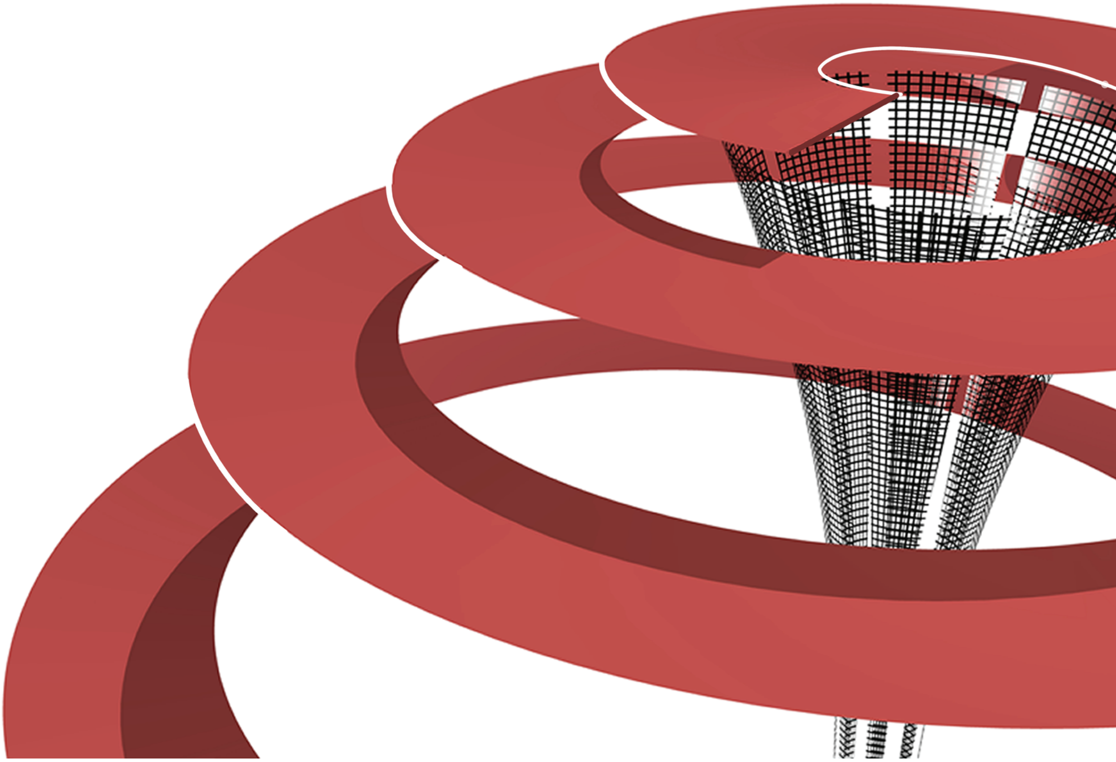


a cura di
Laura De Carlo, Leonardo Paris

Le linee curve
per l'architettura e il design

FORME DEL DISEGNO
FrancoAngeli

FORME DEL DISEGNO
Collana diretta da Elena Ippoliti, Michela Rossi, Edoardo Dotto

La collana FORME DEL DISEGNO si propone come occasione per la condivisione di riflessioni sul disegno quale linguaggio antropologicamente naturale, al tempo stesso culturale e universale, e che indica contemporaneamente la concezione e l'esecuzione dei suoi oggetti.
In particolare raccoglie opere e saggi sul disegno e sulla rappresentazione nell'ambito dell'architettura, dell'ingegneria e del design in un'ottica sia di approfondimento sia di divulgazione scientifica.
La collana si articola in tre sezioni: PUNTO, che raccoglie contributi più prettamente teorici su tematiche puntuali, LINEA, che ospita contributi tesi alla sistematizzazione delle conoscenze intorno ad argomenti specifici, SUPERFICIE, che presenta pratiche ed attività sperimentali su casi studio o argomenti peculiari.

Progetto grafico
Andrea Casale

Il presente volume è pubblicato in open access, ossia il file dell'intero lavoro è liberamente scaricabile dalla piattaforma **FrancoAngeli Open Access** (http://bit.ly/francoangeli-oa).

FrancoAngeli Open Access è la piattaforma per pubblicare articoli e monografie, rispettando gli standard etici e qualitativi e la messa a disposizione dei contenuti ad accesso aperto. Oltre a garantire il deposito nei maggiori archivi e repository internazionali OA, la sua integrazione con tutto il ricco catalogo di riviste e collane FrancoAngeli massimizza la visibilità, favorisce facilità di ricerca per l'utente e possibilità di impatto per l'autore.

Per saperne di più:
http://www.francoangeli.it/come_pubblicare/pubblicare_19.asp

I lettori che desiderano informarsi sui libri e le riviste da noi pubblicati
possono consultare il nostro sito Internet: *www.francoangeli.it* e iscriversi nella home page
al servizio "Informatemi" per ricevere via e-mail le segnalazioni delle novità.

a cura di
Laura De Carlo, Leonardo Paris

Le linee curve

per l'architettura e il design

FORME DEL DISEGNO
Sezione
PUNTO

FrancoAngeli

 ISBN 9788891794000

Università Sapienza di Roma, dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura

In copertina: immagine di Leonardo Paris

Indice

Parte seconda

Geometria delle linee curve per la genesi della forma

di Marta Salvatore

Utilità della geometria delle curve

La conoscenza della geometria delle curve ha assunto nella storia e ancora oggi assume un ruolo di primo piano nella progettazione della forma. La fisica, la chimica, la meccanica, l'idraulica, l'astronomia, l'architettura, l'architettura navale, l'ottica e molte altre fra le arti e le scienze applicate ricorrono a tale teoria nella costruzione di manufatti o parti di essi, laddove questi debbano rispondere a determinati requisiti di accuratezza geometrica.

Nella storia della scienza e della tecnica gli studi sulle teorie geometriche delle linee e delle superfici accompagnarono in maniera costante e continua le fasi della progettazione del prodotto, dapprima artigianale, poi industriale. Il metodo di rappresentazione privilegiato per il controllo morfologico e metrico della forma progettata è la rappresentazione in pianta e alzato, il cui utilizzo è ampiamente documentato nei trattati di prospettiva e stereotomia dalla seconda metà del Quattrocento in poi[1], capace di

1 La rappresentazione in pianta e alzato ricorre nei trattati rinascimentali di prospettiva, come nel caso del *De prospectiva pingendi* di Piero della Francesca, in cui il metodo, pur non essendo esplicitamente illustrato, viene sapientemente praticato.

restituire l'immagine dei corpi così come sono nello spazio in cui sono immersi[2]. Il binomio caratteristico della progettazione della forma che lega la sua concezione alla sua descrizione grafica trova, alla fine del Settecento esplicita e razionale sistematizzazione. Con la codifica mongiana della geometria descrittiva si delinearono in modo chiaro i due obiettivi principali di questa scienza: la rappresentazione della forma e la conoscenza della forma, e cioè della teoria delle linee, delle superfici e delle loro proprietà[3]. Questi obiettivi, che avevano caratterizzato gli studi di geometria ben prima della codifica di Gaspard Monge trovarono, nell'opera dell'ingegnere francese una organica sistematizzazione, e divennero fondamento di modelli teorici di formazione orientati alla progettazione del prodotto e pertanto insegnati nelle scuole di ingegneria di tutta Europa. Negli anni della rivoluzione industriale la geometria descrittiva si impose dunque come un linguaggio efficiente e condiviso di comunicazione della forma. In quegli anni fiorirono numerose trattazioni che alternavano speculazioni geometriche astratte ad applicazioni pratiche, in ambito meccanico, architettonico, idraulico ecc. in cui le linee curve trovarono ampio spazio. Alla conoscenza della teoria delle curve era infatti demandata la rappresentazione delle superfici nel piano attraverso il loro contorno apparente e le loro intersezioni reciproche, e ancora da questa teoria dipendeva la ricerca delle proprietà delle superfici, ridotte nel piano alla loro rappresentazione bidimensionale. Le trattazioni ottocentesche dedicate all'insegnamento della geometria descrittiva erano caratterizzate da una sorta di appendici, le "applicazioni", pubblicate a conclusione delle trattazioni teoriche in cui venivano affrontati in termini anche multidisciplinari i problemi di controllo morfologico della forma progettata. È questo il caso della progettazione degli ingranaggi[4], così come della

2 Si vedano le analisi di Rudolph Arnheim sullo spazio *come sembra e come è*. Arnheim 1977, pp. 128-163.
3 Monge enuncia per la prima volta gli obiettivi della geometria descrittiva nelle prime righe del primo capitolo della sua *Géométrie descriptive*. Cfr. Monge 1798, p. 5.
4 Cfr. Paris 2012.

stereotomia del legno e della pietra[5], ampiamente approfondite dagli allievi dell'*École Polythechnique*[6]. Se la rappresentazione della forma era destinata ad essere insegnata nelle scuole di architettura e ingegneria per tutto il Novecento, lo stesso non si può dire della teoria delle linee e delle superfici che, in quegli stessi anni, vedeva un'eclissi destinata a durare circa mezzo secolo. Fra Ottocento e Novecento, con l'avvento della geometria algebrica, la geometria descrittiva esaurì il suo apporto alla ricerca delle proprietà della forma[7]. La complessità crescente delle superfici studiate rendeva infatti difficoltosa la loro descrizione sintetica eseguita con i metodi grafici della rappresentazione, lasciando il passo ad una più efficace definizione matematica. Questo allontanamento progressivo era destinato a durare fino all'introduzione della rappresentazione digitale che, operando nello spazio tridimensionale virtuale di un computer offriva nuovi orizzonti alla geometria dell'estensione grazie alla possibilità di avvalersi, nelle costruzioni, dell'uso di enti geometrici complessi rappresentati in modo continuo con livelli di accuratezza mai raggiunti sino ad allora. Intorno agli anni Ottanta del Novecento quindi, il digitale inaugurava una nuova stagione di studi intorno alla forma, ancora oggi in divenire, che ne ampliava gli orizzonti estendendone le prospettive di ricerca.
In questo quadro evolutivo dei metodi analogici e digitali di comunicazione della forma il disegno rivela tutto il suo valore euristico. Ciò che rimane immutabile è la necessità di conoscere la teoria delle linee per il controllo progettuale della forma, poiché dalla loro qualità dipende quella delle superfici che gli appartengono. Questa relazione, che aveva trovato fondamento nella costruzione delle superfici luogo geometrico che avevano caratterizzato l'architettura e il design sino alla seconda metà del secolo scorso, trova una ulteriore validazione nella genesi della for-

5 La stereotomia della pietra, destinata a sparire dalle costruzioni per via dell'impiego sempre più diffuso del cemento armato, rimarrà come un retaggio Ottocentesco di importanza metodologica nei trattati di geometria descrittiva sino alla metà del Novecento.
6 A questo riguardo si vedano i contributi degli allievi della scuola di Monge, fra gli altri: Jean Nicolas Pierre Hachette, Charles Dupin, Charles-François-Antoine Leroys, Theodore Olivier, autori di trattati dedicati alla geometria descrittiva e alle sue applicazioni, come la stereotomia della pietra e del legno e la teoria degli ingranaggi.
7 Cfr. Gay 2016.

ma libera, oggi ampiamente diffusa grazie alla rappresentazione informatica. Il controllo della forma trova così nella rappresentazione digitale continua, un luogo privilegiato di sperimentazione, dove linee e superfici curve e a doppia curvatura, rappresentate a fatica sino ad oggi, si materializzano trovando fondamento teorico nella loro stessa costruzione. Gino Loria sosteneva che la costruzione è dimostrazione esistenziale della forma, e mai come oggi, nello spazio digitale di un computer, questa affermazione appare di attualità[8].

Nel vastissimo repertorio di curve piane e sghembe che arricchirono le pagine dei trattati di geometria ve ne sono alcune che hanno trovato impiego nelle arti applicate più di altre. La fortuna di queste curve risiede in generale nelle proprietà notevoli di cui queste godono, nella loro riproducibilità attraverso costruzioni grafiche approssimate e, infine, nel loro appartenere a superfici particolarmente ricorrenti.

Proprietà delle curve per il progetto della forma

«Quando un punto si muove in un piano con una determinata legge, assumendo un numero semplicemente infinito di posizioni, il luogo geometrico di tali posizioni è una linea, in generale non una retta, cioè una curva»[9].

Con questa definizione Gino Loria introduceva, nei primi anni del secolo scorso, i capitoli dedicati alle curve piane e sghembe nel suo celebre manuale: *Poliedri, curve e superficie*.

Le linee sono dunque enti geometrici monodimensionali, generati dal movimento continuo di un punto nel piano o nello spazio. Se il punto è vincolato al piano, questo descriverà una curva piana se, al contrario, è libero di muoversi nello spazio, la curva descritta avrà doppia curvatura e si dirà gobba oppure sghemba. Se la legge del moto è data, e perciò

8 Loria racconta come Euclide negli *Elementi* non ragioni mai su una figura di cui non sia data la costruzione, e come la costruzione sia dunque dimostrazione dell'esistenza stessa della figura. Cfr. Loria 1935, p. 77.
9 Cfr. Loria 1912, p. 71 e p. 85.

esprimibile per via analitica oppure geometrica, la curva si definisce luogo geometrico, se al contrario la legge del moto non è nota, la curva si definisce linea grafica e assume in generale forma libera.
La natura bidimensionale delle curve può rendere a prima vista difficoltoso il riconoscimento della loro utilità nell'ambito della progettazione della forma, che opera invece con elementi tridimensionali, e cioè con le superfici di cui sono composti i corpi. Eppure, la conoscenza delle proprietà delle curve è indispensabile per una corretta progettazione perché, in generale, la qualità di una superficie dipende proprio da quella delle curve necessarie alla sua costruzione.
Questa relazione, indissolubile nell'universo astratto della geometria teorica, ha ricadute dirette nella rappresentazione analogica della forma e si palesa in maniera vistosa nella rappresentazione digitale. Nello spazio virtuale tridimensionale di un computer infatti, le superfici acquisiscono forma fisica, ed il mancato controllo della qualità delle curve produce geometrie che non possono visibilmente considerarsi valide.
L'esigenza di rappresentare attraverso il disegno grafico bidimensionale le forme geometriche dello spazio, ha favorito, nella storia del disegno di progetto, l'uso di linee e di superfici luogo geometrico, che potevano essere riprodotte e controllate per via sintetica attraverso costruzioni grafiche approssimate. Curve luogo geometrico ricorrono infatti nelle intersezioni tra superfici anch'esse luogo geometrico e ne sono contorno apparente rispetto ad alcune posizioni notevoli dei piani di proiezione. Per queste ragioni le curve luogo geometrico hanno occupato un posto di primo piano nella storia della progettazione della forma, come dimostrano le numerose illustrazioni che arricchiscono i trattati di geometria descrittiva pubblicati sino alla prima metà del secolo scorso[10] (fig. 1).

10 Fra gli altri, un repertorio particolarmente consistente di problemi relativi al controllo geometrico della forma è costituito dagli studi di Edmond Brhune, noto come Frère Gabriel Marie che, a cavallo fra Ottocento e Novecento, pubblica alcuni manuali di geometria descrittiva dedicati alla soluzione di problemi di intersezione fra superfici notevoli. Cfr. Frère 1893 e 1920.

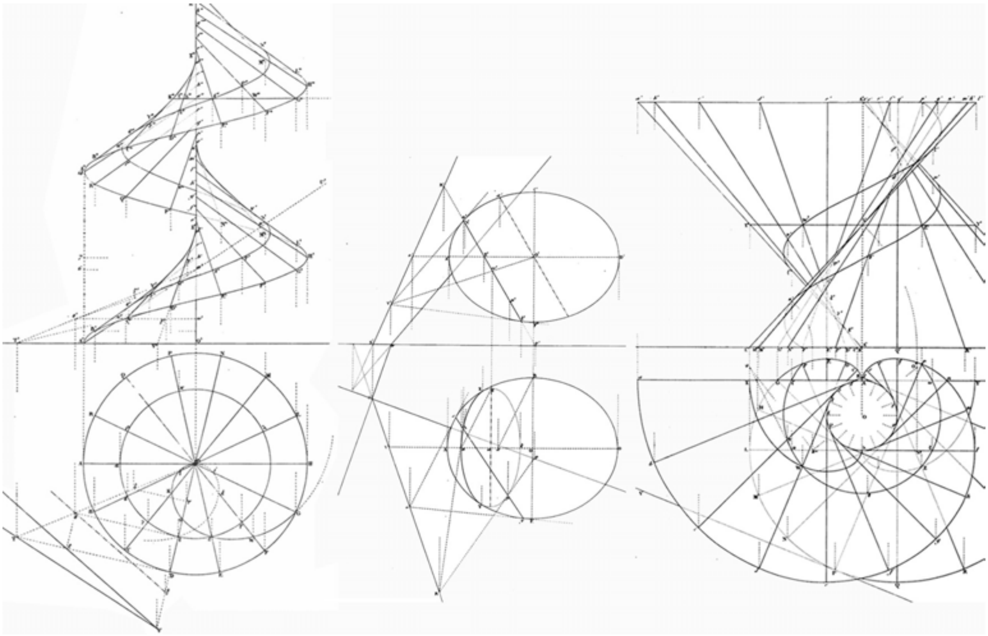


Fig. 1/ Disegni tratti dal *Traité de Géométrie descriptive* di C. F. A. Leroy, ed. 1834.

«Ma nelle applicazioni della geometria descrittiva alle Arti ed alla Tecnica accade talora di dover operare sopra curve [...] di cui si ignora (se pure esiste), la legge di generazione o la rappresentazione analitica; si chiamano di consueto linee grafiche; benché sfuggano ai metodi propri dell'ordinaria geometria, pure pei bisogni della pratica è necessario risolvere riguardo ad esse alcune questioni geometriche, il che può farsi, non con esattezza matematica, ma con precisione sufficiente, ricorrendo a procedimenti approssimati [...]»[11].

Linee e superfici di forma libera sono state ampiamente utilizzate nella tradizione del design nautico, aeronautico e delle auto. Sperimentate intorno alla metà del Novecento in alcune architetture pionieristiche dei maestri del movimento moderno, come Eero Saarinen o Sergio Musmeci che ne favorirono l'impiego nei processi di progettazione architettonica[12], queste trovano rigore geometrico soltanto in tempi recenti, nella rappresentazione matematica

11 La citazione è tratta nuovamente dal già citato testo di Loria, e introduce il Metodo delle curve d'errore. Per mettere a fuoco il problema da un punto di vista operativo, possiamo pensare alle difficoltà relative al controllo geometrico dei profili alari degli aerei, a quelli degli scafi delle imbarcazioni o delle carene delle auto, risolto per via analogica attraverso l'uso di aste flessibili. Cfr. Loria 1912, p. 76.

12 Significative a questo riguardo le superfici del terminal della TWA dell'aeroporto JFK di New York di Eero Saarinen e quelle in cemento armato che caratterizzano il ponte sull'Appia Antica a Roma di Sergio Musmeci.

della forma, che descrive curve e superfici di interpolazione attraverso equazioni matematiche appunto, di tipo parametrico.

Il controllo della qualità morfologica delle curve, che interessa in generale i processi progettuali, esige la conoscenza delle proprietà geometriche di cui queste godono. È possibile riconoscere famiglie di curve quando queste condividono alcune di tali proprietà. In generale, quando rappresentiamo o progettiamo una curva avvertiamo l'esigenza di conoscerne la genesi geometrica, di chiarire le relazioni che sussistono fra questa e le superfici che le appartengono, di controllarne l'andamento nello spazio. Queste finalità trovano razionalizzazione scientifica in approcci diversi alla teoria delle curve, propri della geometria sintetica, della geometria analitica e della geometria differenziale[13].

La geometria sintetica analizza le linee e le superfici rispetto alla loro genesi, considerando cioè il procedimento adoperato per la loro costruzione. Possiamo immaginare di costruire una curva luogo geometrico assoggettando un punto ad una determinata legge, oppure ottenerla per proiezione di un'altra curva secondo una certa direzione, o ancora derivarla per inviluppo delle sue tangenti. L'approccio sintetico è forse il più affine al *modus operandi* degli architetti, dei designer o dei progettisti in generale perché dialoga con il solo linguaggio che gli è proprio, e cioè il disegno.

A differenza della geometria sintetica, la geometria analitica si avvale invece di procedure di calcolo per lo studio delle linee e delle superfici, che considera rispetto al grado dell'equazione che le descrive[14]. Il concetto matematico di grado è esprimibile anche per via sintetica, considerando, nel piano, una curva e una retta che la attraversa. Chiamato anche "ordine", questo è dato dal numero massimo di punti che una curva data ha in comune con una retta che

13 Per una ricognizione intorno alle proprietà geometriche delle curve si vedano gli studi di Laura De Carlo pubblicati in De Carlo, Baglioni 2009.

14 Da un punto di vista matematico il grado di una linea o di una superficie è l'esponente dell'equazione che la descrive.

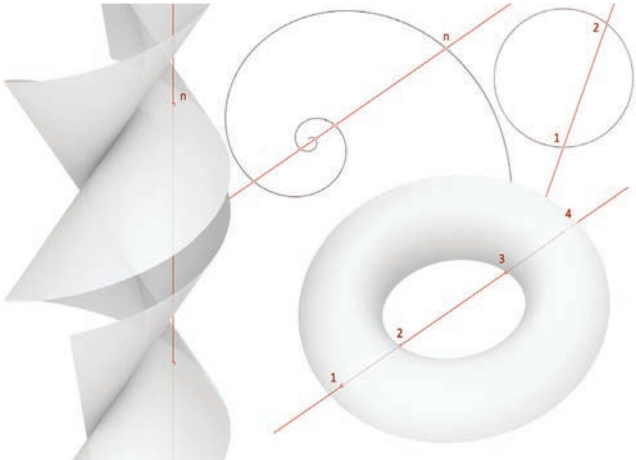


Fig. 2/ Descrizione sintetica del concetto di ordine di una linea e di una superficie.

la attraversa[15]. Se immaginiamo una circonferenza e una retta che la interseca possiamo facilmente dedurre che il grado della curva è 2, perché due sono i punti massimi in comune fra queste linee. Nel caso delle curve sghembe alla retta si sostituisce un piano, e il grado è dato dal numero di punti che questo ha in comune con la curva. Se il numero di intersezioni fra il piano (o la retta nel caso delle curve piane) e la curva è finito, questa si definisce algebrica. È possibile tuttavia che il piano o la retta in questione incontrino una curva in un numero infinito di punti; curve di questo tipo si dicono trascendenti e sono generalmente caratterizzate da un andamento ricorsivo. Le proprietà analitiche delle curve possono estendersi anche alle superfici. Così come il grado delle curve, anche quello delle superfici è esprimibile per via sintetica dal numero di punti che queste hanno in comune con una retta che le attraversa (fig. 2)[16]. La conoscenza del grado delle linee e delle superfici è particolarmente significativa nell'ambito della progettazione della forma, poiché sussiste una certa relazione fra l'ordine di una superficie e quello delle curve che le appartengono. Se consideriamo infatti due superfici algebriche che si intersecano, il grado della loro curva intersezione è dato dal prodotto de-

15 Cfr. Loria 1912, pp. 71-97.
16 Una sfera ad esempio è intersecata da una retta nello spazio in due punti, pertanto è una superficie algebrica di grado 2, e cioè una quadrica. Cfr. Migliari 2009b, pp. 145-147.

gli esponenti delle equazioni che le descrivono. Nel caso limite in cui una delle due superfici degenera in un piano, la curva intersezione avrà lo stesso grado della superficie sezionata (fig. 3); le ricadute di tale proprietà sono notevoli, come vedremo nel paragrafo che segue. Il punto di vista della geometria differenziale è ancora diverso. Questa considera infatti le linee e le superfici rispetto all'intorno infinitesimale di uno dei loro punti, mettendolo in relazione con l'ente geometrico più semplice che meglio ne approssima l'andamento (una retta, un piano, un cerchio o una sfera)[17]. Da una proprietà geometrico differenziale verificata nell'intorno dei punti di una linea o di una superficie è possibile derivare, di regola, proprietà relative alla struttura complessiva della figura[18]. Di interesse diretto della geometria differenziale è lo studio della curvatura di una curva, esprimibile nel punto, attraverso la misura della deviazione della curva dalla sua tangente. La curvatura di cui è suscettibile una curva piana si definisce flessione e giace nel piano della curva stessa. Dato un punto su una curva e la relativa tangente è possibile misurare il valore della curvatura calcolando l'inverso del raggio del cerchio che è tangente alla curva in quel punto. Tale cerchio si dice "cerchio osculatore", o "cerchio di curvatura" (dal latino *osculari* «baciare», da intendersi come il cerchio che bacia la curva nel punto), il suo centro prende il nome di "centro di curvatura", il suo raggio di "raggio di curvatura". A valori modesti del raggio di curvatura corrispondono valori elevati di curvatura, come accade ad esempio nel caso di curve stradali molto strette, in cui i cerchi osculatori sono piccoli; a valori elevati del raggio di curvatura corrispondono invece valori di curvatura modesti, come accade per curve particolarmente dolci, in cui i cerchi osculatori sono ampi (fig. 4).
Nel caso delle curve sghembe il calcolo della curvatura combina due contributi distinti, la flessione e la

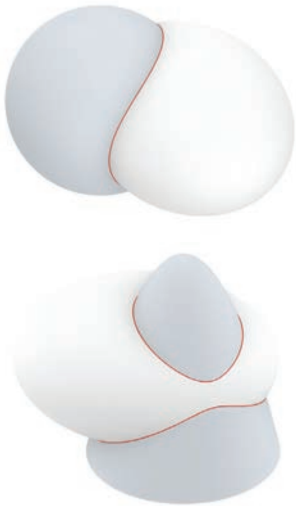
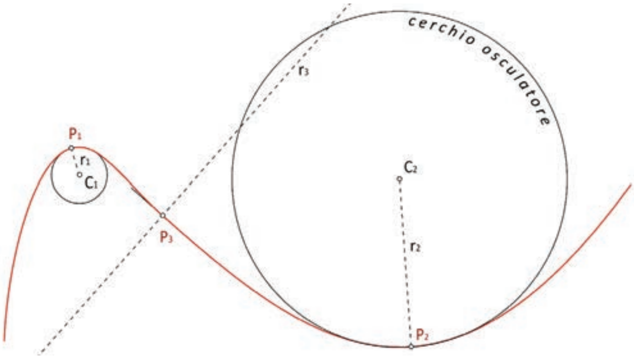


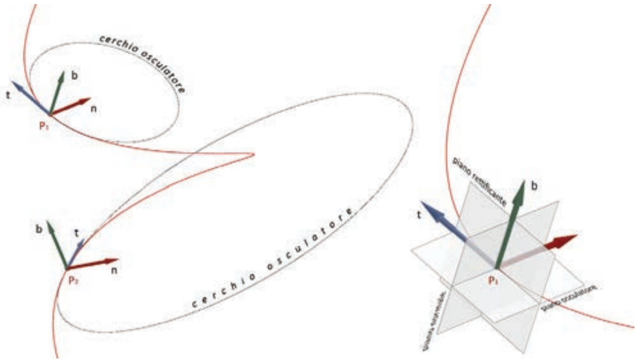
Fig. 3/ Curve del quarto ordine derivate dall'intersezione di due superfici quadriche.

17 Così si ottiene il concetto di tangente.
18 Cfr. Hilbert, Cohn-Vossen 1932, pp. 223-351.

Fig. 4/ Curvatura di una curva piana e relativo cerchio osculatore.

Fig. 5/ Curvatura di una curva sghemba e terna di Frenet; piano osculatore; piano normale; piano rettificante.





torsione. Per mettere a fuoco questo concetto possiamo immaginare i movimenti di cui è suscettibile un pezzo di filo di ferro, che si piega e si torce secondo due giaciture distinte[19]. Per attribuire univoca definizione a questi movimenti dobbiamo relazionarli ad una terna, la terna di Frenet[20], diversamente orientata per ogni punto della curva perché composta dalla tangente, dalla normale, e dalla binormale alla curva. Il piano su cui avviene flessione, e cioè il piano osculatore, è determinato dalla tangente e dalla normale della terna di Frenet e su questo giace appunto il cerchio osculatore della curva nel punto considerato[21]. Il piano della torsione è invece determinato dalla normale e dalla binormale della terna di Frenet ed è pertanto ortogonale al piano osculatore (fig. 5).

Il controllo della curvatura di una curva è estremamente significativo da un punto di vista progettuale, poiché determina la qualità del suo andamento nel-

19 Cfr. Ciarloni 2009, pp. 5-59.
20 Sul contributo di Frenet allo studio delle curve gobbe si veda il paragrafo precedente.
21 Possiamo immaginare il piano osculatore appartenente a tre punti consecutivi della curva infinitamente vicini.

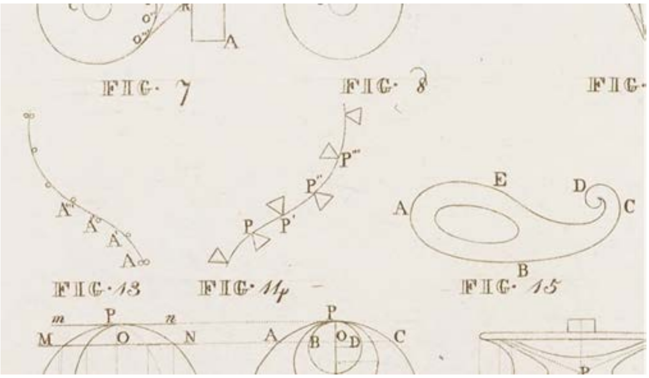


Fig. 6/ Chiodi e pesi per il controllo delle linee grafiche, figg.13 e 14 tratte da Dupin 1829.

lo spazio, in altre parole la sua tensione. Oggi la rappresentazione digitale implementa diversi strumenti diagnostici utili al controllo interattivo della qualità delle curve[22], ma il problema del controllo della tensione di una curva ricorre nelle arti e nei mestieri, come testimoniato dai diversi manuali ottocenteschi di geometria applicata (fig. 6). Così racconta Charles Dupin nella sua *Geometria e meccanica delle arti, dei mestieri, delle belle arti:* «I costruttori di vascelli […] vogliono dare una gran continuità di direzione e di curvatura alle linee […]. Segnano essi i punti isolati, pei quali deve passare la curva: quindi fissano al di qua e al di là di questi punti alcuni chiodi, due per due, e a tal distanza che una linea sottile possa essere piegata e posta fra queste coppie di chiodi. Infine segnano con un lapis la curva tracciata […]»[23], e trasponendo il problema nell'ambito del disegno seguita: «Si sostituiscono allora alle grandi righe di legno, righe sottilissime di balena; alcune per tutto di egual dimensione servono a tracciare delle curve la cui curvatura non cangia che di piccole quantità; altre assottigliate degradatamente verso una sola estremità, o verso le due, servono a tracciare quelle linee, la cui curvatura diminuisce anche gradatamente da un'estremità all'altra. Alcuni pesi […] di forma triangolare, si adoperano più comunemente per tenere su la carta il luogo dei chiodi […]»[24].

22 La rappresentazione digitale ha implementato diverse funzioni di analisi diagnostica della qualità delle linee e delle superfici, come sarà approfondito nel capitolo che segue.
23 Dupin 1829, p. 243.
24 Dupin 1829, p. 243.

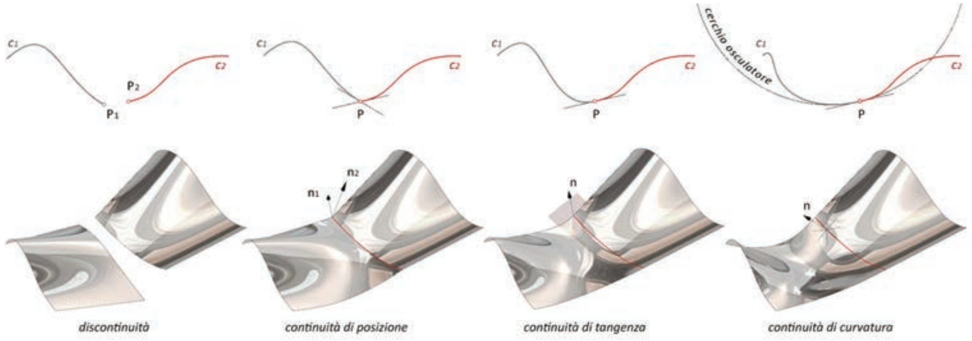


Fig. 7/ Continuità geometrica fra linee e superfici.

Interesse diretto della geometria differenziale è il controllo della continuità che sussiste fra curve contigue. Fra due curve che condividono un estremo può infatti sussistere una continuità di posizione, se le due curve hanno tangenti distinte nel loro estremo comune; di tangenza, se le due curve condividono nel punto comune la stessa tangente; di curvatura, se le due curve condividono nel punto di contatto lo stesso cerchio osculatore. Il concetto di continuità si estende anche alle superfici attraverso l'analisi del piano tangente che scorre lungo la loro curva di contatto (fig. 7).

Nella storia del progetto di architettura e di design, queste ed altre proprietà hanno fortemente condizionato la fortuna di alcune classi di linee e di superfici. La breve ricognizione che segue intende illustrare a scopo esemplificativo una selezione di curve notevoli appartenenti tutte a superfici che sono a loro volta notevoli. Le superfici in questione si imposero nella pratica progettuale per via di alcune proprietà che le hanno rese particolarmente adatte ad essere controllate attraverso il disegno in fase di progetto e ad essere riprodotte in opera in fase di realizzazione. Si tratta in generale delle superfici quadriche, algebriche, degli elicoidi, ricorsivi, e di alcune superfici di rivoluzione, come il toro. Generalmente riprodotte in pietra da taglio, in acciaio o in cemento armato, queste superfici hanno di fatto dominato la progettazione della forma dall'antichità sino ai giorni nostri, dove le vediamo cedere il passo alle superfici di forma libera. Come queste superfici sono state privilegiate nell'ambito della progettazione della forma, così lo sono state le curve, piane o sghembe, algebriche o trascendenti che gli appartengono. A queste curve in particolare è dedicata la ricognizione che segue.

Curve notevoli nell'architettura e nel design

Il piccolo repertorio a cui è dedicata questa breve ricognizione riguarda curve piane e sghembe che appartengono a superfici notevoli, che derivano in particolare dall'intersezione di superfici o che sussistono in ragione delle superfici a cui appartengono.

Curve derivate dall'intersezione di superfici

Le curve derivate dall'intersezione fra superfici rivestono un ruolo determinante nella progettazione della forma. Linee e superfici, infinite nell'universo astratto della geometria, acquisiscono forma finita nello spazio fisico, e cioè nel mondo reale, dove se ne considera una porzione più o meno estesa, sezionata secondo un piano o secondo un'altra superficie. Il profilo di una porzione di superficie è dunque una curva, piana oppure sghemba.

Come anticipato nel paragrafo precedente, una superficie algebrica sezionata da un piano restituisce una curva il cui grado coincide con quello della superficie stessa. Le ricadute di questa proprietà sono notevoli. Se sezioniamo ad esempio una quadrica con un piano otteniamo una curva piana di secondo grado e cioè una conica. Innumerevoli in geometria e matematica sono le trattazioni teoriche e pratiche dedicate alle coniche, a cui non è possibile far cenno senza risultare superficiali e approssimativi poiché «[…] una semplice raccolta degli enunciati delle proposizioni che vi si riferiscono riempirebbe parec-

Fig. 8/ Curve del quart'ordine derivate dall'intersezione di due superfici quadriche, una quartica generica, una quartica digrammica e la finestra di Viviani.

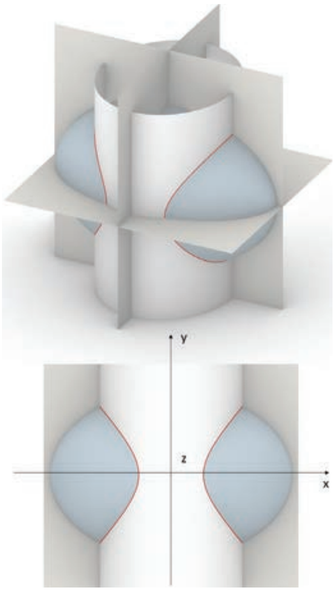


Fig. 9/ Proiezioni piane delle curve del quarto ordine derivate dall'intersezione di due superfici quadriche sui piani principali comuni alle due quadriche.

chi poderosi volumi»[25]. Quello che ci si limita a mettere in evidenza è che queste curve dalle proprietà straordinarie erano note sin dall'antichità e, poiché piane, potevano essere rappresentare con accuratezza per via grafica. La profonda conoscenza delle coniche e delle loro proprietà ne favorì l'uso nella progettazione della forma e, con loro, quello delle superfici quadriche che gli appartengono poiché, in generale, dalla capacità di rappresentazione di una curva dipende il suo controllo progettuale.

Ma la fortuna delle superfici quadriche si deve anche da altre proprietà. Sette in tutto[26], l'ellissoide (o la sfera come caso particolare) il cono e il cilindro, il paraboloide ellittico e il paraboloide iperbolico, l'iperboloide a una falda e l'iperboloide a due falde, sono superfici simmetriche a centro, proprio o improprio. Per questo centro passano tre assi principali o assi di simmetria ortogonale che definiscono a coppie i piani principali, anch'essi piani di simmetria ortogonale. In generale, la curva intersezione fra due superfici algebriche ha grado pari al prodotto degli esponenti delle equazioni delle superfici date. Così l'intersezione di due superfici quadriche è una quartica, e cioè una curva sghemba di quarto grado, che può essere composta da un solo ramo, nel caso in cui le superfici si intersecano parzialmente, o che può essere digrammica, composta cioè da due rami, nel caso in cui una superficie attraversi intera-

25 Cfr. Loria 1930a, p. 13.
26 Il numero delle quadriche dipende dalla maniera di considerarle. In questo caso si considera una sola superficie nel caso in cui la quadrica sia rotonda oppure ellittica.

Fig. 10/ Volta a crociera e volta a botte con lunette cilindriche dei portici del cortile di Palazzo Farnese in Roma (per gentile concessione dell'Ambasciata di Francia).

mente l'altra. Se le superfici che si intersecano sono tangenti in un punto la curva si autointerseca, come la finestra di Viviani, studiata nella seconda metà del Seicento, generata dall'intersezione di un cilindro tangente ad una sfera il cui centro giace sulla superficie del cilindro (fig. 8). Quando due quadriche che si intersecano condividono gli stessi piani di simmetria ortogonale, la curva del quart'ordine derivata dalla loro intersezione è simmetrica rispetto a tali piani[27] e si proietta, su questi, in una conica, secondo le direzioni degli assi principali della superficie (fig. 9)[28]. Curve di questa specie sono ad esempio le coniche sferiche, quartiche digrammiche derivate dall'intersezione di una quadrica con una sfera, studiate da Fuss, Steiner e Chasles tra la fine del Settecento e i primi anni dell'Ottocento[29].

Le applicazioni delle quadriche in architettura sono molteplici. Coni, cilindri e sfere sono infatti alla base dei sistemi voltati semplici o composti e ricorrono nelle architetture in pietra e in muratura, dall'antichità sino ai tempi moderni. Le cupole emisferiche, i relativi pennacchi e le volte a vela si costruiscono infatti a partire da una sfera, così come le volte a botte, le crociere, le volte a padiglione, le lunette cilindriche si ricavano da cilindri e coni quadrici. Gli spigoli che derivano dalla reciproca intersezione di

27 L'enunciato di questo teorema è pubblicato in Frère 1920, pp. 645-646; nota al punto 1053 di M. E. Lemoine.
28 Una interessante trattazione sulle quartiche si deve a Frézier, che le considera come intersezioni di superfici quadriche e le controlla attraverso le coniche che ne sono proiezione piana. Cfr. Salvatore 2012.
29 Cfr. Loria 1931, pp. 111-125.

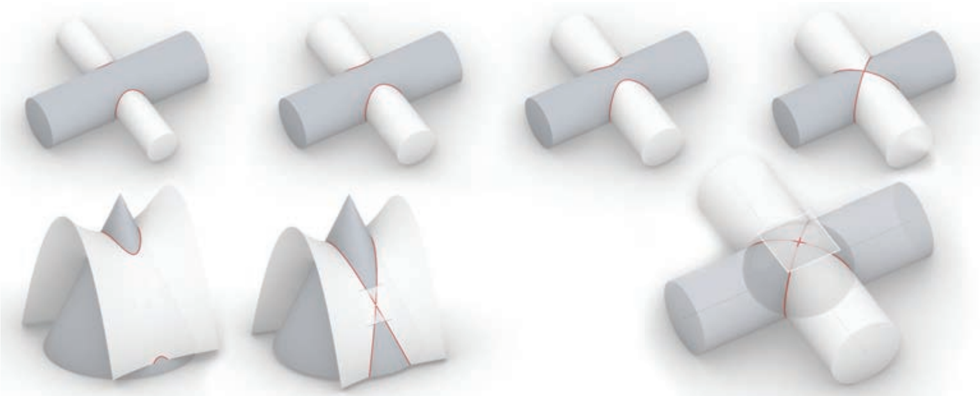


Fig. 11/ Intersezioni piane fra superfici quadriche.

queste superfici sono nel caso generale curve a doppia curvatura di quarto grado, come ad esempio gli spigoli delle lunette cilindriche, derivate appunto dall'intersezione di due volte a botte a sesto diverso, che ricorrono con una certa frequenza nell'architettura rinascimentale e barocca (fig. 10).
Se dall'intersezione di due quadriche si ricava in generale una quartica, esistono alcune condizioni notevoli in cui l'intersezione si riduce ad una coppia di curve piane[30]. Una curva algebrica intersezione fra due superfici può scomporsi infatti in più curve di grado inferiore purché la loro somma restituisca il grado complessivo della curva. Un particolare teorema di Monge insegna che se due quadriche che si intersecano sono circoscritte ad una terza quadrica, queste si sezionano secondo un sistema di curve piane, e cioè secondo una coppia di coniche[31] (due curve di secondo grado piuttosto che una curva di grado quattro). Le superfici che si intersecano condividono, nei punti di contatto, gli stessi piani tangenti (fig. 11). Estremamente ricorrente, questa condizione è alla base delle intersezioni fra i cilindri che compongono le volte a crociera, dove i costoloni risultano infatti ellittici. Applicazioni particolarmente suggestive in cui ricorrono intersezioni piane fra superfici quadriche si ritrovano nelle volte stellate leccesi (fig. 12).

30 Sulle coniche intersezioni piane di superfici algebriche cfr. Salvatore 2009a.
31 L'enunciato di questo teorema di Monge è riportato da Jean Nicolas Pierre Hachette, cfr. Hachette 1813, p. 321.

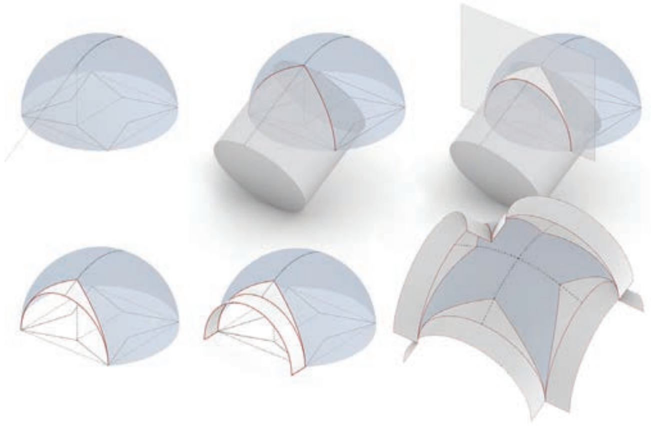
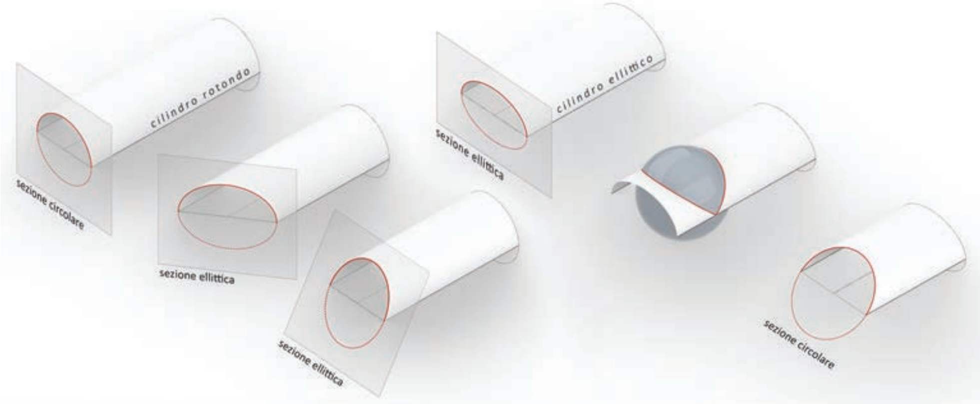


Fig. 12/ Genesi geometrica di una volta leccese a spigolo.

Di particolare interesse rispetto alle quadriche e alle coniche che ne sono la sezione piana, è un problema particolarmente spinoso in architettura, che riguarda la progettazione delle volte sbieche, composte da cilindri quadrici sezionati da piani genericamente orientati rispetto al loro asse. Le superfici quadriche che prevedono ellissi come sezioni piane, ammettono come caso particolare anche le sezioni circolari. Se si immagina una volta a botte formata da un cilindro quadrico rotondo oppure ellittico, è facile comprendere come ogni variazione di giacitura dei piani che delimitano la volta, come un muro a scarpa o un muro ruotato di un certo angolo rispetto all'altro, introduca variazioni dell'arco di faccia che, genericamente ellittico, ammette una sola configurazione circolare (fig. 13). Nel caso dell'architettura di pietra, in cui le volte sono ripartite in conci, i cambiamenti di giacitura dell'arco di faccia producono diversi inestetismi dovuti alla difficoltà di ripartizione dei fronti in elementi regolari. Questa problematica favorì in stereotomia il fiorire di numerose soluzioni orientate alla ottimizzazione degli apparecchi murari e cioè del progetto dei conci di una volta sbieca che alimentarono un ricco repertorio di casi particolari[32] (fig. 13).
Come coni cilindri e sfere hanno trovato largo im-

32 A questo riguardo cfr. Salvatore 2009b.



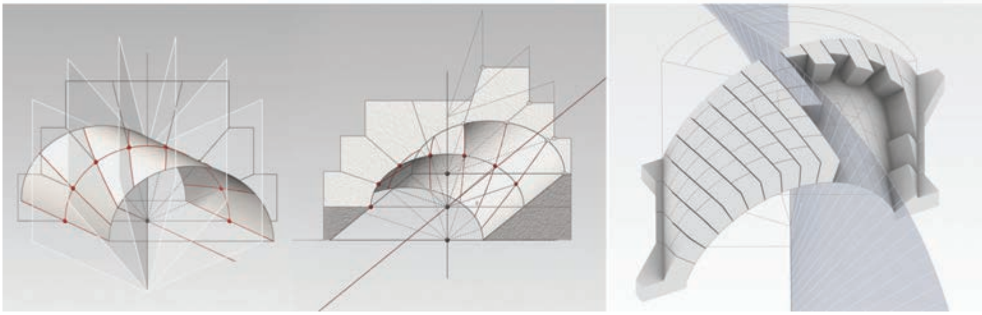


Fig. 13/ Sezioni piane di un cilindro quadrico (in alto); apparecchi in pietra da taglio per la soluzione delle volte sbieche (in basso).

piego nell'architettura storica, così paraboloidi e iperboloidi ricorrono nelle architetture di maestri del movimento moderno come Pier Luigi Nervi o Felix Candela. In particolare, nelle architetture di Candela i paraboloidi iperbolici raggiungono massimi livelli di espressività formale; aggregati in maniera di volta in volta diversa, rivelano l'intero repertorio delle linee che si possono ottenere sezionando o intersecando questa superficie, come mostra il caso della *Capilla de Palmira* realizzata a Morelos, in Messico, intorno alla metà degli anni Cinquanta (fig. 14).
Anche l'architettura contemporanea ricorre alle superfici quadriche e alle curve di secondo e quarto grado derivate dalle loro rispettive intersezioni o sezione piane. La sezione circolare di un cilindro ellittico si riscontra nella chiesa di San Giovanni Battista realizzata a Mogno da Mario Botta nel 1996 (fig. 15) e profili circolari delimitano i quadrilateri sferici

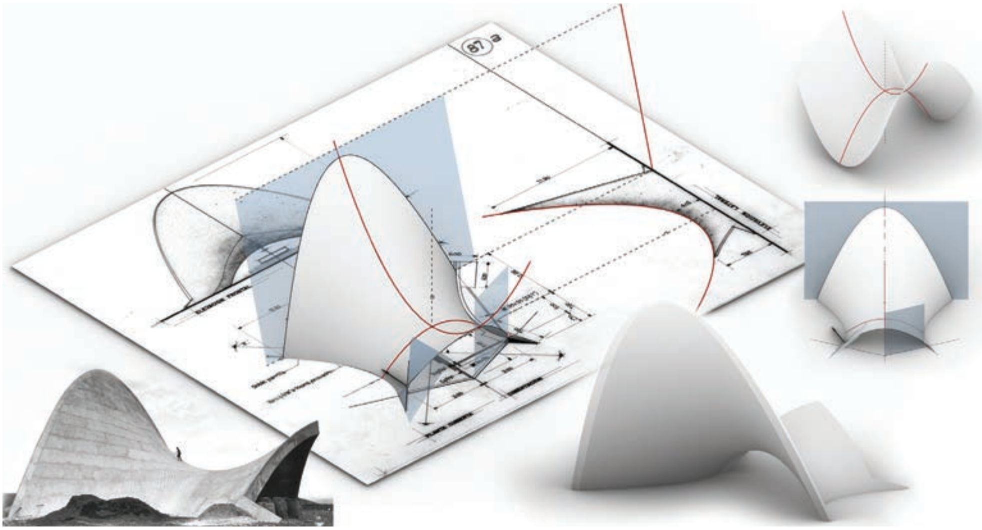


Fig. 14/ Genesi geometrica della *Capilla de Palmira* di Felix Candela.

delle vele della chiesa di *Dives in Misericordia* realizzata da Richard Meyer a Roma nel 2003 (fig. 16). Archi iperbolici sezionano i paraboloidi iperbolici della sede della Bacardi realizzata nel 1960 a Cuautitlán, in Messico, da Felix Candela, e ancora archi di faccia iperbolici caratterizzano gli spicchi della copertura del ristorante Los Manantiales progettato negli stessi anni dallo stesso architetto, che si intersecano fra loro secondo parabole uguali. Le stesse geometrie ricorrono nell'Oceanografico di Valencia progettato anch'esso da Candela alla fine degli anni novanta (fig. 17). Archi iperbolici si ritrovano infine nella Tromsø Public Library in Norvegia, progettata da Kjell Beite nel 2005, di impianto affine a Los Manantiales e nella Franklin Halle a Berlino realizzata da Stubbins nel 1957. Curve del quart'ordine intersezione di un ellissoide con un cilindro si ritrovano nel *National Theatre* di Pechino realizzato da Paul Andreu nel 2007, e ancora una curva del quarto ordine intersezione di un paraboloide iperbolico con un cilindro, delimita la copertura del mini circuito della Volkswagen progettato dallo studio Gratz nel 2017, la stessa che caratterizza il profilo di celebri patatine, interse-

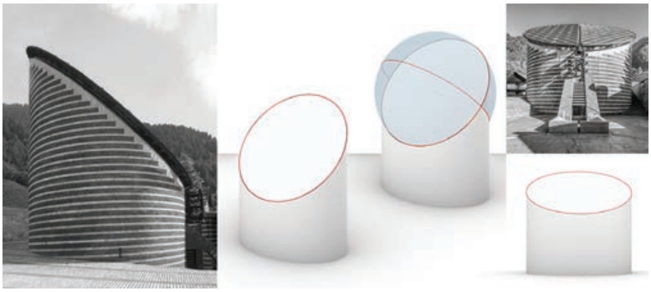


Fig. 15/ Cilindro rotondo sezionato secondo un'ellisse nella chiesa di San Giovanni battista a Mogno di Mario Botta, 1996.

Fig. 16/ Quadrilateri sferici delle vele della chiesa *Dives In Misericordia* a Roma realizzata da Richard Meyer nel 2003.

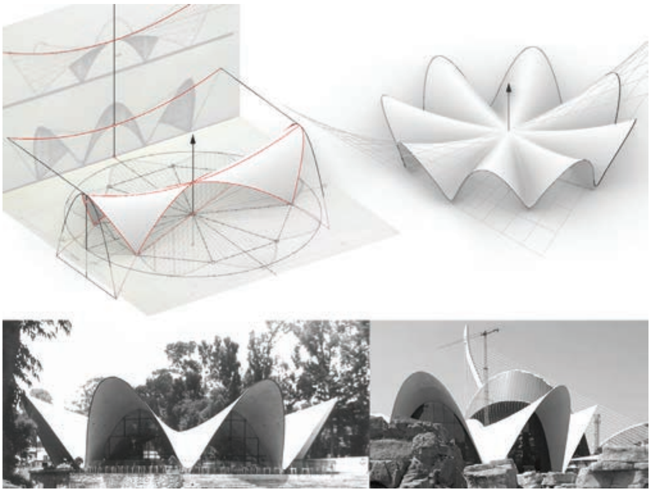


Fig. 17/ Paraboloidi iperbolici e relative sezioni piane nel ristorante Los Manantiales del 1958 e nel Museo Oceanografico della Città delle Arti e delle Scienze di Valencia del 1996, di Felix Candela.

zione di paraboloidi iperbolici con il cilindro rotondo della confezione.

Curve delle superfici

Di altrettanto interesse nell'ambito della progettazione della forma sono le curve che possiamo definire "proprie" delle superfici, e cioè quelle che trovano ragione geometrica nelle proprietà locali della superficie a cui appartengono, senza la quale non potreb-

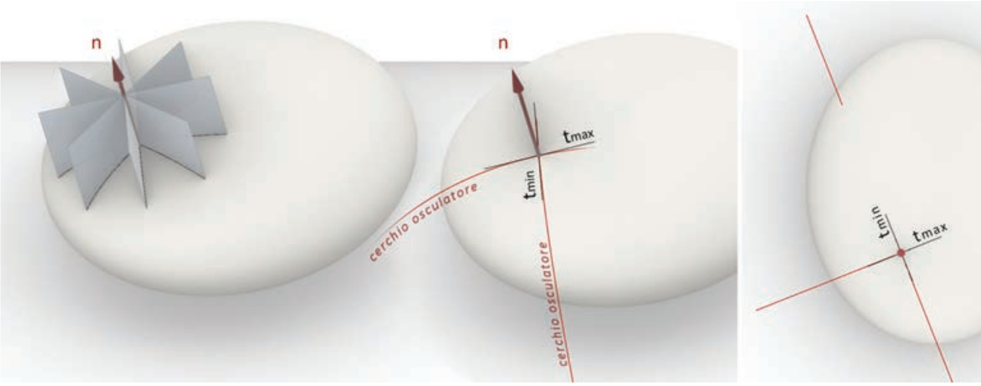


Fig. 18/ Genesi geometrica delle linee di curvatura sulla superficie di un ellissoide.

bero essere costruite. Trovano ampia applicazione nell'ambito dell'architettura e del design le linee di curvatura, le eliche e le spirali sghembe, le lossodromie, le ortodromie, le geodetiche e infine le curve che possiamo definire "iso", composte da punti che mantengono costante una certa proprietà.

Le *linee di curvatura* di una superficie hanno avuto applicazioni notevoli nella storia dell'architettura sin dall'antichità, perché impiegate in maniera intuitiva molti secoli prima della loro teorizzazione[33].
Si tratta di due schiere di curve continue che coprono senza lacune una superficie a punti regolari e che hanno la caratteristica di essere in ogni punto perpendicolari fra di loro. Questa condizione di ortogonalità costante che le caratterizza e che le ha rese e ancora le rende eccezionalmente attraenti nelle arti applicate, si deve alla proprietà notevole di tali curve di avere in ogni punto la direzione delle curvature principali della superficie a cui appartengono.
Immaginiamo dunque una superficie curva e un punto scelto a piacere su questa. Immaginiamo poi di costruire la normale alla superficie nel punto e il fascio di piani che ammette detta normale come retta di sostegno. I piani del fascio sezioneranno la superficie assegnata secondo un sistema di infinite curve, ognuna con un valore proprio di curvatura. Due

33 In particolare, nella stereotomia della pietra le linee di curvatura venivano impiegate in modo intuitivo nella progettazione degli apparecchi murari perché coincidenti con le direttrici e le generatrici di molte delle superfici quadriche che venivano correntemente impiegate.

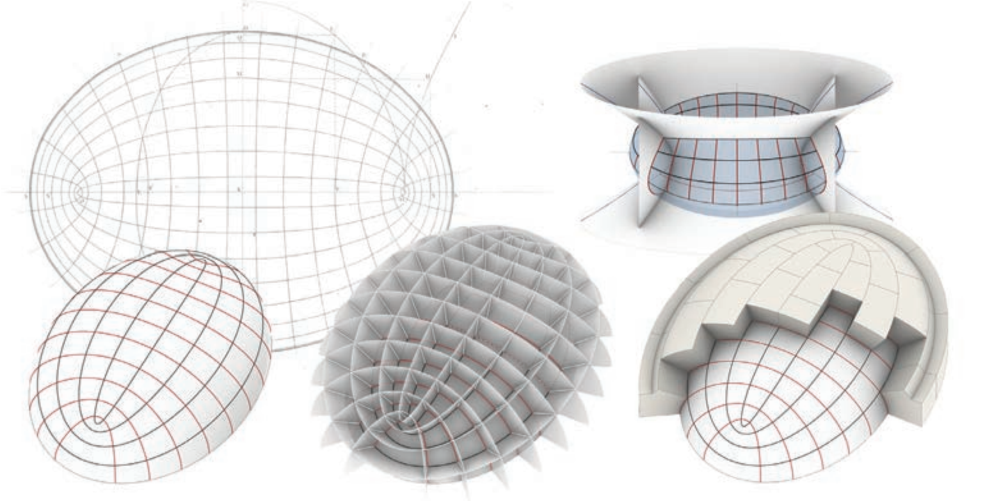


Fig. 19/ Linee di curvatura di un ellissoide e loro applicazione nella *Gèométrie descriptive* di Monge.

di queste sezioni avranno rispettivamente curvatura massima e minima nel punto considerato (fig. 18), si definiscono curvature principali e sono fra loro perpendicolari, come dimostrato da Eulero nella seconda metà del Settecento[34]. Operando nell'ambito della geometria differenziale immaginiamo di spostarci progressivamente di una quantità infinitesimale, lungo una delle due direzioni principali di curvatura e di reiterare il procedimento fino ad ottenere la costruzione di una linea che corra lungo la superficie in tutta la sua estensione. Avremmo ottenuto così una linea di curvatura, tangente, per costruzione, alle direzioni principali di curvatura della superficie data. Reiterando il procedimento per entrambe le direzioni principali di curvatura in tutti i punti della superficie otteniamo le due schiere.

Le linee di curvatura furono teorizzate per la prima volta da Gaspard Monge che dimostrò come le normali ad una superficie curva, possano essere considerate intersezioni di due schiere di superfici sviluppabili, che si sezionano ad angolo retto. Così l'insieme delle normali ad una linea di curvatura genera una superficie sviluppabile, ortogonale, per costruzione, alla sviluppabile che appartiene all'altra schiera[35] (fig. 19).

34 Cfr. Eulero 1767, pp. 119-143.
35 Cfr. Monge 1798, pp. 120-127.

La possibilità di costruire un sistema di curve ortogonali fra loro su di una superficie, a sua volta ortogonale ad un sistema di superfici sviluppabili, rendeva queste curve particolarmente adatte alla soluzione di alcuni problemi di perpendicolarità fra superfici in architettura, come nel caso della stereotomia della pietra, ampiamente trattata dallo stesso Monge, dove la condizione di perpendicolarità fra i conci veniva pienamente soddisfatta dalle proprietà di queste curve[36].
Significativi contributi furono dati dagli allievi della scuola di Monge, rivolti alla ricerca di metodi di costruzione delle linee di curvatura basati sulle loro proprietà geometriche. In particolare, una memoria di Binet dimostrò come le linee di curvatura di una superficie di secondo grado fossero date dall'intersezione di questa con una coppia di quadriche di tipo diverso, a questa confocali, e come queste tre superfici fossero perpendicolari fra di loro. Dupin generalizzò in seguito la questione, meglio nota come teorema di Dupin, dimostrando che data una schiera triplamente ortogonale di superfici, le linee di curvatura di ognuna, sono le sue intersezioni con le altre superfici della schiera[37] (fig. 19).
Le linee di curvatura sono oggi impiegate nella soluzione dei problemi di tassellazione delle superfici con mesh quadrangolari.

Fra le curve sghembe di maggiore interesse per via delle loro innumerevoli applicazioni nei diversi ambiti delle arti applicate troviamo le *eliche* e le *spirali* sghembe. Da un punto di vista strettamente architettonico l'interesse per queste curve deriva dal loro ricorrente utilizzo come generatrici di elicoidi, superfici di intradosso e di copertura di scale e rampe. Entrambe queste curve sono determinate dal moto di un punto che ruota intorno ad un asse e che, durante la rotazione, trasla secondo una direzione assegnata

36 La costruzione dell'apparecchio ellissoidale fu affrontata da Monge e dal suo allievo Leroy. Cfr. Monge 1796, pp. 145-165 e Leroy 1862, pp. 254-256.
37 Per approfondimenti cfr. Fallavollita, Salvatore 2012a.

Fig. 20/ Eliche cilindriche nelle scale elicoidali e nelle viti; planches tratte dal *Traité de stereotomie* di C. F. A. Leroy, ed. 1877.

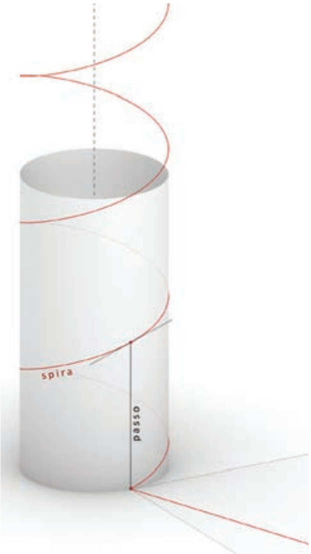


Fig. 21/ Genesi geometrica di un'elica cilindrica e suo sviluppo piano.

(fig. 20). Trascendenti e generate dal medesimo movimento rototraslatorio, queste curve apparentemente simili hanno invece proprietà molto diverse.

Un'elica è una curva a pendenza costante o isoclina, e cioè una linea la cui tangente in ogni punto forma un angolo costante con un piano perpendicolare all'asse; al contrario dell'elica una spirale sghemba è invece una curva a passo costante[38]. È possibile costruire queste curve su diverse superfici, ma operando in ambito architettonico e di design l'attenzione si rivolge nuovamente alle quadriche, a cominciare da quelle sviluppabili e cioè coni e cilindri. La costruzione di un'elica su di una superficie sviluppabile rivela infatti, nel suo sviluppo piano, una interessante proprietà: la curva si trasforma in una linea retta (fig. 21). La pendenza costante della curva insieme alla possibilità di poterla controllare con accuratezza fuori opera, attraverso il suo sviluppo piano, ha reso l'elica, in particolare quella cilindrica, una curva privilegiata nei processi di progettazione delle solette e delle coperture di rampe e scale. Le applicazioni sono molto numerose, di particolare interesse quelle relative al taglio dei conci delle scale in pietra da taglio, in cui lo sviluppo piano dell'elica, inviluppato in opera sul concio da intagliare veniva impiegato come modano per guidare le operazioni di taglio[39] (fig. 22).

Se nel caso del cilindro elica e spirale sono la stessa curva, lo stesso non si verifica nel caso del cono,

38 Si ricorda che il passo di eliche e spirali sghembe misura l'ampiezza di una spira, e cioè la differenza di quota del punto mobile misurata dall'inizio alla fine di un giro completo.
39 Per approfondimenti cfr. Salvatore 2011.

Fig. 22/ Apparecchio stereotomico di una scala elicoidale.

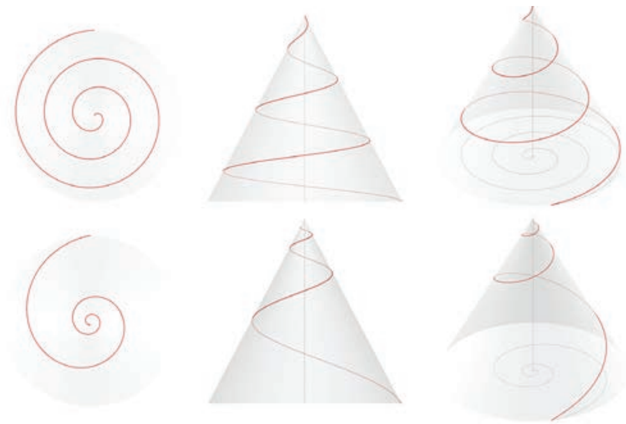


Fig. 23/ Eliche e spirali coniche e relative proiezioni piane notevoli.

dove invece le due curve rivelano tutta la loro diversità. L'elica conica infatti, avendo una pendenza costante, ha un passo che varia lungo la sua estensione riducendosi progressivamente man mano che ci si avvicina al vertice della superficie. Al contrario una spirale conica, mantenendo un passo costante, ha una pendenza che varia lungo la sua estensione e che aumenta progressivamente avvicinandosi al vertice della superficie. È possibile ottenere un'elica co-

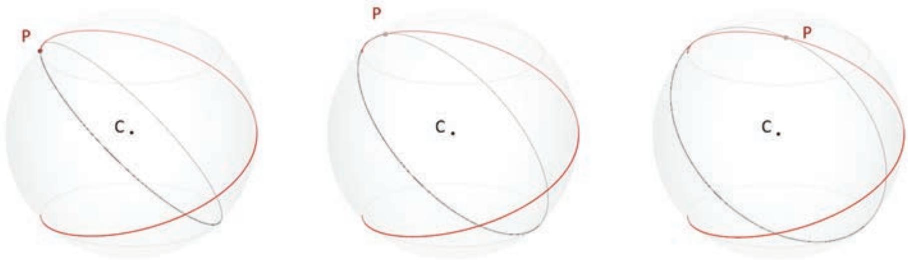
Fig. 24/ Rampa elicoidale d'ingresso dei Musei Vaticani, realizzata da Giuseppe Momo nel 1932.

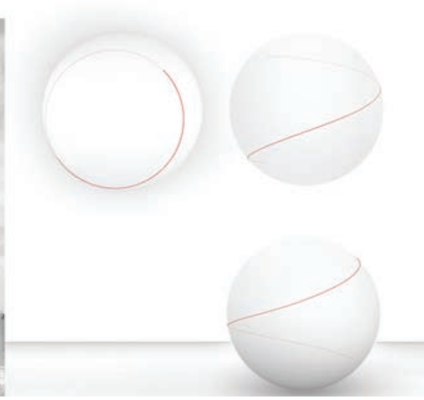
Fig. 25/ Esterno della rampa elicoidale del Guggenheim Museum di New York. Frank Lloyd Wright 1943-1959.

nica per proiezione secondo la direzione dell'asse del cono di una spirale logaritmica che gli è perpendicolare, così come è possibile ottenere una spirale conica (in particolare la spirale di Pappo) per proiezione secondo la direzione dell'asse del cono di una spirale di Archimede che gli è perpendicolare (fig. 23).

Le ricadute in ambito progettuale sono significative. Nel progetto di una scala o una rampa conica infatti, l'uso dell'elica produce una variazione di altezza della rampa, quello della spirale invece, la variazione di ampiezza delle pedate, come accade nella *Doppia rampa elicoidale d'ingresso dei Musei Vaticani* progettata nel 1932 da Giuseppe Momo, in cui la riduzione delle pedate verso il vertice del cono denuncia la variazione della pendenza e perciò l'utilizzo di una spirale conica come curva direttrice dell'elicoide (fig. 24), e nel Guggenheim Museum di New York, realizzato da Frank Lloyd Wright intorno alla metà degli anni cinquanta (fig. 25).

Interessante rispetto alle sue applicazioni in architettura anche il caso dell'elica sferica, curva direttrice di elicoidi impiegati per la progettazione delle scale di servizio ai serbatoi sferici di stoccaggio dei depositi industriali (fig. 26). L'elica sferica è descritta dal moto di un punto che appartiene ad un cerchio massimo della sfera che ruota su un cerchio fisso, avente la giacitura rispetto alla quale la curva mantiene pendenza costante. A differenza dell'elica, la spirale sferica è





descritta da un punto che si muove con velocità costante lungo un meridiano della sfera che ruota a sua volta con velocità costante attorno all'asse polare.
Alcune forme dell'architettura contemporanea impiegano eliche e spirali su altri tipi di quadriche, quali ad esempio ellissoidi o iperboloidi. È questo il caso della rampa elicoidale interna all'ellissoide della cupola del Reichstag a Berlino, realizzata nel 1999 da Norman Foster (fig. 27), e quello della rampa elicoi-

Fig. 26/ Costruzione di un'elica sferica e sue applicazioni in architettura, Chicago Bridge & Iron Co., Lago plant, Aruba (foto R. Y. Richie, 1939).

Fig. 27/ Rampa elicoidale interna all'ellissoide della cupola del Reichstag a Berlino, realizzata nel 1999 da Norman Foster.

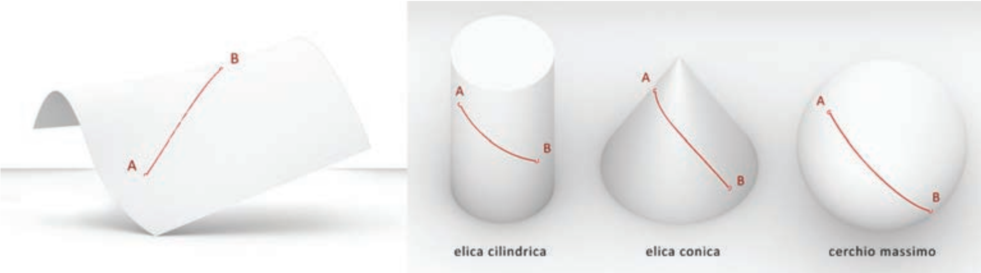


Fig. 28/ Linee geodetiche di superfici notevoli.

dale interna all'iperboloide a una falda della *Observation tower of the Tree-top adventure park*, presso Copenhagen, progettata nel 2017 da Effekt studio.

Un ruolo significativo è ricoperto dalle *linee geodetiche*, che sono linee di minima distanza fra due punti assegnati su di una superficie. Fra le infinite curve che possiamo costruire fra due punti di una superficie data, quella di minima distanza gode della proprietà di condividere, in ogni suo punto, la normale principale con quella della superficie a cui appartiene. Di conseguenza, in ogni punto di una geodetica, il piano osculatore è ortogonale alla superficie su cui giace la curva. Tale piano è infatti determinato dalla tangente alla curva e da un punto sulla curva stessa che, immaginando una condizione infinitesimale propria della geometria differenziale, tende al punto dato, condizione limite rappresentata dal piano che appartiene alla tangente e alla normale della terna di Frenet, costruita per il punto assegnato.
Data quindi una superficie e due punti su questa, la geodetica che li unisce avrà in ogni suo punto la normale coincidente con la normale alla superficie nel punto e, di conseguenza, alla geodetica apparterrà una superficie rigata costantemente perpendicolare alla superficie a cui questa appartiene, formata dall'insieme delle normali condivise.
Le geodetiche di alcune superfici notevoli sono a loro volta curve notevoli. È questo il caso della sfera,

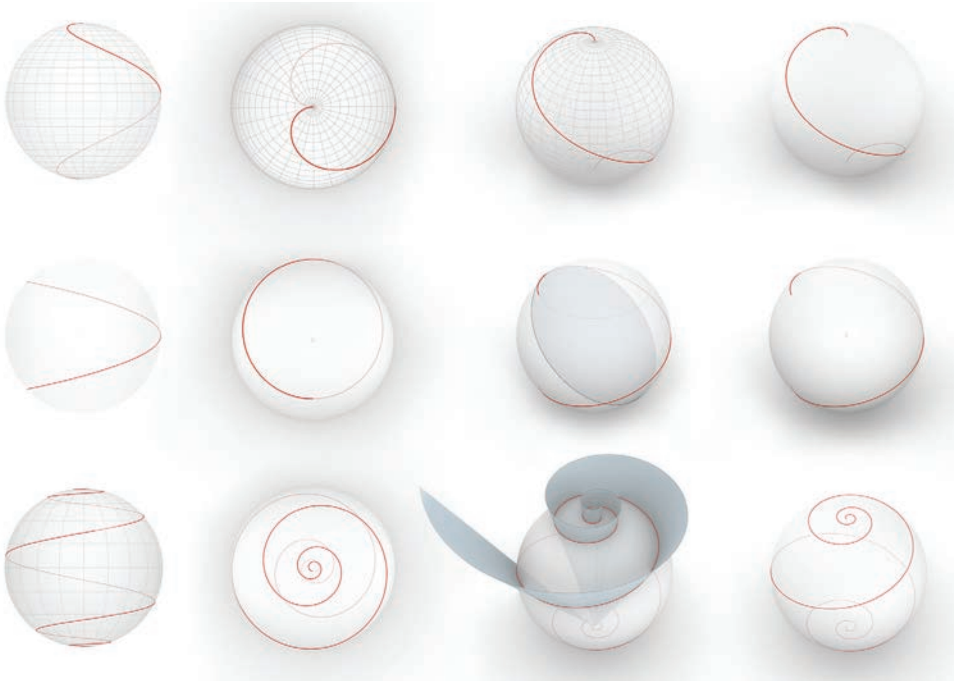


Fig. 29/ Spirali, eliche e lossodromie della sfera.

le cui geodetiche sono tratti di cerchi massimi, del cono e del cilindro quadrici, in cui le geodetiche sono eliche della superficie, infine del piano, in cui le curve geodetiche si riducono a linee rette. Di particolare interesse infine, la costruzione delle geodetiche sulle superfici sviluppabili, perché si sviluppano secondo linee rette, come quelle dei coni e dei cilindri (fig. 28). Le geodetiche trovano ampia applicazione nella soluzione di problemi cartografici, in particolare quelle della sfera, che prendono il nome di ortodromie, e che indicano la distanza più breve da seguire per raggiungere due punti distinti sulla superficie terrestre. Se immaginiamo la divisione in meridiani e paralleli della terra osserviamo come i meridiani siano tutti ortodromie della sfera, e come invece l'unico parallelo ad essere una ortodromia sia l'equatore.
Le *lossodromie* (dal greco λοξὸς *obliquo* e -δρομὶς *corsa*) sono curve che appartengono alle superfici

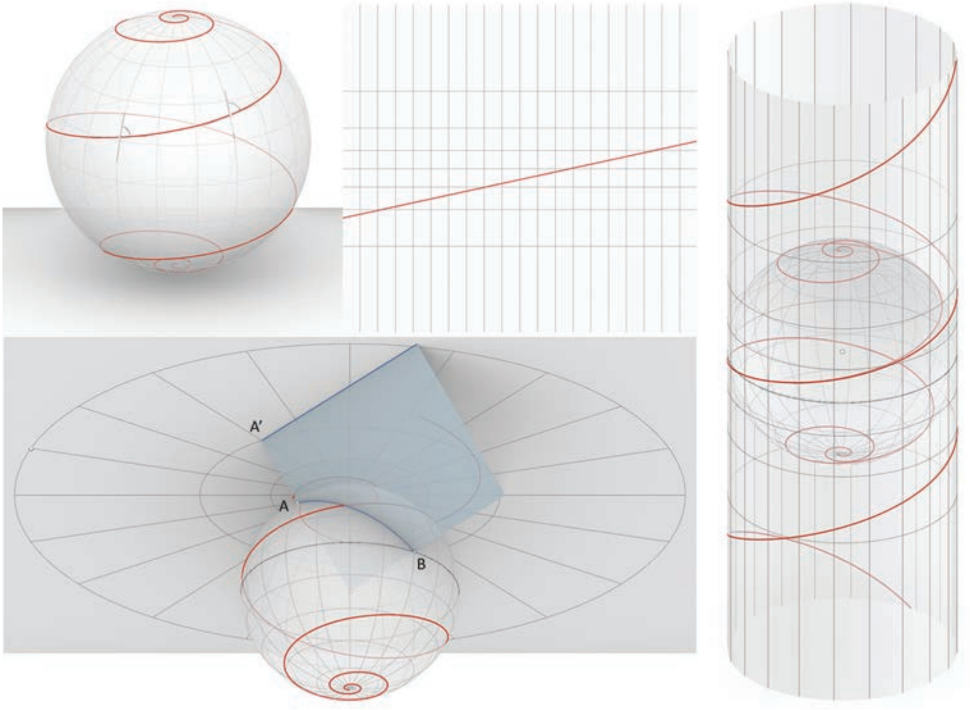


Fig. 30/ Proiezione gnomonica e proiezione di Mercatore.

di rivoluzione e che mantengono costante l’angolo che formano con i meridiani della superficie. Come le geodetiche anche le lossodromie di superfici notevoli sono curve notevoli. È questo il caso delle lossodromie del cilindro e del cono, che coincidono con le relative eliche e che si sviluppano, nel piano, secondo linee rette. Di particolare interesse le lossodromie dei coni quadrici rotondi e quelle della sfera, che hanno relazioni proiettive con le spirali logaritmiche, curve piane anch’esse a pendenza costante. La lossodromia di un cono rotondo si proietta infatti secondo la direzione dell’asse su un piano che gli è perpendicolare secondo questa curva. La stessa si ricava per proiezione stereografica della lossodromia della sfera, proiezione conforme che preserva la costanza angolare (fig. 29).
Come le ortodromie, anche le lossodromie trovano ampia applicazione nell’ambito della cartogra-

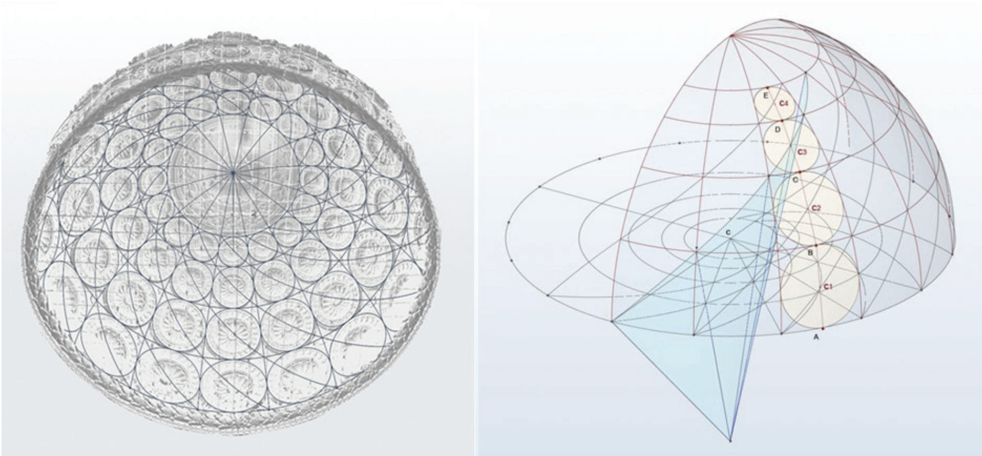
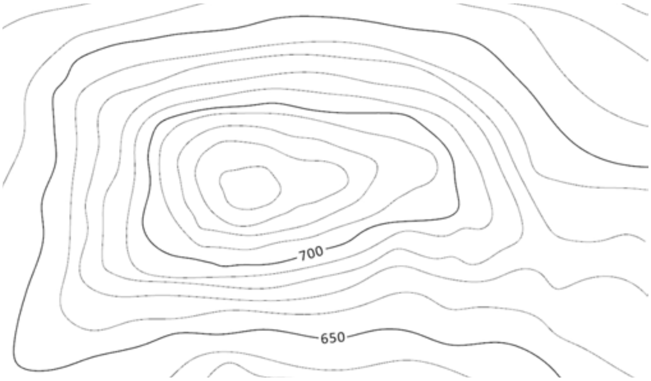


Fig. 31/ Lossodromia della cupola del portico della Cappella Pazzi a Firenze.

fia, perché i loro tracciati consentono di mantenere una rotta costante[40]. In aeronautica alle ortodromie e alle lossodromie sono affidate le traiettorie della navigazione. In particolare, alle ortodromie la traiettoria ideale perché la più breve, alle lossodromie la rotta da seguire per approssimare con andamento costante la traiettoria definita dalle ortodromie. Fra le diverse carte che possono ottenersi per proiezione di meridiani e paralleli da un centro proprio su di un piano posto secondo determinate giaciture rispetto alla sfera che approssima la superficie terrestre, ve ne sono due che sono notevoli rispetto alle curve in esame, la proiezione gnomonica e la proiezione di Mercatore. La proiezione gnomonica, polare, proietta meridiani e paralleli dal centro della sfera su di un piano parallelo a quello equatoriale. I meridiani convergono verso il centro, i paralleli si proiettano secondo circonferenze, e le ortodromie si proiettano in linee rette. La proiezione di Mercatore che deve il nome al cartografo fiammingo che la definì nel 1569 è invece una proiezione cilindrica eseguita dal centro della sfera su di un cilindro rotondo le cui sezioni principali circolari coincidono con un cerchio massimo della sfera, e cioè con l'equatore. Lo sviluppo piano del cilindro restituisce una carta in cui me-

40 Per approfondimenti su lossodromie, eliche e spirali cfr. Baglioni 2007.

Fig. 32/ Isoipse o curve di livello.



ridiani e paralleli si mantengono fra loro ortogonali, a distanza costante per quanto riguarda i meridiani ad intervalli crescenti per quanto riguarda invece i paralleli. In questo tipo di proiezione le lossodromie sono rappresentate secondo linee rette. La possibilità di costruire traiettorie in linea retta rese privilegiati entrambi questi modelli cartografici (fig. 30).
Le lossodromie trovarono applicazione anche in architettura, per via della loro pendenza costante e con tutta probabilità per la possibilità di essere costruite sulle superfici quadriche, per proiezione di una spirale logaritmica. È verosimile ipotizzare che le lossodromie siano state impiegate nella progettazione del paramento decorativo di alcune cupole emisferiche, come quella del portico della cappella Pazzi nella chiesa di Santa Croce a Firenze, in cui i tondi invetriati sono inscritti in quadrilateri sferici la cui diagonale è appunto una lossodromia[41] (fig. 31).
Approssimano le lossodromie particolari sistemi costruttivi composti da mattoni disposti a spinapesce che ricorrono in alcune cupole rinascimentali come quella di Simon Mago realizzata da Antonio da Sangallo il Giovane nella Basilica di San Pietro in Roma che riproducono per forma l'andamento di una lossodromia con angolo di pendenza di 45 gradi[42].
Alcune famiglie di curve, proprie delle superfici, sono composte da punti che mantengono costan-

41 La proiezione stereografica consente di proiettare punti che giacciono sulla superficie della sfera da un suo polo sul piano equatoriale, o su un piano che gli è parallelo e che si immagina appartenere all'antipolo. Cfr. Pintore, Salvatore 2007.
42 Per approfondimenti sulle lossodromie dell'apparecchio murario della cupola detta dell'Ottagono di Simon Mago nella Basilica di San Pietro cfr. Baglioni 2007.

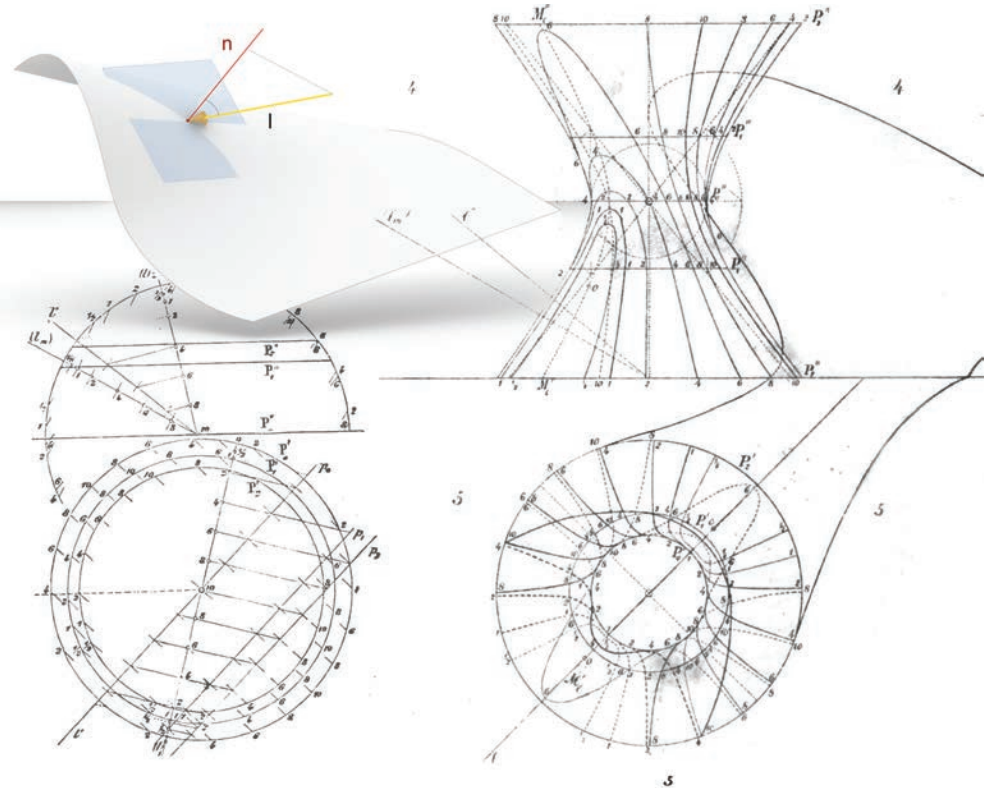


Fig. 33/ Legge del coseno per il calcolo del grado di intensità luminosa di una superficie in un punto; costruzione delle line isofote di un iperboloide. Tratto da Fiedler 1873.

te una certa caratteristica. A tali curve si attribuisce il suffisso *iso-* (dal greco ισος «uguale»), che indica appunto la condivisione della proprietà in questione. Fra le curve iso, le isoipse, le isofote e le isoparametriche hanno avuto un ruolo significativo nella rappresentazione della forma.

Le isoipse (comp. da iso- e dal greco iψος *altezza*) sono curve della superficie composte da punti che hanno tutti la medesima quota misurata su livello del mare. Hanno trovato e ancora oggi trovano largo impiego nella rappresentazione planimetrica dei terreni eseguita con il metodo grafico delle proiezioni quotate, in cui ad ogni curva è associata la relativa quota (fig. 32).

Come le isoipse, anche le isofote (comp. da iso- e dal greco ψω [...] *luce*) hanno trovato ampia appli-

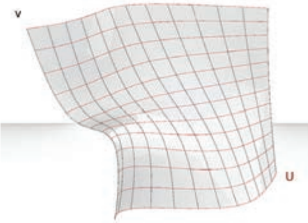


Fig. 34/ Isoparametriche di una superficie.

cazione nella rappresentazione, in particolare nella riproduzione grafica del chiaroscuro, poiché composte da punti che presentano lo stesso grado di intensità luminosa. Il grado di intensità luminosa di una superficie ne misura la luminosità in un punto in funzione dell'angolo formato da un raggio luminoso incidente, con la normale alla superficie nel punto di contatto. Il valore del coseno di tale angolo, misurato attraverso la legge del coseno enunciata da Lambert[43] nella seconda metà del Settecento, indica la componente normale che si ottiene dalla scomposizione vettoriale del raggio luminoso, la sola che contribuisce all'illuminamento della superficie. Valori del coseno pari a 1 indicano che il raggio luminoso è perpendicolare alla superficie, mentre valori pari a zero indicano invece raggi luminosi radenti e perciò tangenti alla superficie. Nel caso di superfici curve o a doppia curvatura il grado di intensità luminosa varia lungo la superficie per tutta la sua estensione. Punti che presentano lo stesso grado di intensità luminosa ammettono piani tangenti che hanno la stessa giacitura rispetto ai raggi luminosi incidenti. Questi punti, nel loro insieme, formano delle curve che si dicono isofote, e che presentano cioè in tutti i punti lo stesso grado di intensità luminosa (fig. 33). La resa chiaroscurale delle superfici veniva riprodotta per via grafica, scegliendo delle tinte corrispondenti a diversi valori del grado di intensità luminosa, ottenuti dividendo in intervalli eguali i valori del coseno nella loro variazione fra zero e uno.

Le linee isofote trovano ancora oggi applicazione in ambiente digitale, poiché implementate in alcuni strumenti diagnostici preposti al controllo della qualità delle superfici di cui dispongono in genere i software di rappresentazione matematica. Vengono in particolare utilizzate per il controllo della continuità fra superfici. Le isofote di superfici contigue presentano sempre un grado di continuità inferiore

43 Cfr. Lambert 1760.

a quello che sussiste fra le superfici a cui appartengono[44].
Le isoparametriche sono curve proprie della rappresentazione digitale, caratteristiche della matematica Nurbs, che descrive linee e superfici attraverso equazioni matematiche di tipo parametrico. In quest'ambito, una linea è un insieme monodimensionale di punti che può essere pensato come *P=P(t)*, dove *t* è un parametro. Al variare di *t* (generalmente da 0 a 1), è possibile percorrere tutti i punti della linea, da un suo estremo, per valori del parametro pari a 0, all'altro, per valori del parametro pari a 1. Estendendo questa definizione, possiamo considerare le superfici insiemi bidimensionali di punti, pensate come *P=P(u,v)*, i cui la posizione di ogni punto è determinata dalla variazione dei parametri *u* e *v*[45].
In ambiente Nurbs infatti ogni superficie è descritta attraverso delle *patch*, "pezze" bidimensionali di forma quadrilatera, composte da punti le cui coordinate sono riferibili ad un sistema ortogonale denominato *u,v*. Al variare dei parametri *u* e *v*, e cioè delle coordinate, varia la posizione di un punto sulla superficie. Si dicono isoparametriche di una superficie o isocurve le linee a parametro costante. Si tratta di due classi di linee che coprono la superficie senza lacune e che hanno valore costante di uno dei due parametri, *u* e *v* (fig. 34).

Considerazioni conclusive

Questa ricognizione breve e parziale ha voluto mostrare alcune fra le innumerevoli ricadute che le proprietà delle curve hanno avuto e ancora oggi hanno nella progettazione architettonica e di design. La rappresentazione digitale sembra al momento capace di costruire qualsiasi forma, indipendentemente dalle sue ragioni geometriche, e i recenti sviluppi della progettazione parametrica indirizzano verso soluzioni che sembrano

44 In alternativa alle isofote, alcuni software di rappresentazione matematica impiegano le linee di riflessione. Tali linee appartengono all'ambiente che ospita le superfici da analizzare, e si riflettono su queste, anch'esse con un grado di continuità inferiore a quello che sussiste fra le superfici date. Cfr. Ciarloni 2008.
45 Per approfondimenti cfr. Ciarloni 2009.

autodeterminate. Queste apparenti opportunità allontanano gli architetti dallo studio della teoria della forma con il rischio crescente di renderli fruitori passivi di algoritmi predefiniti. Eppure oggi, come nel passato, il controllo della forma non può sussistere senza le conoscenze teoriche che ne sono alla base. In quest'ottica l'ambiente virtuale tridimensionale, anche parametrico, deve essere inteso come una opportunità cognitiva per la geometria, che può avvalersi della costruzione rigorosa di forme sempre più complesse, inimmaginabili da rappresentare con i metodi grafici della rappresentazione. La costruzione digitale della forma e la sua parametrizzazione costituiscono così un volano per sperimentare per via sintetica, in continuità con la tradizione della geometria descrittiva, contenuti teorici innovativi.

English abstracts

First part

The curved lines in the the geometric thought evolution during the classical period

Leonardo Paris

The history of the geometric thought evolution derives only in small part from direct written sources. A lot of news has come down to us for successive transcriptions, often reworked, or for random discoveries of autograph texts whose existence was unknown. Many recent studies have shown that in the pre-Hellenistic period the knowledge of geometry was certainly greater than imagined until a few decades ago. Geometry was one of the main components of a multidisciplinary knowledge that also included arithmetic, music and astronomy, as well as grammar, rhetoric and dialectics.
For a long period, at least until the fifth century AD, there have been studies and discoveries that constitute, even today, the foundation of this scientific discipline and of mathematical knowledge in general.
In the spirit of research, summarized in this volume, here we want to retrace this wonderful journey studded with scientific discoveries with a specific focus on curved lines.
A parallel analysis is also proposed in the practical application of architecture (necessarily limited to a few but significant examples). If in fact, as mentioned, the written sources are few and often difficult to attribute, a significant help to the understanding of the geometric thought evolution can undoubtedly arrive analyzing the innumerable traces that architects and engineers of the time have left us in their formidable works.

Curved lines between geometry and analysis in the mathematical Renaissance
Laura De Carlo

A perfect theory of curved lines and their properties is defined only when, mainly in the Sixteenth century in France, the French reassess the glorious Greek legacy permitting entry into the world of analytical geometry and modern analysis, concentrating their studies in a limited temporal period justly termed a mathematical Renaissance.
In little more than a century, beginning, in fact, with the study of curved lines, new theories are developed that emanate from diverse motivations that deal with a vast area of applications in the most varied sectors from the mechanic to the ballistic, from geodetics to navigation, from astronomy to different technological problems; principally convinced that the study of the physical world seemed to need quantitative instruments, essentially those of geome¬try.
Thus, the method of coordinates, the infinitesimal calculation and application of this last to geometrical problems proved to be the fundamental instruments that permitted not only a great increase in the number of curves known up till then, but also to define important geometrical and mechanical properties of curves till then unknown, thus opening new areas of research.
During the next century, with an extension into differential geometry, the theory of curves can be considered delineated in its essential aspects and defined substantially in this way just as we use it today.
If geometrical construction was of an iconic type new methods provide an autonomous symbolic language, the opposition between analytical geometry and synthetic geometry which signals the birth of a new science that, while diverting the majority of mathematicians from pure geometry, is in fact characterized by the relationship between symbolic algorithmic methods and geometrical methods.

Geometry of curved lines for the genesis of shape
Marta Salvatore

Knowledge of the geometry of curves assumed and still today assumes a leading role in the design of shape. The arts and applied sciences use this theory for the construction of products that require a certain level of geometric accuracy. In general terms, we can affirm that the quality of the surfaces composing an architectural or designed shape depends on the quality of the lines to which these surfaces belong. Thus, the theory of lines, and therefore knowledge of their properties, becomes crucial for a correct design of shape, both through analogical as well as digital drawing.
In the history of the architecture and design project, some remarkable properties of lines and surfaces strongly conditioned their success.
Thus, particular classes of lines and surfaces affirmed themselves in the practice of design; in fact, some of their properties made them particularly suitable to be controlled through the drawing, in the design phase, and to be reproduced on site, in the construction phase.
This short essay aims to explain the relationships between these properties and the design of shape. The properties that directly influence the geometric control of designed surfaces are analyzed, illustrating, finally, the application of some notable classes of curves, selected as they all belong to recurrent surfaces in architecture and design.

Digital representation of the curved lines
Matteo Flavio Mancini

The essay concerns the mathematical representation of curved lines in digital applications dedicated to architecture and product design. Once the historical evolution that brought from the analogical drawing tools to the development of the digital ones has been presented, the theme of parametric representation of the curved lines is approached through the NURBS mathematics.
The theoretical principles and their implications in the practice of digital representation, the properties of the NURBS curves and the tools available to the designer to control these properties and the quality of the shapes are also presented. A particular attention is given to the differential properties of the curved lines – tangency, flexion and torsion – and their geometric meaning. Furthermore, a possible synthetic representation of the torsion value is proposed through the adoption of circumferences belonging to the normal plane of the curved line.
Through the concept of continuity, the analogies between curves and surfaces made possible by the NURBS mathematics are revealed and the design process which, starting from a set of curves, leads to the modelling of a design object that exemplifies the typical geometric-formals properties of this kind of modelling is illustrated.
The purpose of the contribution is to bring designers closer to the theoretical and practical concepts of NURBS modelling since mastering these concepts allows to design better and more controlled forms.

Second part

Cilindrical helicoid in the renessaince and baroque staircases
Leonardo Paris

The helicoid staircases are often used in the architecture since the ancient age. In the medieval period this type of stair is used into towers, fortifications or bell towers with a main functional value. Starting from renaissance the architects thought to give them also an high architectural value.
The first was Bramante in Vatican (1507), then Vignola in Caprarola (1559), Mascarino in the Quirinale palace (1585) and Borromini in the Barberni Palace (1633).
The architecture treatises had an important role about the diffusion of the helicoid staircases. In I Quattro libri Palladio describes several types, with circular and oval plant.
The comparison of this four work of art, also thanks to recent digital surveys of three of these stairs, allowed us to highlight the relationship between the geometric matrix of the projects and their built.
Each realization is an expression of own time in a long evolution of a same idea based on the helix application. In each realization there are different technical problem about the slope, the shape of the step and the way to develop the trabeation and, in general, the architectural order.

The space of the line. The tiburio of Sant'Andrea delle Fratte
Giovanna Spadafora

In this essay we examine the theme of the curved line in Francesco Borromini's drawings, highlighting how a sequence of lines manages to determine a complex geometry. We analyzed the drawing AzRom 108, plan of the tiburium of Sant'Andrea delle Fratte, in Rome, constructed between 1652 and 1665.
The analysis of the curves shows how the tiburium takes shape via a sequence of lines lying on overlapping horizontal planes, within a geometric construction conceived in space, but which governs them all onto a single plane. Borromini then traces a synoptic plan, thus creating three-dimensional reasoning within two dimensions.
The drawing, omitting the overlapping partial drawing referring to a lantern that had been envisaged but not realized, describes the plan elevation cutting through the four windows, evidenced with slanted hatching, also representing the projection of the cornice over the columns and the outer cornice with a continuous line. However, in this drawing the base with its continuous concave-convex profile on the four sides within the corner contraforts – of the type that forms the lower part of the San Carlino façade – is not shown.
The analysis of the drawn curves, therefore, is followed by a reasoning on those curves actually realized, derived from the three-dimensional model obtained with the 3D survey, and the verification of the relationship between the sinusoidal curve of the base and the ragged line of the dado stacked above the pylons of the crossing.
The essay concludes with considerations on the figurative continuity which, in Borromini's work, binds the constituent parts of the whole to the elements of detail. In fact, he attributes the same formal value to the line, a one-dimensional geometric entity by definition, whether it carves out the minute space in a sequence of moldings or models the interior or exterior of an architectural enclosure.

The technological generating lines
Maria Laura Rossi

The industrial revolution in Europe brought a profound innovation in the building field thanks to the development of new materials that allowed experimenting with new construction types and new calculation models, marking the end of masonry hegemony. The new structural elements, lighter and cheaper, are charged with formal as well as functional value. These years, at the turn of the nineteenth and twentieth centuries, are on the one hand a period of relative peace between the European powers - the so-called Belle Epoque *- on the other they are characterized by a general crisis of the artists who wonder how to respond to the era of technological progress in constant and rapid evolution. From the new possibilities in the artistic and architectural field granted by iron, cast iron and curved wood, and the need to overcome the classicism of the* Beaux Arts*, a movement called* Art Nouveau *develops, which from Belgium expands throughout Europe. In the new production system, including the use of traditional materials such as wood, the rules of productive and economic organization of the steel industry are imposed, starting mechanization processes across the board. With the production of Thonet furnishing elements, for the first time we witness the industrialization of crafts and the creation of a mass market able to identify with the values of a renewed bourgeoisie. The new style soon gains an unprecedented geographical spread thanks* *to the universal exhibitions but, above all, thanks to art magazines and furnishing catalogs, which opened the doors to the most varied sectors, from architecture and design to graphics and objects of common use, with the intent to raise workers' souls, crushed by the mechanization of the industrialized society.*

The rule of the generative curves in the nautic design
Michele Russo

In the Industrial Design field, the translation and interpretation of an idea in its realization may be represented by its shape research and analysis, which can be considered a complex mediation process between tradition and innovation, between significance and meaning, between design freedom and material constraint, all merged towards a synthesis project. In this iterative refining process towards the geometrical shape construction, curves represent the generative starting point for the construction of complex, liquid surfaces which tend to remove from geometric construction rules towards new formal solution and free-form shape. A significant role in this field is held by nautical design, *a complex discipline in which the geometric construction and representation activity assumes a key role in the graphic restitution process of complex spatial shapes, designed and developed according to curves networks, which define the main skeleton of the object. The following discussion intends to analyse the role of the curve in the Nautical Design; starting from the constructive and formal genesis of the boats, it deepens curve typologies and their geometry evolution in the Industrial Design, exploring the curve representation using the traditional Construction Plan method. At the end, starting from the dichotomy between new project and real object, the contribution intends to highlight and compare the use of project curves versus sections extracted from three-dimensional models obtained at the end of a Reverse Modeling process, trying to emphasize pro and cons of each single constructive passage of both methods. Besides, some case studies representative of a different evolution of the boat 3D models from a constructive and material point of view are presented and discussed, to support the discussion and anticipate the final conclusions.*

The conjugated lines
Leonardo Paris

The study of the gears is based on the conjugated geometries according to which two curves or two surfaces in mutual movement maintain in constant contact. The geometric theory of the gears until the end of the nineteenth century was one of many branches of the applications of descriptive geometry. The study is based on knowledge of the main properties of plane curves and humps and their derivatives. The specificity of the theme is that these geometries when have to relate with their conjugated, must meet the constraints that would otherwise not have. Through the analysis of some case this essay aims to highlight the role of descriptive geometry from theory to practise, applying methods and procedures of investigation often forgotten.
Some types of gears were known since the ancient age. Erone of Alessadria for example described an "odometro", a length counter device done with wheels, levers and pulleys. The "renaissance engineers" like Leonardo da Vinci designed several gears but without developing a real theory.
The first treaties, in which the geometric theory of the gears is developed, were pu-

blished at the end of '600th by Philippe de la Hire and then Charles Etienne Louis Camus. Treaties whole dedicated to this topic were Théorie géometrique des engraneges by Oliver in 1842 and, immediately after, La Teoria geometrica degli Ingranaggi by Codazza in 1854.
Nowaday the possibilities of 3d digital modeling and 3d print allow us to study this topic with a renovated enthusiasm making experiment on new solutions and applications. A gear is a rotating machine part that is comprised of a set of toothed wheels, with the purpose of transmitting power from one part of a machine to another.The shape of the tooth and of the nucleus is based on the conjugated geometries. In a classic gear, done from two toothed wheels, the line of the single tooth is based on the evolving of the circumference. This curved line is defined by a point P of a straight line that roll, without slipping, along a circumference. In a bevel gear the profile of the tooth is based on a spherical epicycloid, a curved line defined by a point of a circumference that roll around another no coplanar one. 3D parametric modelling allow us to create dynamic models through which it is possible verify in real time their correctness and effectiveness.

From curved lines to free surface and reverse in the digital model of the architecture
Matteo Flavio Mancini

This paper intends to present an experiment concerning the modelling of free-forms through NURBS geometries in the architectural field. In particular, it intends to present some applicative repercussions of the properties of NURBS curves and surfaces: the possibility of performing geometric operations, such as projection and section, in a rigorous manner and the ability of these geometries to be deformed without ever losing their prerogative of continuity.
The experimentation, conducted on the Congress Station shelter of the Nordpark Cable Railway in Innsbruk (2004-2007) designed by Zaha Hadid Architects, highlights the close connection between lines and surfaces in the NURBS modelling. The lines are in fact the backbone of the surfaces and from the latter it is always possible to extract new lines both for design purposes and for realization.

Curvilinear paths between architecture, theatre, cinema and design
Massimo Zammerini

In nature the curved line is immanent. The solar system, the plants, the animals, the human beings, all of us are kept alive by complex systems governed also by curvilinear elements. The straight line is a particular condition of the curved line. The curve would seem to refer to the idea of softness, to a form of "folding" that invests matter, to an idea of different continuity, of growth and of variety of forms, but it is also itself an expression of energy and strength, as demonstrated by the science of architecture and engineering and the history of art. The architecture history teaches us how each era has expressed an idea of the relationship between the weight and shape of buildings, but also of furniture and objects, up to the aerodynamic shapes designed to challenge weight constraints, where the curved line is sovereign. The research for an ideal liberation from weight and gravity, or its emphasis, has always interested artists, engineers, architects and designers, with different aims. The use of the curved line is observed in this essay in a context that acts on the construction, with modalities that welcome or reject

the Cartesian postulates based on the separation of the elements and where the forms produced by human artifice are something other than natural forms.
However, we are convinced that overcoming a clear separation between organic and rational allows us to study the architecture works as a synthesis product between answers to natural needs and abstract ideational processes. Furthermore, speaking of a curved line does not mean excluding the straight line and the two elements represented by plane and volume.
In such a broad and certainly elusive context, we observe the idea of a space defined by trajectories, also of a curvilinear type, in some fields inherent to architecture, such as theater that recalls the theme of visible scene changes, cinema with the innovation of moving camera shots and design with the involvement of ergonomics and bending techniques of natural and industrial materials.

Line, curve, cut, pattern.
The drawing in anti-ephemeral design of fashion
Massimiliano Ciammaichella

This essay focuses on the theories and the techniques of construction and representation of garments, starting from a historical research which aims at individuating specific operational modes that, across history, apparently never quit measuring the human body in order to define those geometrical rules that are able to control the free forms in motion of the subjects and of the garments that dress them.
Designers choose every time if it is the geometry of the human body, or that of the clothing, which dictates the design strategies. Thus, between the two-dimensional design of the paper pattern and the planar development of the surfaces of an outfit sculpted upon the body, the answers to the intersections can be found in the digital representation methods.

Bibliografia

Prima parte

AA.VV., 1999. Il Colosseo Studi e Ricerche. *Disegnare Idee Immagini*, 18/19.

Adam Jean-Pierre, 1988. *L'arte di costruire presso i Romani*. Milano: Longanesi & C.

Arnheim Rudolph, 1977. *La dinamica della forma architettonica.* Milano: Feltrinelli.

Baglioni Leonardo, 2007. Il contributo del modellatore informatico nello studio di lossodromie, eliche e spirali. In De Carlo Laura (a cura di). *Informatica e fondamenti scientifici della rappresentazione*. Roma: Gangemi, pp. 93-102.

Bianchi Luigi, 1894. *Lezioni di geometria differenziale*. Pisa: Enrico Spoerri.

Bianchi Bandinelli Ranuccio, 2005. *Roma: l'arte al centro del potere (dalle origini al II secolo d.C.)*. Milano: RCS Corriere della Sera, vol. 1.

Boyer Carl B., 1976. *Storia della matematica*. Milano: Mondadori, 1976. Traduzione di Carugo Adriano. Ed. orig. *A History of mathematics*.

Burali Forti Cesare, 1912. *Corso di geometria analitico-proiettiva per gli allievi della R. Accademia Militare*. Torino: G. B. Petrini di Giovanni Gallizio.

Ciarloni Roberto, 2008. La logica delle forme. In Carlevaris Laura, De Carlo Laura, Migliari Riccardo (a cura di). *Attualità della geometria descrittiva*. Roma: Gangemi, pp. 267-282.

Ciarloni Roberto, 2009. Teorie e tecniche della rappresentazione matematica. In Migliari Riccardo. *Geometria descrittiva*. *Tecniche ed applicazioni.* Novara: CittàStudi, pp. 5-59, vol. 2.

Cresci Luciano, 1998. *Le curve celebri.* Padova: Franco Muzio.

Cresci Luciano, 2005. *Le curve matematiche. Tra curiosità e divertimento.* Milano: Hoepli.

D'Ocagne Maurice, 1896. *Cours de géométrie descriptive et de géométrie infinitésimale.* Paris: Gauthier-Villars.

De Carlo Laura, 2009. Le linee curve. In Migliari Riccardo. *Geometria descrittiva. Tecniche ed applicazioni.* Novara: CittàStudi, pp.97-129, vol. 2.

De Rubertis Roberto, 1999. Un enigma avvincente: il tracciato planimetrico ellittico del Colosseo. *Disegnare Idee Immagini*, 18/19, pp. 99-106.

Docci Mario, 1999. La forma del Colosseo: dieci anni di ricerche. Il dialogo con i gromatici romani. *Disegnare Idee Immagini*, 18/19, pp. 23-32.

Dupin Charles, 1829. *Geometria e meccanica delle arti, dei mestieri, delle belle arti*. Firenze: Stamperia di Guglielmo Piatti.

Eulero Leonard, 1767. Recherches sur la courbure des surfaces. *Memoires de l’academie des sciences de Berlin,* 16, pp. 119-143.

Fallavollita Federico, Salvatore Marta, 2012a. Geometria e costruzione. La teoria delle linee di curvatura nella stereotomia della pietra. *Disegnarecon*, n. 9, pp. 125-134, vol. 5.

Fallavollita Federico, Salvatore Marta, 2012b. The ruled surfaces in stone architecture. In Gambardella Carmine (a cura di). *Le vie dei mercanti - Less More.* Napoli: La scuola di Pitagora, pp. 261-269.

Fiedler Wilhelm, 1873. *Trattato di geometria descrittiva.* Firenze: Le Monnier.

Freguglia Paolo, 1999. *La geometria fra tradizione e innovazione.* Torino: Bollati Boringhieri.

Frère Gabriel Marie (Edmond Brunhes), 1893. *Élément de Géométrie Descriptive*. Tours: Alfred Mame et fils; Paris: Charles Poussielgue. Riproduzione anastatica. F.G.-M. 1996. *Géométrie descriptive, tome I, Éléments.* Mayenne: Jacques Gabay.

Frère Gabriel Marie (Edmond Brunhes), 1920. *Exercices de Géométrie Descriptive.* Tours: Alfred Mame et fils; Paris: J. De Gigord. Riproduzione anastatica. F.G.-M. 1996. *Géométrie descriptive, tome II, Exercices.* Mayenne: Jacques Gabay.

Gay Fabrizio, 2016. Verso una morfologia degli artefatti: da Monge a Petitot, la geometria descrittiva dopo la geometria descrittiva. In Di Luggo Antonella (a cura di). *Territori e frontiere della rappresentazione.* Roma: Gangemi, pp. 59-66.

Giordano Andrea, 1999. *Cupole volte e altre superfici.* Torino: Utet.

Giusti Enrico, 2007. *Piccola storia del calcolo infnitesimale dall’antichità al Novecento.* Pisa: Istituti editoriali e poligraci internazionali.

Hachette Jean Nicolas Pierre, 1813. *Correspondance sul l’École Royale Polythecnique, Vol. II, n. 4, 1812.* Paris: Chez J. Klostermann, Libraire de l’Ecole Impériale Polytechnique.

Hilbert David, Cohn-Vossen Stefan, 1932. *Geometria intuitiva.* Torino: Bollati Boringhieri.

Inglese Carlo, 2017. Dalla pratica alla trattazione teorica: le incisioni delle volute ioniche. *Disegnare Idee Immagini*, 55, pp. 42-51.

Kline Morris, 1991. *Storia del pensiero matematico, Vol. I, Dall’antichità al Settecento.* Torino: Einaudi. Traduzione di Conte Alberto (a cura di). Ed. orig. *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times.* Oxford: University press, 1972.

Lambert Johannes Heinrich, 1760. *Photometria, sive mensura et gradibus luminis, coloribus et umbrae.* Augustae vindelicorum: Sumptibus viduae Eberhardi Klett, Typis Christophori Petri Detleffsen.

Leroy Charles François Antoine, 1838. *Trattato di geometria descrittiva. Prima versione dal francese con note di Salvatore D’Ayala e Paolo Tucci*. Napoli: Reale tipografia della guerra.

Leroy Charles François Antoine, 1862. *Traité de stéréotomie.* Paris: Mallet-Bachelier.

Loria Gino, 1912. *Poliedri, curve e superficie.* Milano: Hoepli.

Loria Gino, 1914. *Le scienze esatte nell'antica Grecia, Libro I -[II]*. Milano: U. Hoepli.

Loria Gino, 1925a. *Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti. Curve algebriche.* Bologna: Zanichelli, vol. 1.

Loria Gino, 1925b. *Curve sghembe speciali algebriche e trascendenti. Curve sferiche - curve definite da una reazione tra flessione e torsione - curve particolari situate sopra superficie assegnate.* Bologna: Zanichelli, vol. 2.

Loria Gino, 1930a. *Curve piane, speciali, algebriche e trascendenti. Curve algebriche*. Milano: Hoepli, vol. 1.

Loria Gino, 1930b. *Curve piane, speciali, algebriche e trascendenti. Curve trascendenti - Curve dedotte da altre.* Milano: Hoepli, vol. 2.

Loria Gino, 1931. *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche.* Padova: Cedam.

Loria Gino, 1935. *Metodi matematici.* Milano: Hoepli.

Losito Maria, 1993. La ricostruzione della voluta ionica vitruviana nei trattati del rinascimento. *Mélanges de l'école française de Rome*, 105-1, pp. 133-175.

Martines Gianciacomo, 1983. La struttura della Colonna Traiana: un'esercitazione di meccanica alessandrina. *Prospettiva*, 32, pp. 60-71.

Migliari Riccardo, 1999. Principi teorici e prime acquisizioni nel rilievo del Colosseo. *Disegnare Idee Immagini*, 18/19, pp. 33-50.

Migliari Riccardo, 2009a. *Geometria Descrittiva. Metodi e costruzioni.* Novara: CittàStudi, vol. 1.

Migliari Riccardo, 2009b. *Geometria Descrittiva. Tecniche ed applicazioni.* Novara: CittàStudi, vol. 2.

Monge Gaspard, 1796. Analyse appliquée à la géométrie. *Journal de l'École polytechnique, chaier II.*

Monge Gaspard, 1798. *Géométrie descriptive.* Paris: Baudouin.

Palladio Andrea, 1570. *I quattro libri dell'architettura.* Venezia, appresso Dominico de' Franceschi. Ristampa. Milano: Hoepli, 1945.

Paris Leonardo, 2008. Conseguenze informatiche nella rappresentazione. Disegno e modello del capitello ionico. *Disegnare Idee Immagini*, 36, pp. 82-92.

Paris Leonardo, 2012. Teoria geometrica degli ingranaggi. In Casale Andrea (a cura di). *Geometria descrittiva e rappresentazione digitale. Memoria e innovazione.* Roma: Kappa, pp. 63-84, vol. 2.

Peano Giuseppe, 1887. *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale.* Torino: Bocca.

Pintore Angela, Salvatore Marta, 2007. Shape from points. Morfogenesi e modellazione matematica. In De Carlo Laura (a cura di). *Informatica e fondamenti scientifici della rappresentazione.* Roma: Gangemi, pp. 161-174.

Rogers David F., 2000. *An Introduction to NURBS: With Historical Perspective.* Burlington: Morgan Kaufmann - Elsevier.

Russo Lucio, 1996. *La rivoluzione dimentica.* Milano: Feltrinelli.

Sala Nicoletta, Sala Massimo, 2013. *Geometrie del design. Forme e materiali per il progetto.* Milano: FrancoAngeli.

Salvatore Marta, 2009a. Intersezioni piane tra superfici quadriche. In Migliari Riccardo. *Geometria descrittiva. Tecniche ed applicazioni.* Novara: CittàStudi, pp. 280-295, vol. 2.

Salvatore Marta, 2009b. La stereotomia. In Migliari Riccardo. *Geometria descrittiva. Tecniche ed applicazioni.* Novara: CittàStudi, pp. 485-561, vol.2.

Salvatore Marta, 2011. Modelli litici di scale elicoidali. In Gambardella Carmine (a cura di). *Le vie dei Mercanti, S.A.V.E. Heritage*. Napoli: La scuola di Pitagora, pp. 1-12.
Salvatore Marta, 2012. *La stereotomia scientifica in Amedée François Frézier. Prodromi della geometria descrittiva nella scienza del taglio delle pietre.* Firenze: University Press.
Sereni Carlo, 1826. *Trattato di geometria descrittiva.* Roma: Stamperia di Filippo e Nicola De Romanis.
Sereni Carlo, 1845. *Geometria descrittiva.* Roma: Tipografia Salviucci.
Townsend Alastair, 2014. On the Spline: A Brief History of the Computational Curve. *International Journal of Interior Architecture + Spatial Design: Applied Geometries*, pp. 48-59, vol. 3.
Valenti Graziano Mario, 2008. *De.form.are – De.form.ing.* Roma: Rdesignpress.
Villa Mario, 1960. Sulla definizione della torsione di una curva sghemba. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, Serie 3, 1, pp. 47-54, vol. 15.
Vitruvio Pollione Marco, *De Architectur*a, 27 a.C. Interpretazione di Florian Giovanni. *Dell'architettura*. Pisa: Giardini.

Seconda parte

Angelini Beatrice, 1999. Metodologia per lo studio del rilievo e della rappresentazione delle superfici rototraslate. La coclide di Bramante al Belvedere Vaticano. In AA.VV. *Geometria e Architettura, Strumenti del Dottorato di Ricerca in Rilievo e Rappresentazione dell'Architettura e dell'Ambiente.* Roma: Gangemi, pp. 63-85, vol. 1.
Argan Giulio Carlo (a cura di), 1952. *Borromini.* Milano: Mondadori.
Arruga Lorenzo, Cella Franca (a cura di), 2006. *Pier Luigi Pizzi Inventore di teatro.* Torino: Umberto Allemandi & C.
Barde F.A., 1834. *Traité Encyclopédique de l'Art du Tailleur.* Paris: Hippolyte Tilliard, 1834.
Bellini Federico, 2004. *Le cupole di Borromini.* Milano: Electa.
Bézier Pierre Etienne, 1971. Example of an Existing System in the Motor Industry: The Unisurf System. *Proceedings of the Royal Society of London*. 1545, vol. 321, pp. 207-218.
Blunt Anthony, 1983. *Vita e opere di Borromini.* Roma: Laterza.
Bösel Richard, Frommel Christoph Luitpold (a cura di), 2000. *Borromini e l'universo barocco.* Milano: Electa.
Boullay Benoit, 1671. *Le Tailleur Sincère, contenant ce qu'il faut observer pour bien tracer, couper & assembler toutes les principales pieces qui se font dans la profession de Taulleur.* Paris: Antoine de Rafflé.
Brandi Cesare, 1974. *Struttura e architettura.* Torino: Einaudi, 1974. Ed. orig. Torino: Einaudi.
Brevi Fausto, 2004. *Il design delle superfici. I modelli digitali per il disegno industriale.* Milano: PoliDesign.
Bruschi Arnaldo, 1978. *Borromini, manierismo spaziale oltre il barocco.* Bari: Dedalo libri.
Cambridge Nicolas Adam, 2013. Homo (wo)mensura: unpicking the flat pattern-cutting regimes of sartorial culture. *International Journal of Fashion Design. Technology and Education*, 2, pp. 121-129, vol. 6.

Canciani Marco, 2016. Drawing, Geometry and Construction: The Dome of San Carlino Alle Quattro Fontane (1634-1675) by Francesco Borromini. In Amoruso Giuseppe (a cura di). *Visual Computing and Emerging Geometrical Design Tools.* Hershey PA: IGI Global, pp. 608-641, vol. 2.

Caraceni Domenico, 1933. *Orientamenti nuovi nella tecnica e nell'arte del sarto.* Roma: D. Squarci e Figli.

Carlevaris Laura, De Carlo Laura, Migliari Riccardo (a cura di), 2012. *Attualità della Geometria descrittiva.* Roma: Gangemi.

Carlucci Simona, Soresi Giovanni, Ursini Ursic Giorgio (a cura di), 1984. *Josef Svoboda*. Milano: Studio i.

Casson Lionel, 2004. *Navi e marinai dell'antichità.* Milano: Mursia Editore.

Ceccarelli Marco, Cigola Michela, 2009. Descriptive Geometry and the Theory of Mechanisms in XIX century Italian Engineering: similarities and interrelationships. *Disegnare Idee Immagini,* 39, pp. 12-25.

Ceccato Cristiano, Lars Hesselgren, Mark Pauly, Helmutt Pottmann, Johannes Wallner, 2010. *Advances in Architectural Geometry 2010.* Wien: Springer-Verlag.

Cho Youngsook, Park Hyejun, Takatera Masayuki, Kamijo Masayoshi, Hosoya Satoshi, Shimizu Yoshio, 2003. Pattern Remaking System of Dress Shirt Using 3D Shape Measurement. *Journal of the Asian Design International Conference*, 1, pp. 1-8.

Ciammaichella Massimiliano, 2007. *La pelle dell'architettura contemporanea.* Roma: Aracne.

Ciammaichella Massimiliano, 2011. *Disegno digitale per la moda. Dal figurino all'avatar.* Roma: Aracne.

Ciammaichella Massimiliano, 2013. Processi di sviluppo delle superfici. Architettura e moda a confronto. In Casale Andrea (a cura di). *Geometria Descrittiva e Rappresentazione Digitale. Memoria e innovazione.* Roma: Kappa, pp. 187-195, vol. 2.

Ciarloni Roberto, 2009. Le teorie e le tecniche della rappresentazione matematica. In Migliari Riccardo. *Geometria Descrittiva. Tecniche ed applicazioni.* Novara: CittàStudi, pp. 5-59, vol.2.

Cigola Michela, Ceccarelli Marco, 2016. Machine Designs and Drawings in Renaissance Editions of de Architectura by Marcus Vitruvius Pollio. In Sorge Francesco, Genghi Giuseppe (a cura di). *Essays on the History of Mechanical Engineering. History of Mechanism and Machine Science.* Cham: Springer, pp. 1-5, vol. 31.

Codazza Giovanni, 1854. *Teoria geometrica degli ingranaggi.* Milano: Giuseppe Bernardoni.

Codeluppi Vanni, 2003. *Che cos'è la moda.* Roma: Carocci.

Connors Joseph (a cura di), 1998. *Francesco Borromini. Opus architectonicum.* Milano: Il Polifilo.

Curtis William J., 2016. *L'architettura moderna dal 1900.* London: Phaidon.

D'amato Gabriella, 2001. *L'arte di arredare. La storia di un millennio attraverso gusti, ambienti, atmosfere.* Milano: Mondadori.

De Alcega Juan, 1580. *Libro de Geometría, Pratica, Y Traça, el cual trata de lo tocante al officio de sastre, para saber pedir el paño, seda, o otra tela que sera menester para mucho genero de vestidos, ansi de hombres, como de mujeres, y para saber como se an de cortar los tales vestidos, con otros secretos; y curiosidades tocantes a este arte.…* Madrid: Guillermo Drouy.

De Boor Carl R., 1978. *A practical guide to splines.* New York: Springer-Verlag.

De Carlo Laura, Baglioni Leonardo, 2009. Le linee curve. In Migliari Riccardo. *Geometria descrittiva.* Novara: CittàStudi, pp.97-143, vol. 2.
De Casteljau Paul, 1959. *Courbes à pôles.* INPI.
De Fusco Renato, 2003. *Storia del design.* Bari: Laterza.
De Gersault Francoise Alexandre Pierre, 1769. *Art du Tailleur, contenant Le Tailleur d’habits d’hommes; les Culottes de Peau; le Tailleur de Corps de Femmes & Enfants: la Couturiere; & la Marchande de Modes.* Paris: M. de Gersault.
De La Rocha Burguen Francisco, 1618. *Geometria, y traça perteneciente al oficio de sastres. Donde se contiene el modo y orden de cortar todo genero de vestidos Españoles, y algunos Franceses, y Turcos.*… Valencia: Pedro Patricio Mey.
De Luca Mauro, Sorella Pietra Fratello Ferro, 2017. *Un percorso nella cultura tecnologica del progetto.* Firenze: AltraLinea.
De Vizè Donneau, 1982. *Mercure Galant.1672-1674.* Genève-Paris: Slatkine.
Debo Kaat (a cura di), 2003. *Patronen/Patterns, MoMu Mode Museum, catalogo della mostra, 24 aprile-10 agosto 2003.* Ghent: Ludion.
Deleuze Gilles, 2004. *La piega, Leibniz e il Barocco.* Milano: Einaudi.
Ferrara Marinella, 2004. *Materiali e innovazioni nel design: meccanismi di innovazione.* Roma: Gangemi.
Focillon Henri, 1987. *Vita delle forme.* Torino: Einaudi. Traduzione di Bettini Sergio.
Frampton Kennet, 2008. *Storia dell’architettura moderna.* Bologna: Zanichelli.
Gaiani Marco (a cura di), 2006. *La rappresentazione riconfigurata. Un viaggio lungo il processo di produzione del progetto di disegno industriale*. Milano: PoliDesign.
Gaiani Marco, Guidi Gabriele, Micoli Laura, Musio Sale Massimo, Russo Michele, 2006. Reverse modeling per la nautica: rilievo dello scafo di un gommone con sistemi di scansione 3D a basso costo. *Disegnare Idee Immagini*, 31, 82-93.
Gill Alison, 1998. Fashion: The Making of Unfinished, Decomposing and Re-Assembled Clothes. *Fashion Theory*, 1, pp. 25-50, vol. 2.
Guidi Gabriele, Micoli Laura Loredana, Russo Michele, 2005. Boat’s hull modeling with low cost triangulation scanners. *Proceedings of the Videometrics VIII, part of the IS&T/SPIE Symposium Electronic Imaging,* pp. 28-39, Vol. 5665.
Guidi Gabriele, Russo Michele, Beraldin Jean-Angelo, 2010. *Acquisizione e modellazione poligonale.* Milano: McGraw Hill.
Hempel Eberhard, 1924. *Francesco Borromini.* Wien: A. Schroll & Co., 1924. Edizione italiana. Milano: Società editrice d’arte illustrata.
Hodge Brooke, 2007. *Skin + Bones. Parallel Practices in Fashion and Architecture.* London: Thames & Hudson.
Laplaiche Virginie, 2002. *Geneviève Sevin-Doering: costumes.* Paris: Ecole du Louvre.
Leroy Charles Francoise Antoine, 1872. *Traité de géométrie descriptive; suivi de la méthode des plans cotes et de la théorie des engrenages cylindriques et coniques: avec une collection d’epures composee de 69 planches.* Parigi: Bachelier.
Liming Roy A., 1944. *Practical Analytic Geometry with Applications to Aircraft.* USA: The Macmillan Company.
Lindqvist Rickard, 2013. On The Logic of Pattern Cutting. Foundational Cuts and Approximations of the Body. *Artistic Research*, 3.

Liu Yong-Jin, Zhang Dong-Liang, Yuen Matthew, 2010. A survey on CAD methods in 3D garment design. *Computer in Industry*, 61, pp. 576-593.

Loria Gino, 1921. *Storia della Geometria Descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri.* Milano: Hoepli.

Lupano Mario, Vaccari Alessandra (a cura di), 2009. *Una giornata moderna. Moda e stili nell'Italia fascista.* Bologna: Damiani.

Marzari Mario (a cura di), 1998. *Navi di legno. Evoluzioni tecnica e sviluppo della cantieristica nel Mediterraneo dal XVI secolo ad oggi.* Trieste: LINT.

Masini Lara Vinca, 2009. *Liberty. Art Nouveau.* Milano: Giunti.

Massobrio Giovanna, Portoghesi Paolo, 1976. *La seggiola di Vienna: storia dei mobili in legno curvato*. Torino: Martano.

Massobrio Giovanna, Portoghesi Paolo, 1992. *Casa Thonet. Storia dei mobili in legno curvato.* Bari: Laterza.

Mello Bruno, 1987. *Trattato di scenotecnica.* Novara: Gorlich.

Migliari Riccardo, 2009a. *Geometria Descrittiva. Metodi e costruzioni.* Novara: CittàStudi, vol. 1.

Migliari Riccardo, 2009b. *Geometria Descrittiva. Tecniche ed applicazioni.* Novara: CittàStudi, vol. 2.

Miyake Issey, Kitamura Midori, 2012. *Pleats Please.* Koln: Taschen.

Morini Enrica, 2006. *Storia della moda. XVIII-XX secolo.* Milano: Skira.

Musio Sale Massimo (a cura di), 2009. *Yacht Design: dal concept alla rappresentazione.* Milano: Tecniche Nuove.

Nakamichi Tomoko, 2012. *Pattern Magic, 3 voll*. London: Laurence King.

Oestergard Derek E., 1987. *Bentwood and metal furniture: 1850-1946.* Washington: University of Washinghton Press.

Olivier Théodore, 1844. *Théorie géométrique des engrenages.* Paris: Bachelier.

Paris Ivan, 2006. *Oggetti cuciti. L'abbigliamento pronto in Italia dal primo dopoguerra agli anni Settanta.* Milano: FrancoAngeli.

Paris Leonardo, 2012a. Geometrie coniugate. *Disegnarecon*, 9, pp. 235-244, vol. 5.

Paris Leonardo, 2012b. Teoria geometrica degli ingranaggi. In Casale Andrea (a cura di). *Geometria descrittiva e rappresentazione digitale. Memoria e innovazione.* Roma: Kappa, pp. 63-84, vol. 2.

Paris Leonardo, 2015. Shape and Geometry in the Integrated Digital Survey. In Brusaporci Steafano (a cura di). *Handbook of Research on Emerging Digital Tools for Architectural Surveying, Modeling, and Representation.* London: ICI Global, pp. 214-238.

Paris Leonardo, 2016. La scala elicoidale a Caprarola di Jacopo Barozzi da Vignola. Innovazione formale tra teoria e prassi. In Bini Marco, Berocci Stefano (a cura di). *Le ragioni del Disegno.* Roma: Gangemi, pp. 523-530.

Paris Leonardo, Ricci Maurizio, 2014. Osservazioni su un disegno prospettico attribuito a Ottaviano Mascarino. *Disegnare Idee Immagini*, 48, pp. 22-33.

Paris Leonardo, Ricci Maurizio, Roca De Amicis Augusto, 2016. *Con più difficoltà. La scala ovale di Ottaviano Mascarino nel palazzo del Quirinale.* Roma: Campisano editore.

Paris Leonardo, Valenti Graziano Mario, 2015. La scala elicoidale del Borromini a Palazzo Barberini: rilievo scan laser modellazione parametrica. *Disegnarecon*, 15, pp. 11.1-11.11., vol. 8.

Piegl Les., Tiller Wayne, 1995. *The NURBS Book.* Switzerland AG: Springer-Verlag.
Portoghesi Paolo, 1964. Thonet e la produzione di serie. *La botte e il violino*, 1.
Portoghesi Paolo, 1984. *Francesco Borromini.* Milano: Electa.
Portoghesi Paolo, 2014. La biblioteca di Francesco Borromini. In Cazzato Vincenzo, Roberto Sebastiano, Bevilacqua Mario (a cura di). *La Festa delle Arti*. Roma: Gangemi, pp. 358-365.
Portoghesi Paolo, 2015. Concordia Discors: L'architettura barocca a Roma. In Fagiolo Marcello (a cura di). *Roma Barocca. I protagonisti, gli spazi urbani, i grandi temi.* Roma: De Luca Editori d'Arte, pp. 25-59.
Pottmann Helmut, Asperl Andreas, Hofer Michael, Kilian Axel, 2007. *Architectural Geometry*. Exton: Bentley Institute Press.
Pottmann Helmut, Schiftner Alexander, Bo Pengbo, Schmiedhofer Heinz, Wang Wenping, Baldassini Niccolo, Wallner Johannes, 2008a. Freeform surfaces from single curved panels. *ACM Transictions on Graphics - Proceedings of ACM SIGGRAPH*, 3, article n. 76, vol. 27.
Pottmann Helmut, Schiftner Alexander, Wallner Johannes, 2008b. Geometry of Architectural Freeform Structures. *ACM Symposium on Solid and Physical Modeling*, 209, pp. 15-28.
Prokopios Kantas, 2015. *Teoria geometrica degli ingranaggi. Tesi di dottorato XXVIII ciclo in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo*. Roma.
Quilici Vieri, 1991. *Il Costruttivismo.* Bari: Laterza.
Raspe Martin, 2000. Borromini e la cultura antiquaria. In Bösel Richard, Frommel Christoph Luitpold (a cura di). *Borromini e l'universo barocco.* Milano: Electa, pp.83-93, vol. 1.
Remondino Fabio, El-Hakim S.F., 2006. Image-Based 3D Modeling: A review. *The Photogrammetric Record Journal*, 115, pp. 269-291, vol. 21.
Ricci Maurizio (a cura di), 2016. *Mascariniana. Studi e ricerche sulla vita e le opere di Ottaviano Mascarino.* Roma: Campisano.
Rogers David F., 2000. *An Introduction to NURBS: With Historical Perspective.* Burlington: Morgan Kaufmann - Elsevier.
Sala Nicoletta, Sala Massimo, 2013. *Geometrie del design. Forme e materiali per il progetto.* Milano: FrancoAngeli.
Sato Shingo, 2016. *Transformational Reconstruction, 3 voll.* Saint Helena: Antiquity Press.
Schumacher Patrik, 2013. Parametric Semiology: the design of information-rich environments. In Eiroa Pablo Lorenzo, Sprecher Aaron (a cura di). *Architecture In Formation. On the nature of information in digital architecture.* Abingdon: Routledge, pp. 53-59.
Sederberg Thomas W., 2012. *Computer aided geometric design.* Provo: BYU.
Sederberg Thomas W., Zheng Jianmin, Bakenov Almaz, Nasri Ahmad, 2003. T-splines and T-NURCCS. *ACM Transactions on Graphics*, 22 (3), pp. 477-484.
Sedlmayr Hans, 1996. *L'architettura di Borromini.* Milano: Electa.
Sembach Klaus Jorgen, 2016. *Art Nouveau.* Koln: Taschen.
Serafini Giuliano, 2003. *Le arti decorative alle origini del moderno.* Milano: Giunti.
Settimi Bruno, 1970. *Enciclopedia. La Moda maschile per il sarto, il modellista industriale ed il tecnico della confezione in serie, XX ed.* Milano: La Moda Maschile.
Spadafora Giovanna, 2015. Nelle pieghe del dettaglio. Riflessioni sulla forma nell'opera di Francesco Borromini. *L'architettura delle città - The Journal of the Scientific Society Ludovico Quaroni,* 7, pp. 11-24, vol. 4.
Spadafora Giovanna, 2016. Geometry and drama in Borromini's architectural details. Moldings

in Palazzo Falconieri. In Amoruso Giuseppe (a cura di). *Visual Computing and Emerging Geometrical Design Tools.* Hershey PA: IGI Global, pp. 666-693, vol. 2.

Spanabel Emery Joy, 2015. *A History of the paper pattern industry. The home dressmaking fashion revolution.* London-New York: Bloomsbury.

Strada Nanni, 2013. *Lezioni. Moda-Design e Cultura del Progetto.* Milano: Lupetti.

Svoboda Josef, 1997. *I segreti dello Spazio Teatrale.* Milano: Ubulibri.

Tessari Domenico, 1902. *La costruzione degli ingranaggi: ad uso delle scuole degli ingegneri e dei meccanici.* Torino: Fratelli Bocca.

Townsend Alastair, 2014. On the Spline: A Brief History of the Computational Curve. *International Journal of Interior Architecture + Spatial Design: Applied Geometries*, pp. 48-59, vol. 3.

Ursini Ursic Giorgio (a cura di), 2001. *Ezio Frigerio.* S.l.!.

Valenti Graziano Mario, 2008. *De.form.are – De.form.ing.* Roma: Rdesignpress.

Villani Marcello, 2008. *La più nobil parte. L'architettura delle cupole a Roma 1580-1670.* Roma: Gangemi.

Volino Pascal, Magnenat-Thalmann Nadia, 2000. *Virtual Clothing. Theory and Practice.* Berlin: Springer.

Watkin David, 2010. *Storia dell'architettura occidentale.* Bologna: Zanichelli.

Zammerini Massimo, 2012. *Cambio di scena. La scenografia teatrale tra realismo e astrazione.* Roma: Kappa.

Zammerini Massimo, 2017a. Architettura e scenografia nella Roma del Settecento. In Alfonsetti Beatrice (a cura di). *Settecento romano. Reti del classicismo arcadico.* Roma: Viella, pp. 221-232.

Zammerini Massimo, 2017b. Luce e cromatura. L'introduzione dell'acciaio cromato nell'architettura e nel design del Modernismo. In Veronica Marchiafava, Francesca Valan (a cura di). *Colore e Colorimetria. Contributi Multidisciplinari, vol. XIII A.* Milano: Associazione Italiana Colore, pp. 158-166.

Zanchettin Vitale, 1997. Il tiburio di Sant'Andrea alle Fratte: propositi e condizionamenti nel testo borrominiano. *Annali di Architettura*, 9, pp. 112-135.

Zanchettin Vitale, 2000. Il disegno Albertina, AZ.Rom 106 per Sant'Andrea delle Fratte: modello antico e problemi contingenti nella progettazione del tiburio. In Frommel Christoph Luitpold, Sladek Elisabeth (a cura di). *Francesco Borromini, Atti del convegno internazionale, 13-15 gennaio 2000.* Milano: Electa, pp. 166-170.

Gli autori

Massimiliano Ciammaichella
Architetto, professore associato in Disegno, è stato direttore del corso di laurea magistrale in Scienze e Tecniche del Teatro presso l'Università Iuav di Venezia (2016/2018), dove tiene i corsi di *Disegno, animazione e scena digitale* e *Laboratorio di Disegno e modellistica*.

Laura De Carlo
Architetto, già professore ordinario di Disegno della Sapienza Università di Roma. Ha rivolto i suoi prevalenti interessi ai fondamenti scientifici e alla storia della rappresentazione nonché alle nuove strumentazioni per l'analisi e la comunicazione della forma in architettura.

Matteo Flavio Mancini
Architetto, PhD in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo presso la Sapienza Università di Roma, si occupa di geometria descrittiva e modellazione digitale. Dal 2015 svolge attività didattica e di ricerca presso il Dipartimento di Architettura dell'Università degli Studi Roma Tre.

Leonardo Paris
Architetto, professore associato in Disegno della Sapienza di Roma, insegna *Geometria Descrittiva* e *Rilievo* ad Ingegneria e ad Architettura. La sua attività di ricerca è incentrata sullo studio della forma e della geometria nell'architettura, nell'ingegneria e nel design. Si occupa da anni di rilievo digitale e modellazione.

Maria Laura Rossi
Ingegnere edile-architetto, PhD in Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura, docente a contratto della Sapienza Università di Roma, sede di Rieti, facoltà di Ingegneria. Svolge attività di ricerca nell'ambito del rilievo digitale integrato e della modellazione digitale parametrica HBIM.

Michele Russo
Architetto, PhD, ricercatore senior in Disegno presso il Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura della Sapienza Università di Roma, da quindici anni si occupa di rilievo e modellazione tridimensionale nell'ambito dei Beni Culturali e del Design.

Marta Salvatore
Architetto, PhD, ricercatore presso il Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura della Sapienza Università di Roma. Indirizza la propria attività di ricerca alla geometria descrittiva, al suo sviluppo storico e alle sue più recenti applicazioni attraverso i metodi digitali della rappresentazione.

Giovanna Spadafora
Architetto, professore associato in Disegno della Facoltà di Architettura dell'Università Roma Tre, dove insegna *Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva e Rilievo*. Si occupa da molti anni di rilevamento e di rappresentazione architettonica e archeologica.

Massimo Zammerini
Architetto, professore associato in Composizione Architettonica alla Sapienza Università di Roma, insegna *Laboratorio di Progettazione III* e *Scenografia*. Dirige il Master in *Scenografia Teatrale e Televisiva*, svolge attività di sperimentazione progettuale nel campo dell'architettura e dell'interior design.

Forme del disegno
diretta da E. Ippoliti, M. Rossi, E. Dotto

Ultimi volumi pubblicati:

ANDREA CASALE, *Forme della percezione*. Dal pensiero all'immagine (disponibile anche in e-book).

 ISBN 9788891794000

Il volume raccoglie studi che indagano sul ruolo delle linee quale matrice formale dell'architettura e del design. Considerando la geometria al centro sia del processo creativo della progettazione che della concretizzazione della forma nella costruzione vera e propria, lo studio della geometria solida delinea un settore di ricerca attualmente emergente al confine tra geometria applicata e architettura, specie in un momento in cui l'analisi e la produzione si manifestano attraverso forme sempre più complesse. La geometria costruttiva contemporanea trova nella *architectural geometry* un grande potenziale che dimostra come le conoscenze geometriche possano essere alla base di un uso creativo del digitale.
Le linee curve sono le figure geometriche che più frequentemente si incontrano nella teoria e nella pratica e lo studio delle teorie ad esse associate risulta indispensabile dal momento che la soluzione di ogni problema di costruzione della forma ha come momento iniziatico il tracciamento di una o più linee e la ricerca degli elementi ad esse comuni.
Lo studio delle proprietà e della delineazione di queste figure geometriche risulta fondamentale in tutto lo sviluppo storico della geometria a partire dall'antichità fino alle più recenti elaborazioni digitali come la costruzione di modelli tridimensionali virtuali di rappresentazione che permettono di rivisitare le teorie classiche nella loro evoluzione storica esplicitando, attraverso idonee visualizzazioni, moltissime proprietà geometriche molto spesso relegate nell'alveo dell'analisi matematica e delle sue espressioni più astratte.
Nella prima parte del volume si è voluto delineare un quadro generale sulle origini delle teorie matematiche alla base della conoscenza delle proprietà di questi enti geometrici e sulla loro ricaduta nella progettazione della forma, sia in chiave storica che analizzando i più recenti strumenti digitali oggi a disposizione. La seconda parte raccoglie alcuni saggi attraverso i quali emerge l'ampio spettro di possibili applicazioni sull'uso della linea curva nel processo progettuale: dall'architettura al design; dalla nautica al mondo della moda; dalle teorie geometriche degli ingranaggi alle freeform dell'architettura contemporanea.

Laura De Carlo, già professore ordinario di Disegno della Sapienza Università di Roma, dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura, insegna Geometria descrittiva ad Architettura ed è autore di numerose pubblicazioni e articoli su riviste specializzate incentrate sui fondamenti scientifici e sulla storia della rappresentazione nonché sulle nuove strumentazioni per l'analisi e la comunicazione della forma in architettura.

Leonardo Paris, professore di Disegno della Sapienza Università di Roma, dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura, insegna ad Architettura e Ingegneria Civile e Industriale ed è autore di numerosi saggi pubblicati in volumi e riviste di settore. Si occupa di geometria descrittiva e modellazione 3D. È responsabile scientifico di numerosi rilievi eseguiti con innovative tecniche di acquisizione digitale.

FrancoAngeli
La passione per le conoscenze