7. Analisi verticale del concetto di pendenza: dalla scuola secondaria di primo grado all'università

di Alessandro Gambini, Simone Banchelli, Nicoletta Nolli

Si studia l'analisi in verticale degli errori ricorrenti effettuati da studenti di diversi livelli scolastici relativi al concetto di pendenza, dalla scuola secondaria di I grado all'inizio della carriera universitaria. Tale analisi è basata sullo studio dei risultati delle valutazioni standardizzate INVALSI di Matematica effettuate a livello 8 e a livello 10 e su alcuni risultati di domande dei pretest del livello 13 somministrate a un campione di matricole universitarie. Tra le domande con una bassa percentuale di risposte corrette, si sono individuate caratteristiche comuni che forniscono una buona chiave di lettura per alcuni concetti chiave di didattica della Matematica. In particolare, dalla ricerca sono emerse difficoltà in verticale relative alla gestione dei diversi registri di rappresentazione degli oggetti matematici in questione. I risultati della ricerca mostrano che il problema permane anche con passaggi di livelli scolastici e porta, a livello universitario, a una misconcezione del concetto di derivata.

1. Introduzione

In questi anni le rilevazioni su grande scala hanno assunto un ruolo sempre più significativo nella ricerca in didattica della Matematica; in particolare in Italia i risultati delle prove standardizzate INVALSI stanno acquisendo un'importanza sempre maggiore nel panorama della ricerca (Ferretti *et al.*, 2015, Garuti *et al.*, 2017, Giberti *et al.*, 2016). Ogni anno INVALSI conduce rilevazioni a carattere censuario, somministrando due prove (una di Italiano e una di Matematica) in due classi della scuola primaria (in seconda e in quinta), al terzo anno della scuola secondaria di primo grado e al secondo anno della scuola secondaria di secondo grado. INVALSI restituisce i risul-

ISBN 9788835101581

tati dei test prima a livello nazionale relativamente a un campione rappresentativo e successivamente alle singole scuole.

Grazie a questi risultati sono emerse diverse ricerche, alcune delle quali, come quella presentata in questo contributo, hanno lo scopo di investigare nodi didattici che persistono a tutti i livelli oggetto di indagine (Ferretti e Gambini, 2017).

Da qualche anno INVALSI sta conducendo una campagna di pretest con gli studenti delle classi terminali della scuola secondaria di secondo grado con lo scopo di realizzare nelle classi quinte un test di Matematica volto a verificare competenze e conoscenze matematiche a conclusione del ciclo di studi superiori. Alcuni risultati di questi pretest sono oggetto di analisi di questa ricerca. In particolare, le questioni indagate in questo contributo riguardano le difficoltà di gestione delle diverse rappresentazioni dello stesso oggetto/concetto matematico (Duval, 2006) con particolare riferimento al concetto di pendenza di una funzione.

2. Analisi verticale

La prima parte di questa ricerca è stata realizzata utilizzando il database INVALSI Gestinv (www.gestinv.it) che è già stato utilizzato come strumento di ricerca per esempio in (Bolondi, Ferretti e Gambini, 2017). Gestinv è un database online che raccoglie tutte le domande INVALSI andate in campo in Italia dal 2008 in poi (circa 1400 oggetti). Il database per ogni item fornisce il testo della domanda, i riferimenti alle Linee guida e alle Indicazioni nazionali, alcune parole chiave che caratterizzano il contenuto, la risposta corretta, le percentuali di risposta e altre informazioni statistiche (*Item Response Theory*). Gestinv consente di fare ricerche per ognuna di tutte queste categorie.

I risultati particolarmente negativi di alcuni quesiti somministrati nelle classi quinte relativi al significato di derivata come pendenza della retta tangente a una curva in un punto ci hanno indotto a indagare su quesiti che nei livelli scolari precedenti esplorassero, in contesti differenti e in diversi registri di rappresentazione, il concetto di pendenza.

Utilizzando il database Gestinv abbiamo ricercato per parole chiave tutti i quesiti riguardanti la pendenza di una funzione e più in generale il concetto di tasso di variabilità di una grandezza in funzione della variazione di un'altra.

Questa ricerca è stata fatta su quesiti somministrati agli studenti del terzo anno di scuola secondaria di primo grado (13 anni) e agli studenti del secondo anno della scuola secondaria di secondo grado (15 anni) utilizzando i dati

ISBN 9788835101581

del campione nazionale. Per quanto riguarda gli studenti della classe quinta della scuola secondaria di secondo grado è stato utilizzato un campione di 474 studenti (18 anni) e per l'università un campione di 300 matricole all'inizio dell'anno accademico 2016/2017.

3. Analisi dei dati

Dalla ricerca abbiamo selezionato nove domande particolarmente significative nel percorso di apprendimento del concetto di pendenza dalla scuola secondaria di primo grado fino al primo anno di università.

La seguente domanda è stata somministrata nell'a.s. 2010/11 agli studenti di grado 8 durante l'esame conclusivo della scuola secondaria di primo grado; il campione, da cui sono calcolati i dati statistici, era composto da 25892 studenti.

D17. La formula $L = L_0 + K \times P$ esprime la lunghezza L di una molla al variare del peso P applicato. L_0 rappresenta la lunghezza in centimetri "a riposo" della molla; K indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando le si applica una unità di peso.
Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione:
"È una molla molto corta e molto dura (cioè molto resistente alla trazione)"?

- ☐ A. $L = 10 + 0{,}5 \times P$
- ☐ B. $L = 10 + 7 \times P$
- ☐ C. $L = 80 + 0{,}5 \times P$
- ☐ D. $L = 80 + 7 \times P$

Fig. 1 – Domanda D17, grado 8, Test INVALSI, a.s. 2010/11

Tab. 1 – Dati relativi alla domanda D17, grado 8, Test INVALSI, a.s. 2010/11

A (corretta)	58,3%
B	25,4%
C	7,9%
D	4,3%
Mancanti/non valide	4,1%

Come mostra la tabella, la percentuale di risposte corrette (opzione A) è del 58,3% mentre il distrattore più scelto è l'opzione B. Gli studenti che hanno scelto l'opzione B (25,4%) hanno compreso che la molla è corta, at-

ISBN 9788835101581

tribuendo il corretto significato a L_0 (termine noto) ma hanno ragionato in modo sbagliato su K (pendenza della funzione), associando alla durezza della molla un valore grande di K. Per comprendere quale equazione traduca l'espressione verbale del testo e, quindi, fornire la risposta corretta è necessario saper gestire il passaggio dal linguaggio naturale a quello algebrico; conoscere e utilizzare differenti forme di rappresentazione e passare dall'una all'altra rappresenta una difficoltà per gli studenti, fatto noto in letteratura internazionale (Duval, 2006).

Una domanda che indaga competenze simili alla precedente, è stata somministrata anche agli studenti di grado 10 nell'a.s. 2010/11; il campione, da cui sono calcolati i dati statistici, era composto da 43458 studenti.

D24. **La formula $l = l_0 + k \cdot P$ esprime la lunghezza l di una molla al variare del peso P applicato. l_0 rappresenta la lunghezza in centimetri "a riposo" della molla; k indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando si applica una unità di peso.**
Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione:
"*È una molla molto lunga e molto resistente alla trazione*"?

☐ A. $l = 15 + 0.5 \cdot P$

☐ B. $l = 75 + 7 \cdot P$

☐ C. $l = 70 + 0.01 \cdot P$

☐ D. $l = 60 + 6 \cdot P$

Fig. 2 – Domanda D24, grado 10, Test INVALSI, a.s. 2010/11

La tabella 2 mostra la percentuale di risposte corrette, errate e mancanti e le percentuali di scelta di ogni opzione.

Tab. 2 – Dati relativi alla domanda d24, grado 10, test INVALSI, a.s. 2010/11

A (corretta)	58,3%
B	25,4%
C	7,9%
D	4,3%
Mancanti/non valide	4,1%

La domanda era molto simile alla precedente, ma la percentuale di risposte corrette è solo il 38,1% (la risposta corretta è l'opzione C); l'opzione B è stata scelta quasi dalla stessa percentuale degli studenti: il 33,2%. In questo caso la scelta della risposta corretta non è predominante. A differenza della domanda precedente tra i distrattori sono presenti tre equazioni che rappre-

ISBN 9788835101581

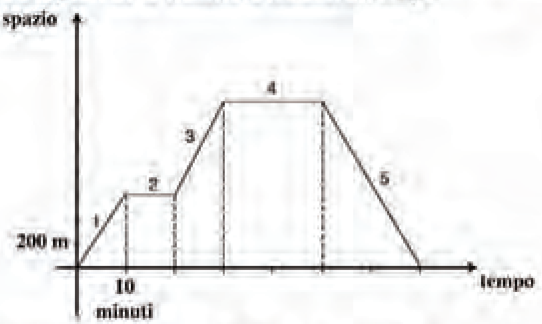
sentano molle che, a riposo, possono essere considerate lunghe; chi ha scelto l’opzione B ha effettivamente indicato l’equazione che rappresenta una molla lunga ma con un coefficiente k che non traduce il concetto di molla “molto resistente alla trazione”.

L’obiettivo di questo quesito è quello di proporre un argomento in continuità con scuola secondaria di primo grado adeguando la richiesta a una platea di studenti all’inizio della scuola secondaria di secondo grado. Tuttavia, i risultati non mostrano un consolidamento del concetto di rapidità di variazione della variabile dipendente rispetto alla variabile indipendente.

Nelle due domande successive il concetto di pendenza viene proposto attraverso la richiesta della lettura di un grafico spazio-tempo: in queste domande occorre passare dal registro grafico alla descrizione del fenomeno interpretando la pendenza dei segmenti come velocità.

La seguente domanda è stata somministrata nell’anno scolastico 2009/10 agli studenti di grado 8; il campione, da cui sono stati calcolate le statistiche, era composto da 25.626 studenti.

D15. **Manuela è uscita da casa per fare una passeggiata lungo un viale. Il grafico seguente rappresenta la posizione di Manuela in funzione del tempo.**



Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

		V	F
a.	Il grafico mostra che Manuela nel tratto 3 ha camminato più velocemente che nel tratto 1	☐	☐
b.	Il grafico mostra che Manuela nel tratto 5 è tornata indietro	☐	☐
c.	Il grafico mostra che Manuela nel tratto 1 e nel tratto 5 ha camminato alla stessa velocità	☐	☐
d.	In 70 minuti, comprese le soste, Manuela ha percorso 1400 metri	☐	☐

Fig. 3 – Domanda D15, grado 8, Test INVALSI, a.s. 2009/10

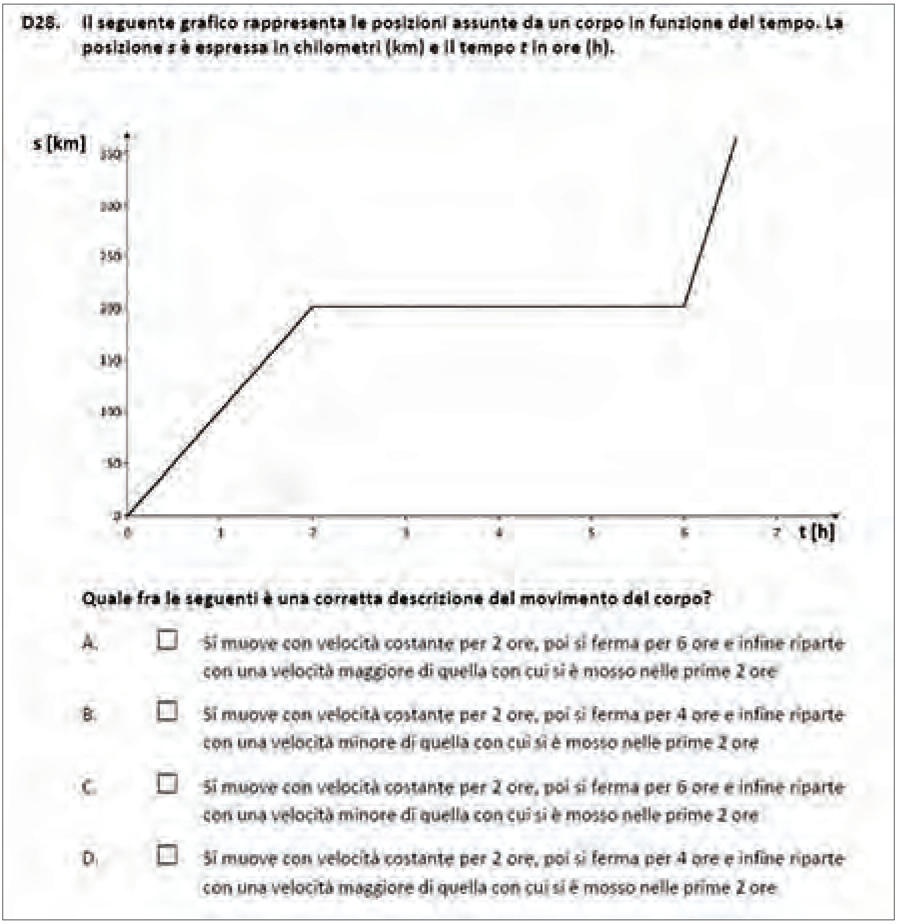
La tabella 3 mostra la percentuale di risposte corrette, errate e mancanti per ogni item.

ISBN 9788835101581

Tab. 3 – Dati della domanda D15, grado 8, Test INVALSI a.s. 2009/10

	Corrette	*Errate*	*Mancanti o non valide*
A	79%	19,4%	1,6%
B	57,7%	39,8%	2,5%
C	74,7%	23,3%	2%
D	50,9%	45%	4,1%

La seguente domanda è stata somministrata nell'anno scolastico 2013/14 agli studenti di grado 10; il campione, da cui sono stati calcolate le statistiche, era composto da 36.932 studenti.


D28. **Il seguente grafico rappresenta le posizioni assunte da un corpo in funzione del tempo. La posizione *s* è espressa in chilometri (km) e il tempo *t* in ore (h).**

Quale fra le seguenti è una corretta descrizione del movimento del corpo?

A. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 6 ore e infine riparte con una velocità maggiore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore

B. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 4 ore e infine riparte con una velocità minore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore

C. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 6 ore e infine riparte con una velocità minore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore

D. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 4 ore e infine riparte con una velocità maggiore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore

Fig. 4 – Domanda D28, grado 10, Test INVALSI, a.s.2013/14

ISBN 9788835101581

La tabella 4 mostra la percentuale di risposte corrette, errate e mancanti e le percentuali di scelta di ogni opzione.

Tab. 4 – Dati relativi alla domanda D28, grado 10, Test INVALSI, a.s.2013/14

A	15,4%
B	9,6%
C	5,7%
D (corretta)	65,0%
Mancanti/non valide	4,3%

In questo caso, in un contesto di natura fisica supportato da un grafico spazio-tempo, la percentuale di risposte corrette degli studenti migliora sensibilmente rispetto a quella delle domande precedenti; una possibile interpretazione di questo fatto si può ricondurre a una maggiore padronanza degli studenti nel passaggio dal registro grafico a quello verbale piuttosto che da quello verbale a quello algebrico richiesto dalle domande precedentemente analizzate.

Nelle due domande successive, entrambe andate in campo nella classe seconda della scuola secondaria di secondo grado, la richiesta è quella di passare dal registro grafico a quello algebrico. Nei quesiti il contesto è puramente matematico.

La domanda seguente è stata somministrata nell'a.s.2014/15 agli studenti di grado 10; il campione, da cui sono calcolati i dati statistici, era composto da 27.207 studenti.

ISBN 9788835101581

D5. **Uno dei seguenti grafici rappresenta la funzione definita da y = 1 – 4x nell'insieme dei numeri reali. Quale?**

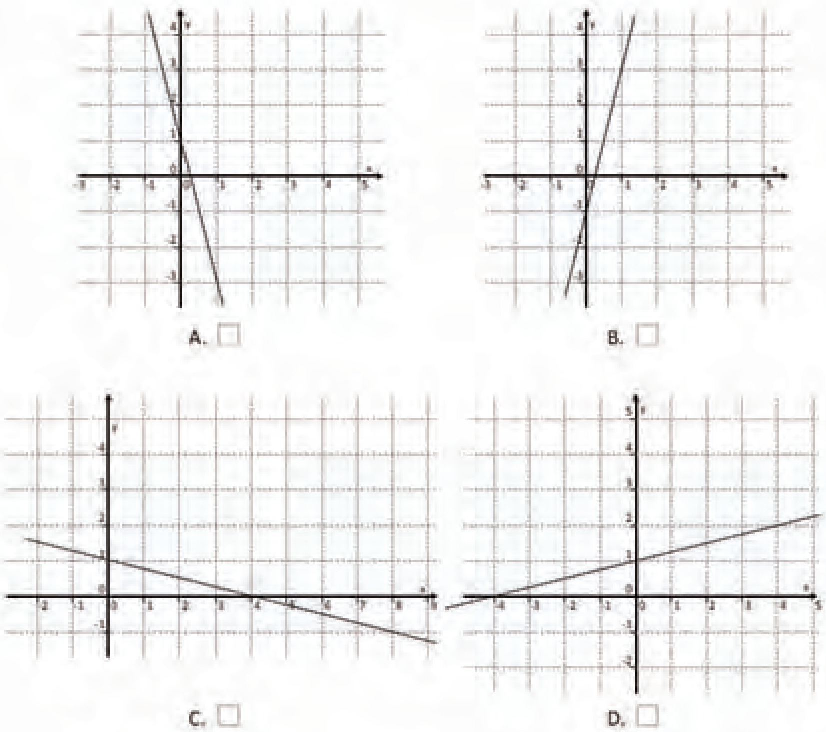


Fig. 5 – Domanda D5, grado 10, Test INVALSI, a.s. 2014/15

La tabella 5 mostra la percentuale di risposte corrette, errate e mancanti e le percentuali di scelta di ogni opzione.

Tab. 5 – Dati relativi alla domanda D5, grado 10, Test INVALSI a.s. 2014/15

A (corretta)	30,6%
B	9,0%
C	10,2%
D	47,7%
Mancanti/non valide	2,5%

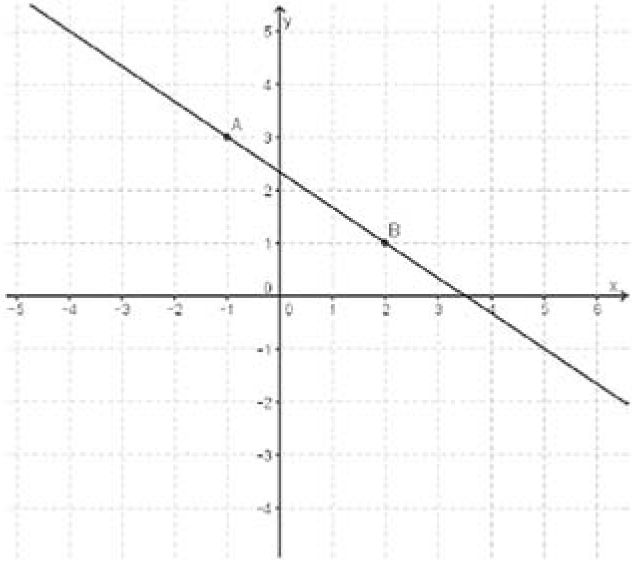
Per rispondere correttamente è necessario avere compreso il significato di intercetta e di pendenza. La percentuale di risposte corrette (opzione A) è del 30,6%. L'opzione D (scelta dal 47,7% dei rispondenti) rappresenta l'opzione

ISBN 9788835101581

di risposta in cui pendenza e intercetta coincidono rispettivamente con ascissa e ordinata dei punti di intersezione della retta con gli assi cartesiani, ma in cui la retta in questione ha pendenza positiva.

La seguente domanda è stata somministrata nell'anno scolastico 2016/17 agli studenti di grado 10; il campione, da cui sono stati calcolate le statistiche, era composto da 38.120 studenti.

D21. Considera la retta passante per i punti *A* (– 1; 3) e *B* (2; 1).



La pendenza (o coefficiente angolare) della retta *AB* è

A. ☐ $\frac{3}{2}$

B. ☐ $\frac{2}{3}$

C. ☐ $-\frac{2}{3}$

D. ☐ $-\frac{3}{2}$

Fig. 6 – Domanda D21, grado 10, Test INVALSI, a.s. 2016/17

La tabella 6 mostra la percentuale di risposte corrette, errate e mancanti e le percentuali di scelta di ogni opzione.

ISBN 9788835101581

Tab. 6 – Dati relativi alla domanda D21, Grado 10, Test INVALSI a.s. 2016/17

A	23,7%
B	18,1%
C (corretta)	29,6%
D	24,1%
Mancanti/non valide	4,5%

La percentuale di risposte corrette (opzione C) è del 29,6% e i distrattori più scelti sono l'opzione A e l'opzione B. Anche in questo caso l'alta percentuale di scelte dell'opzione A potrebbe rivelare una mancata comprensione del significato del coefficiente angolare. È possibile che la prassi didattica più diffusa sia quella di non trattare l'argomento nel primo biennio demandandolo agli anni successivi.

Le ultime due domande che riguardano il concetto di derivata sono state somministrate rispettivamente in classi quinte della scuola secondaria di secondo grado e al primo anno di università.

La seguente domanda è stata somministrata nell'a.s. 2016/17 a un campione di 474 studenti degli istituti tecnici economici e tecnologici.

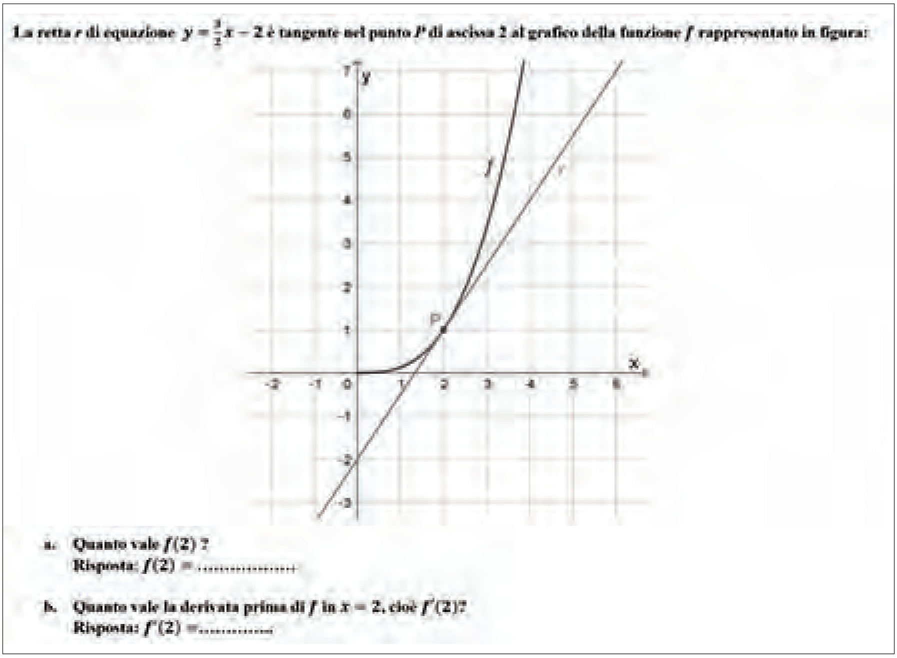


Fig. 7 – Domanda D1, pretest INVALSI, grado 13, a.s. 2016/17

ISBN 9788835101581

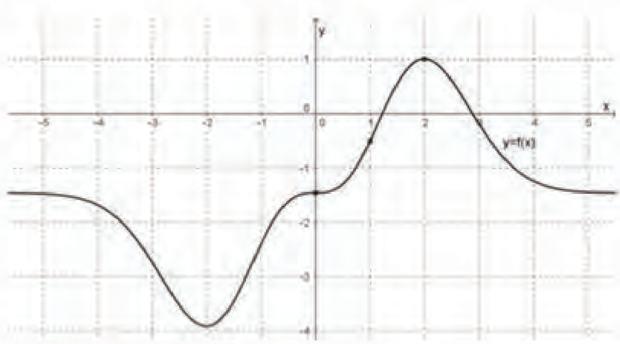
Tab. 7 – Dati relativi alla domanda D1, grado 13, pretest INVALSI a.s.2016/17

Item a		*Item b*	
Errate	31%	Errate	57%
Corrette	43%	Corrette	13%
Mancanti	26%	Mancanti	30%

Nell'item b, viene chiesto il valore della derivata prima in un punto di una funzione, data l'equazione della retta tangente alla funzione stessa. L'equazione della retta nel testo della domanda è in forma esplicita ed è quindi esplicitato il coefficiente angolare. Per rispondere correttamente è sufficiente individuare il coefficiente angolare della retta tangente senza effettuare alcuna manipolazione algebrica o grafica; le basse percentuali di risposte corrette indicano quindi la mancanza di padronanza del concetto di pendenza di una retta associata alla derivata di una funzione. L'alta percentuale di risposte mancanti conferma la non familiarità degli studenti che hanno effettuato il pretest con i contenuti in gioco.

La domanda seguente è stata somministrata nell'a.a. 2016/17 a un campione (da cui vengono calcolati i dati statistici) di circa 300 studenti. Questi studenti provengono da diverse facoltà universitarie: Ingegneria, Architettura, Scienze della formazione, Farmacia, Economia e statistica.

24. Osserva il grafico della funzione f di variabile reale rappresentato in figura.



a. Il valore della derivata prima di f in x=2 è ....
b. Il valore della derivata prima di f in x=0 è ....
c. Il valore della derivata prima di f in x=1 è
   A. ☐ minore di −1
   B. ☐ compreso tra −1 e 0
   C. ☐ compreso tra 0 e 1
   D. ☐ maggiore di 1

Fig. 8 – Domanda D24, pretest INVALSI, matricole universitarie, a.a. 2016/17

ISBN 9788835101581

La tabella 8 mostra la percentuale di risposte corrette, errate e mancanti e le percentuali di scelta di ogni opzione.

Tab. 8 – Dati relativi alla domanda D24 – item c, matricole universitarie a.s. 2016/17

A	1,59%
B	22,71%
C	12,75%
D	16,73%
Mancanti/non valide	46,22%

Tutti e tre gli item della domanda sono inerenti alla derivata prima e all'individuazione del suo valore estrapolandolo dal grafico. Per rispondere correttamente ai primi due item gli studenti devono individuare il valore della derivata in due punti stazionari mentre nel terzo item il punto in questione non è stazionario. Come nel quesito analizzato in precedenza (tab. 8) la percentuale di risposte corrette è molto bassa (la risposta corretta è l'opzione D ed è stata scelta dal 16,73% degli studenti). In questo caso la domanda è a scelta multipla e analizzando le altre opzioni e le relative percentuali di scelta si estrapolano informazioni interessanti. L'opzione più scelta è stata la B (22,71% degli studenti), opzione i cui valori rappresentano il range dell'ordinata della funzione con ascissa 1.

Anche in questa situazione, l'alta percentuale di risposte mancanti conferma ancora una volta che gli studenti hanno delle difficoltà con la comprensione del significato di derivata come pendenza della retta tangente. Un'analisi statistica più approfondita attraverso l'approccio metodologico IRT (Rasch, 1980) che pone l'abilità dello studente e la difficoltà della domanda sulla stessa scala mostra che anche gli studenti con abilità maggiori non rispondono correttamente.

La seguente domanda è stata somministrata nell'a.s. 2016/17 a un campione di 474 studenti degli istituti tecnici economici e tecnologici.

ISBN 9788835101581

La funzione $f(x) = \frac{5}{6}x^3$ è la derivata di una delle seguenti funzioni. Quale?

A. $g(x) = \frac{5}{24}x^4+2$

B. $g(x) = \frac{5}{6}x^4 + 1$

C. $g(x) = 4x^4$

D. $g(x) = \frac{5}{2}x^2$

Fig. 9 – Domanda D7, pretest INVALSI, a.s. 2016/17

Tab. 9 – Dati relativi alla domanda D7, grado 13, Pretest INVALSI a.s. 2016/17

A	43,55%
B	18,18%
C	6,98%
D	22,41%
Mancanti/non valide	8,88%

Rispetto alle domande precedenti la percentuale di risposte corrette è decisamente superiore, anche se la richiesta non è espressa in maniera standard. Per rispondere correttamente non è necessario avere acquisito il concetto di derivata in tutti i suoi significati ma occorre ricordare una regola di calcolo che coinvolge soltanto il registro algebrico.

4. Conclusioni

I risultati particolarmente negativi che emergono dalle domande sulle derivate (sia quelle analizzate in questo contributo ma anche quelle relative alle indagini internazionali come il TIMSS Advanced) ci hanno spinti a indagare su quei concetti fondanti che dovrebbero essere oggetto di studio nel percorso di istruzione obbligatoria. L'analisi in verticale effettuata su alcuni quesiti delle prove INVALSI ha fatto emergere nodi didattici collegati al concetto di pendenza di una funzione e, in particolare, a questioni relative alle sue diverse rappresentazioni. Come mostrano altri studi (i.e. Ferretti e Gambini, 2017) le analisi in verticale forniscono una ricchezza di informazioni per

ISBN 9788835101581

ricercatori e insegnanti e permettono un'analisi più approfondita dei processi di insegnamento e apprendimento; tutte queste informazioni, risultati, analisi e interpretazioni didattiche possono essere utilizzate per esempio anche nel campo della formazione degli insegnanti (Martignone, 2016).

Il concetto di pendenza legato alla derivata di una funzione è stato già oggetto di alcuni studi (Font *et al.*, 2007, Berry e Nyman, 2003); in particolare il ruolo delle rappresentazioni nell'apprendimento del concetto di derivata può essere esemplificato dal diagramma (Hähkiöniemi, 2006) rappresentato in figura 10.

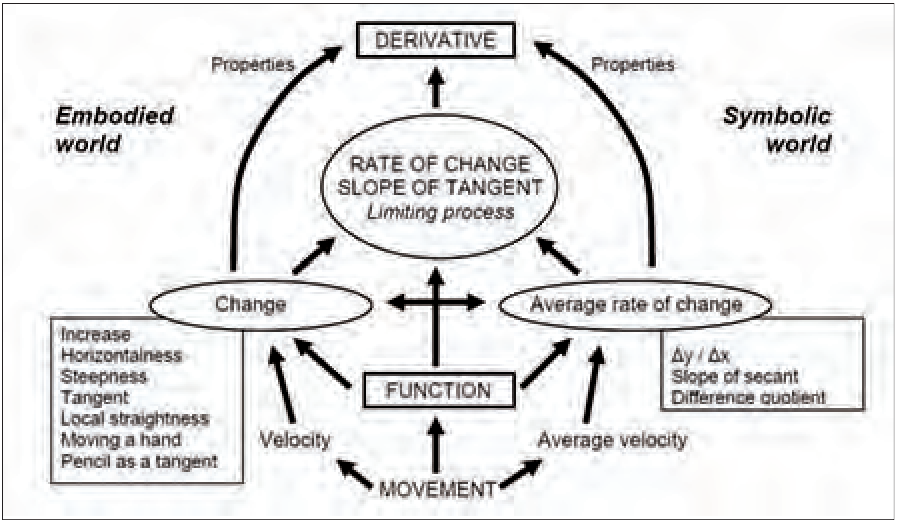


Fig. 10 – Embodied and Symbolic Word (The role of representations in learning the derivative, Hähkiöniemi)

Il diagramma prende spunto dalla teoria di Tall (2003) in cui vengono considerati "tre mondi matematici": il (conceptual) embodied world, il (perceptual) symbolic world e il formal (axiomatic) world (Gray e Tall, 2001). Questa teoria è particolarmente adatta sia a descrivere l'apprendimento longitudinale della Matematica prima nei mondi embodied e symbolic e poi nel formal world, sia a interpretare il "viaggio" che gli studenti fanno attraverso i differenti mondi per arrivare alla costruzione di un concetto.

Per quanto riguarda l'apprendimento della derivata si potrebbe partire dallo studio del moto, in particolare esaminando i concetti di velocità media e di velocità istantanea. In un primo approccio si può supporre che gli studenti siano in grado di considerare alcuni aspetti della velocità istantanea a livello qualitativo. Per esempio, la maggior parte degli studenti è in grado

ISBN 9788835101581

di percepire quando la velocità di un oggetto in movimento è alta o bassa (Hähkiöniemi, 2006). All'inizio quindi si potrebbe lavorare nel mondo della percezione per imparare a definire qualitativamente il tasso di variazione di una funzione dal grafico della funzione stessa. Le funzioni spazio-tempo potrebbero poi aiutare gli studenti ad attivare le loro esperienze passate. Le domande analizzate in questo articolo sulla velocità sembrerebbero in effetti mostrare che questo concetto fa parte del bagaglio di esperienze che lo studente sa gestire, almeno in un contesto grafico, attraverso la lettura di un diagramma posizione-tempo.

Analizzando infatti le domande sulla velocità sembra che per poter rispondere correttamente al quesito somministrato agli studenti di grado 8 sia necessario lavorare sul concetto di velocità come rapporto tra una variazione di posizione e variazione di tempo (symbolic world) mentre nel quesito somministrato agli studenti di grado 10 sembra sia prevalente il fatto percettivo che un tratto di grafico è decisamente più "pendente" dell'altro (embodied world). È peraltro possibile che i due registri lavorino insieme e quindi rendano il concetto di velocità abbastanza stabile nel corso del tempo.

Se si analizzano i dati relativi alle domande sulle molle otteniamo informazioni aggiuntive. Per rispondere correttamente uno studente della scuola secondaria di primo grado ha come unica possibilità quella di ragionare in maniera quantitativa: una volta compreso quale sia la molla più corta per stabilire quale K competa a quella che è anche più rigida, deve comprendere che se si moltiplicano due quantità, K e P, a parità di P, è minore (vedi minore allungamento) il prodotto con K minore. Lo studente in questione quindi può lavorare sul quesito dando significato a grandezze che variano, ragionando su di un piano strettamente numerico-quantitativo. Lo studente della scuola secondaria di secondo grado (grado 10) sembra invece avere perso questo modo di ragionare, non riuscendo più a interpretare il modello algebrico propostogli. Alla fine della secondaria di secondo grado dovrebbe però essere in grado di graficare una relazione del tipo $l = l_0 + k \cdot P$ attribuendo ai coefficienti in gioco un preciso significato.

Se così fosse non dovrebbe essere difficile stabilire che la retta con pendenza minore è quella che si allunga meno ma evidentemente la prassi scolastica non è ancora quella di lavorare in questa direzione. Questa ipotesi sembra essere ulteriormente confermata dalle due domande somministrate al grado 10 sul riconoscimento del grafico associato a un'equazione del tipo $y = ax + b$ e sul calcolo del coefficiente angolare della retta per due punti; esercizi, peraltro estremamente standard, che richiamano conoscenze interamente interne alla Matematica. Ecco quindi che l'embodied world non viene, via via che lo studente cresce, supportato da un'adeguata e tempestiva riflessione

ISBN 9788835101581

sul symbolic world: le strade si dividono e quello che accade è di assistere a una perdita di competenze se non addirittura a uno "scollamento" tra i vari aspetti (significati) dello stesso oggetto matematico.

Se infine si considerano i tre quesiti sulla derivata, alla luce di quanto emerso dall'analisi delle domande precedenti, i risultati non dovrebbero più stupire. Le percentuali di risposta molto basse sul significato di derivata come pendenza della retta tangente a fronte di una percentuale molto più alta di risposte esatte nella domanda in cui si chiede un calcolo simbolico, confermerebbe un profondo scollamento tra aspetto simbolico e significato che impedisce a una larga maggioranza di studenti di appropriarsi in maniera consapevole dei vari aspetti del concetto di pendenza.

Riferimenti bibliografici

Ärlebäck J.B. (2013), "A Modeling Perspective on Interpreting Rates of Change in Context", *Mathematical Thinking and Learning*, 15, 4, pp. 314-336.

Asiala M., Cottrill J., Dubinsky E., Schwingendorf K.E. (1997), "The development of students' graphical understanding of the derivative", *The Journal of Mathematical Behavior*, 16, 4, pp. 399-431.

Berry J.S., Nyman M.A. (2003), "Promoting students' graphical understanding of the calculus", *The Journal of Mathematical Behavior*, 22, 4, pp. 479-495.

Bolondi G., Ferretti F., Gambini A. (2017), *Il database GESTINV delle prove standardizzate INVALSI: uno strumento per la ricerca. Alcuni esempi di utilizzo nell'ambito della matematica*, FrancoAngeli, Milano.

Dubinsky E., Harel G. (1992), "The nature of the process conception of function", in E. Dubinsky, G. Harel (*eds.*), *The concept of function: Aspects of Epistomology and Pedagogy*, Mathematical Association of America, Washington (DC), vol. 25, pp. 85-106.

Duval R. (2006), "A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics", *Educational Studies in Mathematics*, 61, pp. 103-131.

Ferretti F., Gambini A. (2017), "A vertical analysis of difficulties in mathematics by secondary school to university level; some evidences stems from standardized assessment", in *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education*, ERME, Dublin.

Ferretti F., Lemmo A., Maffia A. (2015), "Half of something': how students talk about rationals", in A. Lindmeier, A. Heinze (*eds.*), *Proceedings of PME 29*, Hobart, Australia.

Font V., Godino J.D., D'Amore B. (2007), "An ontosemiotic approach to representations in mathematics education", *For the Learning of Mathematics*, 27, 2, pp. 2-7, 14.

ISBN 9788835101581

Garuti R., Lasorsa C., Pozio S. (2017), “The Italian national education assessment system: building mathematics items”, in *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education*, ERME, Dublin.

Giberti C., Zivelonghi A., Bolondi G. (2016), “Gender differences and didactic contract: analisys of two INVALSI tasks on powers properties”, in C. Csíkos, A. Rausch, Szitányi J. (*eds.*), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, PME, Szeged (Hungary), 2, pp. 275-282.

Gray E., Tall D. (2001), “Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics”, *PME Conference*, 3, pp. 3-65.

Hähkiöniemi M. (2006), *The role of representations in learning the derivative*, University of Jyväskylä.

Herbert S., Pierce R. (2011), “Revealing educationally critical aspects of rate”, *Educational Studies in Mathematics*, 81, 1, pp. 85-101.

Martignone F. (2016), “Un’attività di formazione per insegnanti di scuola secondaria di primo grado: analisi di prove INVALSI di matematica”, *Form@re-Open Journal per la Formazione in Rete*, 16, 1, pp. 70-86.

Rasch G. (1980), *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests* (Reprint), The University of Chicago Press, Chicago.

Tall D. (2003), “Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics”, *Historia e tecnologia no Ensino da Matemática*, 1, pp. 1-28.

Ubuz B. (2007), “Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students’ conceptions”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38, 5, pp. 609-637.

ISBN 9788835101581