <sup>1</sup>”*

e [Phelps \[2007\]](#) aggiunge:

*“La fuga precipitosa verso REH - ampiamente ritenuta una "rivoluzione", sebbene fosse solo una generalizzazione dell'idea neoclassica di equilibrio - fece deragliare i modelli in costruzione basati sulle aspettative che avevano appena lasciato la stazione. Alla fine, questo modo di modellare non ha illuminato il modo in cui funziona l'economia mondiale. <sup>2</sup>”*

A questa incoerenza hanno cercato di porre rimedio i così detti Economisti del Comportamento (*Behavioral*), secondo i quali la ragione di queste contraddizioni interne va ricercata nella complessità dell'Essere Umano che, in taluni casi, ad esempio per ragioni di carattere psicologico, può assumere comportamenti irrazionali o che tali appaiono ad una prima sommaria lettura. In pratica, questi studiosi introducono dei correttivi alla teoria delle Aspettative Razionali, per tener conto di fenomeni, quali le bolle immobiliari, difficilmente spiegabili altrimenti. Tutto questo è stato efficacemente riassunto da Richard Thaler [[Thaler and Ganser, 2015](#)]:

---

<sup>1</sup>*The peculiar character of the problem of a rational economic order is determined precisely by the fact that the knowledge of the circumstances of which we must make use never exists in concentrated or integrated form but solely as the dispersed bits of incomplete and frequently contradictory knowledge which all the separate individuals possess.*

<sup>2</sup>*The stampede toward REH - widely thought to be a "revolution", though it was only a generalization of the neoclassic idea of equilibrium - derailed the expectations - driven models building that had just left the station. In the end, this way of modelling has not illuminated how the world economy works.*

---

“... il problema è con il modello utilizzato dagli economisti, un modello che sostituisce l’homo sapiens con una creatura immaginaria chiamata homo economicus, ... Rispetto a questo mondo immaginario di Econs, gli Umani si comportano molto male, ... Praticamente nessun economista ha visto arrivare la crisi finanziaria del 2007-2008 e, peggio ancora, molti pensavano che sia il crollo che le sue conseguenze fossero cose che semplicemente non potessero accadere” <sup>3</sup>

Sempre Thaler aggiunge [Thaler and Ganser, 2015]:

“Non è quello che non sai che ti mette nei guai. È quello che sai per certo che non è così.” <sup>4</sup>

Per i fautori dell’Imperfetta Conoscenza (*Imperfect Knowledge Economics*, IKE), invece, la soluzione dell’impasse va individuata riconoscendo che la comprensione della realtà economica da parte dei singoli soggetti è parziale, e che le loro reazioni agli *shock* possono essere differenti e tali da generare variazioni di lungo periodo delle variabili. Questo fornisce lo spunto per modelli che sono soltanto parzialmente definiti e nei quali le funzioni di utilità dei singoli operatori rispondono a vincoli di natura qualitativa che permettono di superare l’incoerenza che può nascere tra il livello micro e quello macro e nello spazio intertemporale, in seguito a *shock* che colpiscono il modello.

---

<sup>3</sup>For four decades, since my time as a graduate student, I have been preoccupied by these kinds of stories about the myriad ways in which people depart from the fictional creatures that populate economic models. It has never been my point to say that there is something wrong with people; we are all just human beings—homo sapiens. Rather, the problem is with the model being used by economists, a model that replaces homo sapiens with a fictional creature called homo economicus, which I like to call an Econ for short. Compared to this fictional world of Econs, Humans do a lot of misbehaving, and that means that economic models make a lot of bad predictions, predictions that can have much more serious consequences than upsetting a group of students. Virtually no economists saw the financial crisis of 2007–08 coming, and worse, many thought that both the crash and its aftermath were things that simply could not happen.

<sup>4</sup>It ain’t what you don’t know that gets you into trouble. It’s what you know for sure that just ain’t so.

---

La necessità di un simile approccio è stato evidenziato dal governatore della Banca di Inghilterra King [King, 2005], il quale afferma:

*“Qualsiasi regola di politica monetaria che oggi sia giudicata ottimale sarà probabilmente superata da una nuova versione migliorata ... domani Quindi l'apprendimento dei cambiamenti nella struttura dell'economia è al centro del lavoro quotidiano delle banche centrali. Descrivere la politica monetaria in termini di una regola costante derivata da un noto modello di economia significa ignorare questo processo di apprendimento.”*<sup>5</sup>

Dello stesso tenore, con riferimento alla comprensione del tasso di cambio, è la dichiarazione di Dornbusch e Frankel [Dornbusch and Frankel, 1988], per cui:

*“Il problema principale con la teoria dell'overshooting, e più generale con l'approccio delle aspettative razionali, è che non spiega bene le dinamiche di breve termine [oscillazioni di lungo periodo] ... I tassi di cambio sono mossi in gran parte da fattori diversi dagli ovvi, osservabili, fondamentali della macroeconomia. Econometricamente, la maggior parte dell'azione è nel termine di errore.”*<sup>6</sup>

Da un punto vista analitico, le conseguenze delle differenze insite nell'impostazione delle Aspettative Razionali (REH) e in quella dell'Imperfetta Conoscenza (IKE) emergono dall'esigenza di individuare il legame esistente tra le variabili attese (non misurabili) e quelle utilizzate in loro sostituzione (misurabili) all'interno di un dato modello. Prendendo spunto da un processo generatore dei dati (*Data*

---

<sup>5</sup> *Any monetary policy rule that is judged to be optimal today is likely to be superseded by a new a improved version ... tomorrow So learning about changes in the structure of the economy lies at the heart of the daily work of central banks. To describe monetary policy in terms of a constant rule derived from a known model of the economy is to ignore this process of learning.*

<sup>6</sup> *The chief problem with the overshooting theory, and with the more general rational expectations approach, is that it does not explain well the short - term [long - swing] dynamics ... Exchange rates are moved largely by factors others than the obvious, observable, macroeconomics fundamentals. Econometrically, most of the "action" is in the error term.*

---

*Generation Process*, DGP) del tipo "Passeggiata Aleatoria" (RW):

$$\begin{aligned}x_t &= x_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &\sim N(0, \sigma_t^2)\end{aligned}$$

si definisce prima lo *shock* di previsione ( $\psi_t$ ) come:

$$x_{t+1|t}^e = x_t + \psi_t \tag{1.1}$$

dove  $x_{t+1|t}^e$  è il valore atteso al tempo  $t$  di  $x_t$  al tempo  $t + 1$ , e poi l'errore di previsione  $\varepsilon_t$ :

$$x_t = x_{t|t-1}^e + \varepsilon_t \tag{1.2}$$

Inserendo la (1.2) nella (1.1) si giunge ad esprimere la variazione nei valori attesi della variabile  $x_t$  come somma della errore ( $\varepsilon_t$ ) e dello *shock di previsione* ( $\psi_t$ ):

$$x_{t+1|t}^e - x_{t|t-1}^e = \varepsilon_t + \psi_t \tag{1.3}$$

Allo stesso modo, inserendo  $x_{t|t-1}^e = x_{t-1} + \psi_{t-1}$  nella (1.2) si ha che la variazione dei valori effettivi di  $x_t$  è una combinazione del errore di previsione ( $\varepsilon_t$ ) e dello *shock di previsione* del precedente periodo ( $\psi_{t-1}$ ):

$$x_t - x_{t-1} = \varepsilon_t + \psi_{t-1} \tag{1.4}$$

---

A questo punto emergono le differenze tra le due impostazione. Per la REH, l'assunzione di una conoscenza omogenea e diffusa dell'informazione tra tutti i soggetti economici comporta che sia noto che il processo generatore dei dati sottostante la variabile  $x_t$  è del tipo "passeggiata aleatoria" (RW) e, quindi, ogni singolo individuo porrà lo *shock* di previsione  $\psi_t = 0$ . Secondo l'impostazione IKE, invece, l'informazione parziale e diffusa in maniera disomogenea tra tutti i soggetti economici farà sì che ognuno di questi attribuirà un proprio valore allo *shock* di previsione, con la conseguenza che a livello aggregato si potrà avere un  $\psi_t \neq 0$  che trasformerà  $x_t$  in un processo "Passeggiata Aleatoria" con Deriva (*Drift*) che varia nel tempo pari a  $\psi_{t-1}$ . A titolo esemplificativo, con riferimento al mercato azionario, le singole serie potranno assumere un andamento RW con deriva se prevarrà un visione rialzista (*bullish*,  $\psi_{t-1} > 0$ ) o ribassista (*bearish*,  $\psi_{t-1} < 0$ ).

La maggiore o minore persistenza della deriva (*Drift*,  $\psi_t$ ) può essere approssimata attraverso un processo autoregressivo (AR) del primo ordine (1):

$$\psi_t = \rho_t \psi_{t-1} + \varepsilon_{\psi_t}$$

in cui il coefficiente autoregressivo  $\rho_t$  assume valori prossimi all'unità in caso di forte persistenza di  $\psi_t$  e valori via via minori man mano che la persistenza si riduce. Le conseguenze di un  $\rho_t$  vicino all'unità sono di rendere  $\Delta x_t$  un processo quasi-I(1) (*near-I(1)*) e il suo integrale,  $x_t$ , un processo un processo quasi-I(2).

$$\Delta x_t = \rho_t \psi_{t-2} + \varepsilon_{\psi,t-1} + \varepsilon_{x,t}$$

Al riguardo, [Juselius \[2014\]](#) osserva che la difficoltà empirica di distinguere un processo quasi-I(2) da un processo I(2) è da ascrivere al fatto che in molti casi la varianza di  $x_t$  ( $\sigma_x^2$ ) è molto maggiore di quella di  $\psi_t$  ( $\sigma_\psi^2$ ), e tale da celare la deriva  $\psi_t$ .

---

Questa Impostazione è stata seguita da [Frydman and Goldberg \[2007\]](#), i quali descrivono la variazione del tasso di cambio,  $s_t$ , come funzione del differenziale dei prezzi attesi al tempo  $t + 1$  dei due paesi,  $\Delta(p_d - p_f)_{t+1}^e$ ; di un errore gaussiano al tempo  $t + 1$ ,  $\varepsilon_{t+1}^e$ ; di un parametro variabile  $\beta_t$ , che segue un processo AR del primo ordine.

$$\Delta s_t \simeq \beta_t \Delta(p_d - p_f)_{t+1}^e + \varepsilon_{s,t+1}^e \quad (1.5)$$

I due autori poi, per sostituire le variabili attese non misurabili con delle variabili misurabili, ricorrono ad un'assunzione e al relativo corollario introdotti da [Juselius \[2017\]](#) e qui riportati:

**Assioma 1.** *Quando  $x_t \sim I(1)$ ,  $(x_{t+1|t}^e - x_t) = \psi_t$  è assunto essere  $I(0)$ , quando  $x_t$  è un processo quasi- $I(2)$ ,  $\psi_t$  è assunto essere quasi- $I(1)$ , quando  $x_t \sim I(2)$ ,  $\psi_t$  è assunto essere  $I(1)$ .*

**Corollario 1.** *Quando  $x_t \sim I(1)$ ,  $x_t, x_{t+1}$  e  $x_{t+1|t}^e$  condividono lo stesso trend stocastico  $I(1)$ . Quando  $x_t \sim I(2)$  o quasi- $I(2)$ ,  $\Delta x_t, \Delta x_{t+1}$  e  $\Delta x_{t+1}^e$  condividono lo stesso trend stocastico  $I(1)$  o quasi- $I(1)$ .*

Queste assunzioni permettono di riscrivere la (1.5) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \Delta s_t &\simeq \beta_t \Delta(p_{d,t} - p_{f,t}) + \varepsilon_{s,t} \\ \varepsilon_s &\sim N(0, \sigma_s^2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

con  $\beta_t$  pari a:

---


$$\beta_t = \rho_t \beta_{t-1} + \varepsilon_{\beta,t}$$

$$\varepsilon_{\beta} \sim N(0, \sigma_{\beta}^2)$$

e con il parametro autoregressivo  $\rho_t$  che assume valori prossimi all'unità quando il tasso di cambio si trova in prossimità del suo equilibrio di lungo periodo, mentre assume valori sempre più piccoli man mano che il tasso di cambio si allontana dai fondamentali. Gli stessi autori [Frydman and Goldberg, 2007] dimostrano anche che, relativamente al tasso di cambio, il rapporto segnale/rumore ( $\sigma_{\varepsilon_{\beta}}^2 / \sigma_{\varepsilon_s}^2$ ) è generalmente intorno allo 0.15.

Da questa espressione è poi possibile [Juselius, 2014] passare a quella relativa alla variazione del tasso di cambio reale  $\Delta q_t = \Delta s_t - \Delta(p_{d,t} - p_{f,t})$ , che può essere formulata come:

$$\Delta q_t = \zeta_t + \varepsilon_{q,t}$$

$$\zeta_t = \rho_t \zeta_{t-1} + \varepsilon_{\zeta,t}$$

$$\varepsilon_q \sim N(0, \sigma_q^2)$$

$$\varepsilon_{\zeta} \sim N(0, \sigma_{\zeta}^2)$$

L'assunzione (1) e il relativo corollario (1) si applicano anche al *puzzle* della Parità Scoperta dei Tassi di Interesse (UIP), in cui la differenza dei tassi di interesse di breve periodo dei due paesi ( $i_{d,t} - i_{f,t}$ ), non avendo lo stesso andamento della variazione attesa del tasso di cambio ( $s_{t+1|t}^e - s_t$ ), dà luogo ad un eccesso di rendimento ( $err_t$ ) che non può essere considerato un processo stazionario.

$$err_t = (i_{d,t} - i_{f,t}) - (s_{t+1|t}^e - s_t) \not\sim I(0) \tag{1.7}$$

---

Sostituendo la variazione attesa del tasso di cambio ( $s_{t+1}^e - s_t$ ) con la sua variazione effettiva ( $s_t - s_{t-1}$ ) è possibile riformulare la (1.7):

$$err_t = (i_{d,t} - i_{f,t}) - (s_t - s_{t-1}) \not\sim I(0) \quad (1.8)$$

Al fine di superare il *puzzle* insito nella (1.8), [Frydman and Goldberg \[2007\]](#) inseriscono due elementi:

- il primo è un premio per il rischio ( $rp_t$ ), con il quale si tiene conto della differente variabilità che caratterizza i tassi di interesse e il tasso di cambio e rappresenta il rendimento minimo richiesto dall'investitore per entrare nel mercato dei cambi;
- il secondo è un premio all'incertezza ( $up_t$ ), con il quale si tiene conto del fatto che la perdita potenziale nell'investire nel tasso di cambio diventa tanto più grande quanto maggiore è la deviazione del tasso di cambio dall'equilibrio di lungo periodo.

Così modificata, la UIP prende il nome di Parità Scoperta dei Tassi di Interesse aggiustata per l'incertezza (*Uncertainty Adjusted* UIP, UA-UIP) e può essere riscritta come:

$$(i_{d,t} - i_{f,t}) = (s_t - s_{t-1}) + rp_t + up_t \quad (1.9)$$

oppure, tenendo conto del forte legame tra il concetto di premio all'incertezza ( $up_t$ ) e la deviazione della Parità del Potere di Acquisto ( $p_{d,t} - p_{f,t} - s_t$ ), è possibile riformularla in termini di quest'ultima, attraverso una generica funzione  $\omega$ :

$$(i_{d,t} - i_{f,t}) = (s_t - s_{t-1}) + rp_t + \omega(p_{d,t} - p_{f,t} - s_t) \quad (1.10)$$


---

---

## 1.2 VAR

E' stato dimostrato da Juselius [2006] che le lunghe e persistenti oscillazioni del tasso di cambio intorno al suo valore di equilibrio possono utilmente essere spiegate attraverso un VAR cointegrato (CVAR) I(2), con il quale si è in grado di descrivere le correzioni nel breve e nel lungo periodo.

Un vettore autoregressivo (VAR) con  $p$  ritardi è un modello di  $k$  variabili  $x_{i,t}$  ( $T \times 1$ ) che può essere rappresentato nel seguente modo:

$$x_t = \nu + A_1 x_{t-1} + \dots + A_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

dove  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$  è un vettore ( $k \times 1$ ) con cui si esprimono le intercette,  $A_i$  sono le matrici ( $k \times k$ ) dei coefficienti e  $\varepsilon_t$  è un rumore bianco con la matrice di covarianza ( $\Sigma_\varepsilon$ ) non singolare.

Un VAR(p) si dice stazionario in senso debole se, assumendo che le variabili abbiano una distribuzione normale, il valore medio ( $\mu$ ) e la varianza ( $\sigma$ ) sono costanti e le covarianze ( $\gamma$ ) differiscono soltanto con riguardo allo spazio intertemporale ( $h$ ):

$$\begin{aligned} E[x_{i,t}] &= \mu_i & \forall t \\ \text{Var}[x_{i,t}] &= \sigma_i & \forall t \\ \text{Cov}[x_{i,t}, x_{i,t+h}] &= \gamma_{i,h} & \forall t \end{aligned}$$

Inoltre, poiché generalmente ci sono molti più parametri che osservazioni disponibili per la stima, la necessità di ridurre ulteriormente il numero dei parametri fa sì che si assuma che tutte le variabili  $x_i$  abbiano lo stesso valore medio e la stessa varianza e che la correlazione tra le variabili sia anche essa dipendente soltanto dallo spazio intertemporale ( $h$ ). In termini vettoriali questo può essere meglio descritto ricorrendo al cosiddetto "Concatenamento" (*Stacking*) dei vettori delle

---

$k$  variabili  $x_i$  nei  $T$  diversi momenti in un nuovo vettore  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_T]'$ , di dimensione  $(Tk \times 1)$ , in cui la singola componente  $y_t = x_{.,t}$  ha dimensione  $(k \times 1)$ :

$$\begin{aligned} E[y_t] &= \mu & \forall t \\ Var[y_t] &= \sigma & \forall t \\ Cov[y_t, y_{t+h}] &= \gamma_h & \forall t \end{aligned}$$

La condizione relativa al valore medio è, il più delle volte, realizzabile attraverso delle trasformazioni lineari che, se da un lato permettono di superare la peculiarità di molte serie economiche di presentare dei *trend*, dall'altro comportano la rinuncia a modellare la crescita di lungo periodo. Invece, per quanto riguarda la condizione relativa alla matrice delle varianze - covarianze, la forte correlazione che caratterizza molte delle serie temporali oggetto di studio viene superata ricorrendo al concetto di probabilità condizionata. Più precisamente, partendo dalla possibilità di esprimere la probabilità congiunta tra due variabili  $(x_1, x_2)$  in termini di probabilità condizionata e probabilità marginale, si è in grado di renderle condizionatamente indipendenti l'una dall'altra:

$$P(x_1, x_2; \theta) = P(x_1|x_2; \theta)P(x_1; \theta)$$

[Hendry and Richard \[1983\]](#) applicano questo concetto alla variabile  $y_t$  così da avere vettori di variabili condizionatamente indipendenti in termini temporali:

$$P(y_1, y_2, \dots, y_T; \theta) = \prod_{t=1}^T P(y_t|Y_{t-1}^0; \theta)$$

dove  $Y_{t-1}^0 = [y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, Y_0]$  e  $Y_0$  sono i valori iniziali. I due autori dimostrano che la probabilità condizionata  $P(y_t|Y_{t-1}^0)$  corrisponde al valore atteso di

---

un VAR non vincolato con  $p$  ritardi:

$$y_t = \mu_0 + \Pi_1 y_{t-1} + \dots + \Pi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T; \quad j = 1, \dots, p. \quad (1.11)$$

in cui l'intercetta  $\mu_0$  e i coefficienti angolari  $\Pi_j$  sono espressione della matrice delle varianze - covarianze e i residui hanno una distribuzione gaussiana con media pari a zero. In termini economici questo risultato richiama l'impostazione delle aspettative razionali, secondo la quale il valore atteso di una variabile al tempo  $t$ , condizionatamente a tutta l'informazione disponibile al tempo  $t-1$  può discostarsi dal valore effettivo soltanto occasionalmente per  $\varepsilon_t$ .

E' conveniente poi riformulare il VAR con una rappresentazione a medie mobili (MA), ottenendo così una rappresentazione speculare a quella autoregressiva che mette in risalto i processi stocastici attivati dagli *shock* che colpiscono il modello. Seguendo [Johansen et al. \[1995\]](#), si ha:

$$y_t = (I + C_1 L + C_2 L^2 + \dots)(\Phi D_t + \varepsilon_t) + Y^0 \quad t = 1, \dots, T \quad (1.12)$$

dove con  $Y^0$  si esprimono i valori iniziali di  $y_t$ ; con  $D_t$  la componente deterministica, mentre i vari  $C_j = f(\Pi_1, \dots, \Pi_p)$  sono il risultato di una formula ricorsiva.

Le caratteristiche dinamiche sottostanti al generico VAR non vincolato (1.11) sono sintetizzate nel relativo polinomio caratteristico:

$$\Pi(z) = (I - \Pi_1 z - \dots - \Pi_p z^p)$$

da cui discende che un VAR è stazionario se le radici caratteristiche sono esterne al cerchio unitario. Si parlerà, invece, di un processo non stazionario

---

---

quando sono presenti una o più radici caratteristiche unitarie: in questo caso, una o più variabili avranno uno o più trend stocastici e/o deterministici. Infine, qualora le radici caratteristiche fossero inferiori all'unità, si dirà che il VAR sarà caratterizzato da un processo esplosivo.

Un VAR si dice integrato di ordine  $d$ , I(d), se può essere reso stazionario attraverso un numero  $d$  di differenziazioni:

$$(1 - L)^d x_t = C(L)\varepsilon_t$$

con  $C_1 \neq 0$  e  $\varepsilon_t \sim IN(0, \Omega)$

Se poi le variabili di un VAR I(d) presentano uno o più *trend* stocastici in comune, tali che una loro combinazione lineare è caratterizzata da un ordine di integrazione inferiore a quello di partenza, si parla di relazioni di cointegrazione tra le variabili, CI(d,b), con  $d$  che esprime l'ordine di cointegrazione e  $b$  che identifica la riduzione dell'ordine di integrazione.

Analiticamente il concetto di cointegrazione tra le  $k$  componenti del VAR è di più immediata comprensione se si ricorre ad una riformulazione del VAR, nota come Modello di Correzione dell'Errore (*Vector Equilibrium Error Model*, VECM). Considerando due variabili,  $x_1$  e  $x_2$  e assumendo che  $x_1 = \beta_1 x_2$  e che la variazione prima di ciascuna variabile ( $\Delta x_{i,t}$ ) dipende dalla deviazione dell'equilibrio tra le due variabili, si ha [[Lütkepohl, 2005](#)]:

$$\Delta x_{1,t} = \alpha_1(x_{1,t-1} - \beta_1 x_{2,t-1}) + \varepsilon_{1,t}$$

$$\Delta x_{2,t} = \alpha_2(x_{1,t-1} - \beta_1 x_{2,t-1}) + \varepsilon_{2,t}$$

da cui discende che la variazione prima di ciascuna variabile ( $\Delta x_{i,t}$ ) è il risultato della correzione della deviazione dall'equilibrio tra di esse. Formulando il

---

tutto in forma vettoriale e generalizzando l'espressione per tener conto anche delle variazioni nei periodi precedenti, si ottiene:

$$\Delta x_t = \Gamma_1^m \Delta x_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1}^m \Delta x_{t-p+1} + \Pi x_{t-m} + \Phi D_t + \varepsilon_t \quad (1.13)$$

dove  $m$  è un numero intero che indica il ritardo del termine di correzione dell'equilibrio di lungo periodo ( $\Pi x_{t-m}$ ) e che può fornire una migliore specificazione del modello a seconda del valore scelto, senza tuttavia modificare il valore della funzione di verosimiglianza sottostante.  $\Pi = \alpha\beta'$ , dove  $\beta$  è la matrice di cointegrazione ( $k \times r$ ), con  $r$  pari al numero di relazioni di cointegrazione;  $\alpha$  è la matrice di carico (*loading*), sempre di ordine ( $k \times r$ );  $D_t$  è la componente deterministica. La formulazione di un VAR in termini di VECM ha soprattutto il vantaggio di distinguere gli effetti di lungo periodo da quelli di breve, concentrando i primi nel coefficiente della variabile in livello ritardata,  $\Pi = \alpha\beta'$ .

Per quanto riguarda la scelta del numero di ritardi da considerare all'interno del VAR si ricorre a diversi test. Il primo che si prende in considerazione è il test del Rapporto delle Verosimiglianze (LR), distribuito come una variabile  $\chi^2$ , con il quale si stima la massima verosimiglianza sia nell'ipotesi che il numero dei ritardi sia pari a  $p$  che in quella in cui sia pari a  $p + 1$  e assumendo che la lunghezza del campione sia identica in entrambi i casi e pari al numero di ritardi di lunghezza maggiore [Juselius, 2006]:

$$\tau_p = T(\ln|\widehat{\Omega}_p| - \ln|\widehat{\Omega}_{p+1}|)$$

dove  $|\widehat{\Omega}|$  è il determinante della matrice delle varianze - covarianze.

Altri test considerano, invece, versioni modificate del LR, inserendo delle penalità legate al numero di ritardi considerati. In particolare si considerano il criterio di Schwarz (SC); quello di Hannan-Quinn (H-Q) e quello di Akaike (AIC), per i

---

quali la scelta del ritardo ottimale viene fatta basandosi sui valori minori. Per ultimo, va ricordato che la bontà di questi criteri è legata ad una buona specificazione del modello. Ne consegue che, in presenza di valori anomali o cambiamenti strutturali è necessario procedere agli opportuni aggiustamenti nel modello prima di effettuare i test. Infine, tenendo conto che un VAR dovrebbe essere caratterizzato da una matrice dei residui incorrelati tra loro, si fa uso del test dei Moltiplicatori di Lagrange (LM), per verificare la bontà della specificazione del modello.

$$LM(J) = -[T - k(p + 1) - 0.5] \ln \left( \frac{|\widehat{\Omega}(j)|}{|\widehat{\Omega}|} \right)$$

dove con  $\widehat{\Omega}(j)$  si indica la covarianza con ritardo  $j$ .

### 1.2.1 I(1)

La formulazione di un VAR in termini di VECM (1.16) è estremamente utile quando le variabili oggetto di studio sono I(1) e questo accade spesso in economia quando le variabili sono espresse in termini reali [Juselius, 2006].

Si riprende quindi la (1.13) nel caso di un ritardo del termine di correzione dell'equilibrio di lungo periodo  $m = 1$ :

$$\Delta x_t = \Gamma_1 \Delta x_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta x_{t-p+1} + \alpha \beta' x_{t-1} + \Phi D_t + \varepsilon_t \quad (1.14)$$

e si osserva innanzitutto che affinché si abbia coerenza all'interno della (1.14) occorre che le componenti a destra e sinistra del segno di uguale abbiano lo stesso ordine di integrazione. Poiché si assume che le  $x_t$  siano integrate di ordine uno, I(1), e le loro variazioni prime  $\Delta x_t$  siano stazionarie, I(0), ciò è possibile solo se:

---


$$\Pi = \alpha\beta' \tag{1.15}$$

è pari a zero o ha rango non pieno ( $r < k$ ) e cioè che esistano  $r$  relazioni di cointegrazione. Ne consegue che il caso di rango pieno ( $r = k$ ) è ammissibile solo quando tutte le variabili sono stazionarie mentre quello di rango nullo ( $r = 0$ ) si realizza quando il numero di *trend* stocastici indipendenti  $s_1$  è pari al numero delle variabili  $k$ , con la possibilità di riformulare il VAR in livelli (1.11) in termini di variazioni prime, senza che questo comporti una perdita d'informazione.

Riscrivendo poi la (1.14) in forma compatta:

$$z_{0,t} = \alpha\beta' z_{1,t} + \Psi z_{2,t} + \varepsilon_t \tag{1.16}$$

con  $\Psi = [\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{p-1}, \Phi]$  e

$$z_{0,t} = \Delta x_t$$

$$z_{1,t} = x_{t-1}$$

$$z_{2,t} = [\Delta x'_{t-1}, \Delta x'_{t-2}, \dots, \Delta x'_{t-p+1}, D'_t]$$

è poi possibile giungere, attraverso il ricorso al Teorema di Frish-Waugh, a una formulazione della (1.14), nota come versione ridotta del modello  $\mathbf{R}$  [Anderson et al., 1951], che escludendo gli effetti di breve periodo, permette di focalizzarsi su quelli di lungo periodo:

$$R_{0,t} = \alpha\beta' R_{1,t} + \varepsilon_t \tag{1.17}$$


---

---

con  $R_{0,t}$  e  $R_{1,t}$  definiti da:

$$\begin{aligned} z_{0,t} &= \widehat{B}_1 z_{2,t} + R_{0,t} \\ z_{1,t} &= \widehat{B}_2 z_{2,t} + R_{1,t} \end{aligned}$$

dove  $\widehat{B}_1 = M_{02}M_{22}^{-1}$  e  $\widehat{B}_2 = M_{12}M_{22}^{-1}$  sono le stime dei parametri ottenute con il metodo della Massima Verosimiglianza e  $M_{ij} = \Sigma_t(z_{i,t}z'_{j,t})/T$  sono le stime delle varianze - covarianze.

Della (1.16), dopo aver estrapolato l'eventuale radice unitaria, è possibile dare la rappresentazione a medie mobili:

$$x_t = C_1 \sum_{s=1}^i \varepsilon_s + C_1 \mu t + C^*(L)\varepsilon_t + \tilde{X}_0 \quad (1.18)$$

che permette di descrivere  $x_t$  come la combinazione di una componente integrata di ordine uno,  $C_1 \sum_{s=1}^i \varepsilon_s$ , di una componente integrata di ordine zero,  $C^*(L)\varepsilon_t$ , di una componente deterministica,  $C_1 \mu t$ , e di un valore iniziale  $\tilde{X}_0 = x_0 - C^*(L)\varepsilon_0$ . Il ricorso al Teorema della Rappresentazione di Granger [Johansen et al., 1995], con la relativa suddivisione dello spazio vettoriale di  $\Pi$ ,  $sp(R^k)$ , nello spazio  $sp(\beta_\perp)$  e nello spazio  $sp(\alpha)$ , rende poi possibile esprimere la matrice  $C_1$  come:

$$C_1 = \beta_\perp (\alpha'_\perp \Gamma \beta_\perp)^{-1} \alpha'_\perp = \check{\beta}_\perp \alpha'_\perp \quad (1.19)$$

dove  $\Gamma = (I - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_{p-1})$  e  $\alpha_\perp$  e  $\beta_\perp$  sono i complementi ortogonali di  $\alpha$  e  $\beta$ .

Ne deriva che i *trend* stocastici della (1.18) possono essere interpretati come

---

funzione della matrice  $\alpha'_\perp$  e di una matrice di carico (*loading*)  $\check{\beta}_\perp$ . Questa lettura è diametralmente opposta a quella fatta per il VECM, in cui l'equilibrio di lungo periodo è funzione della matrice  $\beta$ , mentre  $\alpha$  rappresenta la matrice di carico.

Il metodo della Massima Verosimiglianza è anche alla base del test della Traccia [Johansen et al., 1995], utilizzato per la scelta del numero di relazioni di cointegrazioni ( $r$ ) e di *trend* stocastici ( $s_1$ ) della versione ridotta del modello  $\mathbf{R}$  (1.16). Si richiama in primo luogo la funzione di Massima Verosimiglianza:

$$-2\ln L(\beta) = T\ln|\Sigma_{00}| + T \sum_{i=1}^k \ln(1 - \lambda_i)$$

dove  $|\Sigma_{00}|$  è il determinante della matrice delle varianze e i  $\lambda_i$  sono gli autovalori che discendono dalla soluzione del determinante:

$$|\lambda S_{11} - S_{01}S_{00}^{-1}S_{10}| = 0$$

in cui le  $S_{ij} = T^{-1}\sum_t R_{i,t}R'_{j,t}$ .

Dato che la

$$diag(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_r) = \hat{\beta}'S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}\hat{\beta} = \hat{\alpha}'S_{00}^{-1}\hat{\alpha}$$

ne deriva che il legame tra gli autovalori e gli autovettori fa sì che tanto minore è il valore di  $\lambda_i$  tanto minore è la stazionarietà della relativa relazione di cointegrazione  $\beta_i x_t$  [Juselius, 2006]. Il fatto poi che, quando  $\lambda_i = 0$ , la funzione di verosimiglianza non cambia di valore dà lo spunto per calcolare il numero di relazioni di cointegrazione ( $r$ ) come Rapporto di Massima Verosimiglianza (*Likelihood*

---

Ratio, LR) nelle ipotesi:

- $\mathcal{H}_k : r = k$ ; le  $x_t$  sono tutte stazionarie;
- $\mathcal{H}_r : r < K$ ; ci sono  $(k - r)$  radici unitarie;

dove  $\mathcal{H}_r$  è l'ipotesi nulla. Il LR test ( $\tau_{k-r}$ ) è quindi a pari a:

$$\tau_{k-r} = T \ln \left[ \frac{|S_{00}|(1 - \hat{\lambda}_1)(1 - \hat{\lambda}_2) \cdots (1 - \hat{\lambda}_r)}{|S_{00}|(1 - \hat{\lambda}_1)(1 - \hat{\lambda}_2) \cdots (1 - \hat{\lambda}_r) \cdots (1 - \hat{\lambda}_k)} \right]$$

che si semplifica in:

$$\tau_{k-r} = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r+1}) \cdots (1 - \hat{\lambda}_k).$$

Se il valore di  $\tau_{k-r}$  è inferiore al corrispettivo valore critico  $V_{k-r}$  non si respinge l'ipotesi di un numero di relazioni di cointegrazione pari ad  $r$ . Va notato però che la caratteristica di  $\lambda_i$  di essere uguale a zero nei casi di radici unitarie porta ad accettare  $\tau_{k-r}$  anche nei casi in cui il numero di relazioni di cointegrazione è inferiore ad  $r$  [Juselius, 2006]. Da cui segue che non respingendo  $\tau_{k-r}$  si può soltanto affermare che il numero delle relazioni di cointegrazione è al massimo pari ad  $r$  e il numero dei *trend* stocastici  $s_1$  è almeno pari a  $(k - r)$ .

Per individuare l'esatto numero di relazioni di cointegrazione si può procedere attraverso la verifica di una sequenza di ipotesi, iniziando da quella che prevede il calcolo del LR test per il massimo numero di radici unitarie ( $k = s_1$ ). Se tale ipotesi non viene accettata, significa che l'autovalore  $\lambda_1 > 0$ , per cui si passa a considerare l'ipotesi successiva di un numero di radici unitarie  $s_1 = (k - 1)$  e

---

$\lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ . Si procede in questo modo fino a che si raggiunge l'ipotesi che non viene respinta.

Infine va ricordato che il test della Traccia è caratterizzato da una distribuzione non standard e che varia con l'introduzione di *dummy* nel modello, ciò induce a ricorrere al metodo Monte Carlo e/o a quello di *Bootstrapping* per il calcolo della sua distribuzione [Doornik and Juselius, 2017].

La validità del numero di relazioni di cointegrazione ( $r$ ) scelte viene verificata considerando:

- se tra le radici caratteristiche non vi sono valori prossimi all'unità;
- se la maggioranza dei coefficienti della matrice  $\alpha$  è significativa;
- se il grafico ricorsivo della statistica  $-T \ln(1 - \lambda_i)$ , ha un andamento lineare crescente per  $i = 1, \dots, r$  e diviene costante per  $i = r + 1, \dots, k$ ;
- se i grafici delle relazioni di cointegrazione nelle versioni  $\beta' x_t$  e in quella  $\mathbf{R}$  sono stazionarie.

### 1.2.2 I(2)

Quando le variabili oggetto di studio sono espresse in termini nominali, non è difficile imbattersi in processi I(2), cioè in variabili che richiedono di essere differenziate due volte per poter essere trasformate in I(0). In questi casi è conveniente esprimere il VAR in termini di accelerazioni, in modo da tenere conto oltre che degli aggiustamenti delle variabili anche della velocità con cui questi si realizzano [Juselius, 2006]:

$$\Delta^2 x_t = \Pi x_{t-1} - \Gamma \Delta x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-2} \Psi_i \Delta^2 x_{t-i} + \Phi D_t + \mu_0 + \mu_1 t + \varepsilon_t \quad (1.20)$$

---

dove  $x_t = [x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{k,t}]'$ ;  $D_t$  è una matrice di termini deterministici;  $\Phi, \Pi, \Gamma$  sono matrici di coefficienti ( $k \times k$ );  $\mu_0$  è una costante senza vincoli;  $t$  è un *trend* non vincolato con coefficiente  $\mu_1$ ;  $\varepsilon_t$  è un Rumore Bianco Multivariato (*White Noise Multivariato*, WNM).

In realtà anche in presenza di variabili I(2), a volte, è possibile continuare ad adottare una trattazione I(1) se si introducono un numero sufficiente di termini deterministici che permettono di eliminare la componente I(2) [Juselius, 2006]. In questo caso però, al di là della differente capacità di interpretazione dei dati da parte dei due approcci, la questione è se i cambiamenti economici che avvengono nell'arco temporale considerato e di cui il modello deve tener conto danno luogo a processi I(2) deterministici, e quindi prevedibili, oppure stocastici, e perciò imprevedibili. In quest'ultimo caso è più che mai opportuno procedere con un modello I(2), in grado di spiegare in maniera più dettagliata gli aggiustamenti che avvengono nel medio, lungo periodo. Fanno eccezione i cambiamenti strutturali, quali ad esempio la creazione dell'euro, di cui si dovrà tenere conto attraverso l'inserimento di opportune *dummy*.

Dell'equazione (1.20), attraverso il teorema di Frisch-Waugh, è possibile giungere alla forma ridotta del modello  $\mathbf{R}$ , con la quale si è in grado di escludere gli effetti indiretti delle variabili di breve periodo:

$$R_{0,t} = \Gamma R_{1,t} + \Pi R_{2,t} + \Phi D_t + \mu_0 + \mu_1 t + \varepsilon_t \quad (1.21)$$

dove  $R_{0,t}$ ,  $R_{1,t}$  e  $R_{2,t}$  sono definiti da:

---


$$\begin{aligned}\Delta^2 x_t &= \widehat{B}_1 \Delta^2 x_{t-1} + \widehat{B}_2 D_{tr,t} + R_{0,t} \\ \Delta \tilde{x}_{t-1} &= \widehat{B}_3 \Delta^2 x_{t-1} + \widehat{B}_4 D_{tr,t} + R_{1,t} \\ \tilde{x}_{t-1} &= \widehat{B}_5 \Delta^2 x_{t-1} + \widehat{B}_6 D_{tr,t} + R_{2,t}\end{aligned}$$

con  $\tilde{x}_t$  pari a  $x_t$  più alcune componenti deterministiche, mentre con  $D_{tr,t}$  si identificano le *dummy* transitorie.

La risoluzione della (1.21) richiede che sia soddisfatta, accanto alla condizione di rango non pieno di  $\Pi = \alpha\beta'$  [Johansen et al., 1995], per la presenza di radici unitarie nelle serie in livelli, anche la seguente condizione [Johansen, 1992], per il persistere di radici unitarie nelle variabili alle differenze prime:

$$\alpha'_\perp \Gamma \beta_\perp = \xi \eta' \tag{1.22}$$

dove  $\alpha_\perp$  e  $\beta_\perp$  sono le matrici complementari ortogonali di  $\alpha$  e  $\beta$ ;  $\xi$  e  $\eta$  sono matrici  $(k-r) \times s_1$ ;  $s_1$  è il numero di trend I(1) e  $s_2 = (k-r-s_1)$  è il numero di trend I(2).

È da notare che la seconda condizione, a differenza della prima, considera una trasformazione della matrice dei coefficienti  $\Gamma$ , che permette di ridurre la dimensione del modello a  $(k-r)$ , concentrando così l'attenzione sui soli trend stocastici e non più sulle  $k$  variabili.

All'equazione (1.20) è possibile associare anche la rappresentazione MA [Johansen et al., 1995]:

---


$$\begin{aligned}
x_t = & C_2 \sum_{i=1}^t \sum_{s=1}^i (\varepsilon_s + \Phi D_s + \mu_0 + \mu_1 s) + C_1 \sum_{i=1}^t (\varepsilon_i + \Phi D_i + \mu_0 + \mu_1 i) \\
& + C^*(L)(\varepsilon_t + \Phi D_t + \mu_0 + \mu_1 t) + A + Bt
\end{aligned} \tag{1.23}$$

dove:

- $C_2 = \beta_{\perp 2}(\alpha'_{\perp 2} \Psi \beta_{\perp 2})^{-1} \alpha'_{\perp 2} = \check{\beta}_{\perp 2} \alpha'_{\perp 2}$ ;  $\check{\beta}_{\perp 2} = \beta_{\perp 2}(\alpha'_{\perp 2} \Psi \beta_{\perp 2})^{-1}$ ;
- $\alpha'_{\perp 2} \sum_{i=1}^t \sum_{s=1}^i \varepsilon_s$  esprime gli  $s_2$  *trend* stocastici di ordine I(2), con pesi  $\check{\beta}_{\perp 2}$ ;
- $\beta' C_1 = \bar{\alpha} \Gamma C_2$ ;  $\beta'_{\perp 1} C_1 = \bar{\alpha}'_{\perp 1} (I_p - \Psi C_2)$ ;  $\Psi = \Gamma \bar{\beta} \bar{\alpha}' \Gamma + I - \Gamma_1$ ;
- A e B sono due grandezze funzione dei valori iniziali e dei parametri del modello

Dalla (1.23) risulta più chiara la necessità di introdurre dei vincoli, se si vuole evitare la comparsa di *trend* quadratici o cubici, non spiegabili da un punto di vista economico. Ad esempio, suddividendo la costante  $\mu_0$  nelle componenti relative allo spazio vettoriale  $\beta$ ,  $\beta_{\perp 1}$  e  $\beta_{\perp 2}$ , con  $\beta_{\perp} = [\beta_{\perp 1}, \beta_{\perp 2}]$ , si ha:

$$\mu_0 = \alpha \gamma_0 + \alpha_{\perp 1} \gamma_1 + \alpha_{\perp 2} \gamma_2$$

e limitando l'attenzione alla sola componente  $C_2$  della (1.23), relativa ai *trend* stocastici I(2):

$$C_2 \sum_{i=1}^t \sum_{s=1}^i \mu_0 = \check{\beta}_{\perp 2} \alpha'_{\perp 2} (\alpha \gamma_0 + \alpha_{\perp 1} \gamma_1 + \alpha_{\perp 2} \gamma_2) = \check{\beta}_{\perp 2} \alpha'_{\perp 2} \alpha_{\perp 2} \gamma_2 (t(t-1)/2)$$

---

si osserva che la costante  $\mu_0$  è in grado di generare un *trend* quadratico, a meno che non si inseriscono dei vincoli. Un discorso simile può essere fatto per la componente  $C_1$  e per il *trend* deterministico  $\mu_1$ .

Di questi vincoli tiene conto Johansen [1997] attraverso una riformulazione della (1.20), nella quale limitando gli eventuali *trend* ad essere spiegati all'interno della matrice di cointegrazione permette ai parametri di variare liberamente. Questa ultima formulazione è stata successivamente perfezionata [Paruolo and Rahbek, 1999] escludendo dal polinomio di cointegrazione quelle variabili che è possibile trasformare in  $I(0)$  attraverso la differenziazione prima. Qui di seguito si riporta soltanto quest'ultima versione:

$$\Delta^2 x_t = \alpha(\rho'\tau'x_{t-1} + d'\Delta x_{t-1}) + \zeta'\tau'\Delta x_{t-1} + \Phi D_t + \varepsilon_t \quad (1.24)$$

dove:

- $\rho = [I, 0]'$ ;  $\tau = [\beta, \beta_{\perp 1}]$ ;  $\zeta = [\zeta_1, \zeta_2]$ ;  $d' = (\bar{\alpha}'\Gamma\bar{\beta}_{\perp 2}\beta'_{\perp 2})$ ;
- $\zeta'\tau = (\Gamma\bar{\beta})\beta' + (\alpha\bar{\alpha}'\Gamma\beta_{\perp 1} + \alpha_{\perp 1})\beta'_{\perp 1}$ ;  $\bar{\alpha} = \alpha_{\perp}(\alpha'_{\perp}\alpha_{\perp})^{-1}$ ;  $\bar{\beta} = \beta_{\perp}(\beta'_{\perp}\beta_{\perp})^{-1}$

La lettura della (1.24) è la seguente: i termini contenuti all'interno della parentesi costituiscono il polinomio di cointegrazione, attraverso il quale le variabili  $I(2)$  vengono trasformate in  $I(0)$ . La prima delle sue componenti è la matrice di cointegrazione  $\rho'\tau'x_{t-1} = \beta'x_{t-1}$ , che descrive l'equilibrio di lungo periodo. Questa, a seconda dei casi, può comprendere sia relazioni di cointegrazione  $CI(2,2)$ , cioè con le quali è possibile passare da un ordine di integrazione  $I(2)$  a un ordine  $I(0)$ , sia relazioni di cointegrazione  $CI(2,1)$ , cioè delle combinazioni lineari di variabili mediante le quali è possibile ridurre l'ordine di integrazione da  $I(2)$  a  $I(1)$ . L'individuazione delle relazioni di cointegrazione  $C(2,2)$  è possibile solo se il numero di relazioni di cointegrazione è superiore a quello dei *trend* stocastici di secondo

---

ordine ( $r > s_2$ ). La seconda componente dei termini tra parentesi è  $d' \Delta x_{t-1}$  e rappresenta l'aggiustamento dinamico di lungo periodo all'errore generato dai vettori di cointegrazione  $\beta' x_{t-1}$ . La componente  $\zeta' \tau' \Delta x_{t-1}$ , invece, esprime gli aggiustamenti di medio periodo, mentre  $\alpha$  rappresenta la velocità degli aggiustamenti all'equilibrio di lungo periodo.

Concettualmente, l'adozione della equazione (1.24) permette di suddividere lo spazio vettoriale in due parti:

- la prima, costituita da  $\tau = [\beta, \beta_{\perp 1}]$ , cioè dalle componenti I(1), rappresentate dalle relazioni di cointegrazione  $\beta' x_{t-1}$  e dalle  $s_1$  relazioni  $\beta_{\perp 1} x_{t-1}$ , che possono diventare I(0) solo attraverso la differenziazione prima delle variabili  $x_{t-1}$ .
- la seconda, rappresentata da  $\beta_{\perp 2}$ , cioè dagli  $s_2$  trend stocastici I(2).

Il legame tra le equazioni (1.20) e (1.24) può essere sintetizzato osservando come la nuova formulazione permette di suddividere la matrice  $\Gamma$  in tre componenti:

$$\Gamma = (\Gamma \bar{\beta}) \beta' + (\alpha \bar{\alpha}' \Gamma \bar{\beta}_{\perp 1} + \alpha_{\perp 1}) \beta'_{\perp 1} + (\alpha \bar{\alpha}' \Gamma \bar{\beta}_{\perp 2}) \beta'_{\perp 2} \quad (1.25)$$

di cui le prime due componenti coincidono con i coefficienti dell'aggiustamento di medio periodo:

$$\zeta' \tau \Delta x_{t-1} = (\Gamma \bar{\beta}) \beta' \Delta x_{t-1} + (\alpha \bar{\alpha}' \Gamma \beta_{\perp 1} + \alpha_{\perp 1}) \beta_{\perp 1} \Delta x_{t-1}$$

e la terza componente corrisponde all'aggiustamento dell'equilibrio di lungo periodo:

---


$$d' \Delta x_{t-1} = (\alpha \bar{\alpha}' \Gamma \bar{\beta}_{\perp 2}) \beta'_{\perp 2} \Delta x_{t-1}$$

Quali siano le variabili che producono un allontanamento dall'equilibrio di lungo periodo (*equilibrium error-increasing*) e quali un avvicinamento (*equilibrium error-correcting*) può essere stabilito seguendo le seguenti regole:

- se  $d_{ij} \beta_{ij} > 0$  (dato  $\alpha_{ij} \neq 0$ ),  $\Delta x_{i,t}$  è *equilibrium error-correcting* di  $\beta'_j x_{i,t}$ ;
- se  $\zeta_{ij} \tau_{ij} < 0$ ,  $\Delta^2 x_{i,t}$  è *equilibrium error-correcting* di  $\Delta x_{i,t}$ ;
- se  $\alpha_{ij} \beta_{ij} < 0$  e/o  $\alpha_{ij} d_{ij} < 0$ , il tasso di accelerazione  $\Delta^2 x_{i,t}$  è *equilibrium error-correcting* di  $(\beta'_j x_{i,t} + d'_j \Delta x_{i,t})$ ;
- In tutti gli altri casi il modello è *error-increasing*.

La stima del modello I(2) avviene attraverso FIML [Johansen, 1997], utilizzando una procedura iterativa che ad ogni passo stima una volta la componente  $\tau = [\beta, \beta_{\perp 1}]$  e una volta la componente  $\beta_{\perp 2}$ . Il metodo della Massima Verosimiglianza è anche alla base del test della Traccia [Nielsen and Rahbek, 2007], nel quale l'individuazione del numero delle relazioni di cointegrazione ( $r$ ) e di trend stocastici I(1) e I(2) ( $s_1, s_2$ ) avviene considerando simultaneamente tutte le loro possibili combinazioni. Questo dà vita ad una tabella (3.4) che può essere letta partendo dall'alto a sinistra, in cui il numero delle relazioni di cointegrazione è pari a zero e il numero di *trend* stocastici I(2) è pari al numero di variabili considerate ( $r = 0, s_1 = 0, s_2 = k$ ). Si procede poi verso destra, riga dopo riga, fino a che si giunge ad una combinazione di relazioni di cointegrazione, *trend* stocastici I(1) e I(2) che non è respinta in termini di p-value. L'interpretazione del test della Traccia (*Trace test*) può anche iniziare dall'ultimo valore in basso a destra ( $r = k - 1, s_1 = 1, s_2 = 0$ ), in cui il numero di relazioni di cointegrazione è  $(k - 1)$

---

e vi è un unico *trend* stocastico I(1). Si procede poi a ritroso verso sinistra, riga dopo riga, fino a giungere all'ultima combinazione di relazioni di cointegrazione e *trend* stocastici che non è respinta in termini di p-value. È da notare che i due approcci non necessariamente portano allo stesso risultato [Nielsen and Rahbek, 2007]. Inoltre, in presenza di variabili esogene, *dummy* e *trend* deterministici, si può registrare un cambiamento della distribuzione asintotica del LR test. In questi casi è necessario ricalcolare la distribuzione asintotica del LR test, con i relativi valori critici, o procedere all'impiego di tecniche Montecarlo e/o *Bootstrapping*.

La bontà della scelta effettuata attraverso il *test* della Traccia viene verificata in primo luogo attraverso l'analisi del modulo delle radici caratteristiche: la presenza di valori prossimi all'unità è sintomo dell'esistenza di ulteriori radici unitarie all'interno delle variabili alle differenze prime. Un'altra verifica che può essere fatta riguarda il confronto grafico tra i corrispettivi polinomi di cointegrazione  $(\beta'x_{t-1} + \delta'\Delta x_{t-1})$  della (1.20) e quelli  $(\beta'R_{2,t} + \delta'R_{1,t})$  della (1.21). Se tutti sono caratterizzate dall'assenza di *trend*, si potrà dire di avere considerato tutte le radici unitarie.

In taluni casi si ha la possibilità di considerare un modello I(2) come se fosse un modello I(1), con la conseguenza di una trattazione notevolmente semplificata (1.16) e senza che questo porti ad una perdita rilevante di informazioni sul fenomeno. Ciò accade quando, attraverso opportune combinazioni delle variabili del modello I(2), è possibile passare ad un modello contenente solo variabili I(1). Questo è quello che succede, ad esempio, quando l'omogeneità di lungo periodo di alcune variabili permette di passare da un modello espresso in termini nominali ad uno espresso in termini reali.

Nello specifico, considerando un modello in cui il logaritmo dell'indice dei prezzi interni  $p_{d,t}$ , esteri  $p_{f,t}$  e il tasso di cambio  $s_t$  siano integrati di ordine due, mentre i tassi di interesse interni  $i_{d,t}$  ed esteri  $i_{f,t}$  siano integrati di ordine uno, è possibile passare dal modello:

---


$$x'_t = [p_{d,t}, p_{f,t}, s_t, i_{d,t}, i_{f,t}]$$

al modello:

$$\tilde{x}'_t = [q_t, \Delta p_{d,t}, \Delta p_{f,t}, i_{d,t}, i_{f,t}]$$

oppure al modello:

$$\bar{x}'_t = [ppp_t, \Delta p_{d,t}, \Delta s_t, i_{d,t}, i_{f,t}]$$

se il logaritmo della PPP ( $ppp = p_{d,t} - p_{f,t}$ ), il logaritmo del tasso di cambio reale ( $q_t = s_t - ppp$ ) e le differenze prime dei prezzi interni ( $\Delta p_{d,t}$ ) ed esteri ( $\Delta p_{f,t}$ ) sono tutti processi I(1).

La verifica che il modello sia caratterizzato da processi riconducibili a degli I(1) avviene attraverso i LR test sui rispettivi coefficienti  $\beta$ . Nel caso in cui l'ipotesi di omogeneità di lungo periodo non venga accettata non è possibile passare ad una trattazione I(1). Allo stesso tempo, il non rifiuto della omogeneità dei coefficienti  $\beta$  è soltanto una condizione necessaria, ma non sufficiente, per poter passare a un modello I(1), dato che in un contesto I(2) la suddivisione dello spazio vettoriale in  $\tau = (\beta, \beta_{\perp 1})$  e  $\tau_{\perp} = \beta_{\perp 2}$  richiede che l'omogeneità sia soddisfatta anche rispetto all'altra componente di  $\tau$ ,  $\beta_{\perp 1}$ , la quale però avendo una distribuzione asintotica diversa da  $\beta$ , non può essere stimata simultaneamente a quest'ultima. Nel caso in cui l'omogeneità di lungo periodo non sia soddisfatta, se ne possono ricercare i motivi analizzando la matrice dei coefficienti  $\Pi = \alpha\beta'$  del vettore delle variabili in livello, mentre le informazioni sulla omogeneità di medio periodo sono legate alla matrice dei coefficienti  $\Gamma$  (1.25) delle variazioni prime delle variabili.

Se è lecito considerare la possibilità di utilizzare un modello I(1) per spiegare un modello I(2), ci si chiede anche se sia opportuno impiegare un modello I(2)

---

quando, viceversa, il modello è I(1) con radici prossime all'unità, cioè un modello quasi-I(2) [Johansen et al., 2010]. Formalmente si parla di un modello quasi-I(2) quando vengono soddisfatte le seguenti condizioni:

- rango ridotto della (1.15);
- invertibilità della matrice (1.22), con alcune delle sue radici caratteristiche prossime all'unità.

Juselius [2014] mostra come simulando un modello I(2) e un modello quasi-I(2) con un coefficiente di autocorrelazione  $\rho = 0.95$  e un rapporto segnale/errore, identico per entrambi i processi,  $\sigma_{\varepsilon_\beta}^2 / \sigma_{\varepsilon_s}^2 = 0.15$ , per un campione di dati mensili che copre un arco di quaranta anni, si ha che le due serie divergono soltanto nella parte finale. Ciò spinge a ritenere la rappresentazione di un modello quasi-I(2) tramite un modello I(2) sia una valida opzione anche per la sua capacità di descrivere le persistenze nel medio periodo in maniera più articolata di quello che faccia un modello I(1).

Di Iorio et al. [2016] attraverso un processo di simulazione Monte Carlo, dimostrano che anche in presenza di campioni finiti le stime dei parametri  $\Pi = \alpha\beta'$  di un modello quasi-I(2), ottenute ricorrendo all'impiego di un modello I(2) risultano superiori a quelle che si hanno impiegando un modello I(1).

# Capitolo 2

## Analisi Grafica

Sebbene molti dei dati a nostra disposizione risalgano ai primi anni 70, il fatto che il tasso di cambio australiano non sia stato completamente libero di variare fino al 1983, unito alla difficoltà di reperire per l'intero periodo i dati per i prezzi delle materie prime australiane e per gli indici di borsa, spingono a considerare un lasso di tempo che va dal secondo trimestre del 1985 al quarto trimestre del 2018.

Le variabili analizzate sono il logaritmo dell'indice dei prezzi australiani ( $P_{au,t}$ ) e quello degli USA ( $P_{us,t}$ ); il logaritmo dell'indice dei prezzi delle materie prime australiane ( $P_{co,t}$ ); i tassi di interesse governativi a 10 anni australiani ( $b_{au,t}$ ) e statunitensi ( $b_{us,t}$ ); i tassi di interesse a 3 mesi australiani ( $i_{au,t}$ ) e i corrispettivi USA ( $i_{us,t}$ ); il logaritmo dell'indice di borsa statunitense Standard and Poor's ( $S\&P$ ) e dell'indice di borsa dei prodotti industriali australiani ( $MX$ ).

Sono state introdotte tre variabili stagionali centrate e cinque *dummy*, in modo da tener conto di alcuni dati anomali (*outliers*). In particolare, per la crisi finanziaria del 2008 è stata introdotta una *dummy* impulso (2008:1) e una transitoria (2008:4); per quella del 1987 è stata inserita una *dummy* transitoria (1987:4); in fine è stata aggiunta una *dummy* transitoria (1986:2) per tener conto dell'aumento dei tassi di interesse da parte della Banca Centrale Australiana, adottato per prevenire un possibile incremento dell'inflazione da beni di importazione dovuto alla repentina caduta del dollaro australiano. I dati ex post anomali non spiegati, per

---

mancanza di gradi di libertà, riguardano i tassi di interesse australiani (1987:2); quelli americani (2001:1) e i prezzi australiani (1990:4 e 2000:3). I dati sugli indici di borsa provengono da Bloomberg, mentre i dati sulle altre variabili provengono dalle Banche Centrali dei due paesi e sono stati ottenuti per mezzo della banca dati Datastream.

Il primo passo è quello di valutare l'andamento delle variabili e delle loro variazioni. Dal secondo grafico in alto della Figura (2.1) emerge una significativa riduzione del valore medio dell'inflazione australiana in corrispondenza dell'adozione della politica monetaria di *Inflation Targeting* nel 1993 [Macfarlane, 1997], in maniera simile a quanto già accaduto negli Stati Uniti intorno alla metà degli anni '80. Sempre con riferimento all'inflazione australiana si osserva un picco nel terzo trimestre del 2000 in concomitanza con l'introduzione di una tassa del dieci per cento sui beni e servizi [Debelle et al., 2018]. Il grafico relativo all'inflazione statunitense mostra invece una forte oscillazione in occasione della crisi finanziaria del 2008. Il grafico dell'indice dei prezzi delle materie prime australiane registra una crescita significativa a partire dai primi anni 2000, dovuta principalmente alla forte domanda proveniente dalla Cina <sup>1</sup>. In ultimo il grafico relativo all'inflazione dell'indice dei prezzi delle materie prime evidenzia un aumento della varianza negli anni successivi alla crisi finanziaria del 2008.

---

<sup>1</sup>Nel 2000 le esportazioni di materie prime australiane verso la Cina ammontavano a 1.2 miliardi di AU\$, pari al 18 per cento del totale delle esportazioni complessive verso la Cina; nel 2013 il valore delle esportazioni di materie prime australiane verso la Cina raggiungeva i 57 miliardi di AU\$, pari al 57 per cento del totale delle esportazioni. (Australian Trade Commission (2015): How dependent are Australian exports on China?)

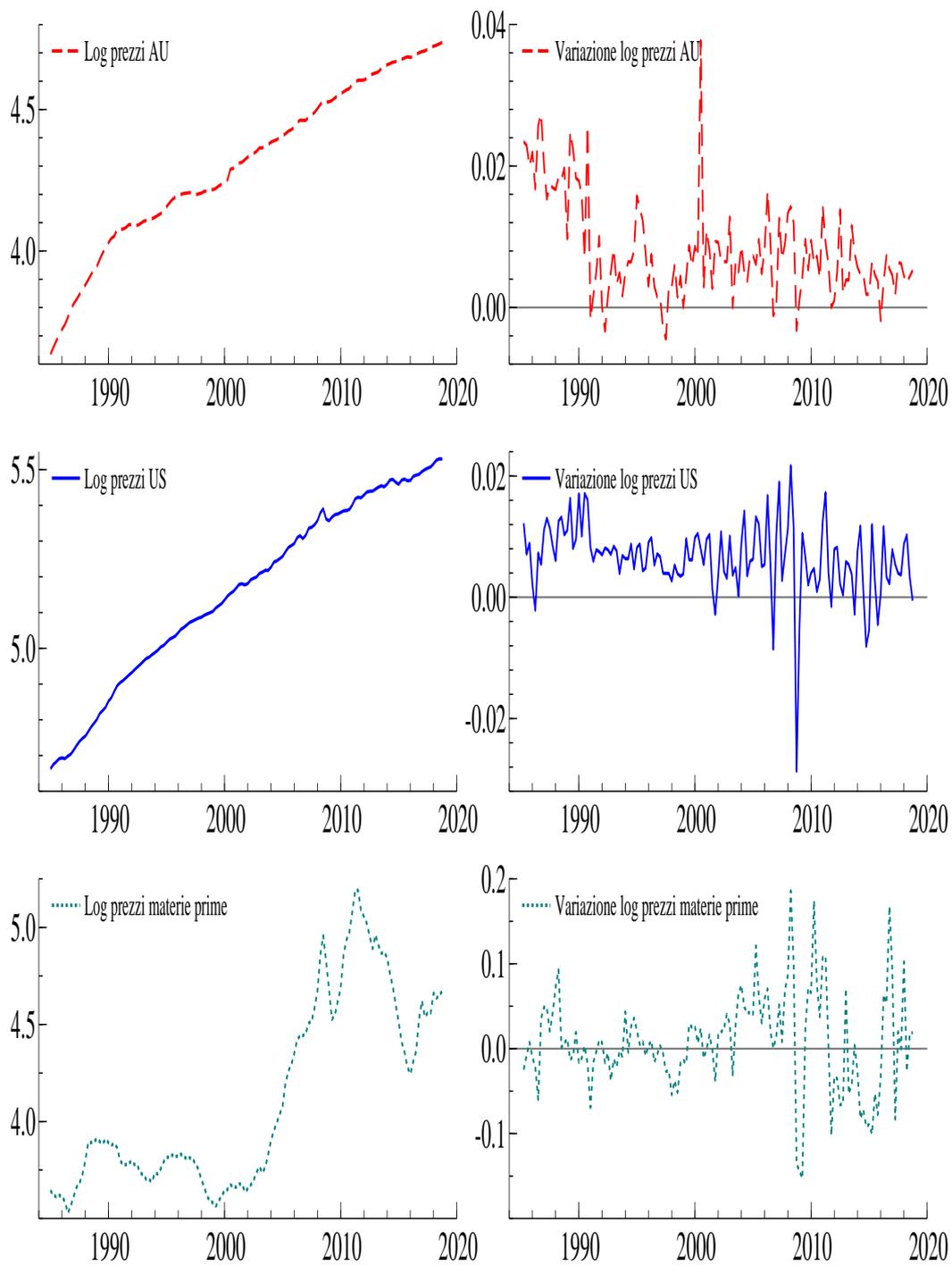


Figura 2.1: In alto e al centro i log dei prezzi dei beni americani, australiani e le loro variazioni. In basso, il log dei prezzi delle materie prime australiane e le loro variazioni.

---

La Figura (2.2) mostra l'andamento dei tassi di interesse a lunga e a breve di Australia e Stati Uniti e le loro rispettive variazioni prime. Ciò che emerge da un primo sguardo è una tendenza di tutti i tassi di interesse a diminuire nel tempo - chiaramente l'evoluzione dei tassi di interesse a breve è più frastagliata. Diminuzioni significative, riguardanti sia l'Australia che gli Stati Uniti, si sono avute poi in concomitanza con le crisi finanziarie che hanno colpito i mercati mondiali nel 1987, nel 1997, nel 2001 e nel 2008. Inoltre è da notare che la varianza dei tassi di interesse a dieci anni e, soprattutto, di quella dei tassi di interesse a tre mesi dell'Australia si è ridotta sensibilmente a partire della seconda metà degli anni '90.

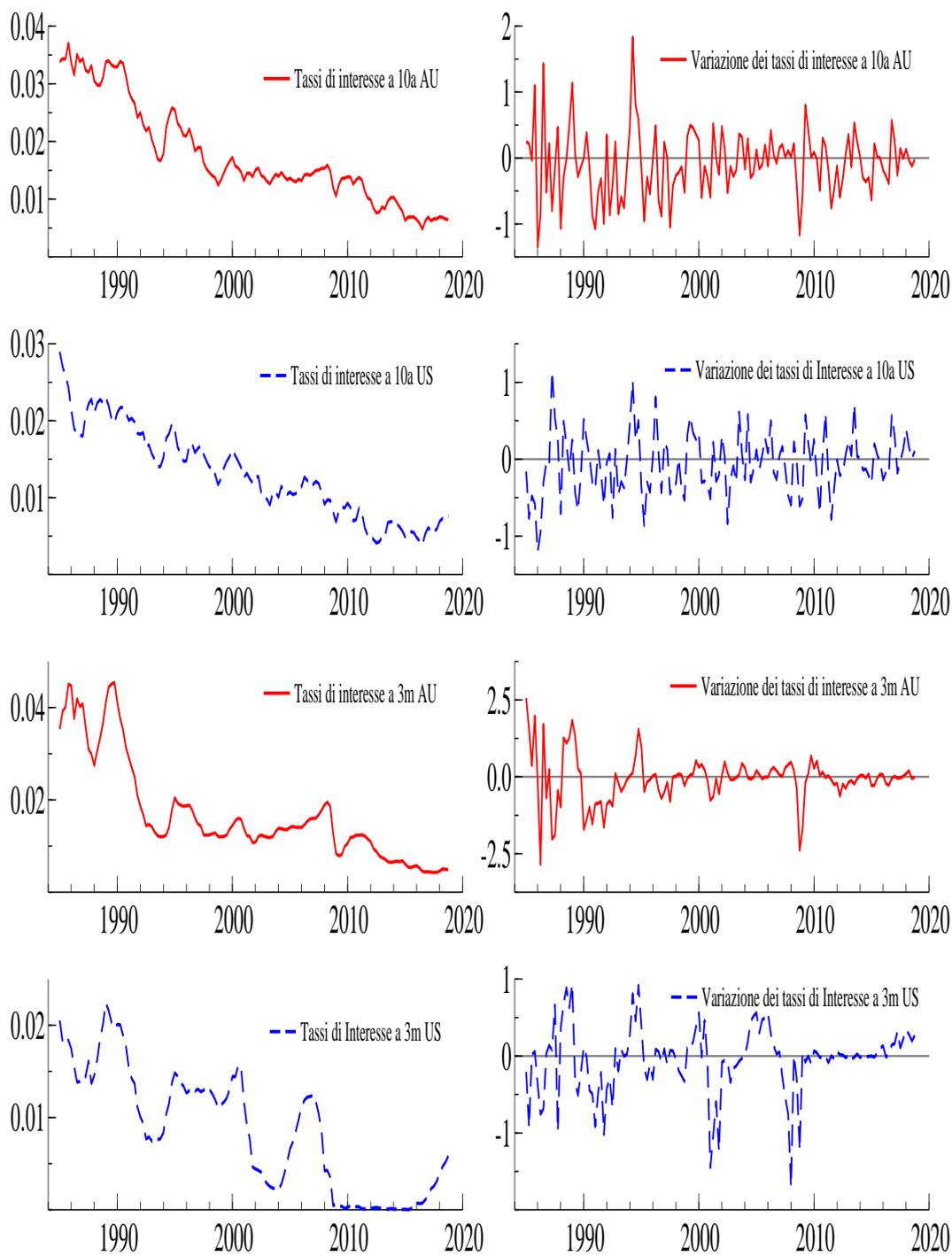


Figura 2.2: I tassi di interesse a 10 anni e a 3 mesi di Australia e USA e le loro variazioni prime.

---

Nella Figura (2.3) sono descritti l'andamento degli indici di borsa dei due paesi, il loro differenziale e le loro variazioni prime, dalle quali emergono le crisi del 1987, del 2001 e del 2008. Inoltre, va sottolineata la non stazionarietà che caratterizza il differenziale dei due indici di borsa, rivelatrice delle differenti spinte esercitate al loro interno.

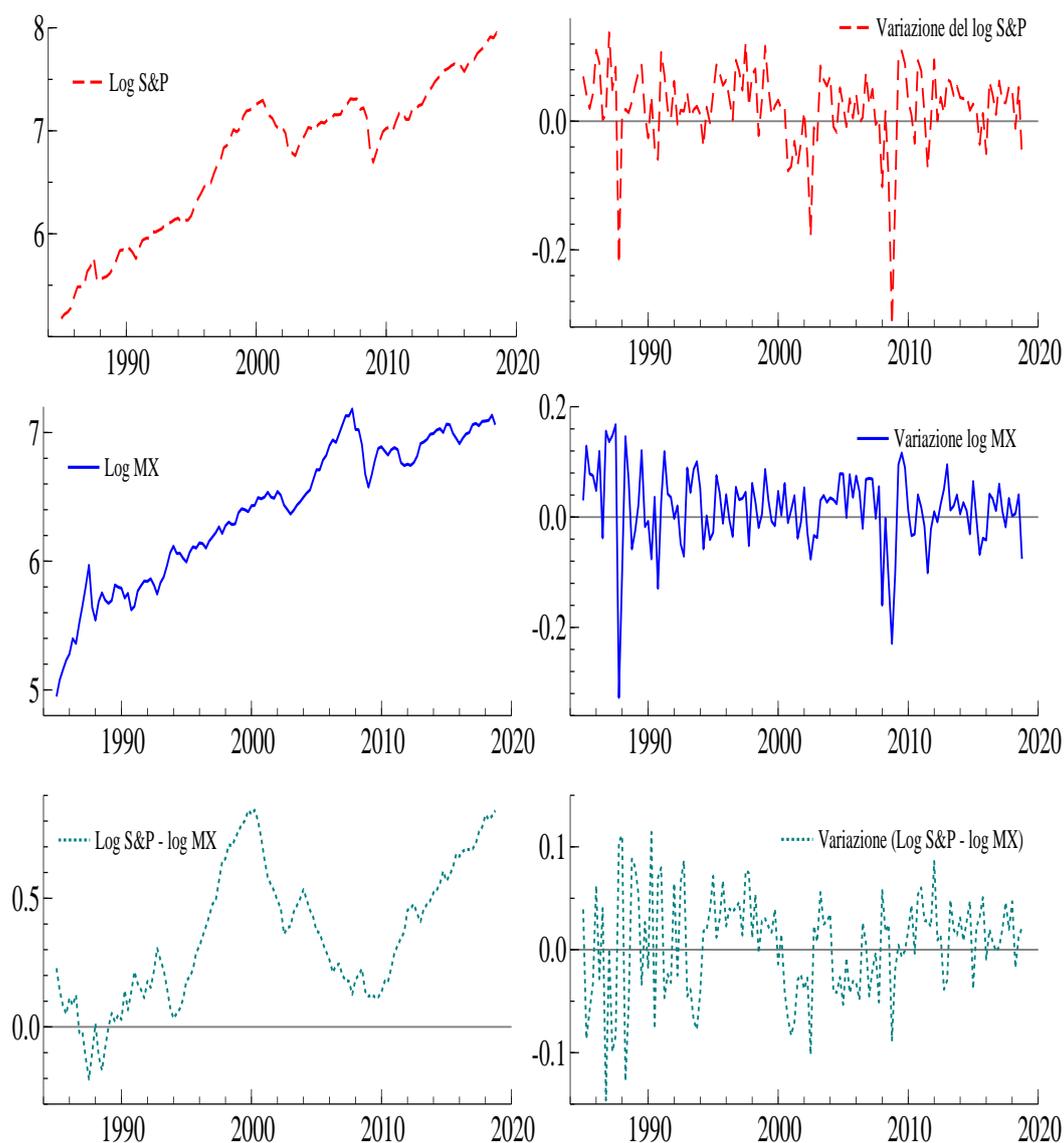


Figura 2.3: In alto e al centro il log dello S&P e del MX e le loro variazioni. In basso la differenza dei log dei due indici di borsa e la sua variazione.

---

Il tasso di cambio tra il dollaro australiano e quello statunitense è stato caratterizzato da forti e persistenti oscillazioni dall'inizio degli anni settanta. La Figura (2.4) mostra come la non stazionarietà del tasso di cambio reale, ovvero sia la deviazione del tasso di cambio nominale dalla PPP, sia in contrasto con i dettami della teoria nell'ipotesi REH [Rogoff, 1996]. Si evidenzia anche il forte legame tra le due serie almeno fino all'inizio del millennio, dopodiché i prezzi delle materie prime australiane hanno registrato una crescita vertiginosa.

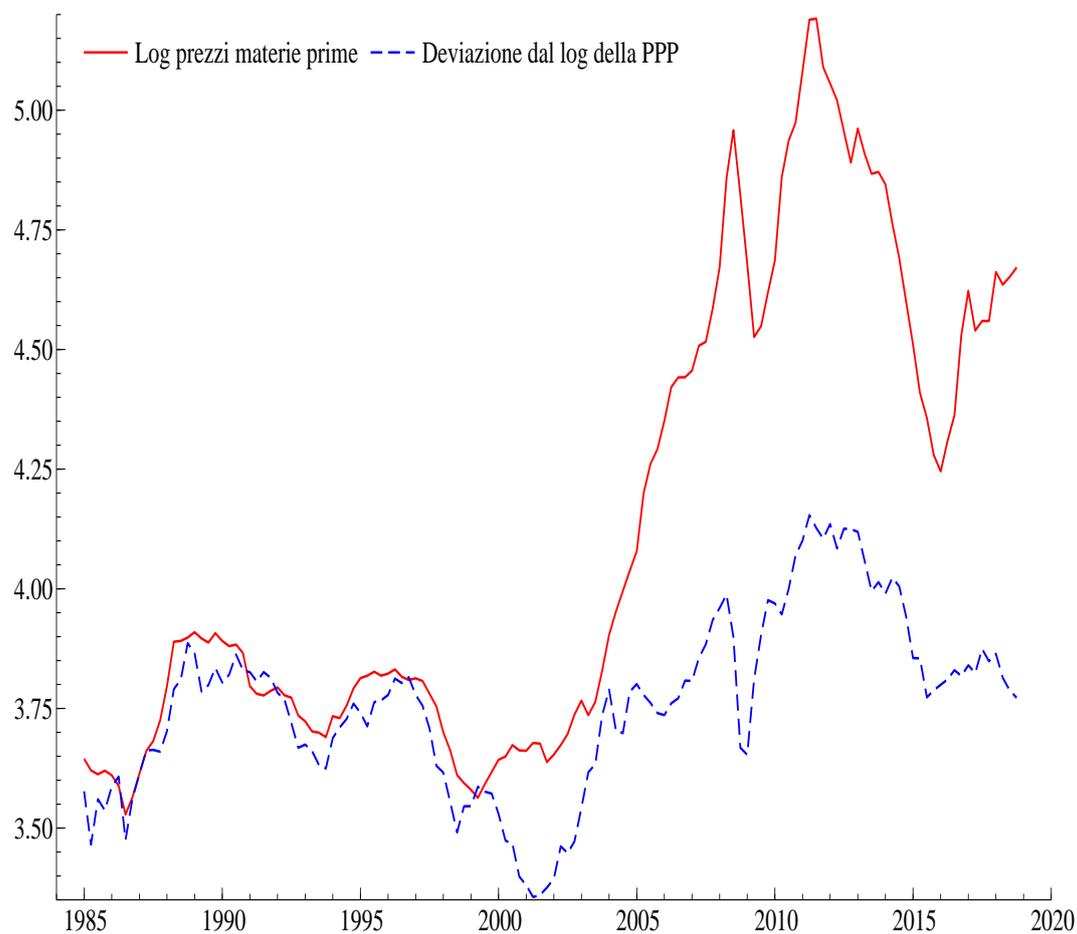


Figura 2.4: Il log dei prezzi delle materie prime australiane e la deviazione dal log della PPP.

---

La prolungata deviazione del tasso di cambio dalla PPP ha generato dei movimenti compensativi nei tassi di interesse. Le Figure (2.5) e (2.6) mostrano, un forte legame tra la deviazione dalla PPP e il differenziale dei tassi reali a lunga e a breve tra i due paesi nel periodo che va dall'inizio degli anni '90 fino al 2005. Con la crisi finanziaria del 2008 si è assistito poi ad un progressivo allontanamento delle curve, che ha raggiunto il suo massimo nel 2011.

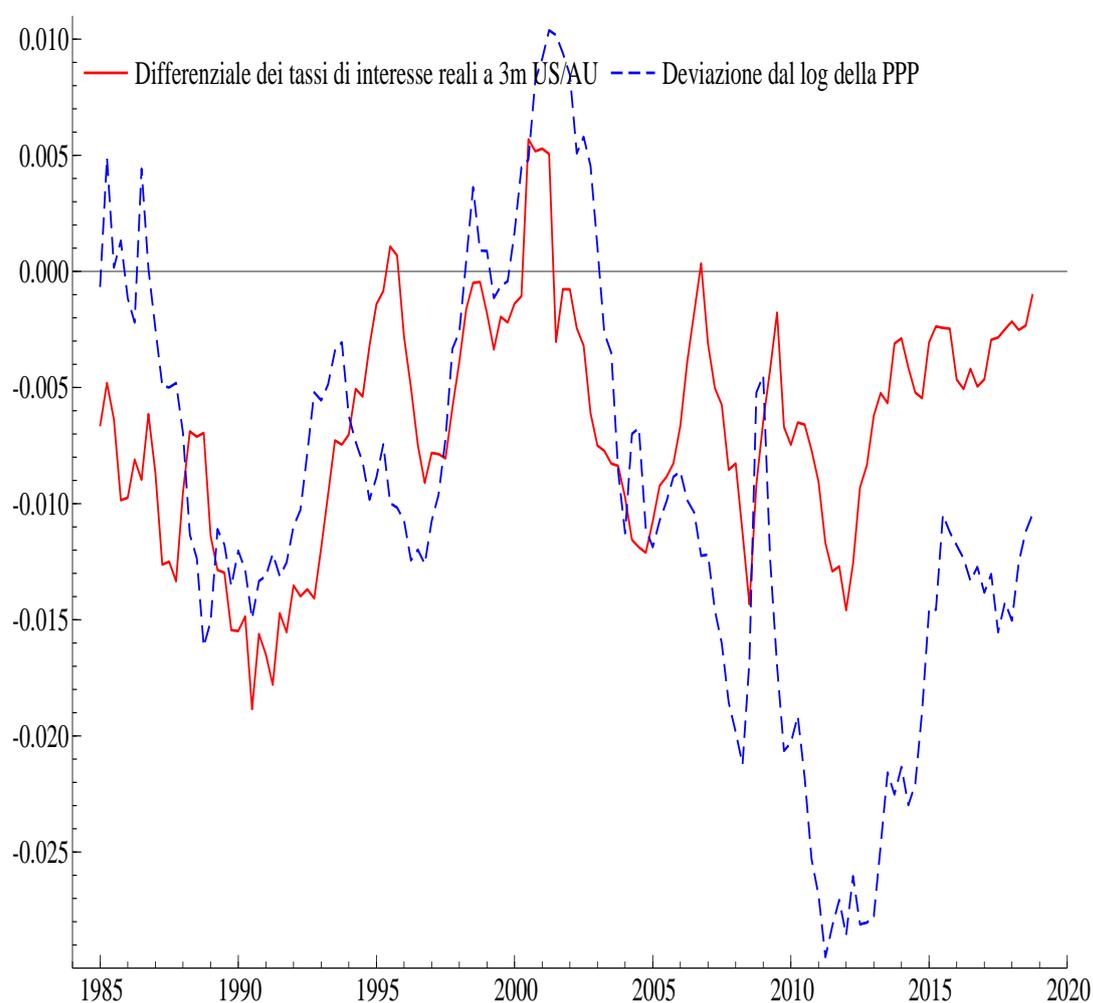


Figura 2.5: Il log della deviazione dalla PPP e il differenziale tra i tassi a 3 mesi di Australia e USA.

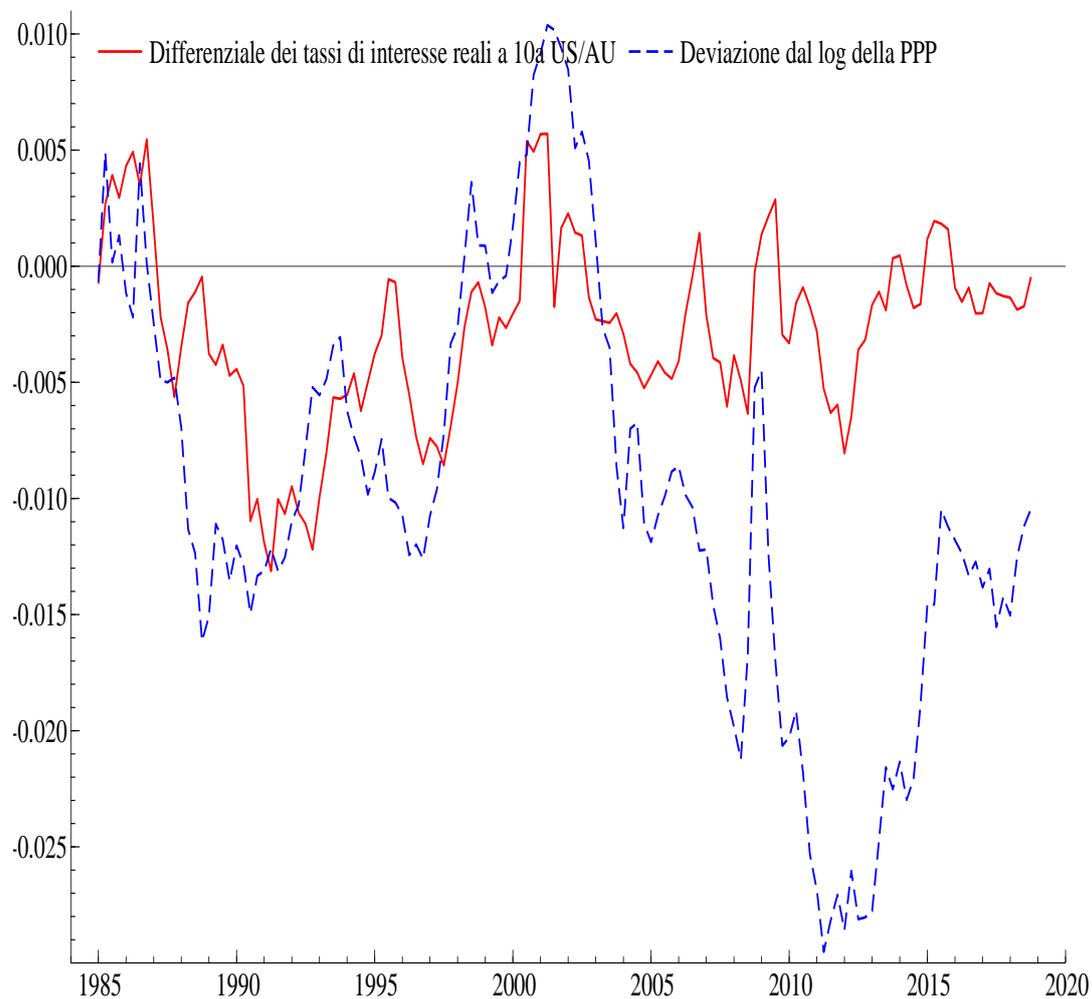


Figura 2.6: Il log della deviazione dalla PPP e il differenziale tra i tassi a 10 anni di Australia e USA.

Nella Figura (2.7) sono riportati il differenziale dell'inflazione e dei tassi di interesse a breve e a lunga tra l'Australia e gli Stati Uniti. Dall'inizio degli anni '90 si è assistito ad una sostanziale riduzione sia del differenziale dell'inflazione che dei differenziali dei tassi di interesse tra i due paesi. L'andamento di questi ultimi mostra una persistenza che spinge a ritenere che le serie dei tassi di interesse condividano un *trend* stocastico.

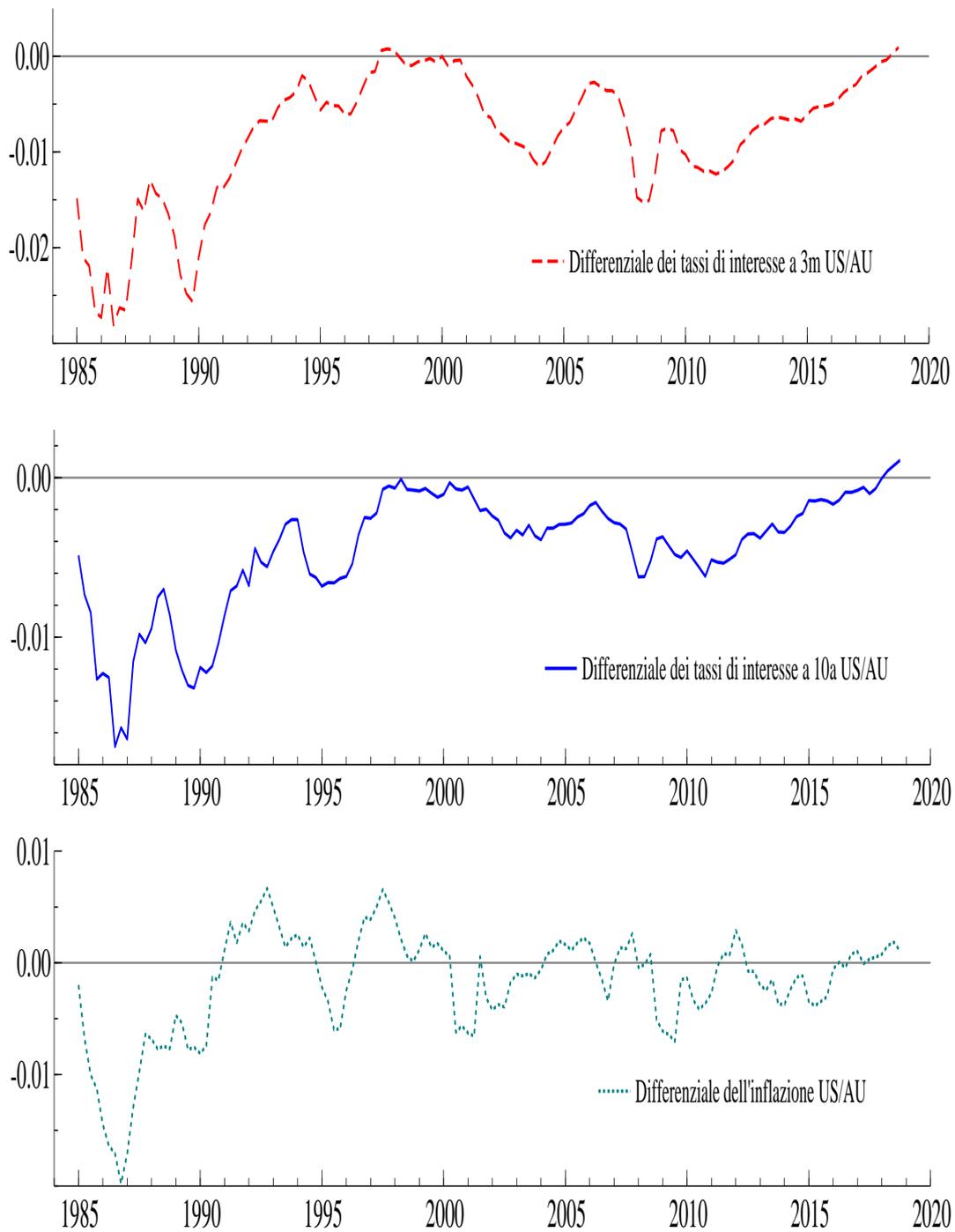


Figura 2.7: In alto e al centro il differenziale dei tassi a 3 mesi e a 10 anni tra USA e Australia. In basso il differenziale dell'inflazione tra i due paesi.

# Capitolo 3

## Analisi Empirica

Il modello considerato è il seguente:

$$\Delta^2 x_{1,t} = \alpha \left[ \rho' \tilde{\tau}' \tilde{x}_{t-1} + \tilde{d}' \Delta \tilde{x}_{t-1} \right] + \zeta' \tilde{\tau}' \Delta \tilde{x}_{t-1} + \Phi D_t + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

dove

- $x'_t = [x'_{1,t}, x'_{2,t}]$ ;
- $x'_{1,t} = [p_{us,t}, p_{au,t}, s_t, i_{us,t}, i_{au,t}, s\&p, mx]$  sono le variabili endogene;
- $x_{2,t} = [p_{co,t}]$  è la variabile esogena;
- $D_t = dummy$  e variabili stagionali centrate;
- $\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} \tau \\ \tau_0 \end{pmatrix}$ ;  $\tilde{x}_{t-1} = \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ t-1 \end{pmatrix}$ ;  $\tilde{d} = \begin{pmatrix} d \\ d_0 \end{pmatrix}$ ;  $\Delta \tilde{x}_{t-1} = \begin{pmatrix} \Delta x_{t-1} \\ 1 \end{pmatrix}$ ;

Il numero dei ritardi del VAR in livelli è stato posto pari a due, seguendo i criteri di Schwarz, di Hannan-Quinn (Tavola 3.1) mentre il criterio Akaike tenderebbe, seppur di poco, a privilegiare la soluzione di tre ritardi.

---

| Ordine | SC           | H-Q          | AIC          |
|--------|--------------|--------------|--------------|
| 4      | -42.7        | -45.7        | -47.7        |
| 3      | -43.9        | -46.2        | <b>-47.8</b> |
| 2      | <b>-44.9</b> | <b>-46.5</b> | -47.7        |

Tabella 3.1: SC:Schwarz, H-Q:Hannan-Quinn e AIC:Akaike's Information Criterion; in grassetto i valori minimi dei rispettivi criteri.

Le Tavole (3.2) e (3.3) riportano alcuni *test* sui residui che forniscono informazioni sulla qualità della specificazione del modello (3.1). La Tavola (3.2) mostra come le ipotesi di normalità, non eteroschedasticità e non autocorrelazione del secondo ordine possono essere respinte mentre quella di non autocorrelazione del primo ordine non può essere respinta. Sui risultati incide probabilmente la mancata correzione di tutti i dati anomali, tramite l'introduzione di opportune *dummy*, a causa del numero limitato di gradi di libertà ( $\nu = 8$ ). Questo impone da un lato una grande cautela nella validazione dei risultati e, dall'altro, la constatazione che non si può fare niente di più.

| Autocorrelazione |              | Normalità    | ARCH          |               |
|------------------|--------------|--------------|---------------|---------------|
| Ordine 1         | Ordine 2     |              | Ordine 1      | Ordine 2      |
| $\chi^2(36)$     | $\chi^2(36)$ | $\chi^2(12)$ | $\chi^2(441)$ | $\chi^2(882)$ |
| 58.1             | 75.1         | 100.9        | 1050.1        | 1902.9        |
| [0.17]           | [0.00]       | [0.00]       | [0.00]        | [0.00]        |

Tabella 3.2: Test della Specificazione Multivariata. I termini [.] esprimono i relativi p-value.

---

Nella Tavola (3.3) vengono riportati i *test* sulle singole equazioni dai quali si evince, tra l'altro, che la normalità dei residui non può essere respinta per l'indice dei prezzi australiani, per il tasso di cambio e per i due indici azionari.

| Equazione          | $\Delta p_{us}$ | $\Delta p_{au}$ | $\Delta s$ | $\Delta i_{us}$ | $\Delta i_{au}$ | $\Delta s\&p$ | $\Delta mx$ |
|--------------------|-----------------|-----------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|-------------|
| ARCH               | 5.2             | 0.4             | 4.5        | 0.9             | 9.3             | 0.5           | 0.3         |
|                    | [0.07]          | [0.78]          | [0.10]     | [0.61]          | [0.00]          | [0.74]        | [0.82]      |
| Normalità          | 1.6             | 48.6            | 0.1        | 12.0            | 34.4            | 0.31          | 1.2         |
|                    | [0.44]          | [0.00]          | [0.91]     | [0.00]          | [0.00]          | [0.85]        | [0.53]      |
| Asimmetria         | 0.0             | 1.3             | 0.0        | -0.4            | -0.8            | 0.0           | 0.0         |
| Curtosi            | 3.3             | 10.4            | 2.7        | 4.5             | 7.2             | 3.0           | 2.4         |
| S.E. $\times 10^3$ | 3.4             | 4.4             | 38.5       | 0.8             | 1.1             | 46.7          | 50.6        |

Tabella 3.3: *Test* della Specificazione Univariata. S.E. è lo *standard error* dei residui. I termini [.] esprimono i relativi p-value.

Nella Figura (3.1) si considerano invece le funzioni di autocorrelazione dei residui standardizzati delle singole variabili.

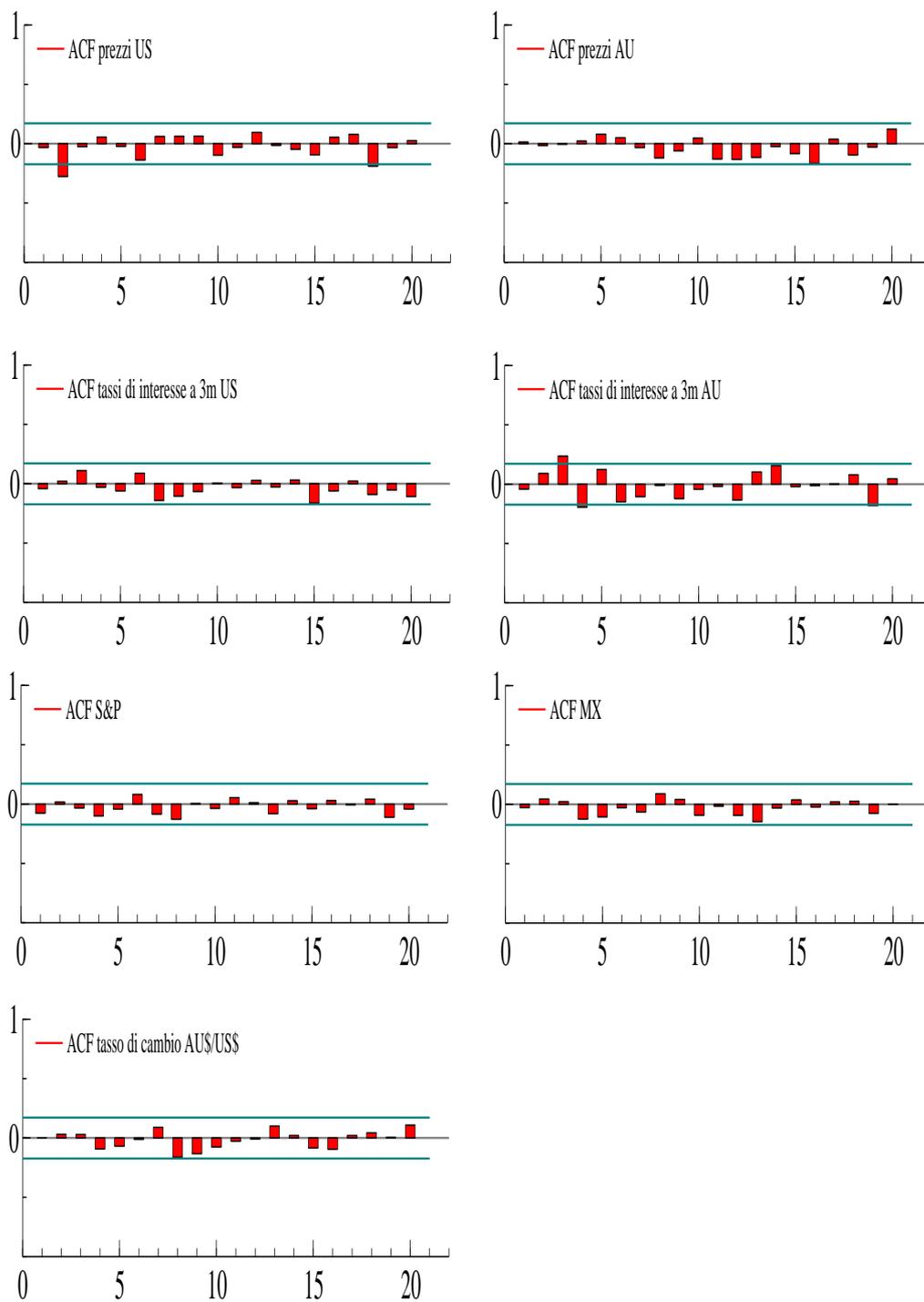


Figura 3.1: ACF è la funzione di autocorrelazione dei residui standardizzati.

---

### 3.1 Determinazione dell'ordine di Cointegrazione

La soluzione del modello (3.1) necessita di soddisfare dei vincoli che qui per comodità riportiamo:

$$\begin{aligned}\Pi &= \alpha\beta' \\ \alpha'_{\perp}\Gamma\beta_{\perp} &= \xi\eta'\end{aligned}$$

Questi richiedono di stabilire l'ordine di cointegrazione di  $x_t$ , per la cui determinazione si fa ricorso al *Maximum Likelihood Trace test* proposto da Johansen [1997] e Nielsen and Rahbek [2007]. Questo *test*<sup>1</sup>, nel caso di un modello I(2), sfrutta l'intuizione che lo spazio vettoriale possa essere suddiviso in due componenti:

- $\tau = [\beta, \beta_{\perp 1}]$ : composta dalle  $r$  relazioni di cointegrazione e dagli  $s_1$  *trend* stocastici I(1);
- $\tau_{\perp} = \beta_{\perp 2}$ : costituita dagli  $s_2$  *trend* stocastici I(2).

È possibile individuare il numero delle relazioni di cointegrazione  $r$ , una volta che si sono considerate tutte le combinazioni di  $r$  e  $s_1$  e le relative probabilità congiunte. Al fine di tener conto degli effetti generati dall'introduzione delle *dummy* per spiegare i dati anomali, la tavola è costruita utilizzando il metodo *Bootstrap* proposto da Cavaliere et al. [2012] e presente nel *software* CATS3 [Doornik and Juselius, 2017].

Il *test* della Traccia (Tavola 3.4) può essere letto partendo dal primo valore in alto a sinistra, in cui si ammette l'esistenza di un'unica relazione di cointegrazione ( $r = 1$ ), a cui si aggiungono sei *trend* stocastici I(2) ( $s_2 = 6$ ) e zero *trend* stocastici I(1)  $s_1 = k - r - s_2 = 0$ . Si procede poi verso destra, riga dopo riga, fino a raggiungere il primo caso di ipotesi non respinta:  $r = 1$ ;  $s_1 = 5$ ;  $s_2 = 1$

---

<sup>1</sup>noto anche come *test* di Johansen o LR *test* per l'ordine di cointegrazione.

e un p-value di 0.10. Questo caso e il successivo però vengono tralasciati sia perché i p-value sono *borderline* ma soprattutto perché procedendo verso destra è possibile individuare altri casi il cui l'ipotesi nulla è respinta. Per questo motivo si prosegue ancora verso destra fino a individuare il primo di tutta una serie di casi non respinti. Questa peculiarità è individuata nella combinazione:  $r = 2$ ;  $s_1 = 2$ ;  $s_2 = 3$ , con un p-value di 0.34, caratterizzata da due polinomi di cointegrazione  $(\beta'x_{t-1} + d'\Delta x_{t-1})$ , due *trend* stocastici I(1), che è possibile rendere stazionari solo dopo una differenziazione delle variabili  $(\beta_{\perp 1}\Delta x_{t-1})$ , e tre trend stocastici I(2).

| $k - r$ | $r$ | $s_2 = 6$ | $s_2 = 5$ | $s_2 = 4$ | $s_2 = 3$    | $s_2 = 2$ | $s_2 = 1$ | $s_2 = 0$ |
|---------|-----|-----------|-----------|-----------|--------------|-----------|-----------|-----------|
| 6       | 1   | 495.3     | 407.1     | 324.8     | 264.2        | 222.3     | 184.6     | 176.1     |
|         |     | [0.00]    | [0.00]    | [0.00]    | [0.01]       | [0.02]    | [0.10]    | [0.07]    |
| 5       | 2   |           | 327.9     | 240.6     | <b>162.3</b> | 120.1     | 108.1     | 99.2      |
|         |     |           | [0.00]    | [0.01]    | [0.34]       | [0.73]    | [0.71]    | [0.68]    |
| 4       | 3   |           |           | 154.2     | 109.8        | 86.8      | 66.8      | 58.1      |
|         |     |           |           | [0.36]    | [0.72]       | [0.77]    | [0.89]    | [0.89]    |
| 3       | 4   |           |           |           | 76.0         | 57.0      | 41.0      | 32.7      |
|         |     |           |           |           | [0.81]       | [0.86]    | [0.95]    | [0.92]    |
| 2       | 5   |           |           |           |              | 32.1      | 22.3      | 14.7      |
|         |     |           |           |           |              | [0.96]    | [0.92]    | [0.92]    |
| 1       | 6   |           |           |           |              |           | 11.3      | 3.5       |
|         |     |           |           |           |              |           | [0.78]    | [0.95]    |

Tabella 3.4: *Test* della Traccia.  $k$  è il numero delle variabili;  $r$  il numero delle cointegrazioni;  $s_2$  il numero dei *trend* I(2). I termini [.] esprimono i relativi p-value.

Affinché la scelta effettuata sia considerata valida è necessario che la maggioranza dei coefficienti  $\alpha$  sia significativa. La Tavola (3.6) mostra che questo è il caso. È poi importante verificare che le relazioni di cointegrazione, nella versione  $\beta_t'x_t$

ed  $\mathbf{R}$  (1.21), siano caratterizzate dall'assenza di *trend*. Anche questa condizione è soddisfatta come si può osservare dalla Figura (3.2).

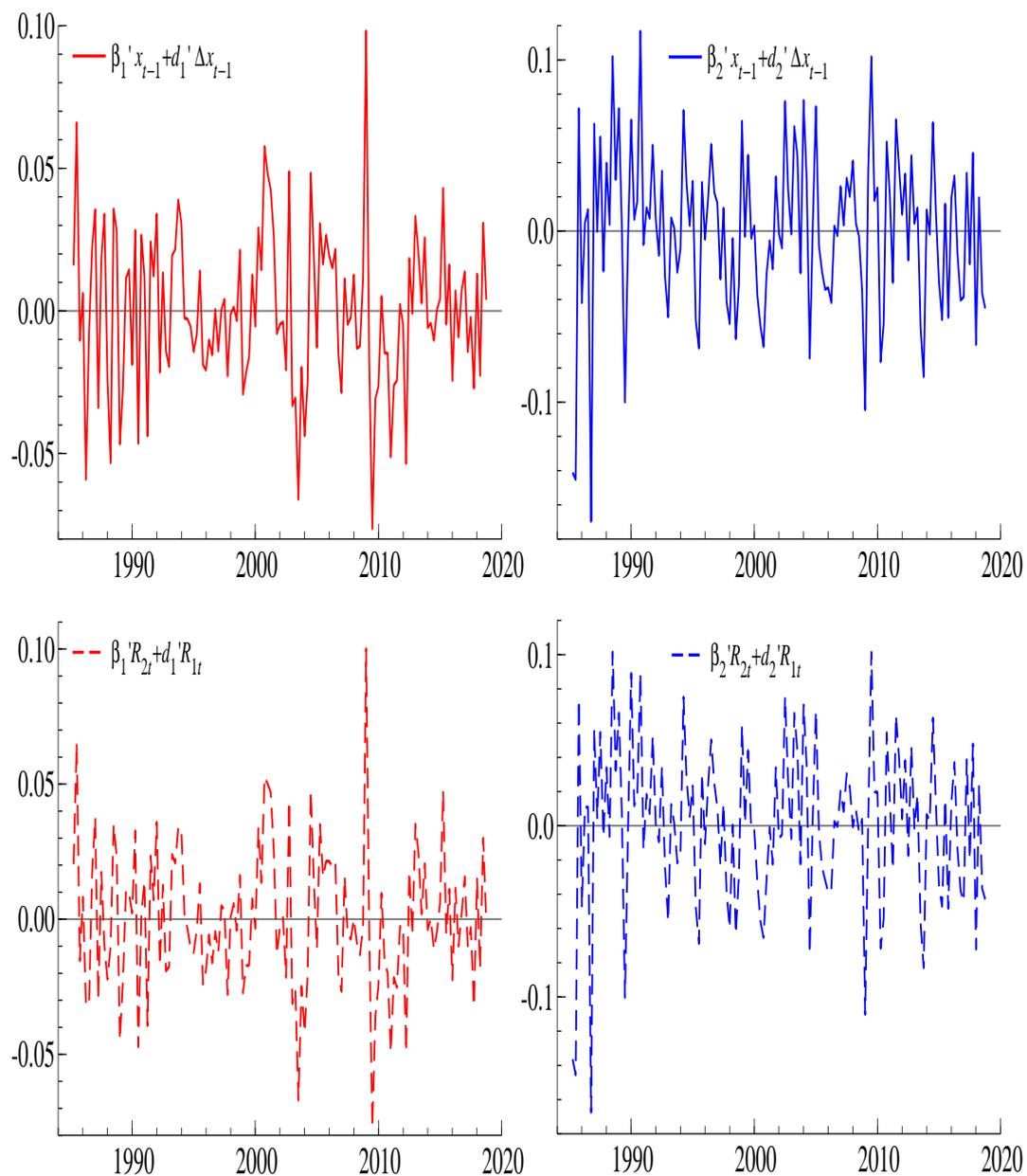


Figura 3.2: In alto le due relazioni di cointegrazione  $\beta'x_t$ , in basso le corrispettive versioni  $\mathbf{R}$ .

---

Infine si pone l'attenzione sui moduli delle radici caratteristiche (Tavola 3.5), per vedere se vi sono valori prossimi all'unità, che suggerirebbero l'esistenza di trend stocastici tralasciati. Nella stessa Tavola si considera anche il caso immediatamente successivo ( $r = 2$ ;  $s_1 = 3$ ;  $s_2 = 2$ ) a quello analizzato e quello in cui si assume l'assenza di processi stocastici I(2):  $r = 2$ ;  $s_1 = 5$ ;  $s_2 = 0$ . I risultati mostrano che nel caso di un modello I(1) vi sono radici prossime all'unità (0.90 e 0.86), che spingono a ritenere che esistano dei *trend* non considerati. L'ipotesi alternativa ( $r = 2$ ;  $s_1 = 3$ ;  $s_2 = 2$ ), invece, viene tralasciata perché è troppo costosa in termini di gradi di libertà.

|         |           |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $r = 2$ | $s_2 = 0$ | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.90 | 0.86 | 0.69 | 0.42 |
| $r = 2$ | $s_2 = 2$ | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.62 | 0.43 |
| $r = 2$ | $s_2 = 3$ | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.59 |

Tabella 3.5: Per  $r=2$ , le maggiori radici caratteristiche (in modulo).

## 3.2 Le Forze di Attrazione

Le persistenti ed ampie oscillazioni del tasso di cambio intorno al suo valore di equilibrio di lungo periodo comportano un insieme di *feedback* che trovano espressione all'interno del CVAR nei polinomi di cointegrazione,  $\alpha(\beta'x_{t-1} + d'\Delta x_{t-1})$  e nelle relazioni di aggiustamento di medio periodo  $\zeta'\tau'\Delta x_{t-1}$ .

Per la generica variabile  $x_{i,t}$ , si ha:

$$\Delta^2 x_{i,t} = \sum_{j=1}^r \alpha_{ij}(\beta_j x_{t-1} + d_j \Delta x_{t-1}) + \sum_{j=1}^r \zeta_{ij}(\beta_j \Delta x_{t-1}) + \varepsilon_{i,t} \quad (3.2)$$

dove l'interpretazione del polinomio di cointegrazione,  $\beta'x_{t-1} + d'\Delta x_{t-1}$ , è la seguente: in presenza di variabili I(2), le relazioni di cointegrazione  $\beta'x_{t-1}$  sono ge-

---

neralmente CI(2,1) e possono dare vita a degli errori persistenti, che generano degli scostamenti dall'equilibrio di lungo periodo, i quali a loro volta innescano movimenti compensativi e non in altre variabili. Queste ultime variazioni si realizzano attraverso le componenti  $d'\Delta x_{t-1}$  e  $\zeta'\tau'\Delta x_{t-1}$  e avranno complessivamente una natura stabilizzatrice se le radici caratteristiche del modello risulteranno esterne al cerchio unitario.

Nella Tavola (3.6) è riportata la struttura di  $(\beta'x_{t-1} + d'\Delta x_{t-1})$  e le stime di  $\beta_{\perp 1}$ . Per facilitare l'interpretazione, i coefficienti *error-increasing* sono espressi in grassetto e alle  $|t \text{ di Student}| \leq 1.6$  è stato sostituito un trattino.

Ai coefficienti  $\beta$  sono state applicate sei restrizioni che sono state verificate attraverso il LR test descritto in Johansen et al. [2010] e non respinte, con un p-value di 0.63. Il primo polinomio di cointegrazione è molto simile alla relazione UA-UIP (1.9), con in più il differenziale degli indici di borsa dei due paesi:

$$\begin{aligned}
i_{us,t} - i_{au,t} = & 0.09(p_{au,t} - p_{us,t} + s_t) + 0.02p_{co,t} \\
& + 0.01(m x_t - s \& p_t) + d'_1 \Delta x_t + \varepsilon_t
\end{aligned} \tag{3.3}$$

dove

$$\begin{aligned}
d'_1 \Delta x_t \approx & 0.22\Delta p_{us,t} + 0.90\Delta p_{au,t} - 0.36\Delta s_t - 0.02\Delta i_{us,t} \\
& - 0.52\Delta s \& p_t + 0.44\Delta m x_t + 0.04\Delta p_{co,t} + 0.22const
\end{aligned}$$

La deviazione dalla PPP è qui caratterizzata da un coefficiente  $\beta_1 = 0.09$ , in linea con quello registrato in altri studi [Juselius and Assenmacher, 2017], espressione di un lento aggiustamento all'equilibrio di lungo periodo.

I coefficienti del polinomio di cointegrazione mostrano come gli aggiustamenti all'equilibrio di lungo periodo avvengano attraverso l'indice dei prezzi australiani. Questo è anche vero con riguardo alla velocità di correzione degli aggiustamenti ( $\alpha_1$ ) nei confronti del vettore di cointegrazione ( $\beta_1 x_{t-1}$ ).

|                      | $p_{us}$     | $p_{au}$     | $s$          | $i_{us}$     | $i_{au}$ | $s\&p$       | $mx$        | $p_{co}$ | $trend$ |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------|--------------|-------------|----------|---------|
| $\beta_1$            | -0.09        | 0.09         | 0.09         | 1.00         | -1.00    | 0.01         | -0.01       | -0.02    | 0.00    |
|                      | [-14.4]      | [14.4]       | [14.4]       |              |          | [4.4]        | [-4.4]      | [-10.0]  |         |
| $d_1$                | <b>0.22</b>  | 0.90         | <b>-0.36</b> | <b>-0.02</b> | 0.00     | <b>-0.52</b> | <b>0.44</b> | 0.04     | 0.22    |
|                      | [4.7]        | [5.6]        | [-3.9]       | [-7.7]       | [-4.8]   | [-9.1]       | [6.4]       | -        | [12.3]  |
| $\alpha_1$           | <b>-0.01</b> | -0.39        | -0.18        | <b>0.02</b>  | 0.01     | <b>1.09</b>  | -0.25       |          |         |
|                      | -            | [-10.5]      | -            | [3.0]        | -        | [2.7]        | -           |          |         |
| $\beta_2$            | -0.29        | 0.15         | 0.10         | -0.29        | 1.00     | 0.05         | -0.02       | -0.01    | 0.00    |
|                      | [-5.3]       | [3.8]        | [9.1]        | [-5.3]       |          | [6.7]        | [-2.2]      | -        |         |
| $d_2$                | -0.49        | <b>-1.45</b> | 1.01         | 0.00         | 0.00     | <b>-0.44</b> | 0.10        | -0.27    | 0.70    |
|                      | [-7.3]       | [-6.4]       | [7.7]        | -            | -        | [-5.7]       | -           | [-5.1]   | [6.5]   |
| $\alpha_2$           | 0.15         | <b>0.22</b>  | -0.26        | 0.00         | -0.01    | <b>0.06</b>  | 0.03        |          |         |
|                      | [9.0]        | [10.4]       | -            | -            | [-1.9]   | [2.8]        | -           |          |         |
| $\beta'_{\perp 1,1}$ | 1.00         | -0.30        | 0.00         | 0.68         | 0.55     | -0.08        | 0.06        | -0.04    | 0.00    |
| $\beta'_{\perp 1,2}$ | 0.00         | 0.66         | 1.00         | -0.58        | -0.39    | 0.23         | -0.27       | -0.28    | 0.00    |

Tabella 3.6: I Polinomi di Cointegrazione e i vettori  $\beta_{\perp 1}$ . In grassetto i coefficienti  $d$  ed  $\alpha$  *error-increasing* nei confronti di  $\beta' x_t$ ; I termini [.] esprimono le  $t$  di Student; I trattini sostituiscono le  $|t \text{ di Student}| \leq 1.6$ .

Per quanto attiene agli aggiustamenti di medio periodo, le stime di  $\zeta' \tau'$  vengono riportate nella Tavola 3.7. Da queste si evince un rilevante effetto di *error-increasing* ( $\zeta_{ij} \tau_{ij} > 0$ ) nella velocità di aggiustamento dei prezzi dei beni australiani ( $\Delta^2 p_{au,t}$ ) sulla variazione dei tassi di interesse dei due paesi ( $\Delta i_{us}, \Delta i_{au}$ ). Un tale effetto si registra anche nella velocità di aggiustamento dei due indici di borsa

( $\Delta^2 s \& p_t$ ,  $\Delta^2 mx$ ) nei confronti della variazione dei tassi di interesse australiani ( $\Delta i_{au}$ ), mentre quello nei confronti della variazione dei tassi di interesse americani ( $\Delta i_{us}$ ) risulta *error-correcting* ( $\zeta_{ij} \tau_{ij} < 0$ ).

|                     | $\Delta p_{us}$ | $\Delta p_{au}$ | $\Delta s$  | $\Delta i_{us}$ | $\Delta i_{au}$ | $\Delta s \& p$ | $\Delta mx$ | $\Delta p_{co}$ | <i>const</i> |
|---------------------|-----------------|-----------------|-------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------|-----------------|--------------|
| $\Delta^2 p_{us,t}$ | -0.76           | <b>0.13</b>     | -0.15       | -0.19           | 0.18            | <b>0.03</b>     | <b>0.01</b> | <b>0.08</b>     | 0.00         |
|                     | [-11.3]         | [4.9]           | [-6.6]      | -               | -               | [3.4]           | -           | [11.7]          | [11.8]       |
| $\Delta^2 p_{au,t}$ | <b>0.16</b>     | -0.29           | -0.37       | <b>0.83</b>     | <b>0.99</b>     | -0.10           | <b>0.15</b> | <b>0.10</b>     | 0.00         |
|                     | [1.8]           | [8.4]           | [-12.6]     | [2.9]           | [4.4]           | [-8.4]          | [10.5]      | [11.0]          | -            |
| $\Delta^2 s_t$      | 0.53            | -0.65           | -0.73       | -1.21           | -1.03           | -0.20           | 0.12        | <b>0.18</b>     | 0.00         |
|                     | -               | [-2.1]          | [-2.8]      | -               | -               | [1.9]           | -           | [2.2]           | -            |
| $\Delta^2 i_{us,t}$ | -0.06           | <b>0.01</b>     | 0.00        | -0.32           | <b>0.10</b>     | 0.00            | -0.01       | 0.00            | 0.00         |
|                     | [-3.5]          | [2.8]           | -           | [-5.7]          | [2.3]           | [3.9]           | [-4.1]      | [1.7]           | [4.4]        |
| $\Delta^2 i_{au,t}$ | -0.07           | <b>0.03</b>     | <b>0.02</b> | <b>0.35</b>     | -0.50           | 0.00            | 0.00        | 0.00            | [0.00]       |
|                     | [-3.4]          | [4.2]           | [2.6]       | [4.6]           | [-8.5]          | -               | [1.8]       | -               | [3.4]        |
| $\Delta^2 s \& p_t$ | <b>0.07</b>     | -0.24           | -0.26       | -15.50          | <b>3.66</b>     | 0.10            | -0.39       | 0.10            | 0.00         |
|                     | -               | -               | -           | [-5.0]          | -               | -               | [-2.6]      | -               | [2.0]        |
| $\Delta^2 mx$       | 0.26            | -0.31           | -0.27       | -18.5           | <b>3.77</b>     | 0.11            | -0.48       | 0.10            | 0.00         |
|                     | -               | -               | -           | [-5.6]          | -               | -               | [-3.0]      | -               | [2.1]        |

Tabella 3.7: I coefficienti  $\zeta' \tau'$ . In grassetto le variabili *error-increasing*; I termini [.] esprimono le t di Student; I trattini sostituiscono le |t di Student|  $\leq 1.6$ .

Il secondo polinomio di cointegrazione (3.4) mostra come il tasso di interesse statunitense si muove insieme all'indice dei prezzi americani e come queste due grandezze influiscono principalmente sui tassi di interesse australiani. Per quanto riguarda le dinamiche del secondo polinomio di cointegrazione (Tavola 3.6), si osserva un'azione di *error-increasing* da parte dell'indice dei prezzi australiani e dell'indice americano di borsa, sia quando si considerano gli aggiustamenti  $d_2' \Delta x_{t-1}$

---

all'equilibrio statico di lungo periodo  $\beta'_2 x_{t-1}$ , sia quando si fa riferimento alla velocità di aggiustamento  $\alpha_2$  all'equilibrio dinamico di lungo periodo, espresso dal polinomio di cointegrazione,  $(\beta' x_{t-1} + d' \Delta x_{t-1})$ .

$$\begin{aligned}
 i_{us,t} + p_{us,t} = & 0.29^{-1}(i_{au,t} + 0.15p_{au,t} + 0.10s_t + i_{au,t} \\
 & + 0.05s_t p_t - 0.02m x_t - 0.01p_{co,t}) + d'_2 \Delta x_t + \varepsilon_t \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
 d'_2 \Delta x_t \approx & -0.49 \Delta p_{us,t} - 1.45 \Delta p_{au,t} + 1.01 \Delta s_t - 0.44 \Delta s_t p_t \\
 & + 0.10 \Delta m x_t - 0.27 \Delta p_{co,t} + 0.70 \text{const.}
 \end{aligned}$$

### 3.3 I Trend Stocastici Comuni

Se la Tavola (3.6) fornisce indicazioni sugli aggiustamenti nel medio e nel lungo periodo all'interno del modello, la Tavola (3.8), basata sulla rappresentazione a media mobile (MA), permette di analizzare i *trend* stocastici I(2) come risultato degli *shock* che colpiscono le singole variabili. Richiamando la rappresentazione MA di un processo I(2):

$$\begin{aligned}
 x_t = & C_2 \sum_{i=1}^t \sum_{s=1}^i (\varepsilon_s + \Phi D_s + \mu_0 + \mu_1 s) + C_1 \sum_{i=1}^t (\varepsilon_i + \Phi D_i + \mu_0 + \mu_1 i) + \\
 & + C^*(L)(\varepsilon_t + \Phi D_t + \mu_0 + \mu_1 t) + A + Bt
 \end{aligned}$$

e limitando l'attenzione alla componente espressione dei *trend* stocastici I(2):

$$C_2 = \check{\beta}_{\perp 2} \alpha'_{\perp 2}$$

si ha che  $\alpha'_{\perp 2,1}$  mette in luce come il primo dei *trend* I(2) è dovuto a una combinazione di *shock* sui prezzi americani e sullo S&P e si riflette, attraverso i pesi  $\check{\beta}_{\perp 2,1}$ , maggiormente sugli indici di borsa dei due paesi. Il secondo *trend* I(2) è invece il risultato di una combinazione di *shock* sui tassi di interesse americani e sullo S&P e si ripercuote in maniera rilevante, attraverso i pesi  $\check{\beta}_{\perp 2,2}$ , sul tasso di cambio e su entrambi gli indici di borsa. Infine, il terzo *trend* I(2) è generato dagli *shock* riguardanti il tasso di interesse australiano e, attraverso i pesi  $\check{\beta}_{\perp 2,3}$ , si riflette principalmente sui mercati azionari di entrambi i paesi, oltreché sull'indice dei prezzi australiani e sul tasso di cambio. Tutto ciò conferma il ruolo predominante esercitato dai mercati finanziari nella attuale contesto economico.

|                                | $p_{us}$ | $p_{au}$ | $s$   | $i_{us}$ | $i_{au}$ | $s\&p$ | $mx$  |
|--------------------------------|----------|----------|-------|----------|----------|--------|-------|
| $\check{\beta}_{\perp 2,1}$    | -0.03    | -0.19    | 0.36  | -0.05    | -0.04    | 1.00   | 1.88  |
| $\check{\beta}_{\perp 2,2}$    | -0.38    | 0.29     | -2.48 | 0.63     | 0.58     | -13.4  | -21.7 |
| $\check{\beta}_{\perp 2,3}$    | 0.29     | 1.50     | -1.11 | 0.08     | 0.09     | -3.11  | -3.35 |
| Le stime dei <i>Trend</i> I(2) |          |          |       |          |          |        |       |
| $\alpha'_{\perp 2,1}$          | 1.00     | -0.62    | -0.69 | 0.00     | 0.00     | -0.29  | 0.12  |
|                                |          | -        | -     |          |          | [-2.1] | -     |
| $\alpha'_{\perp 2,2}$          | 0.00     | 0.00     | -0.04 | 1.00     | 0.00     | -0.02  | 0.00  |
|                                |          | -        | -     |          |          | [-2.6] | -     |
| $\alpha'_{\perp 2,3}$          | 0.00     | 0.00     | -0.08 | 0.00     | 1.00     | -0.02  | 0.01  |
|                                |          | -        | -     |          |          | -      | -     |

Tabella 3.8: *Trend* stocastici I(2) e relativi pesi. I termini [.] esprimono le t di Student; I trattini sostituiscono le |t di Student|  $\leq 1.6$ .

---

### 3.4 Proprietà di Integrazione e Cointegrazione

Assumendo l'ipotesi di imperfetta conoscenza (IKE), Juselius [2014] mostra come il premio alla incertezza ( $up_t$ ) permette di considerare il tasso di cambio, il tasso di interesse, il differenziale dei prezzi dei due paesi e il PPP *gap* come processi I(2) piuttosto che I(1). Anche qui si procede col verificare queste ipotesi attraverso il LR test [Johansen et al., 2010]. I risultati riportati nella Tavola (3.9) evidenziano come l'ipotesi nulla di variabili I(1) sia respinta a favore dell'ipotesi alternativa di variabili I(2) nei casi  $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_6$  e  $\mathcal{H}_9 - \mathcal{H}_{11}$ , mentre nei casi  $\mathcal{H}_7 - \mathcal{H}_8$ , relativi ai tassi di interesse australiani di breve periodo e al differenziale dei tassi di interesse tra i due paesi, l'ipotesi di serie I(1) non è respinta.

|                    | $p_{us}$ | $p_{au}$ | $s$  | $i_{us}$ | $i_{au}$ | $s\&p$ | $mx$ | $\chi^2(\nu)$ | p-value |
|--------------------|----------|----------|------|----------|----------|--------|------|---------------|---------|
| $\mathcal{H}_1$    | 1.0      | -        | -    | -        | -        | -      | -    | 69.0 (5)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_2$    | -        | 1.0      | -    | -        | -        | -      | -    | 47.4 (5)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_3$    | 1.0      | -1.0     | -    | -        | -        | -      | -    | 47.7 (5)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_4$    | -        | -        | 1.0  | -        | -        | -      | -    | 26.4 (5)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_5$    | -1.0     | 1.0      | -1.0 | -        | -        | -      | -    | 28.9 (5)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_6$    | -        | -        | -    | 1.0      | -        | -      | -    | 22.9 (5)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_7$    | -        | -        | -    | -        | 1.0      | -      | -    | 10.5 (5)      | [0.06]  |
| $\mathcal{H}_8$    | -        | -        | -    | 1.0      | -1.0     | -      | -    | 4.4 (5)       | [0.48]  |
| $\mathcal{H}_9$    | -        | -        | -    | -        | -        | 1.0    | -    | 38.1 (5)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_{10}$ | -        | -        | -    | -        | -        | -      | 1.0  | 18.2 (5)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_{11}$ | -        | -        | -    | -        | -        | 1.0    | -1.0 | 18.7 (5)      | [0.00]  |

Tavola 3.9: *Test* dell'ipotesi I(1) contro l'ipotesi I(2).

È anche possibile verificare se il modello andrebbe incontro o meno a una perdita sostanziale di informazione se si procedesse ad una trasformazione dei dati

---

che permettesse di considerare un modello I(1) al posto di un I(2) - come si ha, solitamente, quando si passa da un modello espresso in termini nominali ad uno in termini reali. Per esempio, è possibile verificare se invece di considerare un modello I(2) in cui le variabili sono:

$$x'_t = [p_{us,t}, p_{au,t}, s_t, i_{us,t}, i_{au,t}, p_{co,t}, s\&p, mx]$$

si possa considerare un modello I(1) in cui le variabili sono:

$$\tilde{x}'_t = [s_t - ppp, \Delta p_{us,t}, \Delta p_{au,t}, i_{us,t}, i_{au,t}, \Delta p_{co,t}, \Delta s\&p, \Delta mx]$$

assumendo l'esistenza di un'omogeneità tra il logaritmo del tasso di cambio nominale ( $s_t$ ) e il logaritmo della PPP ( $p_{au,t} - p_{us,t}$ ).

Oppure, si può verificare se sia possibile passare ad un secondo modello I(1), considerando le variabili:

$$\bar{x}'_t = [p_{au,t} - p_{us,t}, \Delta p_{au,t}, \Delta s_t, i_{us,t}, i_{au,t}, \Delta p_{co,t}, \Delta s\&p, \Delta mx].$$

e quindi assumendo, implicitamente, che gli indici dei prezzi dei beni nei due paesi abbiano lo stesso *trend* stocastico che permette di considerare la loro differenza come una variabile I(1).

Le stime ottenute imponendo gli stessi vincoli su tutte le componenti di  $\tau = [\beta, \beta_{\perp 1}]$  mostrano come entrambe le ipotesi possono essere respinte.

---

### 3.5 Esclusione delle Materie Prime

Nel caso precedente, seguendo la strada tracciata da [Salazar \[2017\]](#) per l'indagine sul Cile, si è fatta la scelta di introdurre come variabile esogena l'indice dei prezzi australiani delle materie prime. Quello che si vuole verificare adesso è la capacità del modello di continuare a spiegare i dati anche escludendo l'indice dei prezzi delle materie prime o, in altre parole, quanto l'indice australiano di borsa nel suo complesso sia in grado di sopperire alle informazioni provenienti dal solo mercato delle materie prime.

A tale proposito vengono effettuati nuovamente i *test* relativi alla specificazione multivariata e a quella univariata. La Tavola (3.10) mostra come in termini multivariati venga respinta la non autocorrelazione, la non eteroschedasticità e la normalità.

---

| Autocorrelazione |              | Normalità    | ARCH          |                |
|------------------|--------------|--------------|---------------|----------------|
| Ordine 1         | Ordine 2     |              | Ordine 1      | Ordine 2       |
| $\chi^2(49)$     | $\chi^2(49)$ | $\chi^2(14)$ | $\chi^2(784)$ | $\chi^2(1568)$ |
| 75.0             | 74.2         | 90.5         | 1032.0        | 1889.7         |
| [0.01]           | [0.01]       | [0.00]       | [0.00]        | [0.00]         |

---

Tavola 3.10: Test della Specificazione Multivariata. I termini [...] esprimono i relativi p-value.

Per ciò che attiene i test delle singole equazioni (Tavola 3.11), si osserva che non viene respinta la normalità del tasso di cambio, dell'indice dei prezzi americani e dei due indici di borsa. Occorre ricordare come anche in questo caso pesa il fatto di non essere riusciti ad correggere tutti i dati anomali mediante l'introduzione di opportune *dummy*.

---

| Equazione          | $\Delta p_{us}$ | $\Delta p_{au}$ | $\Delta s$ | $\Delta i_{us}$ | $\Delta i_{au}$ | $\Delta s\&p$ | $\Delta mx$ |
|--------------------|-----------------|-----------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|-------------|
| ARCH               | 12.4            | 0.1             | 2.5        | 1.1             | 7.8             | 0.6           | 0.0         |
|                    | [0.00]          | [0.92]          | [0.27]     | [0.56]          | [0.02]          | [0.71]        | [0.95]      |
| Normalità          | 5.0             | 48.3            | 1.5        | 13.3            | 16.8            | 0.6           | 2.8         |
|                    | [0.07]          | [0.00]          | [0.47]     | [0.00]          | [0.00]          | [0.72]        | [0.24]      |
| Asimmetria         | -0.1            | 1.6             | -0.1       | -0.6            | -0.6            | 0.0           | 0.0         |
| Curtosi            | 3.7             | 11.9            | 2.5        | 4.8             | 5.1             | 3.1           | 2.2         |
| S.E. $\times 10^3$ | 3.8             | 4.6             | 39.7       | 0.8             | 1.1             | 47.1          | 49.8        |

Tabella 3.11: *Test* della Specificazione Univariata. I termini [.] esprimono i relativi p-value. S.E. è la deviazione standard dei residui.

Nella Figura (3.3) si considerano invece le funzioni di autocorrelazione dei residui standardizzati delle singole variabili.

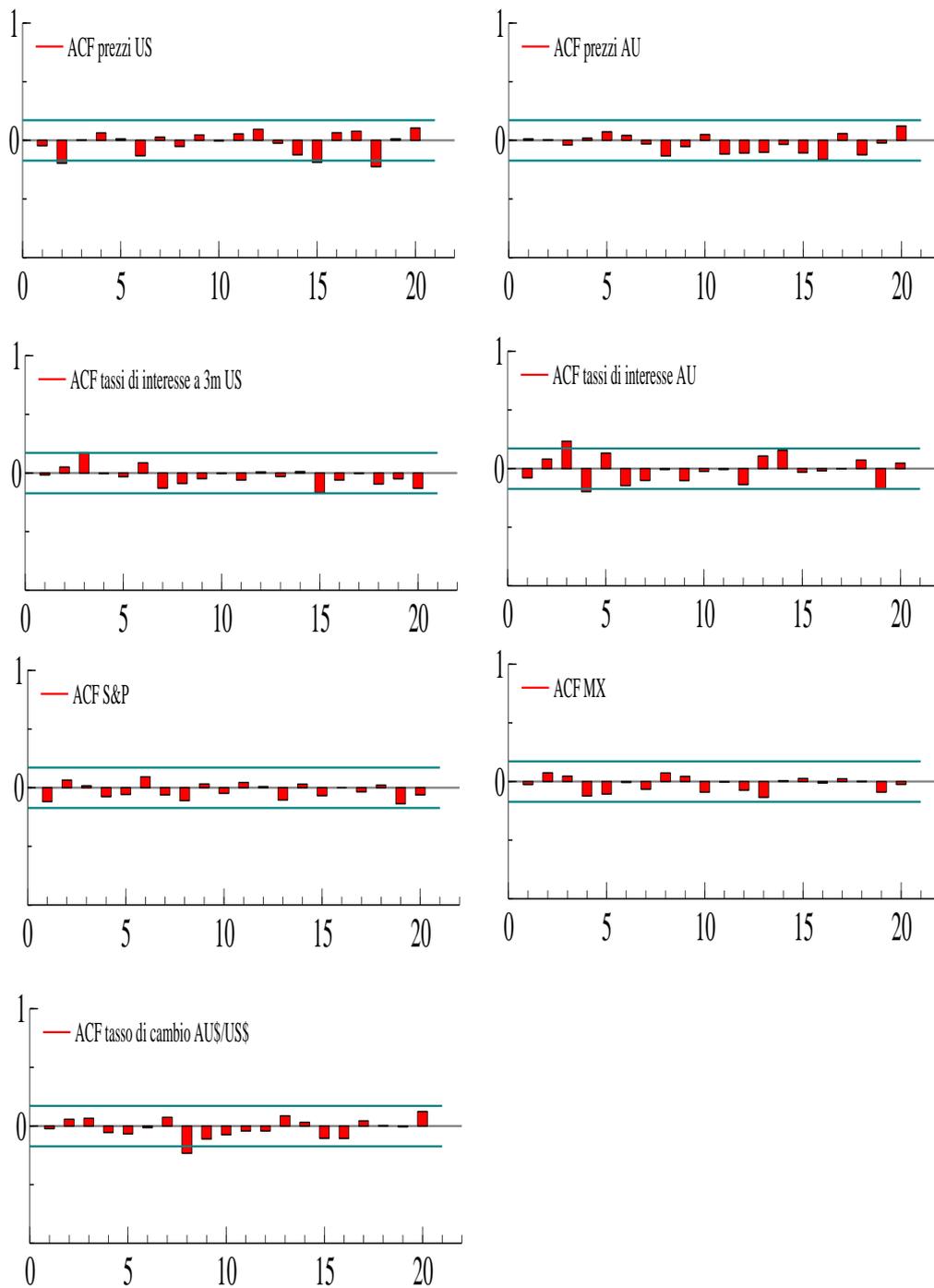


Figura 3.3: ACF è la funzione di autocorrelazione dei residui standardizzati.

Per quanto concerne il numero di relazioni di cointegrazione sottostanti il modello (Tavola 3.12), il test della Traccia conferma la scelta individuata in presenza dell'indice dei prezzi delle materie prime australiane, con due relazioni di cointegrazione ( $r = 2$ ) a cui si aggiungono due *trend* stocastici I(1) ( $s_1 = 2$ ) e tre *trend* stocastici I(2) ( $s_2 = 3$ ).

| $k - r$ | $r$ | $s_2 = 6$ | $s_2 = 5$ | $s_2 = 4$ | $s_2 = 3$    | $s_2 = 2$ | $s_2 = 1$ | $s_2 = 0$ |
|---------|-----|-----------|-----------|-----------|--------------|-----------|-----------|-----------|
| 6       | 1   | 453.7     | 369.9     | 298.6     | 244.5        | 202.9     | 165.8     | 158.8     |
|         |     | [0.00]    | [0.00]    | [0.00]    | [0.01]       | [0.01]    | [0.10]    | [0.07]    |
| 5       | 2   |           | 289.6     | 213.0     | <b>147.5</b> | 107.8     | 98.9      | 92.5      |
|         |     |           | [0.00]    | [0.02]    | [0.32]       | [0.69]    | [0.54]    | [0.54]    |
| 4       | 3   |           |           | 139.3     | 95.8         | 75.4      | 61.2      | 53.8      |
|         |     |           |           | [0.32]    | [0.76]       | [0.69]    | [0.73]    | [0.73]    |
| 3       | 4   |           |           |           | 66.2         | 46.1      | 31.8      | 24.2      |
|         |     |           |           |           | [0.75]       | [0.88]    | [0.96]    | [0.96]    |
| 2       | 5   |           |           |           |              | 22.0      | 14.2      | 10.9      |
|         |     |           |           |           |              | [0.99]    | [0.97]    | [0.96]    |
| 1       | 6   |           |           |           |              |           | 3.8       | 2.0       |
|         |     |           |           |           |              |           | [0.96]    | [0.96]    |

Tabella 3.12: *Test* della Traccia.  $k$  è il numero delle variabili;  $r$  il numero delle cointegrazioni;  $s_2$  il numero dei *trend* I(2). I termini [.] esprimono i p-value.

Si valutano poi due possibili alternative (Tavola 3.13): il caso in cui il numero di relazioni di cointegrazione continui ad essere pari a due ( $r = 2$ ) con l'assenza di *trend* stocastici I(2) ( $s_2 = 0$ ) e quello immediatamente successivo alla scelta effettuata, con un aumento di una unità del numero di *trend* stocastici I(1) ( $s_1 = 3$ ), a scapito di quelli I(2) ( $s_2 = 2$ ). Si osserva come la non inclusione di *trend* I(2)

---

comporti l'esistenza di almeno due radici prossime all'unità (0.90) e quindi l'indeguatezza di una simile soluzione. Per quel che riguarda invece l'altra soluzione ( $r = 2, s_1 = 3, s_2 = 2$ ), si è trovato che sia meno robusta nell'interpretazione economica dei dati rispetto a quella scelta.

|         |           |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $r = 2$ | $s_2 = 0$ | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.90 | 0.90 | 0.68 | 0.38 |
| $r = 2$ | $s_2 = 2$ | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.62 | 0.37 |
| $r = 2$ | $s_2 = 3$ | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.53 |

Tabella 3.13: Per  $r=2$ , le maggiori radici caratteristiche (in modulo).

La validità di una simile soluzione trova poi conferma, da un lato, nei grafici della Figura (3.4), in cui si osserva l'assenza di *trend* nei polinomi di cointegrazione sia nella formulazione  $\beta'x_t$  che in quella  $\mathbf{R}$  e, dall'altro, nell'elevato numero di coefficienti  $\alpha$  significativi (Tavola 3.14).

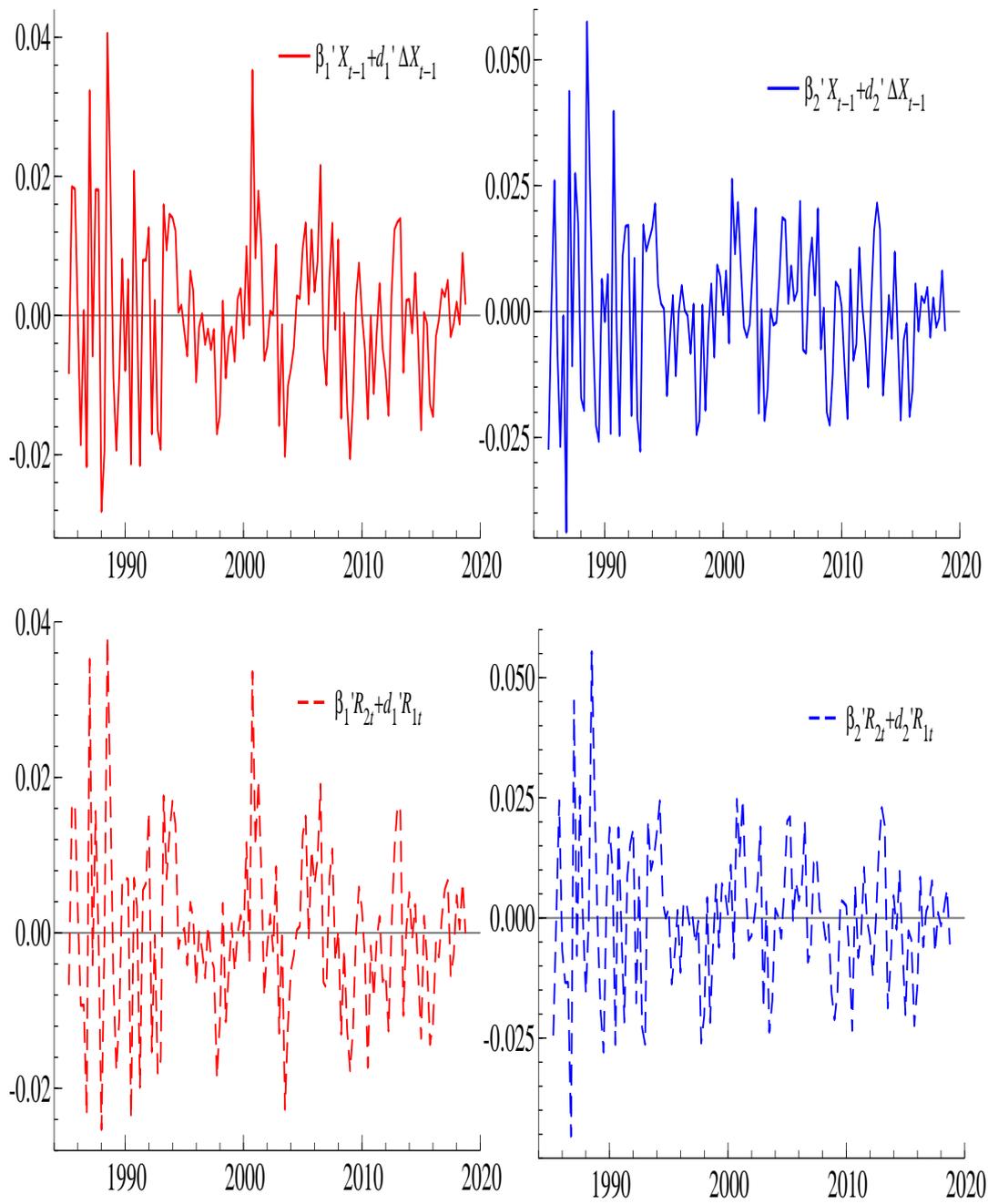


Figura 3.4: In alto le due cointegrazioni  $\beta' x_t$ ; In basso le rispettive versioni **R**.

Nella Tavola (3.14) vengono riportati i coefficienti dei due polinomi di cointegrazione che vengono identificati ponendo sui coefficienti  $\beta$  sei vincoli. Questi ultimi non sono stati respinti, avendo un  $\chi^2 = 4.09$  e un p-value= 0.53.

|                      | $p_{us}$     | $p_{au}$    | $s$    | $i_{us}$    | $i_{au}$    | $s\&p$       | $mx$         | $trend$ |
|----------------------|--------------|-------------|--------|-------------|-------------|--------------|--------------|---------|
| $\beta_1$            | -0.03        | 0.03        | 0.03   | 1.00        | -1.00       | 0.01         | -0.01        | 0.00    |
|                      | [-10.6]      | [10.6]      | [10.6] |             |             | [4.2]        | [-6.4]       |         |
| $d_1$                | <b>0.25</b>  | 0.78        | 0.03   | 0.01        | <b>0.02</b> | <b>-0.22</b> | <b>0.23</b>  | 0.09    |
|                      | [5.5]        | [5.8]       | [1.4]  | [2.4]       | [3.2]       | [-7.9]       | [4.6]        | [10.7]  |
| $\alpha_1$           | <b>-0.77</b> | -1.35       | 1.51   | -0.02       | 0.06        | -3.17        | <b>-1.19</b> |         |
|                      | -            | [-7.0]      | [-9.9] | -           | -           | [-2.3]       | -            |         |
| $\beta_2$            | -0.10        | 0.06        | 0.06   | 1.00        | -1.00       | 0.02         | -0.02        | 0.00    |
|                      | [-8.1]       | [5.6]       | [14.8] |             |             | [7.9]        | [-7.9]       |         |
| $d_2$                | <b>0.15</b>  | 0.51        | 0.14   | 0.00        | 0.00        | <b>-0.35</b> | <b>0.28</b>  | -0.30   |
|                      | [2.5]        | [2.9]       | [4.4]  | -           | -           | [-9.9]       | [4.4]        | [11.6]  |
| $\alpha_2$           | <b>0.62</b>  | <b>0.69</b> | -1.97  | <b>0.04</b> | -0.02       | 3.94         | 0.24         |         |
|                      | [7.9]        | [7.1]       | [-2.4] | [2.6]       | -           | [4.0]        | -            |         |
| $\beta'_{\perp 1,1}$ | -0.04        | -0.06       | 0.00   | 1.00        | 0.99        | -0.01        | 0.10         | 0.00    |
| $\beta'_{\perp 1,2}$ | 0.47         | -0.01       | 1.00   | 0.00        | 0.02        | 0.39         | -0.21        | 0.00    |

Tabella 3.14: I Polinomi di Cointegrazione e i vettori  $\beta_{\perp 1}$ . In grassetto i coefficienti  $d$  ed  $\alpha$  *error-increasing* rispetto a  $\beta'x_t$ ; I termini [.] esprimono le t di Student; I trattini sostituiscono le |t di Student|  $\leq 1.6$ .

La prima relazione di cointegrazione che emerge dalla Tavola (3.14) richiama la Parità Scoperta dei Tassi di Interesse aggiustata per l'incertezza (UA-UIP 1.9) ed è pari a:

---


$$i_{au,t} - i_{us,t} = 0.03(p_{au,t} - p_{us,t} + s_t) + 0.01(mx_t - s\&p_t) + d'_1 \Delta x_t + \varepsilon_t \quad (3.5)$$

con

$$\begin{aligned} d'_1 \Delta x_t \approx & 0.25 \Delta p_{us,t} + 0.78 \Delta p_{au,t} + 0.03 \Delta s_t + 0.01 \Delta i_{us,t} \\ & + 0.02 \Delta i_{au,t} - 0.22 \Delta s\&p_t + 0.23 \Delta mx_t + 0.09 \text{const} \end{aligned}$$

Come si evince dal confronto della (3.5) con la (3.3), il passaggio da un modello che include il prezzo delle materie prime ad un che lo esclude ha come prima conseguenza quella di ridurre il coefficiente della deviazione dalla PPP e di aumentare i tempi della sua correzione.

Per quel che riguarda gli aggiustamenti di lungo periodo ( $d_1$ ), la Tavola (3.14) indica un comportamento deviante ( $d_{ij}\beta_{ij} < 0$ ) in entrambi gli indici di borsa (S&P, MX), mentre le singole componenti dei differenziali dei tassi di interesse e dei prezzi dei due paesi spingono in direzioni opposte. Con riferimento, invece, all'accelerazione ( $\alpha_1$ ) nell'aggiustamento del vettore di cointegrazione ( $\beta'_1 x_{t-1}$ ), si registra un effetto destabilizzante ( $\alpha_{ij}\beta_{ij} > 0$ ) da parte dei prezzi dei beni statunitensi e dell'indice di borsa australiano.

Il secondo polinomio di cointegrazione (3.6), mette in risalto il legame tra il differenziale dei tassi di interesse e quello degli indici di borsa dei due paesi - anche se gli effetti maggiori si hanno sui due indici dei prezzi dei beni e sul tasso di cambio.

---


$$\begin{aligned}
i_{au,t} - i_{us,t} &= 0.02(s\&p_t - mx_t) + 0.06p_{au,t} \\
&- 0.10p_{us,t} + 0.06s_t + d'_2\Delta x_t + \varepsilon_t
\end{aligned} \tag{3.6}$$

con

$$\begin{aligned}
d'_2\Delta x_t &\approx 0.15\Delta p_{us,t} + 0.51\Delta p_{au,t} + 0.14\Delta s_t \\
&- 0.35\Delta s\&p_t + 0.28\Delta mx_t - 0.30const.
\end{aligned}$$

Dalla Tavola (3.14) si nota come gli aggiustamenti di lungo periodo ( $d_2$ ) per il secondo polinomio di cointegrazione sono caratterizzati da un comportamento deviante ( $d_{ij}\beta_{ij} < 0$ ) soprattutto da parte degli indici azionari dei due paesi. Per ciò che attiene la velocità nell'aggiustamento ( $\alpha_2$ ) nei confronti del vettore di cointegrazione  $\beta'_2 x_{t-1}$ , si osserva un comportamento destabilizzante ( $\alpha_{ij}\beta_{ij} > 0$ ) principalmente da parte dei prezzi dei beni dei due paesi.

Con riguardo agli aggiustamenti di medio periodo ( $\zeta'\tau'$ ), la Tavola (3.15) riporta gli effetti delle singole variabili. Si osserva, in particolare, come il legame tra la variazione dell'inflazione australiana ( $\Delta^2 p_{us,t}$ ) e la variazione dei tassi di interesse australiani ( $\Delta i_{au}$ ) è del tipo *error-increasing* ( $\zeta_{ij}\tau_{ij} > 0$ ) e di come il tasso di crescita dei tassi di interesse di ciascun paese ( $\Delta^2 i_{us,t}$ ,  $\Delta^2 i_{au,t}$ ) lo è nei confronti della variazione dei tassi di interesse dell'altro ( $\Delta i_{au}$  e  $\Delta i_{us}$ ).

---

|                     | $\Delta p_{us}$ | $\Delta p_{au}$ | $\Delta s$ | $\Delta i_{us}$ | $\Delta i_{au}$ | $\Delta s\&p$ | $\Delta mx$ | $const$ |
|---------------------|-----------------|-----------------|------------|-----------------|-----------------|---------------|-------------|---------|
| $\Delta^2 p_{us,t}$ | <b>0.67</b>     | <b>0.20</b>     | -0.04      | -0.09           | <b>0.41</b>     | <b>0.02</b>   | <b>0.02</b> | 0.00    |
|                     | [-8.6]          | [6.9]           | [-5.8]     | -               | [2.2]           | [3.2]         | [2.1]       | [8.3]   |
| $\Delta^2 p_{au,t}$ | <b>0.25</b>     | -0.18           | -0.06      | <b>0.76</b>     | <b>1.20</b>     | -0.06         | <b>0.12</b> | 0.00    |
|                     | [2.6]           | [-4.9]          | [-6.8]     | [2.2]           | [5.2]           | [-6.8]        | [9.7]       | [-3.1]  |
| $\Delta^2 s_t$      | 0.79            | -0.42           | -0.65      | 0.21            | 1.06            | -0.33         | <b>0.22</b> | 0.00    |
|                     | -               | -               | [-8.4]     | -               | -               | [-4.5]        | [2.2]       | -       |
| $\Delta^2 i_{us,t}$ | -0.04           | <b>0.01</b>     | 0.00       | -0.36           | <b>0.15</b>     | 0.00          | -0.00       | 0.00    |
|                     | [-2.4]          | [2.8]           | -          | [-5.5]          | [3.5]           | [3.2]         | [-3.3]      | [3.0]   |
| $\Delta^2 i_{au,t}$ | -0.07           | <b>0.03</b>     | 0.00       | <b>0.42</b>     | -0.46           | 0.00          | 0.00        | 0.00    |
|                     | [-3.2]          | [3.9]           | [3.3]      | [4.9]           | [-8.0]          | [2.6]         | [-3.1]      | [3.1]   |
| $\Delta^2 s\&p_t$   | 0.29            | 0.09            | -0.22      | -11.90          | 2.72            | -0.06         | -0.28       | 0.00    |
|                     | -               | -               | [-4.6]     | [-3.4]          | -               | -             | [-2.3]      | -       |
| $\Delta^2 mx$       | 0.16            | 0.25            | -0.15      | -15.20          | 3.29            | 0.29          | -0.45       | 0.00    |
|                     | -               | -               | -          | [-4.1]          | -               | -             | [-3.5]      | -       |

---

Tabella 3.15: I coefficienti  $\zeta'\tau'$ . In grassetto le variabili *error-increasing*; I termini [.] esprimono le t di Student; I trattini sostituiscono le  $|t \text{ di Student}| \leq 1.6$ .

Con riferimento, invece, ai *trend* stocastici I(2) della rappresentazione a media mobile del VAR, si osserva (Tavola 3.16) come il primo *trend* stocastico è il risultato principalmente di una combinazione del vettore  $\alpha_{\perp 2,1}$  con gli *shock* relativi agli indici dei prezzi dei beni dei due paesi che, tramite i coefficienti di carico  $\check{\beta}_{\perp 2,1}$ , riversano i propri effetti maggiormente sugli indici azionari. Il secondo *trend* I(2) è generato soprattutto dalla combinazione del vettore  $\alpha_{\perp 2,2}$  con gli *shock* relativi al tasso di interesse americano e, tramite il vettore di carico  $\check{\beta}_{\perp 2,2}$ , ha ripercussioni su entrambi gli indici borsistici. Il terzo *trend* è generato principalmente dalla combinazione del vettore  $\alpha_{\perp 2,3}$  con gli *shock* riguardanti i tassi di interesse australiani che si riversano, attraverso il coefficiente di carico  $\check{\beta}_{\perp 2,3}$ , maggiormente sugli

---

indici di borsa dei due paesi e poi sui prezzi dei beni australiani.

|                                | $p_{us}$ | $p_{au}$ | $s$   | $i_{us}$ | $i_{au}$ | $s\&p$ | $mx$  |
|--------------------------------|----------|----------|-------|----------|----------|--------|-------|
| $\check{\beta}_{\perp 2,1}$    | -0.04    | -0.18    | 0.05  | -0.04    | -0.06    | 0.43   | 0.95  |
| $\check{\beta}_{\perp 2,2}$    | -0.26    | 0.06     | -0.24 | 0.57     | 0.78     | -7.3   | -14.8 |
| $\check{\beta}_{\perp 2,3}$    | 0.42     | 1.84     | 0.68  | 0.15     | 0.24     | -3.94  | -3.18 |
| Le stime dei <i>Trend</i> I(2) |          |          |       |          |          |        |       |
| $\alpha'_{\perp 2,1}$          | 1.00     | -0.50    | -0.64 | 0.00     | 0.00     | -0.40  | 0.19  |
|                                |          | [-3.5]   | -     |          |          | -      | -     |
| $\alpha'_{\perp 2,2}$          | 0.00     | 0.01     | -0.02 | 1.00     | 0.00     | -0.02  | 0.00  |
|                                |          | -        | -     |          |          | [-1.8] | -     |
| $\alpha'_{\perp 2,3}$          | 0.00     | 0.03     | -0.06 | 0.00     | 1.00     | -0.03  | 0.02  |
|                                |          | [3.0]    | -     |          |          | -      | -     |

Tabella 3.16: *Trend* stocastici I(2) e relativi pesi. I termini [.] esprimono le t di Student; I trattini sostituiscono le  $|t \text{ di Student}| \leq 1.6$ .

Il passo successivo è quello di verificare se le variabili del nostro modello, o una loro combinazione, possono essere considerate integrate di ordine uno (ipotesi nulla), oppure integrate di ordine due (ipotesi alternativa). A tal proposito si ricorre al LR test (Tavola 3.17), dal quale emerge che il tasso di cambio ( $s_t$ ), ipotesi  $\mathcal{H}_4$ , e il differenziale dei tassi di interesse dei due paesi ( $i_{us} - i_{au}$ ), ipotesi  $\mathcal{H}_6$ , possono essere considerati I(1), avendo rispettivamente un p-value di 0.07 e di 0.48.

Per quanto riguarda invece la possibilità di semplificare l'analisi attraverso il passaggio da un modello I(2) a un modello I(1), i LR test effettuati danno esito negativo, sia nella sostituzione del vettore di variabili:

$$x'_t = [p_{us,t}, p_{au,t}, s_t, i_{us,t}, i_{au,t}, s\&p, mx]$$

con il vettore in cui si assume l'omogeneità dei prezzi dei beni dei due paesi:

$$\bar{x}'_t = [p_{au,t} - p_{us,t}, \Delta p_{au,t}, \Delta s_t, i_{us,t}, i_{au,t}, \Delta s\&p, \Delta mx]$$

sia con quello in cui si assume uno stesso *trend* stocastico tra il tasso di cambio ( $s_t$ ) e il differenziale dei prezzi dei beni (ppp):

$$\check{x}'_t = [s_t - ppp, \Delta p_{us,t}, \Delta p_{au,t}, i_{us,t}, i_{au,t}, \Delta s\&p, \Delta mx]$$

|                    | $p_{us}$ | $p_{au}$ | $s$  | $i_{us}$ | $i_{au}$ | $s\&p$ | $mx$ | $\chi^2(\nu)$ | p-value |
|--------------------|----------|----------|------|----------|----------|--------|------|---------------|---------|
| $\mathcal{H}_1$    | 1.0      | -        | -    | -        | -        | -      | -    | 47.5 (4)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_2$    | -        | 1.0      | -    | -        | -        | -      | -    | 59.5 (4)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_3$    | 1.0      | -1.0     | -    | -        | -        | -      | -    | 32.5 (4)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_4$    | -        | -        | 1.0  | -        | -        | -      | -    | 8.5 (4)       | [0.07]  |
| $\mathcal{H}_5$    | -1.0     | 1.0      | -1.0 | -        | -        | -      | -    | 13.7 (4)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_6$    | -        | -        | -    | 1.0      | -        | -      | -    | 23.8 (4)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_7$    | -        | -        | -    | -        | 1.0      | -      | -    | 13.8 (4)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_8$    | -        | -        | -    | 1.0      | -1.0     | -      | -    | 3.47 (4)      | [0.48]  |
| $\mathcal{H}_9$    | -        | -        | -    | -        | -        | 1.0    | -    | 37.6 (4)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_{10}$ | -        | -        | -    | -        | -        | -      | 1.0  | 20.8 (4)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_{11}$ | -        | -        | -    | -        | -        | 1.0    | -1.0 | 18.6 (4)      | [0.00]  |

Tabella 3.17: *Test* sull'ipotesi I(1) contro l'ipotesi I(2)

---

### 3.6 Esclusione degli Indici Azionari

Infine si stima un VAR nel quale si sostituiscono agli indici di borsa i tassi di interesse a lunga dei due paesi. In questo modo si ha la possibilità di effettuare un confronto tra l'impostazione seguita e quella percorsa da altri autori in precedenza [Juselius and Assenmacher, 2017].

Si procede in primo luogo ad effettuare i test sulla specificazione multivariata e univariata. Premettendo che il numero di gradi a disposizione non permette di spiegare tutti i valori anomali, la Tavola (3.18) mostra come non sia possibile rifiutare la non autocorrelazione del primo e del secondo ordine, mentre con riferimento alla normalità e alla non eteroschedasticità delle specificazione multivariata si rifiutano tutte le ipotesi.

---

| Autocorrelazione |              | Normalità    | ARCH          |                |
|------------------|--------------|--------------|---------------|----------------|
| Ordine 1         | Ordine 2     |              | Ordine 1      | Ordine 2       |
| $\chi^2(49)$     | $\chi^2(49)$ | $\chi^2(14)$ | $\chi^2(784)$ | $\chi^2(1568)$ |
| 54.8             | 58.7         | 120.8        | 1077.1        | 1940.1         |
| [0.26]           | [0.16]       | [0.00]       | [0.00]        | [0.00]         |

---

Tavola 3.18: Test della Specificazione Multivariata. I termini [.] esprimono i relativi p-value.

Nella Tavola (3.19), si registra come l'ipotesi di normalità non possa essere respinta per l'indice dei prezzi e per i tassi di interesse a lunga americani, nonché per il tasso di cambio.

---

| Equazione          | $\Delta p_{us}$ | $\Delta p_{au}$ | $\Delta s$ | $\Delta i_{us}$ | $\Delta i_{au}$ | $\Delta b_{au}$ | $\Delta b_{us}$ |
|--------------------|-----------------|-----------------|------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ARCH               | 6.0             | 0.1             | 2.3        | 0.7             | 2.5             | 0.5             | 1.1             |
|                    | [0.04]          | [0.94]          | [0.30]     | [0.67]          | [0.27]          | [0.76]          | [0.55]          |
| Normalità          | 3.7             | 64.5            | 0.0        | 24.2            | 20.5            | 6.5             | 2.4             |
|                    | [0.15]          | [0.00]          | [0.98]     | [0.00]          | [0.00]          | [0.03]          | [0.29]          |
| Asimmetria         | -0.1            | 1.1             | 0.0        | -0.4            | -0.6            | 0.0             | 0.1             |
| Curtosi            | 3.5             | 10.6            | 2.8        | 5.5             | 5.6             | 3.8             | 3.4             |
| S.E. $\times 10^3$ | 3.4             | 4.5             | 38.8       | 0.7             | 1.0             | 1.0             | 0.7             |

Tabella 3.19: *Test* della Specificazione Univariata. I termini [.] esprimono i relativi p-value. S.E. è la deviazione standard dei residui.

Nella Figura (3.5) si considerano invece le funzioni di autocorrelazione dei residui standardizzati delle singole variabili.

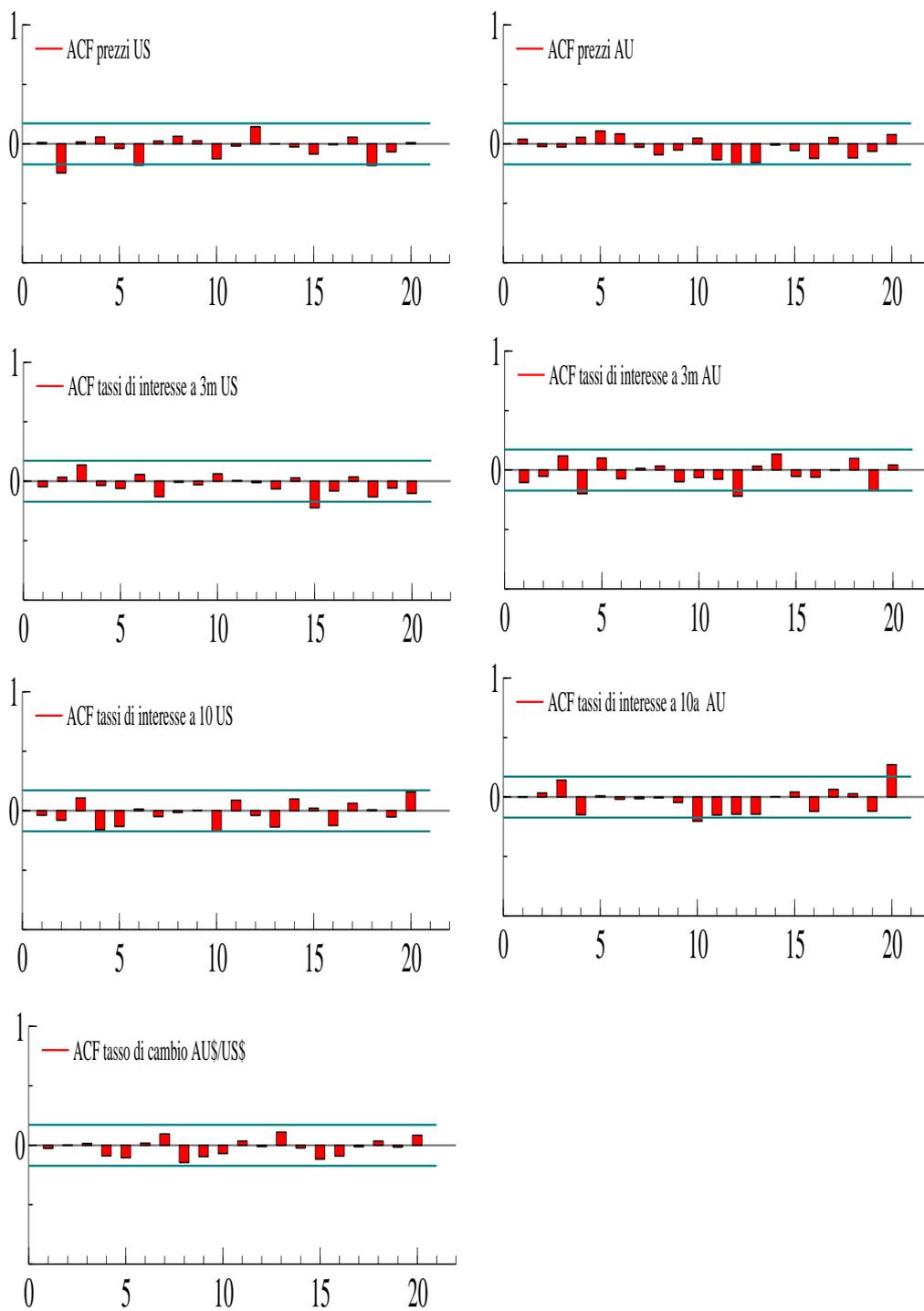


Figura 3.5: ACF è la funzione di autocorrelazione dei residui standardizzati.

A questo punto, attraverso il *test* della Traccia (Tavola 3.20) si procede all'individuazione del numero delle relazioni di cointegrazione. Dalla Tavola emerge che sia partendo dall'ipotesi in alto a sinistra, in cui si considera un'unica relazione di cointegrazione ( $r = 1$ ) e sei *trend* stocastici I(2) ( $s_2 = 6$ ), che da quella in basso a destra, in cui il numero di relazioni di cointegrazione  $r = 6$  e il numero di *trend* stocastici I(2) è zero ( $s_2 = 0$ ), si giunge a non respingere l'ipotesi di un CVAR con due relazioni di cointegrazione, tre *trend* stocastici I(1) e due *trend* stocastici I(2) ( $r = 2, s_1 = 3, s_2 = 2$ ). Si osserva anche che la sostituzione all'interno del modello degli indici azionari con i tassi di interesse sui titoli governativi a dieci anni ha come prima conseguenza quella di aumentare di una unità il numero di *trend* stocastici I(1) e diminuire di una unità quelli I(2).

| $k - r$ | $r$ | $s_2 = 6$ | $s_2 = 5$ | $s_2 = 4$ | $s_2 = 3$ | $s_2 = 2$    | $s_2 = 1$ | $s_2 = 0$ |
|---------|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------|-----------|-----------|
| 6       | 1   | 569.9     | 453.4     | 363.1     | 287.1     | 222.4        | 174.8     | 163.0     |
|         |     | [0.00]    | [0.00]    | [0.00]    | [0.00]    | [0.03]       | [0.14]    | [0.10]    |
| 5       | 2   |           | 356.4     | 267.3     | 200.8     | <b>142.5</b> | 122.6     | 107.3     |
|         |     |           | [0.00]    | [0.00]    | [0.05]    | [0.27]       | [0.16]    | [0.24]    |
| 4       | 3   |           |           | 196.1     | 133.4     | 98.0         | 83.6      | 68.7      |
|         |     |           |           | [0.03]    | [0.23]    | [0.37]       | [0.38]    | [0.47]    |
| 3       | 4   |           |           |           | 92.8      | 75.3         | 50.7      | 41.8      |
|         |     |           |           |           | [0.36]    | [0.28]       | [0.59]    | [0.58]    |
| 2       | 5   |           |           |           |           | 44.0         | 33.0      | 24.7      |
|         |     |           |           |           |           | [0.55]       | [0.44]    | [0.44]    |
| 1       | 6   |           |           |           |           |              | 18.0      | 9.3       |
|         |     |           |           |           |           |              | [0.38]    | [0.51]    |

Tabella 3.20: *Test* della Traccia.  $k$  è il numero delle variabili;  $r$  il numero delle cointegrazioni;  $s_2$  il numero dei *trend* I(2). I termini [.] esprimono i relativi p-value

Al fine di verificare la validità della scelta effettuata, si analizza che i polinomi di cointegrazione, nella versione  $\beta'X_t$  e in quella ridotta  $\mathbf{R}$  siano caratterizzati dall'assenza di *trend*. La Figura (3.6) mostra che questo è il caso.

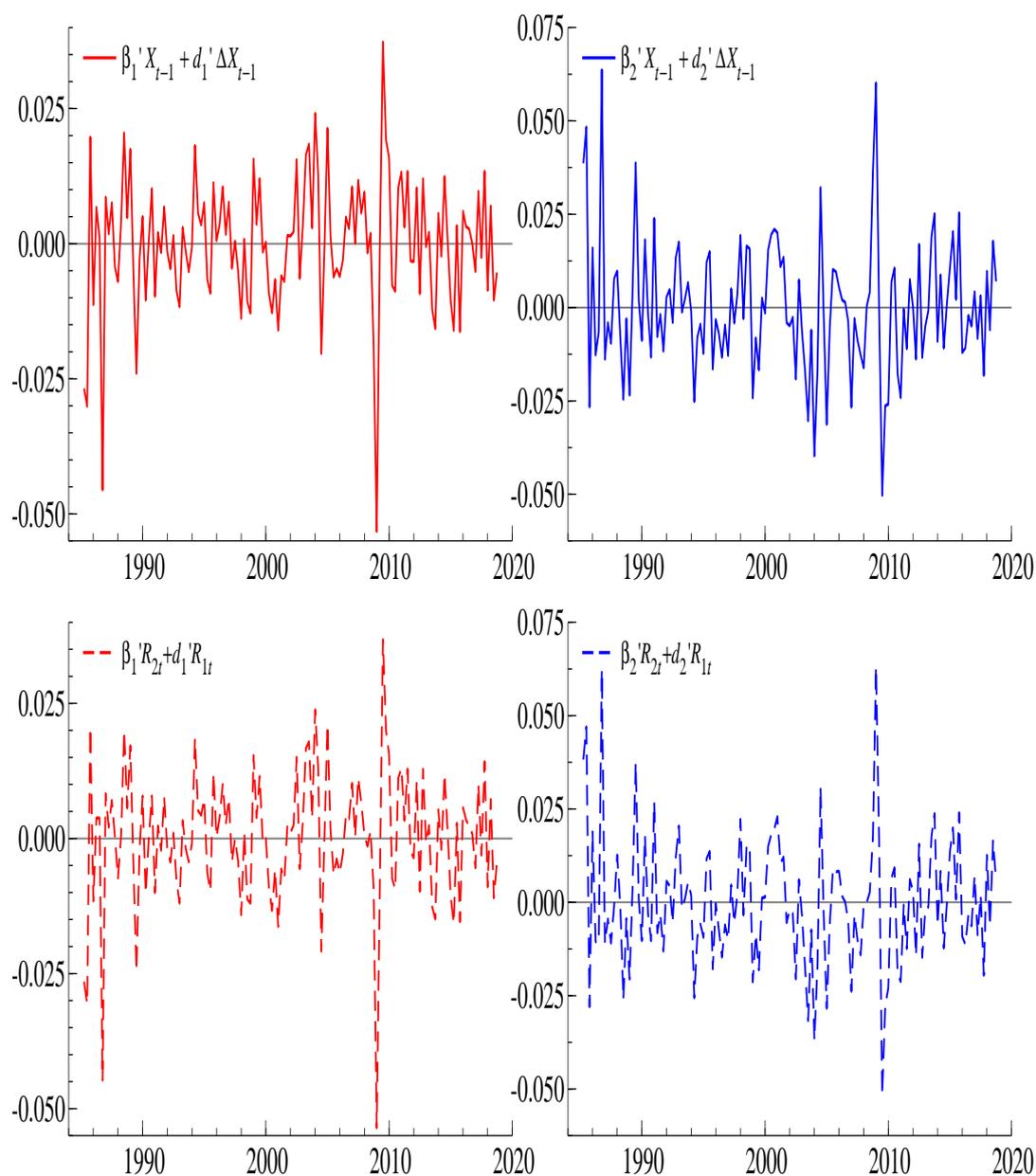


Figura 3.6: In alto le due cointegrazioni  $\beta'x_t$ ; In basso le rispettive versioni  $\mathbf{R}$ .

---

La bontà della scelta effettuata viene vagliata anche attraverso il confronto con le radici caratteristiche di altre due alternative possibili (Tavola 3.21), nelle quali si considerano sia il caso di assenza di *trend* stocastici I(2) ( $r = 2, s_1 = 5, s_2 = 0$ ) sia quello caratterizzato da tre relazioni di cointegrazione, un *trend* stocastico I(1) e tre *trend* stocastici I(2) ( $r = 3, s_1 = 1, s_2 = 3$ ). Nella Tavola (3.21) si evidenzia come il caso in cui si escludono i *trend* stocastici I(2) comporta l'esistenza di almeno una radice caratteristica prossima all'unità (0.88), che si traduce in un processo prossimo alla non stazionarietà. La soluzione alternativa, invece, non è stata scelta principalmente per il vincolo dei gradi di libertà ( $\nu = 2$ ).

|         |           |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------|-----------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $r = 2$ | $s_2 = 0$ | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.88 | 0.66 | 0.66 |
| $r = 2$ | $s_2 = 2$ | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.53 |
| $r = 3$ | $s_2 = 3$ | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 0.45 |

Tabella 3.21: Per  $r=2$  e  $r=3$ , le maggiori radici caratteristiche (in modulo).

Un'ultima verifica che può essere fatta, prima di escludere combinazioni alternative di relazioni di cointegrazione e *trend* stocastici, è quella di accertarsi che il numero dei coefficienti  $\alpha$  significativi sia sufficientemente grande. La Tavola (3.22) mostra che questo è il caso.

Nella Tavola (3.22) vengono riportati i coefficienti dei due polinomi di cointegrazione a cui si è giunti imponendo sei vincoli. Sia la prima che la seconda relazione di cointegrazione richiamano la Parità Scoperta dei Tassi di Interesse Aggiustata per l'Incertezza, UA-UIP (1.9).

---

|                      | $p_{us}$     | $p_{au}$     | $s$          | $i_{us}$    | $i_{au}$    | $b_{au}$ | $b_{us}$    | $p_{co}$ | $trend$ |
|----------------------|--------------|--------------|--------------|-------------|-------------|----------|-------------|----------|---------|
| $\beta_1$            | -0.01        | 0.01         | 0.01         | 0.10        | -0.10       | -0.81    | 1.00        | 0.00     | 0.00    |
|                      | [-9.3]       | [9.3]        | [9.3]        | [-3.6]      | [3.6]       | [-29.5]  |             | [-5.1]   |         |
| $d_1$                | -0.20        | 0.03         | 0.24         | 0.00        | 0.00        | 0.00     | 0.00        | -0.03    | 0.02    |
|                      | [-1.9]       | -            | [3.5]        | [-3.0]      | [-3.0]      | -        | [-2.7]      | [-1.9]   | [6.6]   |
| $\alpha_1$           | <b>-0.79</b> | -3.28        | -6.48        | 0.04        | 0.32        | 0.13     | -0.02       |          |         |
|                      | [-3.7]       | [-11.5]      | [-2.7]       | -           | [5.0]       | [2.1]    | -           |          |         |
| $\beta_2$            | 0.01         | -0.01        | -0.01        | -0.04       | -0.34       | 1.00     | -1.00       | 0.00     | 0.00    |
|                      | [10.5]       | [-10.5]      | [-10.5]      | -           | [-9.0]      |          |             | [5.9]    |         |
| $d_2$                | 0.79         | <b>0.29</b>  | -0.34        | <b>0.01</b> | <b>0.01</b> | 0.00     | <b>0.01</b> | 0.01     | -0.04   |
|                      | [4.7]        | [3.3]        | [-3.2]       | [4.2]       | [4.1]       | [4.3]    | [4.5]       | -        | [-8.3]  |
| $\alpha_2$           | -1.06        | <b>-1.27</b> | <b>-1.52</b> | -0.01       | 0.03        | -0.03    | -0.02       |          |         |
|                      | [-11.2]      | [-10.2]      | -            | -           | -           | -        | -           |          |         |
| $\beta'_{\perp 1,1}$ | 0.00         | 0.00         | 0.00         | 1.00        | -0.61       | 0.00     | 0.17        | 0.00     | 0.00    |
| $\beta'_{\perp 1,2}$ | -0.03        | 0.00         | 0.02         | 0.00        | 0.77        | 1.00     | 0.73        | 0.00     | 0.00    |
| $\beta'_{\perp 1,3}$ | -0.67        | 1.00         | -0.70        | 0.00        | -0.02       | 0.00     | 0.00        | 0.01     | 0.00    |

Tabella 3.22: Polinomi di Cointegrazione e vettori  $\beta_{\perp}$ . In grassetto le variabili *error-increasing*; I termini [.] esprimono le t di Student; I trattini sostituiscono le  $|t \text{ di Student}| \leq 1.6$ .

Il primo polinomio di cointegrazione (3.7), oltre a stabilire la relazione che lega il differenziale dei tassi di interesse a breve alla deviazione dalla PPP, mostra il forte legame esistente tra i tassi a breve e quelli a lunga. Gli aggiustamenti di lungo periodo ( $d_1$ ) del vettore di cointegrazione mostrano soprattutto contributi del tipo *error-correcting* ( $d_{ij}\beta_{ij} > 0$ ). In termini di accelerazione ( $\alpha_1$ ), gli aggiustamenti a  $\beta'_1 x_{t-1}$  evidenziano una azione di riequilibrio ( $\alpha_{ij}\beta_{ij} < 0$ ) da parte del tasso di cambio e dei prezzi dei beni australiani.

---


$$i_{au,t} - i_{us,t} = 0.1(p_{au,t} - p_{us,t} + s_t) + 10b_{us} - 8.1b_{au} + d'_1 \Delta x_t + \varepsilon_t \quad (3.7)$$

con

$$d'_1 \Delta x_t \approx -0.2 \Delta p_{us,t} + 0.24 \Delta s_t - 0.03 \Delta p_{co,t} + 0.02 \text{const}$$

Il secondo polinomio di cointegrazione (3.8) pone invece l'accento sul legame esistente tra il differenziale dei tassi di interesse a dieci anni e la deviazione dalla PPP. Si osserva anche in questo caso il forte legame esistente tra il differenziale dei tassi di interesse a lunga e il tasso di interesse a breve australiano. Con riferimento agli aggiustamenti di lungo periodo ( $d_2$ ), si registra un effetto correttivo ( $\alpha_{ij}\beta_{ij} < 0$ ) del tasso di cambio e del differenziale dei prezzi dei beni dei due paesi. Per quel che riguarda la velocità di aggiustamento ( $\alpha_2$ ) al vettore di cointegrazione  $\beta'_2 x_t$  si osserva un effetto deviante da parte del tasso di cambio e dell'indice dei prezzi australiani ( $\alpha_{ij}\beta_{ij} > 0$ ).

$$b_{us,t} - b_{au,t} = 0.01(p_{us,t} - p_{au,t} - s_t) - 0.34i_{au} + d'_2 \Delta x_t + \varepsilon_t \quad (3.8)$$

con

$$\begin{aligned} d'_2 \Delta x_t \approx & -0.79 \Delta p_{us,t} + -0.29 \Delta p_{au,t} - 0.34 \Delta s_t + 0.01 \Delta i_{us,t} \\ & + 0.01 \Delta i_{au,t} + 0.01 \Delta b_{us,t} - 0.04 \text{const} \end{aligned}$$

Con riferimento agli aggiustamenti di medio periodo ( $\zeta'\tau'$ ), dalla Tavola (3.23), si rileva un effetto deviante ( $\zeta_{ij}\tau_{ij} > 0$ ) della variazione dell'inflazione australiana ( $\Delta^2 p_{au,t}$ ) sulla variazione dei propri tassi a breve ( $\Delta i_{au}$ ) e un effetto correttivo ( $\zeta_{ij}\tau_{ij} < 0$ ) sulla variazione di quelli a lunga ( $\Delta b_{au}$ ). Il tasso di crescita del tasso di cambio ( $\Delta^2 s_t$ ) ha un effetto *error-increasing* sulle variazioni di tutti i tassi di interesse. Limitatamente ai tassi di crescita dei tassi di interesse a breve ( $\Delta^2 i_{us,t}$ ,  $\Delta^2 i_{au,t}$ ) si osserva un effetto *error-increasing* nei confronti delle variazioni dei tassi di interesse a lunga durata dei rispettivi paesi ( $\Delta b_{au}$ ,  $\Delta b_{us}$ ).

|                     | $\Delta p_{us}$ | $\Delta p_{au}$ | $\Delta s$  | $\Delta i_{us}$ | $\Delta i_{au}$ | $\Delta b_{au}$ | $\Delta b_{us}$ | $\Delta p_{co}$ | <i>const</i> |
|---------------------|-----------------|-----------------|-------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------|
| $\Delta^2 p_{us,t}$ | -0.17           | <b>0.24</b>     | -0.16       | 0.01            | 0.10            | -0.14           | 0.34            | <b>0.02</b>     | 0.00         |
|                     | [-5.3]          | [5.3]           | [-4.6]      | -               | -               | -               | -               | [4.0]           | [4.5]        |
| $\Delta^2 p_{au,t}$ | <b>0.25</b>     | -0.41           | <b>0.35</b> | 0.29            | <b>1.58</b>     | -1.33           | <b>1.06</b>     | -0.06           | 0.00         |
|                     | [6.0]           | [-6.6]          | [7.5]       | -               | [4.6]           | [-2.3]          | -               | [-7.8]          | [7.3]        |
| $\Delta^2 s_t$      | 0.14            | -0.31           | 0.15        | -4.03           | -0.69           | 4.68            | 3.62            | -0.02           | 0.00         |
|                     | -               | -               | -           | -               | -               | -               | -               | -               | -            |
| $\Delta^2 i_{us,t}$ | 0.00            | 0.01            | -0.01       | -0.68           | 0.04            | -0.04           | <b>0.26</b>     | 0.00            | 0.00         |
|                     | -               | -               | [-1.7]      | [-8.6]          | -               | -               | [2.1]           | [2.4]           | -            |
| $\Delta^2 i_{au,t}$ | -0.03           | <b>0.06</b>     | -0.06       | <b>0.27</b>     | -0.56           | <b>0.23</b>     | -0.25           | <b>0.01</b>     | 0.00         |
|                     | [-3.7]          | [4.5]           | [-5.8]      | [2.6]           | [-8.3]          | [1.7]           | -               | [6.4]           | [-6.3]       |
| $\Delta^2 b_{au,t}$ | -0.02           | <b>0.05</b>     | -0.03       | 0.03            | -0.12           | -0.74           | -0.05           | 0.00            | 0.00         |
|                     | [-2.8]          | [4.1]           | [-3.6]      | -               | -               | [-5.7]          | -               | [4.0]           | [-7.4]       |
| $\Delta^2 b_{us,t}$ | <b>0.02</b>     | -0.01           | 0.00        | 0.06            | -0.14           | 0.07            | -0.81           | 0.00            | 0.00         |
|                     | [3.2]           | [-1.7]          | -           | -               | [-2.4]          | -               | [-6.3]          | -               | [-2.5]       |

Tabella 3.23: I coefficienti  $\zeta'\tau'$ . In grassetto le variabili *error-increasing*; I termini [.] esprimono le t di Student; I trattini sostituiscono le |t di Student|  $\leq 1.6$ .

---

Infine considerando la rappresentazione del VAR in termini di media mobile, si osserva nella Tavola (3.24) come il primo *trend* stocastico I(2) sia il risultato di una combinazione del vettore  $\alpha_{\perp 2,1}$  e di *shock* che colpiscono principalmente i tassi di interesse a breve dei due paesi ( $i_{us}, i_{au}$ ). Questi, attraverso i pesi  $\check{\beta}_{\perp 2,1}$ , si riversano poi maggiormente sul tasso di cambio e sui prezzi dei beni dei due paesi. Il secondo *trend* I(2) e invece è risultato del vettore  $\alpha_{\perp 2,2}$  e di *shock* che colpiscono in primo luogo i tassi di interesse a lunga dell’Australia ( $b_{au}$ ). Questi, attraverso i coefficienti  $\check{\beta}_{\perp 2,2}$ , hanno a loro volta effetto sui prezzi dei beni nei due paesi e sul tasso di cambio.

|                             | $p_{us}$ | $p_{au}$ | $s$   | $i_{us}$ | $i_{au}$ | $b_{au}$ | $b_{us}$ |
|-----------------------------|----------|----------|-------|----------|----------|----------|----------|
| $\check{\beta}_{\perp 2,1}$ | 0.42     | 1.01     | 1.03  | -0.01    | -0.02    | 0.01     | 0.00     |
| $\check{\beta}_{\perp 2,2}$ | 0.63     | -1.67    | -2.99 | 0.04     | 0.08     | -0.01    | 0.04     |
| $\alpha'_{\perp 2,1}$       | -0.11    | 0.09     | 0.01  | 0.77     | 1.00     | -0.18    | 0.00     |
|                             | [-4.0]   | [2.7]    | -     | [3.1]    |          | [-1.6]   |          |
| $\alpha'_{\perp 2,2}$       | 0.07     | -0.07    | 0.01  | -0.07    | 0.00     | -0.69    | 1.00     |
|                             | [3.8]    | [-3.1]   | -     | -        |          | [-8.4]   |          |

Tavola 3.24: *Trend* stocastici I(2) e relativi pesi.

Passando a considerare l’ordine di integrazione delle singole serie e delle loro combinazioni (Tavola 3.25), si osserva come l’inclusione dei tassi di interesse decennali porta a respingere l’ipotesi di serie I(1) per gli indici dei prezzi dei due paesi, per il loro differenziale e per la deviazione dalla PPP.

---

|                    | $p_{us}$ | $p_{au}$ | $s$  | $i_{us}$ | $i_{au}$ | $b_{au}$ | $b_{us}$ | $\chi^2(\nu)$ | p-value |
|--------------------|----------|----------|------|----------|----------|----------|----------|---------------|---------|
| $\mathcal{H}_1$    | 1.0      | -        | -    | -        | -        | -        | -        | 57.5 (4)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_2$    | -        | 1.0      | -    | -        | -        | -        | -        | 53.9 (4)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_3$    | 1.0      | -1.0     | -    | -        | -        | -        | -        | 41.4 (4)      | [0.00]  |
| $\mathcal{H}_4$    | -        | -        | 1.0  | -        | -        | -        | -        | 6.7 (4)       | [0.14]  |
| $\mathcal{H}_5$    | 1.0      | -1.0     | -1.0 | -        | -        | -        | -        | 10.3 (4)      | [0.03]  |
| $\mathcal{H}_6$    | -        | -        | -    | 1.0      | -        | -        | -        | 1.9 (4)       | [0.75]  |
| $\mathcal{H}_7$    | -        | -        | -    | -        | 1.0      | -        | -        | 5.0 (4)       | [0.28]  |
| $\mathcal{H}_8$    | -        | -        | -    | 1.0      | -1.0     | -        | -        | 1.7 (4)       | [0.78]  |
| $\mathcal{H}_9$    | -        | -        | -    | -        | -        | 1.0      | -        | 3.8 (4)       | [0.42]  |
| $\mathcal{H}_{10}$ | -        | -        | -    | -        | -        | -        | 1.0      | 3.5 (4)       | [0.47]  |
| $\mathcal{H}_{11}$ | -        | -        | -    | -        | -        | 1.0      | -1.0     | 5.2 (4)       | [0.26]  |

Tabella 3.25: *Test* sull'ipotesi I(1) contro l'ipotesi I(2)

Per quel che riguarda invece la possibilità di passare da un modello I(2) ad un modello I(1), considerando al posto del vettore delle variabili:

$$x'_t = [p_{us,t}, p_{au,t}, s_t, i_{us,t}, i_{au,t}, b_{us,t}, b_{au,t}]$$

il vettore:

$$\bar{x}'_t = [p_{au,t} - p_{us,t}, \Delta p_{au,t}, \Delta s_t, i_{us,t}, i_{au,t}, \Delta b_{us,t}, \Delta b_{au,t}]$$

le stime ottenute, imponendo gli stessi vincoli su tutte le componenti di  $\tau = [\beta, \beta_{\perp 1}]$ , mostrano che l'ipotesi di omogeneità dei prezzi possa essere accettata ( $\chi^2(5) = 1.19$ , p-value= 0.94).

---

Nel caso in cui si consideri invece il vettore di variabili:

$$\check{x}'_t = [s_t - ppp, \Delta p_{us,t}, \Delta p_{au,t}, i_{us,t}, i_{au,t}, \Delta b_{us,t}, \Delta b_{au,t}]$$

il LR test permette di respingere l'ipotesi che sia possibile passare a un modello I(1), e cioè che il tasso di cambio e la differenza dei prezzi dei beni dei due paesi condividano lo stesso *trend* stocastico I(2).

# Conclusioni

Le ampie e persistenti oscillazioni del tasso di cambio intorno alla Parità del Potere d'Acquisto e l'eccesso di rendimento del differenziale del tasso di interesse rispetto alla variazione attesa del tasso di cambio rappresentano due *puzzle* su cui gli studiosi si sono confrontati a lungo. Una loro possibile soluzione è stata fornita dai modelli IKE, con cui si è dimostrato di poter tener conto delle diverse strategie adottate dagli investitori attraverso un premio all'incertezza ( $up_t$ ) variabile nel tempo.

La metodologia a cui si è fatto ricorso nella rappresentazione del modello è quella del modello I(2). L'individuazione al suo interno delle relazioni di cointegrazione permette di descrivere in maniera articolata gli aggiustamenti nel medio e nel lungo periodo sia della deviazione del tasso di cambio dal suo equilibrio dinamico, sia dell'eccesso di rendimento del differenziale dei tassi di interesse tra i due paesi rispetto alla variazione attesa del tasso di cambio. Inoltre, la possibilità di formulare il VAR in termini di media mobile (VMA) fornisce utili indicazioni sul meccanismo attraverso il quale gli *shock* sulle singole variabili sono in grado di generare i *trend* stocastici I(1) e I(2) che caratterizzano il modello. Come dimostrato da [Johansen et al. \[2010\]](#) l'utilizzo di un modello I(2) per l'interpretazione di modelli quasi-I(2) è preferibile all'impiego di un modello I(1), nonostante che la trattazione sia indubbiamente più complessa. Questa impostazione trova conferma nei risultati ottenuti da [Juselius \[2014\]](#), che mostrano come sia difficile distinguere un processo I(2) da un processo quasi-I(2) quando quest'ultimo sia caratterizzato da un coefficiente di autocorrelazione  $\rho = 0.95$  e un rapporto segnale-rumore di

---

0.15. Di Iorio et al. [2016] dimostrano poi che in presenza di campioni di limitate dimensioni, cosa frequente in economia quando si ha a che fare con dati trimestrali, i risultati che si ottengono specificando un modello quasi-I(2) attraverso un modello I(2) sono migliori di quelli ottenuti attraverso un modello I(1). Infine, è bene sottolineare che anche quando l'omogeneità dei prezzi permetterebbe di considerare direttamente un modello I(1) è buona norma partire da un modello I(2) e poi testare la possibilità di considerare una trasformazione del modello che permetta di far ricorso ad un modello I(1), senza che ciò porti ad una perdita sostanziale dell'informazione contenuta nei dati.

In questo lavoro si è preso in esame il tasso di cambio tra Australia e Stati Uniti. Il fatto che l'Australia sia una forte esportatrice di materie prime permette di richiamare uno studio analogo effettuato sul Cile [Salazar, 2017], mentre il *rating* di tripla A sul suo debito fa sì che il Dollaro australiano possa essere considerato un bene rifugio al pari del Franco svizzero, per il quale esiste un analogo studio effettuato da [Juselius and Assenmacher, 2017]. Le difficoltà relative alla misurazione delle variazioni attese del tasso di cambio sono state affrontate sia facendo delle assunzioni sugli *shock* di previsione [Juselius, 2017], sia attraverso l'impiego di stime fornite da previsori specializzati [Juselius and Stillwagon, 2018]. La brevità di queste ultime serie ha spinto a individuare negli indici di borsa una *proxy* possibile delle aspettative sulle variazioni dei tassi di cambio.

I risultati ottenuti sono in linea con quelli di alcuni lavori antecedenti. Si è riscontrato che l'inserimento del prezzo delle materie prime, seppure come variabile esogena, migliora la relazione che lega il differenziale dei tassi di interesse a breve al PPP *gap*. L'introduzione del differenziale di borsa tra i due paesi risulta significativo in tutte le specificazioni in cui è considerato e contribuisce a spiegare l'eccesso di rendimento del differenziale dei tassi di interesse. Si è deciso di considerare nei primi due modelli il differenziale dei tassi di interesse a breve piuttosto che quelli a lunga durata, poiché maggiormente aderenti all'andamento del PPP *gap*. L'utilizzo nel terzo modello di entrambe le tipologie di tassi di interesse ha

---

mostrato, comunque, il ridimensionamento del ruolo esercitato dai tassi a breve in favore dei tassi a 10 anni. In tutte e tre i casi la specificazione individua un numero di relazioni di cointegrazione pari a due. Nei primi due casi il numero di *trend* stocastici  $I(2)$  è pari a tre, mentre nel terzo caso scende a due. In tutti i modelli si individua un polinomio di cointegrazione che richiama la parità scoperta dei tassi di interesse aggiustata per l'incertezza; nel terzo caso questo è vero per entrambi i polinomi di cointegrazione. Le altre relazioni di cointegrazione considerate mettono in rilievo sia il legame che unisce l'indice dei prezzi dei beni americani al tasso d'interesse a breve di quel paese, sia la relazione che esiste tra il differenziale dei tassi di interesse a breve e il differenziale degli indici di borsa dei due paesi.

Per ultimo, si rammentano le difficoltà incontrate nell'introduzione di *dummy* in grado di eliminare tutti i dati anomali presenti, con le relative conseguenze circa la normalità dei residui delle variabili. A questo si aggiunge il numero limitato di gradi di libertà, che rappresenta un vincolo oggettivo alla specificazione del modello.

Possibili sviluppi possono essere quelli di estendere l'analisi ad un VAR Strutturale (SVAR), in modo da tener conto anche degli effetti che le variabili hanno contemporaneamente sulle altre variabili, spiegando in questo modo parte dei residui. Altra possibilità è quella di considerare modelli non lineari al fine di verificare se sono in grado di spiegare meglio i fenomeni oggetto di studio.

# Appendice

Nelle Tavole A1-A3 vengono riportate le stime delle *dummy* introdotte per tener conto dei dati anomali e quelle per le variabili stagionali centrate.

|                         | $p_{us}$ | $p_{au}$ | $s$    | $i_{us}$ | $i_{au}$ | $s\&p$ | $mx$   |
|-------------------------|----------|----------|--------|----------|----------|--------|--------|
| $D_T$ (2008:4 - 2009:2) | -0.02    | 0.00     | -0.21  | 0.00     | 0.00     | -0.24  | -0.18  |
|                         | [-8.2]   | [-2.4]   | [-7.4] | -        | [-3.5]   | [-7.1] | [-4.9] |
| $D_I$ (2008:1)          | 0.00     | 0.00     | 0.00   | 0.00     | 0.00     | -0.18  | -0.24  |
|                         | -        | -        | -      | [-3.6]   | -        | [-3.7] | [-4.7] |
| $D_T$ (1990:1 - 1990:4) | 0.00     | 0.00     | 0.01   | 0.00     | 0.00     | 0.00   | 0.05   |
|                         | -        | [-3.1]   | -      | -        | -        | -      | -      |
| $D_T$ (1987:4 - 1988:2) | 0.00     | 0.00     | -0.05  | 0.00     | 0.00     | -0.14  | -0.29  |
|                         | -        | -        | [-1.8] | [-2.3]   | -        | [-4.0] | [-7.6] |
| $D_T$ (1986:2)          | 0.00     | 0.00     | 0.07   | 0.00     | 0.00     | 0.04   | 0.08   |
|                         |          | -        | -      |          |          | -      | -      |
| $C - stagionale$        | 0.00     | 0.00     | 0.00   | 0.00     | 0.00     | 0.02   | 0.02   |
|                         | [3.9]    | -        | -      | -        | -        | [2.1]  | [1.7]  |
| $C - stagionale_1$      | 0.00     | 0.00     | -0.01  | 0.00     | 0.00     | 0.00   | 0.00   |
|                         | [7.0]    | -        | [-1.7] | -        | -        | -      | -      |
| $C - stagionale_2$      | 0.00     | 0.00     | -0.01  | 0.00     | 0.00     | -0.01  | 0.00   |
|                         | [1.7]    | [1.8]    | [-1.6] | [2.3]    | -        | -      | -      |

Tabella A1: Stima dei dati anomali e delle *dummy* stagionali centrate nel modello che include gli indici di borsa e le materie prime. I termini [.] esprimono le t di Student; I trattini sostituiscono le  $|t \text{ di Student}| \leq 1.6$ .

---

|                         | $p_{us}$ | $p_{au}$ | $s$    | $i_{us}$ | $i_{au}$ | $s\&p$ | $mx$   |
|-------------------------|----------|----------|--------|----------|----------|--------|--------|
| $D_T$ (2008:4 - 2009:2) | -0.02    | -0.01    | -0.21  | 0.00     | 0.00     | -0.24  | -0.18  |
|                         | [-7.4]   | [-2.9]   | [-7.2] | [-1.7]   | [-3.5]   | [-7.0] | [-4.9] |
| $D_I$ (2008:1)          | 0.00     | 0.00     | 0.00   | 0.00     | 0.00     | -0.17  | -0.23  |
|                         | -        | -        | -      | [-3.6]   | -        | [-3.5] | [-4.5] |
| $D_T$ (1990:1 - 1990:4) | 0.00     | -0.01    | 0.00   | 0.00     | 0.00     | 0.00   | 0.04   |
|                         | -        | [-3.1]   | -      | -        | -        | -      | -      |
| $D_T$ (1987:4 - 1988:2) | 0.00     | 0.00     | -0.05  | 0.00     | 0.00     | -0.13  | -0.29  |
|                         | -        | -        | [2.0]  | [-2.3]   | -        | [-3.8] | [-7.7] |
| $D_T$ (1986:2)          | 0.00     | 0.00     | 0.06   | 0.00     | 0.00     | 0.04   | 0.08   |
|                         | [-2.9]   | [-2.7]   | [2.3]  | -        | [-9.0]   | -      | [2.4]  |
| $C - stagionale$        | 0.00     | 0.00     | 0.00   | 0.00     | 0.00     | 0.02   | 0.02   |
|                         | [4.1]    | -        | -      | -        | -        | [2.1]  | [1.7]  |
| $C - stagionale_1$      | 0.00     | 0.00     | -0.01  | 0.00     | 0.00     | 0.00   | 0.00   |
|                         | [6.2]    | -        | -      | -        | -        | -      | -      |
| $C - stagionale_2$      | 0.00     | 0.00     | -0.01  | 0.00     | 0.00     | -0.01  | 0.00   |
|                         | -        | -        | -      | [1.8]    | -        | -      | -      |

---

Tabella A2: Stima dei dati anomali e delle *dummy* stagionali centrate nel modello che include gli indici di borsa ed esclude le materie prime. I termini [.] esprimono le t di Student; I trattini sostituiscono le |t di Student|  $\leq 1.6$ .

---

|                         | $p_{us}$ | $p_{au}$ | $s$    | $i_{us}$ | $i_{au}$ | $b_{au}$ | $b_{us}$ |
|-------------------------|----------|----------|--------|----------|----------|----------|----------|
| $D_T$ (2008:4 - 2009:2) | -0.01    | 0.00     | -0.21  | 0.00     | 0.00     | 0.00     | 0.00     |
|                         | [-6.8]   | [-2.1]   | [-7.3] | [-2.5]   | [-3.9]   | [-2.4]   | [-1.7]   |
| $D_I$ (2008:1)          | 0.00     | 0.00     | 0.00   | 0.00     | 0.00     | 0.00     | 0.00     |
|                         | -        | -        | -      | [-4.6]   | -        | -        | -        |
| $D_T$ (1990:1 - 1990:4) | 0.00     | 0.00     | 0.01   | 0.00     | 0.00     | 0.00     | 0.00     |
|                         | -        | [-2.5]   | -      | -        | -        | -        | [2.4]    |
| $D_T$ (1987:4 - 1988:2) | 0.00     | 0.00     | -0.05  | 0.00     | 0.00     | 0.00     | 0.00     |
|                         | -        | -        | [-2.0] | [-4.0]   | [-1.8]   | -        | -        |
| $D_T$ (1986:2)          | 0.00     | -0.01    | 0.08   | 0.00     | 0.00     | 0.00     | 0.00     |
|                         | [-3.4]   | [-3.1]   | [3.0]  | -        | [-9.3]   | [-3.4]   | -        |
| $C - stagionale$        | 0.00     | 0.00     | -0.01  | 0.00     | 0.00     | 0.00     | 0.00     |
|                         | [4.0]    | -        | -      | -        | -        | -        | -        |
| $C - stagionale_1$      | 0.00     | 0.00     | -0.01  | 0.00     | 0.00     | 0.00     | 0.00     |
|                         | [6.3]    | -        | [-1.9] | -        | -        | -        | -        |
| $C - stagionale_2$      | 0.00     | 0.00     | -0.01  | 0.00     | 0.00     | -0.01    | 0.00     |
|                         | -        | -        | -      | -        | -        | -        | -        |

---

Tabella A3: Stima dei dati anomali e delle *dummy* stagionali centrate nel modello che include le materie prime e i tassi di interesse a breve e a lunga. I termini [.] esprimono le t di Student; I trattini sostituiscono le  $|t \text{ di Student}| \leq 1.6$ .

# Elenco delle tabelle

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 3.1 | SC:Schwarz, H-Q:Hannan-Quinn e AIC:Akaike's Information Criterion; in grassetto i valori minimi dei rispettivi criteri. . . . .  | 47 |
| 3.2 | Test della Specificazione Multivariata. I termini [.] esprimono i relativi p-value. . . . .  | 47 |
| 3.3 | Test della Specificazione Univariata. S.E. è lo <i>standard error</i> dei residui. I termini [.] esprimono i relativi p-value. . . . .   | 48 |
| 3.4 | Test della Traccia. $k$ è il numero delle variabili; $r$ il numero delle cointegrazioni; $s_2$ il numero dei <i>trend</i> I(2). I termini [.] esprimono i relativi p-value. . . . .  | 51 |
| 3.5 | Per $r=2$ , le maggiori radici caratteristiche (in modulo). . . . .  | 53 |
| 3.6 | I Polinomi di Cointegrazione e i vettori $\beta_{\perp 1}$ . In grassetto i coefficienti $d$ ed $\alpha$ <i>error-increasing</i> nei confronti di $\beta'x_t$ ; I termini [.] esprimono le $t$ di Student; I trattini sostituiscono le $ t$ di Student  $\leq 1.6$ . . . . . | 55 |
| 3.7 | I coefficienti $\zeta'\tau'$ . In grassetto le variabili <i>error-increasing</i> ; I termini [.] esprimono le $t$ di Student; I trattini sostituiscono le $ t$ di Student  $\leq 1.6$ . . . . .  | 56 |
| 3.8 | <i>Trend</i> stocastici I(2) e relativi pesi. I termini [.] esprimono le $t$ di Student; I trattini sostituiscono le $ t$ di Student  $\leq 1.6$ . . . . .   | 58 |
| 3.9 | Test dell'ipotesi I(1) contro l'ipotesi I(2). . . . .  | 59 |

---

|      |  |    |
|------|--|----|
| 3.10 | Test della Specificazione Multivariata. I termini [.] esprimono i relativi p-value. . . . .  | 61 |
| 3.11 | <i>Test</i> della Specificazione Univariata. I termini [.] esprimono i relativi p-value. S.E. è la deviazione standard dei residui. . . . .  | 62 |
| 3.12 | <i>Test</i> della Traccia. $k$ è il numero delle variabili; $r$ il numero delle cointegrazioni; $s_2$ il numero dei <i>trend</i> I(2). I termini [.] esprimono i p-value. . . . .  | 64 |
| 3.13 | Per $r=2$ , le maggiori radici caratteristiche (in modulo). . . . .  | 65 |
| 3.14 | I Polinomi di Cointegrazione e i vettori $\beta_{\perp 1}$ . In grassetto i coefficienti $d$ ed $\alpha$ <i>error-increasing</i> rispetto a $\beta'x_t$ ; I termini [.] esprimono le $t$ di Student; I trattini sostituiscono le $ t \text{ di Student}  \leq 1.6$ . . . . . | 67 |
| 3.15 | I coefficienti $\zeta'\tau'$ . In grassetto le variabili <i>error-increasing</i> ; I termini [.] esprimono le $t$ di Student; I trattini sostituiscono le $ t \text{ di Student}  \leq 1.6$ . . . . .  | 70 |
| 3.16 | <i>Trend</i> stocastici I(2) e relativi pesi. I termini [.] esprimono le $t$ di Student; I trattini sostituiscono le $ t \text{ di Student}  \leq 1.6$ . . . . .   | 71 |
| 3.17 | <i>Test</i> sull'ipotesi I(1) contro l'ipotesi I(2) . . . . .  | 72 |
| 3.18 | Test della Specificazione Multivariata. I termini [.] esprimono i relativi p-value. . . . .  | 73 |
| 3.19 | <i>Test</i> della Specificazione Univariata. I termini [.] esprimono i relativi p-value. S.E. è la deviazione standard dei residui. . . . .  | 74 |
| 3.20 | <i>Test</i> della Traccia. $k$ è il numero delle variabili; $r$ il numero delle cointegrazioni; $s_2$ il numero dei <i>trend</i> I(2). I termini [.] esprimono i relativi p-value . . . . .  | 76 |
| 3.21 | Per $r=2$ e $r=3$ , le maggiori radici caratteristiche (in modulo). . . . .  | 78 |
| 3.22 | Polinomi di Cointegrazione e vettori $\beta_{\perp 1}$ . In grassetto le variabili <i>error-increasing</i> ; I termini [.] esprimono le $t$ di Student; I trattini sostituiscono le $ t \text{ di Student}  \leq 1.6$ . . . . .  | 79 |

---

---

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.23 | I coefficienti $\zeta'\tau'$ . In grassetto le variabili <i>error-increasing</i> ; I termini<br>[.] esprimono le t di Student; I trattini sostituiscono le  t di Student <br>$\leq 1.6$ . . . . . | 81 |
| 3.24 | <i>Trend</i> stocastici I(2) e relativi pesi. . . . .   | 82 |
| 3.25 | <i>Test</i> sull'ipotesi I(1) contro l'ipotesi I(2) . . . . .   | 83 |

# Elenco delle figure

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1   | Il log del tasso di cambio e il log dei prezzi tra Australia e USA. . . . .  | 3  |
| 2.1 | In alto e al centro i log dei prezzi dei beni americani, australiani e le loro variazioni. In basso, il log dei prezzi delle materie prime australiane e le loro variazioni. . . . . | 38 |
| 2.2 | I tassi di interesse a 10 anni e a 3 mesi di Australia e USA e le loro variazioni prime. . . . .   | 40 |
| 2.3 | In alto e al centro il log dello S&P e del MX e le loro variazioni. In basso la differenza dei log dei due indici di borsa e la sua variazione. . . . .                              | 41 |
| 2.4 | Il log dei prezzi delle materie prime australiane e la deviazione dal log della PPP. . . . .   | 42 |
| 2.5 | Il log della deviazione dalla PPP e il differenziale tra i tassi a 3 mesi di Australia e USA. . . . .  | 43 |
| 2.6 | Il log della deviazione dalla PPP e il differenziale tra i tassi a 10 anni di Australia e USA. . . . .   | 44 |
| 2.7 | In alto e al centro il differenziale dei tassi a 3 mesi e a 10 anni tra USA e Australia. In basso il differenziale dell'inflazione tra i due paesi. . . . .                          | 45 |
| 3.1 | ACF è la funzione di autocorrelazione dei residui standardizzati. . . . .  | 49 |
| 3.2 | In alto le due relazioni di cointegrazione $\beta'x_t$ , in basso le corrispondenti versioni $R$ . . . . .   | 52 |
| 3.3 | ACF è la funzione di autocorrelazione dei residui standardizzati. . . . .  | 63 |

---

|     |  |        |
|-----|--|--------|
| 3.4 | In alto le due cointegrazioni $\beta'x_t$ ; In basso le rispettive versioni <b>R</b> . | . . 66 |
| 3.5 | ACF è la funzione di autocorrelazione dei residui standardizzati.                      | . . 75 |
| 3.6 | In alto le due cointegrazioni $\beta'x_t$ ; In basso le rispettive versioni <b>R</b> . | . . 77 |

# Bibliografia

- Theodore Wilbur Anderson et al. Estimating linear restrictions on regression coefficients for multivariate normal distributions. *Annals of mathematical statistics*, 22(3):327–351, 1951.
- Emanuele Bacchiocchi and Luca Fanelli. Testing the purchasing power parity through  $I(2)$  cointegration techniques. *Journal of Applied Econometrics*, 20(6): 749–770, 2005.
- Giuseppe Cavaliere, Anders Rahbek, and AM Robert Taylor. Bootstrap determination of the co-integration rank in vector autoregressive models. *Econometrica*, 80(4):1721–1740, 2012.
- Guy Debelle et al. Twenty-five years of inflation targeting in australia. *Central bank frameworks: Evolution or revolution*, pages 53–68, 2018.
- Francesca Di Iorio, Stefano Fachin, and Riccardo Lucchetti. Can you do the wrong thing and still be right? hypothesis testing in  $I(2)$  and near- $I(2)$  cointegrated vars. *Applied Economics*, 48(38):3665–3678, 2016.
- Jurgen Doornik and Katarina Juselius. Cointegration analysis of time series using cats 3 for oxmetrics. *Timberlake Consultants Ltd*, 2017.
- Rudiger Dornbusch and Jeffrey Frankel. The flexible exchange rate system: experience and alternatives. In *International finance and trade in a polycentric world*, pages 151–208. Springer, 1988.

- 
- Roman Frydman and Michael D Goldberg. *Imperfect knowledge economics: Exchange rates and risk*. Princeton University Press, 2007.
- Friedrich August Hayek. The use of knowledge in society. *The American economic review*, 35(4):519–530, 1945.
- David F Hendry and Jean-Francois Richard. The econometric analysis of economic time series. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, pages 111–148, 1983.
- Søren Johansen. A representation of vector autoregressive processes integrated of order 2. *Econometric theory*, pages 188–202, 1992.
- Søren Johansen. Likelihood analysis of the  $I(2)$  model. *Scandinavian Journal of Statistics*, 24(4):433–462, 1997.
- Søren Johansen, Katarina Juselius, Roman Frydman, and Michael Goldberg. Testing hypotheses in an  $I(2)$  model with piecewise linear trends. an analysis of the persistent long swings in the dmk/usdollar rate. *Journal of Econometrics*, 158(1):117–129, 2010.
- Søren Johansen et al. *Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models*. Oxford University Press on Demand, 1995.
- Katarina Juselius. *The cointegrated VAR model: methodology and applications*. Oxford university press, 2006.
- Katarina Juselius. Testing for near  $I(2)$  trends when the signal to noise ratio is small. *Available at SSRN 2397749*, 2014.
- Katarina Juselius. A theory-consistent cvar scenario: Testing a rational expectations based monetary model. Technical report, Working Paper. University of Copenhagen, Copenhagen, Denmark, 2017.

- 
- Katarina Juselius and Katrin Assenmacher. Real exchange rate persistence and the excess return puzzle: The case of Switzerland versus the US. *Journal of Applied Econometrics*, 32(6):1145–1155, 2017.
- Katarina Juselius and Josh R Stillwagon. Are outcomes driving expectations or the other way around? An I(2) cvar analysis of interest rate expectations in the dollar/pound market. *Journal of International Money and Finance*, 83:93–105, 2018.
- Daniel Kahneman and Amos Tversky. On the interpretation of intuitive probability: A reply to Jonathan Cohen. *Prospect theory: an analysis of decision under risk*, 1979.
- Mervyn King. Monetary policy: Practice ahead of theory (mais lecture 2005). *forelesning ved the Cass Business School, City University, London*, 17, 2005.
- Paul Krugman, Marc Melitz, and Maurice Obstfeld. *International Economics: Theory and Policy, Global Edition*. Pearson., 2012.
- Helmut Lutkepohl. *New introduction to multiple time series analysis*. Springer Science & Business Media, 2005.
- Ian Macfarlane. Monetary policy regimes: past and future. *Reserve Bank of Australia Bulletin*, pages 20–31, 1997.
- John F Muth. Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 315–335, 1961.
- Heino Bohn Nielsen and Anders Rahbek. The likelihood ratio test for cointegration ranks in the I(2) model. *Econometric Theory*, pages 615–637, 2007.
- Paolo Paruolo and Anders Rahbek. Weak exogeneity in I(2) VAR systems. *Journal of Econometrics*, 93(2):281–308, 1999.

---

Edmund S Phelps. Macroeconomics for a modern economy. *American Economic Review*, 97(3):543–561, 2007.

Kenneth Rogoff. The purchasing power parity puzzle. *Journal of Economic literature*, 34(2):647–668, 1996.

Leonardo Salazar. Modeling real exchange rate persistence in chile. *Econometrics*, 5(3):29, 2017.

Richard H Thaler and LJ Ganser. *Misbehaving: The making of behavioral economics*. WW Norton New York, 2015.